MODERNA SUPERAÇÃO!

MATEMÁTICA

MANUAL DO PROFESSOR

VOLUME

I

ENSINO MÉDIO
1º ANO

Organizadora:
Editora Moderna
Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna.

Editor responsável:
André Luiz Steigenberger

Área de conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias

Componente curricular:
Matemática

MODERNA

MODERNA SUPERAÇÃO!
MATEMÁTICA

VOLUME I
ENSINO MÉDIO
1º ANO

Área de conhecimento: Matemática e suas Tecnologias
Componente curricular: Matemática

Organizadora: Editora Moderna
Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna.

Editor responsável:
André Luiz Steigenberger
Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (PR).
Foi professor de Matemática na rede pública.
Elaborador e editor de materiais didáticos.

MANUAL DO PROFESSOR

1ª edição
São Paulo, 2024

MODERNA

Elaboração dos originais:

André Luiz Steigenberger
Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (PR).
Foi professor de Matemática na rede pública.
Elaborador e editor de materiais didáticos.

Aparecida Santana de Souza Chiari
Licenciada e bacharela em Matemática pela Universidade de São Paulo.
Mestra em Educação Matemática pela Fundação Universidade Federal de Mato Grosso do Sul.
Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho".
Foi professora de Matemática na rede pública e privada.
Professora universitária. Elaboradora de materiais didáticos.

Fátima Gomes Machado
Licenciada em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (PR).
Especialista em Docência na Educação Superior pela Universidade Estadual de Londrina (PR).
Elaboradora de materiais didáticos.

Leandro Figueira Ferreira
Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (PR).
Especialista em Metodologia de Ensino de Matemática e Física pela Faculdade Venda Nova do Imigrante (ES).
Professor de Matemática na rede pública.
Elaborador de materiais didáticos.

Leonardo Bernardo de Morais
Licenciado em Matemática pela Universidade Federal de Pernambuco.
Mestre e doutor em Educação Matemática e Tecnológica pela Universidade Federal de Pernambuco.
Foi professor de Matemática na rede pública. Professor do Instituto Federal de Educação do Sertão Pernambucano.
Elaborador de materiais didáticos.

Organização dos objetos digitais: Maria Cecília da Silva Veridiano
Elaboração dos objetos digitais: Maria Cecília da Silva Veridiano e Mara Regina Garcia Gay

Produção editorial: Scriba Soluções Editoriais
Edição executiva: Lucilia Franco Lemos dos Santos
Assistência editorial: Sheila C. Molina
Gerência de planejamento editorial: Camila Rumiko Minaki
Preparação de texto e revisão: Moisés Manzano da Silva, Nicolas Hiromi Takahashi
Edição de arte: Brunna Leonardi Caciolato, Denise Maria Capozzi, Vinícius Soares Costa
Editoração eletrônica: Avits Estúdio Gráfico Ltda., Formato Comunicação Ltda., Leandro Júnior Pimenta
Pesquisa iconográfica: Alessandra Roberta Arias
Tratamento de imagens: Vinícius Soares Costa

Edição executiva: Mara Regina Garcia Gay, Maria Cecília da Silva Veridiano
Gerência de *design*, e produção gráfica e digital: Patricia Costa
Coordenação de *design* e projetos visuais: Marta Cerqueira Leite
Projeto gráfico: Bruno Tonel, Everson de Paula
Capa: Everson de Paula, Paula Miranda Santos
Foto: Homem praticando basquete © Hideki Yoshihara/Aflo/Getty Images
Coordenação de arte: Wilson Gazzoni Agostinho
Coordenação de *bureau*: Rubens M. Rodrigues
Pré-impressão: Alexandre Petreca, Marcio H. Kamoto
Coordenação de produção industrial: Wendell Monteiro
Impressão e acabamento:

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Moderna superação! matemática / organizadora Editora Moderna ; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna ; editor responsável André Luiz Steigenberger. -- 1. ed. -- São Paulo : Moderna, 2024.

1º ano : ensino médio : volume I.
Componente curricular: Matemática.
Área de conhecimento: Matemática e suas tecnologias.
ISBN 978-85-16-13991-9 (aluno)
ISBN 978-85-16-13992-6 (professor)

1. Matemática (Ensino médio) I. Steigenberger, André Luiz.

24-222409 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino médio 510.7

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Canal de atendimento: 0303 663 3762
www.moderna.com.br
2024
Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 0 8 6 4 2

APRESENTAÇÃO

Perceber o mundo à nossa volta e compreendê-lo, interagir e participar criticamente dos rumos da sociedade e do meio ambiente, contribuindo para o bem comum, são apenas algumas das atribuições que temos como cidadãos. Nesse sentido, o conhecimento matemático é essencial.

Ler e interpretar criticamente informações apresentadas de diferentes maneiras, provenientes dos mais diversos meios de comunicação; tomar decisões baseadas em constatações matemáticas, como escolher entre comprar à vista ou a prazo; e financiar ou adquirir um consórcio são exemplos da importância da Matemática em nossas vidas. No que diz respeito às tecnologias, fica ainda mais evidente a participação de ideias e conceitos matemáticos.

Esta coleção foi elaborada para auxiliá-lo nessa perspectiva e no caminho posterior a essa etapa de ensino, como o ingresso no Ensino Superior e no mercado de trabalho. Para ajudá-lo na compreensão dos assuntos tratados, são apresentados exemplos e problemas resolvidos, seguidos de propostas de tarefas que buscam consolidar a aprendizagem, além de seções que promovem a cidadania.

Por fim, desejamos a você, estudante, que desenvolva suas habilidades matemáticas e que, com as orientações de seu professor, use este material com dedicação, protagonismo e entusiasmo.

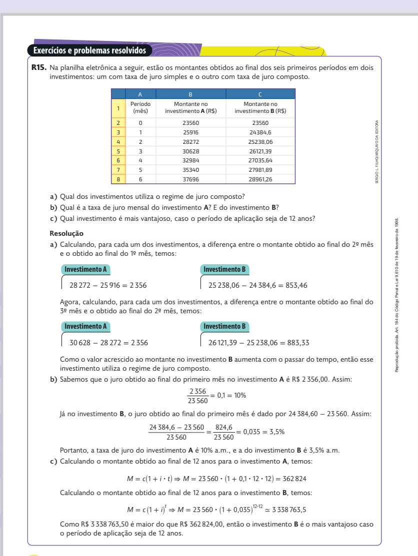
Bom estudo.

CONHEÇA SEU LIVRO

Esta coleção está dividida em capítulos que abordam assuntos interessantes e atuais e que o auxiliarão a desenvolver autonomia, criticidade e outras habilidades e competências importantes para a sua aprendizagem. Confira a seguir como seu livro está organizado e entenda o propósito de cada parte dele.

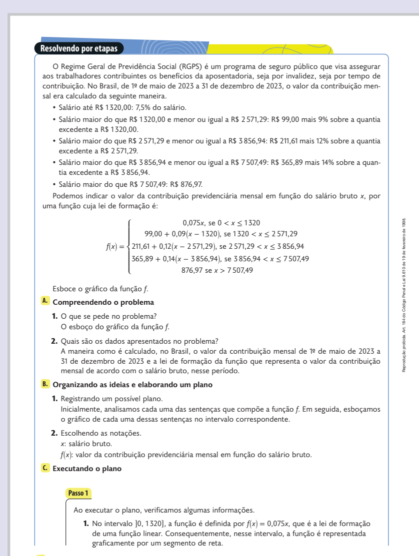
Abertura do capítulo

Na abertura de cada capítulo, você terá um contato inicial com os assuntos que serão estudados. Você poderá mostrar o que já sabe e aprimorar seus conhecimentos, trocando ideias com o professor e os colegas sobre diversas temáticas.



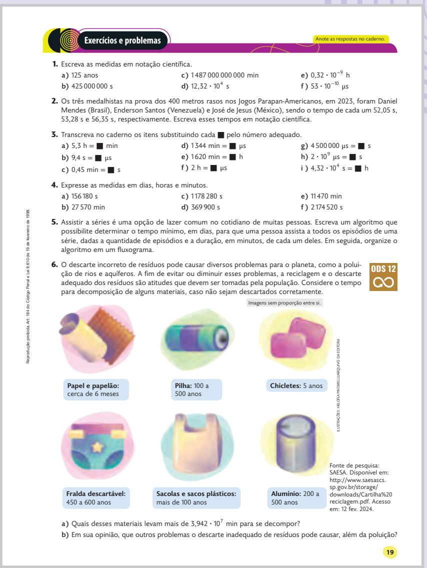
Exercícios e problemas resolvidos

Esses exercícios e problemas auxiliam a exercitar habilidades, competências e estratégias para resolver as outras tarefas propostas, favorecendo o desenvolvimento de sua autonomia.



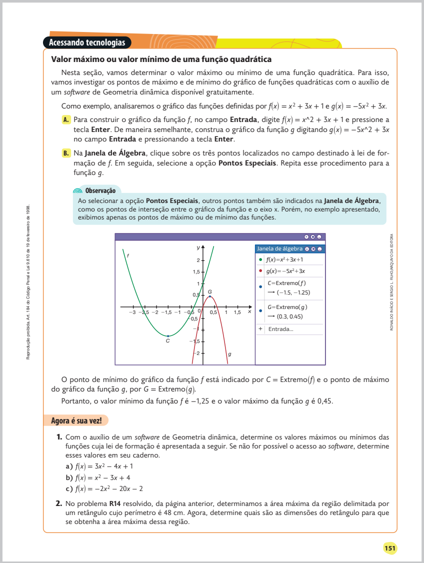
Resolvendo por etapas

Esta seção apresenta maneiras de organizar o pensamento com o intuito de solucionar um problema. Espera-se que, com base nela, você seja capaz de desenvolver estratégias para resolver diversos problemas, matemáticos ou não.



Exercícios e problemas

Esta seção apresenta exercícios e problemas diversificados para você desenvolver as ideias e os conceitos estudados. Vários deles são relacionados a outras áreas do conhecimento e a outros componentes curriculares, além de haver questões de provas de vestibulares e do Enem.



Acessando tecnologias

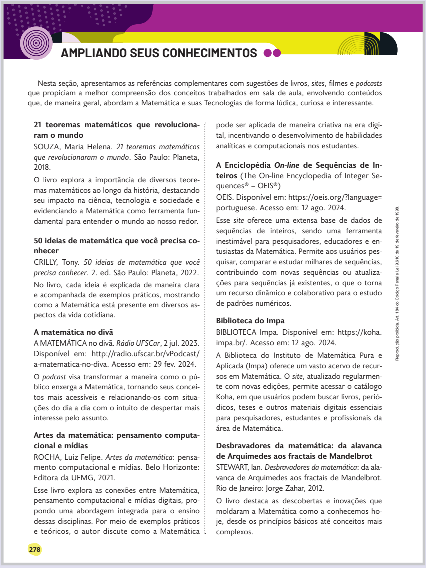
Nesta seção, você vai encontrar exemplos e tarefas que complementam o que foi estudado nos capítulos, utilizando *softwares* de Geometria dinâmica, planilha eletrônica e linguagem de programação.

Ação e participação

Nesta seção, você e seus colegas se envolverão em um projeto interdisciplinar, visando resolver problemas ou refletir sobre questões sociais. As atividades propostas desenvolverão habilidades essenciais, como pensamento crítico, autonomia, criatividade, argumentação, cooperação e cidadania.

Ampliando seus conhecimentos

Esta seção contém referências complementares de livros, filmes, *sites* e *podcasts* para você conhecer mais do que foi estudado nos capítulos e para ampliar seus conhecimentos.



Educação midiática

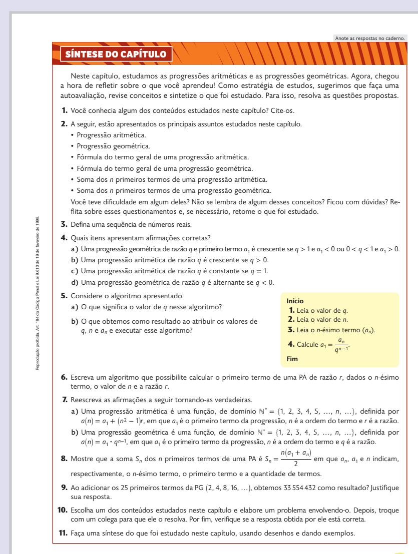
Nesta seção, você vai refletir sobre os conceitos de mídia e informação, promovendo o uso responsável, democrático, ético e crítico dos meios digitais, seja ao interpretar, compartilhar ou produzir conteúdo.

Desenvolvimento sustentável

Nesta seção, você vai trabalhar com os **Objetivos de Desenvolvimento Sustentável** (ODS), entendendo como eles se alinham com a Agenda 2030. A principal proposta dela é ajudar você a reconhecer a importância desses objetivos como parte de uma ação global, mostrando seus desdobramentos práticos em diversos contextos.

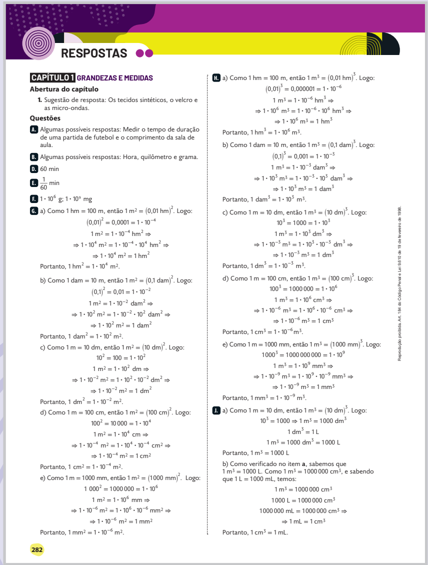
Trabalho e juventudes

Nesta seção, você vai explorar temas relacionados ao mundo do trabalho, aprofundando sua compreensão e valorização das diversas profissões, além de mapear as possibilidades de inserção profissional e refletir sobre o impacto de cada profissão na sociedade.



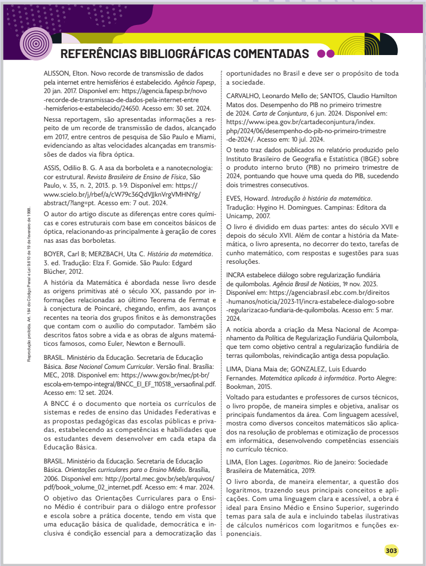
Síntese do capítulo

Nesta seção, você pode verificar seus conhecimentos sobre os principais conteúdos estudados no capítulo.



Respostas

Nesta seção, estão as respostas de cálculo de tarefas, atividades e questões deste volume.



Referências bibliográficas comentadas

Esta seção lista as principais referências teóricas utilizadas como base para a elaboração deste livro.

Dica

Boxe com informações que auxiliam você na resolução de exercícios e problemas.

Observação

Boxe com informações complementares.

Vocabulário

Os significados de algumas palavras que você provavelmente não conheça serão apresentados na página, a fim de auxiliá-lo na compreensão de informações. Essas palavras estão destacadas no texto.

Para fixar

Boxe com informações complementares sobre o conteúdo matemático trabalhado.

Para expandir

Boxe com sugestões de livros, textos ou vídeos com informações complementares ao contexto relacionado.

Ser consciente

Nas tarefas com esse ícone, você refletirá a respeito de diferentes assuntos, como ética, educação financeira, saúde e cidadania, possibilitando uma avaliação cidadã e social da temática abordada.

Desafio

As tarefas com esse ícone têm caráter desafiador, possibilitando o desenvolvimento de estratégias próprias de resolução.

OBJETO DIGITAL

Esse ícone indica que você pode acessar um objeto digital relacionado à atividade ou ao conteúdo.

Lista de siglas

Elenca os significados das siglas de vestibulares e exames de larga escala usadas no volume.

OBJETIVOS DE DESENVOLVIMENTO SUSTENTÁVEL

Você sabia que em 2015 foi assinado, na sede da Organização das Nações Unidas (ONU), em Nova York, nos Estados Unidos, um documento em que 193 países, incluindo o Brasil, se comprometeram a tomar medidas importantes para acabar com a pobreza, proteger o meio ambiente e garantir que as pessoas possam desfrutar de paz e de prosperidade? Trata-se da **Agenda 2030**. Nela, são apresentados **17 Objetivos de Desenvolvimento Sustentável**, os ODS, que determinam metas transformadoras para promover o desenvolvimento sustentável até 2030. Vamos conhecê-los?

RELEITURA DOS ÍCONES DA ONU POR VINICIUS ROSSIGNOL FELIPE

Para que a Agenda 2030 seja cumprida no Brasil e no mundo, é necessário promover engajamento e parcerias entre governos, setor privado e sociedade civil. Além disso, o acompanhamento e a avaliação da implementação devem ocorrer em níveis global, nacional e regional.

A seguir, apresentamos cada objetivo da Agenda 2030. No decorrer deste livro, você vai encontrar indicações de ODS sempre que houver propostas, temas ou conceitos relacionados a eles.

ODS 1	**ERRADICAÇÃO DA POBREZA**	Acabar com a pobreza em todas as formas e em todos os lugares.
ODS 2	**FOME ZERO E AGRICULTURA SUSTENTÁVEL**	Erradicar a fome, alcançar a segurança alimentar, melhorar a nutrição e promover a agricultura sustentável.
ODS 3	**SAÚDE E BEM-ESTAR**	Garantir o acesso à saúde de qualidade e promover o bem-estar para todos, em todas as idades.
ODS 4	**EDUCAÇÃO DE QUALIDADE**	Garantir o acesso à educação inclusiva, de qualidade e equitativa e promover oportunidades de aprendizagem ao longo da vida para todos.
ODS 5	**IGUALDADE DE GÊNERO**	Alcançar a igualdade de gênero e empoderar todas as mulheres e meninas.
ODS 6	**ÁGUA POTÁVEL E SANEAMENTO**	Garantir a disponibilidade e a gestão sustentável da água potável e do saneamento para todos.
ODS 7	**ENERGIA LIMPA E ACESSÍVEL**	Garantir o acesso a fontes de energia confiáveis, sustentáveis e modernas para todos.
ODS 8	**TRABALHO DECENTE E CRESCIMENTO ECONÔMICO**	Promover o crescimento econômico inclusivo e sustentável, com emprego pleno e produtivo e trabalho digno para todos.
ODS 9	**INDÚSTRIA, INOVAÇÃO E INFRAESTRUTURA**	Construir infraestruturas resilientes, promover a industrialização inclusiva e sustentável e fomentar a inovação.
ODS 10	**REDUÇÃO DAS DESIGUALDADES**	Reduzir as desigualdades no interior dos países e entre países.
ODS 11	**CIDADES E COMUNIDADES SUSTENTÁVEIS**	Tornar as cidades e comunidades mais inclusivas, seguras, resilientes e sustentáveis.
ODS 12	**CONSUMO E PRODUÇÃO RESPONSÁVEIS**	Garantir padrões de consumo e de produção sustentáveis.
ODS 13	**AÇÃO CONTRA A MUDANÇA GLOBAL DO CLIMA**	Adotar medidas urgentes para combater as alterações climáticas e os seus impactos.
ODS 14	**VIDA NA ÁGUA**	Conservar e usar de forma responsável os oceanos, os mares e os recursos marinhos para o desenvolvimento sustentável.
ODS 15	**VIDA TERRESTRE**	Proteger, restaurar e promover o uso sustentável dos ecossistemas terrestres, gerir de forma sustentável as florestas, combater a desertificação, reverter a degradação dos solos e preservar a biodiversidade.
ODS 16	**PAZ, JUSTIÇA E INSTITUIÇÕES EFICAZES**	Promover sociedades pacíficas e inclusivas para o desenvolvimento sustentável, proporcionar o acesso à justiça para todos e construir instituições eficazes, responsáveis e inclusivas em todos os níveis.
ODS 17	**PARCERIAS E MEIOS DE IMPLEMENTAÇÃO**	Reforçar os meios de implementação e revitalizar a parceria global para o desenvolvimento sustentável.

VINICIUS ROSSIGNOL FELIPE

Fonte de pesquisa: ORGANIZAÇÃO DAS NAÇÕES UNIDAS. *Sobre o nosso trabalho para alcançar os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável no Brasil*. Disponível em: https://brasil.un.org/pt-br/sdgs. Acesso em: 22 set. 2024.

SUMÁRIO

OBJETOS DIGITAIS

CAPÍTULO 1

GRANDEZAS E MEDIDAS

NASA

Momento da decolagem do foguete espacial Saturn V, na missão Apollo 11, tripulado pelos astronautas Neil A. Armstrong, Michael Collins e Edwin E. Aldrin, em 16 julho de 1969.

Professor, professora: Se julgar conveniente, explique aos estudantes que a exploração espacial, além de conferir avanços na busca por respostas ao anseio humano de compreender o Universo em sua vastidão, fomenta investimentos massivos que proporcionam inovações e descobertas de diversas áreas, como Engenharia mecânica e Aeronáutica, que impactam as ciências e as tecnologias em geral. Com esse intenso progresso tecnológico, a indústria aeroespacial exerce influência em diversas áreas, que, a princípio, em nada se relacionam com ela. O GPS e o aspirador de pó portátil sem fio são exemplos de tecnologias cuja origem está atrelada à indústria aeroespacial.

Na década de 1950, iniciou-se uma “corrida” espacial de cunho tecnológico entre duas das maiores potências da época, que eram os Estados Unidos da América (EUA) e a União das Repúblicas Socialistas Soviéticas (URSS). Com qual finalidade? Fazer viagens tripuladas à Lua cuja distância média até a Terra é 384 400 000 m. A exploração espacial exigiu a criação e o avanço de diversas tecnologias para uso dos astronautas no espaço. Posteriormente, muitas delas foram adaptadas a itens do nosso dia a dia e hoje são de grande utilidade. Entre elas, podemos citar o Sistema de Posicionamento Global (GPS), a espuma de viscoelástico e as modernas soluções de câmeras de computador e aparelhos de telefonia celular.

Inicialmente, com o intuito de tornar possível e seguro o pouso na superfície lunar, a Administração Nacional de Aeronáutica e Espaço (Nasa), criada em 1961 nos EUA, realizou algumas expedições tripuladas e não tripuladas que orbitaram a Lua e fizeram testes e manobras. A expedição mais importante foi a Apollo 11, em que três astronautas decolaram da Terra no dia 16 de julho de 1969 a bordo do superfoguete Saturn V e aterrissaram em solo lunar após uma viagem de 369 900 s.

Para expressar, por exemplo, a distância média da Terra à Lua e o tempo de viagem da Apollo 11, usamos unidades de medida. As grandezas e medidas estão presentes em várias outras situações, como no tempo de duração de uma aula e na distância de sua casa à escola. É esse o assunto que estudaremos neste capítulo.

Neste capítulo, você vai estudar:

- Sistema Internacional de Unidades;
- tempo;
- comprimento;
- massa;
- área;
- volume;
- velocidade média;
- algarismos significativos;
- medidas em informática.

Professor, professora: Informe aos estudantes que **Nasa** é a sigla que representa, em inglês, o nome ***National Aeronautics and Space Administration***.

1. Sugestões de resposta: Os tecidos sintéticos, o velcro e as micro-ondas.

2. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes conheçam as grandezas apresentadas neste capítulo. No texto, são citados metro, dia, mês, ano e segundos.

3. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes concluam que as unidades de medida padronizadas levam a resultados iguais mesmo que sejam usados diferentes instrumentos de medida.

OBJETO DIGITAL ***Infográfico clicável*:** Saturn V: o foguete mais poderoso já produzido

Professor, professora: Oriente os estudantes a escrever as respostas no caderno.

1. Pesquise e cite outros itens, além dos produtos apresentados no texto, que surgiram ou foram modernizados como consequência da “corrida” espacial e que atualmente estão adaptados para nosso uso cotidiano.

2. Quais grandezas e unidades de medida você conhece? E quais unidades de medida você identificou no texto?

3. Em sua opinião, por que é importante termos unidades de medida padronizadas?

Sistema Internacional de Unidades

A necessidade de medir existe desde o Paleolítico, período em que os seres humanos utilizavam pedras e ossos para criar ferramentas de caça e defesa. Porém, com o desenvolvimento da linguagem e da cultura, apenas a capacidade de medir não era suficiente. Para que as medidas fossem significativas, havia um problema: elas tinham de concordar com as medidas de outros seres humanos. Durante muito tempo, cada sociedade utilizou um sistema de unidades próprio, como as unidades de medida de comprimento, que geralmente eram baseadas em partes do corpo de um chefe ou soberano.

Em 1789, a Academia de Ciências da França criou o Sistema Métrico Decimal, inicialmente constituído de três unidades básicas: o metro, o litro e o quilograma. No ano de 1960, o sistema métrico foi atualizado, e assim, na 11ª Conferência Geral de Pesos e Medidas, foi sancionado o Sistema Internacional de Unidades (SI).

As grandezas de base utilizadas no SI são: massa, comprimento, tempo, corrente elétrica, temperatura termodinâmica, quantidade de substância e intensidade luminosa. As unidades de base correspondentes do SI estão apresentadas no esquema a seguir.

Grandezas e unidades de base do SI

Imagens sem proporção entre si.

ILUSTRAÇÕES: HELOÍSA PINTARELLI/ARQUIVO DA EDITORA

1. **Grandeza:** intensidade luminosa
Unidade de base: candela
Símbolo: cd

2. **Grandeza:** quantidade de substância
Unidade de base: mol
Símbolo: mol

3. **Grandeza:** temperatura termodinâmica
Unidade de base: kelvin
Símbolo: K

4. **Grandeza:** corrente elétrica
Unidade de base: ampère
Símbolo: A

5. **Grandeza:** tempo
Unidade de base: segundo
Símbolo: s

6. **Grandeza:** comprimento
Unidade de base: metro
Símbolo: m

7. **Grandeza:** massa
Unidade de base: quilograma
Símbolo: kg

Observação

A fim de simplificar a escrita, muitas vezes não distinguiremos grandezas de suas respectivas medidas. Desse modo, utilizaremos expressões do tipo "7 metros de comprimento" quando, na realidade, queremos nos referir à medida do comprimento, que nesse caso é 7 metros.

Questão A.

Cite algumas situações em que é necessário realizar medições.

Questão B.

Você conhece outras unidades de medida, além das apresentadas no esquema? Em caso afirmativo, cite-as.

Questão C.

Em sua opinião, qual é a importância do SI para a sociedade atual?

Questão **A**. Algumas possíveis respostas: Medir o tempo de duração de uma partida de futebol e o comprimento da sala de aula.

Questão **B**. Algumas possíveis respostas: Hora, quilômetro e grama.

Questão **C**. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes percebam que a padronização facilita, por exemplo, as atividades comerciais e proporciona negociações mais justas.

Tempo

A necessidade de medir o tempo existe desde os primórdios da humanidade. Acredita-se que as primeiras maneiras de medir essa grandeza tinham relação com fenômenos da natureza e movimentos de corpos celestes. Mais tarde, para medir intervalos de tempo específicos, foram criados os primeiros relógios, como o relógio de sol, a clepsidra (ou relógio de água) e a ampulheta.

Conforme o tempo passou, a evolução científica possibilitou a criação de relógios cada vez mais precisos. No século XIV, por exemplo, surgiram os primeiros relógios mecânicos. Atualmente, temos os relógios atômicos, que levam mais de um milhão de anos para adiantar ou atrasar um segundo.

O primeiro relógio atômico foi criado em 1949, nos Estados Unidos, com base em moléculas de **amônia**. Alguns anos depois, com a utilização de melhores osciladores, ele se tornou o instrumento mais preciso para medir o tempo.

Em 1967, com base no relógio de césio, a 13ª Conferência Geral de Pesos e Medidas adotou o **segundo** como padrão de medida de tempo.

Amônia: solução aquosa de amoníaco, um gás incolor e com odor característico facilmente solúvel em água.

Césio 133: um ou mais átomos do elemento químico césio, cujo núcleo atômico tem a mesma quantidade de prótons, mas quantidade de nêutrons diferente.

Um **segundo** (s) é o intervalo de tempo que corresponde a $\frac{1}{9\,192\,631\,770}$ oscilações da frequência de ressonância do átomo de **césio 133**.

Além do segundo, podemos expressar uma medida de tempo utilizando outras unidades de medida, como **hora** (h), **minuto** (min) e **microssegundo** (μs).

$1 \text{ h} = 3\,600 \text{ s}$

$1 \text{ min} = 60 \text{ s}$

$1\ \mu\text{s} = \frac{1}{1\,000\,000} \text{ s}$

Questão D. Uma hora equivale a quantos minutos?

Resposta: 60 min

Questão E. Um segundo equivale a quantos minutos?

Resposta: $\frac{1}{60}$ min

Exercícios e problemas resolvidos

R1. Quando trabalhamos com números muito grandes ou muito pequenos, podemos utilizar uma escrita abreviada denominada **notação científica**. Os números representados com essa notação são escritos na forma $q \cdot 10^n$, em que:

- q é um número racional maior ou igual a 1 e menor do que 10;
- n é um número inteiro.

a) O número $0{,}9 \cdot 10^8$ está escrito em notação científica?

b) Escreva 73 380 000 000 s e 0,00007 h em minutos usando notação científica.

Resolução

a) O número $0{,}9 \cdot 10^8$ está na forma $q \cdot 10^n$, em que n é um número inteiro. Porém, q não é um número racional maior ou igual a 1. Portanto, o número $0{,}9 \cdot 10^8$ não está escrito em notação científica.

b) Inicialmente, expressamos as medidas em minutos. Para isso, fazemos:

- $73\,380\,000\,000 \text{ s} = 73\,380\,000\,000 \cdot \frac{1}{60} \text{ min} = 1\,223\,000\,000 \text{ min}$
- $0{,}00007 \text{ h} = 0{,}00007 \cdot 60 \text{ min} = 0{,}0042 \text{ min}$

Agora, escrevemos as medidas em minutos usando notação científica.

- $1\,223\,000\,000 \text{ min} = 1{,}223 \cdot 1\,000\,000\,000 \text{ min} = 1{,}223 \cdot 10^9 \text{ min}$
- $0{,}0042 \text{ min} = \frac{4{,}2}{1\,000} \text{ min} = 4{,}2 \cdot 10^{-3} \text{ min}$

Portanto, $73\,380\,000\,000 \text{ s} = 1{,}223 \cdot 10^9 \text{ min}$ e $0{,}00007 \text{ h} = 4{,}2 \cdot 10^{-3} \text{ min}$.

R2. Escreva um algoritmo que possibilite converter uma medida em microssegundos em uma medida em horas. Em seguida, organize esse algoritmo em um fluxograma.

Resolução

Antes de apresentarmos os passos para a construção de um algoritmo, vamos relembrar sua definição.

Um **algoritmo** é uma sequência finita de passos (instruções) para resolver determinado problema.

Para construir um algoritmo, inicialmente devemos ler o enunciado do problema, compreendendo-o e destacando os pontos mais importantes. Depois é preciso responder às seguintes questões.

1. Quais são os **dados de entrada**, ou seja, os dados fornecidos no problema?
Dados de entrada: medida em microssegundos.

2. Quais são os **dados de saída**, ou seja, os dados gerados após a execução de todas as etapas do algoritmo?
Dados de saída: medida em horas.

3. Conhecendo os dados de entrada e saída, que **procedimentos** devem ser realizados?
Para responder a esta questão, inicialmente, devemos determinar a equivalência entre microssegundos e horas. Como 1 h = 3 600 s e 1 μs = $\frac{1}{1\,000\,000}$ s, fazemos:

$$1\ \mu s = \frac{1}{1\,000\,000}\ s = \frac{1}{1 \cdot 10^6} \cdot \frac{1}{3\,600}\ h = \frac{1}{3{,}6 \cdot 10^9}\ h$$

Assim, 1 μs = $\frac{1}{3{,}6 \cdot 10^9}$ h.

Consequentemente, para converter uma medida em microssegundos em horas, devemos dividir o número que expressa a medida em microssegundos por $3{,}6 \cdot 10^9$.

LAÍS GARBELINI/ARQUIVO DA EDITORA

Agora, escrevemos o algoritmo.

Professor, professora: Se julgar conveniente, explique aos estudantes que o algoritmo geralmente pode ser utilizado como estratégia de estudos, pois, ao propor a sequência de passos a serem executados, eles organizam e buscam os conhecimentos necessários, possibilitando a compreensão do conteúdo de maneira diferente das que costumam ser utilizadas. Assim, torna-se possível direcionar e estruturar o conhecimento. Além disso, depois de construir um algoritmo, o estudante terá mais facilidade em assimilar o conteúdo ou transmiti-lo para outras pessoas.

Início

1. Leia a medida em microssegundos.

2. Divida o número que expressa a medida em microssegundos por $3{,}6 \cdot 10^9$.

Fim

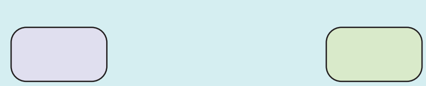
Finalmente, organizamos o algoritmo em um fluxograma.

Início → Leia a medida em microssegundos. → Divida o número que expressa a medida em microssegundos por $3{,}6 \cdot 10^9$. → **Fim**

LAÍS GARBELINI/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

Em um fluxograma, cada tipo de figura tem um significado. No fluxograma apresentado, por exemplo, foram utilizadas as seguintes figuras.



Indica o início e o fim do fluxograma.

Indica uma ação a ser tomada.

LAÍS GARBELINI/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

1. Escreva as medidas em notação científica.

a) 125 anos Resposta: $1,25 \cdot 10^2$ anos

b) 425 000 000 s Resposta: $4,25 \cdot 10^8$ s

c) 1 487 000 000 000 min Resposta: $1,487 \cdot 10^{12}$ min

d) $12,32 \cdot 10^4$ s Resposta: $1,232 \cdot 10^5$ s

e) $0,32 \cdot 10^{-9}$ h Resposta: $3,2 \cdot 10^{-10}$ h

f) $53 \cdot 10^{-10}$ μs Resposta: $5,3 \cdot 10^{-9}$ μs

2. Os três medalhistas na prova dos 400 metros rasos nos Jogos Parapan-Americanos, em 2023, foram Daniel Mendes (Brasil), Enderson Santos (Venezuela) e José de Jesus (México), sendo o tempo de cada um 52,05 s, 53,28 s e 56,35 s, respectivamente. Escreva esses tempos em notação científica.
Resposta: $5,205 \cdot 10^1$ s, $5,328 \cdot 10^1$ s e $5,635 \cdot 10^1$ s.

3. Transcreva no caderno os itens substituindo cada ■ pelo número adequado.

a) 5,3 h = ■ min
Resposta: 5,3 h = 318 min

b) 9,4 s = ■ μs
Resposta: 9,4 s = $9,4 \cdot 10^6$ μs

c) 0,45 min = ■ s
Resposta: 0,45 min = 27 s

d) 1 344 min = ■ μs
Resposta: 1 344 min = $8,064 \cdot 10^{10}$ μs

e) 1 620 min = ■ h
Resposta: 1 620 min = 27 h

f) 2 h = ■ μs
Resposta: 2 h = $7,2 \cdot 10^9$ μs

g) 4 500 000 μs = ■ s
Resposta: 4 500 000 μs = 4,5 s

h) $2 \cdot 10^9$ μs = ■ s
Resposta: $2 \cdot 10^9$ μs = 2 000 s

i) $4,32 \cdot 10^4$ s = ■ h
Resposta: $4,32 \cdot 10^4$ s = 12 h

4. Expresse as medidas em dias, horas e minutos.

a) 156 180 s Resposta: 1 dia, 19 horas e 23 minutos.

b) 27 570 min Resposta: 19 dias, 3 horas e 30 minutos.

c) 1 178 280 s Resposta: 13 dias, 15 horas e 18 minutos.

d) 369 900 s Resposta: 4 dias, 6 horas e 45 minutos.

e) 11 470 min Resposta: 7 dias, 23 horas e 10 minutos.

f) 2 174 520 s Resposta: 25 dias, 4 horas e 2 minutos.

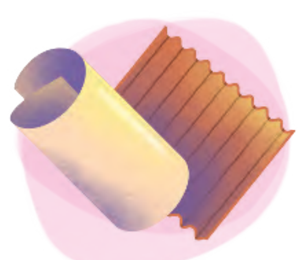
5. Assistir a séries é uma opção de lazer comum no cotidiano de muitas pessoas. Escreva um algoritmo que possibilite determinar o tempo mínimo, em dias, para que uma pessoa assista a todos os episódios de uma série, dadas a quantidade de episódios e a duração, em minutos, de cada um deles. Em seguida, organize o algoritmo em um fluxograma. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

Professor, professora: Oriente os estudantes a consultar mais informações sobre os **Objetivos de Desenvolvimento Sustentável** (ODS) no início deste volume.

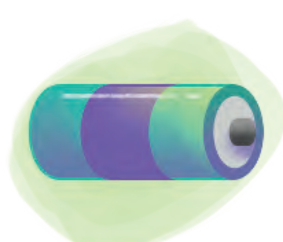
6. O descarte incorreto de resíduos pode causar diversos problemas para o planeta, como a poluição de rios e aquíferos. A fim de evitar ou diminuir esses problemas, a reciclagem e o descarte adequado dos resíduos são atitudes que devem ser tomadas pela população. Considere o tempo para decomposição de alguns materiais, caso não sejam descartados corretamente.

ODS 12

Imagens sem proporção entre si.



Papel e papelão: cerca de 6 meses

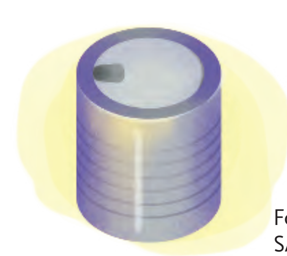


Pilha: 100 a 500 anos

Chicletes: 5 anos

Fralda descartável: 450 a 600 anos

Sacolas e sacos plásticos: mais de 100 anos



Alumínio: 200 a 500 anos

ILUSTRAÇÕES: HELOÍSA PINTARELLI/ARQUIVO DA EDITORA

Professor, professora: Pergunte aos estudantes se eles têm o hábito de separar os resíduos orgânicos dos recicláveis. Incentive-os a expor suas opiniões a respeito do destino mais adequado para os resíduos domésticos, levando em consideração o meio ambiente e a movimentação econômica ocasionada pelos processos de reciclagem. Pergunte-lhes também se já se depararam ou conhecem algum local usado para o descarte incorreto dos resíduos na região onde moram ou próximo à escola.

Fonte de pesquisa: SAESA. Disponível em: http://www.saesascs.sp.gov.br/storage/downloads/Cartilha%20reciclagem.pdf. Acesso em: 12 fev. 2024.

a) Quais desses materiais levam mais de $3,942 \cdot 10^7$ min para se decompor?
Resposta: Pilha, fralda descartável, sacolas e sacos plásticos e alumínio.

b) Em sua opinião, que outros problemas o descarte inadequado de resíduos pode causar, além da poluição?
Resposta pessoal. Algumas possíveis respostas: Morte de diversos animais em oceanos e florestas; proliferação de doenças.

9. c) Resposta pessoal. A resposta depende do resultado da pesquisa feita pelos estudantes.

7. Teobaldo iniciou um tratamento com os medicamentos **A** e **B** indicados por um médico. O medicamento **A** deve ser tomado de 8 em 8 horas e o medicamento **B**, de 6 em 6 horas. Sabendo que ele ingeriu os dois medicamentos às 8 h do dia 5, em que dia e horário ele vai ingerir novamente os dois juntos? Resposta: No dia 6, às 8 h.

8. Marta está escrevendo uma história de ficção científica, falando de um planeta que se formou 50 milhões de anos após a formação da galáxia à qual pertence, que data de 4,56 bilhões de anos atrás. Há quantos anos esse planeta se formou?

a) $4{,}51 \times 10^7$ anos
b) $4{,}51 \times 10^9$ anos
c) $4{,}61 \times 10^7$ anos
d) $4{,}61 \times 10^9$ anos
e) $5{,}06 \times 10^9$ anos

Resposta: Alternativa **b**.

9. Geralmente, o valor mensal da fatura de energia elétrica é dado pelo produto entre o consumo, em quilowatt-hora, e o valor da tarifa do quilowatt-hora, além dos impostos.

a) Analise as informações a seguir e determine quantos quilowatts-hora uma pessoa vai gastar se utilizar um ar-condicionado, um computador e um chuveiro elétrico ligados, respectivamente, 6 h, 8 h e 15 min por dia, durante 30 dias.
Resposta: 365,25 kWh

Potência aproximada de alguns aparelhos elétricos

Equipamento	Potência (W)
Ar-condicionado	1 400
Computador	300
Videogame	20
Chuveiro elétrico	5 500

Fonte de pesquisa: ENERGISA. Disponível em: https://www.energisa.com.br/empresa/Sala%20Imprensa/Release%20-%20EMG%20-%20Simulador%20de%20Consumo%20-%2030%20de%20julho.pdf. Acesso em: 12 fev. 2024.

b) Considerando que a **distribuidora** cobrou, no último mês, sem considerar os impostos, R$ 0,64 por quilowatt-hora, determine quantos reais uma pessoa gastaria mantendo um computador ligado durante 390 min por dia, por 15 dias.
Resposta: R$ 18,72

Distribuidora: empresa responsável pela distribuição de energia elétrica em determinada região.

c) Faça uma pesquisa para determinar o preço em reais do quilowatt-hora no município onde mora e da potência de alguns aparelhos elétricos. Em seguida, de acordo com as informações obtidas em sua pesquisa, elabore uma questão envolvendo o consumo de energia elétrica e a quantia em reais paga por determinado tempo de uso desses aparelhos.

10. (UPE SSA, 2017) Rodrigo estava observando o pisca-pisca do enfeite natalino de sua casa. Ele é composto por lâmpadas nas cores amarelo, azul, verde e vermelho. Rodrigo notou que lâmpadas amarelas acendem a cada 45 segundos, as lâmpadas verdes, a cada 60 segundos, as azuis, a cada 27 segundos, e as vermelhas só acendem quando as lâmpadas das outras cores estão acesas ao mesmo tempo. De quantos em quantos minutos as lâmpadas vermelhas acendem? Resposta: Alternativa **b**.

a) 6 **b)** 9 **c)** 12 **d)** 15 **e)** 18

11. Além de destruições, um terremoto pode causar alterações na rotação, na angulação e no formato da Terra. Alguns cientistas da Nasa calcularam que o terremoto da Indonésia, ocorrido em 2004, afetou a rotação do planeta, diminuindo a duração do dia em 2,68 microssegundos. A redução na duração de um dia causada por esse terremoto equivale a quantos por cento de uma hora?
Resposta: $7{,}44 \cdot 10^{-8}\%$

12. A energia elétrica consumida, em watt-hora (Wh), por um aparelho durante certo tempo pode ser calculada multiplicando o tempo em horas pela potência do aparelho em watts (W), geralmente indicada na embalagem ou no próprio produto. Porém, a unidade de medida de energia elétrica mais usada pelas distribuidoras é quilowatt-hora (kWh). Sabendo que 1 kWh = 1 000 Wh, responda às questões.

a) Um televisor com 180 W de potência fica ligado na sala de espera de um consultório médico das 7 h 15 min até as 18 h 45 min, 5 dias por semana. Em 4 semanas, quantos quilowatts-hora serão consumidos por esse aparelho?
Resposta: 41,4 kWh

b) Elabore uma questão semelhante à do item **a**, porém com o tempo de funcionamento diário do televisor diferente do apresentado. Em seguida, peça a um colega que resolva a questão. Resposta pessoal. A resposta depende do tempo determinado pelos estudantes.

13. Em uma agência de viagens, há 8 lâmpadas fluorescentes de 35 W cada, ligadas 10 h por dia. Visando economizar energia elétrica, o proprietário as substituiu por 8 lâmpadas LED de 24 W cada.

ODS 12

a) Sabendo que a distribuidora de energia elétrica cobra, sem considerar os impostos, R$ 0,55 por quilowatt-hora, determine quantos reais serão economizados durante 30 dias com as lâmpadas, após a substituição, considerando o uso diário de 10 h. Resposta: Serão economizados R$ 14,52.

b) Em sua opinião, além de optar por lâmpadas mais econômicas, que outras atitudes podemos tomar para economizar energia elétrica no dia a dia?

13. b) Sugestões de resposta: Diminuir o tempo de uso do chuveiro elétrico, retirar os aparelhos da tomada quando não estiverem ligados, não deixar lâmpadas acesas sem necessidade e evitar abrir muitas vezes a geladeira.

Comprimento

Estudamos anteriormente que no SI a unidade de medida de comprimento tem o **metro** como padrão, que já teve sua definição modificada algumas vezes. Em 1791, por exemplo, o metro foi definido como a décima milionésima parte do quadrante de meridiano terrestre, baseado nas medições entre Dunquerque, na França, e Barcelona, na Espanha. A materialização dessa definição foi feita com uma barra de platina-irídio, denominada barra do metro padrão.

Porém, em 1983, para atender à evolução da ciência e objetivando melhor precisão, a 17ª Conferência de Pesos e Medidas redefiniu o metro como a distância percorrida pela luz, no vácuo, em determinado intervalo de tempo.

> O **metro** é a distância percorrida pela luz no vácuo durante um intervalo de tempo de $\frac{1}{299\,792\,458}$ de segundo.

Além do metro, podemos expressar uma medida de comprimento utilizando outras unidades. Algumas delas são: o **quilômetro** (km), o **hectômetro** (hm), o **decâmetro** (dam), o **decímetro** (dm), o **centímetro** (cm) e o **milímetro** (mm).

$1\text{ km} = 1 \cdot 10^3\text{ m}$ | $1\text{ hm} = 1 \cdot 10^2\text{ m}$ | $1\text{ dam} = 1 \cdot 10^1\text{ m}$

$1\text{ dm} = 1 \cdot 10^{-1}\text{ m}$ | $1\text{ cm} = 1 \cdot 10^{-2}\text{ m}$ | $1\text{ mm} = 1 \cdot 10^{-3}\text{ m}$

Exercícios e problemas resolvidos

R3. (Enem, 2016) Um motorista partiu da cidade **A** em direção à cidade **B** por meio de uma rodovia retilínea localizada em uma planície. Lá chegando, ele percebeu que a distância percorrida nesse trecho foi de 25 km. Ao consultar um mapa com o auxílio de uma régua, ele verificou que a distância entre essas duas cidades, nesse mapa, era de 5 cm. A escala desse mapa é

a) 1 : 5 **b)** 1 : 1000 **c)** 1 : 5 000 **d)** 1 : 100 000 **e)** 1 : 500 000

Resolução

Como 1 km = 1 000 m e 1 m = 100 cm, então 1 km = 100 000 cm e, consequentemente, 25 km = 2 500 000 cm. Desse modo:

$$\frac{5\text{ cm}}{25\text{ km}} = \frac{5\text{ cm}}{2\,500\,000\text{ cm}} = \frac{1\text{ cm}}{500\,000\text{ cm}}, \text{ ou seja, } 1 : 500\,000$$

Assim, a escala desse mapa é 1 : 500 000. Portanto, a alternativa correta é a **e**.

Dica

Lembre-se: escala é a razão entre a medida utilizada na representação planificada de determinado espaço e sua medida real.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

14. Transcreva os itens no caderno substituindo cada ■ pelo número adequado.

a) 93,4 dm = ■ hm Resposta: 93,4 dm = 0,0934 hm

b) 7,3 dam = ■ km Resposta: 7,3 dam = 0,073 km

c) 0,576 km = ■ dm Resposta: 0,576 km = 5 760 dm

d) $1{,}5 \cdot 10^{-4}$ m = ■ cm Resposta: $1{,}5 \cdot 10^{-4}$ m = 0,015 cm

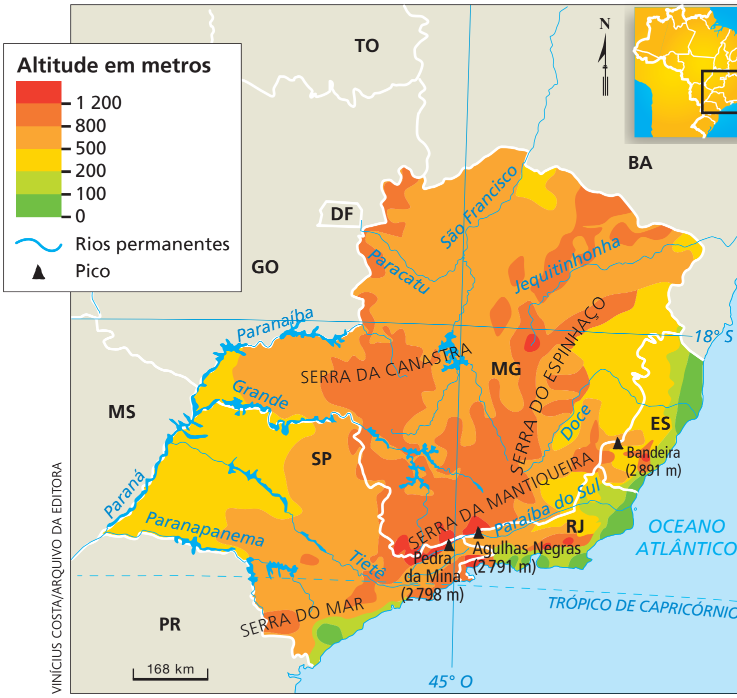
e) $6{,}521 \cdot 10^2$ cm = ■ dam Resposta: $6{,}521 \cdot 10^2$ cm = 0,6521 dam

15. Com 135 m, a London Eye, localizada em Londres, na Inglaterra, é considerada uma das maiores rodas-gigantes do mundo.
Podemos expressar a altura total da London Eye utilizando a unidade de medida pé, que equivale a 12 polegadas e é frequentemente usada na Inglaterra. Considerando que 1 polegada equivale a 2,54 cm, escreva, em pés, a altura total dessa roda-gigante. Resposta: Aproximadamente 443 pés.

18. Professor, professora: Explique aos estudantes que o garimpo é uma atividade extrativista permitida pela legislação brasileira, desde que o minerador solicite o requerimento de lavra e receba a devida autorização da Agência Nacional de Mineração (ANM). Porém, sem fiscalização, essas atividades podem ser bastante prejudiciais, contaminando o solo com metais pesados, repercutindo no aumento do desmatamento e da sedimentação de rios, além de ser um fator importante na ocupação irregular de terras indígenas, na grilagem de terras e no aumento da violência ao seu entorno.

16. Analise o mapa e responda às questões.

Região Sudeste brasileira: altitudes do relevo



Fonte de pesquisa: IBGE. *Atlas geográfico escolar*. 9. ed. Rio de Janeiro, 2023.

a) Qual é o título do mapa?
Resposta: Região Sudeste brasileira: altitudes do relevo.

b) O que o ícone 〜 representa?
Resposta: Rios permanentes.

c) Em qual estado está localizada a nascente do rio Jequitinhonha? E do rio Tietê?
Resposta: Minas Gerais; São Paulo.

d) De que maneira os pontos mais elevados da região Sudeste foram representados no mapa? Resposta: Os pontos mais elevados foram representados usando o ícone que indica pico.

e) Na Serra da Canastra há regiões com mais de 1 200 m de altitude? Justifique sua resposta. Resposta: Não, pois não há regiões coloridas em vermelho na Serra da Canastra.

f) Qual dos picos apresentados no mapa tem a menor altitude? E a maior?
Resposta: Pico das Agulhas Negras; Pico da Bandeira.

g) Quais dos picos apresentados no mapa têm altitude maior do que 2,795 km?
Resposta: Pico Pedra da Mina e Pico da Bandeira.

17. O futebol americano é um esporte que envolve velocidade, agilidade, força e capacidade tática de seus jogadores. Nessa modalidade, é usada uma unidade de medida de comprimento que não utilizamos frequentemente no Brasil: a jarda.

Sabendo que 1 jarda equivale a 0,9144 m e que o campo de futebol americano tem formato retangular cujas dimensões são 120 jardas e $53\frac{1}{3}$ jardas, responda às questões.

a) Qual é, em metros, o perímetro do campo de futebol americano?
Resposta: 316,992 m

b) Se um jogador der 3 voltas completas ao redor desse campo, quantos metros ele percorrerá? Resposta: 950,976 m

Dica
A medida do perímetro de um polígono é a soma das medidas dos comprimentos de seus lados.

18. Alguns profissionais utilizam diferentes maneiras para medir comprimentos. Analise, por exemplo, como um **garimpeiro** obtém um padrão para o metro.

> [...] basta você medir quatro palmos e meio em uma corda e cortá-la; pronto, você terá um pedaço de corda com um metro e poderá fazer sua mediação.
>
> [...]
>
> LIMA, Freudson Dantas de. *Etnomatemática no garimpo*: uma proposta de ação pedagógica para o ensino e aprendizagem de matemática na perspectiva da resolução de problemas. 2018. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) — Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal. Disponível em: https://repositorio.ufrn.br/jspui/handle/123456789/25793. Acesso em: 27 nov. 2023.

Garimpeiro: trabalhador que executa atividade econômica extrativista, rudimentar ou mecanizada, extraindo do solo ou da água substâncias minerais preciosas ou úteis, como ouro e diamantes; minerador.

a) Se o garimpeiro medir com esse pedaço de corda uma distância que tem 13 palmos e meio de comprimento, quantos metros ele vai obter? Resposta: 3 m

b) Utilizando um barbante e seguindo o mesmo método desse garimpeiro, meça o comprimento dos lados da sala de aula. Em seguida, compare sua resposta com as obtidas por seus colegas.

c) Você conhece outro método que também é utilizado para obter medidas de comprimento? Converse com o professor e os colegas. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes citem, por exemplo, palmos e pés.

18. b) Resposta pessoal. A resposta depende das dimensões da sala de aula e da precisão das medições feitas pelos estudantes.

19. b) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes respondam que seria mais vantajoso viajar no perigeu, pois a Lua estaria mais próxima, sendo necessário menos combustível para chegar até lá, além de gastar menos tempo na viagem.

19. A órbita da Lua em torno da Terra não é uma circunferência perfeita, uma vez que há períodos em que está mais próximo da Terra (perigeu) e outros em que fica mais distante (apogeu). No perigeu, a distância média entre a Terra e a Lua é aproximadamente 363 300 km. Já no apogeu, aproximadamente 405 500 km.

Fonte de pesquisa: WHAT is a Supermoon? *Nasa*, 24 maio 2021. Disponível em: https://science.nasa.gov/earth/moon/what-is-a-supermoon/. Acesso em: 12 fev. 2024.

a) Qual é a diferença, em decâmetros, entre a distância da Terra à Lua no perigeu e a distância no apogeu?
Resposta: Aproximadamente 4 220 000 dam.

b) Em sua opinião, seria mais vantajoso para uma agência espacial fazer a viagem até a Lua no apogeu ou no perigeu? Justifique sua resposta.

20. O Projeto Nova Cartografia Social da Amazônia (PNCSA) desenvolve mapas que buscam materializar as expressões culturais diversas de povos e comunidades tradicionais da Amazônia. Esses mapas são elaborados por pesquisadores e agentes sociais, que são membros da comunidade.

Analise a seguir a representação de um mapa desenvolvido nesse projeto.

Quilombo Sumidouro – Queimada Nova (PI)

Fonte de pesquisa: MAPA – Indígenas Kariri e quilombolas do Mocambo, Sumidouro e Tapuio Queimada Nova – PI. *Nova Cartografia Social da Amazônia*, 8 nov. 2019. Disponível em: http://novacartografiasocial.com.br/download/mapa-indigenas-kariri-e-quilombolas-do-mocambo-sumidouro-e-tapuio-queimada-nova-pi/. Acesso em: 13 jun. 2024.

a) Em qual estado brasileiro está localizado o quilombo Sumidouro? Resposta: Piauí.

b) Quais são as atividades produtivas dessa comunidade destacadas no mapa?
Resposta: Agricultura, pecuária, fruticultura e coleta de mel.

c) Com uma régua, determine a distância real aproximada em linha reta, em quilômetros, entre a Associação Indígena e Quilombola e o poço artesiano.
Resposta: 7,4 km

d) Pesquise qual é a importância do registro, por meio de mapas, de aspectos da cultura, das tradições e do modo de vida das comunidades tradicionais. Depois, troque ideias com os colegas e o professor sobre esse assunto.

Dica
No item **c**, considere o centro de cada ícone para realizar a medição.

21. Os estudantes do 1º ano do Ensino Médio vão construir, sobre um compensado de madeira de formato retangular, a maquete de um campo de futebol na escala de 1 : 60. Sabendo que a medida real desse campo de futebol tem lados com comprimento de 120 m e 90 m e que a maquete deve ficar com 10 cm de margem em cada um dos lados, quais são as dimensões mínimas do compensado de madeira que os estudantes devem comprar para construir essa maquete? Resposta: Alternativa **d**.

a) 2,0 m × 1,5 m b) 2,2 m × 1,5 m c) 2,0 m × 1,7 m d) 2,2 m × 1,7 m e) 2,2 m × 1,9 m

20. d) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes compreendam que, ao registrarem informações sobre o espaço onde vivem, as comunidades transmitem conhecimentos construídos ao longo dos anos das gerações, documentando, por exemplo, a maneira como a comunidade está organizada, a espacialização das áreas produtivas, os tipos de atividades desenvolvidas e aspectos da riqueza local.

Medindo grandes comprimentos

Analise a seguir a distância média, em quilômetros, entre os planetas do Sistema Solar e o Sol.

Imagens sem proporção entre si e em cores fantasia.


NERTHUZ/SHUTTERSTOCK

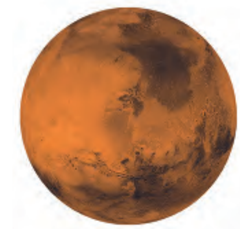
Mercúrio
57 910 000 km


PE3K/SHUTTERSTOCK

Vênus
108 200 000 km


WORKER/SHUTTERSTOCK

Terra
149 600 000 km


PE3K/SHUTTERSTOCK

Marte
227 940 000 km


PE3K/SHUTTERSTOCK

Júpiter
778 330 000 km


PE3K/SHUTTERSTOCK

Saturno
1 429 400 000 km


PE3K/SHUTTERSTOCK

Urano
2 870 990 000 km


PIKE-28/SHUTTERSTOCK

Netuno
4 504 300 000 km

Fonte de pesquisa: SILVA, Edna Maria Esteves. O Sistema Solar. *Planetário UFSC*. Disponível em: https://planetario.ufsc.br/o-sistema-solar/. Acesso em: 12 fev. 2024.

Para facilitar o trabalho com grandes distâncias, cientistas criaram a **unidade astronômica** (UA), que é a distância média entre a Terra e o Sol.

$$1 \text{ UA} = 1{,}496 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

A unidade astronômica é a mais adequada para medir distâncias dentro do Sistema Solar. Já para medirmos distâncias fora do Sistema Solar, a unidade de medida mais adequada é o **ano-luz** (al), equivalente à distância que a luz, propagando-se no vácuo, percorre em um ano.

$$1 \text{ al} \simeq 9{,}46 \cdot 10^{15} \text{ m}$$

Exercícios e problemas resolvidos

R4. A estrela mais próxima de nosso planeta, com exceção do Sol, é a Proxima Centauri, que dista, aproximadamente, 268 770 UA da Terra. Qual é a distância, em anos-luz, entre a Terra e a Proxima Centauri?

Fonte de pesquisa: THE NEAREST Neighbor Star. *Imagine The Universe!* Disponível em: https://imagine.gsfc.nasa.gov/features/cosmic/nearest_star_info.html. Acesso em: 12 fev. 2024.

Resolução

Inicialmente, escrevemos 1 UA em anos-luz.

$$1 \text{ UA} = 1{,}496 \cdot 10^{11} \text{ m} = \frac{1{,}496 \cdot 10^{11} \text{ m}}{9{,}46 \cdot 10^{15} \text{ m}} \cdot 9{,}46 \cdot 10^{15} \text{ m} \simeq \frac{1{,}496 \cdot 10^{-4}}{9{,}46} \text{al} \simeq 0{,}0000158 \text{ al}$$

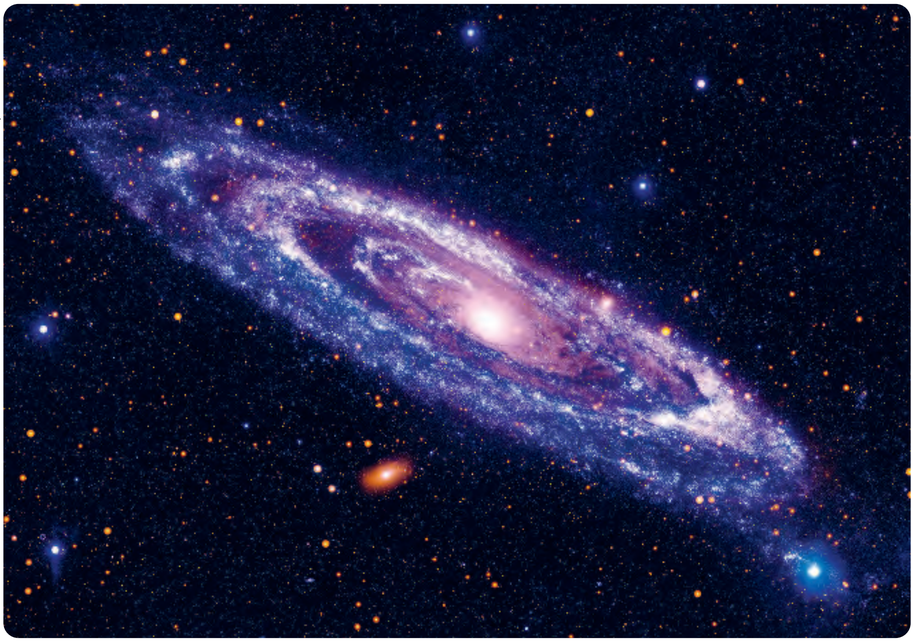
Desse modo:

$268\,770 \text{ UA} \simeq 268\,770 \cdot 0{,}0000158 \text{ al} \simeq 4{,}25 \text{ al}$

Portanto, a distância entre a Terra e a Proxima Centauri é, aproximadamente, 4,25 al.

R5. Uma das galáxias "vizinhas" mais próximas do planeta Terra é Andrômeda. De acordo com a Nasa, a Terra está a uma distância de, aproximadamente, $2{,}365 \cdot 10^{19}$ km dessa galáxia. Qual é a distância, em anos-luz, entre a Terra e Andrômeda?

NASA IMAGES/SHUTTERSTOCK



Galáxia de Andrômeda.

Imagem em cor fantasia.

PARA EXPANDIR

Descubra mais informações sobre a galáxia de Andrômeda e como ela poderia ser representada no céu noturno. Para isso, acesse o *site Alfa Crucis*, disponível em: https://alfacrucis.org/galeria/m31-a-grande-galaxia-de-andromeda/. Acesso em: 9 set. 2024.

Resolução

Inicialmente, escrevemos a distância entre a Terra e a galáxia de Andrômeda em metros.

$$2{,}365 \cdot 10^{19} \text{ km} = 2{,}365 \cdot 10^{19} \cdot 1\,000 \text{ m} = 2{,}365 \cdot 10^{22} \text{ m}$$

Em seguida, utilizando regra de três, convertemos essa medida em anos-luz.

LAÍS GARBELINI/ARQUIVO DA EDITORA

Distância (em al)		Distância (em m)
1	———	$9{,}46 \cdot 10^{15}$
x	———	$2{,}365 \cdot 10^{22}$

$$2{,}365 \cdot 10^{22} \cdot 1 = 9{,}46 \cdot 10^{15} \cdot x$$

$$x = \frac{2{,}365 \cdot 10^{22}}{9{,}46 \cdot 10^{15}}$$

$$x = \frac{2{,}365 \cdot 10^{7}}{9{,}46}$$

$$x = 0{,}25 \cdot 10^{7} = 2{,}5 \cdot 10^{6}$$

Portanto, a distância entre a Terra e a galáxia de Andrômeda é, aproximadamente, $2{,}5 \cdot 10^{6}$ al.

R6. Determine o comprimento aproximado, em unidades astronômicas, da órbita de Vênus em torno do Sol, sabendo que a distância média entre esses corpos é, aproximadamente, 0,7233 UA.

Resolução

Para determinar a medida aproximada desse comprimento, vamos considerar que a órbita de Vênus em torno do Sol tenha formato circular. Assim:

$$C = 2 \cdot \pi \cdot r$$

$$C = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}7233$$

$$C \simeq 4{,}54$$

Dica

Nos cálculos, foi considerado $\pi = 3{,}14$.

Portanto, o comprimento da órbita de Vênus em torno do Sol é, aproximadamente, 4,54 UA.

EDUCAÇÃO MIDIÁTICA

Inteligência humana na utilização da inteligência artificial

Início de conversa

Converse com os colegas sobre a questão a seguir.

1. Como você explicaria a alguém o que é inteligência artificial (IA)? Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes respondam de acordo com seus conhecimentos prévios. Incentive-os a compartilhar as características que conhecem e que ajudariam na explicação do conceito.

A **inteligência artificial (IA)** é uma combinação de programações que possibilita a máquinas executar ações que lembram aspectos relacionados à inteligência humana, como o raciocínio, o processamento da linguagem natural, o reconhecimento do entorno e a capacidade de resolver problemas lógicos. Existem diferentes funções executadas por IA que têm trazido inúmeros benefícios para diferentes áreas. Por meio delas, é possível melhorar diagnósticos médicos, potencializar informações de geolocalização, personalizar a experiência do usuário em mídias digitais, entre muitas outras possibilidades de atuação. Além disso, a IA tem contribuído em diversas tarefas nas pesquisas espaciais, como o gerenciamento de comandos de espaçonaves, a classificação de relevos e galáxias e até com o mapeamento de padrões de comportamento dos astros.


AP2010/AP/IMAGEPLUS

Apresentação da banda The Beatles, em 1964.

No campo das artes, a tecnologia da IA pode ser uma aliada de diversas formas. Em 2023, por exemplo, “Now and then”, denominada como a “última canção da banda The Beatles”, composição inédita do músico John Lennon, foi lançada pelos colegas de banda Paul McCartney e Ringo Starr. A música havia sido gravada de modo caseiro por John um ano antes de sua morte, em 1980. Com o auxílio da inteligência artificial, foi possível eliminar ruídos do ambiente que acompanhavam a voz do cantor, combiná-la com os novos arranjos feitos pelos colegas e assim criar uma gravação inédita.

No entanto, os limites éticos e a importância da regulamentação das inteligências artificiais têm gerado debates em todo o mundo, pois o desenvolvimento cada vez mais pleno dessas ferramentas chama a atenção também para usos inadequados e prejudiciais à sociedade. Isso ocorre principalmente com IAs capazes de gerar novos conteúdos, chamadas **inteligências artificiais generativas**.

No exemplo mencionado, a IA ajudou a melhorar a qualidade de uma gravação que de fato havia sido feita por John Lennon antes de sua morte. Se fosse utilizada uma IA generativa nesse contexto, seria possível, por exemplo, inserir a voz do músico em uma música que ele nunca cantou ou utilizar a imagem dele cantando uma de suas canções em um cenário onde nunca esteve. Essa possibilidade pode promover homenagens interessantes, mas também levanta o debate sobre até que ponto alguém tem o direito de utilizar uma ferramenta tecnológica para criar obras inéditas envolvendo o trabalho ou a imagem de uma pessoa já falecida.

Professor, professora: Pergunte a opinião dos estudantes acerca da criação artificial e do uso da imagem ou da voz de pessoas falecidas em contextos que não viveram. Comente que esse tema é bastante discutido no campo das artes e até motivou uma greve de roteiristas e atores de Hollywood, nos Estados Unidos, em 2023, visando uma regulamentação do uso dessa tecnologia em filmes e séries.

Quando pensamos nesse tipo de uso da IA generativa com pessoas vivas, as questões se aprofundam. Há diversos modos de usar esse tipo de IA em conteúdos de humor e entretenimento. Mas quais seriam os verdadeiros impactos provocados à vida de uma pessoa com a criação de um vídeo, áudio ou imagem contendo algo que nunca foi feito ou falado por ela?

Em termos de mídia, quando usada de maneira antiética e com fins prejudiciais, a IA generativa pode conduzir a cenários perigosos de desinformação. Vamos conhecer algumas possibilidades.

Textos

Algumas ferramentas criadas para auxiliar na elaboração de textos são utilizadas por usuários como mecanismos de pesquisa sobre assuntos diversos. Essa prática pode ser perigosa e gerar desinformação ao usuário, pois, para produzir seu texto, a IA se baseia em informações disponíveis na internet sobre o assunto em questão. No entanto, a ferramenta não é capaz de identificar se há confiabilidade ou não, podendo disseminar informações falsas ou distorcidas sobre o tema pesquisado.

Imagens

Há ferramentas que criam imagens com base em descrições textuais ou imagens de referência fornecidas pelo usuário. Além do amplo debate em torno dos direitos autorais referentes a esse tipo de criação, se utilizadas com má-fé, essas ferramentas podem gerar imagens falsas a fim de prejudicar pessoas ou grupos. Seu alto grau de realismo pode facilmente levar ao engano os usuários que se depararem com elas, disseminando informações falsas sobre o conteúdo ou pessoa em questão.

Vídeos e áudios

Muitos vídeos e áudios falsos são produzidos com base em uma técnica chamada ***deepfake***, termo em inglês que pode ser traduzido livremente como **falsificação profunda**. Por meio dessa técnica, rostos ou falas são modificados ou sobrepostos pela inteligência artificial para produzir vídeos ou áudios falsos. A *deepfake* frequentemente é utilizada em conteúdos de humor, nos quais a manipulação é explícita. No entanto, também pode ser utilizada com a intenção de disseminar informações falsas e prejudicar alguém.

ILUSTRAÇÕES: KEITHY MOSTACHI/ARQUIVO DA EDITORA

Independentemente do tipo de conteúdo veiculado, as desinformações geradas por ferramentas de inteligência artificial chamam a atenção pelo realismo. Uma imagem bem-produzida dificilmente é identificada sem um olhar mais atento.

Essas discussões são atuais e levantam questões com as quais a sociedade ainda está descobrindo como lidar. É importante reconhecer que a IA é uma tecnologia que veio para ficar e que traz inúmeros benefícios. No entanto, é necessário cada vez mais ter cuidado tanto ao utilizar quanto ao consumir conteúdos que possam ter sido produzidos por essas ferramentas, pois seu uso desenfreado e desregulamentado pode contribuir para a ampliação da desinformação e causar sérios prejuízos à aprendizagem e às relações sociais.

3. Resposta pessoal. Organize uma roda de conversa com a turma, cuidando para que todos tenham um momento para se expressar, respeitando as opiniões uns dos outros. Se julgar conveniente, amplie o repertório dessa conversa obtendo mais informações em *sites* da Unesco. Disponíveis em: https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000385146_por e https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000381137_por. Acessos em: 10 jul. 2024.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

1. O que é inteligência artificial generativa?

Resposta: É um tipo de inteligência artificial que pode gerar novos conteúdos, como textos, imagens, vídeos e áudios.

2. Você já utilizou algum aplicativo de inteligência artificial generativa no contexto escolar? Se sim, conte aos colegas como foi sua experiência.

3. Em sua opinião, quais devem ser os limites do uso da inteligência artificial generativa no contexto escolar? Participe de uma discussão com a turma sobre o assunto.

2. Resposta pessoal. Incentive os estudantes a relatar suas experiências caso tenham utilizado algumas dessas ferramentas. É possível que haja receio da parte deles em mencionar o uso de ferramentas de geração de textos em trabalhos escolares. Caso haja esse tipo de comentário, promova um ambiente de tranquilidade, deixando claro que o objetivo é a reflexão crítica sobre o assunto, livre de julgamentos.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

22. Transcreva no caderno os itens substituindo cada ■ pelo número adequado.

a) $2{,}992 \cdot 10^{11}$ m = ■ UA Resposta: $2{,}992 \cdot 10^{11}$ m = 2 UA

b) $2{,}3188 \cdot 10^{10}$ km = ■ UA Resposta: $2{,}3188 \cdot 10^{10}$ km = 155 UA

c) 5 UA = ■ km Resposta: 5 UA = $7{,}48 \cdot 10^{8}$ km

d) 13 UA = ■ m Resposta: 13 UA = $1{,}9448 \cdot 10^{12}$ m

e) $3{,}2912 \cdot 10^{12}$ m = ■ UA Resposta: $3{,}2912 \cdot 10^{12}$ m = 22 UA

f) 100 UA = ■ km Resposta: 100 UA = $1{,}496 \cdot 10^{10}$ km

g) 7,5 UA = ■ m Resposta: 7,5 UA = $1{,}122 \cdot 10^{12}$ m

h) $7{,}48 \cdot 10^{18}$ m = ■ UA Resposta: $7{,}48 \cdot 10^{18}$ m = $5 \cdot 10^{7}$ UA

i) 3,2 UA = ■ km Resposta: 3,2 UA = $4{,}7872 \cdot 10^{8}$ km

j) 0,9 UA = ■ m Resposta: 0,9 UA = $1{,}3464 \cdot 10^{11}$ m

23. Converta:

a) 17 al em quilômetros.
Resposta: Aproximadamente $1{,}6082 \cdot 10^{14}$ km.

b) 2,5 al em metros.
Resposta: Aproximadamente $2{,}365 \cdot 10^{16}$ m.

c) $5{,}2976 \cdot 10^{16}$ m em anos-luz.
Resposta: Aproximadamente 5,6 al.

d) $1{,}2298 \cdot 10^{14}$ km em anos-luz.
Resposta: Aproximadamente 13 al.

e) 10 al em quilômetros.
Resposta: Aproximadamente $9{,}46 \cdot 10^{13}$ km.

f) 1 UA em anos-luz.
Resposta: Aproximadamente $1{,}581 \cdot 10^{-5}$ al.

g) $4{,}7 \cdot 10^{10}$ km em unidades astronômicas.
Resposta: Aproximadamente $3{,}14 \cdot 10^{2}$ UA.

h) 3,65 al em quilômetros.
Resposta: Aproximadamente $3{,}4529 \cdot 10^{13}$ km.

i) 25,5 UA em anos-luz.
Resposta: Aproximadamente $4{,}032 \cdot 10^{-4}$ al.

j) $2{,}34124 \cdot 10^{13}$ m em unidades astronômicas.
Resposta: Aproximadamente $1{,}565 \cdot 10^{2}$ UA.

24. A distância média entre a Terra e a Lua é 384 400 000 m.

a) Expresse essa distância em unidades astronômicas.
Resposta: Aproximadamente $2{,}57 \cdot 10^{-3}$ UA.

b) Escreva, em notação científica, a distância média, em metros, entre a Terra e a Lua. Resposta: $3{,}844 \cdot 10^{8}$ m

PARA EXPANDIR

Temos a impressão de que a Terra e a Lua estão muito próximas. Mas a distância real vai te surpreender! Descubra o quão distante a Lua está de nós, acessando o vídeo "A distância real entre a Lua e a Terra", do canal *Manual do Mundo*.

25. O Universo é um lugar tão grande que é fácil ficar perplexo com as medições que os astrônomos fazem. Para ter uma ideia, de acordo com o *site The Nine Planets*, a estrela UY Scuti tem um diâmetro de aproximadamente 2,3 bilhões de quilômetros e está, a cerca de 5 219 al de distância da Terra.

a) Escreva, em notação científica, o diâmetro da estrela UY Scuti.
Resposta: $2{,}3 \cdot 10^{9}$ km

b) Qual é, em unidade astronômica, a distância entre a estrela UY Scuti e a Terra?
Resposta: Aproximadamente $3{,}3 \cdot 10^{8}$ UA.

26. Qual medida é maior:

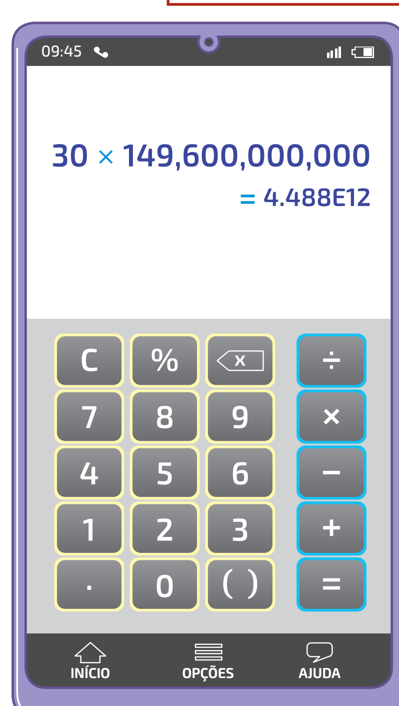
a) 158 452 000 km ou 3 UA? Resposta: 3 UA

b) 67 348 UA ou 2 al? Resposta: 2 al

c) 50 478 000 000 m ou 1,5 UA?
Resposta: 1,5 UA

d) 1 433 500 000 km ou 2,3 al?
Resposta: 2,3 al

27. Para realizarmos conversões entre unidades de medida, podemos contar com o auxílio do aplicativo de calculadora de um *smartphone*. Analise, por exemplo, como podemos escrever, em metros, a distância média entre Netuno e o Sol, que é, aproximadamente, 30 UA.



RONALDO INÁCIO E SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

Professor, professora: Na imagem apresentada nesta página, as classes estão separadas por vírgula e não há zeros depois dos decimais no resultado. Porém, de acordo com o modelo e a marca do aparelho, essa indicação pode variar, ou seja, o ponto pode estar no lugar das vírgulas e podem aparecer casas decimais nulas no resultado.

Observação

Em grande parte dos aplicativos de calculadoras de *smartphones*, é utilizado o símbolo **E** (ou **e**) no visor para indicar a expressão "vezes 10 elevado a".

Portanto, o resultado obtido indica que a distância média entre Netuno e o Sol é, aproximadamente, $4{,}488 \cdot 10^{12}$ m. Note que esse aplicativo de calculadora apresenta o resultado em notação científica.

a) Sabendo que a distância média entre Júpiter e o Sol é, aproximadamente, 5,2 UA, determine qual dos itens corresponde ao resultado apresentado nesse aplicativo de calculadora ao converter essa distância em metros. Resposta: 7.7792E11

- 7.7792E11
- 7.7792E12
- 7.7792E13

b) Se calcularmos $13 \cdot (10)^{22}$ nesse aplicativo, qual será o resultado?
Resposta: 1.3E23

28. Leia o texto.

> [...]
>
> Em 2011, a [sonda espacial] Voyager 1 tornou-se o primeiro objeto artificial a ultrapassar a **heliosfera** [...]. Agora, uma série de cinco artigos publicados na revista Nature Astronomy revela que, em 5 de novembro de 2018, a Voyager 2 alcançou o mesmo ponto.
>
> [...] Stamatios Krimigis, o principal autor de um dos artigos, conta que a segunda sonda passou pela **heliopausa**, a fronteira entre a heliosfera e o espaço interestelar, quando estava a 119 unidades astronômicas do Sol [...]. A Voyager 1 fez a travessia praticamente à mesma distância: 121,6 UA.
>
> [...]
>
> OLIVETO, Paloma. Voyager 2 dá seu primeiro sinal. *Correio Braziliense*, Brasília, 5 nov. 2019. Ciência & Saúde, p. 14. © Paloma Oliveto/CB/D.A Press.

Heliosfera: espécie de bolha criada pelo Sol que se estende bem além da órbita de Plutão.

Heliopausa: borda mais externa da heliosfera, que delimita o início do espaço interestelar.

Como a Terra tem formato aproximado de uma esfera, para nos auxiliar na compreensão das distâncias apresentadas no texto, podemos compará-las com o comprimento da circunferência terrestre na linha do Equador. Sabendo que o raio de nosso planeta tem, aproximadamente, 6 370 km, determine quantas voltas completas em torno da Terra equivalem a essas distâncias. Resposta: 121,6 UA: aproximadamente 454 743 voltas; 119 UA: aproximadamente 445 020 voltas.

Dica

Considere $\pi = 3{,}14$.

29. Investigações da Nasa com o Telescópio Espacial James Webb Space adicionadas a estudos recentes sugerem que um **exoplaneta** potencialmente rochoso a aproximadamente 7 594 936,7 UA de distância da Terra, chamado K2-18b, tem potencial de conter uma atmosfera rica em hidrogênio e uma superfície oceânica coberta de água. Qual é, em anos-luz, a distância entre K2-18b e a Terra? Resposta: Aproximadamente 120 al.

Fonte de pesquisa: WEBB discovers methane, carbon dioxide in atmosphere of K2-18 b. *Nasa*, 11 set. 2023. Disponível em: https://www.nasa.gov/universe/exoplanets/webb-discovers-methane-carbon-dioxide-in-atmosphere-of-k2-18-b/. Acesso em: 12 fev. 2024.

Exoplaneta: planeta que não faz parte do Sistema Solar.

30. Um artigo publicado pela Nasa, em dezembro de 2022, aponta a existência de galáxias cuja luz viajou aproximadamente 13,4 bilhões de anos-luz antes de chegar até nós.

Qual é, em quilômetros, a distância aproximada entre essas galáxias e a Terra?
Resposta: Aproximadamente $1{,}27 \cdot 10^{23}$ km.

31. Edmond Halley (1656-1742), astrônomo e matemático inglês, ficou famoso por observar a órbita e determinar a periodicidade de cometas. Ele previu corretamente que um cometa retornaria em 1758, mas faleceu 16 anos antes. Em sua homenagem, esse corpo celeste ficou conhecido como cometa Halley. No ano de 837, foi registrada a passagem mais próxima desse cometa à Terra, a uma distância de $4{,}94 \cdot 10^6$ km.

Sabendo que a distância entre a Terra e a Lua mede aproximadamente $3{,}844 \cdot 10^5$ km, o cometa passou a uma distância: Resposta: Alternativa **b**.

a) entre 11 e 12 vezes maior do que a distância entre a Terra e a Lua.

b) entre 12 e 13 vezes maior do que a distância entre a Terra e a Lua.

c) entre 13 e 14 vezes maior do que a distância entre a Terra e a Lua.

d) entre 14 e 15 vezes maior do que a distância entre a Terra e a Lua.

32. Além da Via Láctea, galáxia da qual fazemos parte, outras galáxias podem ser vistas da Terra a olho nu, ou seja, sem o uso de equipamentos. Algumas delas são: a galáxia de Andrômeda, a Grande Nuvem de Magalhães e a Pequena Nuvem de Magalhães.

Distância aproximada entre algumas galáxias e a Terra

Galáxia	Distância aproximada (em al)
Grande Nuvem de Magalhães	160 000
Pequena Nuvem de Magalhães	200 000

Fonte de pesquisa: ALVES, Juliano Rossi. *A conquista do céu do sul*: as Nuvens de Magalhães e a escala do Universo. Disponível em: https://www.if.ufrgs.br/~dpavani/FIS02008/AULAS/2011_1_ciclo2/ceudosul.pdf. Acesso em: 24 set. 2024.

Respostas do item **a** no final do **Livro do Estudante**.

a) Escreva as distâncias apresentadas em:
- metros.
- quilômetros.
- unidades astronômicas.

b) Em sua opinião, é melhor utilizar o ano-luz ou a unidade astronômica para operar com as distâncias apresentadas? Justifique sua resposta. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes respondam que a melhor opção é o ano-luz.

c) Utilizando os dados apresentados, elabore em seu caderno um problema envolvendo as distâncias entre essas galáxias e a Terra. Depois, peça a um colega que o resolva enquanto você resolve o dele. Por fim, verifiquem se as respostas estão corretas. Resposta pessoal. A resposta depende de cada problema elaborado pelos estudantes.

TRABALHO E JUVENTUDES

A profissão de astrofísico

Vimos que um ano-luz é a distância percorrida em um ano pela luz, quando propagada no vácuo. Essa unidade de medida é usada para medir distâncias fora do Sistema Solar.

Essas medições são usadas pelos astrofísicos, profissionais que estudam a composição do Universo e seus elementos, como planetas, asteroides, estrelas e galáxias, aplicando conceitos, princípios e leis da Física. Os dados analisados pelos astrofísicos são coletados por instrumentos lançados no espaço, como telescópios e satélites. Posteriormente, essas análises são realizadas com o auxílio de *softwares* computacionais, fornecendo informações sobre o Universo, como as propriedades das estrelas.

Professor, professora: Aproveite o momento e enfatize a importância do astrofísico no desenvolvimento de tecnologias que contribuem com estudos sobre a possibilidade de meteoros atingirem a Terra, por exemplo. Explique aos estudantes que esses profissionais desenvolvem estudos que investigam, entre outras coisas, a formação de estrelas e planetas, assim como a origem, a evolução e a expansão do Universo.

RUBENS CHAVES/PULSAR IMAGENS

Observação

É possível se tornar um astrofísico de duas maneiras: cursando uma graduação em Física e, em seguida, uma pós-graduação em Astronomia ou graduar-se em Astronomia em uma instituição de ensino superior que seja reconhecida pelo Ministério da Educação (MEC). Em ambos os casos, é essencial que o profissional conclua, além da graduação, um curso de doutorado em Astrofísica, obtendo assim o reconhecimento para o ingresso no mercado de trabalho com essa função.

Observatório Dietrich Schiel – Centro de Divulgação da Astronomia, no Campus da USP (Universidade de São Paulo), em São Carlos, SP, em 2015.

Além da formação acadêmica, é recomendável que os astrofísicos tenham interesse e habilidades técnicas voltadas à programação, por exemplo, e à Matemática, uma vez que seus estudos envolvem o trabalho com cálculos, algoritmos e o uso de *softwares*.

Seu trabalho pode ser desenvolvido dentro das universidades, atuando como docente e pesquisador, em institutos de pesquisas espaciais ou em indústrias, no setor da tecnologia aeroespacial.

Atividades

1. Resposta pessoal. Incentive o compartilhamento de ideias entre os estudantes e procure deixá-los à vontade para que se expressem quanto ao interesse ou não pela carreira de astrofísico. Em caso afirmativo, instigue-os a comentar com a turma o que lhes chama a atenção na profissão, com o que gostariam de trabalhar etc.

Anote as respostas no caderno.

1. Você já tinha ouvido falar na profissão de astrofísico? Algum aspecto chamou a sua atenção e você ficou com vontade de conhecer mais essa profissão? Converse com os colegas.

2. Forme dupla com um colega e pesquisem notícias relacionadas a estudos envolvendo a Astrofísica. Procurem saber o que foi descoberto, o nome do astrofísico envolvido e o impacto da pesquisa para a sociedade. Apresentem os resultados da pesquisa aos colegas em folha impressa ou em *slides*.

Resposta pessoal. Oriente os estudantes a pesquisar primeiro em *sites* de universidades brasileiras, pois é possível que encontrem estudos de astrofísicos de nosso país. Algumas possibilidades são: Universidade de São Paulo (USP); Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ); Universidade Federal de Sergipe (UFS); Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC); entre outras. Após essa primeira busca, eles podem fazer as pesquisas em *sites* convencionais, ampliando o espectro de notícias relacionadas ao tema também para fora do país.

Medindo pequenos comprimentos

Vimos, no tópico anterior, situações que envolvem comprimentos muito grandes. Agora, vamos estudar alguns cenários que envolvem comprimentos muito pequenos. Analise os seguintes exemplos.

Imagens sem proporção entre si.


PHOTOSITE/SHUTTERSTOCK

O diâmetro médio de um fio de teia de aranha mede cerca de $1{,}5 \cdot 10^{-7}$ m.


KHLUNG CENTER/SHUTTERSTOCK

A formiga operária quenquém, do gênero *Acromyrmex*, tem comprimento que varia entre 0,008 m e 0,01 m.


GERD GUENTHER/SPL/FOTOARENA

O diâmetro de uma alga marinha verde *Volvox aureus* tem cerca de 0,000005 m. Imagem com contraste de cor aplicado e aumento aproximado de 430 vezes.


AFANASIEV ANDRII/SHUTTERSTOCK

O besouro da batata, de nome científico *Leptinotarsa decemlineata*, tem comprimento que varia entre 0,008 m e 0,01 m.

Para expressar medidas em situações semelhantes às apresentadas, geralmente utiliza-se o **milímetro** (mm), o **micrômetro** (µm) e o **nanômetro** (nm), que são alguns submúltiplos do metro.

$1 \text{ mm} = 0{,}001 \text{ m} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ m}$

$1\ \mu\text{m} = 0{,}000001 \text{ m} = 1 \cdot 10^{-6} \text{ m}$

$1 \text{ nm} = 0{,}000000001 \text{ m} = 1 \cdot 10^{-9} \text{ m}$

Exercícios e problemas resolvidos

R7. Escreva, em micrômetros, o diâmetro médio de um fio de teia de aranha.

Resolução

Como $1\ \mu\text{m} = 1 \cdot 10^{-6}$ m, temos:

$$1{,}5 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 1{,}5 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-6} \text{ m} = 1{,}5 \cdot 10^{-1} \cdot 1\ \mu\text{m} = 0{,}15\ \mu\text{m}$$

Portanto, o diâmetro médio da teia de aranha tem cerca de 0,15 µm.

R8. As informações genéticas de um organismo ficam armazenadas no DNA, que por sua vez se localiza no interior do núcleo de uma célula. Em células típicas animais, o núcleo tem formato esférico, com diâmetro entre $1 \cdot 10^{-2}$ mm e $2 \cdot 10^{-2}$ mm. Escreva essas medidas em micrômetros.

Resolução

Inicialmente, determinamos a equivalência entre milímetros e micrômetros.

Como $1 \text{ mm} = 1 \cdot 10^{-3}$ m e $1 \ \mu\text{m} = 1 \cdot 10^{-6}$ m, temos:

$$1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m} = 10^{-3} \text{ m} \cdot \frac{10^3}{10^3} = 10^3 \cdot \frac{10^{-3}}{10^3} \text{ m} = 10^3 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 10^3 \cdot 1 \ \mu\text{m} = 10^3 \ \mu\text{m}$$

Por fim, convertemos $1 \cdot 10^{-2}$ mm e $2 \cdot 10^{-2}$ mm em micrômetros.

$$1 \cdot 10^{-2} \text{ mm} = 1 \cdot 10^{-2} \cdot 10^3 \ \mu\text{m} = 10 \ \mu\text{m}$$

$$2 \cdot 10^{-2} \text{ mm} = 2 \cdot 10^{-2} \cdot 10^3 \ \mu\text{m} = 20 \ \mu\text{m}$$

Portanto, $1 \cdot 10^{-2}$ mm $= 10 \ \mu$m e $2 \cdot 10^{-2}$ mm $= 20 \ \mu$m.

R9. Para formar os cromossomos, as células, em seu processo de divisão, condensam as moléculas de DNA fazendo suas fibras passarem de $3 \cdot 10^{-5}$ cm de espessura até sua condensação máxima, com espessura de $7 \cdot 10^{-1}$ µm. Dessa maneira, é possível armazenar todas as informações genéticas da célula.

Qual é, em nanômetros, a diferença entre a espessura de uma célula antes e depois de sua condensação máxima?

Resolução

Inicialmente, convertemos $3 \cdot 10^{-5}$ cm em nanômetros. Como $1 \text{ nm} = 1 \cdot 10^{-9}$ m, temos:

$$3 \cdot 10^{-5} \text{ cm} = 3 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{-2} \text{ m} = 300 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-7} \text{ m} =$$
$$= 300 \cdot 10^{-9} \text{ m} = 300 \cdot 1 \text{ nm} = 300 \text{ nm}$$

Em seguida, convertemos $7 \cdot 10^{-1}$ µm em nanômetro. Como $1 \ \mu\text{m} = 1 \cdot 10^{-6}$ m e $1 \text{ nm} = 1 \cdot 10^{-9}$ m, segue que $1 \ \mu\text{m} = 10^3$ nm. Desse modo:

$$7 \cdot 10^{-1} \ \mu\text{m} = 7 \cdot 10^{-1} \cdot 10^3 \text{ nm} = 7 \cdot 10^2 \text{ nm} = 700 \text{ nm}$$

Por fim, calculamos a diferença desejada.

$$700 - 300 = 400$$

Portanto, a diferença entre as espessuras é 400 nm.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

33. Transcreva no caderno os itens substituindo cada ■ pelo número adequado.

a) $1{,}49 \cdot 10^{-4}$ m = ■ µm Resposta: $1{,}49 \cdot 10^{-4}$ m = 149 µm

b) $5{,}2 \cdot 10^{-9}$ m = ■ nm Resposta: $5{,}2 \cdot 10^{-9}$ m = 5,2 nm

c) $2{,}3 \cdot 10^{-6}$ cm = ■ nm Resposta: $2{,}3 \cdot 10^{-6}$ cm = 23 nm

d) $1{,}713 \cdot 10^{-3}$ mm = ■ µm Resposta: $1{,}713 \cdot 10^{-3}$ mm = 1,713 µm

e) 7,1 µm = ■ cm Resposta: 7,1 µm = $7{,}1 \cdot 10^{-4}$ cm

f) 28 µm = ■ m Resposta: 28 µm = $2{,}8 \cdot 10^{-5}$ m

g) 8 nm = ■ mm Resposta: 8 nm = $8 \cdot 10^{-6}$ mm

h) 64 nm = ■ m Resposta: 64 nm = $6{,}4 \cdot 10^{-8}$ m

34. O raio da Terra na linha do equador tem, aproximadamente, 6 370 km.

a) Considerando $\pi = 3{,}14$, determine, em micrômetros, o comprimento aproximado da circunferência da Terra. Resposta: Aproximadamente $4{,}00036 \cdot 10^{13}$ µm.

b) Em sua opinião, o micrômetro é adequado para expressar essa medida ou você indicaria outra unidade de medida de comprimento mais apropriada? Por quê? Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes respondam que a unidade mais adequada para expressar essa medida seria o quilômetro, pois é usado para expressar medidas de comprimento muito grandes, enquanto o micrômetro é usado para as que são muito pequenas.

Professor, professora: A tarefa **40** propõe aos estudantes a elaboração de um problema utilizando os conceitos estudados, contribuindo assim para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações.

35. As bactérias são, em sua maioria, tão pequenas que é praticamente impossível vê-las a olho nu. Por exemplo, a bactéria *Staphylococcus* pode chegar, no máximo, a 1,5 µm de diâmetro. Contudo, em 1997, foi descoberta a *Thiomargarita namibiensis* cujo diâmetro pode chegar a 0,75 mm.

a) Qual é a diferença, em nanômetro, entre o diâmetro máximo das bactérias *Thiomargarita namibiensis* e *Staphylococcus*? Resposta: 748 500 nm

b) Em sua opinião, qual é a unidade de medida de comprimento mais adequada para expressar o diâmetro dessas bactérias? Por quê? Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes respondam nanômetros ou micrômetros, porque servem para expressar medidas de comprimento muito pequenas.

36. Quantas vezes:

a) 10 µm é maior do que 7 nm? Resposta: Cerca de 1 429 vezes.

b) 25 µm é maior do que 1,6 nm? Resposta: 15 625 vezes.

c) 125 nm é menor do que 12,6 mm? Resposta: 100 800 vezes.

d) 9 cm é maior do que 45 µm? Resposta: 2 000 vezes.

e) 136 mm é menor do que 26 m? Resposta: Cerca de 191 vezes.

f) 1 km é maior do que 1 458 µm? Resposta: Cerca de 685 871 vezes.

37. (Enem, 2017) A *Chlamydia*, a menor bactéria do mundo, mede cerca de 0,2 micrômetro (1 micrômetro equivale à milionésima parte de um metro). Para ter uma noção de como é pequena a *Chlamydia*, uma pessoa resolveu descrever o tamanho da bactéria na unidade milímetro.

A medida da *Chlamydia*, em milímetro, é Resposta: Alternativa **c**.

a) 2×10^{-1} **b)** 2×10^{-2} **c)** 2×10^{-4} **d)** 2×10^{-5} **e)** 2×10^{-7}

38. A moeda de R$ 1,00 tem 27 mm de diâmetro.

Dica
Considere $\pi = 3{,}14$.

a) Qual é, em milímetros, o comprimento da circunferência dessa moeda? Resposta: Aproximadamente 84,78 mm.

b) O comprimento da circunferência dessa moeda é maior do que 2 745 µm? Justifique sua resposta. Resposta: Sim, pois 2 745 µm = 2,745 mm e 2,745 mm < 84,78 mm.

39. A sofisticada cor das asas da borboleta do tipo *Papilio blumei*, comum em locais de clima tropical e originária da Indonésia, é uma característica que favorece sua defesa contra predadores naturais e tem atraído o interesse de muitos pesquisadores.

Borboleta *Papilio blumei*.

VALDIS SKUDRE/SHUTTERSTOCK

> [...]
>
> A geração de cor intensa, como o verde, foi recentemente conseguida pela universidade de Cambridge na Inglaterra ao reproduzir em laboratório a estrutura encontrada nas asas da borboleta do tipo *Papilo blumei*. [...] O resultado foi um efeito visual semelhante ao verde típico da *Papilo blumei* e foi indicada pelos autores como tecnologia ideal para a estampagem de células de dinheiro ou ingressos, as quais seriam quase impossíveis de falsificação.
>
> [...]
>
> ASSIS, Odilio B. G. A asa da borboleta e a nanotecnologia: cor estrutural. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, São Paulo, v. 35, n. 2, 2013. p. 9. Disponível em: https://www.scielo.br/j/rbef/a/cW79c36QdVJJknVrgVMHNYg/?lang=pt. Acesso em: 24 set. 2024.

a) As escamas das asas da borboleta do tipo *Papilio blumei* têm cerca de 0,1 mm de comprimento, 0,03 mm de largura e 0,002 mm de altura. Represente essas medidas em micrômetros. Resposta: 100 µm de comprimento, 30 µm de largura e 2 µm de altura.

b) Para apresentar as medidas microscópicas no item **a**, foi usado o milímetro em vez do micrômetro, unidade de medida mais adequada para esse caso. Em sua opinião, por quais motivos essa unidade de medida pode ter sido utilizada? Resposta pessoal. Uma possível resposta: Para facilitar a compreensão ao permitir a comparação com uma unidade mais utilizada no cotidiano.

40. Com base nas informações apresentadas a seguir, elabore em seu caderno um problema envolvendo notação científica. Em seguida, troque com um colega para que ele o resolva. Resposta pessoal. A resposta depende das informações que o estudante escolher.

Diâmetro dos ovos de alguns peixes marinhos da costa brasileira

Peixe	Diâmetro
Sardinha (*Sardinella brasiliensis*)	1,2 mm
Robalo (*Centropomus undecimalis*)	700 µm
Garoupa (*Epinephelus marginatus*)	0,8 mm
Bijupirá (*Rachycentron canadum*)	1 300 µm

Fonte de pesquisa: CERQUEIRA, Vinicius Ronzani *et al*. Manejo de reprodutores e controle da reprodução de peixes marinhos da costa brasileira. *Revista Brasileira de Reprodução Animal*, Belo Horizonte, v. 41, n. 1, p. 94-102, jan./mar. 2017. Disponível em: http://www.cbra.org.br/portal/downloads/publicacoes/rbra/v41/n1/p094-102%20(RB677).pdf. Acesso em: 24 set. 2024.

Massa

No SI, a unidade de base de medida de massa é o **quilograma**. A primeira definição dessa unidade equivalia a um decímetro cúbico de água destilada, no vácuo, em seu **ponto de solidificação**. Mais tarde, tal definição foi abandonada ao se perceber que a pureza da água influencia sua massa.

Para que o padrão se mantivesse e pudesse ser reproduzido, em 1889, o quilograma foi redefinido como a massa de uma liga de platina-irídio, que ficou armazenada na cidade de Sèvres, na França.

Ponto de solidificação: medida da temperatura em que uma substância passa do estado líquido para o estado sólido.


HERM/ULLSTEIN BILD/GETTY IMAGES

Reprodução de um protótipo do quilograma de platina-irídio.

PARA EXPANDIR

Atualmente, milhões de atividades e transações diárias dependem de unidades e de instrumentos de medida. Que tal se aventurar na história da criação do Sistema Internacional de Unidades? Para isso, leia o livro *A medida do mundo: a busca por um sistema universal de pesos e medidas*, de Robert P. Crease.

Em 2019, após muitas pesquisas, a 26ª Conferência Geral de Pesos e Medidas, em Versalhes, na França, redefiniu o quilograma com base em uma constante matemática chamada constante de Planck. A nova definição não afeta as medições de massa realizadas no dia a dia, mas permite aos cientistas trabalhar de maneira mais precisa.

Além do quilograma, podemos expressar uma medida de massa utilizando outras unidades de medida. Algumas delas são: a **tonelada** (t), o **grama** (g) e o **miligrama** (mg).

$$1 \text{ t} = 1000 \text{ kg} = 1 \cdot 10^3 \text{ kg}$$

$$1 \text{ g} = 0{,}001 \text{ kg} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$$

$$1 \text{ mg} = 0{,}00001 \text{ kg} = 1 \cdot 10^{-6} \text{ kg}$$

Questão F.

Uma tonelada equivale a quantos gramas? E a quantos miligramas?

Resposta: $1 \cdot 10^6$ g; $1 \cdot 10^9$ mg

Exercícios e problemas resolvidos

R10. A unidade de medida de massa **arroba** é comumente utilizada na agropecuária para expressar a massa de bovinos e suínos e assume diferentes valores dependendo do país e da época. No Brasil, uma arroba é considerada igual a 15 kg.

Um pecuarista precisa aplicar certo medicamento em 4 bovinos que têm, em média, 510 kg cada. Sabendo que deve ser aplicado 0,2 mg para cada arroba do animal e que são vendidas embalagens com 10 mg, 30 mg, 50 mg e 100 mg desse medicamento, determine qual dessas embalagens o pecuarista deve comprar de modo que não falte medicamento e reste a menor quantidade possível.

Resolução

Inicialmente, calculamos a massa média total desses 4 animais.

$$4 \cdot 510 \text{ kg} = 2\,040 \text{ kg}$$

Em seguida, convertemos essa medida em arrobas. Como uma arroba é igual a 15 kg, fazemos:

$$2\,040 \text{ kg} = \frac{2\,040}{15} \text{ arrobas} = 136 \text{ arrobas}$$

Na sequência, calculamos a quantidade de medicamento necessário para os quatro bovinos. Como é necessário 0,2 mg de medicamento para cada arroba do animal, temos:

$$136 \cdot 0{,}2 \text{ mg} = 27{,}2 \text{ mg}$$

Portanto, o pecuarista deve comprar a embalagem de 30 mg.

R11. O Índice de Massa Corporal (IMC) é utilizado para avaliar e classificar o estado nutricional de uma pessoa. Esse índice é calculado dividindo a massa pela altura elevada ao quadrado, em que a massa é expressa em quilogramas e a altura, em metros.

$$\text{IMC} = \frac{\text{massa em quilogramas}}{(\text{altura em metros})^2}$$

Acompanhe a classificação do estado nutricional de pessoas adultas de acordo com o IMC.

Classificação do estado nutricional de pessoas adultas de acordo com o IMC

Baixo peso: IMC menor do que 18,5 kg/m^2.

Peso adequado: IMC maior ou igual a 18,5 kg/m^2 e menor do que 25 kg/m^2.

Sobrepeso: IMC maior ou igual a 25 kg/m^2 e menor do que 30 kg/m^2.

Obesidade: IMC maior do que 30 kg/m^2.

KEITHY MOSTACHI/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte de pesquisa: DICAS em saúde. *Biblioteca Virtual em Saúde*, dez. 2009. Disponível em: https://bvsms.saude.gov.br/bvs/dicas/215_obesidade.html. Acesso em: 9 set. 2024.

Certa pessoa adulta, que tem 1,60 m de altura, calculou corretamente seu IMC e obteve 16 kg/m^2 como resultado. Quantos gramas ela precisa "ganhar", no mínimo, para que, de acordo com o IMC, seu estado nutricional seja classificado como "Peso adequado"?

Resolução

Inicialmente, determinamos a massa atual, em quilogramas, dessa pessoa, que indicaremos por *x*.

$$\text{IMC} = \frac{\text{massa em quilogramas}}{(\text{altura em metros})^2}$$

$$16 = \frac{x}{(1{,}6)^2}$$

$$16 = \frac{x}{2{,}56}$$

$$x = 16 \cdot 2{,}56$$

$$x = 40{,}96$$

Assim, a massa atual dessa pessoa é 40,96 kg.

Para que o estado nutricional seja classificado como "Peso adequado", o IMC deve ser, no mínimo, igual a 18,5kg/m^2. Assim, indicando por *y* a massa mínima desejada, em quilograma, temos:

$$\text{IMC} = \frac{\text{massa em quilogramas}}{(\text{altura em metros})^2}$$

$$18{,}5 = \frac{y}{(1{,}6)^2}$$

$$18{,}5 = \frac{y}{2{,}56}$$

$$y = 18{,}5 \cdot 2{,}56$$

$$y = 47{,}36$$

Logo, a massa mínima desejada é 47,36 kg.

Em seguida, calculamos a diferença entre essas massas.

$$47{,}36 \text{ kg} - 40{,}96 \text{ kg} = 6{,}4 \text{ kg}$$

Por fim, convertemos essa diferença em gramas. Como $1 \text{ g} = 1 \cdot 10^{-3}$ kg, temos:

$$6{,}4 \text{ kg} = 6{,}4 \cdot 10^3 \text{ g} = 6\,400 \text{ g}$$

Portanto, essa pessoa precisa "ganhar", no mínimo, 6 400 g.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

41. Transcreva no caderno os itens substituindo cada ■ pelo número adequado.

a) $1{,}2 \cdot 10^5$ mg = ■ g
Resposta: $1{,}2 \cdot 10^5$ mg = 120 g

b) $5{,}3 \cdot 10^7$ mg = ■ kg
Resposta: $5{,}3 \cdot 10^7$ mg = 53 kg

c) $3{,}7 \cdot 10^{-5}$ kg = ■ mg
Resposta: $3{,}7 \cdot 10^{-5}$ kg = 37 mg

d) $1{,}73 \cdot 10^{-5}$ t = ■ g
Resposta: $1{,}73 \cdot 10^{-5}$ t = 17,3 g

e) $6{,}2 \cdot 10^6$ g = ■ t
Resposta: $6{,}2 \cdot 10^6$ g = 6,2 t

f) 5 764 kg = ■ t
Resposta: 5 764 kg = 5,764 t

g) 0,08 g = ■ mg
Resposta: 0,08 g = 80 mg

h) 640 t = ■ kg
Resposta: 640 t = $6{,}4 \cdot 10^5$ kg

i) 91 450 mg = ■ kg
Resposta: 91 450 mg = 0,09145 kg

42. Maria realizou uma pesquisa em um *site* da internet para determinar as massas do Sol e de Júpiter. Analise as medidas obtidas por ela e anotadas no caderno.

Massa do Sol	Massa de Júpiter
aproximadamente	aproximadamente
$1{,}989 \cdot 10^{30}$ kg	$1{,}898 \cdot 10^{30}$ g

De acordo com essas informações, a massa do Sol equivale a quantas vezes a massa de Júpiter?
Resposta: Cerca de 1 048 vezes.

43. Se uma pessoa adulta tem 1,83 m de altura e 110 kg, qual é a classificação de seu estado nutricional, de acordo com o IMC? Se ela "perder" 9 600 g, qual será, de acordo com o IMC, a classificação de seu estado nutricional?
Resposta: Obesidade; sobrepeso.

44. Leia a tirinha.

A libra é uma unidade de medida de massa do sistema britânico, que equivale a 16 onças. Sabendo que uma libra é igual a, aproximadamente, 453,6 g, classifique as sentenças a seguir em verdadeira ou falsa. Em seguida, reescreva as sentenças falsas no caderno, tornando-as verdadeiras.

a) 125 onças equivalem a, aproximadamente, 3 543,75 g. Resposta: Verdadeira.

b) A massa de uma pessoa com 53 kg expressa em libras e onças é igual a, aproximadamente, 116 libras e 0,843 onças. Resposta: Falsa. Sugestão de correção: A massa de uma pessoa com 53 kg expressa em libras e onças é igual a, aproximadamente, 116 libras e 13,488 onças.

c) Uma mala de 68 libras de massa está abaixo do limite de 30 kg de certa empresa de ônibus. Resposta: Falsa. Sugestão de correção: Uma mala de 68 libras de massa está acima do limite de 30 kg de certa empresa de ônibus.

d) Uma embalagem de 170 g tem, aproximadamente, 6 onças. Resposta: Verdadeira.

45. Para expressar a massa de **gemas**, geralmente utiliza-se o **quilate**, que equivale a, aproximadamente, $2 \cdot 10^{-4}$ kg. Qual é a massa, em quilates, de uma safira azul com aproximadamente 280,8 g?
Resposta: Aproximadamente 1 404 quilates.

Gema: mineral, rocha ou material petrificado que, quando lapidado ou polido, torna-se colecionável ou é destinado para peças de adorno.

46. Durante uma pesquisa orientada pelo professor de **Física**, Fernando descobriu que a massa de Eros, que é o primeiro asteroide visitado por uma espaçonave, é aproximadamente $6{,}69 \cdot 10^{15}$ kg e que a massa da Terra é aproximadamente, $5{,}9722 \cdot 10^{24}$ kg. Qual é a razão entre a massa de Eros e a da Terra?
Resposta: Aproximadamente $1{,}12 \cdot 10^{-9}$.

47. A Organização Mundial da Saúde (OMS) recomenda que sejam consumidos menos de 5 g de sal de cozinha por dia. Cada grama desse sal contém 400 mg de sódio, e o excesso desse componente no corpo contribui para o aumento da pressão arterial e dos riscos de doenças cardiovasculares. Grande parte da população mundial consome mais do que 9 g de sal por dia, e alimentos processados e ultraprocessados são grandes responsáveis por esse excesso.

Fonte de pesquisa: SODIUM reduction. *World Health Organization*, 14 set. 2023. Disponível em: https://www.who.int/news-room/fact-sheets/detail/salt-reduction. Acesso em: 12 fev. 2024.

a) Quantos por cento de sódio há em 1 g de sal? Resposta: 40%

b) Se uma pessoa ingerir 9 g de sal em um dia, quantos gramas de sódio ela terá ingerido? Resposta: 3,6 g

48. Segundo projeções da ONU Meio Ambiente, em todo o planeta são consumidas cerca de 5 trilhões de sacolas plásticas por ano. Além disso, metade do plástico consumido no mundo é descartável e pelo menos 13 milhões de toneladas vão parar nos oceanos anualmente, afetando aproximadamente 600 espécies de animais marinhos, das quais 15% estão ameaçadas de extinção.

ODS 12

Fonte de pesquisa: CAMPOS, Ana Cristina. Poluição plástica é tema do Dia Mundial do Meio Ambiente 2018. *Agência Brasil*, 5 jun. 2018. Disponível em: https://agenciabrasil.ebc.com.br/geral/noticia/2018-06/poluicao-plastica-e-tema-do-dia-mundial-do-meio-ambiente-2018. Acesso em: 12 fev. 2024.

a) Se uma sacola plástica tem cerca de 3 g, quantas toneladas de sacolas plásticas são consumidas anualmente em todo o planeta? Resposta: Aproximadamente $1{,}5 \cdot 10^{7}$ t.

b) Em sua opinião, que atitudes podem contribuir para reduzir o volume desses resíduos sólidos descartados incorretamente? Resposta pessoal. Algumas possíveis respostas: Utilizar sacolas reaproveitáveis; fazer o descarte correto do lixo, reciclando as sacolas que não serão mais utilizadas.

49. Além do grama e seus múltiplos, por praticidade ou costume, outras unidades de medida de massa são utilizadas em situações específicas no Brasil. Alguns exemplos são a arroba e a libra.
Certo produtor de algodão recebeu uma proposta para vender sua produção a R$ 2,70 por libra de algodão. Qual foi o valor oferecido por arroba de algodão? E por tonelada?
Resposta: Aproximadamente R$ 89,29 por arroba; aproximadamente R$ 5 952,38 por tonelada.

50. Dos 200 milhões de toneladas de alimentos produzidos por um país, $\frac{1}{2}$ são de plantio. Em relação ao que se planta, 15% são perdidos na colheita, 3% no transporte, 10% no processamento industrial, 0,5% no varejo e 12% em processos culinários e hábitos alimentares. Comentários sobre o assunto da tarefa **50** no **Suplemento para o professor**.

a) Quantos por cento do que se planta é perdido nesse país?
Resposta: 40,5%

b) Nesse país, qual é a massa de produtos de plantio?
Resposta: 100 milhões de toneladas.

c) Quantas toneladas de alimento foram perdidas durante a colheita? E durante o varejo?
Respostas: 15 milhões de toneladas; 500 mil toneladas.

51. (UFJF-MG, 2019) Pedro comprou, na *petshop* próxima à sua casa, 10 kg de ração para seu cão e 5 kg para seu gato. Pagou um total de R$ 160,00. Quando comprou, na mesma *petshop*, 1 kg de cada ração para cada animal, pagou o total de R$ 22,00. Seu cão consome 500 g, e seu gato, 200 g de ração diariamente.

Hoje Pedro dispõe de R$ 210,00 e decide comprar ração canina em quantidade suficiente para alimentar seu cão por 30 dias. Com o restante do dinheiro, comprará o máximo possível de ração para seu gato.

a) Determine os preços, por quilograma, de cada uma das rações.
Resposta: Ração para o cão: R$ 10,00 por quilograma; ração para o gato: R$ 12,00 por quilograma.

b) A quantidade de ração que Pedro comprará hoje para seu gato é suficiente para alimentá-lo por quantos dias?
Resposta: 25 dias.

52. Utilizando as massas apresentadas, elabore em seu caderno um problema envolvendo notação científica. Em seguida, peça a um colega que o resolva, enquanto você resolve o dele. Depois, verifiquem se as resoluções estão corretas. Resposta pessoal. A resposta depende das informações escolhidas pelos estudantes.

Massa aproximada de algumas partículas atômicas

Partícula	Massa
Nêutron	$1{,}6 \cdot 10^{-21}$ mg
Elétron	$9 \cdot 10^{-25}$ mg
Próton	$1{,}6 \cdot 10^{-24}$ g

Fonte de pesquisa: HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. *Fundamentos de física*: óptica e física moderna. Tradução e revisão técnica: Ronaldo Sérgio de Biasi. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016. v. 4. p. 834.

Professor, professora: A tarefa **52** propõe aos estudantes a elaboração de um problema usando os conceitos estudados, contribuindo assim para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações. Antes de os estudantes elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** deste tópico e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

TRABALHO E JUVENTUDES

A confeitaria como profissão

Diversos profissionais precisam medir massas em seu dia a dia para saber, por exemplo, quantos gramas de determinados alimentos ou ingredientes compõem uma receita. Um desses profissionais é o confeiteiro. Você sabe o que ele faz e em quais áreas pode trabalhar?

Confeiteiro é o profissional que se dedica ao preparo e à decoração de pratos doces, como pudins, bolos e tortas, podendo trabalhar em confeitarias próprias ou de terceiros, ou atuar como confeiteiros-chefes em restaurantes ou hotéis.

Há também os confeiteiros que atuam como professores em escolas de gastronomia, ensinando a confeitaria profissional, e os que trabalham sob demanda, preparando receitas para eventos, como festas infantis, aniversários ou casamentos.

Os confeiteiros usam diversos instrumentos em seu dia a dia de trabalho além da balança, como batedeiras, termômetros digitais, espátulas, tigelas e formas de diferentes dimensões.


ROSS HELEN/SHUTTERSTOCK

Confeiteiros usando uma balança no preparo de um alimento.

2. Resposta: Os estudantes podem mencionar os açougueiros, para medir a massa das carnes; os médicos, quando precisam saber a massa de seus pacientes; os nutricionistas, para saber a quantidade exata de alimentos de uma refeição, entre outros profissionais.

Observação

Uma das possibilidades para se tornar um confeiteiro profissional é cursar uma faculdade de Gastronomia, que abrange no currículo a especialidade da confeitaria. No ensino superior, a Gastronomia pode ser feita na modalidade de curso tecnólogo, obtendo a titulação tecnológica, ou como curso de graduação, com a obtenção de diploma de bacharelado. Em ambos os casos, assim que finalizar o curso, o profissional pode ingressar em cursos de pós-graduação, como especialização, mestrado ou doutorado.

Além de desenvolver técnicas voltadas ao preparo, à apresentação de pratos e à manipulação de ingredientes, os confeiteiros podem aprender sobre o gerenciamento de cozinhas e restaurantes ao se profissionalizar, possibilitando não somente o desenvolvimento de habilidades gastronômicas, mas também administrativas àqueles que desejam iniciar a própria confeitaria.

PARA EXPANDIR

Que tal conhecer o local de trabalho de um confeiteiro? Nessa visita, aproveite para conhecer melhor o dia a dia desse profissional.

1. Resposta pessoal. Mesmo que os estudantes não tenham se identificado com a profissão, incentive-os a comentar algo que lhes chamou a atenção, referente à formação, aos instrumentos utilizados ou ao campo de trabalho, por exemplo. O momento pode ser oportuno também para mencionarem algum conhecido que trabalhe na área da confeitaria. Nesse caso, peça-lhes que expliquem a especialidade da pessoa, em qual lugar trabalha etc.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

1. O que mais chamou a sua atenção na profissão de confeiteiro? Você se identificou com ela? Converse com os colegas a esse respeito.

2. Cite outros profissionais que precisam medir massas para executar seus trabalhos.

3. Junte-se a um colega e pesquisem confeiteiros ou confeiteiras brasileiros reconhecidos nacional e/ou internacionalmente e procurem saber há quantos anos atuam na profissão, bem como suas especialidades. Compartilhem os resultados com a turma. Resposta pessoal. Os estudantes podem fazer as pesquisas na internet, procurando em *sites* ou mesmo em redes sociais, pois é comum que confeiteiros mais famosos utilizem esse canal para divulgar seus trabalhos. Oriente-os a buscar informações sobre a trajetória desses profissionais, procurando saber quando e como iniciaram a carreira na confeitaria, se exerciam ou não outra profissão antes de se tornarem confeiteiros, lugares onde trabalharam etc. Para compartilhar os resultados, organize-os em roda na sala de aula, incentivando a troca de ideias entre a turma.

Área

O conceito de área já era utilizado pelos egípcios há milhares de anos. Na época das cheias, quando as águas do rio Nilo começavam a subir, uma região ao longo de suas margens era inundada. Passada a inundação, as mesmas margens ficavam cobertas por uma lama contendo vários nutrientes, que tornava o solo mais fértil para o cultivo. No entanto, quando o nível da água baixava, as demarcações que delimitavam as propriedades eram desfeitas, tornando necessárias novas medições.

Essas medições eram realizadas pelos antigos **agrimensores** egípcios, que utilizavam cordas com vários nós, e a distância entre um nó e outro indicava uma unidade de medida de comprimento.

Agrimensor: pessoa legalmente habilitada para medir, dividir e/ou demarcar terras ou propriedades rurais.

Professor, professora: Promova uma roda de conversa sobre a unidade de medida de área mais adequada à medição em determinadas situações. Por exemplo, pergunte aos estudantes se o metro quadrado é a unidade mais adequada para expressar a área de um país, e verifique se eles percebem que nessa situação o mais apropriado seria o quilômetro quadrado. Por fim, peça a eles que deem exemplos de situações em que o centímetro quadrado é a unidade mais adequada para expressar a área de uma região.


STEFANO AVERA/ALAMY/FOTOARENA – VALE DOS REIS, TEBAS

Parte de uma das pinturas de parede do túmulo de Mena revelando o trabalho dos agrimensores da época. Cerca de 1400 a.C. a 1350 a.C., na antiga Tebas, no Egito.

Muitos dos registros envolvendo o cálculo de áreas podem ser encontrados no papiro de Rhind, importante documento egípcio de cerca de 1650 a.C.

Algumas unidades de medida de área

OBJETO DIGITAL ***Mapa clicável*: Extensão das enchentes no Rio Grande do Sul**

A unidade de medida de área do SI é o **metro quadrado** (m^2).

Um **metro quadrado** é igual à medida da área da região delimitada por um quadrado cujo lado mede 1 m de comprimento.

Outras unidades de medida de área são o **quilômetro quadrado** (km^2), o **hectômetro quadrado** (hm^2), o **decâmetro quadrado** (dam^2), o **decímetro quadrado** (dm^2), o **centímetro quadrado** (cm^2) e o **milímetro quadrado** (mm^2).

Vamos determinar, por exemplo, a equivalência entre metros quadrados e quilômetros quadrados.

Por definição, um metro quadrado é igual à medida da área de um quadrado com lados de 1 m de comprimento. Como 1 km = 1 000 m, podemos dizer que um metro quadrado é igual à área de um quadrado com lados de 0,001 km de comprimento.

Calculando a área desse quadrado, temos:

$$(0{,}001)^2 = 0{,}000001 = 1 \cdot 10^{-6}$$

Portanto, $1\ m^2 = 1 \cdot 10^{-6}\ km^2$.

Dica

Lembre-se de que a área da região delimitada por um quadrado cujo comprimento do lado mede a é dada por a^2.

Respostas no final do **Livro do Estudante**.

Questão G. Em seu caderno, mostre que as igualdades apresentadas nos itens são verdadeiras.

a) $1\ hm^2 = 1 \cdot 10^4\ m^2$

b) $1\ dam^2 = 1 \cdot 10^2\ m^2$

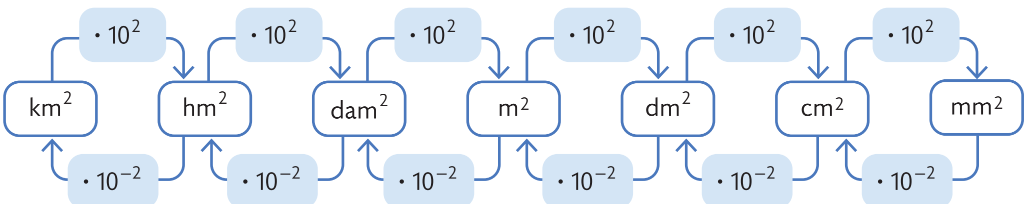
c) $1\ dm^2 = 1 \cdot 10^{-2}\ m^2$

d) $1\ cm^2 = 1 \cdot 10^{-4}\ m^2$

e) $1\ mm^2 = 1 \cdot 10^{-6}\ m^2$

Professor, professora: O item **c** da tarefa **54** propõe aos estudantes a elaboração de uma questão utilizando os conceitos estudados, contribuindo assim para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações. Antes que eles elaborem uma questão, peça-lhes que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** deste tópico e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

Para realizar conversões entre as unidades de medida de área apresentadas, podemos utilizar o seguinte esquema.



Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

53. Transcreva no caderno os itens substituindo cada ■ pelo número adequado.

a) $7\ mm^2 =$ ■ m^2 Resposta: $7\ mm^2 = 7 \cdot 10^{-6}\ m^2$

b) $44\ cm^2 =$ ■ hm^2 Resposta: $44\ cm^2 = 4{,}4 \cdot 10^{-7}\ hm^2$

c) $8{,}5\ dm^2 =$ ■ km^2 Resposta: $8{,}5\ dm^2 = 8{,}5 \cdot 10^{-8}\ km^2$

d) $8\,745\ m^2 =$ ■ km^2 Resposta: $8\,745\ m^2 = 8{,}745 \cdot 10^{-3}\ km^2$

e) $526\ m^2 =$ ■ mm^2 Resposta: $526\ m^2 = 5{,}26 \cdot 10^{8}\ mm^2$

f) $0{,}35\ dam^2 =$ ■ dm^2 Resposta: $0{,}35\ dam^2 = 3{,}5 \cdot 10^{3}\ dm^2$

g) $3{,}7\ hm^2 =$ ■ cm^2 Resposta: $3{,}7\ hm^2 = 3{,}7 \cdot 10^{8}\ cm^2$

h) $63\ km^2 =$ ■ mm^2 Resposta: $63\ km^2 = 6{,}3 \cdot 10^{13}\ mm^2$

i) $142\ dm^2 =$ ■ mm^2 Resposta: $142\ dm^2 = 1{,}42 \cdot 10^{6}\ mm^2$

j) $248\ hm^2 =$ ■ m^2 Resposta: $248\ hm^2 = 2{,}48 \cdot 10^{6}\ m^2$

54. As usinas hidrelétricas geram energia utilizando a pressão da água de seus reservatórios. Dependendo das características da região onde foi instalada e da maneira como foi construída, a usina pode aproveitar melhor a água disponível. É possível medir esse aproveitamento com o índice de produção, obtido ao dividir a capacidade de geração de energia elétrica da usina pela área alagada.

A Usina Binacional de Itaipu, por exemplo, tem um aproveitamento de 10,4 megawatts por quilômetro quadrado (MW/km^2) de área alagada. Já a Usina de Sobradinho, na Bahia, tem uma capacidade instalada de 1 050 MW, mas o aproveitamento é de $0{,}25\ MW/km^2$.

Comentários sobre a tarefa **54** no **Suplemento para o professor**.

MAEDA PHOTOGRAPHY/SHUTTERSTOCK

Vista da barragem da Usina Hidrelétrica de Itaipu, localizada em Foz do Iguaçu, no Paraná, em 2023. Essa é a maior usina hidrelétrica do mundo em geração de energia.

a) Qual é, em quilômetros quadrados, a área alagada da Usina Hidrelétrica de Sobradinho? Resposta: $4\,200\ km^2$

b) Certa usina hidrelétrica tem $2\,400\ km^2$ de área alagada e uma capacidade instalada de 6 000 MW. Qual é o índice de produção, em megawatts por quilômetro quadrado, dessa usina? Resposta: $2{,}5\ MW/km^2$

c) Elabore uma questão semelhante à do item **b**. Em seguida, peça a um colega que resolva essa questão. Por fim, verifiquem se as respostas estão corretas. Resposta pessoal. A resposta depende das informações que os estudantes incluírem na questão.

55. Apesar de não fazerem parte do SI, algumas unidades de medida agrária são amplamente utilizadas no Brasil. Entre elas, destacam-se o:

- alqueire do Norte, que equivale a 27 225 metros quadrados.
- alqueire mineiro, que equivale a 48 400 metros quadrados.
- alqueire paulista, que equivale a 24 200 metros quadrados.
- hectare, que equivale a 10 000 metros quadrados.

De acordo com as equivalências apresentadas, escreva em quilômetros quadrados as seguintes medidas.

a) 110,2 alqueires do Norte. Resposta: Aproximadamente 3 km^2.

b) 155 alqueires mineiros. Resposta: Aproximadamente 7,5 km^2.

c) 256 alqueires paulistas. Resposta: Aproximadamente 6,2 km^2.

d) 480 hectares. Resposta: 4,8 km^2

56. (Enem, 2018) Um produtor de milho utiliza uma área de 160 hectares para suas atividades agrícolas. Essa área é dividida em duas partes: uma de 40 hectares, com maior produtividade, e outra de 120 hectares, com menor produtividade. A produtividade é dada pela razão entre a produção, em tonelada, e a área cultivada. Sabe-se que a área de 40 hectares tem produtividade igual a 2,5 vezes à da outra. O fazendeiro pretende aumentar sua produção total em 15%, aumentando também o tamanho de sua propriedade. Para tanto, pretende comprar parte de uma fazenda vizinha, que possui a mesma produtividade da parte de 120 hectares de suas terras.

Qual é a área mínima, em hectare, que o produtor precisará comprar? Resposta: Alternativa **b**.

a) 36
b) 33
c) 27
d) 24
e) 21

57. Comunidades quilombolas são grupos étnicos constituídos, em sua maioria, pela população negra, que se autodefine de acordo com as relações específicas com a terra. No dia 22 de maio de 2023, o Instituto Nacional de Colonização e Reforma Agrária (Incra) declarou e reconheceu os limites de cinco Terras Quilombolas. A tabela apresenta a área dessas terras.

ODS 16

Área das terras declaradas e reconhecidas como Quilombolas pelo Incra em 22 de maio de 2023

Comunidade beneficiada	Área (hectares)
Comunidade Vicentes	355,7169
Comunidade de Iuna	1 414,1632
Quilombo Campina de Pedra	1 779,80890
Comunidade Lajeado	2 355,4831
Comunidade da Quadra	101,880

Fonte de pesquisa: OBSERVATÓRIO Terras Quilombolas: Incra reconhece cinco terras quilombolas. Disponível em: https://cpisp.org.br/observatorio-terras-quilombolas-incra-reconhece-cinco-terras-quilombolas/. Acesso em: 24 set. 2024.

a) Qual é, em quilômetros quadrados, a área total das cinco terras declaradas e reconhecidas como Quilombolas juntas? Resposta: Cerca de 60,07 km^2.

b) A Constituição federal é a lei fundamental e suprema do Brasil. Junte-se a um colega e pesquisem os direitos dos quilombolas assegurados pela Constituição. Em seguida, apresentem seus resultados para a turma. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes identifiquem que os artigos 68, 215 e 216 da Constituição federal promovem os direitos dos quilombolas.

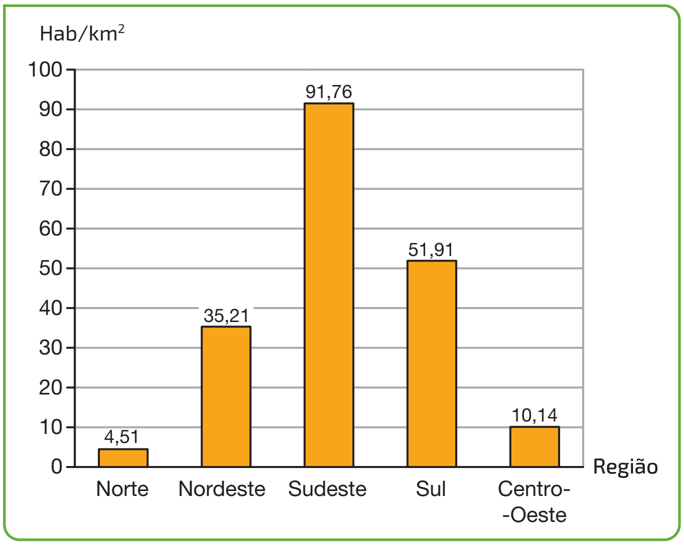
CHICO FERREIRA/PULSAR IMAGENS

Vista do Quilombo Dona Bilina, no bairro Campo Grande, RJ, em dezembro de 2023.

Professor, professora: Durante o trabalho com a questão **b**, se julgar conveniente, diga aos estudantes que o Decreto nº 4.887, de 20 de novembro de 2003, visa garantir, além da posse de terra, melhor qualidade de vida aos quilombolas.

58. A população estimada do Brasil, em 2022, era de cerca de 203 milhões de habitantes. Entretanto, não estava igualmente distribuída entre as cinco grandes regiões do país. Podemos confirmar essa informação ao calcular a densidade demográfica de cada região, tomando a população total daquela região e dividindo por sua área em quilômetros quadrados. Assim, obtemos a quantidade de habitantes por quilômetro quadrado em determinada região. Analise as informações a seguir.

Densidade demográfica estimada por região em 2022

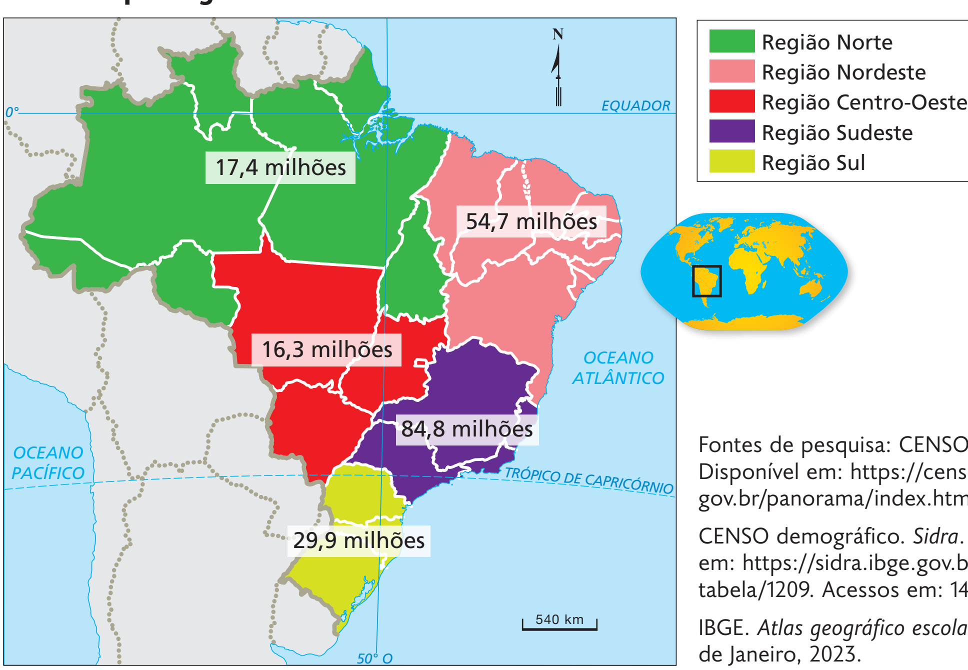


RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Fontes de pesquisa: CENSO 2022. Disponível em: https://censo2022.ibge.gov.br/panorama/index.html.

CENSO demográfico. *Sidra*. Disponível em: https://sidra.ibge.gov.br/tabela/1209. Acessos em: 14 fev. 2024.

População brasileira estimada por região em 2022



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Fontes de pesquisa: CENSO 2022. Disponível em: https://censo2022.ibge.gov.br/panorama/index.html.

CENSO demográfico. *Sidra*. Disponível em: https://sidra.ibge.gov.br/tabela/1209. Acessos em: 14 fev. 2024.

IBGE. *Atlas geográfico escolar*. 9. ed. Rio de Janeiro, 2023.

Professor, professora: O item **d** da tarefa **58** propõe aos estudantes a elaboração de uma questão utilizando os conceitos estudados, contribuindo para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações. Antes que eles elaborem a questão, peça-lhes que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** deste tópico e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

a) Qual região brasileira tem a maior densidade demográfica? E qual tem a menor? Resposta: Sudeste; Norte.

b) Qual é a área aproximada de cada região brasileira em milhões de quilômetros quadrados? Resposta no final do **Livro do Estudante**.

c) De acordo com as informações do gráfico e do mapa, como está distribuída a população brasileira pelo território? Resposta: A população brasileira é distribuída de maneira desigual pelo território nacional.

d) De acordo com os dados apresentados, elabore uma questão envolvendo densidade demográfica. Em seguida, peça a um colega que a resolva. Depois, verifiquem se as respostas estão corretas. Resposta pessoal. A resposta depende de cada questão elaborada pelos estudantes.

Volume

Assim como podemos medir a massa de um objeto, o comprimento de uma sala e a área de uma quadra esportiva, também é possível medir o volume de um objeto tridimensional.

A unidade de medida de volume do SI é o **metro cúbico** (m^3), que é igual ao volume de um cubo com arestas de 1 m de comprimento.

Outras unidades de medida de volume são **quilômetro cúbico** (km^3), **hectômetro cúbico** (hm^3), **decâmetro cúbico** (dam^3), **decímetro cúbico** (dm^3), **centímetro cúbico** (cm^3) e **milímetro cúbico** (mm^3).

Vamos determinar, por exemplo, a equivalência entre metros cúbicos e quilômetros cúbicos.

Por definição, um metro cúbico é igual ao volume de um cubo com arestas de 1 m de comprimento. Como 1 km = 1000 m, podemos dizer que um metro cúbico é igual ao volume de um cubo com arestas de 0,001 km de comprimento. Calculando o volume desse cubo, temos:

$$(0{,}001)^3 = 0{,}000000001 = 1 \cdot 10^{-9}$$

Portanto, $1\ m^3 = 1 \cdot 10^{-9}\ km^3$.

Dica

Lembre-se de que o volume de um cubo cujo comprimento da aresta é *a* é dado por a^3.

Professor, professora: Caso os estudantes apresentem dificuldades para compreender as conversões entre as unidades de medida de volume, organize-os em duplas e peça-lhes que escrevam algoritmos que possibilitem realizar a conversão entre unidades de medida de volume.

Por meio de questionamentos, verifique também se eles compreenderam a diferença entre os conceitos de volume e capacidade. É importante que essa diferenciação seja bem esclarecida.

Questão H. Em seu caderno, mostre que as igualdades apresentadas nos itens são verdadeiras.

a) $1\ hm^3 = 1 \cdot 10^6\ m^3$

b) $1\ dam^3 = 1 \cdot 10^3\ m^3$

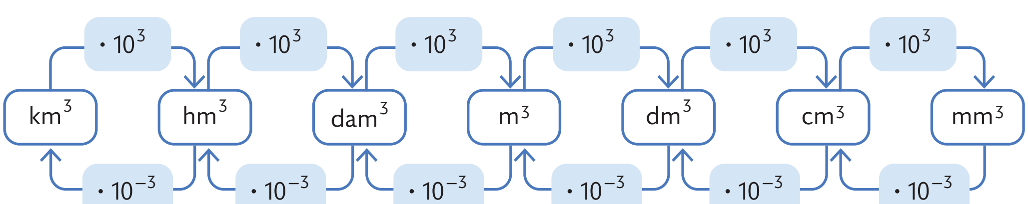
c) $1\ dm^3 = 1 \cdot 10^{-3}\ m^3$

d) $1\ cm^3 = 1 \cdot 10^{-6}\ m^3$

e) $1\ mm^3 = 1 \cdot 10^{-9}\ m^3$

Respostas no final do **Livro do Estudante**.

Para realizar conversões entre as unidades de medida de volume apresentadas, podemos utilizar o seguinte esquema.



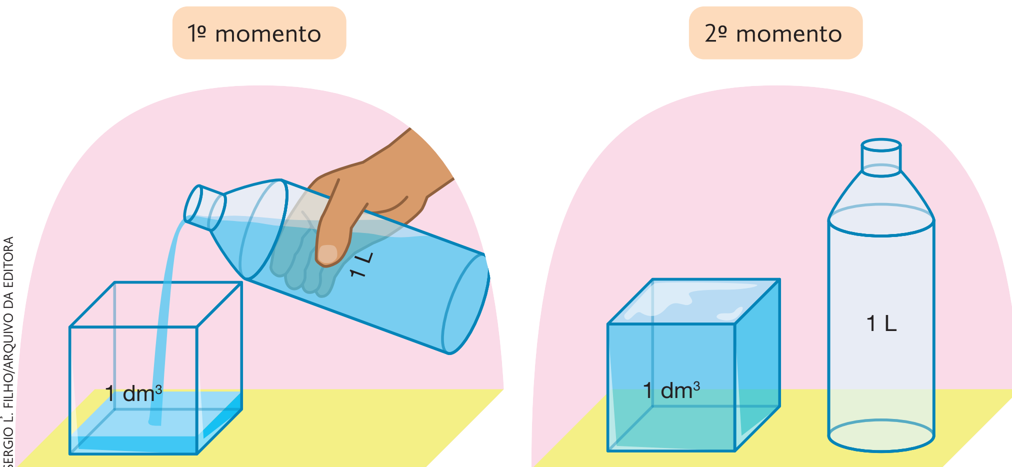
Capacidade

As medidas de capacidade geralmente são utilizadas para indicar a quantidade de líquido ou gás que pode ser depositada em um recipiente, ou seja, a capacidade de um recipiente é igual a seu volume interno. A unidade de medida de capacidade é o litro (L), que não faz parte das unidades do SI, mas é aceita e amplamente utilizada. Um submúltiplo do litro, que também é muito utilizado no cotidiano, é o mililitro (mL).

$$1\ L = 1000\ mL$$

Questão I. A fatura de água mostra o gasto de água da unidade consumidora em metros cúbicos. Como você faria para determinar quantos litros de água foram consumidos em sua residência em determinado mês? Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes respondam que multiplicariam o consumo por 1000.

Podemos relacionar as unidades de medida de volume e de capacidade. Por exemplo, um recipiente cujo volume interno é 1 dm^3 tem capacidade igual a 1 L (1 dm^3 = 1 L). Esse fato pode ser verificado com o experimento a seguir.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO E SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

Questão J.

Em seu caderno, mostre que as igualdades a seguir são verdadeiras.

a) 1 000 L = 1 m^3

b) 1 mL = 1 cm^3

Resposta no final do **Livro do Estudante**.

Questão K.

Em seu caderno, escreva um algoritmo que converta uma medida em metros cúbicos em litros.

Resposta:
Início.
1. Leia a medida em metros cúbicos.
2. Multiplique o número que expressa a medida em metros cúbicos por 1000.
Fim.

Exercícios e problemas resolvidos

R12. Um caminhão dispõe de uma caçamba com formato de paralelepípedo retângulo com o comprimento das arestas igual a 18,5 m, 2,6 m e 4,4 m. Para transportar 1015,8 m^3 de bagaço de cana-de-açúcar até uma **termelétrica**, quantas viagens, no mínimo, esse caminhão terá de fazer?

Resolução

Inicialmente, calculamos, em metros cúbicos, o volume *V* da caçamba do caminhão.

$$V = 18{,}5 \cdot 2{,}6 \cdot 4{,}4 = 211{,}64$$

Em seguida, dividimos o volume que será transportado $(1015{,}8\ m^3)$ pelo volume da caçamba $(211{,}64\ m^3)$.

$$\frac{1015{,}8}{211{,}64} \simeq 4{,}8$$

Portanto, o caminhão terá de fazer, no mínimo, 5 viagens.

Termelétrica: usina que gera energia elétrica por meio da queima de qualquer material que possa gerar calor.

R13. (Enem, 2019) O rótulo da embalagem de um cosmético informa que a dissolução de seu conteúdo, de acordo com suas especificações, rende 2,7 litros desse produto pronto para o uso. Uma pessoa será submetida a um tratamento estético em que deverá tomar um banho de imersão com esse produto numa banheira com capacidade de 0,3 m^3. Para evitar o transbordamento, essa banheira será preenchida em 80% de sua capacidade. Para esse banho, o número mínimo de embalagens desse cosmético é

a) 9. **b)** 12. **c)** 89. **d)** 112. **e)** 134.

Resolução

Inicialmente, calculamos 80% da capacidade dessa banheira.

$$0{,}8 \cdot 0{,}3\ m^3 = 0{,}24\ m^3$$

Em seguida, escrevemos essa medida em litros. Como 1 m^3 = 1000 L, fazemos:

$$0{,}24\ m^3 = 0{,}24 \cdot 1000 = 240\ L$$

Por fim, dividimos a capacidade obtida pelo rendimento da embalagem.

$$\frac{240\ L}{2{,}7\ L} = 88{,}\overline{8}$$

Desse modo, serão necessárias, no mínimo, 89 embalagens desse cosmético.

Portanto, a alternativa correta é a **c**.

R14. Todos os dias, temos acesso a informações sobre a previsão do tempo divulgadas em diferentes meios de comunicação, como televisão e internet. Para realizar essas previsões, os institutos de meteorologia consideram diversos fatores, como direção do vento, temperatura atmosférica e precipitação pluviométrica. Em geral, a precipitação é dada em milímetros. Se em determinada região choveu 100 mm em certo mês, por exemplo, isso significa que se despejarmos em um reservatório cúbico, com comprimento de 1 m de aresta, a quantidade de água da chuva acumulada ao longo desse período em uma área de 1 m^2, o nível da água alcançaria 100 mm de altura, ou seja, 10 cm. Essa quantidade de água equivale a 10% da capacidade do reservatório, que é de 1 m^3 ou 1000 L. Nesse exemplo, podemos afirmar que nessa região choveu 100 L de água por metro quadrado durante o mês em questão.

Em certo munícipio, a precipitação de chuva em janeiro, fevereiro e março de 2024 foi 157,6 mm, 183 mm e 125 mm, respectivamente. Considerando que a chuva tenha ocorrido de maneira homogênea, calcule quantos litros de água, aproximadamente, um pluviômetro cilíndrico com diâmetro da base igual a 10 cm, instalado no município, captou em cada um dos três primeiros meses de 2024.

Resolução

Inicialmente, calculamos a área da base (A_b) do recipiente cilíndrico em metros quadrados. Como 1 m = 100 cm, então 10 cm = 0,1 m. Desse modo:

$$A_b = \pi \cdot r^2 = 3{,}14 \cdot \left(\frac{0{,}1}{2}\right)^2 = 0{,}00785$$

Dica
No cálculo, consideramos $\pi = 3{,}14$.

Assim, a área aproximada da base do recipiente é 0,00785 m^2.

A área da base do recipiente e a quantidade de água captada são grandezas diretamente proporcionais, pois, ao dobrarmos a área da base do recipiente, a quantidade de água captada também dobra; ao triplicarmos a área da base do recipiente, a quantidade de água captada também triplica; e assim por diante. Desse modo, utilizando regra de três simples, determinamos a quantidade de água captada pelo pluviômetro em cada mês.

Janeiro

Área (m^2)		Água captada (L)
1	———	157,6
0,00785	———	x

$x = 157{,}6 \cdot 0{,}00785 = 1{,}23716$

Fevereiro

Área (m^2)		Água captada (L)
1	———	183
0,00785	———	y

$y = 183 \cdot 0{,}00785 = 1{,}43655$

Março

Área (m^2)		Água captada (L)
1	———	125
0,00785	———	z

$z = 125 \cdot 0{,}00785 = 0{,}98125$

ILUSTRAÇÕES: LAÍS GARBELINI/ARQUIVO DA EDITORA

Portanto, nos meses de janeiro, fevereiro e março de 2024 foram captados por esse pluviômetro, aproximadamente, 1,24 L, 1,44 L e 0,98 L, respectivamente.

DESENVOLVIMENTO SUSTENTÁVEL

Moradia para todos!

Desde 1948, a Organização das Nações Unidas (ONU) reconhece a moradia como um direito humano, decretando como dever de cada país a garantia do acesso a um lar adequado a todas as pessoas.

Além de um lar apropriado, o direito à moradia envolve a convivência pacífica e segura em comunidade e o acesso a serviços essenciais, como saneamento básico, saúde e educação. Assegurar esse acesso é uma maneira de reduzir as desigualdades sociais e a criação de políticas públicas relacionadas à habitação pode ter papel importante nisso.

Os **trabalhos voluntários** contribuem diretamente para a promoção desse acesso. Um exemplo é o projeto Casas de Botellas, desenvolvido pela boliviana Ingrid Vaca Diez, por volta de 2014. Esse projeto conta, principalmente, com a ajuda de doações e de voluntários e já construiu mais de 300 casas na Bolívia e em países vizinhos, como a casa mostrada na foto a seguir, que foi construída com garrafas.

ODS 10

Trabalhos voluntários: atividades de caráter social e comunitário, não remuneradas, desenvolvidas para contribuir com pessoas mais necessitadas e em situações de acentuada emergência.

REPRODUÇÃO/PROJETO CASAS DE BOTELLAS

Foto de residência construída pelo projeto Casas de Botellas, em 2019.

As casas construídas com garrafas costumam ter custos menores quando comparadas, por exemplo, a casas de alvenaria, pois a principal matéria-prima para sua construção são garrafas PET ou até mesmo garrafas de vidro descartadas que são utilizadas na fabricação de tijolos ou em substituição a eles.

Em construções como essas, é preciso determinar, entre outros itens: área e perímetro da casa; quantidade aproximada de garrafas que serão utilizadas por metro quadrado; quantidade total de garrafas necessárias para a construção da casa; quantia que deve ser arrecadada; volume de material necessário para preencher as garrafas e os espaços entre elas.

2. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes compreendam que o acesso à moradia adequada é um direito humano e que assegurar esse acesso é uma maneira de reduzir as desigualdades sociais, objetivo preconizado pelo ODS 10. Esse acesso deve ser promovido pelo poder público, por meio de políticas de acesso à habitação, por exemplo. Há também projetos de pessoas que trabalham como voluntárias, na construção de casas para pessoas pobres, como ocorre com o Casas de Botellas. Para as apresentações, providencie os materiais ou equipamentos necessários e combine com a turma o dia e o tempo das apresentações. Incentive a criatividade e o engajamento dos grupos na produção dos materiais, por meio do uso de imagens, recortes de notícias, ilustrações e vídeos, caso as apresentações sejam feitas utilizando tecnologias. Explique-lhes que podem mostrar também outros projetos que promovam o acesso a moradias, além de falar de políticas públicas habitacionais tanto do Brasil como de outros países.

Você tem ideia de como se constrói uma casa com garrafas? Acompanhe no esquema a seguir.

Professor, professora: Explique para os estudantes que existem outras maneiras de participar de trabalhos voluntários, além do exemplo mencionado nesta seção. É possível, por exemplo, participar de atividades de arrecadação de recursos necessários para instituições ou comunidades, como alimentos e produtos de limpeza, ou mesmo fazer cadastro em bancos de dados para que o voluntário seja chamado em casos de emergências relacionadas a desastres naturais, como enchentes e terremotos. Existem também empresas que realizam ou participam de campanhas sociais incentivando e apoiando seus colaboradores a se engajarem em ações voluntárias. Pergunte-lhes se já participaram de trabalhos voluntários e, em caso afirmativo, peça a eles que relatem a experiência aos colegas.

ADWO/SHUTTERSTOCK

Casa de garrafas de vidro, construída na Ilha do Príncipe Eduardo, no Canadá, em 2016.

1. Nesse tipo de construção, as paredes são feitas com garrafas, que substituem os tijolos. Depois de preenchidas com entulhos, areia, cimento, barro, argila ou outro material, as garrafas são amarradas e empilhadas horizontalmente.

2. Os telhados geralmente são feitos com telhas de cerâmica ou de fibrocimento, um composto de cimento e fibras sintéticas. Algumas dessas casas utilizam telhas transparentes em partes do telhado, facilitando a entrada de luz natural e contribuindo para a economia de energia elétrica.

3. As portas e janelas são de madeira, alumínio ou outro material convencional.

4. O acabamento é realizado preenchendo os espaços entre as garrafas com, por exemplo, argila, cimento ou barro.

Observação

Além de ajudar quem precisa, as construções de casas com garrafas PET contribui para a preservação do meio ambiente, pois reutilizam garrafas que poderiam ser descartadas inadequadamente.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

1. Uma das primeiras casas edificadas pelo projeto Casas de Botellas foi uma creche. Sabendo que essa construção tinha 170 m^2 e que foram necessárias aproximadamente 212 garrafas por metro quadrado, quantas garrafas ao todo foram utilizadas? Resposta: Aproximadamente 36 040 garrafas.

2. Forme grupo com alguns colegas e elaborem um texto abordando a importância do acesso à moradia adequada para o alcance do ODS 10, o papel do poder público para que isso aconteça, além da atuação de projetos como o Casas de Botellas. Depois, pesquisem fotos, vídeos e informações relacionadas a iniciativas brasileiras de construção de moradias utilizando materiais recicláveis e organizem uma apresentação com cartazes, vídeos ou *slides* envolvendo o texto produzido, além das imagens e/ou vídeos pesquisados.

3. Com seu grupo, pesquise ações voluntárias que envolvam, por exemplo, a necessidade do cálculo de área, perímetro, volume, capacidade ou massa. Em seguida, escolham uma das ações que pesquisaram e elaborem um plano com os fatores necessários para efetivar esse trabalho. Por fim, proponham essa ação voluntária aos demais estudantes da escola. Resposta pessoal. Algumas sugestões de ações voluntárias são: pintura/limpeza de uma escola; revitalização/manutenção de uma quadra de esportes; coleta e reciclagem de resíduos sólidos; coleta de alimentos para famílias carentes ou instituições sociais; plantio de árvores em praças ou parques.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

59. a) Resposta: 25 mm³ = $2,5 \cdot 10^{-8}$ m³ 59. c) Resposta: 83,3 L = $8,33 \cdot 10^{-11}$ km³

59. Transcreva no caderno os itens substituindo cada ■ pelo número adequado.

Resposta: 577 m³ = $5,77 \cdot 10^{8}$ mL

a) 25 mm³ = ■ m³ **c)** 83,3 L = ■ km³ **e)** 577 m³ = ■ mL

b) 657 cm³ = ■ hm³ **d)** 4 156 m³ = ■ km³ **f)** 0,41 dam³ = ■ dm³

Resposta: 657 cm³ = $6,57 \cdot 10^{-10}$ hm³ Resposta: 4 156 m³ = $4,156 \cdot 10^{-6}$ km³ Resposta: 0,41 dam³ = $4,1 \cdot 10^{5}$ dm³

60. Vazão de um rio é o volume de água que passa por ele em determinado período de tempo. A vazão do rio Paraná, por exemplo, equivale a, aproximadamente, 8,27% da vazão do rio Amazonas, que é cerca de 209 000 metros cúbicos por segundo (m³/s).

a) Qual é, em metros cúbicos por segundo, a vazão do rio Paraná? Resposta: Aproximadamente 17 284 m³/s.

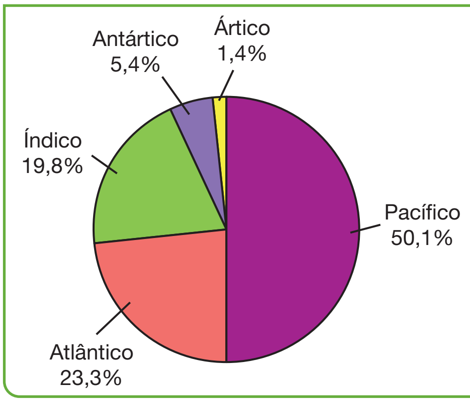
b) Em um dia, qual é a diferença de volume de água que esses dois rios despejam no oceano?
Resposta: Aproximadamente $1,66 \cdot 10^{10}$ m³.

61. Os oceanos correspondem a mais de $\frac{2}{3}$ da superfície terrestre e têm um volume estimado de 1,335 bilhão de quilômetros cúbicos de água. O gráfico apresenta a distribuição em porcentagens do volume dos oceanos do planeta Terra.

a) Qual é o volume de água, em quilômetros cúbicos, do Oceano Pacífico? E do Oceano Ártico? Resposta: 668 835 000 km³; 18 690 000 km³

b) O volume de água do Oceano Pacífico é igual, maior ou menor do que os volumes de água dos oceanos Atlântico, Índico, Antártico e Ártico juntos? Justifique sua resposta.

Porcentagem do volume de água dos oceanos do planeta Terra, em 2024



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte de pesquisa: OCEAN volume. *The World Factbook*. Disponível em: https://www.cia.gov/the-world-factbook/field/ocean-volume/. Acesso em: 24 set. 2024.

62. Márcia comprou um aquário com formato de paralelepípedo retângulo com dimensões internas medindo 90 cm, 30 cm e 45 cm. Se ela despejar 120 L de água nesse aquário, o líquido vai transbordar? Justifique sua resposta.
Resposta: Não, pois a capacidade desse aquário é de 121,5 L e 120 L < 121,5 L.

63. Aroldo fez uma pesquisa no município onde mora e, com os resultados obtidos, organizou a seguinte tabela.

Professor, professora: A tarefa **65** propõe aos estudantes a elaboração de um problema utilizando os conceitos estudados, contribuindo para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações. Antes que eles elaborem o problema, peça-lhes que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** deste tópico e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

61. b) Resposta: Maior, pois o Oceano Pacífico tem volume de água correspondente a 50,1% do volume total de água dos oceanos da Terra.

Chuva registrada de junho a novembro de 2024

Mês	Precipitação (mm)
Junho	455,5
Julho	363,5
Agosto	186,5
Setembro	34,0
Outubro	37,0
Novembro	170,0

Fonte de pesquisa: Secretaria do meio ambiente e recursos hídricos da região em que Aroldo mora.

Considerando que a chuva tenha ocorrido de maneira homogênea, calcule quantos litros de água, aproximadamente, um pluviômetro cilíndrico com raio da base igual a 8 cm, instalado nesse município, captou em cada um desses meses. Resposta: Aproximadamente 9,15 L em junho; aproximadamente 7,3 L em julho; aproximadamente 3,75 L em agosto; aproximadamente 0,68 L em setembro; aproximadamente 0,74 L em outubro; aproximadamente 3,42 L em novembro.

64. (Enem, 2019) Comum em lançamentos de empreendimentos imobiliários, as maquetes de condomínios funcionam como uma ótima ferramenta de *marketing* para as construtoras, pois, além de encantar clientes, auxiliam de maneira significativa os corretores na negociação e venda de imóveis. Um condomínio está sendo lançado em um novo bairro de uma cidade. Na maquete projetada pela construtora, em escala de 1 **:** 200, existe um reservatório de água com capacidade de 45 cm³. Quando todas as famílias estiverem residindo no condomínio, a estimativa é que, por dia, sejam consumidos 30 000 litros de água. Em uma eventual falta de água, o reservatório cheio será suficiente para abastecer o condomínio por quantos dias? Resposta: Alternativa **c**.

a) 30 **b)** 15 **c)** 12 **d)** 6 **e)** 3

65. Elabore em seu caderno um problema envolvendo volume. Em seguida, troque com um colega para que ele resolva o seu e você, o dele. Depois, verifiquem se as resoluções estão corretas.
Resposta pessoal. A resposta depende dos dados escolhidos pelos estudantes.

Velocidade média

Suponha que, em uma viagem, um automóvel percorreu uma distância de 180 km em 2 h. Dividindo a distância percorrida nessa viagem pelo intervalo gasto para completá-la, tem-se:

$\frac{180\text{ km}}{2\text{ h}} = \frac{90\text{ km}}{1\text{ h}}$, ou seja, a cada 1 h o automóvel percorreu, em média, 90 km.

O valor obtido corresponde à velocidade média do automóvel nessa viagem.

A **velocidade média** (V_m) é a grandeza dada pela razão entre a distância percorrida (d) e o tempo gasto no percurso (t).

$$V_m = \frac{d}{t}$$

Observação

Ao calcular a velocidade média de um corpo, não são consideradas as variações de velocidade sofridas ao longo do percurso.

No SI, a velocidade média é expressa em **metro por segundo** (m/s). Porém, há outras unidades de medida de velocidade, como o **quilômetro por hora** (km/h). Vamos determinar a equivalência entre essas duas unidades de medida de velocidade.

$$1\text{ m/s} = \frac{1\text{ m}}{1\text{ s}} = \frac{0{,}001\text{ km}}{\frac{1}{3\,600}\text{ h}} = \frac{3\,600 \cdot 0{,}001\text{ km}}{1\text{ h}} = \frac{3{,}6\text{ km}}{\text{h}}$$

Portanto, 1 m/s = 3,6 km/h.

Professor, professora: A tarefa **74** propõe aos estudantes a elaboração de um problema utilizando os conceitos estudados, contribuindo para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações. Antes que eles elaborem o problema, peça-lhes que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** deste tópico e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

66. Transcreva no caderno os itens substituindo cada ■ pelo número adequado.

a) 20 m/s = ■ km/h
Resposta: 20 m/s = 72 km/h

b) 65 m/s = ■ km/h
Resposta: 65 m/s = 234 km/h

c) 110 km/h = ■ m/s
Resposta: 110 km/h = $30,\overline{5}$ m/s

d) 60 km/h = ■ m/s
Resposta: 60 km/h = $16,\overline{6}$ m/s

67. Calcule a velocidade média, em quilômetros por hora, de um automóvel que percorreu 120 km em 2 h.
Resposta: 60 km/h

68. Armando percorreu a pé 9 350 m em 55 min. Qual foi a velocidade média de Armando, em quilômetros por hora, nesse trajeto? Resposta: 10,2 km/h

69. Marcos está passeando de bicicleta a uma velocidade média de 11 m/s. Qual é, em quilômetros por hora, a velocidade média de Marcos nesse passeio? Resposta: 39,6 km/h

70. Qual é a velocidade média, em metros por segundo, de um corpo que percorre 5 km em 30 min?
Resposta: $2,\overline{77}$ m/s

71. Juliana está treinando para uma prova de atletismo. Em certo dia, correu 12 km com velocidade média de 8 km/h. Qual foi, em horas e minutos, a duração do treino de Juliana nesse dia?
Resposta: 1 hora e 30 minutos.

72. Considere um corpo a uma velocidade constante de 78 km/h. Quantos quilômetros ele percorre em 2 horas e 25 minutos? Resposta: 188,5 km

73. Joice e sua família viajaram da Cidade **A** até a Cidade **B**, cuja distância é 652 km. Eles partiram às 8 h 30 min e chegaram ao destino às 18 h do mesmo dia. Qual foi a velocidade média da viagem?
Resposta: Aproximadamente 68,6 km/h.

74. Leia as informações a seguir.

Pedro e seus amigos realizaram uma viagem de carro. Eles partiram às 6 h 36 min 23 s e chegaram ao destino às 11 h 13 min 27 s do mesmo dia.

De acordo com as informações apresentadas, elabore um problema envolvendo velocidade média. Em seguida, peça a um colega que o resolva. Por fim, verifiquem se as respostas estão corretas.
Resposta pessoal. Comentários no **Suplemento para o professor**.

Algarismos significativos

Medir é um processo experimental, em que o valor de uma grandeza é determinado com base em uma unidade predefinida. Em geral, independentemente do instrumento utilizado, os resultados obtidos em uma medição são aproximações, pois dependem do processo de medição, dos equipamentos utilizados, da influência de variáveis que não estão sendo medidas e do operador.

Ao medirmos uma grandeza, devemos levar em consideração algumas características do objeto e a precisão do instrumento. Por exemplo, para medir o comprimento de um lápis podemos utilizar uma régua; já para medirmos o diâmetro de um parafuso, é mais adequado utilizar um paquímetro. Cada instrumento de medida tem uma precisão diferente, que é determinada conforme sua fabricação.

Professor, professora: Antes de iniciar o tópico **Algarismos significativos**, promova um bate-papo com os estudantes a fim de avaliar o conhecimento deles sobre os critérios de arredondamento e potências de base 10. Esses assuntos serão de suma importância para o desenvolvimento dos conteúdos estudados.

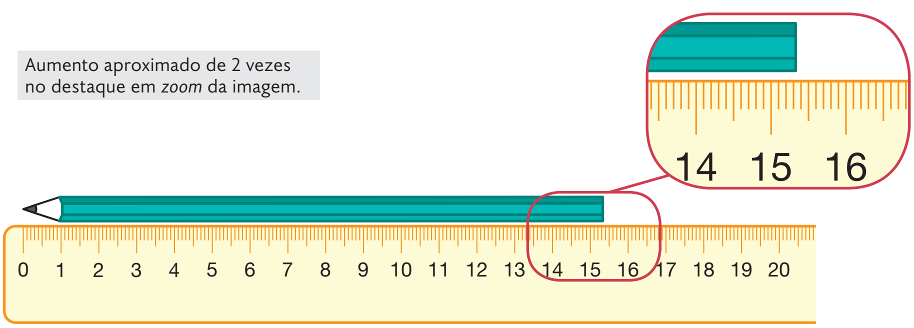
A menor medida que o instrumento pode determinar é sua **precisão**.

A seguir, estudaremos o conceito de algarismo significativo, que nos auxiliará a expressar e interpretar medidas de maneira adequada.

Estudando algarismos significativos

Imagine, por exemplo, que você está medindo o comprimento de um lápis utilizando uma régua comum e, ao fazer a leitura da medida, depara-se com a seguinte situação.

Aumento aproximado de 2 vezes no destaque em *zoom* da imagem.



SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

Ao realizar uma medição utilizando régua comum, sua medida será confiável até o milímetro mais próximo.

Nesse caso, podemos dizer que essa medida está compreendida entre 15,3 cm e 15,4 cm. Porém, não somos capazes de afirmar com certeza o comprimento desse lápis, pois a régua não apresenta subdivisões entre os milímetros. O que podemos estimar, por exemplo, é que essa medida seja igual a 15,38 cm.

Note que, no resultado apresentado, estamos seguros em relação aos algarismos 1, 5 e 3, pois foram obtidos por meio das divisões inteiras do instrumento. Estes são os **algarismos corretos** ou **exatos**. Já o algarismo 8 foi escolhido por meio de uma estimativa, e outra pessoa poderia escolher, por exemplo, o algarismo 7 ou o 9. Nesse caso, é denominado **algarismo duvidoso**.

Em geral, o resultado de uma medição deve ser composto dos algarismos corretos e o primeiro algarismo duvidoso, ou seja, o resultado de uma medição deve ser representado apenas com os algarismos significativos.

Os algarismos corretos e o primeiro algarismo duvidoso no resultado de uma medição são chamados **algarismos significativos**.

Analise alguns resultados de medições com diferentes quantidades de algarismos significativos, destacados nos exemplos.

Exemplos

- **264** s
  3 algarismos significativos
- **68,12** kg
  4 algarismos significativos
- **5,0068** m
  5 algarismos significativos
- **5,00680** m
  6 algarismos significativos

Observação
Note que 5,0068 m e 5,00680 m representam uma mesma medida, porém a precisão indicada é diferente.

Nos casos de resultados de medição em que o algarismo zero estiver à esquerda do primeiro algarismo correto, antes ou depois da vírgula, ele não será significativo.

Professor, professora: Se julgar necessário, apresente aos estudantes o primeiro algarismo correto, em cada exemplo dado. Em 0,004 cm, o primeiro algarismo correto é 4; em 0,026 t, o primeiro algarismo correto é 2; em 0,0142 g, o primeiro algarismo correto é 1; em 0,01530 km, o primeiro algarismo correto é 1.

Exemplos

- 0,00**4** cm
  1 algarismo significativo
- 0,0**26** t
  2 algarismos significativos
- 0,0**142** g
  3 algarismos significativos
- 0,0**1530** km
  4 algarismos significativos

Em algumas situações, após obtermos o resultado de uma medição, precisamos escrevê-lo em outra unidade de medida. Quando for o caso, devemos estar atentos para não escrevermos zeros não significativos. Por exemplo, suponha que precisamos escrever, em metros, a medida 12,3 km. Se escrevêssemos 12,3 km = 12 300 m, concluiríamos que 3 é um algarismo correto, o que não é verdade. Para evitarmos essa imprecisão, utilizamos potência de base 10, ou seja:

$$12{,}3 \text{ km} = 12{,}3 \cdot 10^3 \text{ m}$$

Questão L.
Em seu caderno, represente a medida 75,06 t em quilogramas. Fique atento para não escrever zeros que não são significativos.
Resposta: $75{,}06 \cdot 10^3$ kg

Operações com algarismos significativos

Ao realizarmos operações com algarismos significativos, os resultados obtidos não devem ser compostos de algarismos não significativos. Sabendo disso, antes de estudarmos as operações, vamos conhecer os critérios de **arredondamento**.

Critérios

Se o algarismo a ser suprimido for menor do que 5, o algarismo da ordem à esquerda permanece inalterado.

Se o algarismo a ser suprimido for maior do que 5, deve-se acrescentar uma unidade ao algarismo da ordem à esquerda.

Se o algarismo a ser suprimido for igual a 5, será indiferente acrescentar ou não uma unidade ao algarismo da ordem à esquerda.

Observação
No caso em que o algarismo a ser suprimido for igual a 5, será indiferente acrescentar ou não uma unidade ao algarismo da ordem à esquerda, pois as respostas diferirão apenas pelo algarismo duvidoso.

Adição e subtração

Em **adições**, o resultado obtido deve ter a mesma quantidade de casas decimais da medida com menor precisão. Analise um exemplo.

$$2\,987{,}4 + 5\,412{,}382 = 8\,399{,}782$$

O resultado dessa operação deve ter uma casa decimal. Assim, de acordo os critérios apresentados, arredondamos o número 8 399,782 para 8 399,8. Portanto, o resultado arredondado de 2 987,4 + 5 412,382 é 8 399,8.

Ao efetuarmos **subtrações**, o procedimento é análogo.

Multiplicação e divisão

Em **multiplicações**, o resultado deve ter a mesma quantidade de algarismos do fator com a menor quantidade de algarismos significativos. Analise um exemplo.

$$6,4 \cdot 13,24 = 84,736$$

O produto dessa multiplicação deve ter dois algarismos significativos. Assim, de acordo com os critérios apresentados, arredondamos o número 84,736 para 85. Portanto, o resultado arredondado de $6,4 \cdot 13,24$ é 85.

Ao efetuarmos **divisões**, o procedimento é análogo.

Exercícios e problemas resolvidos

R15. Considerando-se os algarismos significativos, qual é a soma dos números 39,7 e 1,06?

a) 40,8 **b)** 40,79 **c)** 41 **d)** 40,5

Resolução

Inicialmente, adicionamos os números 39,7 e 1,06.

$$39,7 + 1,06 = 40,76$$

Como 39,7 é a parcela com a menor quantidade de casas decimais, o resultado deverá ter apenas uma casa decimal. Assim, arredondamos o número 40,76 para 40,8.

Portanto, a alternativa correta é a **a**.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

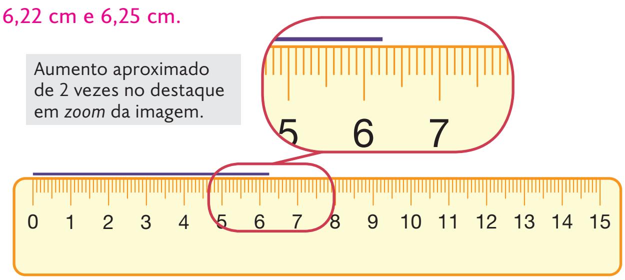
75. a) Resposta pessoal. Algumas possíveis respostas: 6,21 cm; 6,22 cm e 6,25 cm.

75. Utilizando uma régua comum, Carla mediu o comprimento de um segmento de reta.

a) Utilizando algarismos significativos, expresse o comprimento desse segmento de reta.

b) No resultado que você escreveu no item anterior, quais são os algarismos corretos? E o duvidoso? Resposta: 6 e 2. Resposta pessoal. A resposta depende da aproximação realizada pelo estudante.

Aumento aproximado de 2 vezes no destaque em *zoom* da imagem.

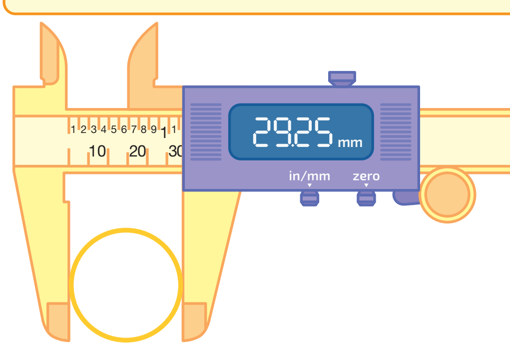


76. O paquímetro é um instrumento que permite medições relativamente precisas de dimensões internas, externas e de profundidade. Com um paquímetro digital, Eduardo mediu o diâmetro externo de sua aliança.

a) No resultado obtido, quantos são os algarismos significativos? Resposta: 4 algarismos significativos.

b) Qual é o algarismo duvidoso desse resultado? Resposta: 5

c) Escreva essa medida em micrômetros. Resposta: $2,925 \cdot 10^4$ µm



77. Determine a quantidade de algarismos significativos em cada uma das medidas apresentadas.

a) 263 t Resposta: 3 algarismos significativos.
b) 0,1005 m Resposta: 4 algarismos significativos.
c) 5,0003 s Resposta: 5 algarismos significativos.
d) 0,0005 mm Resposta: 1 algarismo significativo.
e) 5,986 g Resposta: 4 algarismos significativos.
f) 0,005069 cm Resposta: 4 algarismos significativos.

78. Em seu caderno, escreva as seguintes medidas com apenas três algarismos significativos.

a) 238,34 cm Resposta: 238 cm
b) 5,875 s Resposta: 5,88 s ou 5,87 s
c) 18,175 cm^2 Resposta: 18,2 cm^2
d) 0,15478 g Resposta: 0,155 g
e) 1,888 dm^3 Resposta: 1,89 dm^3
f) 259,91 m Resposta: 260 m

Dica
Lembre-se dos critérios de arredondamento.

79. Faça as conversões de unidades e apresente os resultados mantendo a quantidade de algarismos significativos.

a) 100 cm em quilômetros. Resposta: $1,00 \cdot 10^{-3}$ km

b) $25,60\ km^2$ em centímetros quadrados. Resposta: $2,56 \cdot 10^{11}\ cm^2$

c) 180,5 km/h em metros por segundo. Resposta: $5,014 \cdot 10^{1}$ m/s

d) 8,2 kg em gramas. Resposta: $8,2 \cdot 10^{3}$ g

e) $0,1005\ km^3$ em milímetros cúbicos. Resposta: $1,005 \cdot 10^{17}\ mm^3$

f) 5,98 t em quilogramas. Resposta: $5,98 \cdot 10^{3}$ kg

80. Efetue, em seu caderno, as adições e subtrações de modo que o resultado contenha apenas algarismos significativos.

a) 9,36 cm + 50,7 cm Resposta: 60,1 cm

b) 100,3 t + 49,83 t Resposta: 150,1 t

c) 8,179 s + 9,18 s Resposta: 17,36 s

d) 8,15 km/h − 2,957 km/h Resposta: 5,19 km/h

e) 198,28 km − 50,7 km Resposta: 147,6 km

f) 135 g − 101,85 g Resposta: 33 g

g) 25,3 cm + 17,89 cm + 189,145 cm Resposta: 232,3 cm

h) 0,005 t + 39,159 t + 25,9841 t Resposta: 65,148 t

81. Efetue, em seu caderno, as multiplicações e divisões de modo que o resultado contenha apenas algarismos significativos.

a) $78,41 \cdot 3,08$ Resposta: 241,5

b) $1,255 \cdot 10,9$ Resposta: 13,7

c) $100,138 \cdot 4,15$ Resposta: 416

d) 89,675 **:** 13,16 Resposta: 6,814

e) 158,4 **:** 24,65 Resposta: 6,426

f) 9,8888 **:** 3,4 Resposta: 2,9

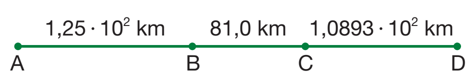
82. Milena mediu o comprimento de seu lápis e obteve como resultado 135 mm.

a) Quantos algarismos significativos há nessa medida? Resposta: 3 algarismos significativos.

b) Qual é o algarismo duvidoso? Resposta: 5

c) Seria correto escrever essa medida como 135 000 μm? Justifique sua resposta.
Resposta: Não, pois nesse caso o 5 seria um algarismo correto, o que não é verdade.

83. Simone fez uma viagem da cidade **A** à cidade **D**, passando pelas cidades **B** e **C**. Utilizando um GPS, ela determinou as distâncias entre algumas dessas cidades, porém com diferentes precisões. O esquema apresenta as distâncias obtidas por Simone.



RONALDO INÁCIO/ ARQUIVO DA EDITORA

Respeitando os algarismos significativos, determine a distância total percorrida por Simone nessa viagem.
Resposta: $3,15 \cdot 10^{2}$ km

84. Os dados a seguir mostram os tempos obtidos pelos atletas que participaram de uma das provas dos 100 m rasos nas Olimpíadas 2020, em Tóquio, no Japão. Professor, professora: A tarefa **84** propõe aos estudantes a elaboração de um problema utilizando os conceitos estudados, contribuindo para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações.

Professor, professora: Explique aos estudantes que as Olimpíadas de Tóquio 2020 foram realizadas em 2021, devido à pandemia do COVID-19.

Tempo de prova de alguns atletas em uma das provas dos 100 metros rasos nas Olimpíadas de Tóquio 2020, no Japão, realizadas em 2021

Atleta	Tempo (segundos)
Lamont Marcell Jacobs (Itália)	9,80
Fred Kerley (Estados Unidos)	9,84
Andre de Grasse (Canadá)	9,89
Akani Simbine (África do Sul)	9,93
Ronnie Padeiro (Estados Unidos)	9,95
Bingtian Su (China)	9,98

Fonte de pesquisa: TOKYO 2020: Athletics Men's 100m Results. *Olympic Games*. Disponível em: https://olympics.com/en/olympic-games/tokyo-2020/results/athletics/men-s-100m. Acesso em: 24 set. 2024.

84. Resposta pessoal. Antes de os estudantes elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** deste tópico e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

De acordo com os dados, elabore um problema envolvendo algarismos significativos e peça a um colega que o resolva enquanto você resolve o dele. Em seguida, verifiquem se as respostas obtidas estão corretas.

Medidas em informática

Nas próximas páginas, estudaremos algumas unidades de medida de **capacidade de armazenamento de dados**, de **velocidade de transferência de dados** e de **capacidade de processamento de dados**, utilizadas em informática

OBJETO DIGITAL ***Vídeo:*** A evolução dos aparelhos celulares

Capacidade de armazenamento de dados

O armazenamento de dados é uma tecnologia que permite guardar arquivos e informações usando um dispositivo, como um **disco rígido** de computador, CDs, cartão de memória e *pen drive*. A capacidade de armazenamento é medida em baites e seus múltiplos. No entanto, para entendermos o que são baites, é necessário, primeiro, definirmos os bites.

Um **bite** é a menor quantidade de informação que um computador pode processar. São necessários 8 bites para formar 1 **baite** (B), que é a quantidade de espaço no dispositivo necessária para armazenar um **caractere** de informação.

Um computador opera informações na forma de zeros (0) e uns (1). Um 0 significa “não” e um 1 significa “sim”. Então, um bite pode ser um “sim” ou um “não”. Esse sistema de numeração é conhecido como **sistema binário**.

Para expressar capacidades maiores de armazenamento, é comum utilizar os múltiplos de baites, como **quilobaites** (kB), **megabaites** (MB), **gigabaites** (GB) e **terabaites** (TB).

Caractere: símbolo de qualquer natureza (algarismo, letra do alfabeto ou sinal de pontuação, por exemplo) que pode ser inserido em um dispositivo de entrada de dados ou ser exibido em um dispositivo de saída.

Disco rígido: dispositivo de computador que armazena diferentes programas e arquivos.

KEITHY MOSTACHI/ARQUIVO DA EDITORA

Equivalência entre algumas unidades de medida de capacidade de armazenamento

1 B equivale a 1 caractere e ocupa espaço de 8 bites.

1 kB equivale a 1024 caracteres e ocupa espaço de 1024 B.

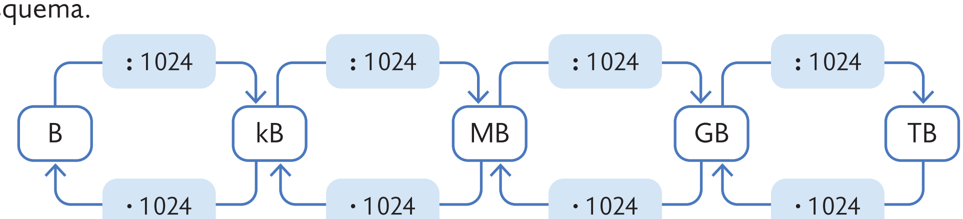
1 MB equivale a 1048 576 caracteres $(1024^2 = 1048\,576)$ e ocupa espaço de 1024 kB.

1 GB equivale a 1073 741 824 caracteres $(1024^3 = 1073\,741\,824)$ e ocupa espaço de 1024 MB.

1 TB equivale a 1099 511 627 776 caracteres $(1024^4 = 1099\,511\,627\,776)$ e ocupa espaço de 1024 GB.

Professor, professora: Informe aos estudantes que ter instrução quanto às unidades de medida do meio digital é, hoje, tão importante quanto conhecer as unidades de medida tempo, massa, comprimento e volume, por exemplo. Isso porque as mais diversas facetas da era contemporânea, do mais simples entretenimento às mais rigorosas exigências da vida profissional, dependem, em essência, de dados circulando digitalmente, sobretudo na internet. Desse modo, um conhecimento, no mínimo, dos termos e conceitos básicos que permeiam o assunto é fundamental, com importância cada vez maior para uma convivência produtiva na sociedade. Conhecer esses conceitos também é indispensável para que eles sejam capazes de absorver, de modo crítico, informações advindas da mídia ou mesmo em contextos técnicos e científicos.

Para fazer conversões entre essas unidades de medida, podemos utilizar o seguinte esquema.



Observação

As palavras utilizadas para expressar a capacidade de armazenamento – **bite**, **baite**, **quilobaite**, **megabaite**, **gigabaite** e **terabaite** – são “aportuguesadas”, ou seja, adquiriram uma feição adequada à língua portuguesa. A seguir, é apresentada a origem inglesa, indicada entre parênteses, de cada uma delas.

- bite (*bit*)
- baite (*byte*)
- quilobaite (*kilobyte*)
- megabaite (*megabyte*)
- gigabaite (*gigabyte*)
- terabaite (*terabyte*)

Embora tenhamos as palavras “aportuguesadas”, em algumas situações é preciso utilizá-las na versão original.

Questão M.

Em seu caderno, escreva um algoritmo que possibilite converter terabaites em gigabaites.

Resposta no final do **Livro do Estudante**.

R16. As gravações das 16 câmeras de segurança de uma empresa ficam armazenadas por 30 dias. Após esse período, elas são excluídas automaticamente. Sabendo que uma hora de gravação de cada câmera ocupa, em média, 180 MB e que as câmeras funcionam 24 h por dia, determine se uma capacidade de armazenamento de 2 TB é suficiente para as necessidades dessa empresa.

Resolução

Inicialmente, determinamos qual deve ser, em megabaites, a capacidade mínima para que a empresa armazene todas as gravações. Para isso, fazemos:

$$16 \cdot 30 \cdot 24 \cdot 180 = 2\,073\,600$$

Assim, a capacidade de armazenamento mínima deve ser 2 073 600 MB.

Em seguida, convertemos essa medida em terabaites.

$$2\,073\,600 \text{ MB} = 2\,073\,600 \cdot \frac{1}{1\,024} \text{ GB} = 2\,025 \cdot \frac{1}{1\,024} \text{ TB} \simeq 1{,}98 \text{ TB}$$

Portanto, 2 TB são suficientes para as necessidades dessa empresa.

R17. Jonas precisa armazenar certa quantidade de arquivos em um dispositivo com 2 GB de espaço livre.

a) É possível armazenar, nesse dispositivo, 127 arquivos com, em média, 0,7 MB cada um?

b) Escreva um algoritmo que permita resolver o problema de Jonas, dados a quantidade de arquivos e o tamanho médio, em megabaites, de cada um deles.

c) Organize o algoritmo que você escreveu no item anterior em um fluxograma.

Resolução

a) Inicialmente, determinamos a capacidade necessária para armazenar esses 127 arquivos. Para isso, fazemos:

$$127 \cdot 0{,}7 \text{ MB} = 88{,}9 \text{ MB}$$

Como 88,9 MB correspondem a uma capacidade menor do que 2 GB, é possível armazenar esses arquivos no dispositivo.

b) De acordo com o problema, temos:

1. **dados de entrada**: quantidade de arquivos e tamanho médio de cada um deles.

2. **dados de saída**: a possibilidade de armazenamento dos arquivos.

3. **procedimentos**: multiplicar a quantidade de arquivos (q) pelo tamanho médio (t) de cada um deles; dividir $q \cdot t$ por 1 024; verificar se $\frac{q \cdot t}{1\,024} \leq 2$.

Agora, escrevemos o algoritmo.

Início

1. Leia a quantidade de arquivos.

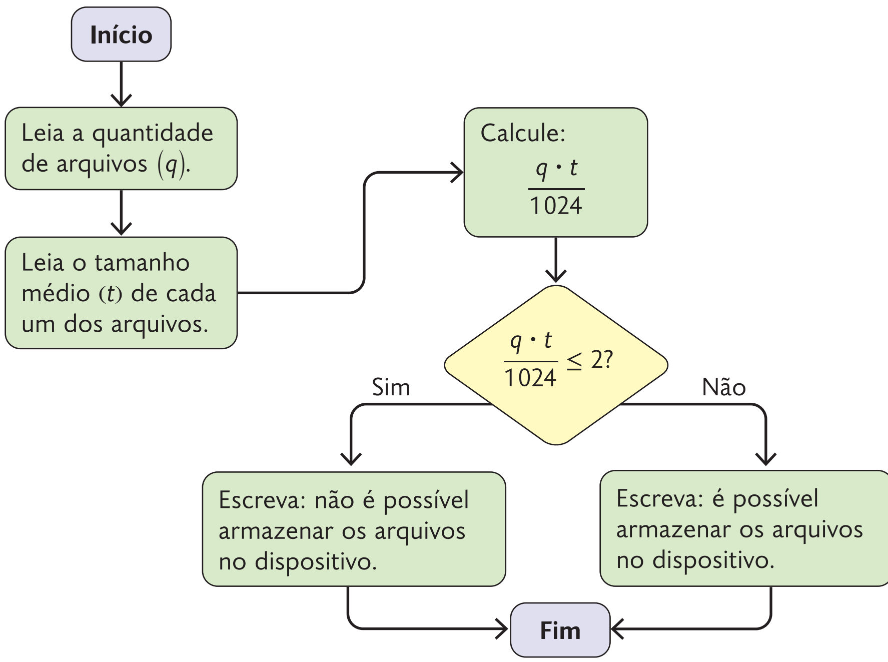
2. Leia o tamanho médio, em megabaites, de cada um dos arquivos.

3. Calcule $\frac{q \cdot t}{1\,024}$, em que q indica a quantidade de arquivos e t, o tamanho médio, em megabaites, de cada arquivo.

4. Verifique se $\frac{q \cdot t}{1\,024} \leq 2$. Se a desigualdade for verdadeira, será possível armazenar os arquivos no dispositivo. Caso contrário, não será possível armazenar os arquivos no dispositivo.

Fim

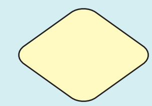
c)



LAÍS GARBELINI/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

Neste fluxograma, utilizamos a figura a seguir, que serve para indicar o ponto de decisão.



R18. Leia o texto.

O primeiro computador eletrônico, o Eniac (Eletronic Numerical Integrador and Computer), foi construído em 1945 nos Estados Unidos com o objetivo de realizar cálculos complexos. Ocupando uma sala inteira e consumindo energia elétrica equivalente à de uma pequena cidade, eram necessárias diversas pessoas para operá-lo. Mesmo com todas as dificuldades e limitações, o Eniac conseguiu, em 20 segundos, realizar cálculos que levariam 4 horas para serem feitos nas "máquinas de calcular" da época.

Para ter uma ideia, o Eniac só conseguia armazenar 20 números de 10 dígitos cada. Atualmente, muitos microcomputadores armazenam mais de um terabaite de informação.

LAÍS GARBELINI/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte de pesquisa: PAST and Future Developments in Memory Design. Disponível em: https://www.cs.umd.edu/users/meesh/411/website/projects/ramguide/pastandfuture/pastandfuture.html. Acesso em: 15 fev. 2024.

a) Quantos caracteres de informação podem ser armazenados em um microcomputador com 2 TB de espaço livre?

b) Em um dispositivo com 2 TB de espaço livre seria possível armazenar aproximadamente quantas vezes a quantidade de dígitos armazenada pelo Eniac?

Resolução

a) Inicialmente, convertemos 2 TB em baites, pois 1 B é o espaço necessário para armazenar um caractere de informação. Para isso, fazemos:

$$2 \text{ TB} = 2\,048 \text{ GB} = 2\,097\,152 \text{ MB} = 2\,147\,483\,648 \text{ kB} = 2\,199\,023\,255\,552 \text{ B}$$

Portanto, em um microcomputador com 2 TB de espaço livre, é possível armazenar 2 199 023 255 552 caracteres de informação.

b) Cada dígito equivale a 1 caractere, ou seja, 1 baite. Então, temos:

$$20 \cdot 10 = 200$$

Dividindo a quantidade obtida no item anterior por esse resultado, temos:

$$2\,199\,023\,255\,552 : 200 = 10\,995\,116\,277{,}76$$

Portanto, seria possível armazenar aproximadamente 10,995 bilhões de vezes a quantidade de dígitos armazenada pelo Eniac.

88. b) Uma possível resposta: A 1ª opção, pois é a única que atende à necessidade de espaço para armazenamento destinado a cada um dos funcionários.

Anote as respostas no caderno.

85. Transcreva no caderno os itens substituindo cada ■ pelo número adequado.

a) 45 GB = ■ MB Resposta: 45 GB = 46 080 MB

b) 1 TB = ■ kB Resposta: 1 TB = 1 073 741 824 kB

c) 88 268,8 MB = ■ GB Resposta: 88 268,8 MB = 86,2 GB

d) 385 GB = ■ bites Resposta: 385 GB = 3 307 124 817 920 bites

e) 901 775,36 kB = ■ GB Resposta: 901 775,36 kB = 0,86 GB

f) 839,68 GB = ■ TB Resposta: 839,68 GB = 0,82 TB

86. Quantos bites é possível armazenar em um dispositivo com:

a) 3 TB de espaço livre? Resposta: Aproximadamente 26,388 bilhões de bites.

b) 4,2 TB de espaço livre? Resposta: Aproximadamente 36,94 bilhões de bites.

c) 0,5 TB de espaço livre? Resposta: Aproximadamente 4,398 bilhões de bites.

87. João utiliza em seu computador um disco rígido (popularmente conhecido como HD) com 1 TB de capacidade de armazenamento. Porém, atualmente, ele tem 868 GB disponíveis.

Observação

HD é a sigla de ***hard disk***, termo em inglês para disco rígido.

a) Quantos arquivos, no máximo, com tamanho médio de 213 MB, João poderá armazenar nesse disco? Resposta: 4 172 arquivos.

b) João pretende armazenar em seu HD um arquivo cuja capacidade corresponda a 2% do espaço disponível que ele tem em seu HD. Qual é, em quilobaites, o tamanho desse arquivo? Resposta: 18 203 279,36 kB

Comentários sobre armazenamento em nuvem no **Suplemento para o professor**.

88. Certa empresa pretende migrar seu banco de dados para um serviço de armazenamento em nuvem, com o objetivo de reduzir custos, aumentar a segurança e permitir aos funcionários que acessem o sistema de outros lugares. De acordo com os cálculos da empresa, são necessários 600 GB de espaço para cada um de seus 200 funcionários. Para essa necessidade, foram ofertadas as seguintes opções de planos.

- 1ª opção: 600 GB de espaço a R$ 10,00 por mês para cada funcionário.
- 2ª opção: 120 TB de espaço a R$ 2 200,00 por mês, sem limite de usuários.

a) Qual é a opção mais vantajosa para a empresa? Resposta: A 1ª opção.

b) Supondo que a empresa contrate mais 50 funcionários e cada um deles necessite de 600 GB para armazenar seus dados, qual das opções é a mais vantajosa? Justifique sua resposta.

89. O *videogame* de Alexandre tem 512 GB de capacidade de armazenamento, dos quais 75% já estão "ocupados" com jogos.

Para adquirir novos jogos, ele comprou um HD externo de 2 TB e transferiu os jogos armazenados no *videogame* para esse dispositivo. Que porcentagem da capacidade de armazenamento do HD externo os jogos vão "ocupar"? Resposta: 18,75%

Observação

HD externo é um dispositivo que armazena os dados do computador ou *videogame* fora do aparelho. É portátil e, para usar, basta conectá-lo ao computador por meio de um cabo.

90. Ao acessar a opção "armazenamento" em seu *smartphone*, Ana se deparou com a seguinte tela.

RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

a) Quantas fotos com 5 MB, em média, Ana ainda pode armazenar em seu *smartphone*? Resposta: 225 fotos.

b) O que ela poderia fazer para aumentar a capacidade de armazenamento de seu *smartphone*?

91. Se cada foto de certa câmera fotográfica digital tem, em média, 16 MB, quantas fotos são possíveis armazenar em um cartão de memória com:

a) 17 GB de espaço livre? Resposta: 1088 fotos.

b) 29 GB de espaço livre? Resposta: 1856 fotos.

c) 53 GB de espaço livre? Resposta: 3 392 fotos.

90. b) Resposta pessoal. Algumas possíveis respostas: Ela pode desinstalar algum aplicativo que não usa mais; transferir arquivos para um computador, cartão de memória, *pen drive*, HD externo ou armazenamento em nuvem.

Velocidade de transferência de dados

Ao nos depararmos com anúncios de planos de internet fixa, é comum identificarmos a expressão “mega”, cujo significado nem sempre é apresentado ao consumidor.

LEONARDO GIBRAN/ ARQUIVO DA EDITORA

Professor, professora: Explique aos estudantes que em algumas literaturas o termo “velocidade de transferência de dados” é usado para referir-se à “taxa de transferência de dados”.

Mas, afinal, o que significa, por exemplo, uma conexão de “50 mega”? Essa expressão indica que podem ser transferidos, no máximo, 50 megabites de dados por segundo, ou seja, trata-se de uma medida de taxa de transferência de dados. Além disso, o valor anunciado normalmente refere-se à taxa de transferência máxima de *download*, que é o processo de receber um arquivo da internet e armazená-lo em seu dispositivo. Já o processo de enviar um arquivo do dispositivo para a internet, chamado *upload*, costuma ter uma taxa de transferência menor do que a do *download*.

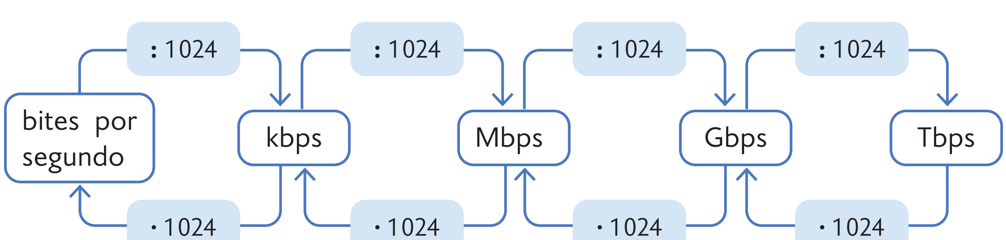
Embora a taxa de transferência seja a principal característica anunciada em planos de internet fixa, ela também está presente em diversas situações que envolvem transferência de dados, como internet móvel e transferência de arquivos entre dispositivos. Ao acessar um vídeo na internet, por exemplo, o sistema calcula a taxa de transferência de sua conexão e determina automaticamente a qualidade da imagem. Se a taxa de *download* for maior do que a necessária para a visualização do vídeo, não é necessário esperar o vídeo “carregar”.

As unidades de medida de taxa de transferência de dados mais utilizadas são: **quilobites por segundo** (kbps), **megabites por segundo** (Mbps), **gigabites por segundo** (Gbps) e **terabites por segundo** (Tbps).

Equivalência entre algumas unidades de medida de taxa de transferência de dados

Unidade de medida	Taxa de transferência equivalente
1 kbps	1024 bites por segundo
1 Mbps	1024 kbps
1 Gbps	1024 Mbps
1 Tbps	1024 Gbps

Para fazer conversões entre essas unidades de medida, podemos utilizar o seguinte esquema.



Exemplos

- $2\,048 \text{ kbps} = \dfrac{2\,048}{1024} \text{ Mbps} = 2 \text{ Mbps}$
- $2 \text{ Tbps} = 2 \cdot 1\,024^2 \text{ Mbps} = 2\,097\,152 \text{ Mbps}$

Questão N. Resposta pessoal. A resposta depende da preferência dos estudantes pelos conteúdos.

Questão N.

Você já assistiu ou assiste a vídeos de música, finanças, ciência, *games* ou cultura na internet? O que mais chamou sua atenção nesses vídeos?

Questão O.

Você já fez *upload* de um vídeo, ou seja, você já “postou” algum vídeo em suas redes sociais? E fotos? Resposta pessoal. A resposta depende das vivências dos estudantes.

Observação

Em algumas situações, para expressar a taxa de transferência de dados, são utilizadas unidades de medida como terabaites por segundo, gigabaites por segundo e megabaites por segundo.

Professor, professora: Se julgar pertinente, informe aos estudantes que nas tarefas **94** e **95** deste tópico serão apresentadas situações em que a taxa de transferência de dados é expressa em megabaites por segundo.

Exercícios e problemas resolvidos

R19. Qual é, em horas, minutos e segundos, o tempo necessário para fazer o *upload* de um arquivo de 1,25 GB a uma taxa de transferência média de 0,8 Mbps?

Resolução

Inicialmente, vamos determinar a equivalência entre gigabaite e megabite. Como 1 B = 8 b, temos:

1 TB = 8 Tb | 1 GB = 8 Gb | 1 MB = 8 Mb | 1 kB = 8 kb

Observação

Tb: terabite
Gb: gigabite
Mb: megabite
kb: quilobite

Diante dessas equivalências e sabendo que 1 GB = 1024 MB, obtemos:

$$1\ \text{GB} = 1 \cdot 1024\ \text{MB} = 1024 \cdot 8\ \text{Mb} = 8\,192\ \text{Mb}$$

Nesse caso:

$$1{,}25\ \text{GB} = 1{,}25 \cdot 8\,192\ \text{Mb} = 10\,240\ \text{Mb}$$

Agora, utilizando regra de três simples, determinamos o tempo, em segundos, necessário para fazer o *upload* do arquivo.

Quantidade de dados (em Mb)		Tempo (em segundos)
0,8	———	1
10 240	———	x

$$x \cdot 0{,}8 = 10\,240 \cdot 1$$

$$x = \frac{10\,240}{0{,}8}$$

$$x = 12\,800$$

Assim, são necessários 12 800 segundos para fazer esse *upload*. Agora, convertemos essa medida em horas, minutos e segundos.

$$12\,800\ \text{s} = 213\ \text{min}\ 20\ \text{s} = 3\ \text{h}\ 33\ \text{min}\ 20\ \text{s}$$

Portanto, o tempo necessário para fazer esse *upload* é de 3 h 33 min 20 s.

R20. Escreva um algoritmo que permita determinar o tempo necessário, em segundos, para fazer o *upload* de um arquivo, dadas a quantidade de dados que serão transferidos em gigabaite e a taxa de transferência média em megabites por segundo.

Resolução

De acordo com o problema, temos:

1. **dados de entrada**: quantidade de dados que serão transferidos em gigabaite e taxa de transferência média em megabites por segundo.
2. **dados de saída**: tempo gasto em segundo para fazer o *upload* do arquivo.
3. **procedimento**: multiplicar o número que expressa a quantidade de dados que serão transferidos em gigabaite por 8 192; dividir o produto obtido pelo número que expressa a taxa de transferência média em megabites por segundo.

Agora, escrevemos o algoritmo.

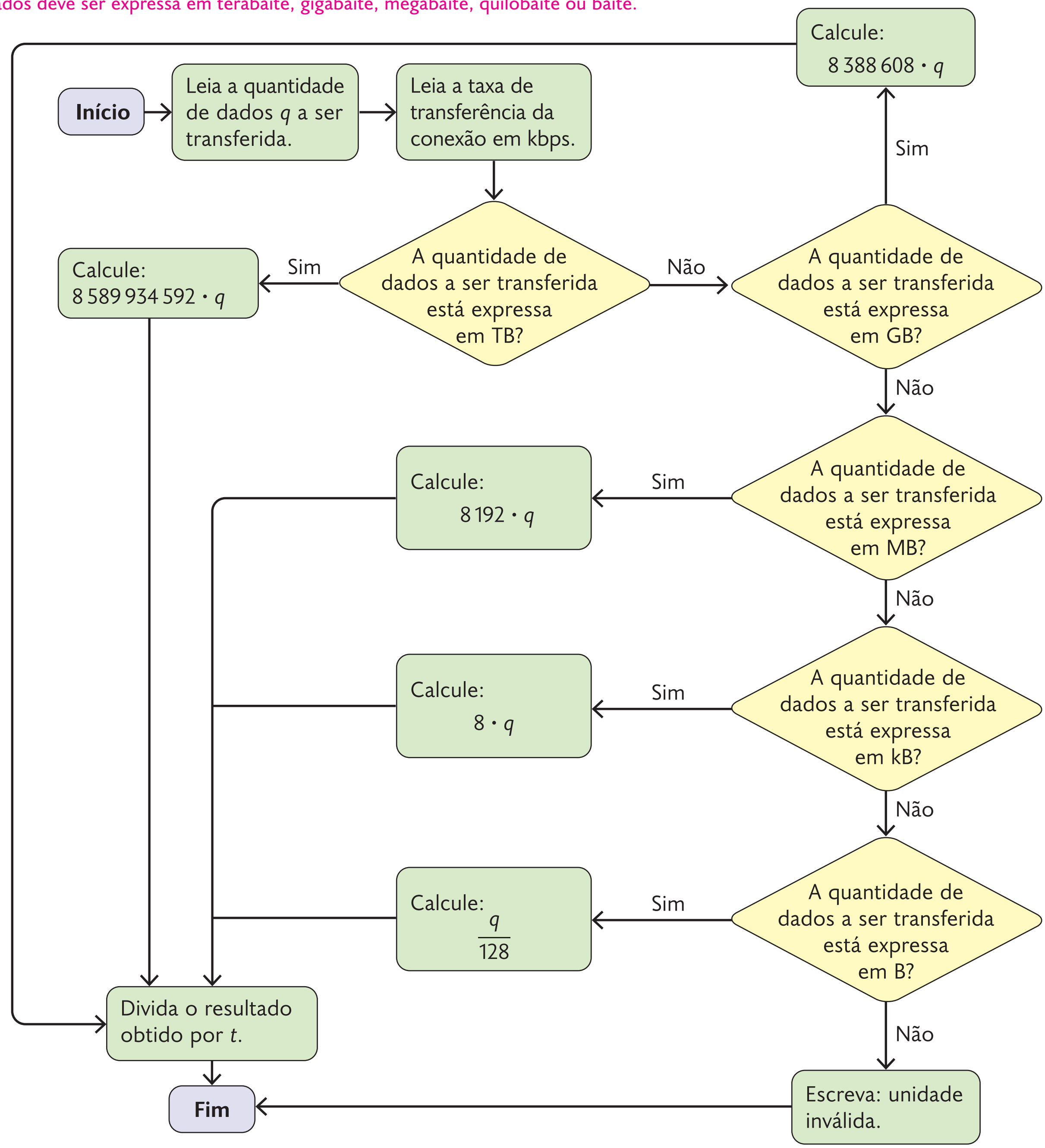
Início

1. Leia a quantidade de dados que serão transferidos em gigabaite.
2. Leia a taxa de transferência média em megabites por segundo.
3. Multiplique o número que expressa a quantidade de dados que serão transferidos em gigabaite por 8 192.
4. Divida o produto obtido no passo **3** pelo número que expressa a taxa de transferência média em megabites por segundo.

Fim

92. O fluxograma a seguir possibilita calcular o tempo necessário, em segundos, para realizar o *download* de certa quantidade de dados, conhecendo a taxa de transferência de *download* em quilobites por segundo.

92. a) Resposta: Não, pois, para que seja possível obter o tempo necessário para realizar o *download*, a quantidade de dados deve ser expressa em terabaite, gigabaite, megabaite, quilobaite ou baite.



LAÍS GARBELINI/ARQUIVO DA EDITORA

a) É possível obter, utilizando o fluxograma, o tempo necessário para realizar o *download* se a quantidade de dados estiver expressa em bite? Justifique sua resposta.

b) No fluxograma, se a quantidade de dados estiver expressa em terabaite, é necessário multiplicar o número que expressa essa quantidade por 8 589 934 592. Justifique a necessidade de efetuar essa multiplicação.
Resposta no final do **Livro do Estudante**.

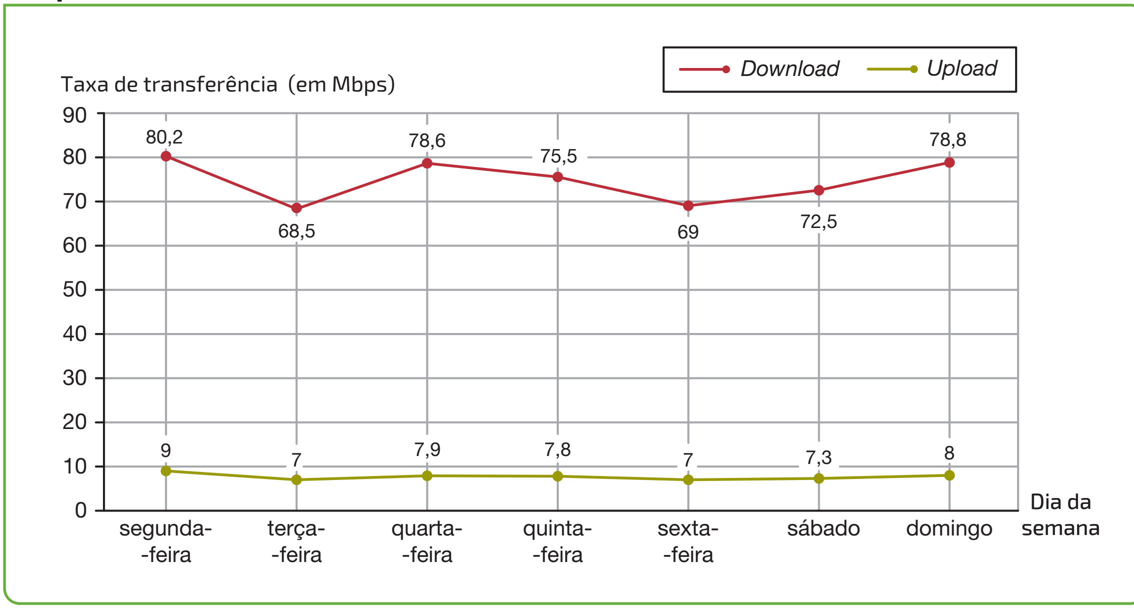
c) Se a taxa de transferência de *download* é 512 kbps, quantos segundos são necessários para fazer o *download* de um vídeo de 17 MB? Resposta: 272 s

d) Escreva um algoritmo que possibilite calcular o tempo necessário para realizar o *download* de certa quantidade de dados expressa em terabaite ou gigabaite, dada a taxa de transferência de *download* em megabites por segundo. Em seguida, organize-o em um fluxograma. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

93. O Ministério das Comunicações determinou que as empresas de telecomunicação garantam uma velocidade mínima de *download* de 100 MBps para a tecnologia 5G, ou seja, dez vezes a mais que o mínimo determinado para a rede 4G. De acordo com essas informações, considerando que um *download* leva 15 minutos para ser executado na rede 4G, quantos minutos aproximadamente são necessários para completar esse mesmo *download* na rede 5G? Resposta: 1,5 min

94. O gráfico a seguir apresenta as taxas médias de transferência de *download* e de *upload* do computador de Marcelo em alguns dias. Professor, professora: O item **c** da tarefa **94** propõe aos estudantes a elaboração de um problema utilizando os conceitos estudados, contribuindo para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações. Antes que eles elaborem o problema, peça-lhes que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** deste tópico e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

Taxas médias de transferência de *download* e *upload* do computador de Marcelo de 15 a 21 de abril de 2024



Fonte de pesquisa: Histórico do computador de Marcelo.
Professor, professora: As informações apresentadas no gráfico são fictícias.

a) Na terça-feira, Marcelo fez o *download* de um jogo de 40 GB para seu computador.

- Quanto tempo, em horas, minutos e segundos, foi necessário para realizar esse *download*? Resposta: Aproximadamente 1 h 19 min 44 s.
- Se Marcelo tivesse feito o *download* desse jogo na quarta-feira, quanto tempo, em horas, minutos e segundos, seria necessário? Resposta: Aproximadamente 1 h 9 min 29 s.

b) No sábado, utilizando seu computador, ele "postou" um vídeo de 12 MB em uma de suas redes sociais. Quantos segundos foram necessários para fazer o *upload* desse vídeo? Resposta: Aproximadamente 13,2 s.

c) De acordo com os dados, elabore um problema envolvendo *download* e *upload*. Em seguida, peça a um colega que o resolva. Resposta pessoal. A resposta deste item depende de cada problema elaborado pelos estudantes.

95. Com o avanço da tecnologia, foi possível, por exemplo, aumentar a capacidade de armazenamento e a taxa de transferência de um HD. Além disso, houve uma redução em seu tamanho físico, no ruído gerado e no consumo de energia. Atualmente, mesmo com tecnologias mais rápidas e seguras, o baixo custo de um HD, aliado a seu desempenho, faz com que ele ainda esteja presente em grande parte dos computadores.

a) A fim de melhorar a taxa de transferência e a capacidade de armazenamento de seu computador, Alice comprou um novo HD. Para transferir os 360 GB de dados do antigo HD para o novo, ela os conectou, simultaneamente, a seu computador. Sabendo que a taxa de transferência foi de 30 MB por segundo, determine quanto tempo, em horas, minutos e segundos, foi necessário para concluir a transferência. Resposta: 3 h 24 min 48 s

b) O HD que Alice comprou foi anunciado com uma taxa de transferência de 180 MB por segundo. Cite alguns possíveis motivos pelos quais a taxa de transferência descrita no item **a** foi menor do que a anunciada.

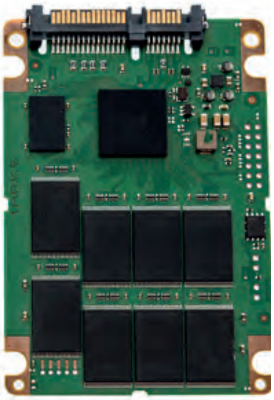
c) Se a transferência de dados descrita no item **a** fosse realizada à taxa anunciada na venda do HD, quanto tempo, em horas, minutos e segundos, seria necessário para concluí-la? Resposta: 0 h 34 min 8 s

95. b) Algumas possíveis respostas: A taxa de transferência do HD antigo era menor; as conexões e os cabos não suportaram a taxa de transferência anunciada; o computador estava realizando outras tarefas e, por isso, a taxa de transferência foi reduzida.

96. O SSD é um dispositivo de armazenamento de dados. Diferentemente do HD, o SSD não tem partes móveis, permitindo, por exemplo, melhores taxas de transferência, maior resistência a falhas mecânicas e menor consumo de energia.

A fim de verificar o desempenho de um SSD em relação ao de um HD, Jorge fez duas transferências de um mesmo arquivo: a 1ª de um SSD para outro e a 2ª de um SSD para um HD. Os tempos gastos na 1ª e na 2ª transferência foram, respectivamente, 40 s e 10 min 37 s.

HD



SSD

FOTOS: KEITH HOMAN/SHUTTERSTOCK

a) Sabendo que na 1ª transferência a taxa foi 510 Mbps, determine quantos gigabaites tem o arquivo transferido. Resposta: Aproximadamente 2,49 GB.

Observação

SSD é a sigla de ***solid state drive***, que é o termo em inglês para "unidade de estado sólido".

b) Qual foi a taxa de transferência realizada entre o SSD e o HD? Resposta: Aproximadamente 32 Mbps.

c) Sabendo que o SSD utilizado na experiência realizada por Jorge custa duas vezes mais do que um HD de mesma capacidade, qual dispositivo, em sua opinião, é mais vantajoso para o uso em computadores pessoais? Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes respondam que o tipo de dispositivo mais vantajoso depende das necessidades do usuário.

97. Embora as transmissões via satélite sejam cada vez mais eficientes, a maior parte das comunicações entre os continentes acontece por meio de cabos de transferência situados no fundo dos oceanos, que permitem uma comunicação mais rápida, segura e barata. Essa grande rede de cabos submarinos também vem sendo aprimorada com a criação de novas tecnologias e a instalação de novos cabos. Analise o seguinte trecho de uma notícia de janeiro de 2017.

> Um grupo de pesquisadores e engenheiros do São Paulo Research and Analysis Center (Sprace) e do Núcleo de Computação Científica (NCC) da Universidade Estadual Paulista (Unesp), em colaboração com colegas da Academic Network of São Paulo (Rede ANSP) – todos apoiados pela Fapesp –, do Americas Pathways (AmPATH) e do California Institute of Technology (Caltech), dos Estados Unidos, conseguiu estabelecer um novo recorde de transmissão de dados entre os hemisférios Sul e Norte e vice-versa.
>
> Em um primeiro experimento, eles transferiram dados do *datacenter* do NCC da Unesp, em São Paulo, para Miami, nos Estados Unidos, com grande estabilidade e por um período de 17 horas, a uma taxa de, aproximadamente, 85 Gigabits por segundo (Gbps) – uma capacidade de transmissão 8,5 mil vezes maior do que a da banda larga de internet de uso doméstico no Brasil, de até 10 megabits por segundo (Mbps).
>
> Pouco tempo depois, em um novo experimento realizado no sentido contrário, conseguiram transferir dados durante uma hora a partir de Miami para o Sprace – cujos sistemas estão instalados no NCC – a uma taxa média de 96,56 Gbps, com pico de 97,56 Gbps e sempre acima de 95,86 Gbps – equivalente a quase 10 mil vezes a capacidade de transmissão da banda larga de internet de uso doméstico no Brasil.
>
> [...]
>
> ALISSON, Elton. Novo recorde de transmissão de dados pela internet entre hemisférios é estabelecido. *Agência Fapesp*, 20 jan. 2017. Disponível em: https://agencia.fapesp.br/novo-recorde-de-transmissao-de-dados-pela-internet-entre-hemisferios-e-estabelecido/24650. Acesso em: 24 set 2024.

a) Considerando o primeiro experimento apresentado na notícia, quantos terabaites foram transferidos durante o período do teste? Resposta: Aproximadamente 635 TB.

b) Quantos megabites foram transferidos, em média, a cada segundo durante a realização do segundo teste? Quanto tempo, em horas e minutos, seria necessário para transferir essa quantidade de dados utilizando a taxa máxima da banda larga de internet de uso doméstico no Brasil em 2017? Resposta: 98 877,44 Mb; aproximadamente 2 h 45 min.

c) Faça uma pesquisa sobre os recordes de transmissão de dados obtidos atualmente em cabos submarinos no mundo todo e compare com os resultados apresentados na notícia. Resposta pessoal. A resposta depende do resultado da pesquisa feita pelos estudantes.

Velocidade de processamento de dados

Um dos aspectos que diferencia os vários modelos de produtos tecnológicos disponíveis no mercado é sua CPU. Chamada muitas vezes de **microprocessador** ou **processador**, esse componente eletrônico é responsável por executar os programas. Quanto maior for a capacidade de processamento da CPU, mais rápido serão executados os programas.


HADRIAN/SHUTTERSTOCK

Processador de CPU.

Professor, professora: Se julgar necessário, mostre aos estudantes o significado de *smartwatches*, que está na página seguinte.

Observação

Os processadores são utilizados em aparelhos, como computadores, *tablets*, *smartwatches* e *videogames*.

De modo geral, a capacidade de processamento da CPU é medida em **mega-hertz** (MHz) ou em **giga-hertz** (GHz), que são múltiplos do **hertz** (Hz). Essas unidades indicam a quantidade de ciclos por segundo que o componente eletrônico consegue processar.

Professor, professora: Explique aos estudantes que a compreensão adequada do significado de velocidade de processamento de dados e a capacidade de realizar conversões entre suas unidades de medida são habilidades importantes no mundo atual. Isso porque essas habilidades são necessárias para interpretar informações relativas às tecnologias que permeiam quase todas as facetas da vida contemporânea, capacitando os estudantes a utilizá-las com maior segurança e naturalidade. Servindo desde o embasamento para escolher um *smartphone* com melhor desempenho até a aquisição de conhecimentos técnicos que podem ser úteis em âmbito profissional, consideramos que o estudo da velocidade de processamento, nos dias de hoje, não é apenas mera curiosidade, mas verdadeira necessidade para saber usufruir das tecnologias modernas com o discernimento adequado.

Quantidade de ciclos correspondente a algumas unidades de medida de capacidade de processamento

Medida	Ciclos por segundo
1 hertz (Hz)	1
1 mega-hertz (MHz)	1000 000
1 giga-hertz (GHz)	1000 000 000

Fonte de pesquisa: INMETRO. *O Sistema Internacional de Unidades (SI)*. Tradução: Grupo de Trabalho luso-brasileiro do Inmetro e IPQ. 9. ed. Brasília, DF: Inmetro, 2021.

Observação

Um ciclo é um período completo de um fenômeno periódico. Como 1 Hz equivale a 1 ciclo por segundo, ao indicar, por exemplo, uma corrente elétrica com frequência de 60 Hz, significa que ela completa 60 ciclos por segundo.

Diante dessas correspondências, temos as seguintes equivalências:

1 GHz = 1000 MHz

1 GHz = 1000 000 000 Hz

1 MHz = 1000 000 Hz

Exercícios e problemas resolvidos

R21. A CPU do *notebook* de Laura tem uma capacidade de processamento de 3,8 GHz.

a) Escreva a capacidade de processamento da CPU do *notebook* de Laura em mega-hertz.

b) Quantos ciclos por segundo a CPU do *notebook* de Laura consegue processar?

Resolução

a) Como 1 GHz = 1000 MHz, temos:

$$3{,}8 \text{ GHz} = 3{,}8 \cdot 1000 \text{ MHz} = 3\,800 \text{ MHz}$$

Portanto, esse *notebook* tem CPU com 3 800 MHz de capacidade de processamento.

b) Como 1 GHz corresponde a 1000 000 000 ciclos por segundo, fazemos:

$$3{,}8 \cdot 1\,000\,000\,000 = 3\,800\,000\,000$$

Portanto, a CPU desse *notebook* consegue processar 3 800 000 000 ciclos por segundo.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

98. Quantos ciclos por segundo correspondem à frequência de uma CPU de:

a) 3,2 GHz? Resposta: 3 200 000 000 ciclos por segundo.

b) 770 MHz? Resposta: 770 000 000 ciclos por segundo.

c) 2,4 GHz? Resposta: 2 400 000 000 ciclos por segundo.

d) 4 GHz? Resposta: 4 000 000 000 ciclos por segundo.

e) 450 MHz? Resposta: 450 000 000 ciclos por segundo.

f) 1,8 GHz? Resposta: 1 800 000 000 ciclos por segundo.

g) 3,4 GHz?

h) 25 MHz? Resposta: 25 000 000 ciclos por segundo.

98. g) Resposta: 3 400 000 000 ciclos por segundo.

99. Qual é, em giga-hertz, a capacidade de processamento de uma CPU que processa:

a) 3 000 000 000 ciclos por segundo? Resposta: 3 GHz

b) 4 200 000 000 ciclos por segundo? Resposta: 4,2 GHz

c) 7 500 000 ciclos por segundo? Resposta: 0,0075 GHz

d) 11 500 000 ciclos por segundo? Resposta: 0,0115 GHz

e) 60 000 000 ciclos por minuto? Resposta: 3,6 GHz

f) 40 000 000 ciclos por minuto? Resposta: 2,4 GHz

g) 300 000 ciclos por hora? Resposta: 1,08 GHz

h) 500 000 ciclos por hora? Resposta: 1,8 GHz

100. Transcreva no caderno os itens substituindo cada ■ pelo número adequado.

a) 3 200 MHz = ■ GHz
Resposta: 3 200 MHz = 3,2 GHz

b) 4,2 GHz = ■ MHz
Resposta: 4,2 GHz = 4 200 MHz

c) 440 Hz = ■ MHz
Resposta: 440 Hz = 0,00044 MHz

d) 52 MHz = ■ GHz
Resposta: 52 MHz = 0,052 GHz

e) 64 GHz = ■ Hz
Resposta: 64 GHz = 64 000 000 000 Hz

f) 518 MHz = ■ Hz
Resposta: 518 MHz = 518 000 000 Hz

g) 35 700 Hz = ■ GHz
Resposta: 35 700 Hz = 0,0000357 GHz

h) 683 GHz = ■ MHz
Resposta: 683 GHz = 683 000 MHz

101. Escreva um algoritmo que possibilite converter uma medida em giga-hertz em uma medida em mega-hertz.
Resposta: Início; 1. Leia a medida em giga-hertz.; 2. Multiplique a medida em giga-hertz por 1 000.; Fim.

102. Organize o algoritmo que você escreveu na tarefa anterior em um fluxograma.
Resposta no final do **Livro do Estudante**.

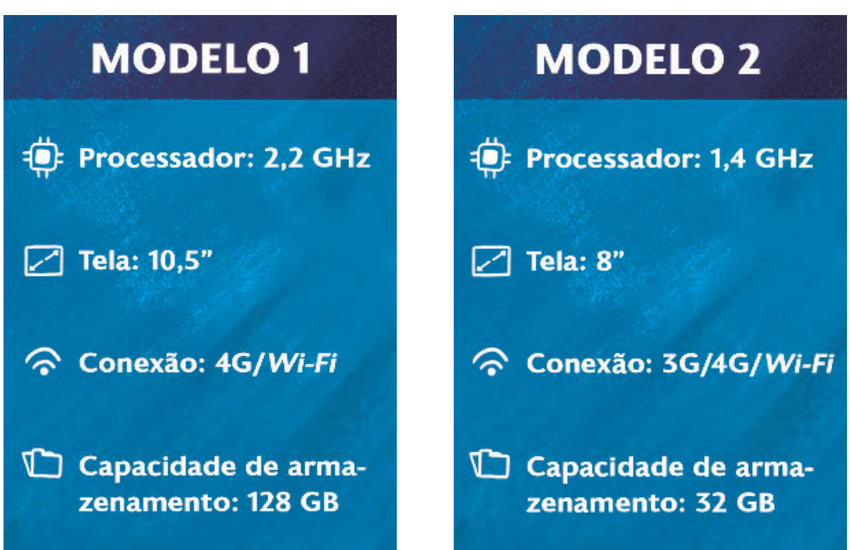
103. Qual é a diferença entre a quantidade de ciclos por segundo correspondente à frequência de um processador de 3,2 GHz e à de um de 0,8 MHz? Resposta: 3 199 200 000 ciclos por segundo.

104. Certa fabricante de *smartwatches* sabe que o processador do dispositivo deve ter uma capacidade de processamento suficiente para realizar todas as funções disponíveis. Após avanços tecnológicos, essa fabricante disponibilizou no mercado uma nova versão de ***smartwatch***, com capacidade de processamento 20% maior do que a capacidade da versão anterior. Sabendo que essa nova versão tem 180 MHz a mais do que a versão anterior, determine sua capacidade de processamento, em giga-hertz. Resposta: 1,08 GHz

Smartwatch: dispositivo eletrônico com diversas funcionalidades digitais, projetado para ser usado no pulso; relógio inteligente.

105. A CPU do *smartphone* atual de Adriana processa 1 400 000 000 ciclos por segundo. Insatisfeita com o desempenho de seu dispositivo, ela pretende trocá-lo por um *smartphone* que tenha uma capacidade de processamento igual ao dobro da atual. De quantos giga-hertz deve ser a CPU desse novo *smartphone*?
Resposta: 2,8 GHz

106. Analise as configurações de dois modelos de *tablet* anunciados em uma loja.



LEONARDO GIBRAN/ARQUIVO DA EDITORA

Professor, professora: A tarefa **107** propõe aos estudantes a elaboração de um problema utilizando os conceitos estudados, contribuindo para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações. Antes que eles elaborem o problema, peça-lhes que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** deste tópico e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

a) A capacidade de processamento do modelo **1** é quantos por cento maior do que a do modelo **2**?
Resposta: Aproximadamente 57,1%.

b) Qual é a diferença, em megabaites, entre a capacidade de armazenamento do modelo **1** e a do modelo **2**?
Resposta: 98 304 MB

c) Se você tivesse que escolher entre esses dois *tablets*, qual compraria? Justifique sua resposta. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes escolham o *tablet* que atenda melhor às suas necessidades e deem suas justificativas.

107. Elabore um problema envolvendo medidas de capacidade de processamento de dados e algumas de suas unidades de medida. Depois, peça a um colega que o resolva. Por fim, verifiquem se as respostas obtidas estão corretas. Resposta pessoal. A resposta depende de cada problema elaborado pelos estudantes.

SÍNTESE DO CAPÍTULO

12. Sugestão de resposta: Multiplicaria o número que expressa a capacidade de processamento da CPU por 1 000 000 000.

Neste capítulo, estudamos algumas grandezas e suas respectivas unidades de medidas. Agora, chegou a hora de refletir sobre o que você aprendeu! Como estratégia de estudos, sugerimos que faça uma autoavaliação, revise conceitos e sintetize o que foi estudado. Para isso, resolva as questões propostas.

10. Sugestão de resposta: Multiplicaria o número que expressa a medida em metros cúbicos por 1 000.

1. Você conhecia algum dos conteúdos estudados neste capítulo? Cite-os. Resposta pessoal. A resposta depende dos conhecimentos prévios dos estudantes.

2. A seguir, estão apresentados os principais assuntos estudados neste capítulo.

Sistema Internacional de Unidades (SI) • Comprimento
Tempo • Capacidade • Medidas em informática
Velocidade média • Algarismos significativos
Notação científica • Volume • Massa • Área

Você teve dificuldade em algum deles? Não recorda algum desses conceitos? Ficou com dúvidas? Reflita sobre esses questionamentos e, se necessário, retome o que foi estudado. Resposta pessoal. Comentários no **Suplemento para o professor**.

3. Cite duas situações do cotidiano em que precisamos medir: Respostas no final do **Livro do Estudante**.

a) tempo.
b) comprimento.
c) massa.
d) área.
e) volume.
f) capacidade.
g) velocidade média.
h) capacidade de armazenamento de dados.
i) velocidade de transferência de dados.
j) velocidade de processamento de dados.

14. Resposta pessoal. Antes de os estudantes elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos nas seções **Exercícios e problemas** deste capítulo e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

4. O número $12{,}6 \cdot 10^{-9}$ está escrito em notação científica? Justifique sua resposta.
Resposta: Não, pois 12,6 é maior do que 10.

5. Escreva um algoritmo que possibilite converter uma medida em segundos em uma medida em microssegundos.
Resposta no final do **Livro do Estudante**.

6. Qual dos itens apresenta a definição de unidade astronômica? Resposta: Alternativa **b**.

a) Distância média entre a Terra e a Lua.
b) Distância média entre a Terra e o Sol.

7. Qual unidade de medida é a mais adequada para medir distâncias fora do Sistema Solar?
Resposta: Ano-luz.

8. Ao convertermos 1965 nm, obtemos $19{,}65 \cdot 10^{-7}$ m? Justifique sua resposta. Resposta: Sim, pois $1 \text{ nm} = 1 \cdot 10^{-9}$ m e $1965 \cdot 10^{-9} = 19{,}65 \cdot 10^{-7}$.

9. Quais unidades de medida de área você estudou neste capítulo?
Respostas no final do **Livro do Estudante**.

10. Qual estratégia você utilizaria para converter uma medida expressa em metros cúbicos em uma medida expressa em litros?

11. Qual alternativa apresenta o conceito correto de algarismo significativo? Resposta: Alternativa **b**.

a) Os algarismos corretos no resultado de uma medição são denominados algarismos significativos.
b) Os algarismos corretos e o primeiro algarismo duvidoso no resultado de uma medição são chamados algarismos significativos.
c) Os algarismos corretos e os dois primeiros algarismos duvidosos no resultado de uma medição são denominados algarismos significativos.

12. Imagine que você queira saber quantos ciclos por segundo uma CPU consegue processar e que a única informação fornecida é a capacidade de processamento dela em giga-hertz. Qual estratégia você utilizaria?

13. Escreva um algoritmo para determinar:
Respostas no final do **Livro do Estudante**.

a) a quantidade de quilogramas que falta ser carregada em um caminhão, dadas a carga total em toneladas e a quantidade de quilogramas carregada até o momento.
b) a velocidade média de um corpo, em quilômetros por hora, dados a distância percorrida em quilômetros e o tempo gasto para completar o percurso em minutos.
c) o tempo necessário, em segundos, para fazer o *download* de um arquivo, dados o tamanho do arquivo em gigabaite (GB) e a taxa de transferência média em megabites por segundo (Mbps).

14. Escolha um dos conteúdos estudados neste capítulo e elabore um problema envolvendo-o. Depois, troque com um colega para que ele o resolva. Por fim, verifique se a resposta obtida por ele está correta.

15. Faça uma síntese do que foi estudado neste capítulo. Nela, use desenhos e dê exemplos.
Resposta pessoal. Comentários no **Suplemento para o professor**.

CAPÍTULO 2

CONJUNTOS

GEDRIIUS/SHUTTERSTOCK

Onça-pintada (*Panthera onca*).

Professor, professora: Se julgar conveniente, explique aos estudantes que, atualmente, a classificação dos seres vivos é realizada por um ramo da ciência denominado Sistemática, que se preocupa em inventariar e descrever a biodiversidade do planeta Terra. A Sistemática se divide em Taxonomia e Filogenia. A primeira é dedicada à catalogação dos seres vivos conhecidos, estabelecendo categorias e critérios convenientes para uma organização eficaz, a fim de facilitar a identificação dos seres e a comunicação entre os pesquisadores. A Filogenia, por sua vez, estuda as relações evolutivas entre os organismos, traçando vínculos de semelhança e ancestralidade entre as espécies.

A quantidade de espécies de seres vivos presentes na Terra é incerta, mas sabe-se que milhões delas habitam nosso planeta e, constantemente, novas espécies são descobertas.

Em razão dessa grande quantidade, foi necessário criar um sistema de classificação dos seres vivos. O sistema atual faz esse agrupamento com base em categorias relacionadas às suas semelhanças. Desse modo, espécies semelhantes agrupam-se em gêneros, que, por suas semelhanças, são reunidas em famílias, depois em ordens, em classes, em filos, até que filos semelhantes se agrupem em reinos.

O lince, a onça-pintada, o tigre e o guepardo, por exemplo, vivem em regiões distantes uma da outra, do norte ocidental ao sul oriental. Apesar disso, essas quatro espécies têm diversas semelhanças e são organizadas em uma mesma família, a dos felídeos (*Felidae*), que por sua vez faz parte da classe dos mamíferos (*Mammalia*), à qual nós, seres humanos, também pertencemos.

Neste capítulo, você vai estudar:

- noção de conjuntos;
- conjuntos unitário, vazio e universo;
- relação de inclusão;
- operações com conjuntos;
- conjuntos numéricos;
- conjunto dos números reais;
- intervalos.

PARA EXPANDIR

Para obter mais informações sobre a classificação dos animais, é possível consultar o artigo a seguir, que apresenta um sistema computacional com diversas informações relativas a esse assunto. Disponível em: https://eventoscientificos.ifsc.edu.br/index.php/sictsul/sictsul2016/paper/view/1770/1376. Acesso em: 9 set. 2024.

1. Resposta pessoal. Sugestão de resposta: Por causa de certas semelhanças: têm pelos, são mamíferos, apresentam garras e são carnívoros.

2. Resposta: Classe dos mamíferos, pois agrupa, além dos felídeos, outras famílias.

3. Resposta pessoal. Algumas possíveis respostas: Os mamíferos são animais que, entre outras características, destacam-se pela presença de pelos no corpo e pela capacidade de produzir leite para alimentar seus filhotes.

Professor, professora: Oriente os estudantes a escrever as respostas no caderno.

1. Por que as quatro espécies citadas no texto pertencem à mesma família dos felídeos?

2. Qual dos grupos tem a maior quantidade de seres vivos: a família dos felídeos ou a classe dos mamíferos? Justifique sua resposta.

3. Faça uma pesquisa para identificar qual é a principal característica da classe dos mamíferos.

Estudando conjuntos

Ao obter quaisquer coleções de objetos distintos, estamos formando **conjuntos**.

Os animais vertebrados, por exemplo, podem ser divididos em cinco classes: peixes, anfíbios, répteis, aves e mamíferos. Cada uma dessas classes é um conjunto.

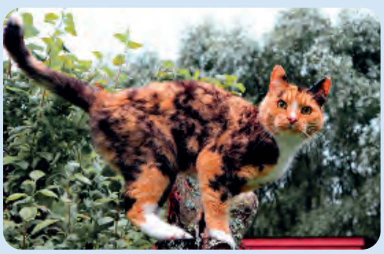
Os **vertebrados** a seguir estão classificados no subfilo *Vertebrata* do filo *Chordata*. Esse grupo é considerado grande e diversificado, e nele todos os animais têm crânio e a maioria tem vértebras que formam a coluna vertebral.

Imagens sem proporção entre si.

Mamíferos

Os mamíferos têm sangue quente. Suas fêmeas têm glândulas mamárias, com as quais amamentam os filhotes.

SARI ME/SHUTTERSTOCK



Gato (*Felis catus*).

Aves

Uma característica exclusiva das aves é ter penas, que revestem e isolam o corpo, possibilitando a regulação da temperatura e auxiliando no voo.

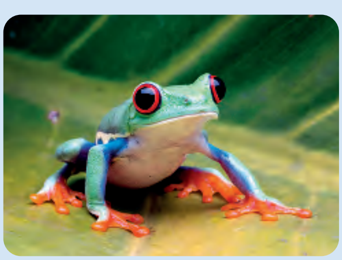
FEDOR SELIVANOV/SHUTTERSTOCK

Tucano-toco (*Ramphastos toco*).

Anfíbios

A maioria das espécies de anfíbios vive parcialmente na água e na terra. Esses animais, em geral, são predadores de insetos e outros invertebrados.

KURIT AFSHEN/SHUTTERSTOCK

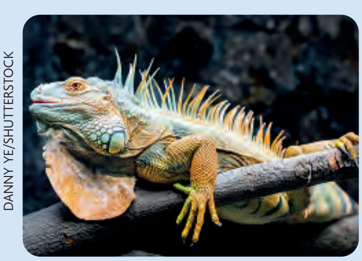


Rã-de-olhos-vermelhos (*Agalychnis callidryas*).

Répteis

Acredita-se que os répteis foram os primeiros vertebrados a adaptarem-se à vida em lugares secos no ambiente terrestre.

DANNY YE/SHUTTERSTOCK

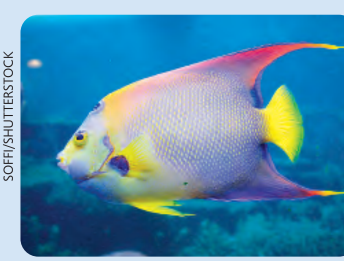


Iguana-verde (*Iguana iguana*).

Peixes

Uma das principais características dos peixes é a respiração por brânquias.

SOFFI/SHUTTERSTOCK



Peixe-anjo-rainha (*Holacanthus ciliaris*).

Fontes de pesquisa: STORER, Tracy I. *et al*. *Zoologia geral*. 6. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 2000.
POUGH, F. Harvey; JANIS, Christine M.; HEISER, John B. *A vida dos vertebrados*. São Paulo: Atheneu, 2003.
HICKMAN JÚNIOR, Cleveland P.; ROBERTS, Larry S.; LARSON, Allan. *Princípios integrados de zoologia*. 11. ed. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 2009.

Na Matemática, a ideia de conjuntos é fundamental e está presente em diversos conceitos. Podemos formar conjuntos por meio de objetos de diferentes naturezas, como pessoas e números.

OBJETO DIGITAL
***Carrossel de imagens*:** Contribuições para a teoria dos conjuntos

Os conjuntos são formados por **elementos**. Em geral, nomeamos os conjuntos por letras maiúsculas. Uma maneira de representar os elementos de um conjunto é:

$$L = \{a, c, e, i, m, t\}$$

Nessa notação, os elementos do conjunto são representados entre chaves e separados por vírgula.

Exemplos

- Conjunto dos divisores positivos de 12: $D = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.
- Conjunto dos múltiplos positivos de 4: $M = \{4, 8, 12, 16, 20, ...\}$.

No conjunto *M*, as reticências foram utilizadas para indicar que há uma infinidade de números maiores do que 20.

Observação

Caso os elementos de um conjunto sejam números expressos em sua forma decimal, usaremos ponto e vírgula para separá-los.

Professor, professora: Se julgar conveniente, lembre os estudantes dos conceitos de múltiplos e divisores.

Os conjuntos *L* e *D* apresentados anteriormente são **conjuntos finitos**, pois podemos contar seus elementos, ou seja, associá-los aos números naturais de 1 até certo número *n*. Já *M* é um **conjunto infinito**, pois não é finito.

Outra maneira de apresentar os elementos de um conjunto é pela condição que os define, chamada **lei de formação**.

Professor, professora: No trabalho com os conceitos de conjuntos finitos e infinitos, destaque que o fato de um conjunto apresentar uma grande quantidade de elementos não implica que ele seja infinito. A população de uma grande cidade como São Paulo, por exemplo, poderia ilustrar essa ideia. Esclareça o significado do termo "infinito" e reforce a importância de utilizá-lo corretamente, inclusive nos diálogos do cotidiano, evitando atribuir a esse conceito um significado incorreto.

Exemplo

$P = \{x \mid x \text{ é um número primo menor do que } 25\}$

Os elementos de *P* são os números 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 e 23.

Professor, professora: Lembre os estudantes de que um número primo é aquele que é divisível apenas por 1 e por ele mesmo.

Dica

O símbolo $|$, que aparece na notação do exemplo, é lido: tal que.

Indicamos o número de elementos de um conjunto *A* por $n(A)$. No caso do conjunto *P*, por exemplo, temos $n(P) = 9$.

Quando um objeto (que pode ser até outro conjunto) é elemento de um conjunto, dizemos que ele **pertence** ao conjunto. Caso contrário, dizemos que ele **não pertence** ao conjunto. Considerando o conjunto *P*, sabemos que o número 2 é um de seus elementos e o número 9, por exemplo, não é. Assim:

- 2 pertence a *P*. Nesse caso, escrevemos: $2 \in P$.
- 9 não pertence a *P*. Nesse caso, escrevemos: $9 \notin P$.

Observação

O símbolo $\in$, que aparece na notação do exemplo, é lido: pertence. Já o símbolo $\notin$ é lido: não pertence.

Questão A. Em seu caderno, registre os nomes de cinco animais que pertencem ao conjunto dos vertebrados, mas não pertencem ao conjunto dos mamíferos.
Sugestão de resposta: Tucano, rã, crocodilo, pirarucu e cascavel.

Exemplo

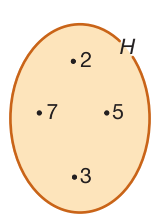
Sejam os conjuntos $Q = \{x \mid x \text{ é um número quadrado perfeito entre 10 e } 20\}$ e $N = \{x \mid x \text{ é um número par positivo menor do que } 9\}$. Assim, temos, por exemplo:

- $2 \in N$.
- $5 \notin N$.
- $12 \notin N$.
- $16 \in Q$.
- $12 \notin Q$.
- $9 \notin Q$.

Professor, professora: Lembre os estudantes de que um número quadrado perfeito é aquele cuja raiz quadrada é um número natural.

Além das representações até o momento, um conjunto pode ser indicado por meio de uma figura chamada **diagrama de Venn**.

Analise a seguir o conjunto $H = \{x \mid x \text{ é um número primo entre 1 e } 8\}$ representado em um diagrama de Venn.



LEONARDO GIBRAN/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

O diagrama de Venn recebe esse nome em homenagem ao lógico inglês John Venn (1834-1923).

Conjuntos unitário, vazio e universo

A seguir, vamos analisar alguns conjuntos com características especiais.

- Conjunto unitário

  Um conjunto A que tem um único elemento é chamado **conjunto unitário**, assim $n(A) = 1$. Os conjuntos $A = \{7\}$ e $B = \{x \mid x \text{ é um número primo e par}\}$ são exemplos de conjuntos unitários.

- Conjunto vazio

  Dizemos que um conjunto A é **vazio** quando ele não tem elemento algum, assim $n(A) = 0$. Podemos indicar o conjunto vazio por $\varnothing$ ou $\{\}$. O conjunto $A = \{x \mid x \text{ é um número ímpar divisível por } 2\}$ é vazio $(A = \varnothing$ ou $A = \{\})$, pois não há número ímpar que seja divisível por 2.

- Conjunto universo

  O **conjunto universo**, indicado geralmente por U, é o conjunto mais amplo que pode ser considerado em determinada situação, ou seja, aquele ao qual pertencem todos os elementos relacionados ao estudo. Mesmo que não expresso, é importante que fique bem estabelecido o conjunto universo em cada situação. A solução da equação $x^2 = 4$, por exemplo, é apenas o número 2, se o conjunto universo considerado for o dos números naturais. Se o conjunto universo considerado for o dos números inteiros, as soluções são 2 e -2.

Observação

Por definição, o conjunto vazio é finito.

A relação de inclusão

Considere os conjuntos $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Note que todos os elementos de A são elementos de B e, nesse caso, dizemos que A é **subconjunto** de B, ou que A é **parte** de B, ou que A está **contido** em B. Podemos indicar essa relação das seguintes maneiras.

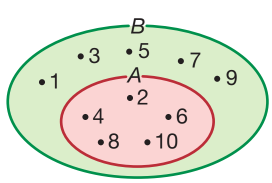
$$A \subset B \text{ ou } B \supset A$$

Observação

O símbolo $\subset$ lê-se: está contido.

O símbolo $\supset$ lê-se: contém.

Esses conjuntos estão representados a seguir em um diagrama de Venn.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Professor, professora: Durante as discussões sobre as relações de pertinência e de continência, ou inclusão, é importante questionar os estudantes sobre a diferença entre essas relações, reforçando que a pertinência envolve a comparação entre elemento e conjunto, enquanto a continência ou inclusão permite a comparação entre conjuntos.

Exemplos

A. $A = \{a, b\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$

$$A \subset B \text{ ou } B \supset A$$

B. O conjunto F, formado pelos estados da região Sul do Brasil, está contido no conjunto G, formado pelos estados brasileiros.

Quando há pelo menos um elemento de um conjunto C que não é elemento de um conjunto D, dizemos que C **não é subconjunto** de D, ou C **não é parte** de D, ou C **não está contido** em D.

$$C \not\subset D \text{ ou } D \not\supset C$$

Observação

O símbolo $\not\subset$ lê-se: não está contido.

O símbolo $\not\supset$ lê-se: não contém.

Exemplos

C. $A = \{a, e\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$

$$A \not\subset B \text{ ou } B \not\supset A$$

D. $C = \{\text{Argentina, Brasil, Canadá}\}$ e $D = \{x \mid x \text{ é um país da América do Sul}\}$

$$C \not\subset D \text{ ou } D \not\supset C$$

Quaisquer que sejam os conjuntos A, B e C, podemos destacar as seguintes propriedades.

- $\varnothing \subset A$
  O conjunto vazio está contido em qualquer conjunto. Essa relação pode ser justificada por redução ao absurdo, ou seja, supondo que $\varnothing \not\subset A$ e obtendo uma contradição na conclusão. Nesse caso, existiria um objeto x pertencente a $\varnothing$ e não pertencente a A. Contudo, isso é um absurdo, pois por definição o conjunto $\varnothing$ não tem elementos. Dessa maneira, $\varnothing \subset A$.
- Propriedade reflexiva: $A \subset A$
  Todo conjunto está contido em si mesmo.
- Propriedade antissimétrica: se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = B$.
  A propriedade antissimétrica é muito utilizada quando se quer demonstrar que dois conjuntos A e B são iguais. Para isso, demonstra-se inicialmente que $A \subset B$ e, em seguida, que $B \subset A$.
- Propriedade transitiva: se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$.
  A propriedade transitiva também é conhecida por ser um tipo de **silogismo** e é constantemente empregada em deduções lógicas, nas quais, em geral, são propostas duas premissas e, por meio do silogismo, obtém-se uma conclusão.
  O desenvolvimento do silogismo é atribuído a Aristóteles (384 a.C.-322 a.C.), um dos grandes pensadores da Grécia Antiga. Atualmente, o silogismo é estudado em diversas áreas do conhecimento, como na Filosofia e no Direito.

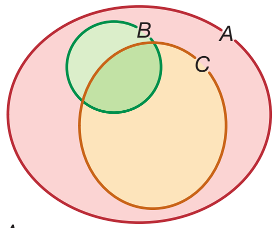
Observação

Dois conjuntos A e B são iguais quando têm os mesmos elementos. Indicamos essa igualdade por $A = B$.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

1. De acordo com o diagrama a seguir, qual afirmativa é a correta? Resposta: Alternativa **b**.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

a) $A \subset B$, $B \subset C$ e $C \subset A$

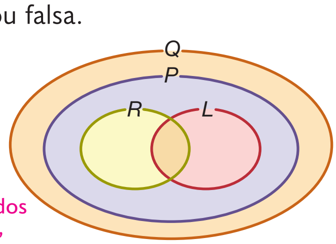
b) $A \supset B$, $B \not\subset C$ e $C \subset A$

c) $A \supset B$, $B \subset C$ e $C \supset A$

d) $A \subset B$, $B \not\subset C$ e $C \supset A$

2. De acordo com o diagrama de Venn apresentado na imagem, classifique cada sentença em verdadeira ou falsa.

Professor, professora: Lembre aos estudantes as características dos paralelogramos, retângulos e losangos.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Q: conjunto dos quadriláteros
P: conjunto dos paralelogramos
R: conjunto dos retângulos
L: conjunto dos losangos

a) $P \subset Q$ Resposta: Verdadeira.

b) $Q \subset \varnothing$ Resposta: Falsa.

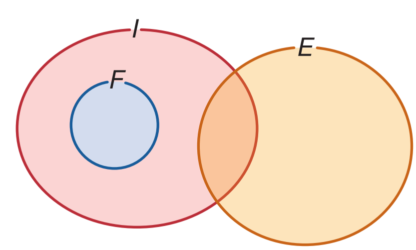
c) $L \not\subset R$ Resposta: Verdadeira.

d) $R \supset P$ Resposta: Falsa.

e) $L \neq P$ Resposta: Verdadeira.

f) $P \not\subset L$ Resposta: Verdadeira.

3. Analise o diagrama.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

I: fala inglês
F: fala francês
E: fala espanhol

Qual das frases a seguir pode ser representada pelo diagrama? Resposta: Alternativa **c**.

a) Em um congresso, todos os palestrantes que falam francês também falam inglês e espanhol.

b) Em uma escola, os estudantes podem optar por aprender um único idioma: francês, inglês ou espanhol.

c) Em uma empresa, todo funcionário que fala francês fala inglês e alguns que falam espanhol também falam inglês.

d) Em uma entrevista de emprego, todos os candidatos que falam espanhol sabem falar ou inglês ou francês.

5. Resposta: $\{1, 2, 5\}$, $\{1, 2, 10\}$, $\{1, 5, 10\}$, $\{2, 5, 10\}$

4. Identifique qual das sentenças é verdadeira e indique a propriedade que justifique sua resposta.

a) $A \subset C$ e $B \subset C$, então $B \subset A$.

b) $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$.

c) $B \subset A$ e $C \subset A$, então $C \subset B$.

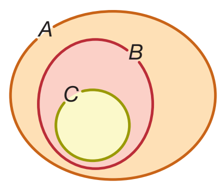
Resposta: Alternativa **b**; propriedade transitiva.

5. Considere o conjunto:

$A = \{x \mid x \text{ é um divisor positivo de } 10\}$

Escreva todos os subconjuntos de A com exatamente três elementos.

6. Junte-se a um colega e elaborem um silogismo com base no diagrama.



RONALDO INÁCIO/ ARQUIVO DA EDITORA

Resposta pessoal. Orientações sobre esta atividade no **Suplemento para o professor**.

7. Escreva na forma de diagrama de Venn os silogismos. Respostas no final do **Livro do Estudante**.

a) Atletismo é um esporte.
Praticar esporte é saudável.
Logo, praticar atletismo é saudável.

b) Quem nasce no Rio Grande do Norte é brasileiro.
Marcos nasceu no Rio Grande do Norte.
Portanto, Marcos é brasileiro.

c) Todo poliedro é uma figura geométrica espacial.
A pirâmide é um poliedro.
Logo, a pirâmide é uma figura geométrica espacial.

Professor, professora: Oriente os estudantes a definir incialmente as letras correspondentes a cada conjunto para compor o diagrama.

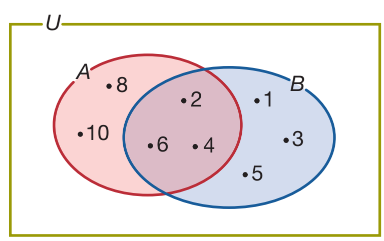
Operações com conjuntos

Nas próximas páginas, estudaremos algumas operações envolvendo conjuntos, como união, interseção, diferença e complementar, além da quantidade de elementos da união de dois conjuntos.

União de conjuntos

Considere os conjuntos $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. A união de A e B, que indicamos por $A \cup B$, (lê-se: A união B), é o conjunto formado pelos elementos de A ou de B. Nesse caso:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$$



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

A parte destacada representa a união dos conjuntos A e B, ou seja, $A \cup B$.

Dados os conjuntos A e B, chamamos união de A e B o conjunto formado pelos elementos de A ou de B, ou seja, $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$.

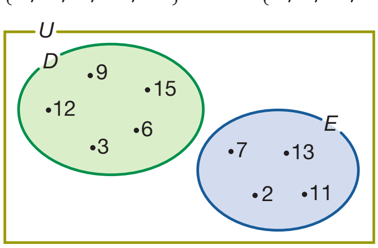
Observação

Na definição de união de conjuntos, a palavra **ou** não tem o mesmo sentido de exclusão que costuma ser empregado na linguagem habitual (por exemplo: dentro **ou** fora, azul **ou** amarelo). Em união de conjuntos, **ou** significa que, para um objeto pertencer à união de A e B, pode pertencer apenas a A, apenas a B ou pertencer a A e a B simultaneamente.

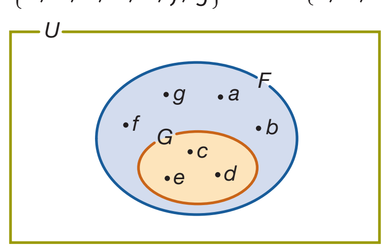
Professor, professora: Para auxiliar na compreensão da união de conjuntos, se julgar conveniente, apresente aos estudantes alguns exemplos de uso intuitivo desse conceito. Algumas sugestões de exemplos intuitivos são separar os produtos em nossa lista de compras por categoria ou agrupar músicas por gêneros em nossas *playlists*. Podemos dizer também, por exemplo, que o território brasileiro é formado pela união de seus estados.

Exemplos

$D = \{3, 6, 9, 12, 15\}$ e $E = \{2, 7, 11, 13\}$



$F = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ e $G = \{c, d, e\}$



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

Note que os conjuntos D e E não têm elementos comuns. Nesse caso, dizemos que esses conjuntos são **disjuntos**. Note também que o conjunto G é subconjunto de F. Nesse caso, $F \cup G = F$.

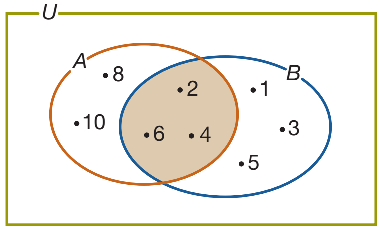
Na união de conjuntos, podemos destacar algumas propriedades, para quaisquer que sejam os conjuntos A, B e C.

- Elemento neutro: $A \cup \varnothing = A$
- Propriedade idempotente: $A \cup A = A$
- Propriedade comutativa: $A \cup B = B \cup A$
- Propriedade associativa: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Interseção de conjuntos

Considere os conjuntos $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. A interseção de A e B, que indicamos por $A \cap B$ (lê-se: A interseção B), é o conjunto formado pelos objetos que são elementos de A e de B simultaneamente. Nesse caso:

$A \cap B = \{2, 4, 6\}$



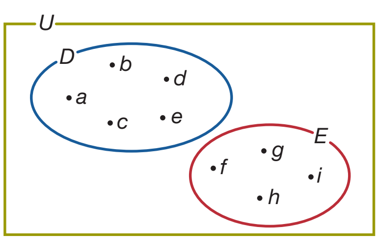
A parte destacada representa a interseção dos conjuntos A e B, ou seja, $A \cap B$.

Dados os conjuntos A e B, chamamos interseção de A e B o conjunto formado pelos objetos que são elementos de A e de B simultaneamente, ou seja, $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$.

Professor, professora: No trabalho com o tópico **Operações com conjuntos**, destaque a importância da aplicabilidade dessas operações em nosso cotidiano. Peça aos estudantes que citem exemplos, muitas vezes realizados de modo intuitivo no dia a dia, que nos ajudam a organizar informações, a tomar decisões e a entender relações entre diferentes grupos ou categorias. Se pensarmos nas redes sociais, quando visitamos o perfil de um amigo e vemos os "amigos em comum", estamos observando a interseção entre o nosso conjunto de amigos e o conjunto de amigos daquela pessoa. Esta interseção nos mostra as conexões compartilhadas. Ao comparar sua *playlist* de música com a de um amigo, as músicas que você tem e ele não tem representam a diferença entre os dois conjuntos.

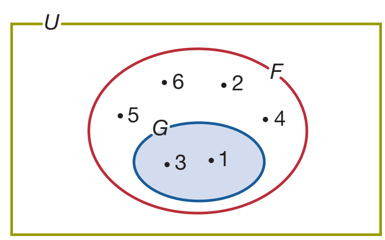
Exemplos

$D = \{a, b, c, d, e\}$ e $E = \{f, g, h, i\}$



$D \cap E = \varnothing$

$F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $G = \{1, 3\}$



$F \cap G = \{1, 3\}$

Observação

Note que os conjuntos D e E são disjuntos. Nesse caso, a interseção de D e E é o conjunto vazio. Note também que o conjunto G é subconjunto de F. Nesse caso, $F \cap G = G$.

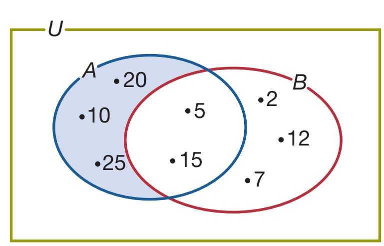
Na interseção de conjuntos, podemos destacar algumas propriedades, para quaisquer que sejam os conjuntos A, B e C.

- Elemento neutro: $A \cap U = A$
- Propriedade idempotente: $A \cap A = A$
- Propriedade comutativa: $A \cap B = B \cap A$
- Propriedade associativa: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Diferença de conjuntos

Considere os conjuntos $A = \{5, 10, 15, 20, 25\}$ e $B = \{2, 5, 7, 12, 15\}$. A diferença entre A e B, que indicamos por $A - B$, é o conjunto formado por todos os elementos de A que não são elementos de B. Nesse caso:

$A - B = \{10, 20, 25\}$

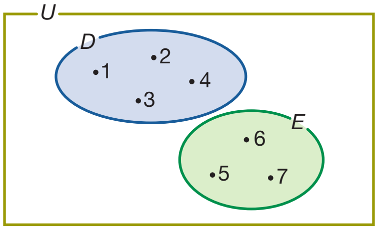


A parte destacada com fundo cor representa a diferença entre os conjuntos A e B, ou seja, $A - B$.

Dados os conjuntos A e B, chamamos diferença de A e B o conjunto formado por todos os elementos de A que não são elementos de B, ou seja, $A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$.

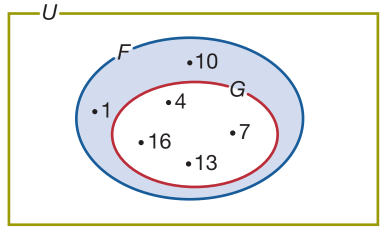
Exemplos

$D = \{1, 2, 3, 4\}$ e $E = \{5, 6, 7\}$



$D - E = \{1, 2, 3, 4\}$ e $E - D = \{5, 6, 7\}$

$F = \{1, 4, 7, 10, 13, 16\}$ e $G = \{4, 7, 13, 16\}$



$F - G = \{1, 10\}$ e $G - F = \varnothing$

Observação

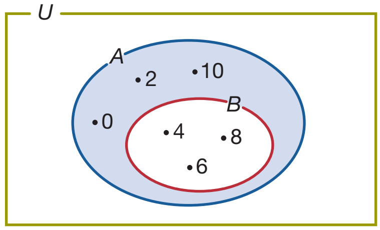
Os conjuntos D e E são disjuntos. Nesse caso, $D - E = D$ e $E - D = E$.

Já o conjunto G é subconjunto de F, ou seja, todo elemento de G também é elemento de F. Dessa maneira, $G - F = \varnothing$.

Complementar de um conjunto

Considere o conjunto $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ e seu subconjunto $B = \{4, 6, 8\}$. O complementar de B em relação a A, que indicamos por $\complement_A^B$, é o conjunto formado por todos os elementos de A que não são elementos de B. Nesse caso:

$\complement_A^B = \{0, 2, 10\}$



A parte destacada representa o complementar de B em relação a A.

Observação

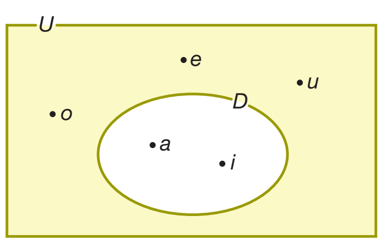
Note que $\complement_A^B = A - B$.

Dados os conjuntos A e B, com $B \subset A$, chamamos complementar de B em relação a A o conjunto formado por todos os elementos de A que não são elementos de B, ou seja, $\complement_A^B = A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$.

Professor, professora: Para auxiliar na compreensão do complementar de um conjunto, se julgar conveniente, apresente aos estudantes algumas situações de uso intuitivo desse conceito. Por exemplo, quando temos muitas matérias para estudar, marcamos como "estudadas" as matérias que já foram trabalhadas. Nesse caso, o conjunto de matérias "ainda não estudadas" é o complemento do conjunto de matérias "estudadas". Identificar o complemento nos ajuda a focar no que ainda precisa ser feito e a priorizar nosso tempo de maneira eficaz.

Exemplo

$U = \{a, e, i, o, u\}$ e $D = \{a, i\}$



A parte destacada representa o complementar de D em relação a U.

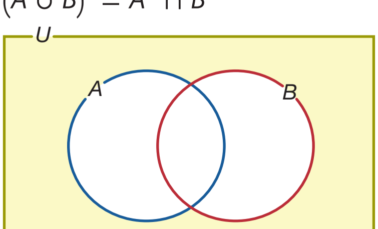
$\complement_U^D = U - D = \{e, o, u\}$

Observação

No exemplo apresentado, o complementar de D em relação ao conjunto universo U também pode ser indicado por D' ou $\overline{D}$ ou $D^\complement$.

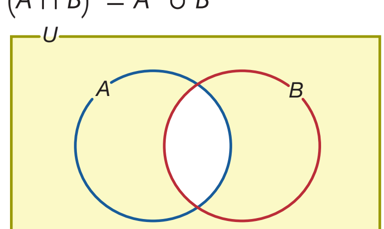
Em relação ao complementar de um conjunto, podemos destacar as seguintes propriedades.

1. $(A \cup B)^\complement = A^\complement \cap B^\complement$



A parte destacada corresponde a $(A \cup B)^\complement = A^\complement \cap B^\complement$.

2. $(A \cap B)^\complement = A^\complement \cup B^\complement$



A parte destacada corresponde a $(A \cap B)^\complement = A^\complement \cup B^\complement$.

3. $\left(A^{C}\right)^{C} = A$

4. $A \subset B \Rightarrow B^{C} \subset A^{C}$

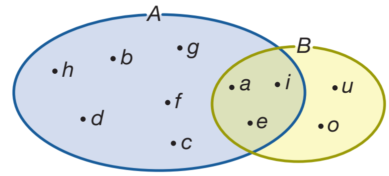
Observação

As propriedades $(A \cup B)^{C} = A^{C} \cap B^{C}$ e $(A \cap B)^{C} = A^{C} \cup B^{C}$ também são conhecidas como **leis de De Morgan**, em homenagem ao matemático britânico Augustus De Morgan (1806-1871).

Quantidade de elementos da união de dois conjuntos

Dados os conjuntos $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ e $B = \{a, e, i, o, u\}$, temos:

- $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, o, u\}$
- $A \cap B = \{a, e, i\}$
- $n(A) = 9$
- $n(B) = 5$
- $n(A \cup B) = 11$
- $n(A \cap B) = 3$



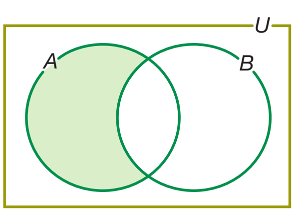
De acordo com as informações anteriores, verificamos que:

$$\underbrace{n(A \cup B)}_{11} = \underbrace{n(A)}_{9} + \underbrace{n(B)}_{5} - \underbrace{n(A \cap B)}_{3}$$

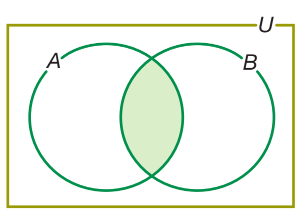
Vamos mostrar que, dados dois conjuntos quaisquer A e B finitos, temos a seguinte equivalência:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

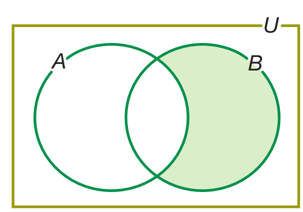
Para isso, vamos usar o diagrama de Venn. Inicialmente, representamos a quantidade de elementos de cada uma das partes destacadas.



$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$



$n(A \cap B)$



$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B)$

Para obter a quantidade de elementos da união de A e B, efetuamos:

$$n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)$$

Desse modo:

$$n(A \cup B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)$$

$$n(A \cup B) = n(A) - n(A \cap B) + n(A \cap B) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Dados os conjuntos A e B finitos, temos:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Observação

Quando dois conjuntos A e B são disjuntos, ou seja, $A \cap B = \varnothing$, temos $n(A \cap B) = 0$. Nesse caso, $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios e problemas resolvidos

R1. Escreva um algoritmo que determine a quantidade de elementos da interseção dos conjuntos finitos A e B, dadas as quantidades de elementos de A, de B e da união de A e B. Em seguida, organize esse algoritmo em um fluxograma.

Resolução

Para construir um algoritmo, inicialmente devemos ler o enunciado do problema, compreendendo-o e destacando os pontos mais importantes. Depois, é preciso responder às seguintes questões.

1. Quais são os **dados de entrada**, ou seja, os dados fornecidos no problema?
Dados de entrada: quantidade de elementos do conjunto A, do conjunto B e da união de A e B.

2. Quais são os **dados de saída**, ou seja, os dados gerados após a execução de todas as etapas do algoritmo?
Dados de saída: Quantidade de elementos da interseção de A e B.

3. Conhecendo os dados de entrada e saída, quais **procedimentos** devem ser realizados?
Para rresponder a essa questão, vamos usar a fórmula da quantidade de elementos da união de dois conjuntos finitos. Nesse caso:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = n(A \cup B) - n(A) - n(B)$$

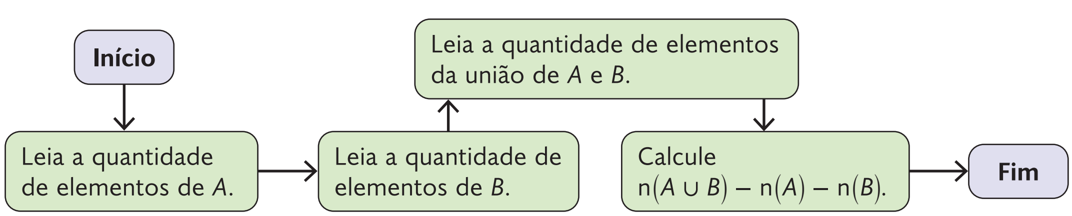
Portanto, para determinar a quantidade de elementos da interseção de A e B, devemos calcular:

$$n(A \cup B) - n(A) - n(B)$$

Agora, escrevemos o algoritmo.

Início
1. Leia a quantidade de elementos de A.
2. Leia a quantidade de elementos de B.
3. Leia a quantidade de elementos da união de A e B.
4. Calcule $n(A \cup B) - n(A) - n(B)$.
Fim

Finalmente, organizamos o algoritmo em um fluxograma.



LAÍS GARBELINI/ARQUIVO DA EDITORA

8. c) Resposta: $(A \cup B) \cap C = \{5\}$

8. d) Resposta: $(A \cap C) \cup B = \{1, 3, 4, 5\}$

11. a) Resposta: $\complement_U^A = \{x \mid x \text{ é um número par}\}$

11. b) Resposta: $\complement_U^B = \{x \mid x \text{ é um número negativo ou } x = 0\}$

12. Resposta pessoal. A resposta depende dos conjuntos que os estudantes definirem.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

8. Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{1, 3, 4, 5\}$ e $C = \{5, 6, 7, 8\}$, determine:

a) $A \cup B$.
Resposta: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

b) $A \cap C$.
Resposta: $A \cap C = \varnothing$

c) $(A \cup B) \cap C$.

d) $(A \cap C) \cup B$.

9. Se o conjunto A é formado pelos divisores positivos de 18, B tem 5 elementos e $n(A \cap B) = 3$, quantos elementos tem o conjunto $A \cup B$?
Resposta: 8 elementos.

10. Sabendo que $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$, $A \cap B = \{a, c\}$ e $A - B = \{b, d, e\}$, quantos elementos o conjunto A tem? E o conjunto B? Resposta: 5 elementos; 3 elementos.

11. Sendo U o conjunto dos números inteiros, determine:

a) $\complement_U^A$, com $A = \{x \mid x \text{ é um número ímpar}\}$.

b) $\complement_U^B$, com $B = \{x \mid x \text{ é um número positivo}\}$.

12. Dado o conjunto universo $U = \{a, b, c, d, e\}$, defina dois conjuntos A e B de U e verifique a validade das leis de De Morgan.

Problemas envolvendo conjuntos

Utilizando as operações com conjuntos, podemos resolver diversos problemas. Analise a seguir a resolução por etapas de um deles.

Resolvendo por etapas

Os tipos sanguíneos no sistema ABO, do qual fazem parte os grupos sanguíneos A, B, AB e O, são definidos de acordo com a presença dos **antígenos** A e B nas **hemácias**. Os indivíduos que têm apenas o antígeno A têm sangue do tipo A; os que têm apenas o antígeno B, têm do tipo B; os que têm ambos os antígenos, têm do tipo AB; e os sem antígeno algum, têm do tipo O.

Em exames realizados em 100 amostras de sangue, identificou-se o antígeno A em 72 amostras, o antígeno B em 55 e ambos os antígenos em 34. Quantas amostras são de sangue do tipo O?

Antígenos: substâncias ou microrganismos que ao penetrarem no corpo de um indivíduo desencadeiam a produção de anticorpos.
Hemácias: células sanguíneas cuja função principal é transportar oxigênio dos pulmões aos tecidos.

A. Compreendendo o problema

OBJETO DIGITAL ***Vídeo:*** Como era antes do sistema sanguíneo ABO?

1. O que se pede no problema?
A quantidade de amostras de sangue do tipo O.

2. Quais são os dados apresentados no problema?
O total de amostras de sangue e a quantidade de amostras que têm o antígeno A, o antígeno B e ambos os antígenos.

B. Organizando as ideias e elaborando um plano

1. Registrando um possível plano.
Inicialmente, determinamos a quantidade de amostras de sangue com apenas o antígeno A e apenas o antígeno B. Na sequência, adicionamos a quantidade de amostras com apenas o antígeno A, apenas o antígeno B e ambos os antígenos. Por fim, subtraímos a soma obtida da quantidade total de amostras. Dessa maneira, obtemos a quantidade de amostras de sangue do tipo O.

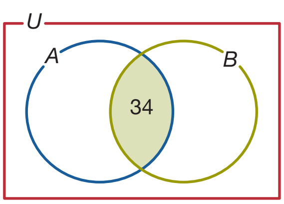
2. Escolhendo as notações.
- *A*: Conjunto das amostras que têm o antígeno A.
- *B*: Conjunto das amostras que têm o antígeno B.
- *U*: Conjunto de todas as amostras.

C. Executando o plano

Para a execução do plano, utilizaremos o diagrama de Venn.

Passo 1

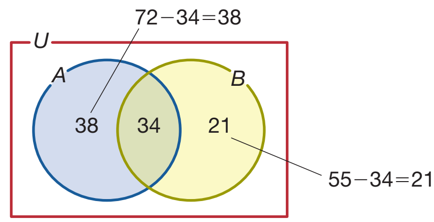
Construímos o diagrama de Venn e indicamos a quantidade de amostras com ambos os antígenos.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

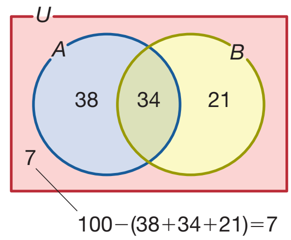
Passo 2

Calculamos e indicamos as quantidades de amostras que têm apenas um dos antígenos.



Passo 3

Por fim, calculamos e indicamos a quantidade de amostras sem antígeno algum, ou seja, a quantidade de amostras de sangue do tipo O.



Portanto, 7 amostras são de sangue do tipo O.

D. Verificando a solução obtida

Analisando a resolução desenvolvida na etapa **Executando o plano**, percebe-se que para determinar a quantidade de amostras de sangue do tipo O, que denotaremos por x, podemos calcular:

$$\mathrm{n}(U) - \mathrm{n}(A \cup B)$$

Desse modo:

$$x = \mathrm{n}(U) - \mathrm{n}(A \cup B)$$
$$x = \mathrm{n}(U) - \left[\mathrm{n}(A) + \mathrm{n}(B) - \mathrm{n}(A \cap B)\right]$$
$$x = 100 - [72 + 55 - 34]$$
$$x = 100 - 93$$
$$x = 7$$

Portanto, como havíamos calculado na etapa anterior, 7 amostras são de sangue do tipo O.

Dica

Verifique se é possível utilizar, com algumas adequações, o plano apresentado na seção **Resolvendo por etapas** para obter a solução de alguns problemas semelhantes propostos na seção **Exercícios e problemas** deste tópico.

Agora é você quem resolve!

Resposta no final do **Livro do Estudante**.

1. Leia o problema.

Um professor de literatura sugeriu aos estudantes de uma turma a leitura dos livros **Iracema** e **O Guarani**, de José de Alencar (1829-1877). Ele verificou que 24 estudantes leram **Iracema**, 18 leram **O Guarani** e 13 leram os dois livros. Sabendo que 2 estudantes não leram nenhum dos livros, quantos estudantes há na turma?

2. É possível resolver o problema utilizando, com algumas adequações, o plano apresentado nesta seção? Qual é a resposta desse problema?

Exercícios e problemas resolvidos

R2. (Enem, 2004) Um fabricante de cosméticos decide produzir três diferentes catálogos de seus produtos, visando a públicos distintos. Como alguns produtos estarão presentes em mais de um catálogo e ocupam uma página inteira, ele resolve fazer uma contagem para diminuir os gastos com originais de impressão. Os catálogos C1, C2 e C3 terão, respectivamente, 50, 45 e 40 páginas. Comparando os projetos de cada catálogo, ele verifica que C1 e C2 terão 10 páginas em comum; C1 e C3 terão 6 páginas em comum; C2 e C3 terão 5 páginas em comum, das quais 4 também estarão em C1.

Efetuando os cálculos correspondentes, o fabricante conclui que, para a montagem dos três catálogos, necessitará de um total de originais de impressão igual a:

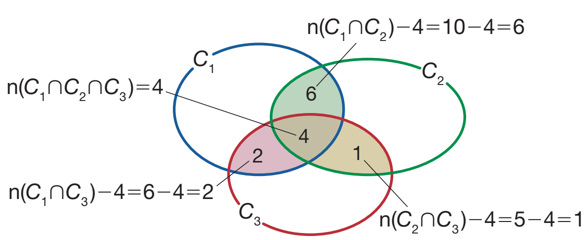
a) 135 **b)** 126 **c)** 118 **d)** 114 **e)** 110

Resolução

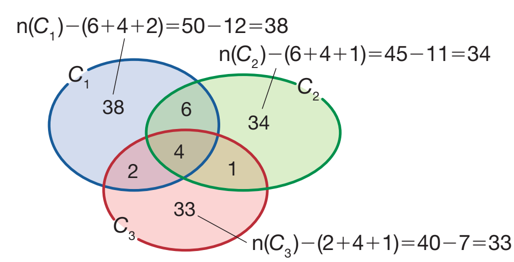
Inicialmente, denominamos C_1, C_2 e C_3 os conjuntos das páginas dos catálogos C1, C2 e C3, respectivamente. Assim:

- $n(C_1) = 50$
- $n(C_2) = 45$
- $n(C_3) = 40$
- $n(C_1 \cap C_2) = 10$
- $n(C_1 \cap C_3) = 6$
- $n(C_2 \cap C_3) = 5$
- $n(C_1 \cap C_2 \cap C_3) = 4$

1º. Indicamos no diagrama a quantidade de páginas comuns aos três catálogos e o de páginas comuns a apenas dois catálogos.



2º. Por fim, indicamos no diagrama a quantidade de páginas exclusivas de cada catálogo.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Calculando o total de páginas necessárias para a montagem dos três catálogos, obtemos:

$$n(C_1 \cup C_2 \cup C_3) = 38 + 6 + 34 + 2 + 4 + 1 + 33 = 118$$

Portanto, o fabricante necessitará de um total de 118 originais de impressão, ou seja, a alternativa correta é a **c**.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

13. De acordo com as leis brasileiras de trânsito, há uma habilitação específica para cada um dos diferentes tipos de veículos. Por exemplo, uma pessoa habilitada na categoria A pode conduzir um veículo motorizado com até 3 rodas, como motocicletas e triciclos. Já a habilitação na categoria B não permite a condução de veículos descritos para a categoria A, mas permite a condução de veículos motorizados que não excedam 3 500 kg e cuja lotação não ultrapasse 8 passageiros, como os carros de passeio.

Certa empresa tem 26 funcionários, todos com algum tipo de habilitação: A, B ou AB (tem as duas habilitações, A e B). Analise a quantidade de funcionários de acordo com o tipo de habilitação.

Tipo de habilitação

Categoria	Quantidade de funcionários
A	19
B	12

Fonte de pesquisa: Funcionários da empresa.

Quantos funcionários têm habilitação na categoria:

a) A? Resposta: 19 funcionários.

b) B? Resposta: 12 funcionários.

c) A e B? Resposta: 5 funcionários.

d) somente A? Resposta: 14 funcionários.

e) somente B? Resposta: 7 funcionários.

14. Um levantamento realizado com 36 estudantes de uma turma constatou que 25 deles acessam a internet nos fins de semana, 12 acessam de segunda-feira a sexta-feira e 5 não acessam a internet. Quantos estudantes fazem esse acesso durante toda a semana?
Resposta: 6 estudantes.

15. Certa clínica realizou uma pesquisa sobre o histórico de cirurgias plásticas de seus pacientes. Nessa pesquisa, constatou-se que 20% haviam feito apenas cirurgia plástica reparadora a fim de corrigir algum problema **congênito**, 54 pacientes fizeram somente cirurgia plástica para fins estéticos, 9% fizeram cirurgia plástica reparadora e estética e 44% nunca fizeram qualquer tipo de cirurgia plástica.

a) Quantos pacientes foram entrevistados?
Resposta: 200 pacientes.

b) Quantos pacientes nunca fizeram qualquer tipo de cirurgia plástica? Resposta: 88 pacientes.

Congênito: que se manifesta desde ou antes do nascimento.

16. Um instituto de pesquisas avaliou a rejeição de determinadas marcas **A** e **B** entrevistando 2 000 indivíduos. O resultado dessa pesquisa mostrou que 1 200 pessoas rejeitavam a marca **A**, 900 pessoas rejeitavam a marca **B** e 500 pessoas não rejeitavam nenhuma marca. A quantidade de indivíduos que rejeitavam as duas marcas é:
Resposta: Alternativa **d**.

a) 400 pessoas.
b) 500 pessoas.
c) 520 pessoas.
d) 600 pessoas.
e) 700 pessoas.

Professor, professora: A tarefa **21** propõe aos estudantes a elaboração de um problema utilizando os conceitos estudados, contribuindo para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações.

17. Uma pesquisa sobre frutas preferidas, realizada com 100 clientes de uma frutaria, obteve o resultado apresentado a seguir.

Pesquisa de preferência de frutas de uma frutaria, em 2025

Preferência	Quantidade de clientes
Somente banana	10
Somente uva	30
Somente maçã	15
Banana e uva	8
Banana e maçã	5
Uva e maçã	6
Banana, uva e maçã	4

Fonte de pesquisa: Clientes da frutaria.

Quantos clientes não preferem nenhuma das três frutas? Resposta: 34 clientes.

18. Uma escola oferta quatro oficinas para 175 estudantes do Ensino Médio: Informática e Fotografia no primeiro semestre e Artesanato e Culinária no segundo. Ao final do ano, cada estudante deverá ter feito exatamente duas dessas oficinas. No primeiro semestre, inscreveram-se 80 estudantes para Informática e 67 para Fotografia.

Sabendo que no primeiro semestre 35 estudantes optaram pelas duas oficinas, quantos estudantes deverão, no segundo semestre, participar de:

a) duas oficinas? Resposta: 63 estudantes.
b) apenas uma oficina? Resposta: 77 estudantes.
c) nenhuma oficina? Resposta: 35 estudantes.

19. A quantidade de estudantes matriculados em uma escola de idiomas está indicada a seguir.

Quantidade de estudantes matriculados em uma escola, por turma de idioma, em 2025

Idioma	Quantidade de estudantes
Inglês	72
Francês	28
Espanhol	57
Inglês e Francês	18
Inglês e Espanhol	36

Fonte de pesquisa: Secretaria da escola de idiomas.

Sabe-se que nenhum desses estudantes estuda francês e espanhol ou os três idiomas simultaneamente.

a) Quantos estudantes foram matriculados para apenas um idioma? Resposta: 49 estudantes.

b) Qual é o total de estudantes matriculados?
Resposta: 103 estudantes.

20. Em uma cidade com 50 000 habitantes, a população tem acesso a 3 jornais: 40% leem o jornal **A**, 28% o jornal **B**, 58% o jornal **C**, 20% somente o jornal **A**, 12% somente o jornal **B**, 35% leem somente o jornal **C** e 11% somente os jornais **A** e **C**. Considerando que **A**, **B** e **C** têm leitores em comum, e que sempre há dois jornais com leitores em comum, determine a quantidade de habitantes que leem mais de um jornal.
Resposta: 13 500 habitantes.

21. Escolha um assunto de seu interesse e faça uma pesquisa de opinião entrevistando os colegas de sua turma. Depois, com base nos resultados de sua pesquisa e usando um diagrama de Venn, elabore um problema envolvendo operações de conjuntos. Em seguida, troque esse problema com um colega e resolva o que ele elaborou. Ao final, verifiquem se as resoluções estão corretas.

Professor, professora: Antes de os estudantes elaborarem o problema da tarefa **21**, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse capítulo e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

Resposta pessoal. A resposta depende de cada problema elaborado pelos estudantes.

Conjuntos numéricos

Neste tópico, estudaremos alguns conjuntos numéricos, importantes para desenvolvermos conceitos que serão estudados posteriormente.

Professor, professora: Proponha aos estudantes alguns questionamentos visando identificar seus conhecimentos prévios em relação a esse conteúdo, propiciando a capacidade de argumentação. Podem ser abordadas as situações descritas utilizando os diferentes conjuntos, as semelhanças e diferenças entre eles, além de outras questões que julgar relevantes.

Conjunto dos números naturais e inteiros

Os números naturais foram desenvolvidos historicamente em associação ao processo de contagem, algo essencial para que nossos antepassados pudessem acompanhar e contabilizar suas produções e criações, principalmente quando deixaram de ser nômades e passaram a organizar comunidades e criar animais.

Inicialmente, a contagem foi estabelecida com base na correspondência biunívoca, ou associação “um a um”, permitindo desenvolver os números que com o zero, posteriormente, formaram o **conjunto dos números naturais** $(\mathbb{N})$.

Na abordagem do tópico **Conjunto dos números naturais e inteiros**, esclareça, no contexto matemático, o significado do termo “correspondência biunívoca”, relacionando-o ao processo de contagem, no qual associamos cada elemento de certo conjunto a um número natural de forma única.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

Um importante subconjunto de $\mathbb{N}$ é o conjunto dos números naturais não nulos.

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$$

Ao realizar subtrações entre os números naturais, há situações em que os elementos desse conjunto não são suficientes para representar os resultados. Por exemplo, a subtração $2 - 5$ resulta em um número que não pertence ao conjunto dos números naturais. Assim, para representar esses números, foi necessário criar outro importante conjunto numérico: o **conjunto dos números inteiros** $(\mathbb{Z})$.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Enquanto no conjunto dos números naturais não conseguimos determinar os resultados de operações do tipo $a - b$, em que $a < b$, no conjunto dos números inteiros podemos resolvê-las devido à presença dos números inteiros negativos.

Observação

O conjunto dos números naturais é subconjunto do conjunto dos números inteiros, ou seja, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

A partir do conjunto dos números inteiros, podemos identificar alguns importantes subconjuntos.

- Conjunto dos números inteiros não nulos: $\mathbb{Z}^* = \{\ldots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \ldots\}$.
- Conjunto dos números inteiros não positivos: $\mathbb{Z}_- = \{\ldots, -3, -2, -1, 0\}$.
- Conjunto dos números inteiros negativos: $\mathbb{Z}_-^* = \{\ldots, -3, -2, -1\}$.

Professor, professora: Converse com os estudantes a respeito do fechamento das operações em cada conjunto. Explique, por exemplo, que o resultado da adição de números naturais sempre será um natural, mas a subtração pode gerar números que não pertencem a esse conjunto. Exemplifique cada uma dessas relações para que todos consigam atribuir significado ao “fechamento de uma operação” em cada conjunto.

Conjunto dos números racionais

Apesar de o conjunto dos números inteiros ter suprido as dificuldades relativas à operação de subtração, outras necessidades de representação numérica surgiram na resolução de problemas. Considere, por exemplo, que na construção de determinado projeto em um trecho da rodovia, que mede 1 km de comprimento, serão fixadas três placas de sinalização: uma no ponto inicial, uma na metade e outra no final do trecho, mantendo as distâncias constantes.

LEONARDO GIBRAN/ ARQUIVO DA EDITORA

Observação

Nesse caso, a medida da distância, em quilômetros, entre duas placas consecutivas é 0,5 km ou $\frac{1}{2}$ km.

Para expressarmos a medida do trecho da rodovia, precisamos recorrer aos elementos de outro conjunto numérico, denominado **conjunto dos números racionais** $(\mathbb{Q})$.

Os elementos de $\mathbb{Q}$ são os números que podem ser escritos na forma $\frac{p}{q}$, em que p e q são números inteiros e $q \neq 0$. Assim:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \middle| p \in \mathbb{Z} \text{ e } q \in \mathbb{Z}^*\right\}$$

Alguns exemplos de números racionais são: 0,25; $\frac{2}{3}$; $-0{,}333...$; 0; $-\frac{8}{10}$; $-1{,}75$.

Podemos destacar alguns importantes subconjuntos do conjunto dos números racionais:

- conjunto dos números racionais não nulos $(\mathbb{Q}^*)$.
- conjunto dos números racionais não negativos $(\mathbb{Q}_+)$.
- conjunto dos números racionais positivos $(\mathbb{Q}_+^*)$.
- conjunto dos números racionais não positivos $(\mathbb{Q}_-)$.
- conjunto dos números racionais negativos $(\mathbb{Q}_-^*)$.

Um número racional pode ser expresso na forma decimal ou fracionária. Para obter a forma decimal de um número racional expresso na forma fracionária, basta fazer a divisão do numerador da fração pelo denominador. Analise alguns exemplos.

- $\frac{2}{5} = 0{,}4$
- $\frac{1}{3} = 0{,}3333... = 0{,}\overline{3}$
- $-\frac{8}{2} = -4$
- $-\frac{75}{4} = -18{,}75$

Vamos obter a forma fracionária de um número racional expresso na forma decimal.

Caso 1: número racional com representação decimal finita.

Seja $x = 3{,}765$. Multiplicando ambos os membros da igualdade por 1 000, obtemos:

$$1000x = 1000 \cdot 3{,}765 \Rightarrow 1000x = 3765 \Rightarrow x = \frac{3765}{1000} = \frac{753}{200}$$

Portanto, a forma fracionária do número decimal 3,765 é $\frac{753}{200}$.

Caso 2: dízima periódica. Nesse caso, vamos analisar dois exemplos.

a) $0{,}424242... = 0{,}\overline{42}$

Seja $x = 0{,}\overline{42}$. Assim:

$$100x = 100 \cdot 0{,}\overline{42}$$
$$100x = 42{,}\overline{42}$$
$$100x = 42 + 0{,}\overline{42}$$
$$100x = 42 + x$$
$$99x = 42$$
$$x = \frac{42}{99} = \frac{14}{33}$$

Logo, a forma fracionária é $\frac{14}{33}$.

LAÍS GARBELINI/ARQUIVO DA EDITORA

b) $12{,}9555... = 12{,}9\overline{5}$

Seja $x = 12{,}9\overline{5}$. Desse modo:

$10x = 12{,}9\overline{5} \cdot 10 \Rightarrow 10x = 129{,}\overline{5}$ (I)

$10 \cdot 10x = 129{,}\overline{5} \cdot 10 \Rightarrow 100x = 1295{,}\overline{5}$ (II)

Subtraindo (I) de (II), obtemos:

$$100x - 10x = 1295{,}\overline{5} - 129{,}\overline{5}$$
$$90x = 1166$$
$$x = \frac{1166}{90} = \frac{583}{45}$$

Portanto, a forma fracionária é $\frac{583}{45}$.

LAÍS GARBELINI/ARQUIVO DA EDITORA

A fração que gera a dízima periódica é chamada **fração geratriz**.

Observação

O conjunto dos números naturais e o dos números inteiros são subconjuntos do conjunto dos números racionais, ou seja, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

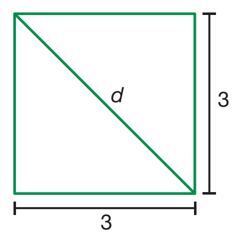
Observação

O resultado da divisão ou é um número com representação decimal finita, ou uma dízima periódica. No caso das dízimas periódicas, podemos, em sua parte decimal, indicar apenas o algarismo ou grupo de algarismos que se repetem, chamado **período**, com um traço sobrescrito, como uma forma de simplificar sua representação.

Conjunto dos números irracionais

Apesar de o desenvolvimento do conjunto dos números racionais estar relacionado às medidas, ao longo da história alguns pensadores identificaram medidas que não podem ser expressas por números racionais. Por exemplo, se tomarmos um quadrado cujo comprimento do lado mede 3 u.c. (unidade de comprimento), podemos determinar a medida do comprimento de sua diagonal utilizando o Teorema de Pitágoras.

$$d^2 = 3^2 + 3^2 \Rightarrow d^2 = 18 \Rightarrow d = \sqrt{18} \Rightarrow d = 3\sqrt{2}$$



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

Note que $d = 3\sqrt{2}$, pois $d > 0$.

OBJETO DIGITAL ***Podcast*:** Curiosidades sobre o número Pi

Observação

A representação decimal do número $3\sqrt{2}$ tem infinitas casas decimais não periódicas. Esse número não pode ser expresso na forma $\frac{p}{q}$, com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$. Portanto, não é racional.

Os números que não podem ser escritos na forma $\frac{p}{q}$, com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$, formam o **conjunto dos números irracionais** $(\mathbb{I})$.

Exemplo

$\sqrt{2} = 1{,}41421...$ $\qquad -2\sqrt{3} = -3{,}46410...$ $\qquad \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}70710...$

Conjunto dos números reais

O **conjunto dos números reais** $(\mathbb{R})$ é aquele cujos elementos são todos os números racionais e todos os números irracionais. Todos os números naturais, inteiros, racionais e irracionais são reais. Nesse caso, temos:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

$$\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$$

Também podemos construir subconjuntos importantes para o conjunto dos números reais:

- conjunto dos números reais não nulos $(\mathbb{R}^*)$.
- conjunto dos números reais não negativos $(\mathbb{R}_+)$.
- conjunto dos números reais positivos $(\mathbb{R}_+^*)$.
- conjunto dos números reais não positivos $(\mathbb{R}_-)$.
- conjunto dos números reais negativos $(\mathbb{R}_-^*)$.

Observação

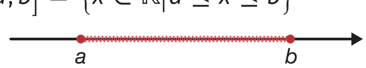
Fique atento!
O conjunto dos números racionais e o conjunto dos números irracionais não têm elementos em comum.

Intervalos

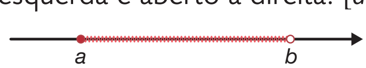
Outro tipo de subconjunto importante de $\mathbb{R}$ são os **intervalos reais**, os quais são construídos com base em relações de desigualdades e podem ser classificados como limitados ou ilimitados.

Sejam os números reais a e b, com $a < b$. Nesse caso, temos os seguintes intervalos limitados:

I. Intervalo fechado: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$



II. Intervalo fechado à esquerda e aberto à direita: $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

Na representação geométrica de um intervalo real, utilizamos uma "bolinha vazia" para indicar que o número não pertence ao conjunto e uma "bolinha cheia" para indicar que o número pertence ao conjunto.

III. Intervalo aberto à esquerda e fechado à direita: $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \le b\}$

IV. Intervalo aberto: $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$

Sejam os números reais a e b, com $a < b$. Nesse caso, temos os seguintes intervalos ilimitados:

I. Intervalo ilimitado à esquerda e fechado à direita: $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} | x \le a\}$

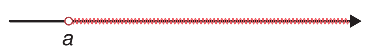
II. Intervalo ilimitado à esquerda e aberto à direita: $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} | x < a\}$

Observação

Usamos os símbolos $+\infty$ (lê-se: "mais infinito") e $-\infty$ (lê-se: "menos infinito") para indicar os intervalos ilimitados.

III. Intervalo fechado à esquerda e ilimitado à direita: $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} | x \ge a\}$

IV. Intervalo aberto à esquerda e ilimitado à direita: $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} | x > a\}$



Observação

Há outras notações para representar intervalos abertos usando parênteses no lugar de colchetes. Por exemplo:

- $]a, b] = (a, b]$
- $[a, b[= [a, b)$
- $]a, b[= (a, b)$

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

24. e) Resposta: $\frac{125}{999}$

24. f) Resposta: $\frac{114}{11}$

Exercícios e problemas

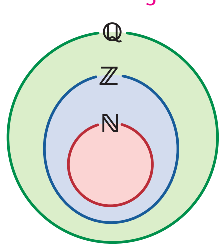
Anote as respostas no caderno.

22. Ao representar no diagrama os números indicados a seguir, quais constarão na região:

a) vermelha? Resposta: 0; 2; 6

b) azul? Resposta: −1; −3; −7; −11

c) verde? Resposta: −10,25; $-\frac{4}{3}$; $0,\overline{27}$; 0,5; 8,012



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

6	0	0,5	−7
−11	−10,25	−3	$0,\overline{27}$
2	−1	$-\frac{4}{3}$	8,012

LAÍS GARBELINI/ ARQUIVO DA EDITORA

23. Qual dos números é o maior: $-\frac{3}{7}$ ou $-\frac{4}{5}$? Escreva um número racional na forma fracionária e outro na forma decimal que estejam entre os números apresentados. Resposta: $-\frac{3}{7}$. Sugestão de resposta: Forma fracionária $-\frac{1}{2}$; forma decimal −0,55.

24. Escreva os números racionais na forma de fração.

a) $0,\overline{6}$ Resposta: $\frac{2}{3}$

b) $0,\overline{81}$ Resposta: $\frac{9}{11}$

c) $1,\overline{35}$ Resposta: $\frac{134}{99}$

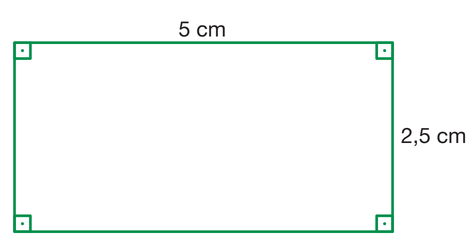
d) $8,\overline{3}$ Resposta: $\frac{25}{3}$

e) $0,\overline{125}$

f) $10,\overline{36}$

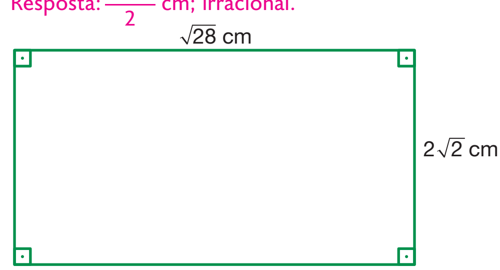
25. Calcule a medida do comprimento da diagonal de cada retângulo e classifique o número que expressa essa medida em racional ou irracional.

A.



Resposta: $\frac{5\sqrt{5}}{2}$ cm; irracional.

B.



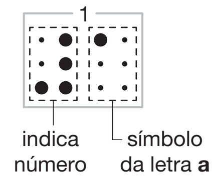
Resposta: 6 cm; racional.

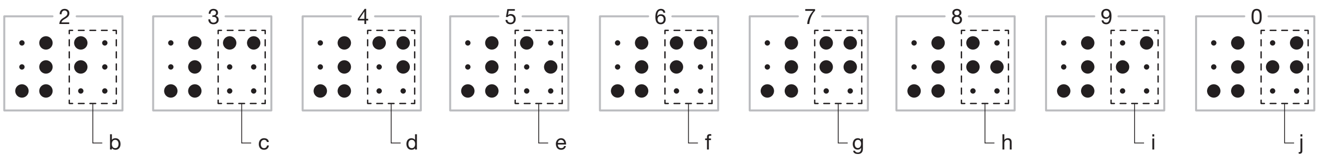
ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

26. O produto entre dois números irracionais será sempre um número irracional? Justifique sua resposta.

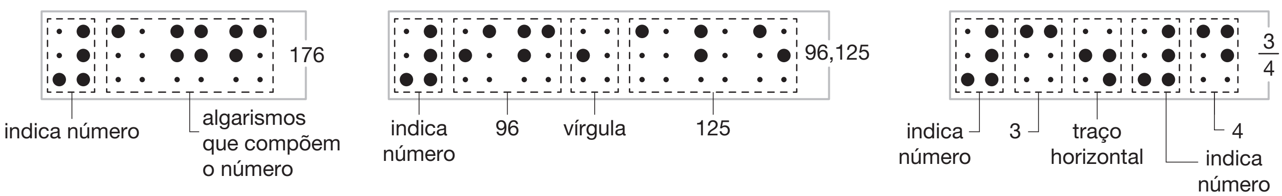
Resposta: Não. Justificativa por meio de contraexemplo: o produto entre os números irracionais $\sqrt{2}$ e $2\sqrt{2}$ é igual a 4, ou seja, um número racional.

27. Pessoas cegas ou com baixa visão frequentemente buscam se adaptar por meio da dedicação, do estudo e do desenvolvimento dos demais sentidos. No método braile, o tato é usado para ler, escrever e até mesmo realizar cálculos. Por meio de células com seis pontos, alguns em alto-relevo, organizados em duas colunas de três pontos cada, esse método permite representar 63 símbolos, entre letras, algarismos e outros caracteres. Para a leitura tátil dos símbolos, é necessário passar a ponta dos dedos sobre eles. Os algarismos de 1 a 9 são representados por um símbolo especial que indica número, seguido de outro símbolo que também representa as letras de **a** até **i**, respectivamente. O zero é representado pelo símbolo especial, seguido daquele que também representa a letra **j**.

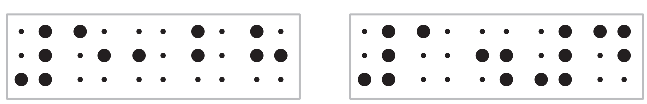




Em um número formado por dois ou mais algarismos, apenas o primeiro é precedido pelo símbolo especial. Por meio de outros símbolos, como os que representam a vírgula e um traço horizontal, podemos representar números decimais e frações, como nos exemplos a seguir.



a) Os números representados a seguir pertencem a que conjunto numérico: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{I}$?
Resposta: $\mathbb{Q}$.



b) Utilizando símbolos em braile, represente: Respostas pessoais. As respostas dependem da idade, da medida de altura e da medida da massa dos estudantes.

- sua idade;
- sua altura, em metros;
- sua massa, em quilogramas.

c) Junte-se a um colega e pesquisem outros recursos de acessibilidade, além do sistema braile, para as pessoas cegas ou com baixa visão. Depois, converse com o professor e os colegas a respeito das adaptações e recursos desse tipo que ainda não estão presentes no ambiente escolar de vocês.
Resposta pessoal. Orientações sobre este item no **Suplemento para o professor**.

Anote as respostas no caderno.

SÍNTESE DO CAPÍTULO

Neste capítulo, estudamos conjuntos e algumas operações relacionadas a eles. Além disso, resolvemos situações-problema envolvendo conjuntos numéricos. Agora, chegou a hora de refletir sobre seus conhecimentos! Como estratégia de estudos, sugerimos que faça uma autoavaliação, revise conceitos e sintetize o que foi estudado. Para isso, resolva as questões propostas.
Orientações sobre as questões **1**, **2**, **3** e **6** no **Suplemento para o professor**.

1. Você conhecia algum dos conteúdos estudados neste capítulo? Cite-os. Resposta pessoal.

2. Liste no caderno os tópicos que foram estudados neste capítulo e identifique os que você teve mais dificuldade. Resposta pessoal.

3. Cite pelo menos uma situação do cotidiano em que utilizamos operações com conjuntos.
Resposta pessoal.

4. Qual estratégia você utilizaria para solucionar um problema envolvendo operações de conjuntos?
Resposta pessoal. Sugestão de resposta: Usaria como estratégia o diagrama de Venn.

5. Escolha um dos conteúdos estudados neste capítulo e elabore um problema envolvendo esse assunto. Depois, troque com um colega para que ele o resolva. Por fim, verifique se a resposta obtida por ele está correta. Resposta pessoal. Antes de os estudantes elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos nas seções **Exercícios e problemas** deste capítulo e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

6. Junte-se a um colega e façam uma síntese do conteúdo estudado neste capítulo. Para isso, use esquemas e dê exemplos. Resposta pessoal.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

CAPÍTULO 3

FUNÇÃO

DIMA BERLIN/SHUTTERSTOCK

Jovem escolhendo um livro em uma biblioteca.

Professor, professora: Na questão **3**, espera-se que os estudantes identifiquem que a relação entre os custos de produção de um livro e o lucro de sua venda é fundamentalmente inversa: quanto maiores os custos de produção, menor tende a ser o lucro na venda, e vice-versa. Os custos de produção impactam diretamente o preço de venda do livro, e o lucro é a diferença entre o preço de venda e os custos totais. Caso os estudantes apresentem dificuldades, retome a questão após trabalhar com o conteúdo deste capítulo.

A leitura é uma das maneiras de conhecer a si mesmo, o mundo e as outras pessoas. Essa prática continua a inspirar e a enriquecer vidas, superando barreiras geográficas, socioeconômicas e tecnológicas. Os livros são a chave para o desenvolvimento intelectual, emocional e social de indivíduos e comunidades. Em regiões mais isoladas, onde o acesso à informação pode ser limitado, a leitura serve como ponte para o conhecimento, permitindo a conexão entre pessoas de áreas remotas, por meio de ideias, culturas e perspectivas distantes. Programas de incentivo à leitura e bibliotecas móveis são exemplos de iniciativas que levam livros a essas comunidades, expandindo seus horizontes.

A construção de um livro, impresso ou digital, passa por diversas etapas, desde a concepção da ideia até sua distribuição e leitura. Tal processo envolve a colaboração de autores, editores, *designers* gráficos, impressores, distribuidores e muitos outros profissionais que trabalham arduamente para dar vida a uma obra. Todo esse trabalho está embutido no custo de produção e é considerado no preço final do livro.

Com o avanço da tecnologia, os *e-books* surgiram como uma alternativa viável para a leitura, algumas vezes mais econômica, para aqueles que têm conexão de internet. Eles eliminam alguns custos, como impressão e distribuição dos exemplares físicos, tornando a leitura ainda mais acessível para pessoas em diversas partes do mundo.

Neste capítulo, você vai estudar:

- noção intuitiva de função;
- conceito de função;
- estudo do domínio de uma função;
- gráfico de uma função;
- zero de uma função;
- funções crescente, decrescente e constante;
- taxa de variação média.

1. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes se dediquem pelo menos uma hora por dia à leitura. Aproveite para comentar com eles os principais benefícios da leitura regular. Essa ação inclui o desenvolvimento da empatia, aumento do vocabulário, melhora da concentração e da capacidade de análise crítica, além de ser uma ótima forma de entretenimento e relaxamento.

2. Resposta pessoal. Oriente os estudantes a citar as vantagens e as desvantagens de cada um dos meios apresentados.

3. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes expressem uma relação do tipo $L = V - C$, em que L representa o lucro obtido com a venda do livro; V representa o preço de venda do livro e C, os custos totais de produção.

1. Você tem o hábito de ler? Quais são os livros que você leu que mais te marcaram? Compartilhe essa experiência com os colegas.

2. Normalmente você lê livros físicos ou *e-books*? Você acha que o acesso a dispositivos digitais facilita ou dificulta os hábitos de leitura das pessoas?

3. Como você expressaria matematicamente a relação entre os custos de produção de um livro e o lucro de venda dele?

Professor, professora: Oriente os estudantes a escrever as respostas no caderno.

Noção intuitiva de função

Em diversas situações do dia a dia, é possível perceber grandezas que, de certa maneira, estão relacionadas. Um exemplo ocorre quando abastecemos um veículo, uma vez que as grandezas “quantidade de combustível” e “quantia a pagar” estão diretamente relacionadas.

Muitas dessas relações podem ser descritas por um conceito matemático denominado **função**. Acredita-se que esse termo tenha sido introduzido na Matemática por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) para, inicialmente, expressar a associação entre quantidades e curvas. Já a noção que temos de função deve-se às considerações feitas posteriormente por Leonhard Euler (1707-1783). Analise alguns exemplos de situações que envolvem esse conceito.

PARA EXPANDIR

Para mais informações sobre os biocombustíveis, acesse o artigo a seguir que apresenta os desafios e as perspectivas para esse setor. Disponível em: https://web.bndes.gov.br/bib/jspui/bitstream/1408/22585/1/PRArt215696_Biodiesel%20e%20diesel%20verde%20no%20Brasil.pdf. Acesso em: 11 jul. 2024.

Exemplo 1

O biodiesel tem sido uma alternativa biodegradável e renovável para a matriz energética nacional como substituto do *diesel* de petróleo. Esse produto pode ser obtido por meio de gorduras animais e plantas oleaginosas, como o algodão, o girassol, a mamona e a soja. Comparado ao óleo *diesel* comum derivado do petróleo, o biodiesel tem como principal vantagem a emissão de menor quantidade de gases poluentes na atmosfera.

Certa cooperativa investiu na produção de biodiesel, usando a mamona como matéria-prima, e obteve rendimento médio de 290 L desse combustível para cada tonelada processada de sementes de mamona.

Acompanhe a relação entre a quantidade de sementes de mamona e a produção de biodiesel nessa cooperativa.

Professor, professora: Converse com os estudantes sobre a necessidade de investir cada vez mais em fontes renováveis de energia, apontando as vantagens socioambientais que levam o ser humano consciente a buscar esse tipo de recurso. Se necessário, oriente-os a fazer uma pesquisa voltada ao assunto, a fim de analisar a diversidade de fontes renováveis de energia. Esse trabalho pode ser realizado em conjunto com os professores dos componentes curriculares de **Geografia** e **Química**.

Quantidade de biodiesel em função da quantidade de sementes de mamona

Quantidade de sementes de mamona (em t)	Quantidade de biodiesel (em L)
1	290
2	580
3	870
4	1160
...	...
x	$290 \cdot x$

ALF RIBEIRO/SHUTTERSTOCK

Frutos da mamona.

Nesse caso, ocorre uma relação entre as grandezas “quantidade de sementes de mamona” (x) e “quantidade de biodiesel” (q) produzida. Essa relação é um exemplo de função. Para determinarmos quantos litros de biodiesel foram produzidos em média com certa quantidade de sementes de mamona nessa cooperativa, podemos usar a seguinte fórmula:

$$q = 290x$$

q: quantidade de biodiesel (em L)
290: quantidade de biodiesel produzida com 1 t de sementes de mamona
x: quantidade de sementes de mamona (em t)

Podemos calcular, por exemplo, quantos litros de biodiesel foram produzidos, em média, com 12,5 t de sementes de mamona nessa cooperativa. Para isso, fazemos:

$$q = 290 \cdot 12{,}5 = 3\,625$$

Portanto, com 12,5 t de sementes de mamona foram produzidos nessa cooperativa cerca de 3 625 L de biodiesel.

Observação

No exemplo **1**, dizemos que a “quantidade de biodiesel” produzida está em função da “quantidade de sementes de mamona”, ou seja, a produção de biodiesel depende da quantidade de sementes de mamona.

Exemplo 2

Uma estamparia cobra uma taxa fixa, referente ao trabalho de desenvolvimento da estampa padrão, mais um valor por peça de roupa estampada. Para estampar camisetas de certa encomenda, o orçamento calculado estabelecia uma taxa fixa de R$ 75,00 mais R$ 9,00 por camiseta.

Valor cobrado em função da quantidade de camisetas

Quantidade de camisetas	1	2	10	20	50	...	x
Valor cobrado (R$)	$\underbrace{84,00}_{75+9}$	$\underbrace{93}_{75+9\cdot 2}$	$\underbrace{165}_{75+9\cdot 10}$	$\underbrace{255}_{75+9\cdot 20}$	$\underbrace{525}_{75+9\cdot 50}$	...	$75 + 9 \cdot x$

A relação entre a quantidade de camisetas e o valor cobrado é descrita por uma função, cuja fórmula é:

$$v = 75 + 9x$$

Observação

Nessa fórmula, temos:

v: valor cobrado (R$)
75: taxa fixa (R$)
9: valor por camiseta (R$)
x: quantidade de camisetas

Nesse caso, o valor cobrado em reais está expresso em função da quantidade de camisetas. Assim, dizemos que o "valor cobrado" (v) é a **variável dependente** e a "quantidade de camisetas" (x), a **variável independente** da função.

Questão A.

Volte ao exemplo **1** na página anterior e identifique a variável dependente e a variável independente da função.

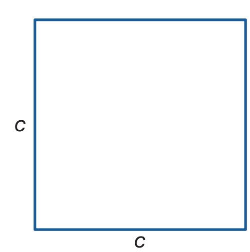
Resposta: Variável dependente: quantidade de biodiesel (q); variável independente: quantidade de sementes de mamona (x).

Exemplo 3

Para calcular a medida da área de uma região quadrada, podemos utilizar a fórmula $A = c^2$, em que c indica a medida do comprimento do lado do quadrado que determina a região.

$$A = c^2$$

A: área da região quadrada
c^2: comprimento do lado do quadrado



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

A cada valor que atribuímos ao comprimento do lado do quadrado está associado um valor correspondente à área da região determinada por esse quadrado.

OBJETO DIGITAL
***Infográfico clicável*:** Sistema de transmissão das bicicletas

Área da região quadrada em função do comprimento do lado do quadrado

c	$A = c^2$	**Área**
1 cm	$A = 1^2 = 1$	1 cm²
2 cm	$A = 2^2 = 4$	4 cm²
2,5 cm	$A = 2,5^2 = 6,25$	6,25 cm²
$\sqrt{10}$ cm	$A = \left(\sqrt{10}\right)^2 = 10$	10 cm²
5 cm	$A = 5^2 = 25$	25 cm²

Nesse caso, a área da região está expressa em função do comprimento do lado do quadrado. Assim, a "área do quadrado" (A) é a variável dependente e o "comprimento do lado do quadrado" (c), a variável independente da função.

Exercícios e problemas

3. a) Resposta: Variável independente: quantidade de quilômetros rodados (q). Variável dependente: quantia a ser paga (P).

Anote as respostas no caderno.

4. a) Resposta: Variável dependente: quantia depositada (D); variável independente: comissão de vendas mensal recebida por Joana (x).

1. No decorrer do século passado, a população brasileira foi praticamente multiplicada por 10. No ano de 2022, segundo o IBGE, o Brasil tinha mais de 200 milhões de habitantes.

Evolução da população brasileira entre 1900 e 2022

Ano	População (em milhões de habitantes)
1900	17,4
1920	30,6
1940	41,2
1960	71
1970	94,5
1980	121,2
1991	146,9
2000	169,6
2010	190,8
2022	203,1

Fonte de pesquisa: CENSO 2022: Panorama. Disponível em: https://censo2022.ibge.gov.br/panorama/. Acesso em: 26 fev. 2024.

RAFAPRESS/SHUTTERSTOCK

Recenseador preenchendo formulário em entrevista com a população no Censo Demográfico de 2022.

a) Na tabela, quais são as variáveis que se relacionam? Resposta: Ano e população.

b) Qual era a população brasileira no ano de 1991? Resposta: 146,9 milhões de habitantes.

2. Junte-se a um colega e escrevam duas situações do dia a dia em que são descritas uma relação entre duas variáveis, como é o caso da seguinte situação.

> O custo de 2 kg de carne e o preço por quilograma de carne.

Em seguida, troquem as situações com outros colegas e peçam a eles que identifiquem, em cada uma delas, quais são as variáveis dependentes e quais são as variáveis independentes.

Resposta pessoal. Caso os estudantes tenham dificuldade em identificar as situações, oriente-os a analisar os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** deste tópico.

3. Durante uma promoção em certa empresa de aluguel de veículos, um locatário deve pagar, além de uma taxa fixa de R$ 45,90, uma quantia que corresponde proporcionalmente à quantidade q de quilômetros rodados. Com essa promoção, a quantia P em reais a ser paga pelo aluguel de um veículo é calculada pela fórmula $P = 45{,}90 + 0{,}46q$.

a) De acordo com essa fórmula, qual é a variável independente? E qual é a variável dependente?

b) Quantos reais um locatário pagará pelo quilômetro rodado nessa locadora de acordo com a promoção? Resposta: R$ 0,46

c) Quantos reais pagará um locatário que alugar um veículo nessa promoção e percorrer 315 km? Resposta: R$ 190,80

d) Sabendo que um cliente pagou R$ 298,90 pelo aluguel nessa promoção, quantos quilômetros ele percorreu com o veículo? Resposta: 550 km

4. Todos os meses, Joana deposita em sua conta bancária uma quantia D em reais. A quantia D é calculada utilizando a fórmula $D = 0{,}75x + 50$, em que x representa a comissão de vendas mensal recebida por ela.

a) Quais são a variável dependente e a variável independente na fórmula descrita?

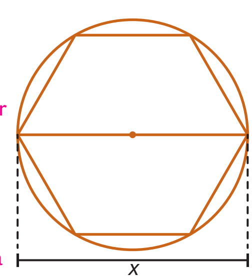
b) Determine a quantia depositada por Joana em março, sabendo que nesse mês ela recebeu uma comissão de R$ 1 200,00. Resposta: R$ 950,00

c) Qual deve ser a comissão de Joana para ela depositar R$ 1 250,00? Resposta: R$ 1 600,00

5. Um hexágono regular está inscrito em uma circunferência de diâmetro x.

5. a) Resposta: $P = 6 \cdot \frac{x}{2}$ ou $P = 3x$

Professor, professora: Se julgar necessário, lembre os estudantes de que ao dizer "perímetro" nesta e nas demais tarefas, estamos nos referindo à "medida do perímetro".



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Professor, professora: Explique aos estudantes que, como o hexágono regular está inscrito na circunferência, então o comprimento do raio dessa circunferência e do lado do hexágono são iguais.

a) Escreva uma fórmula que represente o perímetro P do hexágono em função de x.

b) Com base na fórmula obtida no item **a**, calcule o perímetro do hexágono para:

- $x = 2$ m. Resposta: 6 m
- $x = 12$ m. Resposta: 36 m

c) Qual deve ser o valor de x para que o perímetro P do hexágono seja:

- 21 m? Resposta: 7 m
- 10,2 m? Resposta: 3,4 m

6. Em uma atividade na sala de aula, os estudantes representaram as figuras **I**, **II** e **III**, usando palitos para compor cada lado. A quantidade de palitos (P) de cada figura depende da quantidade de quadrados (Q) que formam cada figura.

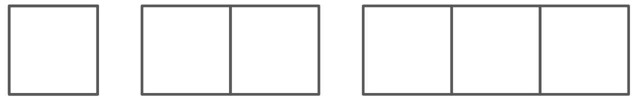


Figura I Figura II Figura III

RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Que expressão fornece a quantidade de palitos em função da quantidade de quadrados de cada figura?
Resposta: Alternativa **b**.

a) $P = 4Q$ **b)** $P = 3Q + 1$ **c)** $P = 4Q - 1$ **d)** $P = Q + 3$ **e)** $P = 4Q - 2$

7. Após a COVID-19, o mundo viveu, em 2022, uma retomada das atividades pós-pandemia, causando um impacto direto na geração e no descarte de **resíduos sólidos**. No Brasil, o total de resíduos sólidos urbanos gerados nesse ano alcançou um total de aproximadamente 77,1 milhões de toneladas, correspondendo a mais de 211 mil toneladas diárias. Em termos de quantidade diária por habitante, a região Sudeste apresentou a maior geração, com 1,23 kg por habitante, enquanto a região Norte gerou 0,884 kg por habitante.

Quantidade média de resíduos sólidos urbanos gerados diariamente por quantidade de habitantes das regiões Sudeste e Norte em 2022

Quantidade de habitantes	Região Sudeste	Região Norte
1	1,23	0,884
2	2,46	1,768
5	6,15	4,42
10	12,3	8,84
60	73,8	53,04
100	123	88,4
300	369	265,2

Fonte de pesquisa: ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE RESÍDUOS E MEIO AMBIENTE (Abrema). *Panorama dos resíduos sólidos no Brasil 2023*. Disponível em: https://www.abrema.org.br/wp-content/uploads/dlm_uploads/2024/03/Panorama_2023_P1.pdf. Acesso em: 5 jul. 2024.

OBJETO DIGITAL ***Mapa clicável*:** Resíduos sólidos urbanos no Brasil

Resíduos sólidos: materiais, substâncias, objetos ou bens descartados resultantes de atividades humanas em sociedade, denominados em geral como lixo.

PHOTOROYALTY/SHUTTERSTOCK

Seleção de resíduos sólidos para reciclagem.

a) Qual das fórmulas representa a quantidade Q de resíduos sólidos urbanos gerados por dia, em quilogramas, pela quantidade s de habitantes da região Sudeste? Resposta: **II**

I) $Q = 0{,}884s$ **II)** $Q = 1{,}23s$ **III)** $Q = 2{,}46s$

b) Qual das fórmulas representa a quantidade U de resíduos sólidos urbanos gerados por dia, em quilogramas, pela quantidade n de habitantes da região Norte? Resposta: **I**

I) $U = 0{,}884n$ **II)** $U = 1{,}23n$ **III)** $U = 1{,}768n$

c) Quantos quilogramas de resíduos sólidos urbanos são gerados diariamente, em média, por uma família composta de quatro pessoas que mora:

- na região Sudeste? Resposta: 4,92 kg
- na região Norte? Resposta: 3,536 kg

d) Certa família que mora na região Sudeste gera, em média, cerca de 43 kg de resíduos sólidos urbanos por semana. Quantas pessoas, aproximadamente, têm essa família? Resposta: 5 pessoas.

e) Considere que a média de produção diária de resíduos sólidos urbanos de um brasileiro é cerca de 1,04 kg. Pesquise a quantidade de habitantes do município onde você mora e estime quantos quilogramas de resíduos sólidos urbanos, em média, são gerados diariamente nesse município. Pesquise também se, no município, há serviço de reciclagem e algum tipo de tratamento para os resíduos sólidos urbanos produzidos. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes façam uma pesquisa do número de habitantes do seu município e, em seguida, multipliquem-no pela média de produção diária de resíduos sólidos, ou seja, por 1,04 kg.

O conceito de função

Conforme estudamos nos exemplos apresentados no tópico **Noção intuitiva de função**, a ideia básica de função é a de dois conjuntos não vazios A e B e a relação que associa elementos de A aos elementos de B. Contudo, é preciso associar a cada elemento de A um único elemento de B para ser caracterizada uma "função de A em B".

Sejam os conjuntos A e B não vazios. Uma função f de A em B é uma regra que diz como associar a cada elemento $x \in A$ um único elemento $y = f(x) \in B$. Indicaremos essa função por:

$$f\colon A \rightarrow B \text{ (lê-se: função de } A \text{ em } B\text{)}$$

O conjunto A chama-se **domínio** $(D(f))$ e o B, **contradomínio** $(CD(f))$ da função f. Para cada elemento $x \in A$, o elemento $y \in B$ é chamado **imagem** de x pela função f ou o valor assumido pela função f no ponto $x \in A$. O conjunto formado por todas as imagens é um subconjunto de B, denominado **conjunto imagem** $(Im(f))$ da função f.

OBJETO DIGITAL
Carrossel de imagens: Contribuições para o desenvolvimento de funções

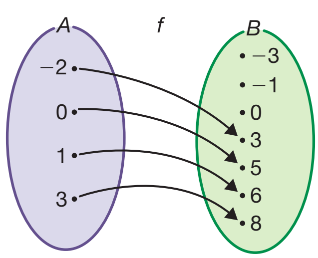
De maneira geral, indicamos uma função por letras minúsculas, como f, g e h.

Exemplo

Uma função f de A em B, com $A = \{-2, 0, 1, 3\}$ e $B = \{-3, -1, 0, 3, 5, 6, 8\}$ que associa cada elemento x de A ao elemento $y = x + 5$ em B, pode ser indicada pela fórmula (**lei de formação**) $f(x) = x + 5$ ou $y = x + 5$.

Usando a fórmula $f(x) = x + 5$, podemos determinar a imagem y de cada elemento x de A.

- $f(-2) = -2 + 5 = 3$; a imagem de -2 é 3.
- $f(0) = 0 + 5 = 5$; a imagem de 0 é 5.
- $f(1) = 1 + 5 = 6$; a imagem de 1 é 6.
- $f(3) = 3 + 5 = 8$; a imagem de 3 é 8.



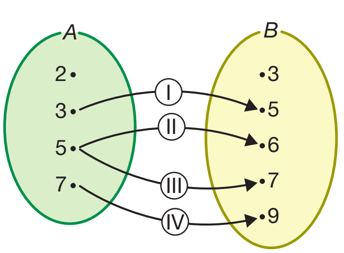
RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

As funções podem ser representadas por uma figura denominada **diagrama de flechas**. No caso da função f de A em B dada por $f(x) = x + 5$, temos o diagrama de flechas apresentado.

Na função f, temos $D(f) = A$, $CD(f) = B$ e $Im(f) = \{3, 5, 6, 8\}$.

Exercícios e problemas resolvidos

R1. Para que o esquema a seguir represente uma função f de A em B, qual elemento e qual seta devem ser retirados?



VINÍCIUS COSTA/ARQUIVO DA EDITORA

Resolução

Para que f seja uma função, cada elemento do conjunto A deve ter uma única imagem em B. Note que o elemento 2 de A não tem imagem em B. Além disso, o elemento 5 de A tem duas imagens em B: os elementos 6 e 7.

Portanto, para que f seja uma função, devemos retirar o elemento 2 de A e a seta II ou a seta III.

R2. Dada a função f de A em B, com $A = \{-1, 0, 1\}$ e $B = \{-3, 2, 4\}$, definida por $f(x) = 5x^2 - 3$, determine $Im(f)$ e construa um diagrama de flechas que represente essa função.

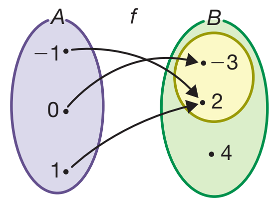
Resolução

Professor, professora: Verifique se os estudantes perceberam que, de acordo com a definição, em uma função pode ser que mais de um elemento do domínio tenha a mesma imagem no contradomínio.

Temos:

- $f(-1) = 5 \cdot (-1)^2 - 3 = 5 - 3 = 2$
- $f(0) = 5 \cdot 0^2 - 3 = 0 - 3 = -3$
- $f(1) = 5 \cdot 1^2 - 3 = 5 - 3 = 2$

Portanto, $Im(f) = \{-3, 2\}$.



Observação

No diagrama, a parte em amarelo corresponde ao conjunto imagem da função.

RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

R3. Considere uma função f de A em B, definida pela lei de formação $f(x) = \dfrac{15}{6 + x}$. Determine o elemento de A em f cuja imagem é 5.

Resolução

$$f(x) = 5 \Rightarrow \frac{15}{6 + x} = 5 \Rightarrow 30 + 5x = 15 \Rightarrow 5x = 15 - 30 \Rightarrow 5x = -15 \Rightarrow x = -3$$

Portanto, -3 é o elemento de A cuja imagem é 5.

R4. Em um supermercado, um cliente tem a opção de realizar uma compra de produtos no atacado e no varejo, e as compras são consideradas atacado quando contemplam 12 ou mais unidades de um mesmo produto.

LEONARDO GIBRAN/ARQUIVO DA EDITORA

Sabendo que o preço de uma barra de cereal no varejo é R\$ 4,59 e no atacado é R\$ 3,79, escreva uma função definida por duas sentenças que represente o preço y em função da quantidade x de barra de cereal comprada. De acordo com essas informações, é mais vantajoso comprar 11 ou 13 unidades?

Resolução

Escrevendo primeiro a função f que representa o preço da barra de cereal em função da quantidade x de barras de cereais compradas pelo cliente, temos:

$$f(x) = \begin{cases} 4{,}59x, \text{ se } x < 12 \\ 3{,}79x, \text{ se } x \geq 12 \end{cases}$$

Vamos calcular os preços para 11 e 13 unidades, ou seja, os valores de y para $x = 11$ e $x = 13$.

- $f(11) = 4{,}59 \cdot 11 = 50{,}49$, ou seja, R\$ 50,49.
- $f(13) = 3{,}79 \cdot 13 = 49{,}27$, ou seja, R\$ 49,27.

Portanto, o preço pago pelo cliente ao comprar 13 unidades é menor do que o preço para comprar 11 unidades, ou seja, em relação ao preço é mais vantajoso comprar 13 unidades dessa barra de cereal.

13. c) Possíveis respostas: Vício, pois o cérebro do fumante se adapta e precisa de doses cada vez maiores para manter o nível de satisfação que tinha no início; causa direta de aproximadamente 50 doenças, como câncer, doenças cardiovasculares e respiratórias.

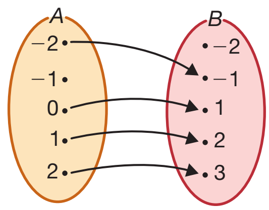
Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

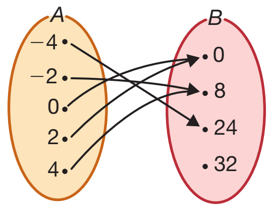
8. Qual diagrama representa uma função de A em B?

Resposta: Alternativa **B**.

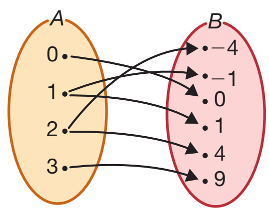
A.



B.

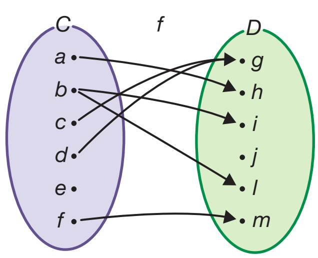


C.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

9. Para que f seja uma função, é necessário apenas que:



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Resposta: Alternativa **d**.

a) exclua-se o elemento e.

b) excluam-se os elementos e e j.

c) exclua-se uma das flechas que partem de b e o elemento j.

d) exclua-se uma das flechas que partem de b e o elemento e.

10. Considere uma função f de A em B em que:

Resposta no final do **Livro do Estudante**.

- $D(f) = \{3, 9, 12\}$;
- $CD(f) = \{-3, -1, 0, 5, 10, 15\}$;
- $Im(f) = \{-3, 0, 10\}$;
- $f(3) = -3$;
- $f(9) = 0$;
- $f(12) = 10$.

De acordo com as informações, represente a função f por meio de um diagrama de flechas.

11. Sendo h uma função de $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 5\}$ em $\mathbb{Z}$, determine $Im(h)$ sabendo que h é definida por:

a) $h(x) = \dfrac{120}{x}$. Resposta: $Im(h) = \{24, 30, 40, 60, 120\}$

b) $h(x) = \dfrac{120}{x+1}$. Resposta: $Im(h) = \{20, 24, 30, 40, 60\}$

c) $h(x) = \dfrac{120}{x} + 1$. Resposta: $Im(h) = \{25, 31, 41, 61, 121\}$

d) $h(x) = \dfrac{120}{x} - 1$. Resposta: $Im(h) = \{23, 29, 39, 59, 119\}$

12. Para deixar o automóvel em certo estacionamento, Carlos vai pagar R\$ 5,50 por hora.

a) Escreva a lei de formação da função que expressa o preço p pago por Carlos ao deixar o automóvel nesse estacionamento durante t horas. Resposta: $p(t) = 5{,}5t$

b) Quantos reais Carlos vai pagar se deixar o automóvel por 3 horas nesse estacionamento? Resposta: R\$ 16,50

13. No mundo, de acordo com a Organização Mundial de Saúde (OMS), morrem por hora cerca de 900 pessoas vítimas de doenças relacionadas ao tabagismo.

a) Escreva a lei de formação de uma função que expresse o número p de pessoas mortas por doenças relacionadas ao tabagismo em função do tempo t, em horas. Resposta: $p(t) = 900t$

b) Com base na lei de formação que você escreveu no item **a**, calcule e explique o que representa $p(24)$. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

c) Junte-se a um colega e pesquisem os malefícios causados pelo uso do tabaco. Depois, conversem com os colegas e o professor sobre as informações obtidas.

14. Suponha, por exemplo, que entre os anos de 2010 e 2020 a população de um município pudesse ser estimada por meio da função

$p: \{t \mid t \in \mathbb{N} \text{ e } 2010 \leq t \leq 2020\} \to \mathbb{R}$

definida por $p(t) = 2{,}3t - 4\,500$, em que p representa a quantidade de indivíduos que compõem a população, em milhares de habitantes, no ano t.

a) Utilizando a calculadora, determine a população estimada desse município em 2013 e em 2019.

b) É adequado estimar a população desse município em 1950 por meio da fórmula apresentada? Por quê?

14. a) Resposta: 2013: 129 900 habitantes; 2019: 143 700 habitantes.

15. Um produtor plantou 10 hectares de soja em sua propriedade na última safra. Nesse cultivo, ele gastou R\$ 7 020,00 por hectare plantado, colheu x sacas de 60 kg e todas foram vendidas. Sabendo que ele recebeu R\$ 140,00 pela venda de cada saca de 60 kg, qual é a expressão que determina o lucro L em função de x obtido por esse produtor nesse ano? Resposta: Alternativa **d**.

a) $L(x) = 140x - 7\,020$

b) $L(x) = 1\,400x - 7\,020$

c) $L(x) = 140x + 7\,200$

d) $L(x) = 140x - 70\,200$

e) $L(x) = 7\,020x - 140$

14. b) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes digam que não, pois a fórmula apresentada é para estimativas da população no período entre os anos de 2010 e 2020. Caso a utilizássemos para 1950, a população estimada seria −15 000 habitantes, o que não faz sentido.

Estudo do domínio de uma função

Estudamos que uma função f de A em B apresenta um domínio (A) e um contradomínio (B). Na função f de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{Z}$, definida por $f(x) = 2x - 10$, por exemplo, o domínio é o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais e o contradomínio é o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros, ou seja, $D(f) = \mathbb{N}$ e $CD(f) = \mathbb{Z}$.

Porém, em algumas situações, o domínio e o contradomínio de uma função não estão explícitos, sendo apresentada apenas a lei de formação. Nesses casos, consideramos que o domínio seja o subconjunto mais amplo possível dos números reais $(D \subset \mathbb{R})$ para o qual a lei de formação faz sentido, e o contradomínio, o próprio conjunto dos números reais $(CD = \mathbb{R})$.

Observação

Em situações contextualizadas, é importante analisar as variáveis envolvidas. Por exemplo, na lei de formação $f(x) = 4x$, que relaciona o perímetro de um quadrado em função do comprimento de seus lados, não faz sentido considerar números negativos no domínio.

Exemplos

I. Na função f definida por $f(x) = \sqrt{x}$, como não existe raiz quadrada de números negativos no conjunto dos números reais, consideramos que o domínio seja o conjunto dos números reais não negativos $\mathbb{R}_+$.

$$D(f) = \mathbb{R}_+ \text{ ou } D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$$

II. Na função $g(x) = \frac{1}{x}$, o domínio da função é dado pelo conjunto dos números reais não nulos, pois não está definido em $\mathbb{R}$ frações com denominador zero.

$$D(g) = \mathbb{R}^* \text{ ou } D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$$

III. Na função h definida por $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, o domínio da função é dado pelo conjunto dos números reais positivos, pois não está definido em $\mathbb{R}$ frações com denominador zero e raiz quadrada de números negativos.

$$D(h) = \mathbb{R}_+^* \text{ ou } D(h) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

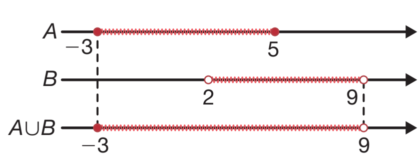
Para realizar o estudo do domínio de uma função, será necessário, em algumas situações, conhecermos a **união** e a **interseção** de conjuntos, que são operações envolvendo conjuntos, assunto estudado no capítulo **2** deste volume.

Exemplos

I. Se $X = \{1, 2, 4, 7\}$ e $Y = \{3, 5, 6\}$, então $X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

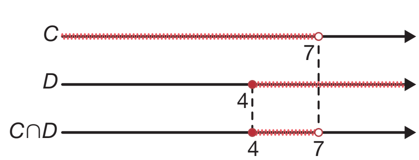
II. Se $P = \{0, 2, 4, 6\}$ e $Q = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, então $P \cap Q = \{2, 4\}$.

III. Seja $A = [-3, 5]$ e $B =]2, 9[$.



Portanto, $A \cup B = [-3, 9[$ ou $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 9\}$.

IV. Seja $C =]-\infty, 7[$ e $D = [4, +\infty[$.



Portanto, $C \cap D = [4, 7[$ ou $C \cap D = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 \leq x < 7\}$.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios e problemas resolvidos

R5. Determine o domínio da função f definida por $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}$.

Resolução

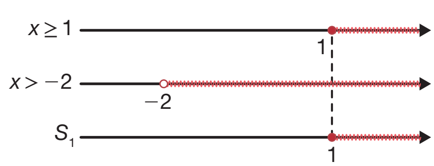
Para a condição $\dfrac{x-1}{x+2} \geq 0$, temos duas possibilidades.

I. Numerador não negativo e denominador positivo:

$$x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$$

$$x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2$$

Como as duas inequações devem ser satisfeitas simultaneamente, realizamos a interseção das condições:



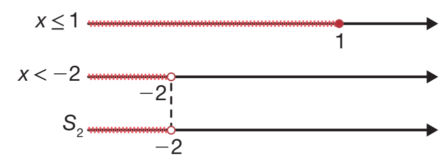
Logo, para essa possibilidade temos $x \geq 1$.

II. Numerador não positivo e denominador negativo:

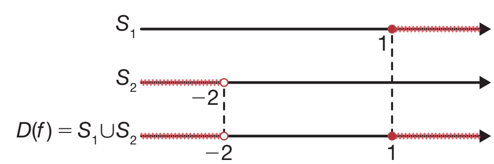
$$x - 1 \leq 0 \Rightarrow x \leq 1$$

$$x + 2 < 0 \Rightarrow x < -2$$

Como as duas inequações devem ser satisfeitas simultaneamente, realizamos a interseção das condições:



Logo, para essa possibilidade temos $x < -2$.
O domínio da função é dado pela união das duas soluções.



Portanto, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x \geq 1\}$.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

16. Determine o domínio da função cuja lei de formação é: Resposta no final do **Livro do Estudante**.

a) $f(x) = \dfrac{x+1}{2}$.

b) $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$.

c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{5}}{x-7}$.

d) $f(x) = \sqrt{12 - x}$.

e) $f(x) = \dfrac{20 - x}{\sqrt{4 - x}}$.

f) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 2}{\sqrt{3x - 6}}$.

17. O domínio da função f definida por $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+8}}{\sqrt{-4x-16}}$ é: Resposta: Alternativa **b**.

a) $]-4, 8]$
b) $[-8, -4[$
c) $]-8, -4]$
d) $[-8, -4]$
e) $\mathbb{R}$

18. A professora Nair solicitou aos estudantes que determinassem o domínio da função f, definida por $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-6}{x+2}}$.
Analise a resposta de Ronaldo.

18. a) Resposta: O domínio não está correto. Resposta pessoal. Os estudantes podem responder, por exemplo, que Ronaldo considerou apenas um dos possíveis casos para que $\dfrac{x-6}{x+2} \geq 0$, nesse caso, quando $x - 6 \geq 0$ e $x + 2 > 0$.

> O domínio da função f definida por $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-6}{x+2}}$ é $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 6\}$.

a) O domínio obtido por Ronaldo está correto? Em caso negativo, cite um possível erro cometido por ele.

b) Qual é o domínio da função f? Resposta: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x \geq 6\}$

Gráfico de uma função

Professor, professora: Antes de iniciar este tópico, peça aos estudantes que pesquisem e selecionem alguns gráficos em jornais, revistas e na internet. Depois, solicite-lhes que verifiquem se esses gráficos representam funções e, em caso positivo, peça que determinem as variáveis envolvidas.

Ao lermos uma revista ou um jornal, assistirmos ao noticiário na televisão ou até mesmo acessarmos um *site*, é possível identificar diversos tipos de gráficos. Em geral, esses gráficos são utilizados para facilitar a exposição e a compreensão de informações, e muitos deles representam funções.

O gráfico de uma função f é o conjunto de todos os pontos (x, y), com $x \in D(f)$ e $y = f(x)$.

Observação

A função definida por $g(x) = x + 1$ é um exemplo de função afim, cujo gráfico é uma reta. Estudaremos em mais detalhes esse tipo de função no capítulo **4** deste livro.

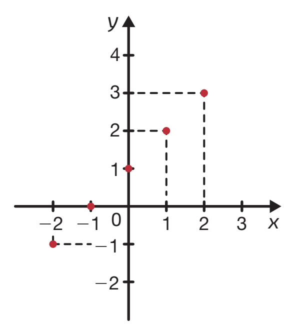
Exemplo 1

Seja a função g de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $g(x) = x + 1$.

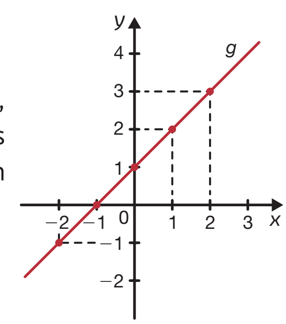
Para esboçar o gráfico de g, obtemos inicialmente pares ordenados (x, y) para valores arbitrários de x, e os representamos em um plano cartesiano.

$g(x) = x + 1$

x	$y = g(x)$	(x, y)
-2	$g(-2) = -2 + 1 = -1$	$(-2, -1)$
-1	$g(-1) = -1 + 1 = 0$	$(-1, 0)$
0	$g(0) = 0 + 1 = 1$	$(0, 1)$
1	$g(1) = 1 + 1 = 2$	$(1, 2)$
2	$g(2) = 2 + 1 = 3$	$(2, 3)$



Verificamos que $D(g) = \mathbb{R}$, ou seja, podemos atribuir infinitos valores para x obtendo, para cada um deles, um único valor de y. Dessa maneira, no gráfico de g há infinitos pontos entre os indicados no plano cartesiano anterior. Os pontos marcados sugerem que o gráfico de g é uma reta.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Exemplo 2

Seja a função p de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $p(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{se } x < 1 \\ x^2, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$.

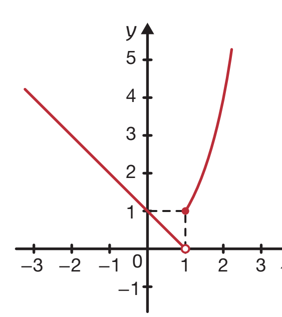
A função p é definida por duas sentenças, uma para $x < 1$ e outra para $x \geq 1$.

$p(x) = 1 - x$, se $x < 1$

x	$p(x) = 1 - x$	(x, y)
-2	$p(-2) = 1 - (-2) = 3$	$(-2, 3)$
-1	$p(-1) = 1 - (-1) = 2$	$(-1, 2)$
0	$p(0) = 1 - 0 = 1$	$(0, 1)$
$\frac{1}{2}$	$p\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$p(x) = x^2$, se $x \geq 1$

x	$p(x) = x^2$	(x, y)
1	$p(1) = 1^2 = 1$	$(1, 1)$
$\frac{3}{2}$	$p\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$	$\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$
2	$p(2) = 2^2 = 4$	$(2, 4)$
$\frac{5}{2}$	$p\left(\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$	$\left(\frac{5}{2}, \frac{25}{4}\right)$

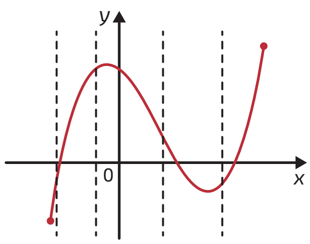


VINÍCIUS COSTA/ARQUIVO DA EDITORA

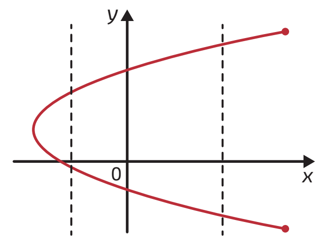
Análise do gráfico de uma função

Estudamos anteriormente que, dados os conjuntos C e D não vazios, uma função f de C em D é uma regra que diz como associar a cada elemento $x \in C$ um único elemento $y = f(x) \in D$. Agora, vamos analisar se certo gráfico representa uma função. Analise os gráficos a seguir.

A.



B.

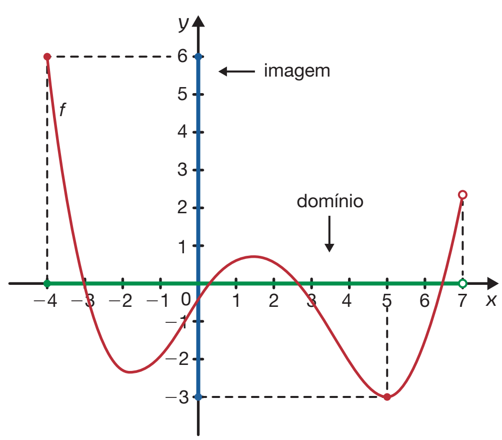


No gráfico **A**, qualquer que seja a reta traçada paralelamente ao eixo y, ele cortará o gráfico em um único ponto, ou seja, toda abscissa x está associada a uma ordenada y e não há abscissa x associada a mais de uma ordenada y. Dizemos então que o gráfico **A** corresponde a uma função.

Já no gráfico **B**, podem ser traçadas retas paralelas ao eixo y cortando o gráfico em dois pontos distintos, ou seja, há pelo menos uma abscissa x associada a mais de uma ordenada y. Nesse caso, dizemos que o gráfico **B** não corresponde a uma função.

Analisando o gráfico de uma função, podemos, em alguns casos, determinar o domínio e a imagem dessa função.

Para determinarmos o domínio e a imagem da função f, representada pelo gráfico a seguir, por exemplo, projetamos esse gráfico nos eixos x e y.



A projeção do gráfico no eixo x corresponde ao domínio de f, e a projeção no eixo y, à imagem de f. Nesse caso:

- $D(f) = [-4, 7[$ ou $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x < 7\}$
- $Im(f) = [-3, 6]$ ou $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -3 \leq y \leq 6\}$

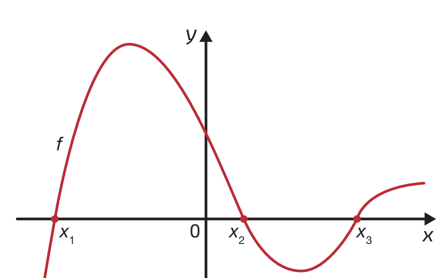
PARA FIXAR

Obtenha mais informações sobre como reconhecer a imagem gráfica de uma função acessando o vídeo disponível em: https://pt.khanacademy.org/math/algebra/x2f8bb11595b61c86:functions/x2f8bb11595b61c86:recognizing-functions/v/graphical-relations-and-functions. Acesso em: 28 fev. 2024.

Zero de uma função

Em uma função f, o valor $x \in D(f)$ tal que $f(x) = 0$ é denominado **zero** da função. Graficamente, os zeros da função correspondem às abscissas dos pontos em que o gráfico cruza o eixo x.

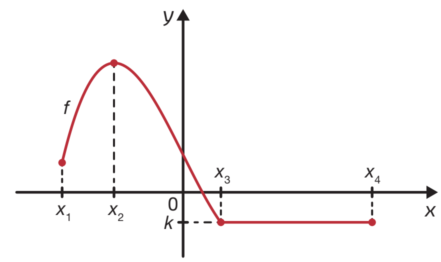
Na função f, cujo gráfico está representado na imagem, temos $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$. Logo, x_1, x_2 e x_3 são zeros da função.



Funções crescente, decrescente e constante

Considere o gráfico da função f apresentado na imagem.

Analisando esse gráfico, é possível verificar que:



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

- para $x \in [x_1, x_2]$, quando aumentamos o valor de x, o valor de $f(x)$ também aumenta. Nesse caso, dizemos que essa função é **crescente** em $[x_1, x_2]$.
- para $x \in [x_2, x_3]$, quando aumentamos o valor de x, o valor de $f(x)$ diminui. Nesse caso, dizemos que a função é **decrescente** em $[x_2, x_3]$.
- para qualquer $x \in [x_3, x_4]$, temos $f(x) = k$, sendo k uma constante real. Nesse caso, dizemos que a função é **constante** no intervalo $[x_3, x_4]$.

Dizemos que uma função f é:

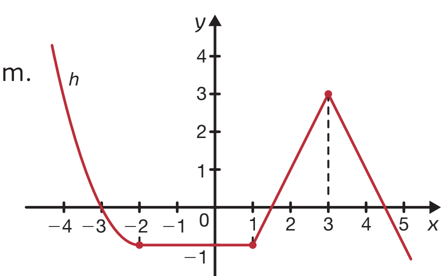
- **decrescente** em um intervalo contido no domínio de f se, para todo x_1 e x_2 pertencentes a esse intervalo, com $x_2 > x_1$, temos $f(x_2) < f(x_1)$;
- **crescente** em um intervalo contido no domínio de f se, para todo x_1 e x_2 pertencentes a esse intervalo, com $x_2 > x_1$, temos $f(x_2) > f(x_1)$;
- **constante** em um intervalo contido no domínio se, para todo x pertencente a esse intervalo, $f(x) = k$, sendo k uma constante real.

Exemplo

Considere a função h cujo gráfico está apresentado na imagem.

Analisando esse gráfico, concluímos que h é:

- crescente no intervalo $[1, 3]$.
- decrescente nos intervalos $]-\infty, -2]$ e $[3, +\infty[$.
- constante no intervalo $[-2, 1]$.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

Note que $f(x) = -1$ para todo $x \in [-2, 1]$.

19. A. Resposta: Não, pois há retas paralelas ao eixo y cortando o gráfico em pelo menos dois pontos distintos.

19. B. Resposta: Sim, pois qualquer que seja a reta traçada paralelamente ao eixo y, cortará o gráfico em um único ponto.

19. C. Resposta: Sim, pois qualquer que seja a reta traçada paralelamente ao eixo y, cortará o gráfico em um único ponto.

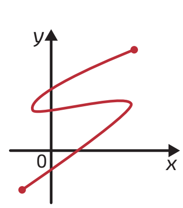
19. D. Resposta: Não, pois há retas paralelas ao eixo y cortando o gráfico em dois pontos distintos.

Exercícios e problemas

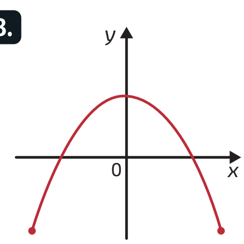
Anote as respostas no caderno.

19. Verifique se cada um dos gráficos a seguir representa ou não uma função. Em seguida, justifique a sua resposta.

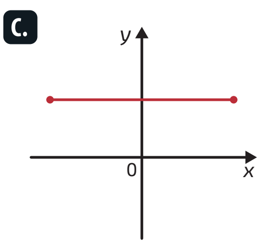
A.



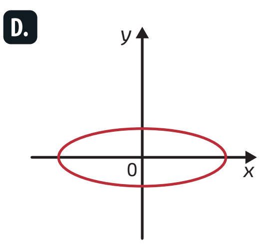
B.



C.

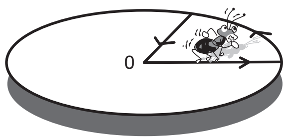


D.



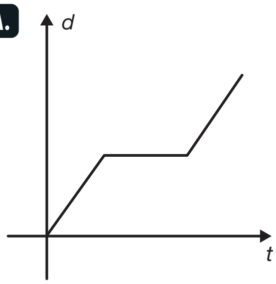
ILUSTRAÇÕES: VINÍCIUS COSTA/ARQUIVO DA EDITORA

20. (OBMEP, 2006) Uma formiguinha parte do centro de um círculo e percorre uma só vez, com velocidade constante, o trajeto ilustrado na figura.

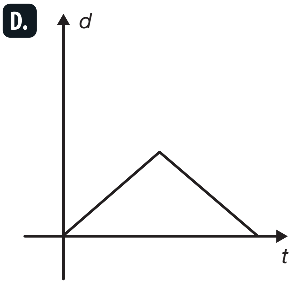


Qual dos gráficos a seguir representa a distância d da formiguinha ao centro do círculo em função do tempo t? Resposta: Alternativa **B.**

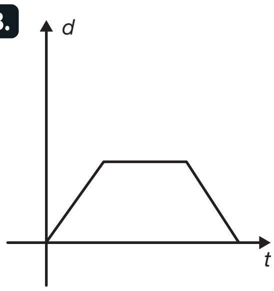
A.



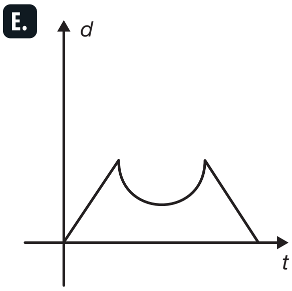
D.



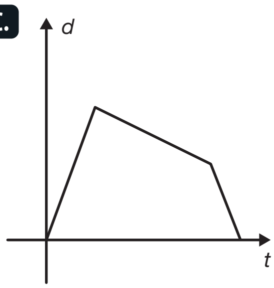
B.



E.



C.



21. Construa o gráfico da função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por: Respostas no final do **Livro do Estudante**.

a) $f(x) = x - 3$.

b) $f(x) = -2x + 5$.

c) $f(x) = -5x$.

d) $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, \text{ se } x < 1 \\ -2x + 1, \text{ se } x \geq 1 \end{cases}$.

e) $f(x) = \dfrac{x^2}{4}$.

f) $f(x) = \begin{cases} -x, \text{ se } x \leq 0 \\ -x^2 + \dfrac{9x}{5}, \text{ se } x > 0 \end{cases}$.

g) $f(x) = -2x^2 + \dfrac{x}{8}$.

22. Para saber como é calculado o valor da fatura de água, Tiago fez uma pesquisa no *site* da companhia de saneamento básico da cidade onde mora. Analise as informações obtidas por ele.

Tarifa **1** - **De 0 a 10 mil litros**: R\$ 37,28 (valor fixo).

Tarifa **2** - **Acima de 10 mil litros e até 20 mil litros**: valor da Tarifa 1 para 10 mil litros mais R\$ 3,84 por mil litros de água excedente a 10 mil litros.

Tarifa **3** - **Acima de 20 mil litros**: valor da Tarifa 2 para 20 mil litros mais R\$ 5,60 por mil litros de água excedente a 20 mil litros.

De acordo com essas informações, Tiago escreveu a lei de formação de uma função que possibilita calcular o valor da fatura f de acordo com o consumo c, em mil litros.

$$f(c) = \begin{cases} 37{,}28 \text{ se } 0 \leq c \leq 10 \\ 37{,}28 + 3{,}84(c - 10) \text{ se } 10 < c \leq 20 \\ 75{,}68 + 5{,}60(c - 20) \text{ se } c > 20 \end{cases}$$

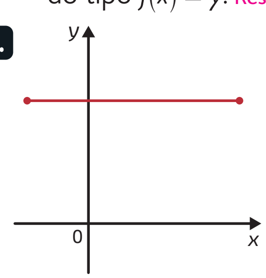
a) Determine, na cidade onde Tiago mora, o valor pago pela fatura de água caso uma pessoa consuma:

- 12 mil litros de água. Resposta: R\$ 44,96
- 27,3 mil litros de água. Resposta: R\$ 116,56

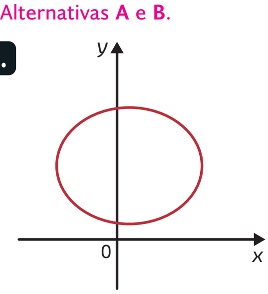
b) Construa o gráfico da função cuja lei de formação foi escrita por Tiago. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

23. Determine quais gráficos representam funções do tipo $f(x) = y$. Resposta: Alternativas **A** e **B**.

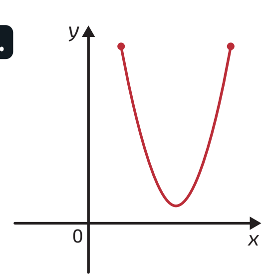
A.



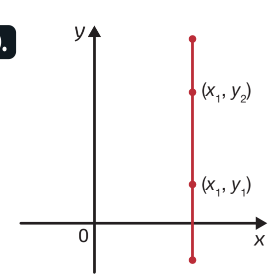
C.



B.

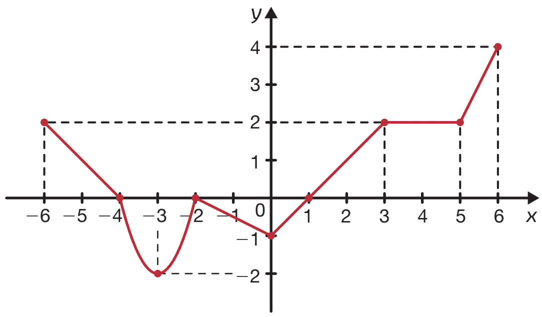


D.



24. Considere as funções f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, e g de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$, definidas por $f(x) = 3x + 2$ e $g(x) = 3x + 2$. Esboce os gráficos de f e de g em planos cartesianos distintos. Em seguida, escreva qual é a diferença entre esses gráficos.
Respostas no final do **Livro do Estudante**.

25. Analise o gráfico da função f.



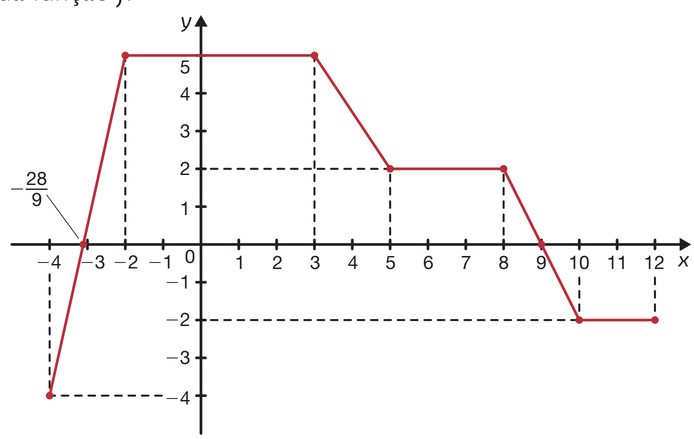
RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

a) Qual é o valor de $f(4)$? Resposta: $f(4) = 2$

b) Quais são os zeros da função f? Resposta: $x = -4$, $x = -2$ e $x = 1$

c) Determine o domínio e a imagem de f. Resposta: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | -6 \leq x \leq 6\}$; $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} | -2 \leq y \leq 4\}$

26. Analise o gráfico da função f.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

28. a) Resposta: Verde, pois, como a tartaruga não parou, sua distância em relação à largada foi crescente durante todo o tempo da corrida.

28. b) Resposta: Não, pois em certo intervalo, que corresponde ao período em que a lebre permaneceu dormindo, a função é constante.

28. c) Resposta: A tartaruga. Algumas possíveis respostas: Quem segue devagar e com constância pode chegar à frente. Paciência pode valer mais do que a pressa. Nem sempre os mais velozes chegam em primeiro lugar.

a) Quais são o domínio e o conjunto imagem de f? Resposta: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | -4 \leq x \leq 12\}$ e $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} | -4 \leq y \leq 5\}$

b) Determine os intervalos em que a função f é:

- decrescente. Resposta: $[3, 5]$ e $[8, 10]$
- crescente. Resposta: $[-4, -2]$
- constante. Resposta: $[-2, 3]$, $[5, 8]$ e $[10, 12]$

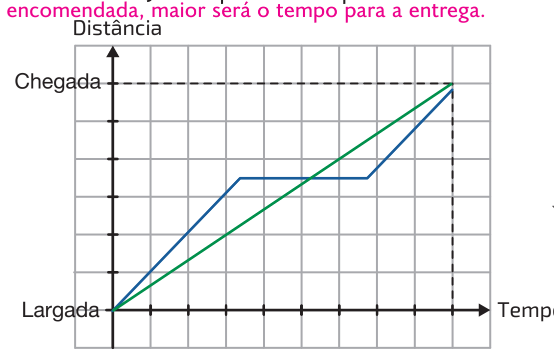
c) Quais são os zeros dessa função? Resposta: $-\frac{28}{9}$ e 9

27. Uma indústria calcula, em horas, o tempo para a entrega de seus pedidos, utilizando a função t definida por $t(x) = 42 + 0{,}2x$, em que $t(x)$ indica o tempo para a entrega e x, a quantidade de peças encomendada.

a) Qual é o tempo de entrega de uma encomenda de 20 peças? E de 30 peças? Resposta: 46 h; 48 h

b) Classifique essa função como crescente, decrescente ou constante. Justifique sua resposta.
Resposta: Crescente, pois, quanto maior for a quantidade de peças encomendada, maior será o tempo para a entrega.

28. “A lebre e a tartaruga” é uma famosa fábula desses dois animais que disputam uma corrida. Na largada, a lebre, que se achava muito veloz, disparou na frente, enquanto a tartaruga seguia constante e lentamente. A lebre, em determinado momento, ficou tão distante da tartaruga que resolveu descansar um pouco e dormiu. Enquanto isso, a tartaruga, vagarosamente, passou pela lebre e continuou seu caminho, sem descansar um só minuto. Quando a lebre se deu conta, correu em direção à chegada.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Analise o gráfico que representa essa corrida.

a) No gráfico, que cor está indicando o deslocamento da tartaruga? Justifique sua resposta.

b) A função correspondente ao deslocamento da lebre é crescente em todo o domínio? Por quê?

c) De acordo com o gráfico, quem ganhou a corrida? Que moral você supõe que o autor quis transmitir com essa fábula?

TRABALHO E JUVENTUDES

Administrador de empresas

3. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes obtenham informações relacionadas à profissão de administrador de empresas com base na conversa com o profissional ou por meio da pesquisa que farão na internet. Eles podem abordar o cotidiano de trabalho e as tarefas diárias desse profissional, os lugares onde trabalha, os projetos desenvolvidos, entre outros fatores.

Vimos que em muitas situações cotidianas é possível perceber grandezas que estão relacionadas entre si. Por exemplo, ao comprar algo por quantidade, a quantia a ser paga está diretamente relacionada à quantidade de produto que será adquirido. Assim, estabelecer essas relações e registrá-las de diferentes maneiras, em tabelas, gráficos e fórmulas, faz parte do cotidiano de algumas profissões, pois as funções auxiliam na análise de dados e na previsão de padrões em diversas áreas do conhecimento.

Entre os profissionais que utilizam funções em seu dia a dia está o administrador de empresas, que pode utilizá-las para organizar finanças, verificar gastos, analisar informações e projetar investimentos.

Mas você sabe o que faz um administrador de empresas? Ele desempenha um papel fundamental na tomada de decisões no ambiente corporativo. Suas áreas de atuação são diversas, incluindo entidades com ou sem fins lucrativos, organizações do terceiro setor e empresas públicas e privadas.

Entre suas responsabilidades, estão atividades de planejamento, organização e implementação de estratégias em diversas áreas de uma empresa, como gestão financeira, tecnológica, de recursos humanos e materiais. Assim, ser um administrador implica comprometer-se a trabalhar para alcançar os objetivos da empresa, aplicando princípios e técnicas da administração para organizar os processos e gerenciar recursos com o objetivo de reduzir custos desnecessários, contribuindo para aumentar a produtividade, a eficiência e a rentabilidade.

Observação

Para se tornar um profissional da área, é preciso cursar uma graduação em administração de empresas. O curso deve ser feito em uma instituição de ensino superior que seja reconhecida pelo Ministério da Educação (MEC). Além disso, após se formar, é necessário o registro em um Conselho Regional de Administração (CRA).

DC STUDIO/SHUTTERSTOCK

Administrador analisando dados de uma empresa.

2. Resposta pessoal. Os estudantes podem mencionar profissões como engenheiros de produção, que usam funções para controlar a produção; economistas e analistas financeiros, ao fazer previsões e avaliar dados econômicos e variáveis relacionadas ao mercado de valores; e programadores e desenvolvedores de *software*, que podem usar funções para criar sistemas, analisar dados e desenvolver algoritmos.

PARA EXPANDIR

Combine com o professor e a turma uma visita para conhecer o local de trabalho de um administrador de empresas, e aproveite para saber mais sobre o dia a dia desse profissional.

Atividades

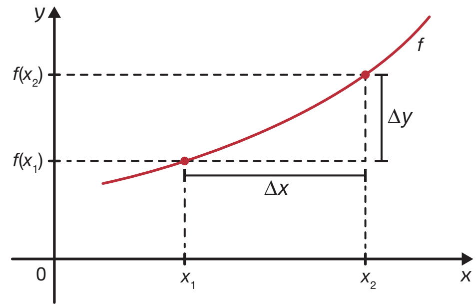
Anote as respostas no caderno.

1. O que mais chamou sua atenção na profissão de administrador de empresas? Você se identificou com ela? Converse com os colegas.
2. Cite outras profissões que utilizam a noção intuitiva de função em seu trabalho.
3. Junte-se a um colega e conversem com um administrador ou façam uma pesquisa na internet voltada à atuação desse profissional, como é seu dia a dia de trabalho, e o que uma pessoa deve desenvolver para ser um bom administrador de empresas. Anotem as informações que vocês considerarem relevantes e compartilhem os resultados com a turma.

1. Resposta pessoal. Incentive os estudantes a compartilhar suas impressões sobre a profissão de administrador de empresas. Mesmo que eles não tenham se identificado com essa profissão, incentive-os a comentar algo que lhes chamou a atenção, referente à formação ou ao campo de trabalho, por exemplo. O momento pode ser oportuno também para mencionarem alguém que conheçam e que trabalhe na área de administração. Nesse caso, peça-lhes que expliquem a especialidade da pessoa, em qual lugar trabalha etc.

Taxa de variação média

Considere a função f cujo gráfico está representado a seguir.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Se x varia de x_1 para x_2, então a variação de x é:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

A variação correspondente de y é:

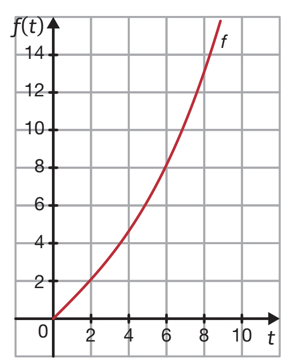
$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

A **taxa de variação média** de uma função f em relação a x, no intervalo $[x_1, x_2]$, é:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Exemplo

A posição de certo objeto é descrita pela função f dada por $f(t) = 0{,}01t^3 + t$, com $t \geq 0$, em que $f(t)$ é o deslocamento do objeto, em metros, a partir da origem no instante t, com t medido em segundos.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Nesse exemplo, a taxa de variação média da função f em relação a t representa a **velocidade média** do objeto. Considerando o intervalo $[0, 1]$, temos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{1{,}01 - 0}{1} = 1{,}01$$

Para o intervalo $[2, 4]$, temos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{4{,}64 - 2{,}08}{2} = 1{,}28$$

Para o intervalo $[5, 8]$, temos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{f(8) - f(5)}{8 - 5} = \frac{13{,}12 - 6{,}25}{3} = 2{,}29$$

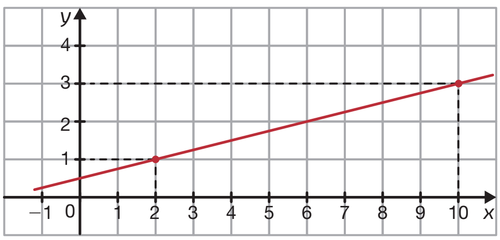
Portanto, no intervalo $[0, 1]$ a velocidade média do objeto é 1,01 m/s, no intervalo $[2, 4]$ é 1,28 m/s e no intervalo $[5, 8]$ é 2,29 m/s.

PARA FIXAR

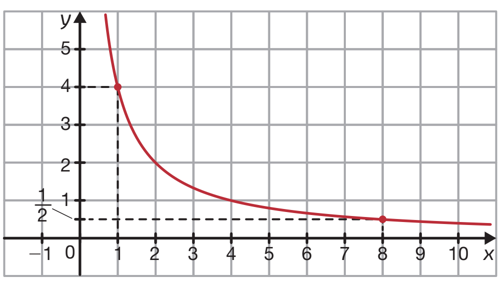
É possível verificar o comportamento da taxa média de variação de uma função afim usando um simulador. Acesse a página **Taxa de variação média da função afim**, movimente os controles deslizantes dos pontos A e B das funções e altere a posição dos pontos que cortam o eixo x. A cada alteração, verifique o que acontece com a taxa média de variação apresentada na função crescente e na função decrescente, e anote suas conclusões no caderno. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/uwVYkTQm. Acesso em: 25 set. 2024.

29. Determine a taxa de variação da função no intervalo apresentado para cada um dos gráficos.

a) $[2, 10]$. Resposta: $\frac{1}{4}$

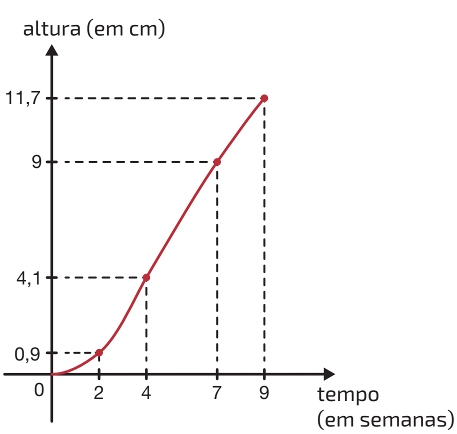


b) $[1, 8]$. Resposta: $-\frac{1}{2}$



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

30. O gráfico apresenta a altura de uma planta, em centímetros, no decorrer do tempo t, medido em semanas.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

a) Em quantas semanas a planta atingiu 9 cm de altura? Resposta: 7 semanas.

b) A taxa de variação média da função cujo gráfico está representando indica, nesse contexto, a taxa média de crescimento dessa planta. Qual é sua taxa média de crescimento no intervalo $[2, 4]$? E no intervalo $[4, 9]$? Resposta: 1,6 cm por semana; 1,52 cm por semana.

31. Um agricultor está cultivando uma plantação de morangos em sua fazenda. O custo para produzir uma bandeja de morangos é de R$ 3,70. De acordo com essa informação, determine:

a) a lei de formação de uma função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ que forneça o custo total de x bandejas de morangos. Resposta: $f(x) = 3{,}70x$

b) o custo total para produzir 150 bandejas de morangos. Resposta: R$ 555,00

c) a taxa de variação média da função f. Resposta: 3,7

32. O gráfico a seguir mostra o faturamento acumulado de uma empresa desde sua abertura, há 16 meses.

RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

a) Qual é a lei de formação correspondente à função f cujo gráfico foi apresentado? Resposta: Alternativa **II**.

I) $f(x) = \begin{cases} 2x, \text{ se } 0 < x \leq 4 \\ \frac{1}{3}x + \frac{20}{3}, \text{ se } 4 < x \leq 16 \end{cases}$

II) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, \text{ se } 0 < x \leq 4 \\ \frac{1}{3}x + \frac{20}{3}, \text{ se } 4 < x \leq 16 \end{cases}$

III) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, \text{ se } 0 < x \leq 4 \\ x + 4, \text{ se } 4 < x \leq 16 \end{cases}$

IV) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, \text{ se } 0 < x \leq 4 \\ \frac{1}{2}x + \frac{20}{3}, \text{ se } 4 < x \leq 16 \end{cases}$

32. b) Resposta: $D(f) = [0, 16]$; $Im(f) = [0, 12]$

b) Determine o domínio e a imagem da função f.

c) O faturamento acumulado, em milhões de reais por mês, aumentou "mais rápido" no intervalo de 0 a 4 meses ou no intervalo de 4 a 16 meses? Justifique sua resposta.

32. c) Resposta: De 0 a 4 meses. Espera-se que os estudantes justifiquem que aumenta mais rápido nesse intervalo porque a taxa de variação média da função f no intervalo $[0, 4]$ é maior do que a taxa de variação média no intervalo $[4, 16]$.

SÍNTESE DO CAPÍTULO

Neste capítulo, estudamos o conceito de função e as respectivas relações, como fórmulas, gráficos e variações, por meio do estudo de domínio, imagem e taxa de variação média. Agora, chegou a hora de refletir sobre seus conhecimentos! Como estratégia, sugerimos que você faça uma autoavaliação, revise conceitos e sintetize o que foi estudado. Para isso, resolva as questões propostas.

1. Você conhecia algum dos conteúdos estudados neste capítulo? Cite-os. 1. Resposta pessoal. Sugestões de resposta: Conceito de função; domínio e imagem de uma função; representação de funções por meio de fórmulas matemáticas; interpretação de gráficos de funções; taxa de variação média de uma função.

2. Faça uma lista com os principais conteúdos estudados neste capítulo. Você teve dificuldade em algum deles? Não recorda algum desses conceitos? Ficou com dúvidas? Reflita sobre esses questionamentos e, se necessário, retome o que foi estudado. Resposta pessoal. Nesse momento, o estudante deverá refletir ou reconhecer se houve dificuldade em entender ou aplicar algum desses conceitos. Se surgirem dúvidas, é útil revisar os exemplos e exercícios fornecidos no capítulo.

3. Escreva a lei de formação de uma função qualquer. Depois, identifique a variável dependente e a variável independente dessa função. Resposta pessoal. Sugestão de resposta: Considere a lei de formação $f(x) = 2x + 3$. Nessa função, a variável $f(x)$ representa a variável dependente da função e a variável x, a variável independente.

4. Entre as situações apresentadas nos itens, cite quais delas podem ser representadas por uma função. Depois, justifique suas respostas. Resposta: **a**, **b**, **d**, **g**, **h**. Respostas no final do **Livro do Estudante**.

a) A velocidade de um automóvel em relação ao tempo.

b) O volume de um cubo em relação à medida de sua aresta.

c) O nome de uma pessoa em relação à sua cor favorita.

d) O preço de determinado produto em relação ao lucro máximo obtido pela sua venda.

e) A medida da temperatura em determinado dia, em relação aos dias de certo mês.

f) A quantidade de vogais de uma palavra em relação à sua quantidade de caracteres.

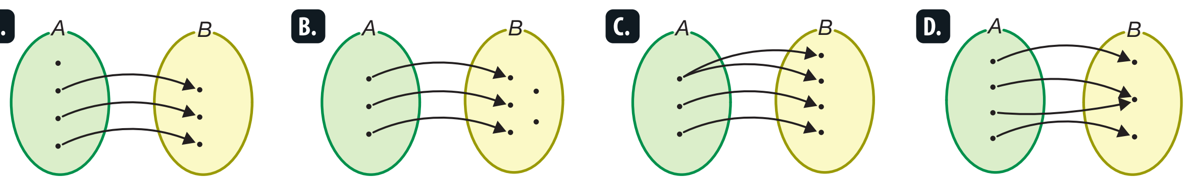
g) Determinada hora do dia em relação à medida da temperatura.

h) O consumo de combustível de um automóvel em relação à distância percorrida.

5. Escreva um fluxograma que permita determinar se uma fórmula representa ou não uma função. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

6. Analise cada diagrama e identifique quais deles representam uma função de A em B. Em seguida, justifique sua resposta. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

A. **B.** **C.** **D.**

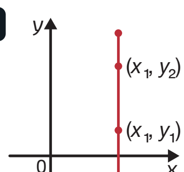


7. Explique a diferença entre a imagem de uma função e o contradomínio dessa mesma função.

8. Na função f, definida por $f(x) = \frac{1}{x}$, qualquer valor pode ser atribuído a x? Explique e dê exemplos que justifiquem sua resposta. Possível resposta: Não, pois, quando $x = 0$, a função não está definida. Portanto, f pode assumir todos os números reais, exceto zero.

9. Por que os gráficos a seguir não podem representar uma função?

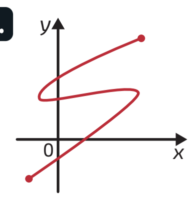
A.



9. A. Sugestão de resposta: Há retas paralelas ao eixo y cortando o gráfico em mais de um ponto distinto.

9. B. Sugestão de resposta: Qualquer que seja a reta traçada paralelamente ao eixo y, ela cortará o gráfico em pelo menos dois pontos distintos.

B.



10. Resposta pessoal. Antes de os estudantes elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos nas seções **Exercícios e problemas** deste capítulo e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

10. Escolha um dos conteúdos estudados neste capítulo e elabore um problema envolvendo-o. Depois, troque com um colega para que ele o resolva. Por fim, verifique se a resposta obtida está correta.

11. Faça uma síntese do que foi estudado neste capítulo. Para isso, use desenhos e dê exemplos. Resposta pessoal. Comentários no **Suplemento para o professor**.

7. Resposta pessoal. Para explicar essa diferença, o estudante poderá responder que a imagem de uma função é o conjunto de todos os valores de y que a função pode produzir quando são substituídos diferentes valores em seu domínio.

CAPÍTULO 4

FUNÇÃO AFIM E FUNÇÃO QUADRÁTICA

NINA VETER/SHUTTERSTOCK

Lâmpadas de LED acesas.

3. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes citem atitudes como: escolher aparelhos mais eficientes, reduzir o tempo de uso do chuveiro elétrico, aproveitar a iluminação natural, reduzir o uso de ferro elétrico, não deixar aparelhos ligados e lâmpadas acesas se não houver ninguém usando.

A lâmpada incandescente foi o primeiro dispositivo que, ainda no início do século XIX, utilizou a eletricidade para iluminação por meio de um filamento de metal, o qual se aquecia até emitir luz, tornando as atividades cotidianas mais práticas. No século XX, surgiram as lâmpadas fluorescentes, que utilizam um gás dentro do tubo para emitir luz ultravioleta, popularizando-se no final da década de 1990 por serem mais eficientes e duráveis. No início do século XXI, foram desenvolvidas as lâmpadas de LED (do inglês, Diodo Emissor de Luz), que por meio de um material **semicondutor** emitem luz quando a corrente elétrica passa por ele. Elas são mais eficientes, duráveis e sustentáveis que suas antecessoras.

Para demonstrar que o consumo em **watts** (W) de uma lâmpada não está diretamente relacionado à sua capacidade de iluminação, considere um fluxo luminoso médio de 850 **lúmens** para os três tipos de lâmpadas. Uma lâmpada incandescente consome 60 W por hora e tem uma vida útil média de 1 000 horas, enquanto uma lâmpada fluorescente equivalente consome 15 W por hora e tem uma vida útil média de 9 000 horas. A campeã de eficiência é a lâmpada de LED equivalente, que consome apenas 9 W por hora, cuja vida útil pode ultrapassar 50 000 horas.

Para promover a adoção das lâmpadas de LED, a fabricação, importação, comercialização e o uso de lâmpadas incandescentes foram proibidos no Brasil. As lâmpadas fluorescentes, por conterem mercúrio, também estão sendo proibidas globalmente devido a um tratado internacional.

Neste capítulo, você vai estudar:

- definição de função afim;
- gráfico de uma função afim;
- zero de uma função afim;
- função afim crescente e função afim decrescente;
- estudo do sinal de uma função afim;
- proporcionalidade e função linear;
- modelo de regressão linear;
- inequação do 1º grau;
- definição de função quadrática;
- gráfico de uma função quadrática;
- coeficientes de uma função quadrática;
- zeros de uma função quadrática;
- vértice de uma parábola;
- valor máximo ou valor mínimo de uma função quadrática;
- estudo do sinal de uma função quadrática;
- inequação do 2º grau.

Semicondutor: tipo de material que permite uma condutividade elétrica de forma controlada e eficiente.

Watts: unidade de medida de potência que indica a quantidade de energia que um aparelho elétrico consome ou produz.

Lúmens: unidade de medida da intensidade luminosa emitida por uma fonte de luz e percebida pelo olho humano.

1. Sugestão de resposta: Incandescente, pois, se comparada às fluorescentes e às de LED equivalentes, ela consome mais energia elétrica, além de ter menor durabilidade.

Professor, professora: Oriente os estudantes a escrever as respostas no caderno.

1. Qual tipo de lâmpada é a menos eficiente? Justifique sua resposta.

2. Considerando que uma lâmpada, de cada tipo exemplificado no texto, ficará acesa 8 horas por dia durante 30 dias, calcule o consumo em watts, para esse período. Nessas condições, a lâmpada incandescente poderia durar mais de 1 ano? E a lâmpada de LED, poderia durar mais de 10 anos? Resposta: Incandescente de 60 W: 14 400 W; fluorescente de 15 W: 3 600 W; LED de 9 W: 2 160 W. Não. Sim.

3. Em sua opinião, além do uso de lâmpadas mais econômicas, quais atitudes podem ser tomadas em casa para reduzir o consumo mensal de energia elétrica? Converse com o professor e os colegas.

Função afim

Em certo sítio, para abastecer o reservatório de água, é utilizada uma bomba-d'água com capacidade para bombear 15 L por minuto. Essa bomba é ligada automaticamente quando o reservatório está com 250 L de água, sendo desligada ao enchê-lo.

Com essas informações, podemos escrever uma fórmula que permite calcular a quantidade de água contida no reservatório em função do tempo em que a bomba permanece ligada, considerando que não haja consumo de água durante esse período.

Para isso, representamos por y a quantidade de litros de água no reservatório, enquanto a bomba permanece ligada, e por x o tempo, em minutos, que a bomba permanece ligada. Assim:

$$y = 15x + 250$$

Utilizando essa fórmula, vamos calcular, por exemplo, a quantidade de água no reservatório 25 minutos após a bomba entrar em funcionamento, ou seja, o valor de y para $x = 25$.

$$y = 15x + 250 \Rightarrow y = 15 \cdot 25 + 250 = 625$$

Portanto, após 25 minutos de funcionamento da bomba, o reservatório estará com 625 L de água.

A fórmula $y = 15x + 250$ é um exemplo de **lei de formação** de função afim.

Professor, professora: Informe aos estudantes que, ao associar as grandezas tempo e consumo de energia elétrica de cada modelo de lâmpada na questão **2** da página anterior, eles utilizaram, de maneira informal, uma função afim, mais especificamente uma função linear, assuntos que estudaremos nesta página e nas páginas seguintes, bem como suas principais características algébricas e gráficas.

Questão A. Em seu caderno, registre a lei de formação de uma função que expresse o consumo de uma lâmpada em watts (W) em relação ao tempo t, em horas, que ela permanece acesa, caso ela seja:

- incandescente. Resposta: $i(t) = 60t$, em que $i(t)$ indica o consumo da lâmpada em watts.
- fluorescente. Resposta: $f(t) = 15t$, em que $f(t)$ indica o consumo da lâmpada em watts.
- LED. Resposta: $l(t) = 9t$, em que $l(t)$ indica o consumo da lâmpada em watts.

Uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que a todo número $x \in \mathbb{R}$ associa o número $ax + b$, com a e b reais, é chamada **função afim**.

$$x \mapsto ax + b \qquad\qquad f(x) = ax + b$$

As constantes a e b são os **coeficientes** da função.

Observação

O coeficiente b da função afim f é o valor que a função assume quando $x = 0$, ou seja, $f(0) = b$.

Na função afim, a taxa de variação é constante, portanto não depende do intervalo considerado.

Exemplo

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x - 5$. Nesse caso, $a = 1$ e $b = -5$.

De acordo com os valores dos coeficientes de uma função afim, ela pode receber uma nomenclatura especial. Uma função afim, com:

- $b = 0$, é chamada **função linear**.
- $a = 1$ e $b = 0$, é chamada **função identidade**.
- $a = 0$, é chamada **função constante**.

Considere uma função afim f. Dados os valores de $f(x_1)$ e $f(x_2)$, com $x_1 \neq x_2$, podemos determinar o coeficiente a dessa função. De fato, $f(x_1) = ax_1 + b$ e $f(x_2) = ax_2 + b$. Assim:

$$f(x_2) - f(x_1) = ax_2 + b - (ax_1 + b) \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = ax_2 - ax_1 \Rightarrow a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Observação

A expressão

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

representa a **taxa de variação** da função afim f no intervalo $[x_1, x_2]$.

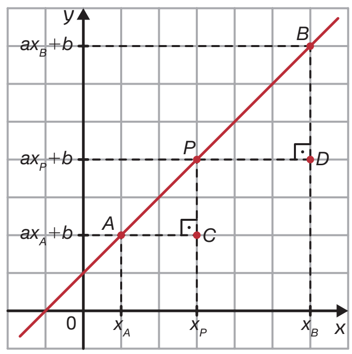
Gráfico de uma função afim

Vamos mostrar que o gráfico de uma função afim é uma reta. Para isso, considere, inicialmente, a função afim dada por $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$. Vamos mostrar que três pontos quaisquer $A(x_A, f(x_A))$, $B(x_B, f(x_B))$ e $P(x_P, f(x_P))$ do gráfico de f pertencem a uma mesma reta. No plano cartesiano, temos:

Observação

Indicamos o comprimento do segmento $\overline{AB}$ por AB.

Como são necessários apenas dois pontos para determinarmos uma reta, podemos esboçar o gráfico de uma função afim conhecendo as coordenadas de apenas dois de seus pontos.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Em relação ao comprimento dos catetos dos triângulos ACP e PDB, indicados no gráfico, podemos escrever a igualdade:

$$\frac{PC}{BD} = \frac{(ax_P + b) - (ax_A + b)}{(ax_B + b) - (ax_P + b)} = \frac{ax_P - ax_A}{ax_B - ax_P} = \frac{a(x_P - x_A)}{a(x_B - x_P)} = \frac{x_P - x_A}{x_B - x_P} = \frac{CA}{DP}$$

Por essa igualdade, os triângulos têm lados proporcionais, além de terem um ângulo reto. Portanto, pelo caso de semelhança LAL, os triângulos ACP e PDB são semelhantes. Logo, seus ângulos correspondentes têm mesma medida. Assim, os ângulos $C\hat{A}P$ e $D\hat{P}B$ são congruentes.

Portanto, os pontos A, B e P, pertencentes ao gráfico da função f, são colineares.

No caso em que $a = 0$, a função será constante e os pontos A, B e P serão colineares, pois:

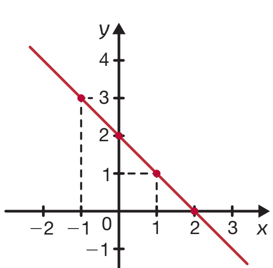
$$f(x_A) = f(x_P) = f(x_B)$$

Desse modo, mostramos que o gráfico de uma função afim é uma reta. Reciprocamente, pode-se demonstrar que toda reta não vertical é o gráfico de uma função afim.

Zero de uma função afim

Aprendemos anteriormente que o zero de uma função f é todo valor x de seu domínio tal que $f(x) = 0$ e que, graficamente, os zeros correspondem às abscissas dos pontos em que o gráfico intersecta o eixo x. Caso uma função afim tenha zero, podemos obtê-lo resolvendo a equação $ax + b = 0$.

Analise o gráfico da função afim definida por $f(x) = -x + 2$.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

O gráfico da função f intersecta o eixo x no ponto de coordenadas $(2, 0)$, ou seja, para $x = 2$ temos $f(x) = 0$. Nesse caso, a abscissa 2 é o **zero da função**.

Outra maneira de obtermos o zero dessa função é algebricamente. Para isso, resolvemos a equação $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0 \Rightarrow -x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

Portanto, o zero da função definida por $f(x) = -x + 2$ é 2.

Exercícios e problemas resolvidos

R1. Qual é a lei de formação da função afim f, tal que:

a) $f(-1) = 2$ e $f(1) = 0$?

b) $f(2) = 1$ e $f(-1) = -5$?

Resolução

a) Inicialmente, determinamos o coeficiente a. Para isso, fazemos:

$$a = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} \Rightarrow a = \frac{0 - 2}{2} = -1$$

Em seguida, calculamos o coeficiente b. Sabemos que a função f é do tipo $f(x) = ax + b$.
Assim:

$$f(1) = 0 \Rightarrow (-1) \cdot (1) + b = 0 \Rightarrow b = 1$$

Portanto, a lei de formação da função f é $f(x) = -x + 1$.

b) Determinamos primeiro o coeficiente a. Para isso, fazemos:

$$a = \frac{f(-1) - f(2)}{-1 - 2} \Rightarrow a = \frac{-5 - 1}{-3} = 2$$

Em seguida, calculamos o coeficiente b. Sabemos que a função f é do tipo $f(x) = ax + b$.
Assim:

$$f(2) = 1 \Rightarrow (2) \cdot (2) + b = 1 \Rightarrow b = -3$$

Portanto, a lei de formação da função f é $f(x) = 2x - 3$.

R2. Escreva um algoritmo que possibilite determinar os zeros de uma função afim, caso tenha, dada sua lei de formação.

Resolução

Antes de apresentarmos os passos para construir um algoritmo, vamos relembrar sua definição.

> Um **algoritmo** é uma sequência de instruções ordenadas de forma lógica para resolver determinada tarefa ou um problema.

Para construir um algoritmo, inicialmente, devemos ler o enunciado do problema, compreendendo-o e destacando os pontos mais importantes. Depois, devemos responder às seguintes questões.

1. Quais são os **dados de entrada**, ou seja, quais são os dados fornecidos no problema?
Dados de entrada: lei de formação da função e, consequentemente, os coeficientes da função.

2. Quais são os **dados de saída**, ou seja, quais são os dados gerados após a execução de todas as etapas do algoritmo?
Dados de saída: caso existam, os zeros da função.

3. Conhecendo os dados de entrada e saída, quais **procedimentos** devem ser realizados?
Para determinar o zero da função afim, inicialmente, analisamos seus coeficientes.

- Se $a = 0$ e $b \neq 0$, então a função não tem zeros.
- Se $a \neq 0$, então o zero da função é $-\frac{b}{a}$.
- Se $a = 0$ e $b = 0$, então $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim, os zeros da função são todos os $x \in \mathbb{R}$.

Por fim, escrevemos o algoritmo.

Início

1. Leia o coeficiente a.

2. Leia o coeficiente b.

3. O coeficiente a é diferente de zero? Se sim, efetue $-\frac{b}{a}$. Caso contrário $(a = 0)$, o coeficiente b é diferente de zero? Se sim, a função não tem zeros. Caso contrário $(b = 0)$, os zeros da função são todos os $x \in \mathbb{R}$.

Fim

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

1. Classifique cada função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cuja lei de formação é apresentada a seguir, em afim, linear, constante ou identidade.

a) $f(x) = \frac{3}{2}x - 5$ Resposta: Função afim.

b) $f(x) = x$ Resposta: Função afim, linear e identidade.

c) $f(x) = -3x$ Resposta: Função afim e linear.

d) $f(x) = -5$ Resposta: Função afim e constante.

e) $f(x) = 15 - \frac{4}{5}x$ Resposta: Função afim.

f) $f(x) = -x$ Resposta: Função afim e linear.

2. A seguir, está indicado o perímetro, em centímetros, de um pentágono regular em função do comprimento de seu lado.

Perímetro de um pentágono regular em função do comprimento de seu lado

Comprimento do lado do pentágono (cm)	Perímetro (cm)
2	10
4	20
5,5	27,5
8	40

a) Dado um pentágono regular de lado 13 cm, determine seu perímetro. Resposta: 65 cm

b) Escreva uma fórmula que permita calcular o perímetro p do pentágono regular em função do comprimento c do seu lado. Resposta: $p(c) = 5c$

3. O gafanhoto-do-deserto é um inseto capaz de comer cerca de 1,5 grama de folhas por dia. Se considerarmos que algumas nuvens desses gafanhotos podem conter cerca de 50 milhões de indivíduos, saberemos que a devastação alcançará grandes proporções.

Gafanhoto-do-deserto.

DAVEM HUNT PHOTOGRAPHY/SHUTTERSTOCK

Fonte de pesquisa: ANIMAIS do deserto II. *Enciclopédia da vida selvagem Larousse*. Rio de Janeiro: Altaya, 1997.

a) Escreva a lei de formação de uma função que relacione a quantidade q de gafanhotos com a massa m, em gramas, de folhas que eles são capazes de comer por dia. Resposta: $m(q) = 1{,}5q$

b) Quantas toneladas de folhas uma nuvem com 50 milhões de gafanhotos-do-deserto pode comer em um único dia? Resposta: 75 t

4. Esboce no caderno o gráfico da função cuja lei de formação foi obtida no item **a** da tarefa anterior.
Resposta no final do **Livro do Estudante**.

5. Escreva a lei de formação de uma função afim sabendo que: 5. a) Resposta: $f(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$

a) $f(2) = 1$ e $a = \frac{1}{4}$.

b) $f(3) = 11$ e $b = 5$.
Resposta: $f(x) = 2x + 5$

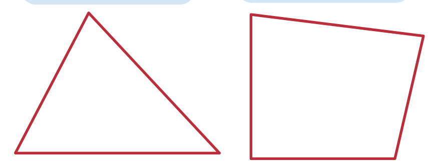
c) $f(1) = 3$ e $f(3) = 5$.
Resposta: $f(x) = x + 2$

6. A seguir estão indicados o número n de lados e a soma s das medidas dos ângulos internos de alguns polígonos em graus.

triângulo n: 3; s: 180°

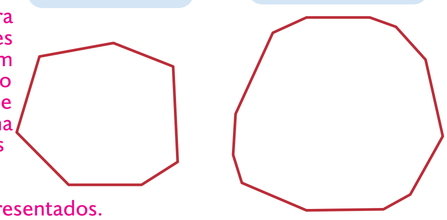
quadrilátero n: 4; s: 360°

pentágono n: 5; s: 540°



heptágono n: 7; s: 900°

dodecágono n: 12; s: 1800°



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Professor, professora: Para auxiliar na resolução da tarefa **6**, sugira aos estudantes que organizem em um quadro o número n de lados e a soma s das medidas dos ângulos internos dos polígonos apresentados.

a) Escreva uma fórmula que relacione a soma s das medidas dos ângulos internos de um polígono, em graus, em função do número n de lados.
Resposta: $s(n) = 180n - 360$

b) De quantos graus é a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono de 6 lados?
Resposta: 720°

c) Quantos lados tem um polígono cuja soma das medidas dos ângulos internos é igual a 2 340°?
Resposta: 15 lados.

7. Em cada um dos quadros estão apresentadas as coordenadas de alguns pontos.

Quadro A

x	y
1	3
2	4
3	5
4	6

Quadro B

x	y
1	1
2	8
3	27
4	64

a) Represente no plano cartesiano os pontos cujas coordenadas estão nos quadros **A** e **B**. Qual desses quadros apresenta pontos que pertencem ao gráfico de uma mesma função afim?
Respostas no final do **Livro do Estudante**.

b) Identifique padrões e, para cada quadro, escreva uma expressão algébrica que relacione os números x e y.
Resposta: Quadro **A**: $y = x + 2$; quadro **B**: $y = x^3$.

Professor, professora: Ao resolver a tarefa **11**, se julgar necessário, explique aos estudantes que obtemos a velocidade média dividindo o número que representa a medida da distância percorrida (650 − 20) pelo número que representa o intervalo de tempo gasto nesse percurso (7 − 0).

8. Esboce o gráfico das funções cujas leis de formação estão apresentadas. Em seguida, determine o zero dessas funções. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

a) $f(x) = 3x - 12$

b) $f(x) = -x + 9$

c) $f(x) = 2x + \frac{3}{4}$

d) $f(x) = -\frac{1}{5}x - 6$

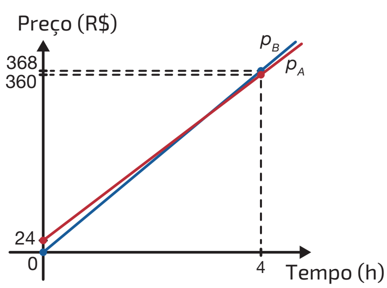
9. Duas das escalas de temperatura mais utilizadas são a Celsius e a Fahrenheit. Para convertermos uma temperatura F, medida em Fahrenheit, em uma C, medida em Celsius, utilizamos a função dada por $C(F) = \frac{5}{9}(F - 32)$.

a) Quando um termômetro registra 50 °F, a mesma temperatura corresponde a quantos graus Celsius? Resposta: 10 °C

b) Qual é o zero dessa função? Nesse contexto, o que o zero representa? Resposta: F = 32; A medida, em graus Fahrenheit, correspondente a 0 °C.

c) Esboce o gráfico dessa função.
Resposta no final do **Livro do Estudante**.

10. Os gráficos representam o preço p cobrado pelo aluguel de uma pista de boliche nos estabelecimentos A e B, em função do tempo t de jogo.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

a) Escreva a lei de formação das funções representadas pelos gráficos. Resposta: $p_A(t) = 84t + 24$ e $p_B(t) = 92t$

b) Depois de quantas horas de jogo é mais econômico alugar uma pista no estabelecimento A?
Resposta: Depois de 3 h de jogo.

11. Um automóvel movimenta-se com velocidade constante em uma estrada. A seguir, é possível verificar sua posição em determinados instantes.

Posição do automóvel em determinado tempo

Tempo (h)	0	3	5	7
Posição (km)	20	290	470	650

a) Qual é, no intervalo de tempo apresentado, a velocidade média do automóvel?
Resposta: 90 km/h

b) Esboce o gráfico da função que expresse a posição do automóvel S, em quilômetros, em relação ao tempo t, em horas. Esse gráfico corresponde a uma função afim? Justifique sua resposta.
Resposta no final do **Livro do Estudante**.

c) Escreva a lei de formação da função cujo gráfico você esboçou no item **b**. Em seguida, determine o domínio e o conjunto imagem dessa função.

d) Após 10 h, qual é a posição desse automóvel nessa estrada? Resposta: Quilômetro 920.

11. c) Resposta: $S(t) = 20 + 90t$; $D(S) = \mathbb{R}_+$; $Im(S) = [20, +\infty[$

12. O peso de um corpo é obtido por meio do produto da sua massa e da aceleração da gravidade que atua sobre ele, ou seja, $P = m \cdot g$, em que m é a massa do corpo (em kg), g é a aceleração da gravidade (em m/s²) e P é o peso, medido em newtons (N). Na Terra, a aceleração da gravidade é aproximadamente 9,8 m/s², e na Lua essa aceleração é aproximadamente 1,6 m/s².

a) Escreva a lei de formação de uma função T que expresse o peso de um corpo na Terra, de acordo com sua massa m, e de uma função L que expresse o peso de um corpo na Lua, de acordo com sua massa n. Resposta: $T(m) = 9{,}8m$; $L(n) = 1{,}6n$

b) Determine, em newtons, o peso de uma pessoa de 75 kg, se ela estivesse sobre a superfície da:

- Lua. Resposta: 120 N
- Terra. Resposta: 735 N

c) Quantos quilogramas tem uma pessoa que pesa, na Lua, 91,2 N? Resposta: 57 kg

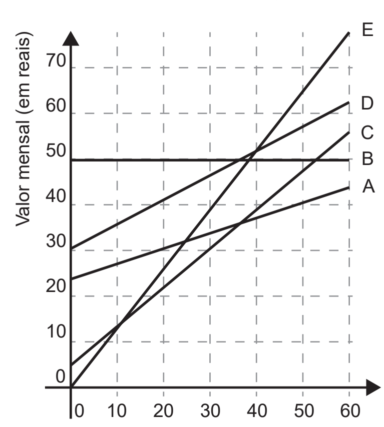
d) Calcule, em newtons, quanto pesa na Terra uma pessoa que, na Lua, tem 96 N. Resposta: 588 N

e) Esboce, em um mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções cuja lei de formação você escreveu no item **a**. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

PARA EXPANDIR

Para fazer uma simulação voltada à gravidade, acesse o *site* do Laboratório Virtual de Física da Universidade Federal do Ceará. Disponível em: https://www.laboratoriovirtual.fisica.ufc.br/queda-livre. Acesso em: 13 jun. 2024.

13. (Enem, 2014) No Brasil há várias operadoras e planos de telefonia celular. Uma pessoa recebeu 5 propostas (**A**, **B**, **C**, **D** e **E**) de planos telefônicos. O valor mensal de cada plano está em função do tempo mensal das chamadas, conforme o gráfico.



OHANNA SCHMITT/ARQUIVO DA EDITORA/ENEM 2014

Essa pessoa pretende gastar exatamente R$ 30,00 por mês com telefone. Dos planos telefônicos apresentados, qual é o mais vantajoso, em tempo de chamada, para o gasto previsto para essa pessoa?

a) A b) B c) C d) D e) E

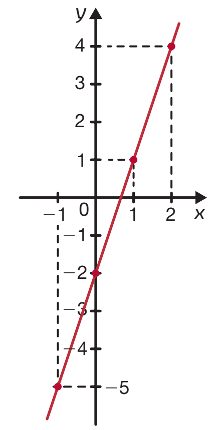
Resposta: Alternativa **c**.

Função afim crescente e função afim decrescente

Aprendemos anteriormente que, em certo intervalo de seu domínio, uma função é: crescente se, e somente se, ao aumentarmos os valores de x pertencentes a esse intervalo, os valores correspondentes de y também aumentarem; e decrescente se, e somente se, ao aumentarmos os valores de x pertencentes a esse intervalo, os valores correspondentes de y diminuírem.

Professor, professora: Se julgar necessário, peça aos estudantes que revisem o conceito de função crescente e função decrescente, apresentado anteriormente.

Analise o gráfico da função afim dada por $f(x) = 3x - 2$.

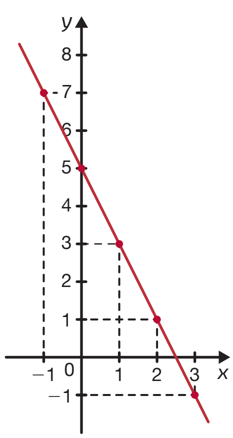


Essa função é crescente, pois, à medida que aumentamos os valores de x, os valores correspondentes de y também aumentam, ou seja, para dois valores quaisquer distintos, x_1 e x_2, pertencentes ao domínio de f, com $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) < f(x_2)$. Além disso, verificamos também que a taxa de variação de f é maior do que zero $(a > 0)$. No caso de uma função afim dada por $f(x) = ax + b$, se $a > 0$ e $x_1 < x_2$, então:

$$\boxed{x_1 < x_2} \Rightarrow ax_1 < ax_2 \Rightarrow ax_1 + b < ax_2 + b \Rightarrow \boxed{f(x_1) < f(x_2)}$$

Em uma função afim, se a taxa de variação é maior do que zero $(a > 0)$, a função é **crescente**.

Analise o gráfico da função afim dada por $f(x) = -2x + 5$.



Essa função é decrescente, pois, à medida que aumentamos os valores de x, os valores correspondentes de y diminuem, ou seja, para dois valores quaisquer distintos, x_1 e x_2, pertencentes ao domínio de f, com $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) > f(x_2)$.

Analise também que a taxa de variação de f é menor do que zero $(a < 0)$. No caso de uma função afim dada por $f(x) = ax + b$, se $a < 0$ e $x_1 < x_2$, então:

$$\boxed{x_1 < x_2} \Rightarrow ax_1 > ax_2 \Rightarrow ax_1 + b > ax_2 + b \Rightarrow \boxed{f(x_1) > f(x_2)}$$

Observação

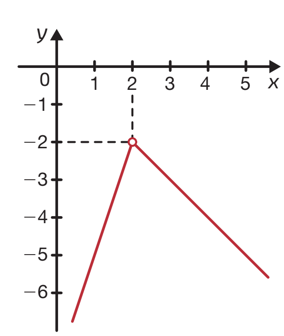
Quando a taxa de variação da função afim for igual a zero $(a = 0)$, a função será constante.

Em uma função afim, se a taxa de variação é menor do que zero $(a < 0)$, a função é **decrescente**.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios e problemas resolvidos

R3. Dada a função definida por $f(x) = \begin{cases} 3x - 8, \text{ se } x < 2 \\ -x, \text{ se } x > 2 \end{cases}$, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, determine os intervalos de crescimento e decrescimento de f.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Resolução

Professor, professora: Se julgar conveniente, relembre aos estudantes que a "bolinha vazia", no gráfico, representa o ponto para o qual a função não está definida, ou seja, f não está definida para $x = 2$.

Temos duas condições:

- Se $x < 2$, então $f(x) = 3x - 8$. Nesse caso, a taxa de variação de f é positiva $(a > 0)$. Logo, f é crescente.
- Se $x > 2$, então $f(x) = -x$. Nesse caso, a taxa de variação de f é negativa $(a < 0)$. Logo, f é decrescente.

Portanto, f é crescente para $x < 2$ e decrescente para $x > 2$.

Resolvendo por etapas

O Regime Geral de Previdência Social (RGPS) é um programa de seguro público que visa assegurar aos trabalhadores contribuintes os benefícios da aposentadoria, seja por invalidez, seja por tempo de contribuição. No Brasil, de 1º de maio de 2023 a 31 de dezembro de 2023, o valor da contribuição mensal era calculado da seguinte maneira.

- Salário até R$ 1 320,00: 7,5% do salário.
- Salário maior do que R$ 1 320,00 e menor ou igual a R$ 2 571,29: R$ 99,00 mais 9% sobre a quantia excedente a R$ 1 320,00.
- Salário maior do que R$ 2 571,29 e menor ou igual a R$ 3 856,94: R$ 211,61 mais 12% sobre a quantia excedente a R$ 2 571,29.
- Salário maior do que R$ 3 856,94 e menor ou igual a R$ 7 507,49: R$ 365,89 mais 14% sobre a quantia excedente a R$ 3 856,94.
- Salário maior do que R$ 7 507,49: R$ 876,97.

Podemos indicar o valor da contribuição previdenciária mensal em função do salário bruto x, por uma função cuja lei de formação é:

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}075x, \text{ se } 0 < x \leq 1\,320 \\ 99{,}00 + 0{,}09(x - 1\,320), \text{ se } 1\,320 < x \leq 2\,571{,}29 \\ 211{,}61 + 0{,}12(x - 2\,571{,}29), \text{ se } 2\,571{,}29 < x \leq 3\,856{,}94 \\ 365{,}89 + 0{,}14(x - 3\,856{,}94), \text{ se } 3\,856{,}94 < x \leq 7\,507{,}49 \\ 876{,}97 \text{ se } x > 7\,507{,}49 \end{cases}$$

Esboce o gráfico da função f.

A. Compreendendo o problema

1. O que se pede no problema?
O esboço do gráfico da função f.

2. Quais são os dados apresentados no problema?
A maneira como é calculado, no Brasil, o valor da contribuição mensal de 1º de maio de 2023 a 31 de dezembro de 2023 e a lei de formação da função que representa o valor da contribuição mensal de acordo com o salário bruto, nesse período.

B. Organizando as ideias e elaborando um plano

1. Registrando um possível plano.
Inicialmente, analisamos cada uma das sentenças que compõe a função f. Em seguida, esboçamos o gráfico de cada uma dessas sentenças no intervalo correspondente.

2. Escolhendo as notações.
x: salário bruto.
$f(x)$: valor da contribuição previdenciária mensal em função do salário bruto.

C. Executando o plano

Passo 1

Ao executar o plano, verificamos algumas informações.

1. No intervalo $]0, 1\,320]$, a função é definida por $f(x) = 0{,}075x$, que é a lei de formação de uma função linear. Consequentemente, nesse intervalo, a função é representada graficamente por um segmento de reta.

2. No intervalo $]1\,320; 2\,571{,}29]$, a função é definida por $f(x) = 99{,}00 + 0{,}09(x - 1\,320)$.
Desse modo:

$$f(x) = 99{,}00 + 0{,}09x - 0{,}09 \cdot 1\,320 \Rightarrow \underbrace{f(x) = 0{,}09x - 19{,}8}_{\text{lei de formação de uma função afim}}$$

Nesse intervalo, a função é representada graficamente por um segmento de reta.

3. No intervalo $]2\,571{,}29; 3\,856{,}94]$, a função é definida por $f(x) = 211{,}61 + 0{,}12(x - 2\,571{,}29)$.
Desse modo:

$$f(x) = 211{,}61 + 0{,}12x - 0{,}12 \cdot 2\,571{,}29 \Rightarrow \underbrace{f(x) = 0{,}12x - 96{,}945}_{\text{lei de formação de uma função afim}}$$

Nesse intervalo, a função é representada graficamente por um segmento de reta.

4. No intervalo $]3\,856{,}94; 7\,507{,}49]$, a função é definida por $f(x) = 365{,}89 + 0{,}14(x - 3\,856{,}94)$.
Desse modo:

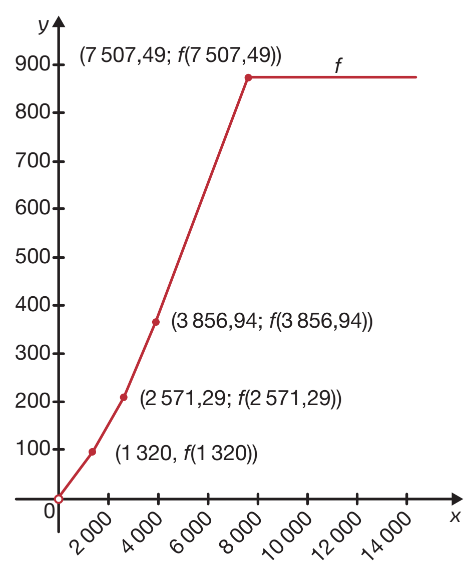
$$f(x) = 365{,}89 + 0{,}14x - 0{,}14 \cdot 3\,856{,}94 \Rightarrow \underbrace{f(x) = 0{,}14x - 174{,}08}_{\text{lei de formação de uma função afim}}$$

Nesse intervalo, a função é representada graficamente por um segmento de reta.

5. Se $x > 7\,5047{,}49$, a função é definida por $f(x) = 876{,}97$, que é a lei de formação de uma função constante. Consequentemente, nesse intervalo, a função é representada graficamente por uma semirreta paralela ao eixo x.

Passo 2

De acordo com as sentenças e os intervalos correspondentes, obtemos o seguinte gráfico.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Dica

Lembre-se de que para traçar uma reta basta determinar as coordenadas de dois de seus pontos.

Observação

Verifique se é possível utilizar, com algumas adequações, o plano apresentado na seção **Resolvendo por etapas** para obter a solução de algumas tarefas semelhantes propostas na seção **Exercícios e problemas** deste tópico.

Agora é você quem resolve!

Resposta no final do **Livro do Estudante**.

1. Leia o problema.

   Faça uma pesquisa a fim de determinar como é realizado o cálculo e quais são as alíquotas da contribuição vigente no ano atual. Em seguida, determine a função que representa o valor da contribuição previdenciária mensal em relação ao salário bruto x no período em questão. Por fim, esboce o gráfico dessa função e determine seu domínio, o conjunto imagem e os intervalos em que ela é crescente.

2. É possível resolver o problema proposto no item **1** utilizando, com algumas adequações, o plano apresentado nesta seção? Qual é a resposta desse problema?

Professor, professora: Oriente os estudantes a consultar mais informações sobre os **Objetivos de Desenvolvimento Sustentável** (ODS) no início deste volume.

Anote as respostas no caderno.

14. Classifique cada função afim $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cuja lei de formação é apresentada a seguir, em crescente ou decrescente.

a) $f(x) = 3x - 5$ Resposta: Crescente.

b) $f(x) = -\frac{4}{3}x + 4$ Resposta: Decrescente.

c) $f(x) = -2x + 1$ Resposta: Decrescente.

d) $f(x) = 16x - 8$ Resposta: Crescente.

15. Marcos vai usar suas economias para pagar a mensalidade da faculdade. A função que representa a quantia em dinheiro das economias de Marcos, após iniciar a faculdade, em função do tempo, em meses, é uma função crescente ou decrescente? Resposta: Decrescente.

16. Determinado restaurante *self-service* cobra R$ 36,00 por quilograma de alimento. No entanto, para refeições com mais de 700 g de alimento, o preço é fixado em R$ 25,60.

a) Quanto custará um prato com 730 g de alimento nesse restaurante? E com 300 g? Respostas: R$ 25,60; R$ 10,80.

b) Determine a lei de formação da função que permite calcular o preço *p* do prato, em reais, em função da massa *m*, em quilogramas, de alimento. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

c) Esboce o gráfico da função e determine os intervalos em que ela é crescente, decrescente ou constante. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

17. Três bombas de água, cada uma com vazão de 3 000 L/h, retiram água de um reservatório que contém 150 mil litros.

a) Com as três bombas ligadas, quantos litros de água serão tirados do reservatório em 3 h? Resposta: 27 mil litros.

b) Escreva a lei da função que representa a quantidade *Q* de água no reservatório em função do tempo *t* em que as três bombas permanecem ligadas. Resposta: $Q(t) = 150\,000 - 9\,000t$

c) Essa função é crescente, decrescente ou constante? Resposta: Decrescente.

18. Em duas fábricas, o custo para produzir determinada peça é o mesmo, porém o custo fixo de cada uma das fábricas é diferente. Em certo mês, a fábrica **A** produziu 5 000 peças, e o custo total foi R$ 18 000,00. No mesmo período, a fábrica **B** também produziu 5 000 peças, e o custo total foi R$ 20 000,00.

a) Qual é a lei de formação da função *h* que representa a diferença, entre o custo total da fábrica **B** e o custo total da fábrica **A**, para *x* peças produzidas? Resposta: $h(x) = 2\,000$

b) Classifique a função que você escreveu em crescente, decrescente ou constante. Resposta: Constante.

19. ODS 7

No processo de industrialização da cana-de-açúcar, em que podem ser produzidos açúcar e etanol, por exemplo, gera-se um resíduo de cerca de 30% da massa em bagaço.

Uma destinação adequada para o bagaço é a geração de energia elétrica, de maneira que 1 t desse resíduo gere cerca de $\frac{100}{3}$ watts.

RICARDO TELES/PULSAR IMAGENS

Bagaço de cana-de-açúcar sendo despejado em uma esteira para servir de combustível nas fornalhas de uma usina, no município de Morro Agudo, SP, em 2021.

a) Escreva a lei de formação da função que relaciona a quantidade de watts produzida *E* com a quantidade processada de cana-de-açúcar *q*, em toneladas. Resposta: $E(q) = 10q$

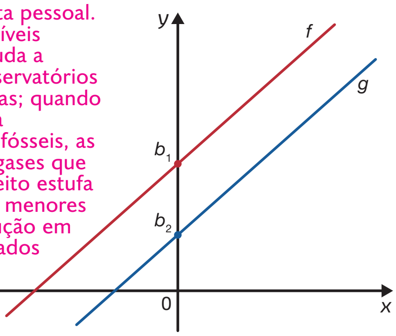
b) A lei de formação da função que você escreveu no item **a** é crescente, decrescente ou constante? Resposta: Crescente.

c) Esboce o gráfico da função cuja lei de formação você escreveu no item **a**. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

d) Junte-se a dois colegas e façam uma pesquisa sobre as vantagens da geração de energia pelo bagaço da cana-de-açúcar. Em seguida, apresentem os resultados obtidos para os colegas e o professor.

20. Considere os gráficos das funções afins *f* e *g*, definidas por $f(x) = ax + b_1$ e $g(x) = ax + b_2$. Esboce em um mesmo plano cartesiano os gráficos das funções definidas por $h(x) = f(x) - g(x)$ e $m(x) = g(x) - f(x)$. Em seguida, classifique-as em crescente, decrescente ou constante. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

19. d) Resposta pessoal. Algumas possíveis respostas: Ajuda a poupar os reservatórios de hidrelétricas; quando comparadas a combustíveis fósseis, as emissões de gases que agravam o efeito estufa são menores; menores perdas e redução em custos associados à transmissão de energia elétrica.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Estudo do sinal de uma função afim

No estudo do sinal de uma função f, determinamos os valores de x pertencentes ao domínio para os quais $f(x) = 0$, $f(x) > 0$ e $f(x) < 0$.

Vamos estudar, como exemplo, o sinal de uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x + 4$.

Inicialmente, obtemos o zero de f, ou seja, o valor de x para o qual $f(x) = 0$.

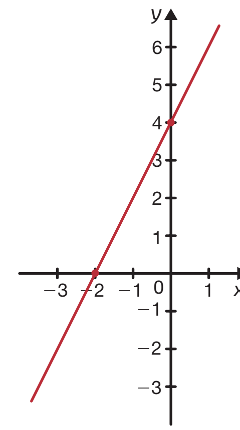
$$f(x) = 0 \Rightarrow 2x + 4 = 0 \Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow x = -2$$

Verificamos também que se $x = 0$, então:

$$f(x) = f(0) = 2 \cdot 0 + 4 \Rightarrow f(0) = 4$$

$f(x) = 2x + 4$

x	$y = f(x)$
-2	0
0	4



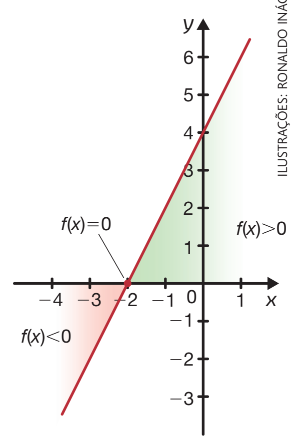
Assim, obtemos os pares ordenados $(-2, 0)$ e $(0, 4)$, que servirão para esboçar o gráfico de f.

Observando o gráfico, verificamos que essa função é crescente. Podemos verificar também que a função:

- se anula, ou seja, $f(x) = 0$, quando $x = -2$.
- é positiva, ou seja, $f(x) > 0$, quando $x > -2$.
- é negativa, ou seja, $f(x) < 0$, quando $x < -2$.

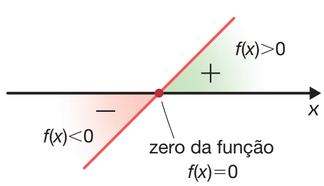
Observação

Também podemos afirmar que essa função é crescente porque o coeficiente a é maior do que zero.

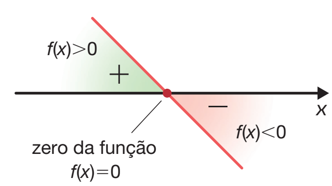


A função afim dada por $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, pode ser crescente ou decrescente.

Quando f é crescente $(a > 0)$:



Quando f é decrescente $(a < 0)$:



Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

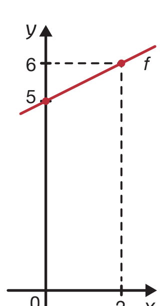
21. Estude o sinal da função definida por: Respostas no final do **Livro do Estudante**.

a) $f(x) = 3x + 6$.
b) $f(x) = -x - 5$.
c) $f(x) = \dfrac{x}{2} - 3$.
d) $f(x) = -3x + 7$.

22. Dadas as funções f e g definidas por $f(x) = -3x + 15$ e $g(x) = 4x - 8$, determine os valores de x em que ambas assumem valores positivos. Resposta: $x \in \,]2, 5[$

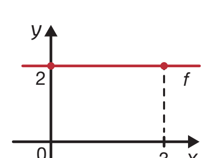
23. Realize o estudo do sinal da função, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, representada em cada gráfico.

A.



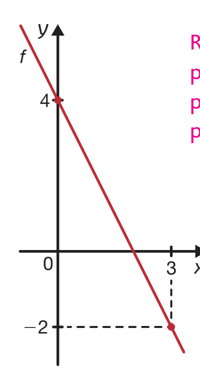
Resposta: $f(x) = 0$ para $x = -10$; $f(x) > 0$ para $x > -10$ e $f(x) < 0$ para $x < -10$.

B.



Resposta: $f(x) > 0$ para todo x real.

C.



Resposta: $f(x) = 0$ para $x = 2$; $f(x) > 0$ para $x < 2$ e $f(x) < 0$ para $x > 2$.

24. Um estacionamento oferece duas opções de preço para seus clientes. 24. c) Resposta: A opção **B** é mais vantajosa para um período menor do que 3 h e a opção **A**, para um período maior do que 3 h. As opções **A** e **B** têm o mesmo preço para 3 h.

A. R$ 6,00 fixo mais R$ 4,50 por hora.

B. R$ 6,50 por hora.

a) Escreva a lei de formação de uma função A que expresse o valor em reais a ser pago ao estacionamento em função do tempo t, medido em horas, caso um cliente decida pela opção **A**. Resposta: $A(t) = 4{,}5t + 6$

b) Escreva a lei de formação de uma função B que expresse o valor em reais a ser pago ao estacionamento em função do tempo t, medido em horas, caso um cliente decida pela opção **B**. Resposta: $B(t) = 6{,}5t$

c) Em quais intervalos de tempo cada opção é mais vantajosa?

Dica
Uma maneira de resolver o item **c** é estudar o sinal da função F definida por $F(t) = A(t) - B(t)$.

25. (OBM, 2007) As seguradoras de automóveis **A** e **B** cobram um valor anual (prêmio) mais um valor que o usuário deve pagar em caso de acidente (franquia). Jean quer fazer um seguro para seu automóvel e recebeu as seguintes propostas das seguradoras.

Seguradora **A**: prêmio anual de R$ 1500,00 e franquia de R$ 1400,00.

Seguradora **B**: prêmio anual de R$ 1700,00 e franquia de R$ 7000.

Para que valha a pena contratar a Seguradora **A**, Jean não deve se acidentar com o carro por pelo menos n anos. O valor de n é: Resposta: Alternativa **c**.

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

26. Um representante de vendas recebeu duas propostas para alteração de seu salário. 26. b) Resposta: Para vendas menores do que R$ 20000,00, a 1ª proposta é mais vantajosa; para vendas maiores do que R$ 20000,00, a 2ª proposta é mais vantajosa.

- 1ª proposta: R$ 1600,00 de salário-base mais 5% de comissão em suas vendas.
- 2ª proposta: R$ 1100,00 de salário-base mais 7,5% de comissão em suas vendas.

a) Escreva a lei de formação que relaciona o salário total S desse representante com o valor total v de suas vendas no mês, para cada proposta. Resposta: 1ª proposta: $S_1(v) = 1600 + 0{,}05v$; 2ª proposta: $S_2(v) = 1100 + 0{,}075v$.

b) Para quais valores de vendas o salário de cada proposta é mais vantajoso para o representante?

27. Para alugar um automóvel, Paulo consultou duas locadoras. Ele obteve os seguintes preços para o aluguel de um automóvel da mesma categoria.

a) Escreva a lei de formação que relaciona o preço total V a ser pago em função dos quilômetros rodados x para o automóvel de cada locadora. Resposta: Locadora **A**: $V_A(x) = 82 + 0{,}52x$; locadora **B**: $V_B(x) = 76 + 0{,}55x$.

b) Sabendo que Paulo pretende rodar cerca de 75 km, em qual das locadoras será mais vantajoso alugar o automóvel? Resposta: Locadora **B**.

c) Determine o intervalo de quilômetros rodados no qual cada locadora oferece o menor preço. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

28. Com o objetivo de arrecadar dinheiro para sua formatura, os estudantes de uma turma compraram 75 vales-*pizza*, pagando por eles R$ 1500,00. Para facilitar o troco, eles venderam cada um por um valor inteiro, em reais.

a) Qual será o lucro dos estudantes se eles venderem cada vale-*pizza* por R$ 30,00? Resposta: R$ 750,00

b) Escreva a lei de formação de uma função que expresse o lucro/prejuízo L dos estudantes em função do preço v a que eles venderam cada vale-*pizza*. Resposta: $L(v) = 75v - 1500$

c) Qual deve ser o preço mínimo de cada vale-*pizza* para que haja algum lucro, considerando que todas as *pizzas* sejam vendidas? Resposta: R$ 21,00

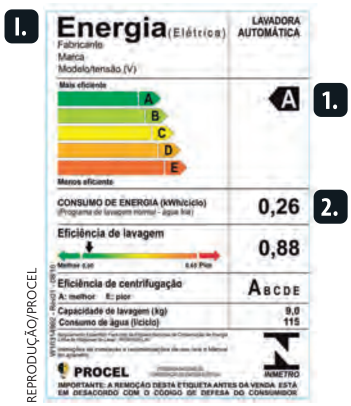
ILUSTRAÇÕES: LEONARDO GIBRAN/ARQUIVO DA EDITORA

Proporcionalidade e função linear

Uma maneira de economizar energia elétrica é optar por eletrodomésticos e equipamentos eletrônicos com baixo consumo. Nesse sentido, o consumidor pode, no momento da compra, analisar o nível de eficiência energética indicado no selo Procel.

Professor, professora: Os nomes do fabricante, da marca e do modelo/tensão que aparecem nesta página são fictícios.

Aumento aproximado de 6 vezes no destaque **I** em *zoom* da imagem.



REPRODUÇÃO/PROCEL

- Etiqueta Nacional de Conservação de Energia, do Inmetro, contendo especificações básicas obrigatórias do eletrodoméstico para informação ao consumidor.

RAF QUITERO/SHUTTERSTOCK

- Lavadora de roupas.

Aumento aproximado de 5 vezes no destaque **II** em *zoom* da imagem.

REPRODUÇÃO/PROCEL

- Selo Procel, cujo objetivo é indicar aos consumidores os produtos com os melhores níveis de eficiência energética em cada categoria.

1. A letra indica a eficiência energética do equipamento.

2. Indica o consumo de energia, em kWh/ciclo.

Certa lavadora de roupas com classificação **A** no selo Procel consome 0,4 kWh em 1 h de funcionamento, que corresponde a um ciclo de lavagem de roupas.

Note que, se dobrarmos o tempo de uso, o consumo também dobrará; se triplicarmos o tempo de uso, o consumo também triplicará; e assim por diante. Nesse caso, dizemos que as grandezas "tempo" e "consumo" são **diretamente proporcionais**. Podemos representar esse consumo com a função definida por:

$$y = 0{,}4x$$

Observação

Na igualdade apresentada, y indica o consumo total de energia elétrica, o número 0,4 indica o consumo de energia elétrica da lavadora por hora (em kWh) e x indica o tempo de uso da lavadora.

No exemplo apresentado, o consumo em quilowatt-hora (y) está em função do tempo em horas (x) de uso da lavadora.

Ao calcularmos a razão $\frac{y}{x}$ (com $x \neq 0$) para os valores correspondentes de x e y, obtemos o mesmo resultado, que denominamos **constante de proporcionalidade**.

$$\frac{0{,}4}{1} = \frac{0{,}8}{2} = \frac{1{,}2}{3} = 0{,}4$$

Neste exemplo, a constante de proporcionalidade é 0,4.

De modo geral, na função linear dada por $y = ax$ (com $x \neq 0$), temos $\frac{y}{x} = \frac{ax}{x} = a$, ou seja, a constante de proporcionalidade é igual ao coeficiente a.

Observação

Provavelmente, você aprendeu, em anos anteriores, que há grandezas relacionadas de maneira **inversamente proporcional**, ou seja, quando uma aumenta, a outra diminui na mesma proporção. Nesse caso, a relação entre essas grandezas não pode ser descrita por uma função linear.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

29. b) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes digam que, entre outros objetivos, esse documento serve para garantir a arrecadação dos tributos e assegurar os direitos sobre o produto adquirido, como a troca no caso de um eventual defeito.

31. a) Resposta: $A(b) = 4b$. Sim, pois a função que expressa a relação entre a área e o comprimento da base é uma função linear.

29. Considere que em certo ano a tributação incidente sobre uma lavadora de roupas seja de 43%.

a) Escreva a lei de formação de uma função que expresse o valor V pago de tributos em relação ao preço x da lavadora de roupas. Em seguida, determine qual seria, no ano mencionado, o valor de tributos pago na compra de uma lavadora de roupas cujo preço é R$ 3 250,00. Resposta: $V(x) = 0{,}43x$; R$ 1 397,50

b) Exigir a nota ou o cupom fiscal no ato da compra é dever do cidadão e assegura direitos ao consumidor. Em sua opinião, por que a emissão desse documento é importante nesses casos?

30. Em cada item, faça o que se pede.

a) Em alguns restaurantes, o preço da refeição varia de acordo com a massa, em quilogramas, da porção de alimento consumida pelo cliente. O preço do quilograma de alimento consumido em determinado restaurante é R$ 69,90. Escreva a lei de formação de uma função que expressa o preço P, em reais, pago por um cliente em função da massa m, em quilogramas, da porção de alimento consumida. Resposta: $P(m) = 69{,}90m$

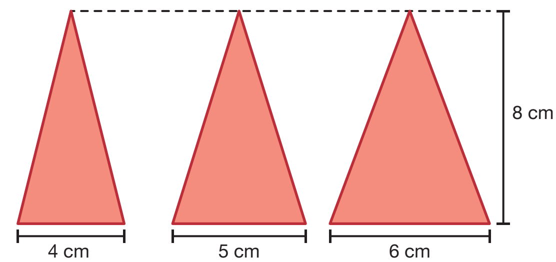
b) Entre as pedras preciosas mais caras do mundo está o raríssimo diamante vermelho. Cada miligrama dele custa cerca de 55 mil reais. Escreva a lei de formação de uma função que expresse o preço aproximado V de um diamante vermelho de acordo com sua massa a, medida em miligramas. Resposta: $V(a) = 55\,000a$

c) A taxa de entrega cobrada em certa pizzaria consiste em uma taxa fixa de R$ 2,00 mais R$ 0,80 por quilômetro percorrido. Escreva a lei de formação de uma função que expresse a taxa de entrega T, em reais, cobrada em função da distância d percorrida, medida em quilômetros. Resposta: $T(d) = 0{,}8d + 2$

d) O salário mensal de Flávio é dado por uma quantia fixa de R$ 1700,00 mais uma comissão, 10% da quantia total correspondente às vendas realizadas no mês. Escreva a lei de formação de uma função que expresse o salário mensal S de Flávio, em reais, em função da quantia v, em reais, correspondente às vendas realizadas no mês. Resposta: $S(v) = 0{,}10v + 1700$

Esboce no caderno o gráfico de cada uma das funções cuja lei de formação você escreveu. Em seguida, indique em quais das situações apresentadas as grandezas envolvidas são diretamente proporcionais e determine as constantes de proporcionalidade. Respostas no final do **Livro do Estudante**.

31. Analise a sequência de triângulos com mesma altura.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

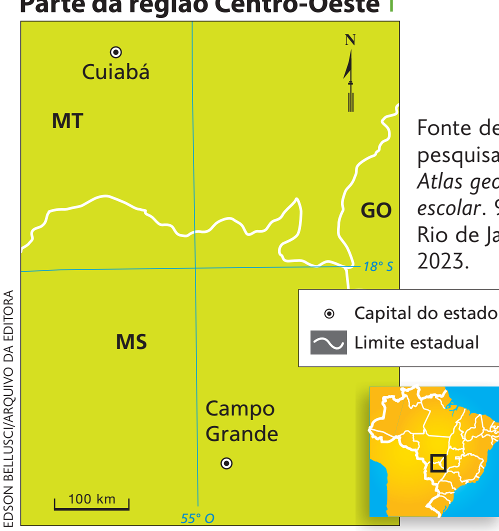
a) Escreva a lei de formação de uma função que expresse a área A de cada um desses triângulos em função do comprimento b de sua base. Nessa situação, as grandezas "área" e "comprimento da base" são diretamente proporcionais? Justifique sua resposta.

b) Qual é a área de um triângulo, nessa sequência, cuja base tem 15 cm de comprimento? Resposta: 60 cm^2

c) Qual é o comprimento da base de um triângulo, nessa sequência, sabendo que sua área mede 32 cm^2? Resposta: 8 cm

32. Analise parte da região Centro-Oeste do Brasil.

Parte da região Centro-Oeste



Fonte de pesquisa: IBGE. *Atlas geográfico escolar*. 9. ed. Rio de Janeiro, 2023.

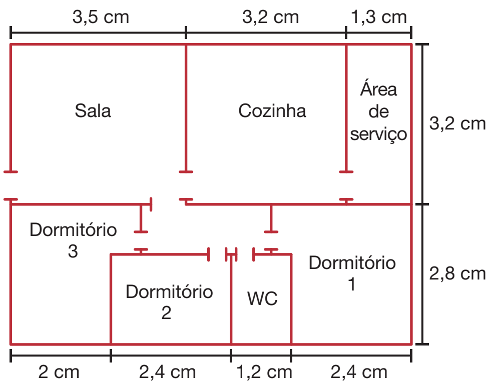
EDSON BELLUSCI/ARQUIVO DA EDITORA

a) Em qual estado brasileiro está localizado o município de Campo Grande? E o município de Cuiabá? Resposta: Mato Grosso do Sul; Mato Grosso.

b) Determine a lei de formação de uma função que permite calcular a distância real em quilômetros R, em linha reta, entre os municípios, por meio das distâncias d em centímetros representadas no mapa. Resposta: $R(d) = 100d$

c) Qual é a distância real aproximada, em linha reta, entre os municípios de Campo Grande e Cuiabá, em quilômetros, sabendo que a distância, nesse mapa, entre esses municípios é 5,63 cm? Resposta: 563 km

33. Jorge representou a casa onde mora por meio de um esquema. As medidas, em centímetros, usadas para fazer o esquema estão indicadas a seguir, desconsiderando a espessura das paredes.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

33. e) Resposta pessoal. A resposta depende da representação que os estudantes elaborarem.

a) Quais são as medidas reais da cozinha, sabendo que essa casa tem 10 m de comprimento por 7,5 m de largura?
Resposta: 4 m de comprimento por 4 m de largura.

b) Qual foi a escala utilizada por Jorge?
Resposta: 1 : 125

c) Escreva a lei de formação de uma função que permita calcular as medidas reais m, em metros, de cada cômodo, por meio das medidas x, em centímetros, indicadas no esquema. Resposta: $m(x) = 1{,}25x$

d) Qual é a constante de proporcionalidade da função cuja lei de formação você escreveu no item **c**? Resposta: 1,25

e) Faça em seu caderno um esquema como o indicado para representar a residência onde você mora, escrevendo o nome de cada cômodo e as respectivas medidas em centímetros. De acordo com esse esquema, elabore algumas perguntas semelhantes às apresentadas e solicite a algum colega que as resolva, enquanto você resolve as dele. Depois, verifiquem se as respostas estão corretas.

34. De maneira geral, em todos os produtos que compramos, o preço contempla uma porcentagem de tributos; uns mais, outros menos. Também pagamos tributos por serviços que adquirimos, como nas tarifas de telefone, água ou energia elétrica. Os tributos cobrados pelos governos municipal, estadual e federal têm a finalidade de custear serviços públicos, como saúde, educação, segurança e transporte.

a) Suponha que o Imposto sobre Circulação de Mercadorias e Prestação de Serviços (ICMS), incidente sobre determinado produto, corresponda a 17% de seu preço de venda. Se a unidade do produto custa R$ 30,00, calcule o valor desse tributo pago na compra de:
- 1 unidade; Resposta: R$ 5,10
- 5 unidades; Resposta: R$ 25,50
- 35 unidades. Resposta: R$ 178,50

b) Escreva a lei de formação de uma função que associe a quantidade x de unidades, do produto indicado no item anterior, ao valor y do ICMS. Resposta: $f(x) = 5{,}1x$

c) Qual é a constante de proporcionalidade da função cuja lei de formação você escreveu no item **b**? Resposta: 5,1

d) Além do ICMS, há outros tributos cobrados e recolhidos pelo governo. Faça uma pesquisa e cite em quais situações eles são cobrados.

e) Em sua opinião, os tributos arrecadados no Brasil são adequadamente aplicados, resultando na oferta de serviços públicos de qualidade? Converse com o professor e os colegas sobre esse assunto. Resposta pessoal.
Orientações sobre este item no **Suplemento para o professor**.

35. As ciclovias incentivam o uso de bicicletas, pois são vias específicas como opção de trânsito para esse meio de transporte. Além de melhorar o trânsito, a bicicleta reduz a poluição ambiental e motiva uma atividade física saudável.

Duas empresas de construção de ciclovias se candidataram para fazer o serviço em determinada cidade. A empresa **A** cobra R$ 600 000,00 fixo mais R$ 150 000,00 por quilômetro construído. Já a empresa **B** cobra R$ 200 000,00 fixo mais R$ 250 000,00 por quilômetro construído.

JOA SOUZA/SHUTTERSTOCK

34. d) Resposta pessoal. Alguns exemplos de tributos: Imposto sobre Produtos Industrializados (IPI), Imposto sobre Operações Financeiras (IOF), Imposto de Renda Pessoa Jurídica (IRPJ) e Contribuição para o Financiamento da Seguridade Social (Cofins).

Ciclista transitando em uma ciclovia no bairro de Itapuã, no município de Salvador, BA, em 2022.

a) Em relação ao custo total, qual é a melhor opção para construir 45 km de ciclovia: a empresa **A** ou a empresa **B**? Resposta: Empresa **A**.

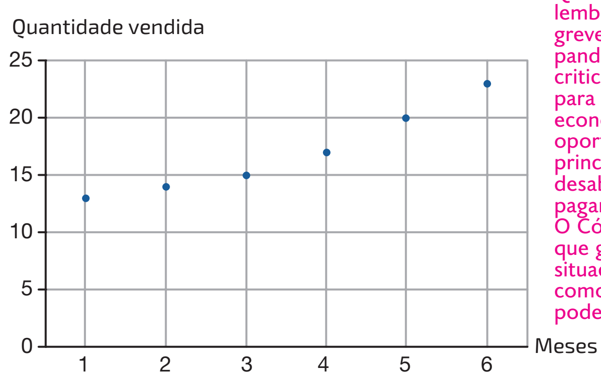
b) Escreva a lei de formação que relaciona a quantia total V a ser paga em função dos quilômetros construídos x de ciclovia para cada empresa. Resposta: Empresa **A**: $V_A(x) = 600\,000 + 150\,000x$; empresa **B**: $V_B(x) = 200\,000 + 250\,000x$.

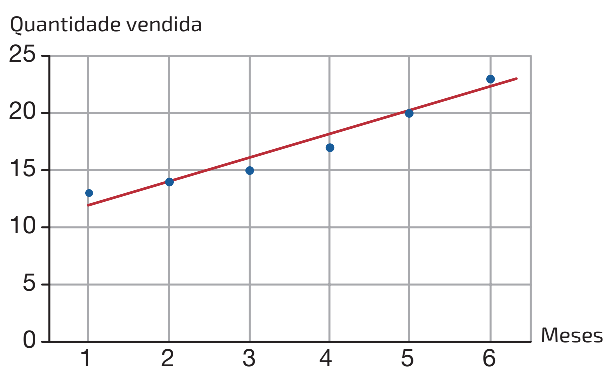
c) Em sua opinião, qual é a importância de construir mais ciclovias nas cidades do Brasil? Converse com o professor e os colegas acerca do assunto. Resposta pessoal. Promova uma reflexão entre os estudantes voltada à importância de construir ciclovias nas cidades brasileiras, levando-os a perceber que elas podem incentivar a população a usar a bicicleta como meio de transporte, colaborando, assim, com a saúde do corpo e reduzindo as taxas de emissão de gases poluentes ao diminuir o uso de meios de transporte movidos à combustão, como carros, motocicletas e ônibus.

Modelo linear

Uma microempresa, que atua há sete meses no ramo de tecnologia ofertando venda de peças e assistência técnica para aparelhos celulares, deseja obter uma previsão de custos com a aquisição de fones de ouvido e carregadores de celular disponíveis aos clientes. Para isso, representou as quantidades vendidas (y) até o momento em função do tempo (x), conforme indicado pelos pontos na primeira imagem.

Questão C. Resposta pessoal. Caso os estudantes não se lembrem do aumento dos combustíveis no contexto das greves, em 2018, questione-os sobre o contexto da pandemia de COVID-19, incentivando-os a refletir criticamente acerca das consequências dessas práticas para a população, sobretudo para as comunidades economicamente desfavorecidas. Aproveite a oportunidade para explicar que em situações incomuns, principalmente, como em períodos de desabastecimentos, devemos ficar atentos para não pagarmos valores abusivos por determinados produtos. O Código de Defesa do Consumidor é uma lei nacional que garante diversos direitos e nos protege de várias situações. Assim, é importante conhecer nossos direitos como consumidores, bem como os órgãos a que podemos recorrer ao nos depararmos com algum tipo de situação que os infrinja. As informações sobre o Código de Defesa do Consumidor estão disponíveis em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l8078.htm. Acesso em: 21 fev. 2024.





ILUSTRAÇÕES: KEITHY MOSTACHI/ARQUIVO DA EDITORA

Nessa imagem, os pontos estão próximos de uma reta. De maneira aproximada, admitindo que y esteja em função de x, podemos usar técnicas para relacionar as variáveis x e y pela equação $y = 2x + 10$, que descreve uma reta, conforme estudaremos nas próximas páginas.

Evidentemente, essa aproximação será confiável em curtos períodos, desde que não ocorram modificações significativas que alterem a tendência observada. Por outro lado, quando a linha reta não é a mais indicada, há também as curvas de tendência, mas esse tipo de estudo faz parte de um ramo mais amplo da Estatística Aplicada chamado **Análise de Regressão**.

Embora seja um exemplo hipotético, um **modelo linear** ajuda na previsão de vendas futuras, buscando um equilíbrio entre os bens oferecidos e o interesse dos consumidores, conforme a oferta e a demanda. Professor, professora: Oriente os estudantes a escrever as respostas no caderno.

Questão C. Em algumas situações, o aumento na quantidade de vendas, bem como no preço de alguns produtos, pode ocorrer em associação com algum problema que interfira nas necessidades básicas de um indivíduo. No contexto da pandemia de COVID-19 no ano de 2020, em um primeiro momento, alguns vendedores aumentaram o preço de álcool em gel, máscaras e qualquer outro produto ligado à prevenção desse vírus. Em 2024, as enchentes no estado do Rio Grande do Sul prejudicaram as áreas agrícolas e os estoques industriais da região, causando desabastecimento de alguns produtos, afetando os consumidores e gerando aumento dos preços. Na época, você ou seus familiares perceberam esses aumentos? Quais são as consequências de práticas abusivas como essas para a população? Converse com o professor e os colegas a respeito.

Questão B. Considerando os dados a respeito da venda de acessórios nos seis primeiros meses, calcule uma estimativa de venda para o sétimo e o oitavo mês.
Resposta: 24 unidades; 26 unidades.

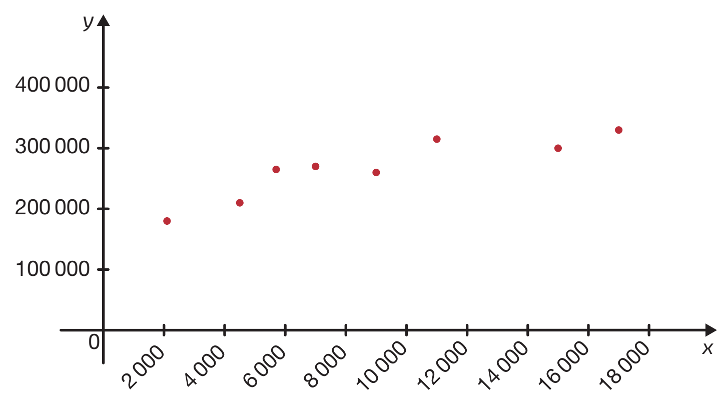
OBJETO DIGITAL ***Vídeo***: Cruz marshalliana e o ponto de equilíbrio de mercado: um exemplo hipotético

Vamos analisar outro exemplo.

O quadro e a imagem a seguir apresentam o retorno em vendas y de certa empresa em função do investimento em propaganda x.

Retorno em vendas de certa empresa em função do investimento em propaganda

Investimento em propaganda (em reais)	Retorno em vendas (em reais)
2 100	180 000
4 500	210 000
5 700	265 000
7 000	270 000
9 000	260 000
11 000	315 000
15 000	300 000
17 000	330 000



Novamente, podemos verificar que os pontos estão próximos de uma reta. Nesse caso, é possível captar a tendência dos dados utilizando um **modelo linear**, ou seja, um modelo do tipo $y = ax + b$. Há inúmeras possibilidades de retas para aproximar esses dados, por exemplo, se considerarmos a reta que passa pelos pontos $(2\,100,\ 180\,000)$ e $(17\,000,\ 330\,000)$. Nesse contexto, temos:

$$a = \frac{f(17\,000) - f(2\,100)}{17\,000 - 2\,100} \simeq 10{,}07$$

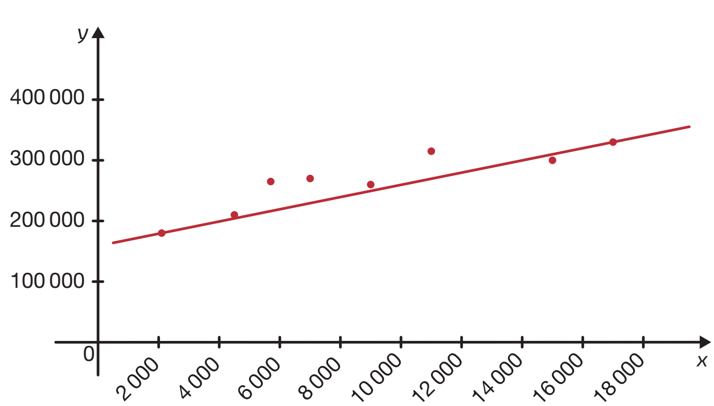
Além disso:

$$f(2\,100) = 10{,}07 \cdot 2\,100 + b \Rightarrow b = 158\,853$$

Assim:

$$y = 10{,}07x + 158\,853$$

Analise, a seguir, o modelo linear passando pelos pontos $(2\,100,\ 180\,000)$ e $(17\,000,\ 330\,000)$.



Note que o modelo se ajusta razoavelmente aos dados, porém fornece valores menores do que a maior parte dos retornos em vendas. No entanto, a fim de obtermos um modelo linear satisfatório, podemos utilizar o procedimento chamado **regressão linear**. Para a situação apresentada, usaremos uma planilha eletrônica.

Modelo de regressão linear

As planilhas eletrônicas são tabelas que podem ser preenchidas com diversas informações, como textos, dados numéricos e fórmulas. Uma planilha se divide em regiões retangulares, denominadas células, indicadas pelo cruzamento de uma linha (representada por um número) com uma coluna (representada por uma letra). As planilhas eletrônicas são úteis para tratar de diversos assuntos, como os que estão relacionados à construção de modelos matemáticos. Professor, professora: Outras informações sobre planilha eletrônica no **Suplemento para o professor**.

A seguir, vamos construir um diagrama de dispersão, tomando como base o conjunto de dados da página anterior.

Observação

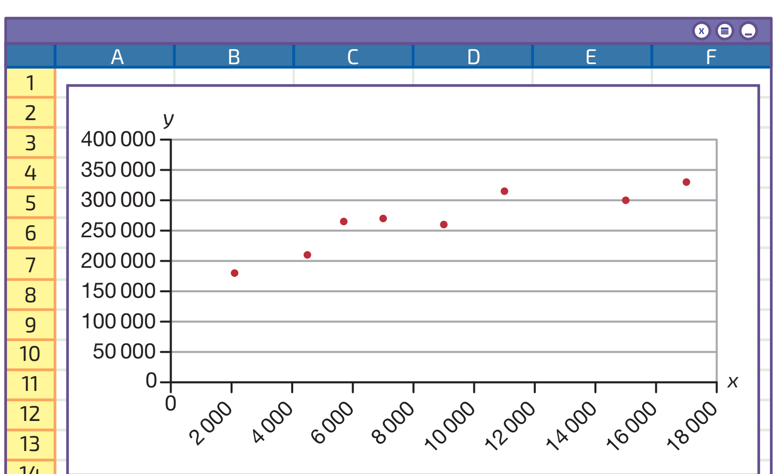
O conjunto dos pontos (x, y) do plano cartesiano que representa os dados experimentais é chamado **diagrama de dispersão**.

Também obteremos uma linha de tendência e a lei de formação da função que associa as variáveis envolvidas, ou seja, teremos um modelo de regressão linear em uma planilha eletrônica.

A. Com uma planilha eletrônica "aberta", preencha as células com as informações apresentadas a seguir.

	A	B
1	Investimento em propaganda (em reais)	Retorno em vendas (em reais)
2	2100	180000
3	4500	210000
4	5700	265000
5	7000	270000
6	9000	260000
7	11000	315000
8	15000	300000
9	17000	330000

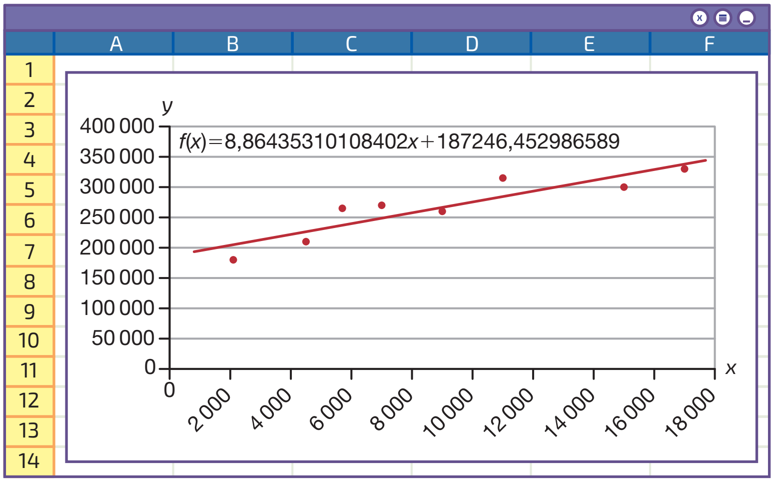
B. Para construir o diagrama de dispersão, selecione o intervalo **A2:B9**. Em seguida, clique na opção **inserir**, depois em **Gráfico**. Na janela **Tipos de gráfico**, selecione a opção **XY (Dispersão)** somente pontos. Na aba **Elementos do gráfico**, desmarque a opção **Exibir legenda**, e nos campos **Eixo X** e **Eixo Y** preencha, respectivamente, x e y. Por fim, clique em **Concluir**.



Dica

Os elementos do gráfico podem ser formatados depois de sua construção. É possível alterar, por exemplo, as escalas dos eixos, as linhas de grade e os estilos da linha e dos pontos.

c. Construa a linha de tendência e exponha a lei de formação da função que associa as variáveis envolvidas. Para isso, clique com o botão direito do *mouse* sobre um dos pontos do gráfico e selecione a opção **Inserir linha de tendência...**. Em seguida, na aba **Tipo**, clique em **Linear**, marque a opção **Mostrar equação** e clique em **OK**.



RONALDO INÁCIO E SÉRGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

O programa mostra o modelo com uma aproximação de 14 casas decimais. Nesse caso, o modelo de regressão para a situação apresentada, com aproximação de duas casas decimais, é:

$$y = 8{,}86x + 187\,246{,}45$$

Agora é sua vez!

Respostas no final do **Livro do Estudante**.

1. Analise os dados apresentados a seguir.

$y = f(x)$

x	10	12	14	16	18	20	22	24
$y = f(x)$	338	341	344	347	351	354	356	358

Com base nesses dados, construa um diagrama de dispersão.

2. Construa um modelo de regressão linear para os dados apresentados na questão **1**.

Exercícios e problemas resolvidos

R4. Utilizando o modelo obtido na seção **Acessando tecnologias**, estime o retorno em vendas caso essa empresa invista:

- R$ 8 500,00 em propaganda.
- R$ 120 000,00 em propaganda.

Resolução

Utilizando a fórmula $y = 8{,}86x + 187\,246{,}45$ para $x = 8\,500$, obtemos:

$$y = 8{,}86 \cdot 8\,500 + 187\,246{,}45 = 262\,556{,}45$$

Caso a empresa invista R$ 8 500,00 em propaganda, estima-se um retorno em vendas de cerca de 260 mil reais.

Utilizando a fórmula $y = 8{,}86x + 187\,246{,}45$ para $x = 120\,000$, obtemos:

$$y = 8{,}86 \cdot 120\,000 + 187\,246{,}45 = 1\,250\,446{,}45$$

Caso a empresa invista R$ 120 000,00 em propaganda, estima-se um retorno em vendas de cerca de 1 milhão e 250 mil reais.

Observação

A estimativa obtida caso a empresa invista R$ 120 000,00 é arriscada, pois envolve uma quantia muito maior do que as observadas.

Anote as respostas no caderno.

36. Cristina é uma estudante de Física. Analise os resultados obtidos por ela em um experimento envolvendo duas grandezas *X* e *Y*.

Resultados em um experimento envolvendo as grandezas *X* e *Y*

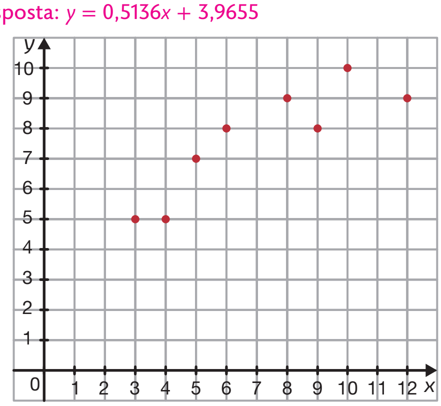
Grandeza *X*	Grandeza *Y*
1	80,5
2	81,6
3	82,1
4	83,7
5	83,9
6	85,0

Construa um modelo linear para os dados apresentados. Sugestão de resposta: $Y = 0{,}9X + 79{,}6$

37. Com o auxílio de uma planilha eletrônica, construa um modelo de regressão linear para cada diagrama de dispersão a seguir.

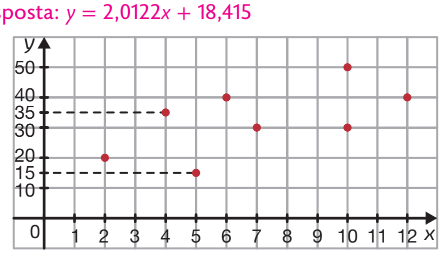
Resposta: $y = 0{,}5136x + 3{,}9655$

A.



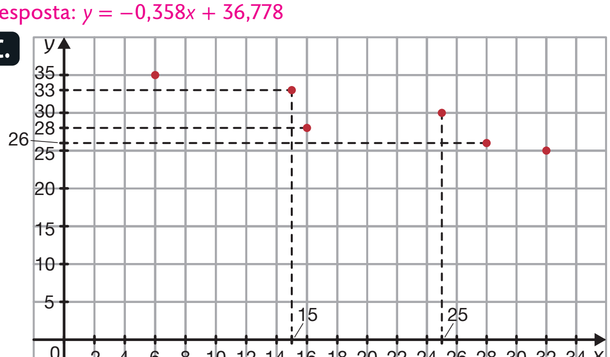
Resposta: $y = 2{,}0122x + 18{,}415$

B.



Resposta: $y = -0{,}358x + 36{,}778$

C.

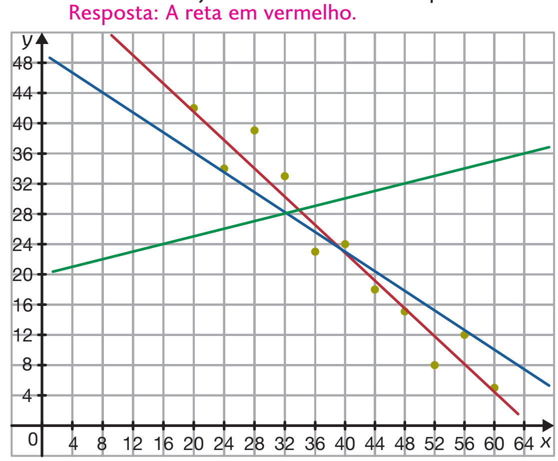


38. Os dados no quadro indicam a quantidade *y* de acidentes de trânsito em uma cidade em função da idade *x*, em anos, dos motoristas.

Quantidade de acidentes de trânsito em função da idade dos motoristas

x	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60
y	42	34	39	33	23	24	18	15	8	12	5

a) Entre as retas representadas a seguir, qual delas melhor se ajusta aos dados do quadro?
Resposta: A reta em vermelho.



b) Qual das fórmulas a seguir corresponde à reta indicada no item anterior?

- $y = 0{,}925x + 60$
- $y = -0{,}925x + 48$
- $y = -0{,}925x + 60$

Resposta: $y = -0{,}925x + 60$

39. Certa empresa realizou um teste de desempenho de um de seus *tablets*. Analise os dados obtidos.

Desempenho da bateria do *tablet* em função do tempo de uso

Tempo restante de carga de bateria (*y*)	1 hora	3 horas	6 horas	8 horas
Tempo de uso com a tela ligada (*x*)	12 horas	7 horas	4 horas	3 horas

a) Esboce um diagrama de dispersão com os dados indicados. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

b) Usando uma planilha eletrônica, construa um modelo de regressão linear que descreva a relação entre as variáveis *x* e *y*.
Resposta: $y = -0{,}73x + 9{,}28$

c) Use a equação obtida no item **b** para prever:

- o tempo restante de carga de bateria, em horas e minutos, após exatamente 5 horas de uso.
Resposta: Aproximadamente 5 h 38 min.
- o tempo necessário de uso com a tela ligada, em horas e minutos, para que a carga da bateria acabe. Resposta: Aproximadamente 12 h 43 min.

40. O Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) é uma unidade de medida utilizada para calcular o progresso a longo prazo em três dimensões básicas do desenvolvimento de uma sociedade: renda, educação e saúde. As informações a seguir apresentam o IDH anual do Brasil de 2013 a 2022.

ODS 8

IDH brasileiro de 2013 a 2022

Ano	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
IDH	0,750	0,753	0,752	0,753	0,759	0,764	0,766	0,758	0,754	0,760

Fonte de pesquisa: HUMAN Development Data. *Human Development Report*. Disponível em: https://hdr.undp.org/data-center/specific-country-data#/countries/BRA. Acesso em: 2 jun. 2024.

a) Esboce um diagrama de dispersão com os dados apresentados na tabela sobre o IDH brasileiro.
Resposta no final do **Livro do Estudante**.

b) Usando uma planilha eletrônica, construa um modelo de regressão linear para os dados apresentados.
Resposta: $y = 0{,}001x - 1{,}33$, em que x e y indicam, respectivamente, o ano e o IDH.

c) A lista a seguir indica os grupos em que os países são classificados de acordo com seu IDH, considerando três casas decimais.

Muito alto desenvolvimento humano: IDH $\geq$ 0,800
Alto desenvolvimento humano: 0,700 $\leq$ IDH $\leq$ 0,799
Médio desenvolvimento humano: 0,550 $\leq$ IDH $\leq$ 0,699
Baixo desenvolvimento humano: IDH $<$ 0,550

LAÍS GARBELINI/ ARQUIVO DA EDITORA

De acordo com o modelo construído por você no item **b**, estime em qual ano o Brasil será classificado como "Muito alto desenvolvimento humano". Resposta: Aproximadamente em 2130.

41. Uma das ferramentas do *marketing* digital é a divulgação de produtos e serviços feita por meio de influenciadores digitais, que disponibilizam, em suas redes sociais, *links* que redirecionam o internauta ao *site* de empresas. Acompanhe a quantidade de acessos mensais no *site* de certa empresa cujo *link* foi divulgado por diversos influenciadores.

Quantidade de acessos mensais no *site* de certa empresa por meio do *link* divulgado por influenciadores digitais em março de 2025

Quantidade de influenciadores digitais contratados no mês	**Quantidade de acessos**
6	15 345
8	18 934
10	18 000
15	20 000
16	19 980
18	21 000
19	21 230
22	25 000
25	28 000
30	29 340

Fonte de pesquisa: Departamento de informática da empresa.

Professor, professora: As informações apresentadas na tabela são fictícias.

a) Faça um diagrama de dispersão dos dados com base nessa tabela. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

b) Com o auxílio de uma planilha eletrônica, obtenha um modelo de regressão linear para os dados apresentados. Resposta: $y = 559{,}61x + 12\,225$

c) De acordo com o modelo obtido por você no item **b**, estime:

- a quantidade de acessos mensais caso a empresa contratasse 23 influenciadores digitais.
  Resposta: Aproximadamente 25 096 acessos.
- a quantidade de influenciadores contratados para que o *site* tenha cerca de 33 mil acessos mensais por meio de *links* divulgados. Resposta: Aproximadamente 37 influenciadores.

Inequação do 1º grau

Analise certo plano oferecido por uma companhia telefônica.

HELOÍSA PINTARELLI/ARQUIVO DA EDITORA

Nessas condições, quantos pacotes adicionais de “300 Mega” um usuário desse plano telefônico pode contratar no mês para que o valor da fatura seja, no máximo, R$ 120,00?

Para responder a essa questão, vamos, inicialmente, escrever uma expressão que permita calcular o total a ser pago pela fatura em função da quantidade de pacotes adicionais de “300 Mega” contratados. Indicando por v o valor a ser pago e por t a quantidade de pacotes adicionais de “300 Mega”, temos:

$$v = 9t + 84$$

Em seguida, devemos obter os valores de t para os quais $v \leq 120$. Para isso, fazemos:

$$v \leq 120 \Rightarrow 9t + 84 \leq 120 \Rightarrow 9t \leq 120 - 84 \Rightarrow t \leq \frac{120 - 84}{9} = 4$$

Portanto, para que o valor da fatura seja no máximo R$ 120,00, a quantidade de pacotes adicionais de “300 Mega” contratados no mês deve ser menor ou igual a 4.

Para resolver esse problema, utilizamos uma desigualdade envolvendo uma expressão do tipo $ax + b$, ou seja, utilizamos uma inequação do 1º grau.

Questão D. Quantos pacotes adicionais de “500 Mega” um usuário desse plano telefônico pode contratar no mês para que o valor da fatura seja no máximo R$ 185,00? Professor, professora: Oriente os estudantes a escrever as respostas no caderno.
Resposta: 6 pacotes.

Denominamos **inequação do 1º grau** toda desigualdade que, quando reduzida, tem uma das seguintes formas:

- $ax + b > 0$
- $ax + b < 0$
- $ax + b \geq 0$
- $ax + b \leq 0$

em que a e b são constantes reais, com a diferente de zero.

Exemplos

- $-2x - \frac{1}{2} > 0$
- $\frac{x}{3} + 2 < 0$
- $x + 4 \leq 5$
- $3x > 3$
- $7x + 8 \geq 3x - 5$
- $5x + 1 \leq 2x + 3$
- $\sqrt{3}x > x + 1$
- $x + 1 \geq \frac{\sqrt{2}}{3}x$

Exercícios e problemas resolvidos

R5. Resolva, no conjunto dos números reais, as seguintes inequações.

a) $9x - 2 \leq 4x$

b) $4{,}5t + 6 > 6{,}5t$

Resolução

a) $9x - 2 \leq 4x \Rightarrow 9x - 4x \leq 2 \Rightarrow 5x \leq 2 \Rightarrow x \leq \frac{2}{5}$

Portanto, $S = \left]-\infty, \frac{2}{5}\right]$ ou $S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \leq \frac{2}{5}\right\}$.

Observação

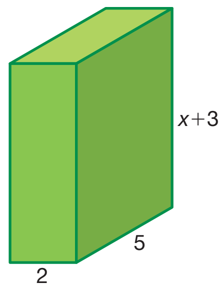
Resolver uma inequação consiste em obter os valores da variável que a tornam verdadeira. Esses valores são chamados **soluções da inequação** e o conjunto das soluções recebe o nome de **conjunto verdade** ou **conjunto-solução** (S).

b) $4{,}5t + 6 > 6{,}5t \Rightarrow 4{,}5t - 6{,}5t > -6 \Rightarrow -2t > -6 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2t < 6 \Rightarrow t < 3$.
Portanto, $S =]-\infty, 3[$ ou $S = \{t \in \mathbb{R} | t < 3\}$.

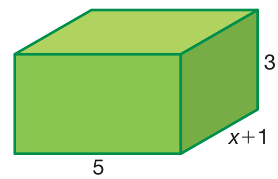
Observação
Quando multiplicamos ambos os membros de uma desigualdade por um número negativo, devemos inverter o sentido da desigualdade.

R6. Considere os paralelepípedos reto retângulos **A** e **B**, cujas dimensões estão expressas em uma mesma unidade de medida.

A.



B.



Para quais valores de x o volume do paralelepípedo **B** é maior do que o volume do paralelepípedo **A**?

Resolução

Sejam V_A e V_B os volumes dos paralelepípedos **A** e **B**, respectivamente. Assim:

- $V_A = 2 \cdot 5 \cdot (x + 3) = 10x + 30$
- $V_B = 5 \cdot (x + 1) \cdot 3 = 15x + 15$

Sendo assim, temos:

$$V_B > V_A \Rightarrow 15x + 15 > 10x + 30 \Rightarrow 15x - 10x > 30 - 15 \Rightarrow 5x > 15 \Rightarrow x > 3$$

Portanto, para $x > 3$, o volume do paralelepípedo **B** é maior do que o volume do paralelepípedo **A**.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

42. Resolva, no conjunto dos números reais, as inequações apresentadas.

a) $5x + 8 > -12$ Resposta: $S = \{x \in \mathbb{R} | x > -4\}$

b) $3 - 5x \leq 8$ Resposta: $S = \{x \in \mathbb{R} | x \geq -1\}$

c) $3x - 9 \leq 0$ Resposta: $S = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 3\}$

d) $5x - 7 > x + 9$ Resposta: $S = \{x \in \mathbb{R} | x > 4\}$

43. Segundo as informações nutricionais contidas no rótulo de determinado produto, cada unidade tem 47 quilocalorias (kcal).

a) Uma pessoa que come 10 unidades desse produto está ingerindo quantas quilocalorias? Resposta: 470 kcal

b) Escreva a lei de formação de uma função que expresse a quantidade de quilocalorias ingeridas q, em função da quantidade n de unidades consumidas desse produto. Resposta: $q(n) = 47n$

c) Qual é a quantidade mínima de unidades que devem ser consumidas para que sejam ingeridas 350 kcal? Resposta: 8 unidades.

44. Em um cinema, o preço da sessão varia de acordo com o dia da semana. Nas sextas-feiras e nos sábados e domingos são cobrados R\$ 27,00 por pessoa; nos outros dias da semana, R\$ 21,00. Sabendo que, em uma semana, o número total de pessoas que vão a esse cinema na sexta-feira, no sábado e no domingo é o triplo do número total de pessoas que vão nos outros dias da semana, determine o número mínimo total de pessoas que devem ir a esse cinema, durante uma semana, para que a arrecadação seja maior ou igual a R\$ 178 500,00. Resposta: 7 000 pessoas.

45. Para a produção de bolos, uma confeitaria tem uma despesa mensal de R\$ 3 500,00 em mercadorias e mais R\$ 2 500,00 em outros gastos. Cada bolo produzido nessa confeitaria é vendido por R\$ 40,00.

a) Escreva a lei de formação da função que determine o lucro L dessa confeitaria em função da quantidade q de bolos vendidos.
Resposta: $L: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $L(q) = 40q - 6\,000$.

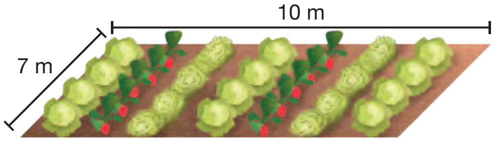
b) Para quais valores de q a função que você escreveu no item **a** assume valores positivos? O que podemos concluir nesse caso?
Resposta no final do **Livro do Estudante**.

46. Uma bomba de água envia 1 500 L de água por minuto para um reservatório. Qual é o tempo mínimo de funcionamento dessa bomba para que ela envie uma quantidade maior ou igual a 22 500 L de água para o reservatório? Resposta: 15 min

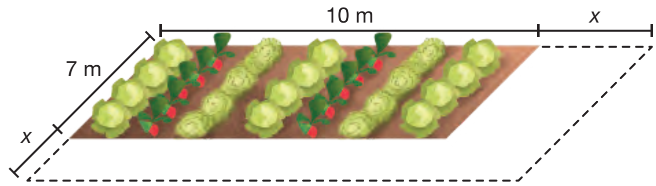
Função quadrática

As hortas comunitárias são ótimas alternativas de ocupação para terrenos baldios, espaços muitas vezes utilizados como depósitos de entulhos. Essas hortas oferecem alimentos frescos e saudáveis aos moradores locais, além de servirem como fonte de renda em alguns casos.

Em certa horta comunitária, um canteiro de verduras retangular será ampliado em uma mesma medida, tanto no comprimento quanto na largura, como mostram as figuras.



Horta original.



Horta ampliada.

ILUSTRAÇÕES: HELOÍSA PINTARELLI/ARQUIVO DA EDITORA

Podemos representar a área $f(x)$ desse canteiro após a ampliação em função da medida x indicada.

$$f(x) = (7 + x)(10 + x)$$
$$f(x) = 70 + 7x + 10x + x^2$$
$$f(x) = x^2 + 17x + 70$$

Observação
A área da região determinada pelo retângulo é dada pelo produto do comprimento e da largura.

Se considerarmos $x = 3$, isto é, se o canteiro for ampliado em 3 m na largura e no comprimento, podemos calcular sua área da seguinte maneira:

$$f(3) = 3^2 + 17 \cdot 3 + 70 = 9 + 51 + 70 = 130$$

Portanto, nesse caso, a área do canteiro após a ampliação será 130 m^2.

A fórmula $f(x) = x^2 + 17x + 70$ é um exemplo de lei de formação de função quadrática.

Uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que a todo número $x \in \mathbb{R}$ associa o número $ax^2 + bx + c$, com a, b e c reais, e $a \neq 0$, é denominada **função quadrática**.

$$x \mapsto ax^2 + bx + c$$

$f(x) = ax^2 + bx + c$ ou $y = ax^2 + bx + c$

Dizemos que a, b e c são os **coeficientes** da função.

Questão E. Em seu caderno, justifique se as funções f, g e h, definidas por $f(x) = 6x + 1$, $g(x) = x^3$ e $h(x) = 2^x - 1$, são ou não quadráticas. Resposta: Não são funções quadráticas, pois a lei de formação das funções f, g e h não é da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c reais e $a \neq 0$.

Exemplos

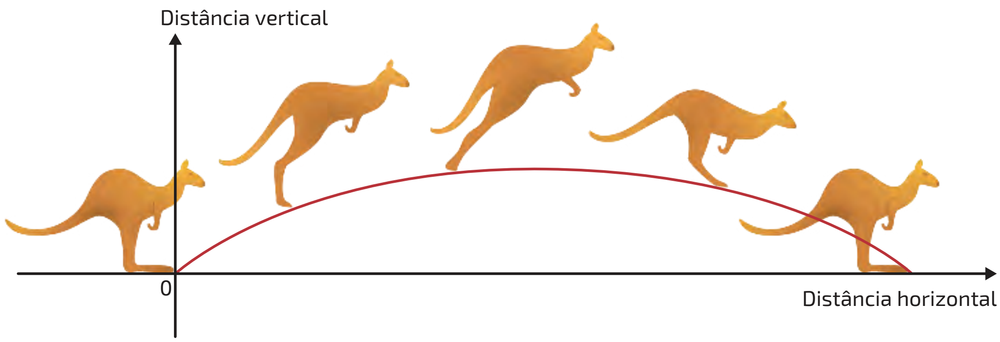
- $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 + 2x - 7$. Nesse caso, $a = 1$, $b = 2$ e $c = -7$.
- $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = -x^2 - 9x$. Nesse caso, $a = -1$, $b = -9$ e $c = 0$.
- $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = 5x^2 + 1$. Nesse caso, $a = 5$, $b = 0$ e $c = 1$.
- $m\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $m(x) = -7x^2$. Nesse caso, $a = -7$, $b = 0$ e $c = 0$.

As funções quadráticas em que $b = 0$ e $c = 0$, $b = 0$ e $c \neq 0$ ou $b \neq 0$ e $c = 0$ são denominadas **incompletas**. Nos exemplos citados, g, h e m são funções quadráticas incompletas. Já as funções quadráticas **completas** são aquelas em que $b \neq 0$ e $c \neq 0$. Nos exemplos anteriores, f é uma função quadrática completa.

Gráfico de uma função quadrática

Os cangurus são animais que se deslocam por meio de saltos, utilizando suas patas traseiras como se fossem molas e sua longa cauda para manter o equilíbrio.

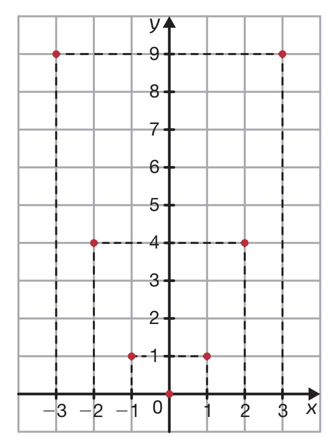
O deslocamento do canguru no salto descreve uma trajetória que se assemelha a uma curva correspondente ao gráfico de uma função quadrática.



De maneira semelhante à função afim, podemos esboçar o gráfico de uma função quadrática utilizando a ideia de representar pares ordenados em um plano cartesiano. Analise a seguir o esboço do gráfico da função quadrática f definida por $f(x) = x^2$.

$f(x) = x^2$

x	$y = f(x)$	(x, y)
-3	$f(-3) = (-3)^2 = 9$	$(-3, 9)$
-2	$f(-2) = (-2)^2 = 4$	$(-2, 4)$
-1	$f(-1) = (-1)^2 = 1$	$(-1, 1)$
0	$f(0) = 0^2 = 0$	$(0, 0)$
1	$f(1) = 1^2 = 1$	$(1, 1)$
2	$f(2) = 2^2 = 4$	$(2, 4)$
3	$f(3) = 3^2 = 9$	$(3, 9)$

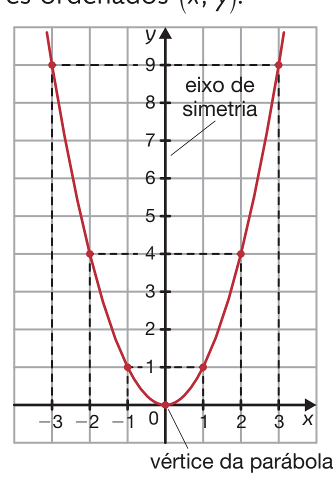


Nesse caso, determinamos apenas alguns pares ordenados que satisfazem essa função. No entanto, como o domínio e o contradomínio de f é o conjunto dos números reais, podemos atribuir infinitos valores para x, obtendo, para cada um deles, um único valor para y e, consequentemente, infinitos pares ordenados (x, y).

Professor, professora: Se necessário, retome com os estudantes o significado de um eixo de simetria, assunto estudado no Ensino Fundamental.

O gráfico da função é o conjunto de todos esses pontos representados no plano cartesiano. Porém, como é impossível calcular as coordenadas de todos eles, calculamos as coordenadas de alguns e traçamos o esboço do gráfico da função.

O gráfico de f é uma curva denominada **parábola**. Toda parábola tem um **eixo de simetria**, que a intersecta em um único ponto, denominado **vértice da parábola**. No caso da função quadrática definida por $f(x) = x^2$, seu eixo de simetria coincide com o eixo y e seu vértice tem coordenadas $(0, 0)$.



52. a) Resposta: $p(n) = n^2 - n$, com n sendo um número natural maior ou igual a 2.

Anote as respostas no caderno.

47. Resposta: Alternativas **b**, **c** e **e**.

47. Quais das funções a seguir são quadráticas?

a) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x^3 + x^2 - 6x + 3$.

b) g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^2 - 8$.

c) h: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 4x + 1$.

d) m: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $m(x) = 2^x + 5x - 9$.

e) n: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $n(x) = x(7 - x)$.

48. Determine os valores dos coeficientes a, b e c das funções quadráticas cujas leis de formação estão apresentadas a seguir.

a) $f(x) = x^2 + x + 2$ Resposta: $a = 1$, $b = 1$ e $c = 2$.

b) $f(x) = -4x^2 + 2{,}5$ Resposta: $a = -4$, $b = 0$ e $c = 2{,}5$.

c) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{7}x$ Resposta: $a = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{2}{7}$ e $c = 0$.

d) $f(x) = 3x - 1 - 9x^2$ Resposta: $a = -9$, $b = 3$ e $c = -1$.

e) $f(x) = 7{,}6x^2$ Resposta: $a = 7{,}6$, $b = 0$ e $c = 0$.

f) $f(x) = 2x\left(-x - \frac{5}{x} + 6\right)$ Resposta: $a = -2$, $b = 12$ e $c = -10$.

49. Dadas as funções definidas por $f(x) = 2x^2 - 6x - 4$ e $g(x) = -3x^2 - 5x + 1$, calcule:

a) $f(3)$. Resposta: -4

b) $f(-2)$. Resposta: 16

c) $f(0)$. Resposta: -4

d) $f(-0{,}2)$. Resposta: $-2{,}72$

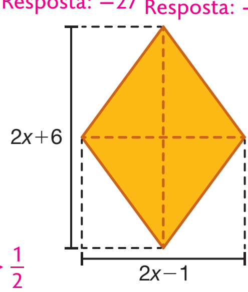
e) $g(1)$. Resposta: -7

f) $g(-4)$. Resposta: -27

g) $g(0)$. Resposta: 1

h) $g\left(\frac{1}{2}\right)$. Resposta: $-\frac{9}{4}$

50. Considere a região determinada pelo losango. Nela, as medidas estão expressas em centímetros.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

50. a) Resposta: $S(x) = 2x^2 + 5x - 3$, $x > \frac{1}{2}$

Dica

A área da região determinada pelo losango pode ser calculada com a fórmula $S = \frac{D \cdot d}{2}$, em que D e d são os comprimentos da diagonal maior e menor, respectivamente.

a) Determine a lei de formação da função S que possibilita determinar a área da região indicada por esse losango.

b) Qual é a área dessa região para $x = 3$? E para $x = 8$? Resposta: 30 cm²; 165 cm²

c) Faz sentido calcular a área dessa região para $x = 0{,}4$? Justifique sua resposta.

51. Entre os pontos a seguir, quais pertencem ao gráfico da função g definida por $g(x) = -2x^2 + 5x + 3$? Resposta: B, C e D

- $A(-4, -1)$
- $B(1, 6)$
- $C(3, 0)$
- $D(0, 3)$

50. c) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes respondam que não, pois o comprimento da diagonal do losango seria expresso por um número negativo ($2x - 1 < 0$).

52. A partir de 2003, o campeonato brasileiro de futebol da série **A** passou a ser disputado no sistema de pontos corridos, no qual vence a equipe que somar o maior número de pontos ao final do torneio. Nesse sistema, todas as equipes se enfrentam e cada uma joga duas vezes contra o mesmo adversário, em turno e returno.

A seguir, está apresentada a quantidade de partidas disputadas nesse sistema em relação à quantidade de equipes participantes.

Partidas disputadas em relação à quantidade de equipes

Quantidade de equipes	Quantidade de partidas
2	$2(2-1) = 2$
3	$3(3-1) = 6$
4	$4(4-1) = 12$
5	$5(5-1) = 20$
...	...
10	$10(10-1) = 90$
...	...

a) Escreva a lei de formação da função que relaciona a quantidade p de partidas em função da quantidade n de equipes.

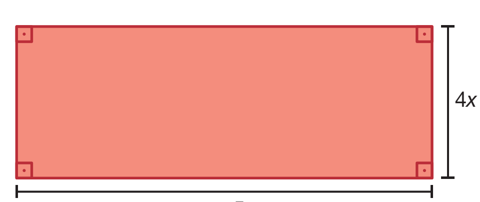
b) Sabendo que na série **A** do campeonato brasileiro de 2023 participaram 20 equipes, qual foi a quantidade de partidas disputadas? Quantas partidas cada equipe disputou? Resposta: 380 partidas; 38 partidas.

c) Se 25 equipes participarem de um campeonato nesse sistema, quantas partidas serão disputadas? Resposta: 600 partidas.

d) Se todas as equipes se enfrentam duas vezes, por que a função p não é definida por $p(n) = n^2$?

53. Escreva a lei de formação de uma função que expressa a área A de cada figura, em função de x.

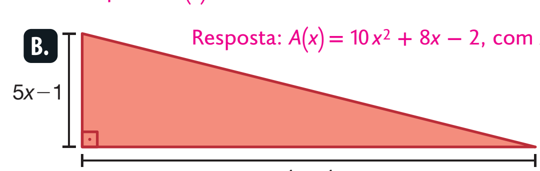
A.



Resposta: $A(x) = 4x^2 + 20x$, com $x > 0$

B.

Resposta: $A(x) = 10x^2 + 8x - 2$, com $x > \frac{1}{5}$



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

52. d) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes respondam que, dos $n \cdot n = n^2$ jogos, os quais representam todos contra todos, subtraímos n, que corresponderia aos jogos de "cada equipe contra ela mesma".

54. Considere o gráfico apresentado na imagem.

Esse gráfico corresponde à função f definida por:

Resposta: Alternativa **d.**

a) $f(x) = 2x^2 - 2x - 3$

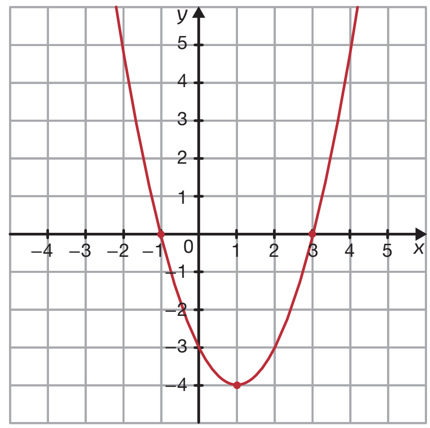
b) $f(x) = -2x^2 + 2x + 3$

c) $f(x) = -x^2 - 2x + 3$

d) $f(x) = x^2 - 2x - 3$

e) $f(x) = 3x^2 - x - 2$

55. d) Resposta pessoal. Para o desenvolvimento desse item, é sugerido que, em conjunto com os professores da área de **Ciências da Natureza**, seja desenvolvida uma ou mais aulas, em que os estudantes, com base nos conhecimentos adquiridos em cada um dos componentes curriculares, tenham condições de fundamentar e defender essas decisões de maneira responsável. No **Suplemento para o professor** há orientações e sugestões sobre como realizar esse trabalho.



VINÍCIUS COSTA/ARQUIVO DA EDITORA

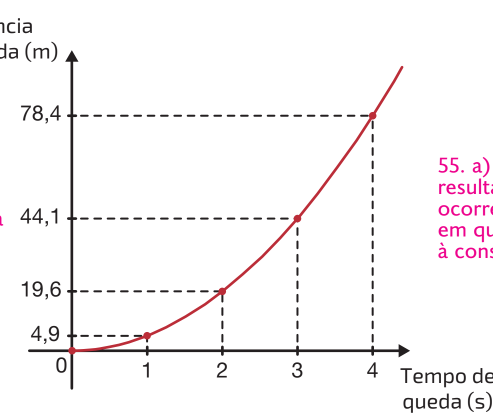
55. No quadro a seguir, está indicada a relação entre o tempo de queda e a distância percorrida por um corpo. Essas medidas podem ser representadas por meio de um gráfico da distância percorrida pelo objeto (eixo vertical) em função do tempo de queda (eixo horizontal), desconsiderando a resistência do ar.

Distância percorrida em função do tempo de queda

Tempo de queda	Distância percorrida
0 s	0 m
1 s	4,9 m
2 s	19,6 m
3 s	44,1 m
4 s	78,4 m

HELOÍSA PINTARELLI/ARQUIVO DA EDITORA

Professor, professora: Informe aos estudantes que a curva representada no gráfico é parte de um ramo de parábola.



SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

55. a) Sugestão de resposta: Todos os resultados são iguais a 4,9 m/s. Isso ocorre por causa da lei dos corpos em queda, pois a razão corresponde à constante de proporcionalidade.

Fontes de pesquisa: GUERRA, Andréia *et al*. *Galileu e o nascimento da ciência moderna*. São Paulo: Atual, 1997. TREFIL, James; HAZEN, M. Robert. *Física viva*: uma introdução à física conceitual. Tradução: Ronaldo Sérgio de Biasi. Rio de Janeiro: LTC, 2006. v. 1.

55. c) Resposta: Função quadrática. Podem ser obtidas informações a respeito das distâncias percorridas em função do tempo de queda, e vice-versa.

a) Para os momentos representados no esquema, calcule a razão entre a distância percorrida e o quadrado do tempo de queda do objeto após iniciar o movimento. Que regularidade você percebe nos resultados obtidos? Por que isso ocorreu?

b) Escreva a lei da função que relaciona a distância d percorrida pelo objeto apresentado de acordo com o tempo t de queda. Resposta: $d(t) = 4{,}9t^2$

c) Qual é o tipo da função cuja lei de formação você escreveu no item anterior? Com base nessa função, que tipos de informações podem ser obtidos em relação à situação apresentada?

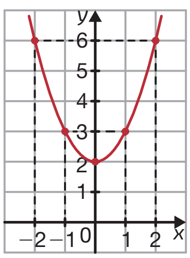
d) Junte-se a um colega e pesquisem uma maneira para avaliar a queda livre de um objeto, por exemplo, uma bola de futebol, utilizando tecnologias digitais. Para isso, criem uma apresentação demonstrando o passo a passo para o desenvolvimento dessa análise.

Coeficientes de uma função quadrática

Analisando os coeficientes de uma função quadrática, obtemos informações que nos auxiliam a esboçar o gráfico dessa função.

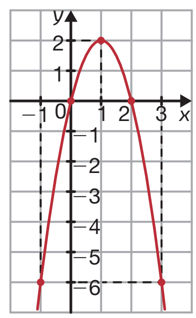
O coeficiente *a* de uma função quadrática determina se seu gráfico tem concavidade voltada para cima ou para baixo. Analise os gráficos e algumas informações acerca das funções *f* e *g*.

$f(x) = x^2 + 2$



A parábola tem concavidade voltada para cima e o coeficiente *a* é maior do que zero ($a > 0$).

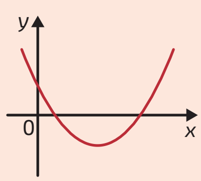
$g(x) = -2x^2 + 4x$



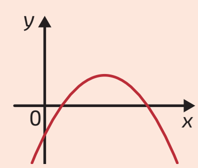
A parábola tem concavidade voltada para baixo e o coeficiente *a* é menor do que zero ($a < 0$).

Em uma função quadrática, temos as seguintes possibilidades.

Se o coeficiente *a* for maior do que zero ($a > 0$), então a parábola terá a concavidade voltada para cima.

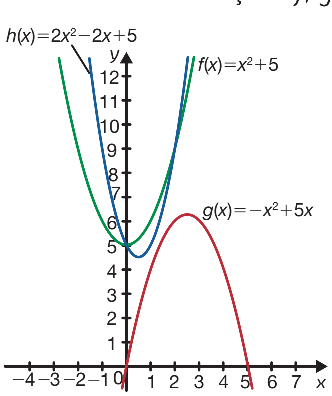


Se o coeficiente *a* for menor do que zero ($a < 0$), então a parábola terá a concavidade voltada para baixo.



Analisando o coeficiente *a* de uma função quadrática, também podemos obter informações a respeito da abertura da parábola. Funções quadráticas que têm coeficiente *a* com valores absolutos iguais apresentam gráficos com aberturas iguais. Aquelas que têm diferentes valores absolutos do coeficiente *a* apresentam gráficos com aberturas diferentes.

Considere as funções *f*, *g* e *h* representadas no mesmo plano cartesiano.



- Para as funções *f* e *g*, o valor absoluto do coeficiente *a* é o mesmo, ou seja, $|a| = 1$. Assim, os gráficos das funções *f* e *g* apresentam a mesma abertura.
- Para as funções *f* e *h*, por exemplo, o valor absoluto dos coeficientes *a* são diferentes. Assim, os gráficos das funções *f* e *h* apresentam aberturas diferentes.

Observação

O valor absoluto ou módulo de um número real *a*, indicado por $|a|$, é definido como o próprio número *a*, se $a \geq 0$, ou como $-a$, se $a < 0$.

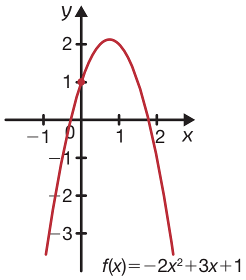
Exemplos:

- $|3| = 3$
- $|-2{,}3| = -(-2{,}3) = 2{,}3$

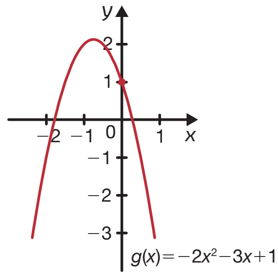
Observação

Quanto menor for o valor absoluto do coeficiente *a* de uma função quadrática, maior será a abertura de seu gráfico.
A fim de realizar essa verificação, esboce, utilizando um *software* de Geometria dinâmica, o gráfico de diferentes funções quadráticas em um mesmo plano cartesiano.

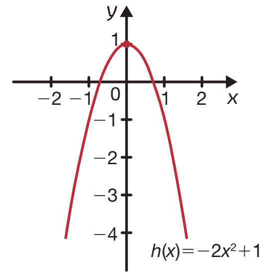
O coeficiente b de uma função quadrática indica se seu gráfico intersecta o eixo y no ramo crescente ou no ramo decrescente. Analise os gráficos das funções f, g e h.



A parábola intersecta o eixo y no ramo crescente e $b > 0$.



A parábola intersecta o eixo y no ramo decrescente e $b < 0$.

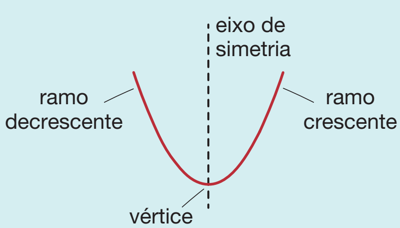


A parábola intersecta o eixo y no vértice e $b = 0$.

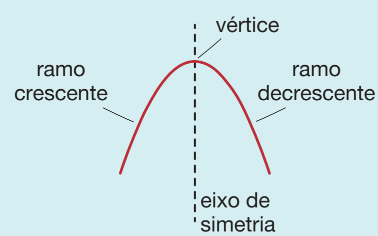
Observação

Se uma função quadrática for crescente à direita de seu vértice, então ela será decrescente à esquerda desse ponto, e vice-versa, dependendo da concavidade da parábola.

$a > 0$

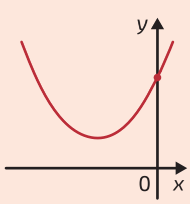


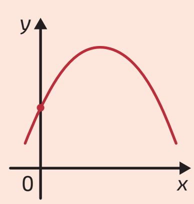
$a < 0$



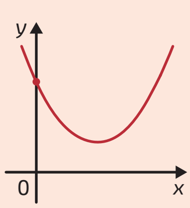
O gráfico de uma função quadrática intersecta o eixo y:

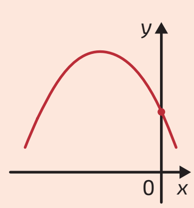
a) no ramo crescente se $b > 0$.



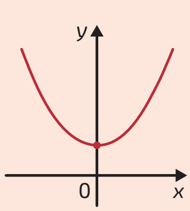


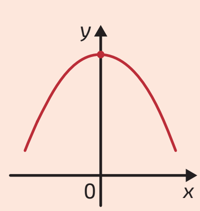
b) no ramo decrescente se $b < 0$.





c) no vértice se $b = 0$.





ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

O coeficiente c de uma função quadrática corresponde à ordenada do ponto em que seu gráfico intersecta o eixo y. Por exemplo, na função g dada por $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 5$, temos $c = 5$, e o gráfico intersecta o eixo y no ponto $(0, 5)$.

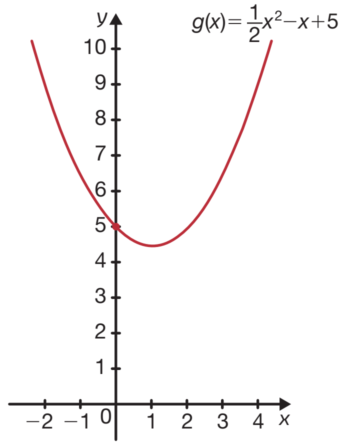
Observação

O gráfico de uma função intersecta o eixo y quando $x = 0$. No caso de uma função quadrática:

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$

$f(0) = c$



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

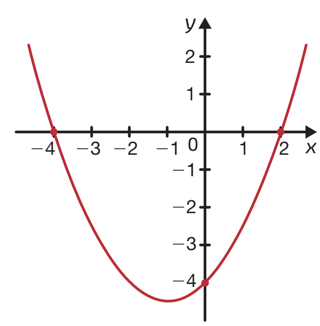
PARA FIXAR

Que tal analisar o que acontece com o gráfico de uma função quadrática quando mudamos os valores dos coeficientes a, b e c? Para isso, assista ao vídeo "Geogebra - Controles deslizantes", do canal *Artur Clayton Jovanelli*.

O gráfico de uma função quadrática, cuja lei de formação é $f(x) = ax^2 + bx + c$, intersecta o eixo y no ponto $(0, c)$.

Exercícios e problemas resolvidos

R7. Escreva a lei de formação da função quadrática cujo gráfico está representado na imagem.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Resolução

Como a parábola intersecta o eixo y no ponto de ordenada -4, temos $c = -4$. Além disso, sabemos que os pontos $(-4, 0)$ e $(2, 0)$ pertencem ao gráfico. Assim:

$$\begin{cases} f(-4) = 0 \\ f(2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \cdot (-4)^2 + b \cdot (-4) - 4 = 0 \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16a - 4b = 4 \\ 4a + 2b = 4 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtido pelo método da adição, temos:

$$\begin{cases} 16a - 4b = 4 \\ 4a + 2b = 4 \ (\cdot\, 2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16a - 4b = 4 \\ \underline{8a + 4b = 8} \end{cases}$$

$$24a = 12 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$4a + 2b = 4 \Rightarrow 4 \cdot \frac{1}{2} + 2b = 4 \Rightarrow b = 1$$

Portanto, a lei de formação da função f é $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$.

R8. Considere a função f definida por $f(x) = (k - 2)x^2 + 2x - 3$, com k real. Qual deve ser o valor de k para que o ponto $X(1, 4)$ pertença ao gráfico da função f?

Resolução

Para que o ponto $X(1, 4)$ pertença ao gráfico da função f, deve-se ter $f(1) = 4$. Desse modo:

$$f(1) = 4 \Rightarrow (k - 2) \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 3 = 4 \Rightarrow k - 2 + 2 - 3 = 4 \Rightarrow k = 7$$

Portanto, para $k = 7$, o ponto $X(1, 4)$ pertence ao gráfico da função f.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

56. Determine se é voltada para baixo ou para cima a concavidade da parábola que é gráfico da função definida por:

a) $f(x) = x^2 - 5x + 3$ Resposta: Concavidade voltada para cima.

b) $g(x) = 5x^2 - 6x$ Resposta: Concavidade voltada para cima.

c) $h(x) = -8x^2 - 1$ Resposta: Concavidade voltada para baixo.

d) $m(x) = -2x^2 - 2x - 3$ Resposta: Concavidade voltada para baixo.

e) $n(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2x + 1$ Resposta: Concavidade voltada para cima.

f) $s(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x$ Resposta: Concavidade voltada para baixo.

57. Esboce o gráfico da função f dada por:

$$f(x) = -x^2 - 2x - 3$$

Em seguida, determine as coordenadas do ponto em que o eixo de simetria intersecta a parábola.
Resposta no final do **Livro do Estudante**.

58. Considere as funções quadráticas cujas leis de formação estão indicadas a seguir.

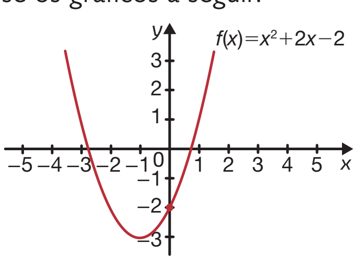
- $f(x) = 5x^2$
- $h(x) = \frac{1}{3}x^2$
- $g(x) = \frac{1}{2}x^2$
- $m(x) = \frac{1}{5}x^2$

a) O que define a abertura da parábola na representação gráfica das funções citadas? Justifique sua resposta. Resposta: O módulo do coeficiente a.

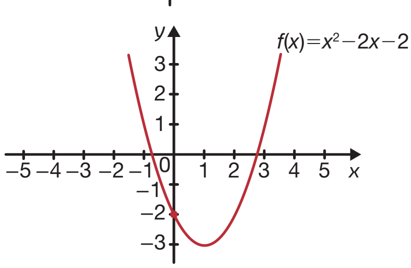
b) Qual dessas funções tem a parábola de maior abertura? E de menor abertura?
Resposta: Função m; função f.

59. Analise os gráficos a seguir.

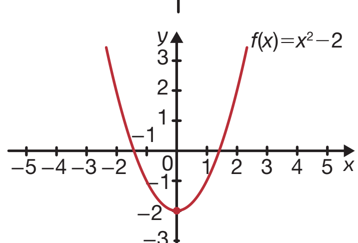
A.



B.



C.



Qual dessas parábolas intersecta o eixo y no ramo crescente? Justifique sua resposta.
Resposta: O gráfico **A**, pois $b > 0$, logo o ramo é crescente.

60. Nos itens a seguir, estão apresentadas as leis de formação de algumas funções. Determine em cada item o ponto em que o gráfico da função quadrática f intersecta o eixo y.

a) $f(x) = x^2 - x + 3$ Resposta: (0, 3)

b) $f(x) = -x^2 - 6x - 1$ Resposta: (0, −1)

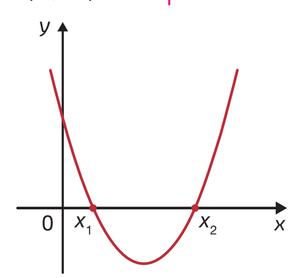
c) $f(x) = 2x^2 + 7$ Resposta: (0, 7)

d) $f(x) = 7x^2 + 2x$ Resposta: (0, 0)

e) $f(x) = -5x^2 + 2x + 1$ Resposta: (0, 1)

f) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x$ Resposta: (0, 0)

61. Analise o gráfico da função real f definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$. Resposta: Alternativa **b**.



Qual das alternativas apresenta informações corretas sobre a função f?

a) $a < 0$ e $c = 0$

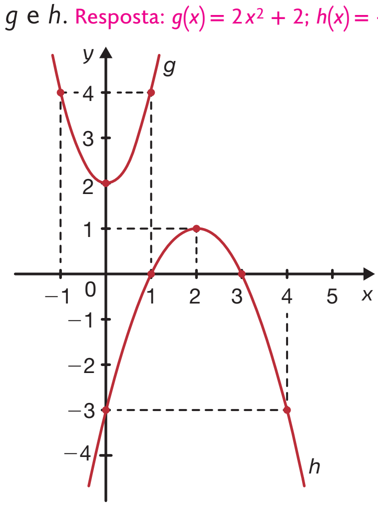
b) $a^2 - 4bc > 0$ e $b < 0$

c) $b^2 - 4bc < 0$ e $a > 0$

d) $a^2 - 4bc > 0$ e $b > 0$

e) $b^2 - 4bc > 0$ e $a < 0$

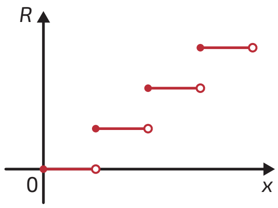
62. Determine a lei de formação das funções quadráticas g e h. Resposta: $g(x) = 2x^2 + 2$; $h(x) = -x^2 + 4x - 3$



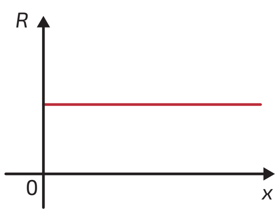
63. (Enem, 2000) Um boato tem um público-alvo e alastra-se com determinada rapidez. Em geral, essa rapidez é diretamente proporcional ao número de pessoas desse público que conhecem o boato e diretamente proporcional também ao número de pessoas que não o conhecem. Em outras palavras, sendo R a rapidez de propagação, P o público-alvo e x o número de pessoas que conhecem o boato, tem-se $R(x) = k \cdot x \cdot (P - x)$, em que k é uma constante positiva característica do boato.

O gráfico cartesiano que melhor representa a função $R(x)$, para x real, é: Resposta: Alternativa **e.**

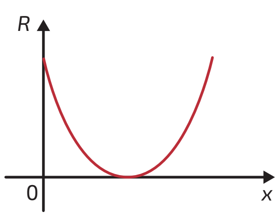
A.



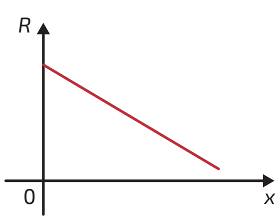
B.



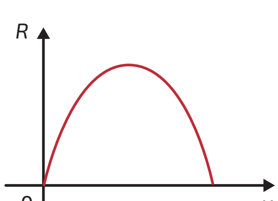
C.



D.



E.



66. b) Resposta pessoal. A resposta depende da escolha de cada estudante.

Professor, professora: O item **b** da tarefa **66** propõe aos estudantes a elaboração de uma questão utilizando os conceitos estudados, contribuindo para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações. Antes que eles elaborem a questão, peça-lhes que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** deste capítulo e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

64. Considere as funções f, g, h e m dadas por $f(x) = 3x^2 + 2$, $g(x) = 5x^2 + x$, $h(x) = 2x^2$ e $m(x) = -3x^2$.

a) Com o auxílio de um *software* de Geometria dinâmica, esboce o gráfico das funções f, g, h e m. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

b) Se uma grandeza y é diretamente proporcional ao quadrado de uma grandeza x $(x \neq 0)$, então existe uma constante k, tal que $\frac{y}{x^2} = k$. Em quais das funções (f, g, h ou m) uma variável é diretamente proporcional ao quadrado da outra? Justifique sua resposta.

65. Em cada um dos quadros estão apresentadas as coordenadas de alguns pontos.

Quadro A

x	y
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25

Quadro B

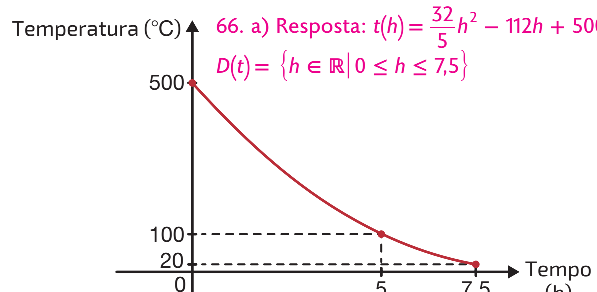
x	y
1	0
2	2
3	6
4	12
5	20

a) Represente no plano cartesiano os pontos cujas coordenadas estão apresentadas nos quadros **A** e **B**. Qual desses quadros apresenta pontos que pertencem ao gráfico de uma mesma função quadrática do tipo $f(x) = ax^2$?
Resposta no final do **Livro do Estudante**.

b) Identifique padrões e escreva, para cada quadro, uma expressão algébrica que relacione os números x e y.
Resposta: Quadro **A**: $y = x^2$; Quadro **B**: $y = x^2 - x$.

66. Uma vantagem do forno a lenha nas pizzarias é a temperatura, em torno de 550 °C, que é mais alta do que a do forno a gás tradicional cuja temperatura média máxima é de cerca de 300 °C. Por causa da alta temperatura do forno a lenha, a *pizza* assa rapidamente, o que deixa a massa crocante por fora e macia por dentro.

Após o uso, o forno a lenha de uma pizzaria reduz sua temperatura até a temperatura ambiente de 20 °C, conforme representado no gráfico.



66. a) Resposta: $t(h) = \frac{32}{5}h^2 - 112h + 500$; $D(t) = \{h \in \mathbb{R} \mid 0 \leq h \leq 7{,}5\}$

a) Determine a lei de formação e o domínio da função cujo gráfico foi indicado.

b) Com base nas informações apresentadas, elabore uma questão e peça a um colega que a resolva enquanto você resolve a dele. Em seguida, verifiquem se as respostas obtidas estão corretas.

64. b) Resposta: Nas funções h e m, pois: $\frac{h(x)}{x^2} = \frac{2x^2}{x^2} = 2$ e $\frac{m(x)}{x^2} = \frac{-3x^2}{x^2} = -3$, para todo $x \in \mathbb{R}^*$.

Zeros de uma função quadrática

Professor, professora: Lembre os estudantes de que essa é a fórmula resolutiva de uma equação do 2º grau, conteúdo geralmente estudado nos últimos anos do Ensino Fundamental.

Aprendemos anteriormente que o zero de uma função f é todo valor x de seu domínio tal que $f(x) = 0$ e que, graficamente, os zeros correspondem às abscissas dos pontos em que o gráfico intersecta o eixo x.

Para determinarmos os zeros de uma função quadrática f, fazemos $f(x) = 0$ e resolvemos a equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$.

Essa equação pode ser resolvida utilizando a fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ na qual } \Delta = b^2 - 4ac$$

De acordo com os coeficientes da função, temos três possíveis casos para os valores de Δ.

I. $\Delta > 0$

Para determinarmos os zeros da função quadrática definida por $f(x) = -x^2 + 2x + 3$, resolvemos a equação $f(x) = 0$.

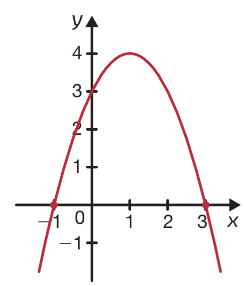
$f(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0$

$a = -1$; $b = 2$; $c = 3$

$\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3 = 4 + 12 = 16$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-2 \pm 4}{-2}$$

$$x_1 = \frac{-2 + 4}{-2} = -1 \qquad x_2 = \frac{-2 - 4}{-2} = 3$$



Portanto, -1 e 3 são os zeros de f, e $(-1, 0)$ e $(3, 0)$ são os pontos em que o gráfico dessa função intersecta o eixo x.

Quando $\Delta > 0$:

- a equação $ax^2 + bx + c = 0$ tem duas **raízes** reais e distintas:
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a};$$
- a função quadrática f tem dois **zeros** reais e distintos;
- o gráfico de f intersecta o eixo x nos pontos $(x_1, 0)$ e $(x_2, 0)$.

II. $\Delta = 0$

Para determinarmos os zeros da função quadrática definida por $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 3$, resolvemos a equação $f(x) = 0$.

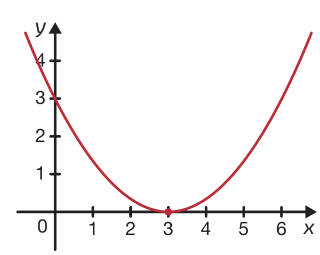
$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}x^2 - 2x + 3 = 0$

$a = \frac{1}{3}$; $b = -2$; $c = 3$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 = 4 - 4 = 0$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{2 \pm 0}{\frac{2}{3}}$$

$$x_1 = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3 \qquad x_2 = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3$$



Observação

Na fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ para $\Delta = 0$, temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b \pm 0}{2a} \Rightarrow x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

Portanto, a função f tem dois zeros iguais a 3 e $(3, 0)$ é o ponto em que o gráfico dessa função intersecta o eixo x.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Quando $\Delta = 0$:

- a equação $ax^2 + bx + c = 0$ tem duas **raízes** reais e iguais: $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$;
- a função quadrática f tem dois **zeros** iguais;
- o gráfico de f intersecta o eixo x em um único ponto, de abscissa $x_1 = x_2$ e ordenada 0.

III. $\Delta < 0$

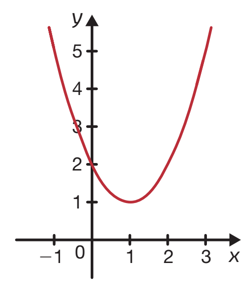
Para determinarmos os zeros da função quadrática definida por $f(x) = x^2 - 2x + 2$, resolvemos a equação $f(x) = 0$.

$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 0$

$a = 1$; $b = -2$; $c = 2$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 4 - 8 = -4$

Como $\Delta < 0$, a equação não tem raízes reais, pois $\sqrt{\Delta} \notin \mathbb{R}$. Portanto, f não tem zeros, e o gráfico dessa função não intersecta o eixo x.

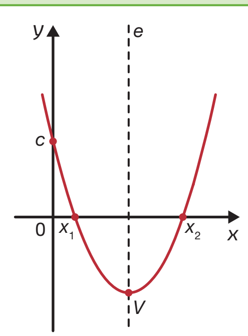
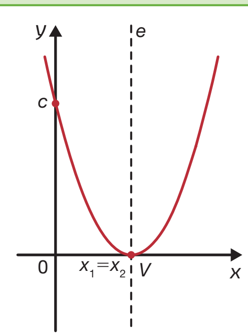
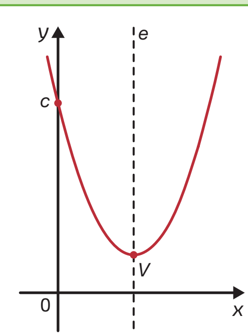
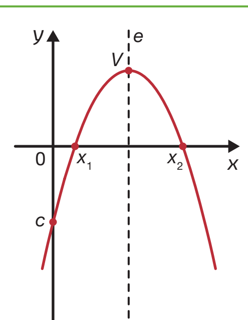
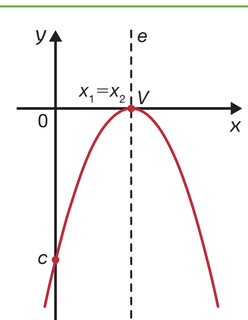
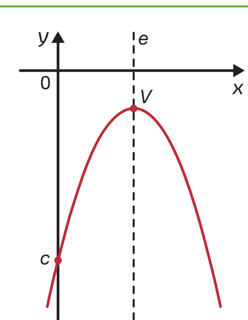


Quando $\Delta < 0$:

- a equação $ax^2 + bx + c = 0$ não tem **raízes** reais;
- a função quadrática não tem **zeros**;
- o gráfico de f não intersecta o eixo x.

Considerando a função quadrática e algumas características de seu gráfico, podemos organizar o seguinte quadro.

Algumas características do gráfico de uma função quadrática

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

Observação

e: eixo de simetria da parábola

V: vértice da parábola

Exercícios e problemas resolvidos

R9. Determine m, de modo que a função quadrática definida por $f(x) = 3x^2 - 6x + m$ tenha:

a) dois zeros distintos.
b) dois zeros iguais.
c) nenhum zero.

Resolução

Como $a = 3$, $b = -6$ e $c = m$, temos:

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot m = 36 - 12m$$

a) Para que a função tenha dois zeros distintos, temos:

$$\Delta > 0$$
$$36 - 12m > 0$$
$$-12m > -36$$
$$m < \frac{36}{12} = 3$$
$$S = \{m \in \mathbb{R} | \ m < 3\}$$

b) Para que a função tenha dois zeros iguais, temos:

$$\Delta = 0$$
$$36 - 12m = 0$$
$$-12m = -36$$
$$m = \frac{36}{12} = 3$$
$$S = \{3\}$$

c) Para que a função não tenha zeros, temos:

$$\Delta < 0$$
$$36 - 12m < 0$$
$$-12m < -36$$
$$m > \frac{36}{12} = 3$$
$$S = \{m \in \mathbb{R} | \ m > 3\}$$

R10. Mostre que se x_1 e x_2 são zeros da função quadrática f, dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, então $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Resolução

Se x_1 e x_2 são zeros da função, então:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Segue que:

- $x_1 + x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2b}{2a} = -\dfrac{b}{a}$
- $x_1 \cdot x_2 = \left(\dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \cdot \left(\dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \dfrac{b^2 - \left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4a^2} = \dfrac{b^2 - \left(b^2 - 4ac\right)}{4a^2} = \dfrac{c}{a}$

Portanto, $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Observação

As relações $S = -\frac{b}{a}$ e $P = \frac{c}{a}$ são chamadas de **soma** e **produto** das raízes da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$ e podem determinar os zeros da função quadrática. Analise na tarefa resolvida a seguir a determinação dos zeros da função por meio de soma e produto.

R11. Determine os zeros da função quadrática definida por $f(x) = x^2 - x - 12$.

Resolução

Da tarefa resolvida anteriormente, se x_1 e x_2 são zeros da função, então:

- $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{(-1)}{1} = 1$
- $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{-12}{1} = -12$

Nesse caso, os dois números, cuja soma é 1 e o produto é -12, são 4 e -3. Portanto, $x_1 = 4$ e $x_2 = -3$ são os zeros de f.

EDUCAÇÃO MIDIÁTICA

Virou *meme*?

1. Resposta pessoal. Incentive os estudantes a comentar com os colegas os assuntos tratados nos últimos *memes* com os quais tiveram contato ou que compartilharam na internet. Peça-lhes que relacionem esses temas aos contextos abordados, podendo envolver uma situação política, algo relacionado a artistas que conheçam ou até mesmo a conteúdos escolares.

Início de conversa

Converse com os colegas sobre as questões a seguir.

1. Você se lembra qual foi o último *meme* que viu ou compartilhou? De qual assunto ele tratava?

2. Você sabe como surge a ideia de um *meme*?

2. Resposta pessoal. O objetivo desta questão é incentivar os estudantes a fazer inferências sobre a maneira como os *memes* surgem. Eles podem comentar, por exemplo, que existem aqueles criados com base em trechos de uma entrevista, de um programa de TV, de uma cena de filme ou de acontecimentos cotidianos registrados em vídeo ou foto e que podem envolver pessoas famosas ou anônimas, seres humanos ou animais.

Os *memes* fazem parte do nosso dia a dia e representam uma das linguagens da internet. O *meme* é considerado um gênero comunicativo, geralmente de entretenimento visual, composto por uma imagem legendada, um vídeo com falas que viram **bordões** ou um *gif* de animação, que **viraliza** na internet e é compartilhado ou adaptado pelos usuários para expressar algo com humor.

Os *memes* são importantes facilitadores da comunicação, constituindo uma poderosa ferramenta digital de influência social. Como constituem um modo neutro de comunicação, podemos dar qualquer sentido aos *memes*, dependendo de como queremos aplicá-los. Porém, devemos ter cuidado, pois nem sempre eles são usados de maneira positiva, causando constrangimentos, em algumas situações, que podem unir ou dividir as pessoas, além de serem motivo de ***cyberbullyng*** e de desinformação.

Vamos conhecer algumas características dos *memes*?

Senta lá, Cláudia!

Professor, professora: Se julgar necessário, comente com os estudantes que os subtítulos do texto desta seção correspondem a bordões de *memes* consolidados na internet.

A imagem é um elemento importante na maior parte dos *memes*, e a mensagem transmitida por ela nesse gênero pode ser ressignificada ou adaptada para diferentes contextos. No Brasil, os *memes* são muito populares. Fatos políticos, competições esportivas, ações de celebridades, entre muitos outros acontecimentos geram dezenas de *memes* que são compartilhados diversas vezes em redes sociais.

Uma das características que diferenciam esse gênero de tantos outros que fazem parte da internet é sua possibilidade de ser “remixado”, ou seja, de ser apropriado e modificado pelo usuário. Isso propicia o processo de **glocalização**, que consiste na utilização de *memes* de abrangência global para se expressar quanto a acontecimentos da realidade próxima. Diante dessa viralização, é comum que a origem do *meme* se perca ou que o seu contexto inicial deixe de ser relevante diante dos outros sentidos que o conteúdo passa a assumir.

Ai, que loucura!

Os *memes* de internet, como os conhecemos hoje, são um fenômeno recente, mas a origem do termo é antiga. Nos anos 1970, o biólogo britânico Richard Dawkins usou esse nome para determinar comportamentos culturais que são reproduzidos por um indivíduo com base na imitação de informações recebidas e processadas por ele. Assim como um gene carrega características biológicas que herdamos geneticamente, para Dawkins, um *meme* é um comportamento cultural reproduzido por alguém com base na observação e aprendizagem, como valores, ideias e linguagens. Essa teoria não é um consenso entre estudiosos, mas com o crescimento e a popularização da internet, o termo *meme* passou a definir elementos culturais, geralmente engraçados, que são compartilhados virtualmente.

Bordões: falas ou expressões ditas repetidas vezes a respeito de alguma situação ou pessoa e que, quando apropriadas pelo público, podem se tornar engraçadas.

Viralizar: nesse contexto, trata-se de um conteúdo que se espalha e é compartilhado rapidamente, atingindo grande quantidade de pessoas.

***Cyberbullying*:** *bullying* feito por meio de ambientes virtuais, consistindo em humilhação, intimidação e difamação sistemática por meio de redes sociais.

Glocalização: termo proveniente da fusão das palavras **global** e **local** que pode se referir ao uso de algum fenômeno de alcance mundial para tratar de questões da dimensão local.

Como em outros gêneros textuais, para analisar um *meme* é necessário considerar alguns elementos.

Receba!

A análise de um *meme* depende de alguns componentes, como os indicados a seguir.

Manifestação: corresponde aos elementos que compõem o *meme*, o que pode ser observado nele: uma fotografia, um vídeo, uma obra de arte, um texto etc.

Comportamento: corresponde à ação humana a serviço do *meme*: fazer uma fotografia, utilizar um *software* para manipular uma obra de arte, compor uma legenda, gravar um vídeo etc.

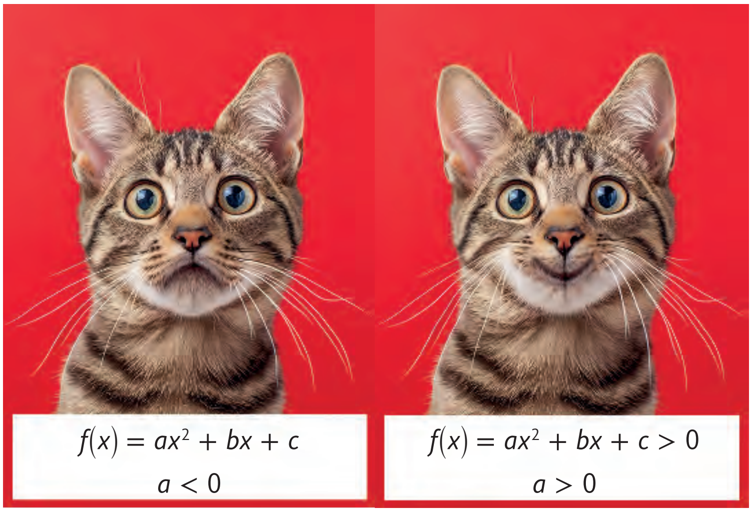
Ideal: corresponde ao propósito do *meme*, à mensagem que ele vai passar. O ideal dita o comportamento do *meme*, que, por sua vez, cria a manifestação.

ILUSTRAÇÕES: KEITHY MOSTACHI/ARQUIVO DA EDITORA

Bota um *cropped* e vamos estudar!

Agora que você já sabe como analisar um *meme*, verifique a imagem a seguir.

FOTOMONTAGEM DE VINÍCIUS COSTA. FOTO: MEGA VECTORS/SHUTTERSTOCK



3. Resposta pessoal. Faça uma breve lista com os estudantes dos conteúdos trabalhados até então. Incentive-os a folhear o livro e selecionar assuntos que tenham gostado muito de estudar ou em relação aos quais tenham enfrentado dificuldades. Conteúdos que tenham sido marcantes são mais facilmente associados a outras situações, colaborando para a criação do ideal do *meme*. Oriente-os com base em obras de arte e/ou vídeos a que tenham assistido para evitar situações em que a imagem ou o comportamento dos colegas sejam utilizados como referência para o *meme*, combatendo qualquer tipo de comentário ofensivo ou *bullying* entre a turma.

Meme criado especialmente para esta obra.

Vamos identificar, juntos, os componentes desse *meme*.

- **Manifestação**: trata-se de uma composição de imagem e texto.
- **Comportamento**: para compor a imagem desse *meme* foi necessário utilizar *softwares* para recortar a imagem e manipulá-la, inserindo um sorriso. Além disso, foram produzidos os textos para acompanhar as imagens.
- **Ideal**: a intenção desse *meme* é relacionar a boca sorrindo ao gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, com ***a* maior do que 0**, que é uma parábola com a concavidade voltada para cima, e a boca triste ao gráfico da mesma função, com ***a* menor do que 0**, que é uma parábola com a concavidade voltada para baixo.

Atividades

1. Resposta pessoal. As frases indicadas nos subtítulos dessa seção (“Senta lá, Cláudia!”, “Ai, que loucura!”, “Receba!”, “Reage e bota um *cropped*”) são bordões de *memes* consolidados na internet. Se possível, pesquise e apresente esses vídeos aos estudantes.

Anote as respostas no caderno.

2. Resposta pessoal. Se mais de um estudante escolher o mesmo *meme*, possibilite a eles que façam a análise em duplas ou grupos. A troca de ideias pode auxiliar no processo de análise.

1. Quais dos *memes* utilizados ao longo desta seção você conhece?

2. Qual é o seu *meme* preferido? Analise-o e identifique a manifestação, o comportamento e o ideal dele.

3. Crie um *meme* utilizando algum conteúdo matemático estudado ao longo deste ano. Na composição do seu *meme* procure usar fotos, obras de arte ou mesmo vídeos da internet.

67. Determine, se houver, os zeros das funções cujas leis de formação estão apresentadas a seguir.

a) $f(x) = x^2 - 7x + 10$ Resposta: $x_1 = 2$ e $x_2 = 5$

b) $f(x) = x^2 - 6x + 9$ Resposta: $x_1 = x_2 = 3$

c) $f(x) = -x^2 + x - 7$ Resposta: Não há zeros reais.

d) $f(x) = -4x^2 + 4$ Resposta: $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$

e) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 6x$ Resposta: $x_1 = 0$ e $x_2 = -12$

f) $f(x) = -2x^2 + 3x - 5$ Resposta: Não há zeros reais.

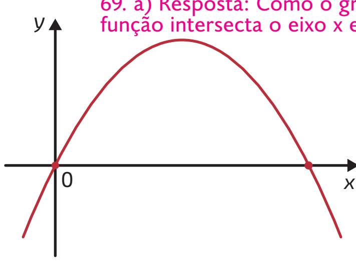
g) $f(x) = 3x^2 + x - 2$ Resposta: $x_1 = \frac{2}{3}$ e $x_2 = -1$

h) $f(x) = -x^2 + 8x - 16$ Resposta: $x_1 = x_2 = 4$

68. Determine o valor de k para que o gráfico da função quadrática definida por $f(x) = (k + 2)x^2 + 2x - k$ intersecte o eixo das abscissas em um único ponto.
Resposta: $k = -1$

69. Analisando o gráfico da função quadrática apresentado, responda às questões.

69. a) Resposta: Como o gráfico da função intersecta o eixo x em um ponto de abscissa 0 e em um ponto de abscissa positiva, a soma dos zeros é positiva, e o produto, nulo.

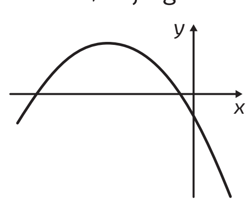


RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

a) A soma e o produto dos zeros dessa função são positivos, negativos ou nulos? Justifique sua resposta.

b) O valor de Δ dessa função é positivo, negativo ou nulo? Justifique sua resposta.
Resposta: Positivo, pois a função tem dois zeros distintos.

70. (UEL, 2008) Considere a função real definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, cujo gráfico é o seguinte:



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA/UEL 2008

Com base na situação exposta e nos conhecimentos sobre o tema, considere as seguintes afirmativas:

I) $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

II) $a(b + c) > 0$

III) $f\left(\frac{-b + 2a}{2a}\right) = f\left(\frac{-b - 2a}{2a}\right)$

IV) $a\sqrt{\Delta} > 0$

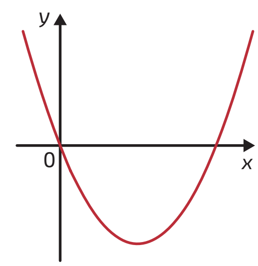
Escreva a alternativa que contém todas as afirmações corretas. Resposta: Alternativa **c**.

a) I e III
b) III e IV
c) I, II e III
d) I, II e IV
e) II, III e IV

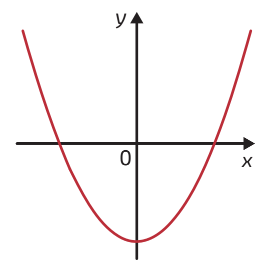
71. Qual dos gráficos melhor representa uma função quadrática em que $\Delta > 0$, $S = 0$ (soma dos zeros da função) e o coeficiente $a > 0$? Justifique sua resposta.

Resposta: Gráfico **B**. A função tem dois zeros distintos, pois $\Delta > 0$. Como $S = 0$, os zeros da função são números opostos e, sabendo que $a > 0$, a concavidade da parábola é voltada para cima.

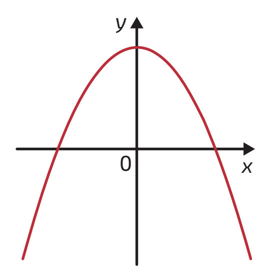
A.



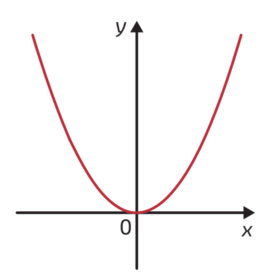
B.



C.



D.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

72. Quais das funções quadráticas, cujas leis de formação estão apresentadas a seguir, têm dois zeros reais iguais? Resposta: Alternativas **d** e **f**.

a) $f(x) = x^2 - 7x + 18$

b) $f(x) = x^2 + 10x$

c) $f(x) = x^2 - 4x - 1$

d) $f(x) = 20x^2$

e) $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$

f) $f(x) = x^2 - 2x + 1$

73. c) Resposta: $f(x) = -2{,}3 \cdot x^2$

73. Jairo escreveu, em seu caderno, a lei de formação de uma função quadrática f. Depois, ele calculou $f(x)$ para alguns valores de x. A seguir, estão apresentados os valores de x considerados por ele e os respectivos valores de $f(x)$.

Para $x = 2$, $f(x) = -9{,}2$

Para $x = 1$, $f(x) = -2{,}3$

Para $x = 0$, $f(x) = 0$

Para $x = -1$, $f(x) = -2{,}3$

Para $x = -2$, $f(x) = -9{,}2$

73. b) Resposta: Sim, pois o eixo de simetria da parábola coincide com o eixo y e $f(0) = 0$; consequentemente, $b = c = 0$.

a) Qual é o zero da função f? Resposta: $x = 0$

b) Analisando os valores que Jairo calculou, podemos concluir que a função f é do tipo $f(x) = ax^2$? Justifique sua resposta.

c) Escreva a lei de formação da função f.

d) Esboce o gráfico da função f. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

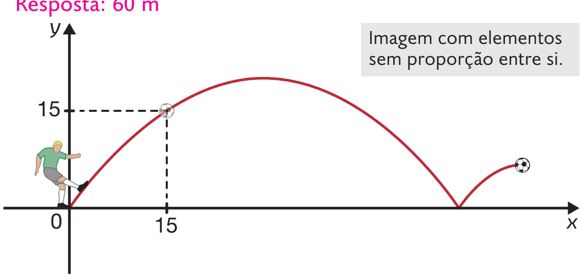
74. Os zeros de uma função quadrática cuja lei de formação é $f(x) = 2x^2 - bx - c$ são $x_1 = 5$ e $x_2 = -4$. Qual é o valor de $b - c$? Resposta: -38

75. Qual é a soma dos zeros da função quadrática definida por $f(x) = 5x^2 + 15x$? Resposta: Alternativa **c**.

a) -5 **c)** -3 **e)** -1

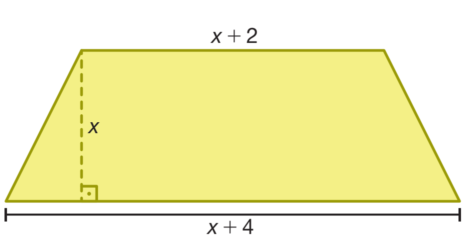
b) -4 **d)** -2

76. Em uma partida de futebol, ao ser chutada por um jogador, a bola descreveu, até tocar o solo, uma trajetória definida pela função f, cuja lei de formação é $f(x) = \frac{4}{3}x - \frac{1}{45}x^2$, em que $f(x)$ indica a altura da bola em relação ao solo após ter percorrido horizontalmente uma distância x. Observando o esquema e considerando as medidas x e y em metros, a qual distância horizontal do jogador a bola tocou o solo pela 1ª vez?
Resposta: 60 m



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

77. Considere o trapézio a seguir, cujas medidas apresentadas estão expressas em metros.



RONALDO INÁCIO/ ARQUIVO DA EDITORA

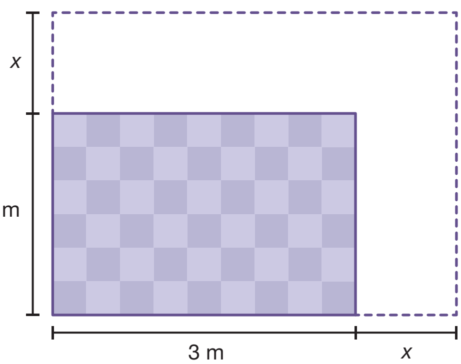
79. d) Resposta pessoal. A resposta depende da pesquisa feita pelos estudantes.

77. a) Resposta: $S(x) = \frac{2x^2 + 6x}{2}$

a) Determine a lei de formação da função S que possibilita determinar a área desse trapézio.

b) Determine o valor x sabendo que a área do trapézio é 10 m². Resposta: $x = 2$ m

78. Cléber vai fazer uma reforma em um dos quartos de sua casa, cujo formato é retangular. O quarto tem 3 m de comprimento por 2 m de largura e será ampliado em uma mesma medida, tanto no comprimento quanto na largura, como mostra a figura a seguir.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

78. a) Resposta: $f(x) = x^2 + 5x + 6$

a) Determine a lei de formação da função quadrática f que permite determinar a área desse quarto após a ampliação da medida x indicada.

b) Cléber deseja que a área desse quarto, após a reforma, seja 12 m². Quantos metros devem ser aumentados no comprimento e na largura para que o quarto fique com a área que Cléber deseja? Resposta: 1 m

79. Considere que a trajetória de um disco após seu lançamento possa ser representada pela função definida por $f(x) = -0{,}01x^2 + 0{,}54x + 1{,}71$, em que $y = f(x)$ represente a altura do disco em relação ao solo durante sua trajetória e x represente a distância horizontal do disco em relação ao atleta, ambos expressos em metros.

a) De que altura, em relação ao solo, o disco foi lançado? Resposta: 1,71 m

b) Após ter percorrido horizontalmente 12 m em relação ao atleta, qual foi a altura atingida pelo disco? Resposta: 6,75 m

c) Qual foi a distância horizontal atingida por esse disco ao tocar o solo? Resposta: 57 m

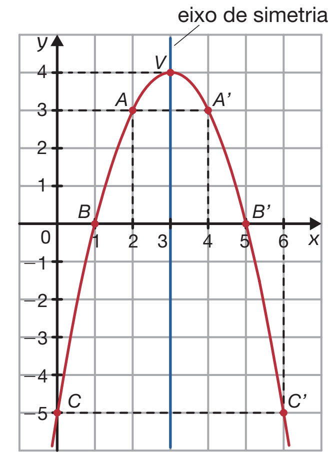
d) Pesquise a respeito dos recordes históricos associados ao lançamento de discos. Depois, converse com seus colegas sobre as informações que você obteve em sua pesquisa.

e) Que benefícios a prática esportiva pode oferecer à saúde e à qualidade de vida das pessoas? Resposta pessoal.

Professor, professora: Oriente os estudantes a escrever as respostas no caderno.

Vértice de uma parábola

Aprendemos anteriormente que o eixo de simetria de uma parábola a intersecta em seu vértice. Agora, vamos determinar as coordenadas do vértice de uma parábola.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

No gráfico da função f definida por $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ estão destacados alguns pontos. Note que $A(2, 3)$ e $A'(4, 3)$ são pontos da parábola com ordenadas iguais. Quando isso ocorre, dizemos que os pontos são simétricos em relação ao eixo de simetria da parábola.

Ao calcularmos a média aritmética das abscissas dos pontos da parábola simétricos em relação ao eixo, obtemos a abscissa do vértice da parábola. No caso de $A(2, 3)$ e $A'(4, 3)$, temos:

$$\frac{2+4}{2} = 3$$

Observação

No cálculo apresentado, adicionamos no numerador a abscissa do ponto A com a abscissa do ponto A' (que, nesse caso, são 2 e 4, respectivamente) e dividimos por 2 para obter a média. Esse resultado corresponde à abscissa do vértice, que no exemplo dado é 3.

Professor, professora: Oriente os estudantes a realizar o cálculo da média aritmética das abscissas dos demais pontos simétricos entre si em destaque no gráfico.

Calculando $f(3)$, obtemos a ordenada do vértice dessa parábola.

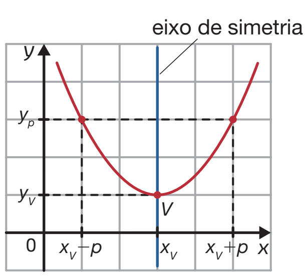
$$f(3) = -3^2 + 6 \cdot 3 - 5 = 4$$

Portanto, o vértice da parábola é $(3, 4)$.

Questão F. Quais são os demais pares de pontos em destaque no gráfico que são simétricos em relação ao eixo de simetria da parábola?

Resposta: $B(1, 0)$ e $B'(5, 0)$; $C(0, -5)$ e $C'(6, -5)$

Para obter as coordenadas do vértice $V(x_V, y_V)$ de uma parábola a partir dos coeficientes de uma função quadrática, consideramos os pontos $(x_V - p,\ y_p)$ e $(x_V + p,\ y_p)$, pertencentes à parábola.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

Verifique que os pontos $(x_V - p, y_p)$ e $(x_V + p,\ y_p)$ são simétricos em relação ao eixo de simetria.

Como $y_p = f(x_V - p)$ e $y_p = f(x_V + p)$, então:

$$\underbrace{f(x_V - p)}_{y_p} = \underbrace{f(x_V + p)}_{y_p}$$

Efetuando os cálculos, temos:

$$f(x_V - p) = f(x_V + p)$$

$$a(x_V - p)^2 + b(x_V - p) + c = a(x_V + p)^2 + b(x_V + p) + c$$

$$a(x_V^2 - 2x_Vp + p^2) + b(x_V - p) + c = a(x_V^2 + 2x_Vp + p^2) + b(x_V + p) + c$$

$$\cancel{ax_V^2} - 2ax_Vp + \cancel{ap^2} + \cancel{bx_V} - bp + \cancel{c} = \cancel{ax_V^2} + 2ax_Vp + \cancel{ap^2} + \cancel{bx_V} + bp + \cancel{c}$$

$$-2ax_Vp - 2ax_Vp = bp + bp$$

$$-4ax_Vp = 2bp$$

$$x_V = -\frac{2bp}{4ap}$$

$$x_V = -\frac{b}{2a}$$

Para obter a ordenada y_V do vértice, calculamos $f(x_V)$, ou seja, $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

$$y_V = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c$$

$$y_V = a \cdot \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$y_V = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$y_V = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a}$$

$$y_V = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$$

O vértice da parábola correspondente à função quadrática definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$ é:

$$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right), \text{ em que } \Delta = b^2 - 4ac$$

Vamos calcular, por exemplo, as coordenadas do vértice da parábola correspondente à função definida por $f(x) = -x^2 + 6x - 5$.

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2 \cdot (-1)} = 3 \qquad y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{6^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-5)}{4 \cdot (-1)} = 4$$

Tal como havíamos obtido anteriormente, o vértice dessa parábola é $V(3, 4)$.

Questão G.

Em seu caderno, escreva um algoritmo que possibilite determinar as coordenadas do vértice do gráfico de uma função quadrática f, dada a lei de formação da função.
Resposta pessoal. Comentários no **Suplemento para o professor**.

Exercícios e problemas resolvidos

R12. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 + 4x - 5$.

a) Em que ponto o gráfico da função intersecta o eixo y?

b) A parábola que representa a função intersecta o eixo y na parte crescente ou decrescente?

c) A concavidade da parábola é voltada para cima ou para baixo? Qual é o vértice da parábola?

Resolução

a) O gráfico da função intersecta o eixo y no ponto de coordenadas $(0,-5)$, pois $c = -5$.

b) A parábola intersecta o eixo y na parte crescente, pois $b = 4 > 0$.

c) A concavidade é voltada para cima, pois $a = 1 > 0$. Temos:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot 1} = -2 \qquad y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{36}{4 \cdot 1} = -9$$

Portanto, o vértice da parábola é $V(-2,-9)$.

80. Determine as coordenadas do vértice da parábola correspondente à função definida por:

a) $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Resposta: $V(1, 2)$

b) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{10}{3}x + 5$. Resposta: $V\left(5, -\frac{10}{3}\right)$

c) $f(x) = x^2 - \sqrt{3}x$. Resposta: $V\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{4}\right)$

81. O eixo de simetria da parábola, que é o gráfico da função definida por $g(x) = 2x^2 - 4x + 1$, intersecta o eixo x no ponto cuja abscissa é:

Resposta: Alternativa **a**.

a) $x = 1$.

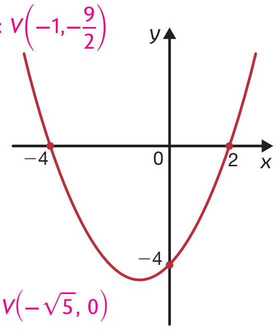
b) $x = -1$.

c) $x = 3$.

d) $x = -2$.

82. Obtenha as coordenadas do vértice da parábola.

Resposta: $V\left(-1, -\frac{9}{2}\right)$



83. d) Resposta: $V\left(-\sqrt{5}, 0\right)$

83. Escreva as coordenadas do vértice da parábola correspondente à função definida por:

a) $f(x) = (x - 1)^2$. Resposta: $V(1, 0)$

b) $f(x) = (x + 3)^2$. Resposta: $V(-3, 0)$

c) $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$. Resposta: $V\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

d) $f(x) = \left(x + \sqrt{5}\right)^2$.

Quais regularidades podem ser verificadas nas coordenadas do vértice da parábola que é o gráfico de uma função do tipo $f(x) = (x + p)^2$, com $p \in \mathbb{R}$?

Sugestão de resposta: A abscissa sempre será $-p$ e a ordenada, 0.

84. Esboce o gráfico da função definida por $f(x) = -\frac{m}{5}x^2 + mx$, sabendo que $f(1) = 8$. Depois, escreva e indique no gráfico os intervalos de crescimento e decrescimento dessa função.

Resposta no final do **Livro do Estudante**.

85. Dada a função quadrática definida por $g(x) = ax^2 + bx + 3$, com $b \neq 0$, a ordenada do vértice $y_v = 2$ da parábola correspondente a essa função, qual número natural mais se aproxima de $\frac{a}{b^2}$?

Resposta: 0

86. As coordenadas do vértice da parábola de uma função quadrática é o ponto $(2, 3)$. Se o gráfico da função intersecta o eixo y no ponto de coordenadas $(0, 5)$, podemos afirmar que:

Resposta: Alternativa **d**.

a) $a > 1$, $b < 1$ e $c < 4$

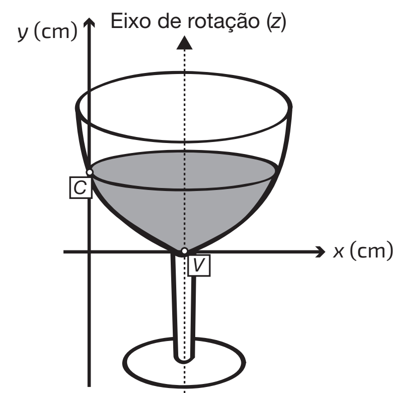
b) $a > 2$, $b > 3$ e $c > 4$

c) $a < 1$, $b < 1$ e $c > 4$

d) $a < 1$, $b > 1$ e $c > 4$

e) $a < 1$, $b < 1$ e $c < 4$

87. (Enem, 2013) A parte interior de uma taça foi gerada pela rotação de uma parábola em torno de um eixo z, conforme mostra a figura.



A função real que expressa a parábola, no plano cartesiano da figura, é dada pela lei $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + C$, em que C é a medida da altura do líquido contido na taça, em centímetros. Sabe-se que o ponto V, na figura, representa o vértice da parábola, localizado sobre o eixo x.

Nessas condições, a altura do líquido contido na taça, em centímetros, é: Resposta: Alternativa **e**.

a) 1

b) 2

c) 4

d) 5

e) 6

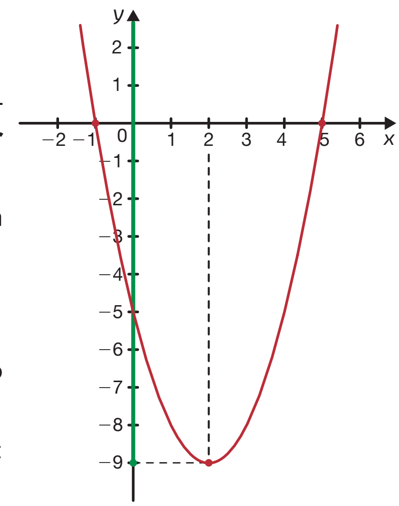
88. Na construção de edifícios e monumentos há formas que se assemelham a uma parábola. Algumas pontes, como no esquema a seguir, têm em sua estrutura um arco em forma de parábola.

O arco em vermelho pode ser representado matematicamente pela função definida por $y = -0{,}0021x^2 + 1{,}0563x$, em que y representa a distância entre o nível do rio e o arco e x representa a distância em linha reta a partir de uma das extremidades do arco no nível do rio, ambos expressos em metros.

a) Se um pássaro pousar na parte mais alta do arco, representado em vermelho no esquema, qual altura ele atingirá em relação ao nível do rio? Resposta: Aproximadamente 133 m.

b) Qual é a distância entre as extremidades do arco em vermelho representada no esquema, no nível do rio? Resposta: 503 m

Valor máximo ou valor mínimo de uma função quadrática



Conhecendo as coordenadas do vértice de uma parábola, podemos determinar a imagem da função quadrática relacionada a ela e também o **valor máximo** ou **valor mínimo** dessa função.

O gráfico da função definida por $f(x) = x^2 - 4x - 5$ é uma parábola com concavidade voltada para cima, pois $a = 1 > 0$. O vértice dessa parábola é:

$$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) \Rightarrow V(2, -9)$$

Como a concavidade é voltada para cima, $V(2,-9)$ é o ponto de mínimo do gráfico de f, e $y_V = -9$ é o valor mínimo de f.

Podemos também determinar o conjunto imagem de f, que nesse caso é:

$$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} | y \geq -9\} \text{ ou } Im(f) = [-9, +\infty[$$

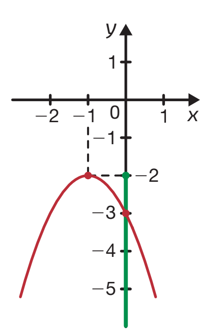
Na função quadrática f, quando $a > 0$, a parábola que a representa tem concavidade voltada para cima. Portanto:

- $V(x_V, y_V)$ é o **ponto de mínimo** do gráfico de f.
- $y_V = -\frac{\Delta}{4a}$ é o **valor mínimo** de f.
- o conjunto imagem de f é: $Im(f) = \left\{y \in \mathbb{R} | y \geq -\frac{\Delta}{4a}\right\}$ ou $Im(f) = \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right[$.

Agora, considere a função definida por $f(x) = -x^2 - 2x - 3$ cujo gráfico é uma parábola com concavidade voltada para baixo, pois $a = -1 < 0$. O vértice dessa parábola é:

$$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) \Rightarrow V(-1, -2)$$

Como a concavidade é voltada para baixo, $V(-1,-2)$ é o ponto de máximo do gráfico de f, e $y_V = -2$ é o valor máximo de f.



Podemos também determinar o conjunto imagem de f, que nesse caso é:

$$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} | y \leq -2\} \text{ ou } Im(f) =]-\infty, -2]$$

Na função quadrática f, quando $a < 0$, a parábola que a representa tem concavidade voltada para baixo. Portanto:

- $V(x_V, y_V)$ é o **ponto de máximo** do gráfico de f.
- $y_V = -\frac{\Delta}{4a}$ é o **valor máximo** de f.
- o conjunto imagem de f é: $Im(f) = \left\{y \in \mathbb{R} | y \leq -\frac{\Delta}{4a}\right\}$ ou $Im(f) = \left]-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right]$.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios e problemas resolvidos

R13. Determine o conjunto imagem da função definida por $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2$.

Resolução

Note que:

- $a = \frac{1}{2} > 0$. Assim, a parábola tem concavidade voltada para cima.
- $y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(-3)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2}{4 \cdot \frac{1}{2}} = -\frac{5}{2}$. Logo, o valor mínimo de f é $-\frac{5}{2}$.

Portanto, $Im(f) = \left[-\frac{5}{2}, +\infty\right[$ ou $Im(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -\frac{5}{2}\right\}$.

R14. Qual é a área máxima de uma região determinada por um retângulo cujo perímetro é 48 cm?

Resolução

Sejam x e z as dimensões do retângulo que determinam a região. Como o perímetro é 48 cm, então:

$$2x + 2z = 48 \Rightarrow 2z = 48 - 2x \Rightarrow z = 24 - x$$

A função que determina a área da região é dada por:

$$f(x) = x \cdot z = x \cdot (24 - x) = -x^2 + 24x$$

Agora, calculamos a área máxima da região. Para isso, fazemos:

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{24^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 0}{4 \cdot (-1)} = 144$$

Portanto, a área máxima da região é 144 cm^2.

R15. Uma empresa oferece o fretamento de um ônibus de 48 lugares na seguinte condição: cada passageiro vai pagar R$ 42,00 fixos mais R$ 3,00 por lugar vago no ônibus. Por exemplo, se sobrarem seis lugares vagos, cada passageiro vai pagar R$ 60,00 $(42 + 6 \cdot 3 = 60)$.

Para que a empresa consiga arrecadar a maior quantia possível, quantos lugares devem ser ocupados? Nesse caso, qual é a quantia arrecadada pela empresa?

Resolução

Seja x a quantidade de lugares vagos no ônibus e $f(x)$**:** a quantia arrecadada pela empresa com o fretamento.

Sabemos que a quantidade de lugares ocupados é dada por $48 - x$. Além disso, cada passageiro deverá pagar à empresa a quantia em reais dada por $42 + 3x$. Com isso, a lei de formação da função que expressa a quantia arrecadada pela empresa em relação à quantidade de lugares vagos no ônibus é:

$$f(x) = (48 - x) \cdot (42 + 3x) = -3x^2 + 102x + 2\,016$$

Para obter a quantia máxima que a empresa pode arrecadar com o fretamento do ônibus, calculamos o valor máximo da função f.

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{102^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 2\,016}{4 \cdot (-3)} = 2\,883$$

Agora, determinamos a quantidade de lugares vagos correspondente à arrecadação máxima, ou seja, calculamos:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{102}{2 \cdot (-3)} = 17$$

Desse modo, podemos concluir que a empresa vai arrecadar a quantia máxima caso 17 lugares fiquem vagos no ônibus, ou seja, se forem ocupados 31 lugares, pois:

$$48 - 17 = 31$$

Portanto, para que a empresa consiga arrecadar a maior quantia, ou seja, R$ 2 883,00, é necessário que 31 lugares estejam ocupados.

Valor máximo ou valor mínimo de uma função quadrática

Nesta seção, vamos determinar o valor máximo ou mínimo de uma função quadrática. Para isso, vamos investigar os pontos de máximo e de mínimo do gráfico de funções quadráticas com o auxílio de um *software* de Geometria dinâmica disponível gratuitamente.

Professor, professora: Outras informações sobre o *software* de Geometria dinâmica no **Suplemento para o professor**.

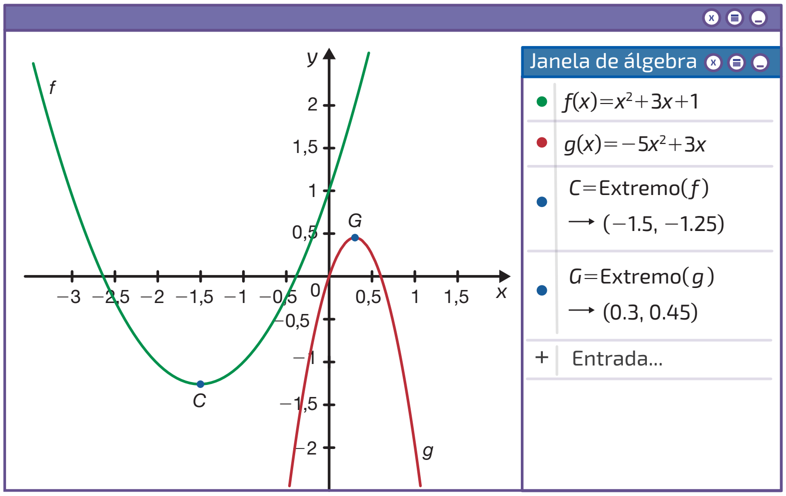
Como exemplo, analisaremos o gráfico das funções definidas por $f(x) = x^2 + 3x + 1$ e $g(x) = -5x^2 + 3x$.

A. Para construir o gráfico da função f, no campo **Entrada**, digite $f(x) = x$^2 $+ 3x + 1$ e pressione a tecla **Enter**. De maneira semelhante, construa o gráfico da função g digitando $g(x) = -5x$^2 $+ 3x$ no campo **Entrada** e pressionando a tecla **Enter**.

B. Na **Janela de Álgebra**, clique sobre os três pontos localizados no campo destinado à lei de formação de f. Em seguida, selecione a opção **Pontos Especiais**. Repita esse procedimento para a função g.

Observação

Ao selecionar a opção **Pontos Especiais**, outros pontos também são indicados na **Janela de Álgebra**, como os pontos de interseção entre o gráfico da função e o eixo x. Porém, no exemplo apresentado, exibimos apenas os pontos de máximo ou de mínimo das funções.



O ponto de mínimo do gráfico da função f está indicado por $C =$ Extremo(f) e o ponto de máximo do gráfico da função g, por $G =$ Extremo(g).

Portanto, o valor mínimo da função f é $-1{,}25$ e o valor máximo da função g é $0{,}45$.

Agora é sua vez!

Respostas no final do **Livro do Estudante**.

1. Com o auxílio de um *software* de Geometria dinâmica, determine os valores máximos ou mínimos das funções cuja lei de formação é apresentada a seguir. Se não for possível o acesso ao *software*, determine esses valores em seu caderno.

a) $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$

b) $f(x) = x^2 - 3x + 4$

c) $f(x) = -2x^2 - 20x - 2$

2. No problema **R14** resolvido, da página anterior, determinamos a área máxima da região delimitada por um retângulo cujo perímetro é 48 cm. Agora, determine quais são as dimensões do retângulo para que se obtenha a área máxima dessa região.

Professor, professora: Nas tarefas **92**, **93**, **94**, **96**, **98**, **100** e **102** deste tópico, é solicitado o uso de um *software* de Geometria dinâmica. Se julgar conveniente, proponha o desenvolvimento dessas tarefas logo após o trabalho com a seção **Acessando tecnologias** da página **151**.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

89. Determine o conjunto imagem da função definida por:

a) $f(x) = 4x^2 - 8x + 4$.

b) $f(x) = -7x^2 + \sqrt{2}x$.

c) $f(x) = -6x^2 + 1$.

d) $f(x) = x^2 - 6x + 6$.

e) $f(x) = 9x^2$.

a) Resposta: $Im(f) = [0, +\infty[$ ou $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$

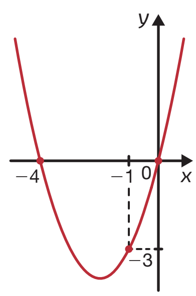
b) Resposta: $Im(f) = \left]-\infty, \frac{1}{14}\right]$ ou $Im(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq \frac{1}{14}\right\}$

c) Resposta: $Im(f) =]-\infty, 1]$ ou $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 1\}$

d) Resposta: $Im(f) = [-3, +\infty[$ ou $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -3\}$

Quais regularidades podem ser verificadas no conjunto imagem das funções do tipo $f(x) = ax^2 + c$?
Resposta no final do **Livro do Estudante**.

90. Analisando o gráfico da função quadrática, determine:



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

a) a lei dessa função.
Resposta: $y = x^2 + 4x$

b) as coordenadas do vértice da parábola. Resposta: $V(-2, -4)$

c) o valor mínimo da função.
Resposta: -4

91. Em cada item, determine os valores de p para que a função quadrática dada por:

a) $f(x) = (2p - 8)x^2 + 5x - 13$ admita valor mínimo. Resposta: $p > 4$

b) $g(x) = -4x^2 + (p^2 - 1)x + 9$ admita valor máximo para $x = 6$. Resposta: $p = -7$ ou $p = 7$.

c) $h(x) = 3x^2 + 6x - (2 - p)$ admita valor mínimo igual a -8. Resposta: $p = -3$

92. Em uma metalúrgica, o custo c, em reais, para produzir n peças de metal pode ser calculado por $c(n) = 0{,}04n^2 - 4n + 110$. Usando um *software* de Geometria dinâmica, determine para qual quantidade de peças o custo de produção é mínimo. Qual é esse custo mínimo?
Resposta: 50 peças; R$ 10,00.

93. O lucro (ou prejuízo) L de uma pequena empresa é calculado pela diferença entre a **receita** R e o custo C. Nessa empresa, a receita e o custo são dados, respectivamente, pelas funções definidas por $R(x) = 180x - x^2$ e $C(x) = 30x + 1\,200$, em reais, em que x representa a quantidade vendida mensalmente de determinados itens.

a) Determine a lei de formação da função lucro L.
Resposta: $L(x) = -x^2 + 150x - 1\,200$

b) Usando um *software* de Geometria dinâmica, determine:

- quantos itens devem ser vendidos nessa empresa para que o lucro seja máximo.
Resposta: 75 itens.
- o lucro máximo dessa empresa, em reais.
Resposta: R$ 4 425,00

Receita: valor monetário total recebido, arrecadado ou apurado.

89. e) Resposta: $Im(f) = [0, +\infty[$ ou $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$

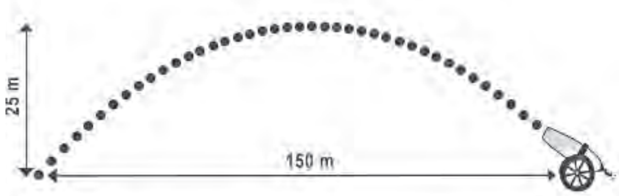
94. Um avicultor pretende cercar uma região retangular em sua chácara para criar galinhas. Para isso, ele comprou 80 m de tela e pretende usá-la de modo a obter a maior área possível. Com o auxílio de um *software* de Geometria dinâmica, determine quais devem ser os comprimentos dos lados e a área máxima desse galinheiro.

95. (FGV-SP, 2010) O transporte aéreo de pessoas entre duas cidades **A** e **B** é feito por uma única companhia em um único voo diário. O avião utilizado tem 180 lugares, e o preço da passagem p relaciona-se com o número x de passageiros por dia pela relação $p = 300 - 0{,}75x$. A receita máxima possível por viagem é: Resposta: Alternativa **d.**

a) R$ 30 000,00
b) R$ 29 900,00
c) R$ 29 800,00
d) R$ 29 700,00
e) R$ 29 600,00

96. Uma loja de uniformes escolares vende diariamente uma média de 20 calças por R$ 80,00 cada. Ao realizar uma promoção, o gerente da loja percebeu que, a cada R$ 0,50 que baixava no preço, a venda de calças aumentava em 1 unidade por dia. Usando um *software* de Geometria dinâmica, determine qual deve ser o preço de cada calça para que se tenha a maior receita. Qual é o valor dessa receita?
Resposta: R$ 45,00; R$ 4 050,00

97. (Enem, 2018) Um projétil é lançado por um canhão e atinge o solo a uma distância de 150 metros do ponto de partida. Ele percorre uma trajetória parabólica, e a altura máxima que atinge em relação ao solo é de 25 metros.



ENEM 2018

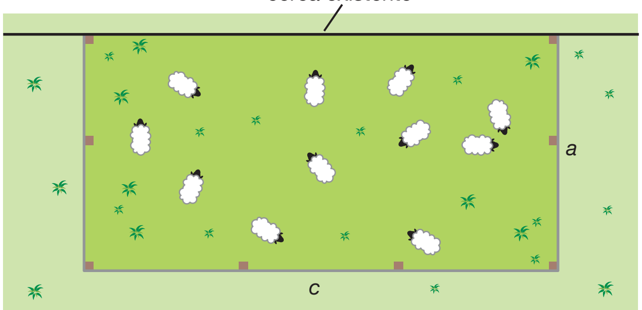
Admita um sistema de coordenadas xy em que no eixo vertical y está representada a altura e no eixo horizontal x está representada a distância, ambas em metro. Considere que o canhão está no ponto $(150; 0)$ e que o projétil atinge o solo no ponto $(0; 0)$ do plano xy.

A equação da parábola que representa a trajetória descrita pelo projétil é: Resposta: Alternativa **e.**

a) $y = 150x - x^2$
b) $y = 3\,750x - 25x^2$
c) $75y = 300x - 2x^2$
d) $125y = 450x - 3x^2$
e) $225y = 150x - x^2$

94. Resposta: Os lados devem ter 20 m de comprimento e a área máxima deve ter 400 m².

98. Osvaldo vai cercar uma região retangular de seu sítio para criar carneiros. Ele tem um rolo de arame com 240 m e deseja construir a cerca com quatro fios. Sabendo que ele vai aproveitar uma cerca que já tem na propriedade, determine, com um *software* de Geometria dinâmica, qual deve ser a largura a e o comprimento c para que Osvaldo consiga uma área máxima de pastagem para sua criação. Resposta: $a = 15$ m e $c = 30$ m



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

99. A popularização do vôlei no Brasil ocorreu no fim da década de 1970 e início da década de 1980. Um dos responsáveis foi o jogador Bernard Rajzman, que ficou conhecido pelo famoso saque "jornada nas estrelas". Professor, professora: Explique aos estudantes que em ambas as funções apresentadas nesta tarefa considerou-se, por aproximação, que a bola foi golpeada a partir do solo.

OBJETO DIGITAL ***Infográfico clicável*****:** O saque "jornada nas estrelas"


RENATA FALZONI/FOLHAPRESS

Bernard executando o saque "jornada nas estrelas" em uma partida da Copa Mundial de Clubes, na cidade de São Paulo, SP, em 1984.

Em uma partida de vôlei, na aula de Educação Física, Rafael fez a jogada criada por Bernard, executando o saque "jornada nas estrelas". Desconsiderando a altura da bola no momento do saque, a bola descreveu aproximadamente uma trajetória parabólica, que pode ser descrita pela função definida por $h(d) = -0{,}398d^2 + 5{,}572d$, em que d representa a distância horizontal em metros, e h, a altura também em metros.

a) Qual foi a distância horizontal da bola ao tocar o solo após o saque de Rafael? Resposta: 14 m

b) Qual foi a altura máxima alcançada pela bola no saque de Rafael? Resposta: Aproximadamente 19,5 m.

c) Esboce um gráfico relacionando a distância e a altura alcançadas pela bola com $0 \leq d \leq 14$. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

100. Flaviane e Carol estavam disputando uma partida de golfe em um campo plano. Flaviane realizou uma tacada na qual a bola descreveu uma trajetória representada pela função definida por $f(x) = -\frac{x^2}{100} + \frac{x}{5}$. Em seguida, Carol realizou uma tacada na qual a bola descreveu uma trajetória representada pela função definida por $g(x) = -\frac{x^2}{32} + \frac{x}{2}$.

Considerando x a distância horizontal e $f(x)$ e $g(x)$ a altura, em metros, de cada tacada, responda às questões propostas usando um *software* de Geometria dinâmica.

a) Qual das garotas conseguiu fazer com que a bola alcançasse a maior distância horizontal ao tocar o solo? Qual foi essa distância? Resposta: Flaviane; 20 m.

b) Qual das garotas conseguiu fazer a bola atingir maior altura? Qual foi essa altura? Resposta: Carol; 2 m.

101. Um projétil, lançado do nível do solo, atingiu altura máxima de 78,4 m. Sabendo que esse projétil retornou ao solo após um tempo $t = 8$ s, qual das expressões melhor representa a altura desse projétil em função do tempo t? Resposta: Alternativa **b.**

a) $f(t) = -9{,}8t^2 + 39{,}2t$

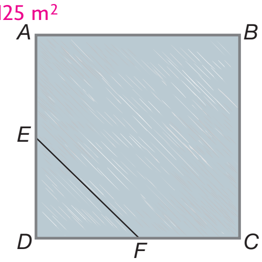
b) $f(t) = -4{,}9t^2 + 39{,}2t$

c) $f(t) = 4{,}9t^2 - 39{,}2t$

d) $f(t) = -9{,}8t^2 - 4{,}9t$

102. Da chapa metálica quadrada $ABCD$, com área de 9 m², deseja-se cortar a região triangular DEF, de modo que $AE = DF$. Com um *software* de Geometria dinâmica, determine qual deve ser a área do triângulo DEF para que o pentágono $ABCFE$ tenha a menor área possível.

Resposta: 1,125 m²



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

103. Estudamos anteriormente que a rapidez de propagação R de um boato é dada por $R(x) = k \cdot x \cdot (P - x)$, sendo P o público-alvo, x a quantidade de pessoas que conhecem o boato e k uma constante positiva característica dele.

Considerando o modelo apresentado, se o público-alvo for 66 460 pessoas, então a máxima rapidez de propagação ocorrerá quando o boato for conhecido por: Resposta: Alternativa **c.**

a) 11 030 pessoas.

b) 22 100 pessoas.

c) 33 230 pessoas.

d) 38 030 pessoas.

e) 66 460 pessoas.

Estudo do sinal de uma função quadrática

Anteriormente, ao estudarmos o sinal de uma função afim f determinamos os valores de x do domínio para os quais $f(x) = 0$, $f(x) > 0$ e $f(x) < 0$. Para o estudo do sinal de uma função quadrática, consideraremos três casos.

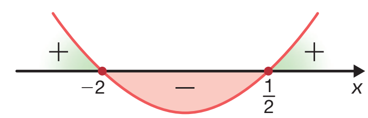
1º caso: $\Delta > 0$

Vamos verificar para quais valores do domínio da função f definida por $f(x) = 2x^2 + 3x - 2$ temos $f(x) = 0$, $f(x) > 0$ e $f(x) < 0$.

Inicialmente, verificamos a concavidade da parábola e os zeros da função. Como:

- $a = 2 > 0$, a parábola tem concavidade voltada para cima;
- $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 25 > 0$, a função tem dois zeros distintos, x_1 e x_2.

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm 5}{4} \qquad x_1 = \frac{1}{2} \qquad x_2 = -2$$

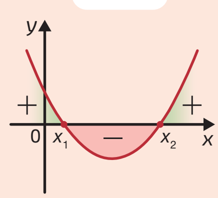


Portanto:

- $f(x) = 0$ para $x = -2$ ou $x = \frac{1}{2}$.
- $f(x) < 0$ para $-2 < x < \frac{1}{2}$.
- $f(x) > 0$ para $x < -2$ ou $x > \frac{1}{2}$.

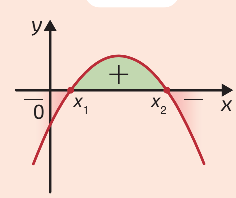
Quando $\Delta > 0$, a função quadrática f tem dois zeros distintos $(x_1 \neq x_2)$ e a parábola intersecta o eixo x em dois pontos. Nesse caso, no estudo do sinal de f, temos:

$a > 0$



- $f(x) = 0$ para $x = x_1$ ou $x = x_2$.
- $f(x) > 0$ para $x < x_1$ ou $x > x_2$.
- $f(x) < 0$ para $x_1 < x < x_2$.

$a < 0$



- $f(x) = 0$ para $x = x_1$ ou $x = x_2$.
- $f(x) > 0$ para $x_1 < x < x_2$.
- $f(x) < 0$ para $x < x_1$ ou $x > x_2$.

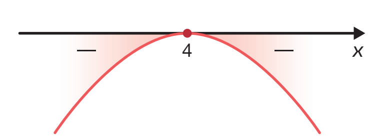
2º caso: $\Delta = 0$

Agora, vamos verificar para quais valores do domínio da função definida por $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 8$ temos $f(x) = 0$, $f(x) > 0$ e $f(x) < 0$.

Inicialmente, verificamos a concavidade da parábola e os zeros da função. Como:

- $a = -\frac{1}{2} < 0$, a parábola tem concavidade voltada para baixo;
- $\Delta = 4^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-8) = 0$, a função tem dois zeros iguais, $x_1 = x_2$.

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{-4 \pm 0}{-1} \qquad x_1 = 4 \qquad x_2 = 4$$

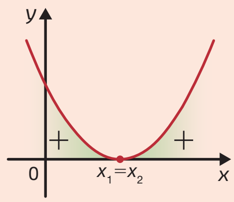


Portanto:

- $f(x) = 0$ para $x = 4$.
- $\nexists\, x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) > 0$.
- $f(x) < 0\ \forall x \neq 4$.

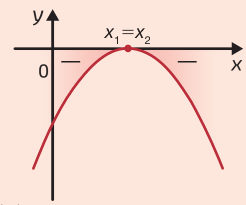
Quando $\Delta = 0$, a função quadrática f tem dois zeros iguais $(x_1 = x_2)$ e a parábola intersecta o eixo x em um único ponto. Nesse caso, no estudo do sinal de f, temos:

$a > 0$



- $f(x) = 0$ para $x = x_1 = x_2$.
- $f(x) > 0\ \forall x \neq x_1$.
- $\nexists\, x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) < 0$.

$a < 0$



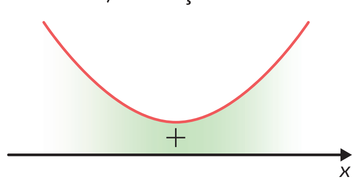
- $f(x) = 0$ para $x = x_1 = x_2$.
- $\nexists\, x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) > 0$.
- $f(x) < 0\ \forall x \neq x_1$.

3º caso: $\Delta < 0$

Vamos verificar para quais valores do domínio da função f definida por $f(x) = x^2 - x + 6$ temos $f(x) = 0$, $f(x) > 0$ e $f(x) < 0$.

Inicialmente, verificamos a concavidade e os zeros da função. Como:

- $a = 1 > 0$, a parábola tem concavidade voltada para cima;
- $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = -23 < 0$, a função não tem zeros.

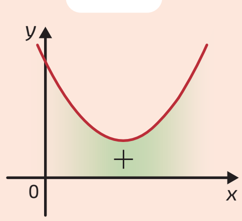


Portanto:

- $\nexists\, x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$.
- $f(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$.
- $\nexists\, x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) < 0$.

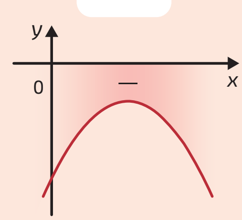
Quando $\Delta < 0$, a função quadrática f não tem zeros e a parábola não intersecta o eixo x. Nesse caso, no estudo do sinal de f, temos:

$a > 0$



- $\nexists\, x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$.
- $\nexists\, x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) < 0$.
- $f(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$.

$a < 0$



- $\nexists\, x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$.
- $\nexists\, x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) > 0$.
- $f(x) < 0\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Observação

- $\nexists\, x \in \mathbb{R}$ lê-se "não existe x pertencente aos reais".
- $\forall\ x \neq 4$ lê-se "para qualquer que seja x diferente de 4".

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios e problemas resolvidos

R16. Sejam as funções f e g definidas por $f(x) = x^2 + x - 1$ e $g(x) = 2x^2 + x - 2$. Para quais valores de x temos $f(x) > g(x)$?

Resolução

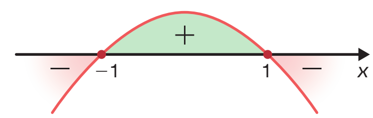
Uma maneira de comparar as funções f e g é estudar o sinal da função h, dada por $h(x) = f(x) - g(x)$. Nesse caso, temos:

$$h(x) = f(x) - g(x) = x^2 + x - 1 - \left(2x^2 + x - 2\right) =$$
$$= x^2 + x - 1 - 2x^2 - x + 2 \Rightarrow h(x) = -x^2 + 1$$

Agora, verificamos a concavidade e os zeros da função h.

Como $a = -1 < 0$, a parábola tem concavidade voltada para baixo.

A função tem dois zeros distintos, x_1 e x_2.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

$-x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1$ $\qquad x_1 = 1$ $\qquad x_2 = -1$

Assim:

- $h(x) = 0$ para $x = -1$ ou $x = 1$. Nesse caso, $f(x) = g(x)$.
- $h(x) > 0$ para $x \in \,]-1, 1[$. Nesse caso, $f(x) > g(x)$.
- $h(x) < 0$ para $x \in \,]-\infty, -1[\,\cup\,]1, +\infty[$. Nesse caso, $f(x) < g(x)$.

Portanto, para $x \in \,]-1, 1[$, temos $f(x) > g(x)$.

Exercícios e problemas

Professor, professora: Diga aos estudantes que o CPTEC tem um sistema de computadores de última geração que possibilita uma previsão meteorológica confiável para todo o território nacional.

Anote as respostas no caderno.

104. Realize o estudo do sinal da função definida por:
Respostas no final do **Livro do Estudante**.

a) $f(x) = x^2 - 6x + 8$.
b) $f(x) = -x^2 + 9$.
c) $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$.
d) $f(x) = -2x^2 + 8x$.

105. Considere a função quadrática f. Sabendo que $f(x) > 0$ somente para $x < -5$ ou $x > 2$ e que o gráfico dessa função passa pelo ponto de coordenadas $(0, -20)$, determine a lei de f.
Resposta: $f(x) = 2x^2 + 6x - 20$

106. Determine os valores de k na função definida por $h(x) = -3x^2 - 6x + k$, de modo que $h(x) < 0$ para todo x real. Resposta: $k < -3$

107. Quais são os valores que x pode assumir na função definida por $f(x) = -x^2 + x + 12$ para que $f(x) \geq 0$?
Resposta: $-3 \leq x \leq 4$

108. Considere as funções definidas por $g(x) = x + 2$ e $h(x) = 6 - 3x$. Para quais valores de x temos $g(x) \cdot h(x) - h(x) \leq 6$? Resposta: $x \leq 0$ ou $x \geq 1$

109. As funções que relacionam a receita R e o custo C de uma fábrica são dadas por $R(n) = -\frac{1}{2}n^2 + 20n$ e $C(n) = n^2 - 40n$, sendo n a quantidade de peças produzidas diariamente. Sabendo que o lucro/prejuízo é a diferença entre a receita e o custo, a partir de quantas peças produzidas diariamente essa fábrica tem prejuízo? Resposta: A partir de 41 peças.

111. c) Resposta: 12 h 36 min; 26,05 °C

110. Os valores de x para os quais a função definida por $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 15}{2^x + 1}$ é tal que $f(x) < 0$ é dado por:

a) $2 < x < 4$.
b) $-1 < x \leq 0$.
c) $-3 < x < 5$.
d) $x > 5$.
e) $x \leq -3$.

Resposta: Alternativa **c**.

111. Alguns estudantes consultaram, no *site* do Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos (CPTEC), a temperatura em um município, em vários horários entre as 6 h e as 18 h de certo dia, obtendo como modelo a função dada por $f(x) = -\frac{5}{36}x^2 + \frac{7}{2}x + 4$, em que $f(x)$ representa a temperatura em graus Celsius no horário x.

a) Qual foi, aproximadamente, a temperatura registrada às 10 h? E às 17 h?
Resposta: 25,11 °C; 23,36 °C

b) Em quais horários a temperatura registrada foi superior a 22 °C?
Resposta: Entre as 7 h 12 min e as 18 h.

c) Em que horário foi registrada a maior temperatura? Qual foi essa temperatura?

d) Junte-se a um colega e conversem a respeito da importância das previsões meteorológicas para a agricultura e outras aplicações. Em seguida, registrem as conclusões a que chegaram.
Resposta pessoal. Comentários no **Suplemento para o professor**.

Inequação do 2º grau

Aprendemos anteriormente que resolver uma inequação consiste em determinar os valores de x que tornam a desigualdade verdadeira, ou seja, obter o conjunto solução da inequação. Neste tópico, resolveremos inequações do 2º grau por meio do estudo do sinal da função quadrática correspondente.

Denominamos inequação do 2º grau toda desigualdade que, quando reduzida, apresenta uma das seguintes formas.

- $ax^2 + bx + c > 0$
- $ax^2 + bx + c \geq 0$
- $ax^2 + bx + c < 0$
- $ax^2 + bx + c \leq 0$

em que a, b e c são constantes reais, com a diferente de zero.

Exemplos

- $x^2 + 4x - \frac{1}{3} < 0$
- $-x^2 + 4 \geq -2$
- $2x - 5 > x^2 - 5$
- $\frac{1}{4}x^2 + 3x + 10 \leq 3$
- $x^2 \geq 0$
- $3x^2 + 2 < x^2 - 2x$
- $-x^2 - \frac{1}{2}x < 2x^2 - \frac{1}{2}x$
- $-\sqrt{3}x^2 - \frac{1}{2}x < 2x^2 - \frac{\sqrt{5}}{2}x$

Exercícios e problemas resolvidos

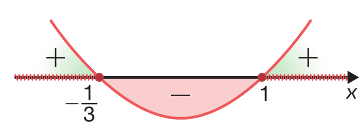
R17. Resolva, no conjunto dos números reais, a inequação de cada item.

a) $3x^2 - 2x - 1 \geq 0$ **b)** $4x^2 + 2x + 1 < 0$ **c)** $-2x^2 + 12x - 18 < 0$

Resolução

a) Consideramos a função f dada por $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$. Fazendo o estudo do sinal de f, segue que:

- $a = 3 > 0$
- $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 16$
- $x = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 3} = \dfrac{2 \pm 4}{6}$ $\quad x_1 = 1 \quad x_2 = -\dfrac{1}{3}$

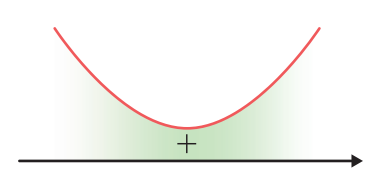


Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \leq -\frac{1}{3} \text{ ou } x \geq 1\right\}$.

b) Consideramos a função g dada por $g(x) = 4x^2 + 2x + 1$. Fazendo o estudo do sinal de g, segue que:

- $a = 4 > 0$
- $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = -12 < 0$

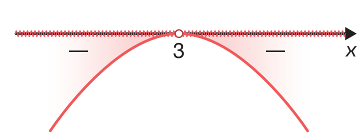
  Logo, g não tem zeros.



Portanto, $S = \{\ \}$ ou $S = \varnothing$.

c) Consideramos a função h dada por $h(x) = -2x^2 + 12x - 18$. Fazendo o estudo do sinal de h, segue que:

- $a = -2 < 0$
- $\Delta = 12^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-18) = 0$
- $x = \dfrac{-12 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot (-2)} = 3$



Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 3\}$.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

119. c) Professor, professora: Lembre os estudantes de que o raio de uma circunferência inscrita em um polígono regular corresponde ao apótema do polígono.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

112. Resolva, no conjunto dos números reais, a inequação de cada item. a) Resposta: $S = \{x \in \mathbb{R} | -5 < x < -1\}$

a) $3x^2 + 18x + 15 < 0$

b) $(x - 6)^2 \geq 0$ Resposta: $S = \mathbb{R}$

c) $2x^2 + 4x - 6 \leq 0$ Resposta: $S = \{x \in \mathbb{R} | -3 \leq x \leq 1\}$

d) $-x^2 - 4x - 5 < 0$ Resposta: $S = \mathbb{R}$

113. Qual das inequações a seguir tem como conjunto solução $S = \{x \in \mathbb{R} | x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1\}$? Resposta: Alternativa **a**.

a) $x^2 - 1 \geq 0$

b) $x^2 + 1 \geq 0$

c) $x^2 - 4 < 0$

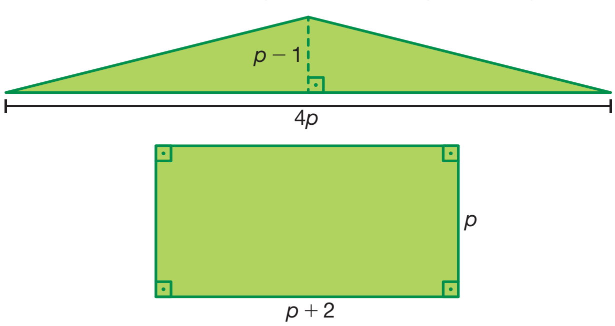
d) $x^2 - 1 \leq 0$

114. Dada a função f definida por $f(x) = -3x^2 + x + 7$, determine os valores reais de x para que se tenha $f(-1) \geq f(x + 3)$. Resposta: $S = \left\{x \in \mathbb{R} | x \leq -4 \text{ ou } x \geq -\frac{5}{3}\right\}$

115. Para quais valores inteiros de k a inequação $5x^2 + 2kx - k > 0$ é satisfeita para todo x real? Resposta: -4, -3, -2 e -1

116. Qual é o domínio da função h definida por $h(x) = \sqrt{-x^2 + 3x + 10}$? Resposta: $D(h) = \{x \in \mathbb{R} | -2 \leq x \leq 5\}$

117. Considere o triângulo e o retângulo a seguir.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

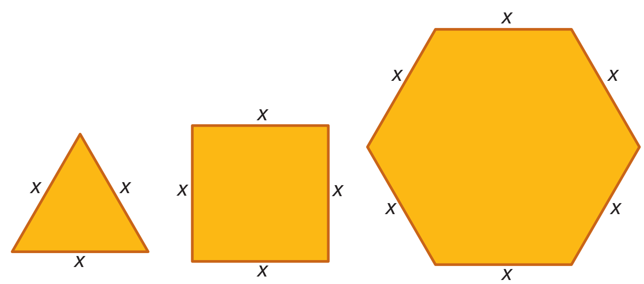
Para quais valores de p a área do triângulo é maior do que a do retângulo? Resposta: $p > 4$

118. Certa empresa freta ônibus com 40 lugares para excursões a uma colônia de férias e oferece dois planos. Resposta: Para grupos entre 5 e 25 passageiros, o plano 1 é mais vantajoso financeiramente que o plano 2.

- Plano **1**: Taxa de R\$ 250,00 mais R\$ 40,00 por passageiro.
- Plano **2**: Cada passageiro paga R\$ 20,00 mais uma taxa de R\$ 2,00 por lugar sem ocupação.

Em quais situações o plano **1** é mais vantajoso financeiramente que o plano **2** para os clientes dessa empresa de frete de ônibus?

119. Considere um triângulo equilátero, um quadrado e um hexágono regular com lados medindo x cm de comprimento.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

a) Com o auxílio de um *software* de Geometria dinâmica, represente graficamente a função que expressa a área desses polígonos em função de x e a função que expressa o perímetro desses polígonos em função de x. O que você pode verificar? Resposta no final do **Livro do Estudante**.

b) As representações gráficas obtidas por você no item **a** correspondem a funções afins ou a funções quadráticas? Resposta: Perímetros: funções afins; áreas: funções quadráticas.

c) Considere um retângulo cujas dimensões são 5 cm e x cm. Para quais valores de x:

- o perímetro do quadrado é maior do que o do retângulo? Resposta: $x > 5$
- a área do hexágono é maior do que a área do retângulo? Resposta: $x > \frac{10\sqrt{3}}{9}$
- a área do triângulo e a do retângulo são iguais? Resposta: $x = \frac{20\sqrt{3}}{3}$

120. Considere um octógono regular inscrito em uma circunferência cujo comprimento do raio é r. Sabendo que o comprimento do lado e do apótema desse octógono é x cm e $\frac{r\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$ cm, respectivamente, e que $x = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}$, resolva o que se pede.

a) Escreva uma expressão que permita calcular:

- o perímetro P do octógono em função do comprimento de seu lado. Resposta: $P = 8x$
- a área A do octógono em função do comprimento de seu lado. Resposta: $A = 2x^2(1 + \sqrt{2})$

b) Com um *software* de Geometria dinâmica, represente graficamente a área e o perímetro desse polígono em função do comprimento de seu lado. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

c) As representações gráficas obtidas por você no item **b** correspondem a funções afins ou a funções quadráticas? Resposta: Perímetro: função afim; área: função quadrática.

d) Para quais valores de x a área da região determinada por esse octógono é maior do que a área da região determinada por um retângulo cujas dimensões são 5 cm e 3 cm? Resposta: $x > \sqrt{\frac{15(\sqrt{2} - 1)}{2}}$

SÍNTESE DO CAPÍTULO

Neste capítulo, estudamos função afim e função quadrática, gráficos relacionados a essas funções e conceitos para as resoluções de outras operações matemáticas e situações-problema. Estudamos também modelo linear, modelo de regressão linear, coeficientes de uma função quadrática, vértice de uma parábola, valor de máximo ou mínimo de uma função quadrática, além das inequações do 1º e do 2º grau. Agora, reflita sobre seus conhecimentos! 2. Resposta pessoal. Comentários no **Suplemento para o professor**.

Como estratégia de estudos, sugerimos que você faça uma autoavaliação, revise conceitos e sintetize o que foi estudado. Para isso, resolva as questões propostas.

1. Você conhecia alguns conteúdos estudados neste capítulo? Se sim, cite-os.
Resposta pessoal. Comentários no **Suplemento para o professor**.

2. Em quais dos tópicos apresentados a seguir você teve dificuldades ou ficou com dúvidas? Reflita sobre esses questionamentos e, se necessário, retome o que foi estudado.

3. Sugestão de resposta: Função afim: velocidade média de um automóvel; valor pago em reais em um *self-service* em função da massa, em quilogramas, de alimento. Função quadrática: trajetória de uma bola chutada por um jogador em uma partida de futebol, até tocar o solo; em epidemias, como a da dengue, de modo a evitar a proliferação do mosquito *Aedes aegypti*.

- Função afim.
- Gráfico de uma função afim.
- Zero de uma função afim.
- Modelo de regressão linear.

6. Resposta: Uma função afim é crescente à medida que aumentamos os valores de x, e os valores correspondentes de y também aumentam.

- Modelo linear.
- Inequação do 1º grau.
- Função quadrática.
- Inequação do 2º grau.
- Vértice de uma parábola.

8. Resposta: Por meio da análise do coeficiente a, podemos verificar se seu gráfico tem concavidade voltada para cima ou para baixo e também podemos obter informações a respeito da abertura da parábola. Já o coeficiente b indica se o gráfico intersecta o eixo y no ramo crescente ou no ramo decrescente, e o coeficiente c corresponde à ordenada do ponto em que o gráfico intersecta o eixo y.

- Estudo do sinal de uma função afim.
- Zeros de uma função quadrática.
- Gráfico de uma função quadrática.
- Proporcionalidade e função linear.

11. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes apontem função afim e função quadrática, função afim crescente e função afim decrescente, gráficos de uma função afim e de uma função quadrática, zero de uma função afim e zeros de uma função quadrática, estudo do sinal de uma função afim e quadrática, proporcionalidade e função linear, modelo linear e de regressão, coeficientes de uma função quadrática, vértice de uma parábola, valor máximo ou valor mínimo de uma função quadrática e estudo do sinal de uma função quadrática. Além disso, espera-se que eles reservem parte da síntese para o que foi estudado acerca de inequações de 1º e 2º graus.

- Coeficientes de uma função quadrática.
- Valor máximo ou valor mínimo de uma função quadrática.
- Estudo do sinal de uma função quadrática.
- Função afim crescente e função afim decrescente.

3. Cite pelo menos uma situação na qual utilizamos função afim e função quadrática.

4. Quando uma função afim é chamada de função linear?
Resposta: Quando $b = 0$.

5. A que os zeros de uma função afim correspondem graficamente?
Resposta: Graficamente, os zeros de uma função afim correspondem às abscissas dos pontos em que o gráfico intersecta o eixo x.

6. O que caracteriza uma função afim crescente?

7. Como você define uma inequação do 1º grau? Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes definam uma inequação do 1º grau como uma desigualdade que envolve expressões do tipo $ax + b > 0$, $ax + b < 0$, $ax + b \geq 0$ e $ax + b \leq 0$, em que a e b são constantes reais, com a diferente de zero.

8. Que informações obtemos ao analisar os coeficientes de uma função quadrática?

9. O que podemos determinar conhecendo as coordenadas do vértice de uma parábola? Resposta: Podemos determinar a imagem da função quadrática relacionada a ela e também o valor máximo ou o valor mínimo dessa função.

10. Escolha um dos conteúdos estudados neste capítulo e elabore um problema envolvendo esse assunto. Depois, troque com um colega para que ele o resolva. Por fim, verifique se a resposta obtida por ele está correta. Resposta pessoal. Antes de os estudantes elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos nas seções **Exercícios e problemas** deste capítulo e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

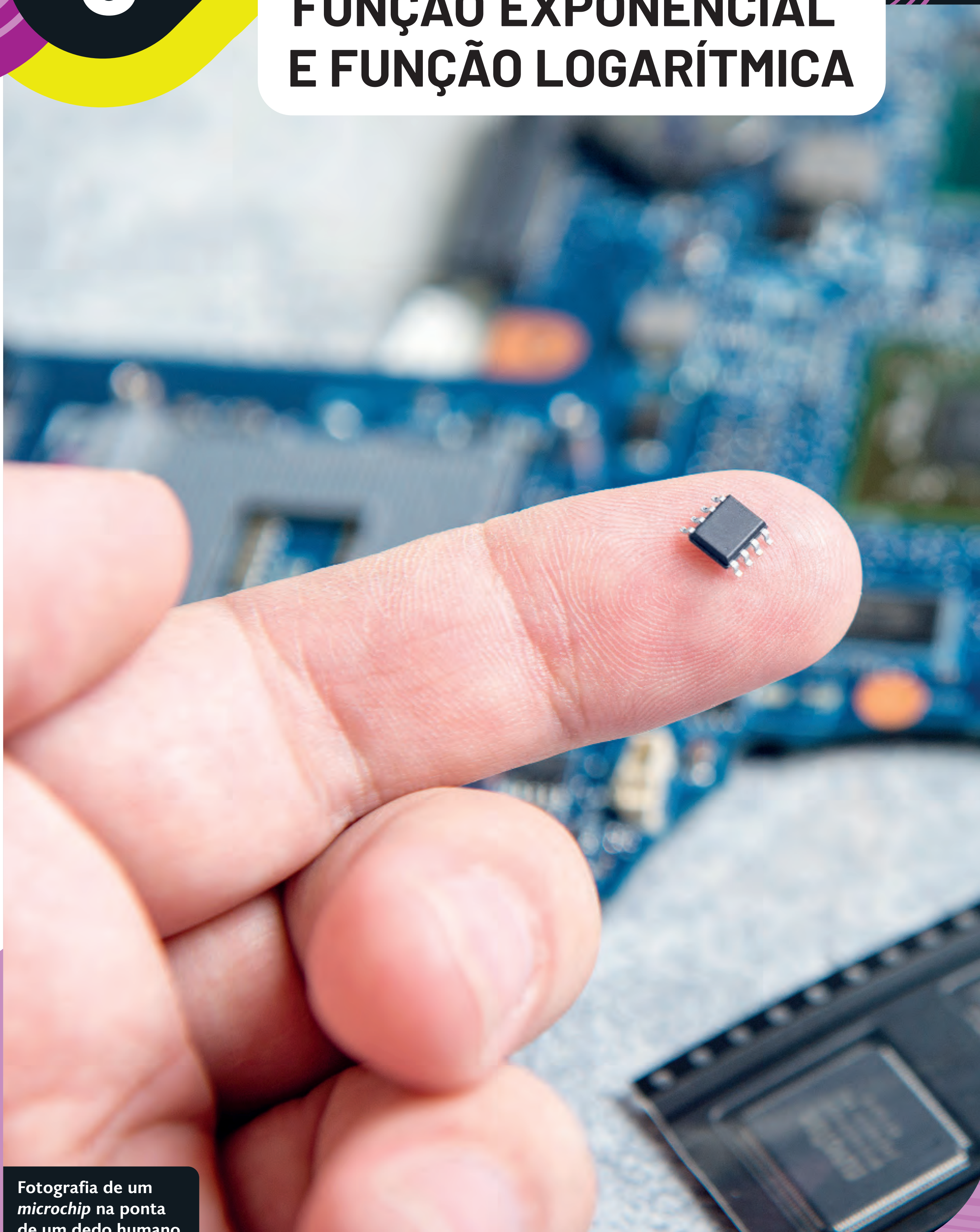
11. Faça uma síntese do que foi estudado neste capítulo usando desenhos e dando exemplos.

CAPÍTULO

5

FUNÇÃO EXPONENCIAL E FUNÇÃO LOGARÍTMICA

SERGEY FATIN/SHUTTERSTOCK



Fotografia de um *microchip* na ponta de um dedo humano.

O **transistor** é o componente básico de circuitos eletrônicos e *microchips* de computador. O avanço na tecnologia de fabricação desses componentes possibilitou aumentar a capacidade de processamento dos computadores e a miniaturização de dispositivos, como *tablet*, *smartphone* ou *smartwatch*.

Tudo começou em 1965, quando o engenheiro e empresário Gordon Moore, analisando o potencial da indústria da tecnologia, publicou um artigo prevendo que a quantidade de transistores por centímetro quadrado em *microchips* e microprocessadores dobraria a cada dois anos pelo mesmo custo, o que ficou conhecido como a "Lei de Moore". As duas maiores fabricantes de microprocessadores da época se sentiram incentivadas a promover uma corrida pelo desempenho, fazendo com que a previsão se cumprisse por vários anos seguidos.

Embora o padrão de crescimento não tenha sido seguido à risca, podemos comparar o primeiro microprocessador, desenvolvido em 1971 com apenas 2 300 transistores para uso em calculadoras portáteis, com um processador do ano 2000, 29 anos depois, contendo 42 milhões de transistores. Esse avanço permitiu, pela primeira vez, o uso de computadores pessoais para diversas atividades, incluindo editar vídeos, assistir a filmes pela internet, comunicar-se em tempo real com vídeo e voz, renderizar imagens tridimensionais e rodar várias aplicações multimídia simultaneamente, enquanto navega na internet.

Fonte de pesquisa: ALMEIDA, Rafael Bruno. *Evolução dos Processadores:* comparação das Famílias de Processadores Intel e AMD. Instituto de Computação Unicamp, 4 jul. 2009. Disponível em: https://www.ic.unicamp.br/~ducatte/mo401/1s2009/T2/089065-t2.pdf. Acesso em: 30 ago. 2024.

Neste capítulo, você vai estudar:

- potenciação;
- função exponencial;
- gráfico de uma função exponencial;
- equação exponencial;
- inequação exponencial;
- logaritmo;
- propriedades operatórias dos logaritmos;
- mudança de base;
- função inversa;
- função logarítmica;
- equação logarítmica;
- inequação logarítmica.

Transistor: dispositivo condutor de corrente elétrica, fundamental para a construção dos mais variados dispositivos eletrônicos modernos, como os *microchips* de computadores.

1. Resposta: Ele previu que a quantidade de transistores por centímetro quadrado em *microchips* e microprocessadores dobraria a cada dois anos pelo mesmo custo.

Professor, professora: Oriente os estudantes a escrever as respostas no caderno.

1. Qual foi a previsão de Gordon Moore que ficou conhecida por "Lei de Moore"?

2. De que maneira essa "lei" revolucionou a indústria eletrônica e de computadores? Resposta: Essa lei incentivou o desenvolvimento e a fabricação de circuitos eletrônicos mais eficientes, permitindo a criação de dispositivos cada vez menores e com maior capacidade de processamento.

3. Se a quantidade de transistores de um microprocessador aumentasse exatamente segundo a Lei de Moore, qual seria, em uma mesma área, a quantidade de transistores em 1973, 1975 e 1977, tomando como base o primeiro microprocessador de 1971? Resposta: 4 600 transistores; 9 200 transistores; 18 400 transistores.

Potenciação

Provavelmente, você já estudou potenciação no Ensino Fundamental. Agora, antes de definirmos a função exponencial, apresentaremos as potências com expoentes racionais e irracionais.

Professor, professora: As potências com expoentes racionais, irracionais e com expoente real, apresentadas nesta página, exercitam habilidades de manuseio das propriedades de potenciação, já vistas em outras etapas de ensino. Tais propriedades são imprescindíveis no estudo das funções exponenciais.

Potência com expoente racional

Dados um número real a positivo diferente de zero e o número racional $\frac{m}{n}$, com $m, n \in \mathbb{Z}$ e $n \neq 0$, temos $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Exemplos

- $6^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6}$
- $12^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{12^3}$
- $\sqrt{51} = 51^{\frac{1}{2}}$
- $\sqrt[5]{7^2} = 7^{\frac{2}{5}}$

Para calcular a raiz n-ésima de a, com a real e $n > 1$, é preciso considerar três casos.

- Se n for par e $a \geqslant 0$, então $\sqrt[n]{a}$ é um número b, com $b \geqslant 0$, tal que $b^n = a$.
- Se n for par e $a < 0$, não existe $\sqrt[n]{a}$ no conjunto dos números reais.
- Se n for ímpar, então $\sqrt[n]{a}$ é um número b, tal que $b^n = a$.

Professor, professora: Informe aos estudantes que as propriedades a seguir – provavelmente estudadas no Ensino Fundamental – são válidas para potências com expoente real. Sejam os números reais a, b, m e n.
- $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, com $a \neq 0$ se $n \leq 0$ ou $m \leq 0$.
- $a^n : a^m = a^{n-m}$, com $a \neq 0$.
- $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$, com $a \cdot b \neq 0$ se $m \leq 0$.
- Se $b \neq 0$, então $(a : b)^m = a^m : b^m$, com $a \neq 0$ se $m \leq 0$.
- $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$, com $a \neq 0$ se $n \leq 0$ ou $m \leq 0$.

Além disso, se $a \neq 0$, então $a^0 = 1$ e $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Potência com expoente irracional

Estudaremos potência com expoentes irracionais por meio de aproximações. Por exemplo, para calcularmos $2^{\sqrt{6}}$, primeiro obtemos valores aproximados do número irracional $\sqrt{6}$, de maneira que as potências sejam menores do que $\sqrt{6}$.

2	2,4	2,44	2,449	2,4494	...

Em seguida, definimos as potências de base 2 e o expoente com essas aproximações.

2^2	$2^{2,4}$	$2^{2,44}$	$2^{2,449}$	$2^{2,4494}$	...

Quando o expoente se aproxima de $\sqrt{6}$, o resultado se aproxima de $2^{\sqrt{6}}$. Utilizando uma calculadora científica, podemos calcular essas potências.

- $2^2 = 4$
- $2^{2,4} \simeq 5,278031643$
- $2^{2,44} \simeq 5,42641731$
- $2^{2,449} \simeq 5,460374872$
- $2^{2,4494} \simeq 5,461889019$
- ...

Assim, obtemos alguns valores aproximados para $2^{\sqrt{6}}$, isto é, uma potência a^m, na qual $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $m \in \mathbb{I}$. Potências desse tipo sempre correspondem a um número real positivo.

Observação

Utilizando uma calculadora científica, podemos calcular um valor aproximado de $2^{\sqrt{6}}$ digitando a seguinte sequência de teclas:

2 ^ √ 6 =

SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

Potência com expoente real

Como os elementos do conjunto dos números reais são todos os números racionais e todos os números irracionais, podemos agora calcular potências de base positiva com expoentes reais quaisquer, isto é, potências do tipo a^m, em que $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $m \in \mathbb{R}$.

Observação

Quando $a = 0$ ou $a < 0$, a potência com expoente real pode ou não estar definida no conjunto dos números reais.

Função exponencial

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, definida por $f(x) = a^x$ ou $y = a^x$, com a real positivo diferente de 1, é denominada **função exponencial**.

Exemplos

OBJETO DIGITAL ***Podcast*:** Quantos ancestrais vieram antes de nós?

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, definida por $f(x) = 7^x$.
- $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, definida por $h(x) = \left(\sqrt{16}\right)^x$.

Na definição, as restrições $a > 0$ e $a \neq 1$ são necessárias, pois, caso contrário, não seria possível caracterizar uma função exponencial para todo o domínio.

Se $a = 1$, então a função f definida por $f(x) = a^x$ é constante.

$f(x) = 1^x = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Se $a \leq 0$, então $f(x) = a^x$ não é definida para todo $x \in \mathbb{R}$, como desejado.

- Para $a = -3$ e $x = \frac{1}{2}$, por exemplo, temos $f\left(\frac{1}{2}\right) = (-3)^{\frac{1}{2}}$, e $(-3)^{\frac{1}{2}}$ não está definido em $\mathbb{R}$.
- Para $a = 0$ e $x = -7$, por exemplo, temos $f(-7) = 0^{-7}$, e 0^{-7} não está definido em $\mathbb{R}$.

Observação

Existem outras funções cujas leis também apresentam a variável x no expoente de alguma potência, como as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, definidas por $f(x) = b \cdot a^x + c$, com a, b e c reais, tais que $a > 0$, $a \neq 1$ e $b \neq 0$. Essas funções serão tratadas como **funções do tipo exponencial**.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

1. Considere as funções definidas por $f(x) = 3^x$ e $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$. Determine:

a) $f(0)$ Resposta: 1 b) $f(1)$ Resposta: 3 c) $f(-4)$ Resposta: $\frac{1}{81}$ d) $g(2)$ Resposta: $\frac{1}{16}$ e) $g\left(\frac{1}{2}\right)$ Resposta: $\frac{1}{2}$ f) $g(-3)$ Resposta: 64

2. Analise a simulação de um investimento oferecido por um banco.

Simulação de um investimento de R$ 1 500,00 a uma taxa de juro composto de 6% ao ano

Ano (n)	Juro (J)	Montante (M)
1	$1500{,}00 \cdot 0{,}06 = 90{,}00$	$1500{,}00 + 90{,}00 = 1590{,}00$
2	$1590{,}00 \cdot 0{,}06 = 95{,}40$	$1590{,}00 + 95{,}40 = 1685{,}40$
3	$1685{,}40 \cdot 0{,}06 \simeq 101{,}12$	$1685{,}40 + 101{,}12 = 1786{,}52$

a) Qual das expressões determina o montante M obtido ao final do ano n, ao serem aplicados R$ 1500,00 nesse investimento? Resposta: $M = 1500 \cdot (1{,}06)^n$

- $M = 1500 + (1{,}06)^n$
- $M = 1500 \cdot (1{,}06)^n$
- $M = 1500 \cdot (6)^n$
- $M = 1500 + 6^n$

b) Qual será o montante ao final de sete anos? E de dez anos? Use uma calculadora para efetuar os cálculos. Resposta: R$ 2 255,45; R$ 2 686,27

3. A divisão celular denominada mitose é um processo que ocorre quando uma célula-mãe duplica seu conteúdo e, então, divide-se em outras duas células, chamadas células-filhas. Cada célula-filha, por sua vez, repete esse processo, totalizando, na 2ª divisão, quatro células-filhas.

a) Determine o número total de células-filhas obtidas a partir de uma única célula-mãe na:

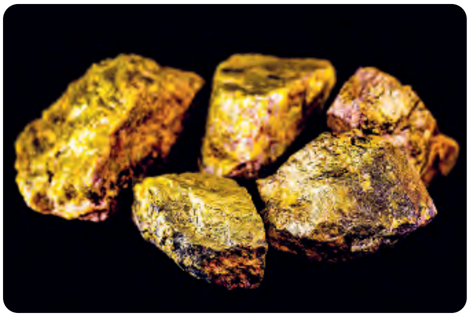
- 3ª divisão. Resposta: 8 células-filhas.
- 4ª divisão. Resposta: 16 células-filhas.
- 7ª divisão. Resposta: 128 células-filhas.

b) Escreva a lei de formação de uma função que associe a quantidade total de células-filhas y, obtida a partir de uma única célula-mãe, após uma quantidade x $(x > 0)$ de divisões. Resposta: $y = 2^x$

5. a) Resposta: Não, porque a meia-vida do carbono-14 é relativamente curta, cerca de 5 730 anos. Para essa afirmação, é necessário recorrer a outro elemento radioativo de meia-vida mais longa.

4. Considerando que a quantidade de transistores de um microprocessador aumente exatamente segundo a Lei de Moore, escreva a lei de formação de uma função f que expresse a quantidade de transistores em um aparelho fabricado no ano t, tomando como base o primeiro microprocessador de 1971.
Sugestão de resposta: Considerando que $t = 0$ representa o ano de 1971, temos $f(t) = 2\,300 \cdot 2^{\frac{t}{2}}$.

5. Em 1896, Antoine Henri Becquerel (1852-1908) descobriu a radioatividade do urânio. Após essa descoberta, diversos estudos foram feitos acerca de elementos radioativos. Atualmente, sabe-se que a exposição prolongada à radiação pode causar danos em relação ao funcionamento do organismo, mas o uso adequado de elementos radioativos permite, por exemplo, determinar a idade de um fóssil. Esse método, conhecido como datação absoluta, é realizado por meio da observação da relação entre os elementos radioativos presentes no fóssil, pois toda substância radioativa sofre um decaimento radioativo, tendo sua quantidade de átomos, e consequentemente sua massa e atividade, diminuída com o passar do tempo. Para acompanhar esse decaimento, foi estabelecido como padrão o período necessário para que a quantidade de átomos radioativos, a massa e a atividade de um elemento sejam reduzidas à metade em relação à quantidade anterior, o que é designado por meia-vida. Em determinado momento, sua quantidade de átomos radioativos se torna tão insignificante que não permite mais distinguir suas radiações das presentes no meio ambiente.


RHJPHTOTOS/SHUTTERSTOCK

Pedras brutas de urânio-238.

O carbono-14 é útil para determinar a idade aproximada de fósseis de seres vivos e tem tempo de meia-vida de 5 730 anos. Passado esse tempo, metade da quantidade continua como carbono-14, e a outra metade se transforma em carbono-12. O carbono-14 é indicado para determinar a idade de organismos que viveram até 70 000 anos atrás. Para organismos que viveram há mais tempo, são usados outros elementos, como o potássio-40 e o urânio-238, com meia-vida de 1,25 bilhão de anos e 4,47 bilhões de anos, respectivamente.

a) Utilizando a meia-vida do carbono-14, é possível afirmar que certo organismo viveu há cerca de 100 000 anos? Por quê?
5. b) Resposta: $f(t) = m \cdot 2^{\left(-\frac{t}{5\,730}\right)}$

b) Escreva a lei de formação de uma função do tipo exponencial que expresse a massa m de carbono-14 de determinado fóssil, em um dado período de tempo t, em anos, considerando que esse organismo tinha massa inicial m de carbono-14.
5. c) Resposta: 17 190 anos.

c) Qual é a datação de um resíduo de organismo que tem 12,5% do carbono-14 original?
5. d) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes compreendam, por exemplo, que a idade de um fóssil favorece o estudo, em situações atuais, de condições próprias da época em que o ser era vivo, como o clima e o meio ambiente.

d) Em sua opinião, é importante determinar a datação de um fóssil? Converse com os colegas e o professor.

e) Conforme citado no texto, a radiação pode trazer tanto malefícios quanto benefícios aos indivíduos. Junte-se a um colega e pesquisem alguns contextos em que o uso de elementos radioativos trouxe malefícios, como a destruição das cidades japonesas Hiroshima e Nagasaki por bombas atômicas lançadas por aviões estadunidenses e o acidente com césio-137 em Goiânia (GO), em 1987, em que catadores de sucata entraram em contato com uma cápsula de césio-137. Depois, apresentem seus resultados para a turma.

f) Você acha importante estabelecer medidas de controle e proteção para o uso de elementos radioativos? Converse com os colegas e o professor.

6. Pesquise contextos nos quais há a aplicação das funções exponenciais, por exemplo, a Matemática Financeira. Com base nos resultados dessa pesquisa, elabore um problema envolvendo os conceitos estudados e troque com um colega para que ele o resolva. Em seguida, verifiquem se as respostas apresentadas estão corretas.
Resposta pessoal. A resposta depende do resultado da pesquisa dos estudantes.

Professor, professora: Antes de os estudantes elaborarem o problema na tarefa **6**, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** deste tópico e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

5. e) Resposta pessoal. Alguns outros exemplos de contextos que trouxeram malefícios são: o acidente nuclear na usina estadunidense Three Mile Island, na Pensilvânia, em 1979, e a explosão de um dos quatro reatores da usina nuclear de Chernobyl, na Ucrânia, em 1986, o pior acidente nuclear registrado até os dias atuais.

5. f) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes concluam que o uso não controlado de elementos radioativos pode provocar tragédias e impactos devastadores na saúde e no meio ambiente. Por esse motivo, é importante a conscientização sobre a proteção contra material radioativo e sobre seu descarte adequado.

PARA EXPANDIR

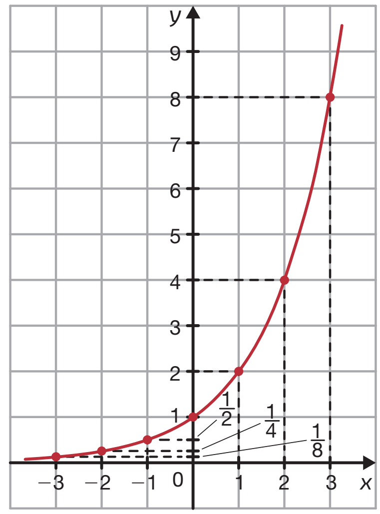
Que tal obter mais informações sobre os benefícios e os perigos da radioatividade? Para isso, leia o artigo **Os benefícios e os perigos da radioatividade** publicado no *site* do Senado Federal brasileiro. Disponível em: https://www12.senado.leg.br/noticias/especiais/especial-cidadania/vitimas-do-cesio-137-pedem-assistencia-medica-para-todos/os-beneficios-e-os-perigos-da-radioatividade. Acesso em: 24 jun. 2024.

Gráfico de uma função exponencial

Vamos esboçar o gráfico das funções exponenciais f e g dadas por $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Para isso, atribuímos alguns valores para x e calculamos os valores correspondentes de y, determinando pares ordenados (x, y). Em seguida, representamos esses pares ordenados em um plano cartesiano.

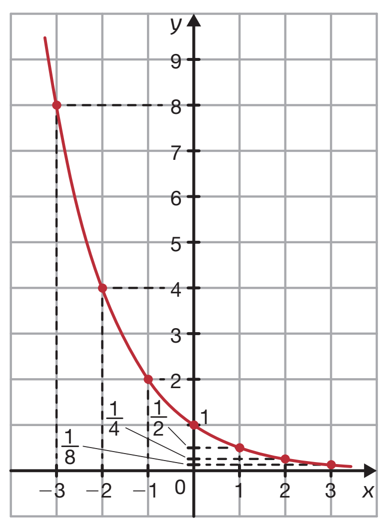
$f(x) = 2^x$

x	$y = f(x)$	(x, y)
-3	$f(-3) = 2^{-3} = \frac{1}{8}$	$\left(-3, \frac{1}{8}\right)$
-2	$f(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{4}$	$\left(-2, \frac{1}{4}\right)$
-1	$f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$	$\left(-1, \frac{1}{2}\right)$
0	$f(0) = 2^0 = 1$	$(0, 1)$
1	$f(1) = 2^1 = 2$	$(1, 2)$
2	$f(2) = 2^2 = 4$	$(2, 4)$
3	$f(3) = 2^3 = 8$	$(3, 8)$



$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	$y = g(x)$	(x, y)
-3	$g(-3) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$	$(-3, 8)$
-2	$g(-2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$	$(-2, 4)$
-1	$g(-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$	$(-1, 2)$
0	$g(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{0} = 1$	$(0, 1)$
1	$g(1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{1} = \frac{1}{2}$	$\left(1, \frac{1}{2}\right)$
2	$g(2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2} = \frac{1}{4}$	$\left(2, \frac{1}{4}\right)$
3	$g(3) = \left(\frac{1}{2}\right)^{3} = \frac{1}{8}$	$\left(3, \frac{1}{8}\right)$



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

As funções f e g são exponenciais, ou seja, são da forma $y = a^x$. Note que f é crescente e $a = 2 > 1$. Já a função g é decrescente e $a = \frac{1}{2}$, ou seja, $0 < a < 1$. Além disso, os gráficos de f e g intersectam o eixo y no ponto de coordenadas $(0, 1)$ e não intersectam o eixo x, sendo definidos acima dele.

Uma função exponencial é:

- **crescente** se $a > 1$. Sempre que aumentamos os valores de x, os valores correspondentes de y aumentam, isto é, $x_2 > x_1 \Leftrightarrow a^{x_2} > a^{x_1}$;
- **decrescente** se $0 < a < 1$. Sempre que aumentamos os valores de x, os valores correspondentes de y diminuem, isto é, $x_2 > x_1 \Leftrightarrow a^{x_2} < a^{x_1}$.

O gráfico de uma função exponencial, que é denominado **curva exponencial**, intersecta o eixo y no ponto de coordenadas $(0, 1)$ e não intersecta o eixo x, sendo definido acima desse eixo.

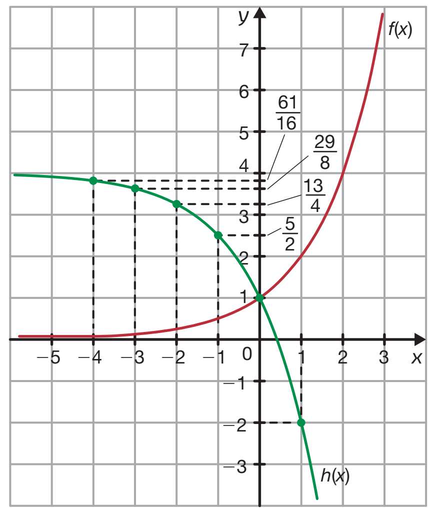
Professor, professora: Antes de iniciar os estudos desse tópico, proponha um debate com toda a turma a respeito das funções exponenciais, com o objetivo de identificar os conhecimentos prévios dos estudantes em relação a esse conteúdo. Proponha também um estudo do significado dos termos "crescimento exponencial" e "decrescimento exponencial", solicitando aos estudantes que façam pesquisas e identifiquem exemplos de situações nas quais esses termos podem ser empregados, avaliando o significado em cada contexto. Para isso, eles podem pesquisar notícias e reportagens divulgadas pela mídia. Um exemplo de situação que pode ser analisada durante esse estudo é o crescimento da quantidade de casos confirmados de pessoas contaminadas durante a pandemia do coronavírus Sars-Cov-2, em 2020, principalmente no início do surto.

As funções do tipo exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, definidas por $f(x) = b \cdot a^x + c$, com a, b e c reais, tais que $a > 0$, $a \neq 1$ e $b \neq 0$, têm como gráficos curvas exponenciais semelhantes às das funções exponenciais. Esses gráficos podem ser obtidos a partir do gráfico da função definida por $f(x) = a^x$. Analise, por exemplo, como podemos esboçar o gráfico da função h definida por $h(x) = (-3) \cdot 2^x + 4$ e compare com o gráfico da função definida por $f(x) = 2^x$, esboçado na página anterior.

Professor, professora: A tarefa **11** propõe aos estudantes que elaborem um problema utilizando os conceitos estudados, contribuindo para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações. Antes de os estudantes elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** deste capítulo e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

$h(x) = (-3) \cdot 2^x + 4$

x	$y = h(x)$	(x, y)
-4	$h(-4) = (-3) \cdot 2^{-4} + 4 = \frac{61}{16}$	$\left(-4, \frac{61}{16}\right)$
-3	$h(-3) = (-3) \cdot 2^{-3} + 4 = \frac{29}{8}$	$\left(-3, \frac{29}{8}\right)$
-2	$h(-2) = (-3) \cdot 2^{-2} + 4 = \frac{13}{4}$	$\left(-2, \frac{13}{4}\right)$
-1	$h(-1) = (-3) \cdot 2^{-1} + 4 = \frac{5}{2}$	$\left(-1, \frac{5}{2}\right)$
0	$h(0) = (-3) \cdot 2^{0} + 4 = 1$	$(0, 1)$
1	$h(1) = (-3) \cdot 2^{1} + 4 = -2$	$(1, -2)$



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

7. Classifique as funções exponenciais, cuja lei de formação é apresentada, em crescentes ou decrescentes. Resposta: Crescentes: alternativas **a** e **c**; decrescentes: alternativas **b** e **d**.

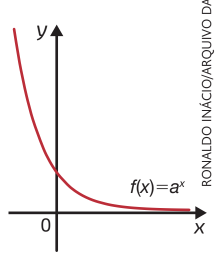
a) $f(x) = \left(\frac{9}{5}\right)^x$

b) $f(x) = 6^{-x}$

c) $f(x) = 4^{\frac{x}{2}}$

d) $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{2x}$

8. Analise o gráfico da função exponencial definida por $f(x) = a^x$.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

É possível concluir que a pertence a qual intervalo?
Resposta: Alternativa **c**.

a) $]-\infty, -1[$

b) $[-1, 0]$

c) $]0, 1[$

d) $]1, +\infty[$

9. Para quais valores reais de k a função f dada por $f(x) = \left(\frac{5}{k}\right)^x$ é decrescente? Resposta: $k > 5$

10. Esboce o gráfico da função definida por:

a) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

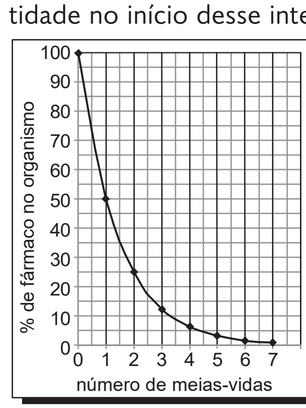
b) $g(x) = 2 \cdot 3^x$

c) $h(x) = 9^{\frac{x}{3}}$

Resposta no final do **Livro do Estudante**.

11. De acordo com os resultados obtidos na pesquisa realizada na tarefa **6**, da página **164** elabore um problema envolvendo o gráfico de uma função exponencial. Em seguida, troque com um colega para que ele o resolva e, por fim, verifiquem se as respostas apresentadas estão corretas.
Resposta pessoal. A resposta depende da pesquisa realizada pelos estudantes.

12. (Enem, 2007) A duração do efeito de alguns fármacos está relacionada à sua meia-vida, tempo necessário para que a quantidade original do fármaco no organismo se reduza à metade. A cada intervalo de tempo correspondente a uma meia-vida, a quantidade de fármaco existente no organismo no final do intervalo é igual a 50% da quantidade no início desse intervalo.



VINÍCIUS COSTA/ARQUIVO DA EDITORA/ ENEM 2007

F. D. Fuchs e Cher I. Wannma. *Farmacologia Clínica*. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 1992. p. 40.

O gráfico acima representa, de forma genérica, o que acontece com a quantidade de fármaco no organismo humano ao longo do tempo.

A meia-vida do antibiótico amoxicilina é de 1 hora. Assim, se uma dose desse antibiótico for injetada às 12 h em um paciente, o percentual dessa dose que restará em seu organismo às 13 h 30 min será aproximadamente de: Resposta: Alternativa **d**.

a) 10%

b) 15%

c) 25%

d) 35%

e) 50%

TRABALHO E JUVENTUDES

2. Resposta pessoal. Oriente os estudantes na divisão dos temas da pesquisa, sinalizando que dentro de cada uma das três áreas listadas há diversas possibilidades de atuação. Por exemplo, o biólogo em Meio Ambiente e Biodiversidade pode trabalhar com Bioinformática, Gestão e Produção da Agricultura, Bioética, Gestão Ambiental, Ecoturismo, entre outras esferas.

O que faz um biólogo?

Os biólogos são profissionais que estudam todas as formas de vida. Muitas das pesquisas realizadas pelos biólogos estão relacionadas à origem, evolução, transformação e reprodução de diversos seres vivos. Nessas pesquisas, eles podem utilizar diversos conceitos matemáticos, como as funções exponenciais e logarítmicas, que podem ser aplicadas no estudo do crescimento e da proliferação de bactérias ao longo do tempo.

DC STUDIO/SHUTTERSTOCK

Biólogas fazendo estudos relacionados ao crescimento bacteriano.

PARA EXPANDIR

Que tal conhecer o local de trabalho de um biólogo? Nessa visita, busque conhecer mais sobre o dia a dia desse profissional.

Observação

Para se tornar um biólogo é necessário cursar uma graduação em Biologia em instituição de ensino superior que seja reconhecida pelo Ministério da Educação (MEC) e se registrar no Conselho Regional de Biologia da jurisdição onde o biólogo residir.

Por ser um campo de estudo bastante vasto, quem se interessa em seguir a carreira de biólogo pode atuar em diversas áreas. Meio ambiente e biodiversidade, saúde, biotecnologia, biologia marinha, saúde pública e educação são alguns exemplos.

Apesar das particularidades de cada uma dessas áreas profissionais, todas são extremamente importantes. Os biólogos, responsáveis, de modo geral, por contribuir para o nosso entendimento da vida na Terra, colaboram com o avanço de pesquisas científicas voltadas para a saúde e a conscientização da preservação do meio ambiente, promovendo impactos significativos na sociedade.

1. Resposta pessoal. Incentive os estudantes a compartilhar suas impressões sobre a profissão de biólogo, mesmo aqueles que não tenham interesse pela área. A quem responder afirmativamente, incentive-o a comentar o que mais chamou a atenção dele e em qual área desejaria atuar. É possível também retomar essa questão depois que apresentarem os resultados da pesquisa proposta na questão **2**.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

1. Você se identificou com a profissão de biólogo? Em caso afirmativo, em qual área você atuaria? Converse com os colegas.

2. Junte-se a um colega e pesquisem uma das áreas de trabalho da profissão de biólogo listadas a seguir. Procure saber o que é preciso fazer para se especializar nessa área, em quais frentes o profissional pode atuar, ou seja, o mercado de trabalho, e o que esse especialista desenvolve em seu dia a dia. Apresente os resultados da pesquisa por meio de cartazes ou *slides*.

- Biólogo em Meio Ambiente e Biodiversidade
- Biólogo em Saúde
- Biólogo em Biotecnologia e Produção

Professor, professora: Informe aos estudantes que o biólogo em Saúde pode atuar trabalhando com análise histopatológica, aconselhamento genético, Vigilância Sanitária etc. Já o biólogo em Biotecnologia e Produção pode trabalhar com Melhoramento genético, Biossegurança, Cultura de células e tecidos etc. Peça à turma que escolha a área de atuação previamente, de modo que os temas não se repitam. Nas apresentações, espera-se que eles demonstrem compreensão da diversidade de frentes de atuação do biólogo, sinalizando interesse ou não pela profissão.

Equação exponencial

Uma equação que apresenta incógnita apenas no expoente é denominada **equação exponencial**.

Exemplos

- $3^x = 81$
- $4^{x-15} = 16$
- $49^2 = \sqrt{49^x}$
- $3^{2x} = 3^x + 21$
- $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 625$

Para resolver uma equação exponencial, reduzimos os dois membros a potências de mesma base. Depois, utilizamos as propriedades das potências. Quando isso não é possível, utilizamos alguns artifícios de cálculo.

A seguir é apresentada a resolução de algumas equações exponenciais.

Exercícios e problemas resolvidos

R1. Resolva as equações.

a) $3^x = 27$

b) $2^{x-15} = 16$

c) $7^{x^2-9} = 1$

d) $25^{2x+1} = 125^{-x+2}$

e) $10^{x+2} \cdot 100^{-3x} = 10\,000\,000$

f) $\sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)^x} = 0,\overline{6}$

Resolução

Nessas equações, podemos reduzir os dois membros a potências de mesma base.

a) $3^x = 27 \Rightarrow 3^x = 3^3 \Rightarrow x = 3$

Portanto, $S = \{3\}$.

b) $2^{x-15} = 16 \Rightarrow 2^{x-15} = 2^4 \Rightarrow x - 15 = 4 \Rightarrow x = 19$

Portanto, $S = \{19\}$.

c) $7^{x^2-9} = 1 \Rightarrow 7^{x^2-9} = 7^0 \Rightarrow x^2 - 9 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 3$ ou $x = -3$

Portanto, $S = \{-3, 3\}$.

d) $25^{2x+1} = 125^{-x+2} \Rightarrow \left(5^2\right)^{2x+1} = \left(5^3\right)^{-x+2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 5^{4x+2} = 5^{-3x+6} \Rightarrow 4x + 2 = -3x + 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow 7x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{7}$

Portanto, $S = \left\{\frac{4}{7}\right\}$.

e) $10^{x+2} \cdot 100^{-3x} = 10\,000\,000 \Rightarrow$

$\Rightarrow 10^{x+2} \cdot \left(10^2\right)^{-3x} = 10^7 \Rightarrow$

$\Rightarrow 10^{x+2-6x} = 10^7 \Rightarrow -5x + 2 = 7 \Rightarrow$

$\Rightarrow -5x = 5 \Rightarrow x = -1$

Portanto, $S = \{-1\}$.

f) $\sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)^x} = 0,\overline{6} \Rightarrow \left\{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^x\right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2 \cdot x \cdot \frac{1}{2}} = \left(\frac{2}{3}\right)^1 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^1 \Rightarrow x = 1$

Portanto, $S = \{1\}$.

R2. Determine a solução da equação $49^x - 6 \cdot 7^x = 7$.

Resolução

Nessa equação, não é possível reduzir os dois membros a potências de mesma base. Nesse caso, é necessário utilizar alguns artifícios de cálculo.

$$49^x - 6 \cdot 7^x = 7 \Rightarrow \left(7^2\right)^x - 6 \cdot 7^x - 7 = 0 \Rightarrow \left(7^x\right)^2 - 6 \cdot 7^x - 7 = 0$$

Substituindo $y = 7^x$, segue que $y^2 - 6y - 7 = 0$. Resolvendo essa equação, obtemos $y_1 = -1$ e $y_2 = 7$. Por fim, retornamos os valores de y_1 e y_2 na igualdade $y = 7^x$.

- $y_1 = -1 \Rightarrow 7^{x_1} = -1$ (impossível)
- $y_2 = 7 \Rightarrow 7^{x_2} = 7^1 \Rightarrow x_2 = 1$

Portanto, $S = \{1\}$.

Dica

Note que $\left(7^2\right)^x = 7^{2x} = \left(7^x\right)^2$.

Exercícios e problemas

13. a) Resposta: $S = \{2\}$ 13. b) Resposta: $S = \left\{-\frac{2}{3}\right\}$

Anote as respostas no caderno.

13. c) Resposta: $S = \{6\}$ 13. d) Resposta: $S = \{8\}$ 13. e) Resposta: $S = \left\{-\frac{7}{2}\right\}$

13. Resolva as equações.

a) $3^{x+1} = 27$

b) $(0{,}25)^{2x+3} = 4^{x-1}$

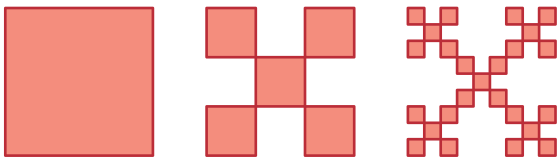
c) $\sqrt{7^x} = 343$

d) $5^{\frac{3}{2}x} = 125^4$

e) $\sqrt[6]{1000} \cdot 10^x = 0{,}001$

f) $\dfrac{8^x}{2^{x+2}} = 256$ Resposta: $S = \{5\}$

14. A sequência de figuras apresenta vários níveis na composição de um fractal.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

a) Utilizando uma malha quadriculada, construa a figura correspondente ao próximo nível dessa sequência. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

b) Qual expressão relaciona a quantidade y de quadradinhos existentes na figura de nível x dessa sequência? Resposta: $y = 5^{x-1}$

- $y = 5^{x+1}$
- $y = 5^x$
- $y = 5^{x-1}$

c) Em qual nível da sequência o número de quadradinhos da figura será:

- 3 125? Resposta: Nível 6.
- 78 125? Resposta: Nível 8.

15. Estudamos anteriormente que Gordon Moore, em 1965, previa que a quantidade de transistores que compõem *microchips* e microprocessadores dobraria a cada dois anos. Essa previsão ficou conhecida como Lei de Moore, cuja função é dada por $f(t) = 2\,300 \cdot 2^{\frac{t}{2}}$, considerando que $t = 0$ representa o ano de 1971.

De acordo com essa função, responda às questões.

a) Qual é a estimativa da quantidade de transistores, de acordo com a Lei de Moore, de um microprocessador em 1989? E em 2014?
Resposta: 1 177 600 transistores; 6 821 387 842 transistores.

b) De acordo com a Lei de Moore, em qual ano a quantidade estimada de transistores de um microprocessador seria 19 293 798 400?
Resposta: 2017

Dica

Use uma calculadora para resolver os itens **a** e **b** da tarefa **15**.

16. Determine o valor de x para que a igualdade $3^{5x+1} \cdot (0{,}\overline{3})^{x+8} = 243^{x-3}$ seja verdadeira.
Resposta: $x = 8$

17. Vimos anteriormente que uma substância radioativa decai exponencialmente. A massa S de certa substância no tempo t, em segundos, é expressa pela expressão $S(t) = S_0 \cdot 2^{-5t}$, em que S_0 indica a massa inicial dessa substância. Quantos segundos são necessários para que a massa dessa substância seja igual à metade de sua massa inicial? Resposta: 0,2 s

18. Em um experimento, um biólogo colocou, inicialmente, uma amostra com 1 000 bactérias por mililitro em um tubo de ensaio. Sabendo que a população dessa colônia de bactérias dobra a cada 20 minutos e que ao final do experimento foram obtidas 256 000 bactérias por milímetro, qual foi o tempo de duração desse experimento?
Resposta: Alternativa **b**.

a) 2 horas e 20 minutos.

b) 2 horas e 40 minutos.

c) 3 horas.

d) 3 horas e 20 minutos.

Professor, professora: A tarefa **22** propõe aos estudantes que elaborem um problema utilizando os conceitos estudados, contribuindo para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações.

19. Considere as funções definidas por $f(x) = 2 \cdot (0{,}5)^x$ e $g(x) = 4^x$.
19. a) Resposta: $x = \frac{1}{3}$

a) Para qual valor de x obtemos $f(x) = g(x)$?

b) Esboce em um mesmo plano cartesiano os gráficos das funções f e g, indicando as coordenadas do ponto em que eles se intersectam.
Resposta no final do **Livro do Estudante**.

20. É correto afirmar que a equação $(0{,}5)^{x^2-6} = 8$:
Resposta: Alternativa **d**.

a) não possui solução real.

b) possui infinitas soluções reais.

c) possui apenas uma solução real.

d) possui apenas duas soluções reais.

e) possui apenas três soluções reais.

21. Resolva as equações.

a) $9^{2x-1} = 1$ Resposta: $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

b) $6 \cdot 7^{x-3} = 294$
Resposta: $S = \{5\}$

c) $3^{1+x} = 324 - 3^x$
Resposta: $S = \{4\}$

d) $2^{x+2} + 2^{x-1} = 36$
Resposta: $S = \{3\}$

e) $\dfrac{25^x + 5}{6} - 5^x = 0$
Resposta: $S = \{0, 1\}$

f) $\left(4^{x+1} - 4^x\right)^2 = 144$
Resposta: $S = \{1\}$

22. Dois organismos distintos, **A** e **B**, iniciaram o processo de divisão celular no mesmo instante $(t = 0)$. Um estudo estimou que a quantidade de células do organismo **A** pode ser descrita pela função dada por $y = 10 + 5t$, em que t representa o período de tempo, em horas, decorrido desde o início do processo, e y representa a quantidade de células do organismo no instante t. Já o organismo **B** apresenta, a cada hora, o triplo da quantidade de células de **A**. Com base nessas informações, elabore um problema envolvendo função exponencial e equação exponencial. Em seguida, troque com um colega para que ele o resolva e, por fim, verifiquem se as respostas apresentadas estão corretas. Resposta pessoal. A resposta depende de cada problema elaborado pelos estudantes.

Professor, professora: Antes de os estudantes elaborarem o problema proposto na tarefa **22**, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** deste tópico e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros em problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

Inequação exponencial

Uma desigualdade que apresenta a incógnita apenas no expoente é denominada **inequação exponencial**.

Exemplos

- $3^x > 81$
- $5^{x-3} < 125$
- $\left(\frac{1}{8}\right)^x \geq 256$
- $7^{x^2-1} \leq \sqrt{49^x}$

Para resolver uma inequação exponencial, reduzimos os dois membros a potências de mesma base. Em seguida, sabendo que a função exponencial definida por $f(x) = a^x$ é crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$, aplicamos a seguinte propriedade:

- se $a > 1$: $a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$.
- se $0 < a < 1$: $a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$.

A seguir, é apresentada a resolução de algumas inequações exponenciais.

Observação

Note que, quando $a > 1$, a desigualdade se mantém, e quando $0 < a < 1$, a desigualdade é invertida.

Exercícios e problemas resolvidos

R3. Resolva as inequações.

a) $3^x < 81$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x+1} \geq \frac{1}{4}$

c) $25^{x^2-3} \leq \left(\frac{1}{5}\right)^2$

Resolução

a) $3^x < 81 \Rightarrow 3^x < 3^4$

Como $a = 3 > 1$, a desigualdade se mantém.

$$3^x < 3^4 \Rightarrow x < 4$$

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} | x < 4\}$.

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x+1} \geq \frac{1}{4} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-x+1} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^2$

Como $a = \frac{1}{2}$ e $0 < a < 1$, a desigualdade é invertida.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-x+1} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow -x + 1 \leq 2 \Rightarrow x \geq -1$$

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} | x \geq -1\}$.

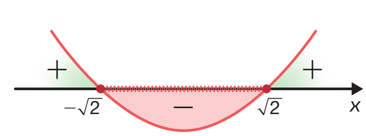
c) $25^{x^2-3} \leq \left(\frac{1}{5}\right)^2 \Rightarrow \left(5^2\right)^{x^2-3} \leq \frac{1}{5^2} \Rightarrow 5^{2x^2-6} \leq 5^{-2}$

Como $a = 5 > 1$, a desigualdade se mantém.

$$5^{2x^2-6} \leq 5^{-2} \Rightarrow 2x^2 - 6 \leq -2 \Rightarrow 2x^2 - 4 \leq 0$$

Com isso, fazemos o estudo do sinal da função definida por $f(x) = 2x^2 - 4$.

- A parábola tem concavidade voltada para cima.
- $f(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{2}$ ou $x = \sqrt{2}$



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} | -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}\}$.

R4. Resolva a inequação dupla $49^{x-1} < \left(\frac{1}{7}\right)^x < \sqrt{7}$.

Resolução

Para resolver essa inequação dupla, vamos separá-la em duas inequações.

$$49^{x-1} < \left(\frac{1}{7}\right)^x < \sqrt{7} \Leftrightarrow \begin{cases} 49^{x-1} < \left(\frac{1}{7}\right)^x \\ \left(\frac{1}{7}\right)^x < \sqrt{7} \end{cases}$$

Professor, professora: Caso seja necessário, incentive os estudantes a experimentar exemplos numéricos para esclarecer que para $0 < a < 1$ tem-se $a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$. Por exemplo, $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ e $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, de que se obtém $\left(\frac{1}{2}\right)^3 < \left(\frac{1}{2}\right)^2$. Mas, obviamente, $3 > 2$.

Agora, precisamos resolver $49^{x-1} < \left(\frac{1}{7}\right)^x$ e $\left(\frac{1}{7}\right)^x < \sqrt{7}$.

$$49^{x-1} < \left(\frac{1}{7}\right)^x \Rightarrow \left(7^2\right)^x - 1 < \left(7^{-1}\right)^x \Rightarrow 7^{2x-2} < 7^{-x}$$

Como a = 7 > 1, a desigualdade se mantém. Sendo assim:

$$7^{2x-2} < 7^{-x} \Rightarrow 2x - 2 < -x \Rightarrow x < \frac{2}{3}$$

Logo, $S_1 = \left]-\infty, \frac{2}{3}\right[$.

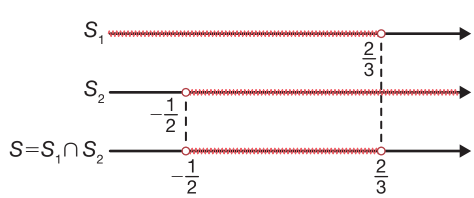
$$\left(\frac{1}{7}\right)^x < \sqrt{7} \Rightarrow \left(\frac{1}{7}\right)^x < \left[\left(\frac{1}{7}\right)^{-1}\right]^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \left(\frac{1}{7}\right)^x < \left(\frac{1}{7}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Como $a = \frac{1}{7}$ e $0 < a < 1$, a desigualdade é invertida. Sendo assim:

$$\left(\frac{1}{7}\right)^x < \left(\frac{1}{7}\right)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow x > -\frac{1}{2}$$

Logo, $S_2 = \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

Em seguida, determinamos a interseção de S_1 e S_2.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Portanto, $S = \left]-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right[$ ou $S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| -\frac{1}{2} < x < \frac{2}{3}\right\}$.

R5. Qual é o domínio da função definida por $f(x) = \dfrac{5}{\sqrt{49^{\frac{4-x}{3}} - \sqrt[3]{7}}}$?

Resolução

O domínio da função é dado pela seguinte inequação:

$$49^{\frac{4-x}{3}} - \sqrt[3]{7} > 0 \Rightarrow \left(7^2\right)^{\frac{4-x}{3}} > 7^{\frac{1}{3}} \Rightarrow 7^{\frac{8-2x}{3}} > 7^{\frac{1}{3}}$$

Como $a = 7 > 1$, a desigualdade se mantém.

$$7^{\frac{8-2x}{3}} > 7^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \frac{8-2x}{3} > \frac{1}{3} \Rightarrow 8 - 2x > 1 \Rightarrow -2x > -7 \Rightarrow x < \frac{7}{2}$$

Portanto, $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} | x < \frac{7}{2}\right\}$.

R6. Determine o domínio da função definida por $h(x) = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^x - 2}$.

Resolução

O domínio da função é dado pela seguinte inequação:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x - 2 \geq 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 2 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$$

Como $a = \frac{1}{2}$ e $0 < a < 1$, a desigualdade é invertida.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \Rightarrow x \leq -1$$

Portanto, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \leq -1\}$.

Professor, professora: A tarefa **32** propõe aos estudantes que elaborem um problema utilizando os conceitos estudados, contribuindo para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações. Antes de os estudantes elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** deste tópico e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

23. Resolva as inequações.

a) $27^x \geq 3$ Resposta: $S = \left\{x \in \mathbb{R} | x \geq \frac{1}{3}\right\}$

b) $(0{,}8)^{2x - 3} < (0{,}8)^5$ Resposta: $S = \{x \in \mathbb{R} | x > 4\}$

c) $3 \cdot 4^x \leq 72 - 6 \cdot 4^x$ 23. c) Resposta: $S = \left\{x \in \mathbb{R} | x \leq \frac{3}{2}\right\}$

d) $4^{x+1} \cdot 2^{x-1} < 128$ Resposta: $S = \{x \in \mathbb{R} | x < 2\}$

e) $25 \geq \frac{5}{5^x}$ 23. e) Resposta: $S = \{x \in \mathbb{R} | x \geq -1\}$

f) $3^{x(x+1)} > 3^{x^2+1}$ Resposta: $S = \{x \in \mathbb{R} | x > 1\}$

24. Qual é o conjunto solução da inequação $3 \cdot 2^{x+2} - 2^{2x} > 32$? Resposta: Alternativa **b**.

a) $]4, 8[$ b) $]2, 3[$ c) $[4, 8]$ d) $[2, 3]$

25. Sendo f definida por $f(x) = 2^x + 2^{x+1}$, calcule x, de modo que $f(x) \leq 96$. Resposta: $x \leq 5$

26. Determine o domínio da função definida por:

a) $f(x) = \sqrt{3^{x-2} - 1}$ Resposta: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 2\}$

b) $g(x) = 5\sqrt{2^{2x-1} - 8}$ Resposta: $D(g) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 2\}$

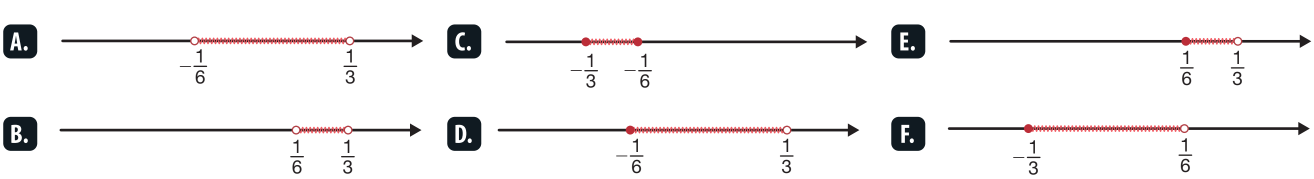
c) $h(x) = \left(\sqrt[4]{4^x - 2^{x+4}}\right)^2$ Resposta: $D(h) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 4\}$

d) $m(x) = \sqrt{9^x - \frac{1}{27}}$ Resposta: $D(m) = \left\{x \in \mathbb{R} | x \geq -\frac{3}{2}\right\}$

27. Para quais valores de x a desigualdade $(0{,}4)^x < (0{,}4)^{\frac{x-3}{2}}$ é verdadeira? Resposta: $x > -3$

28. Considere as funções definidas por $f(x) = 8^x - 2^{x+1}$ e $g(x) = -4^x$. Para quais valores de x temos $f(x) + g(x) > 0$? Resposta: $x > 1$

29. Em qual das alternativas o intervalo representa o conjunto solução da inequação $0{,}5 \leq 8^{2x} < 4$? Resposta: Alternativa **D**.



30. Para qual subconjunto do domínio da função definida por $f(x) = (0{,}6)^{2x+1}$ temos $\frac{27}{125} < f(x) \leq 1$? Resposta: Alternativa **a**.

a) $\left[-\frac{1}{2}, 1\right[$ b) $\left]\frac{1}{2}, -1\right[$ c) $\left]-1, \frac{1}{2}\right]$ d) $\left]-\frac{1}{2}, -1\right[$

31. (UFPB, 2006) O total de indivíduos, na n-ésima geração, de duas populações P e Q, é dado, respectivamente, por $P(n) = 4^n$ e $Q(n) = 2^n$. Sabe-se que, quando $\frac{P(n)}{Q(n)} \geq 1024$, a população Q estará ameaçada de extinção. Com base nessas informações, essa ameaça de extinção ocorrerá a partir da Resposta: Alternativa **a**.

a) décima geração.
b) nona geração.
c) oitava geração.
d) sétima geração.
e) sexta geração.

32. Elabore um problema envolvendo função exponencial e inequação exponencial. Em seguida, troque com um colega para que ele o resolva e, por fim, verifiquem se as respostas apresentadas estão corretas.
Resposta pessoal. A resposta depende do problema elaborado pelos estudantes.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Logaritmo

Antes de definirmos precisamente o que é logaritmo, resolveremos algumas equações exponenciais.

$$3^x = 81 \Rightarrow 3^x = 3^4 \Rightarrow x = 4$$

Dizemos que 4 é o logaritmo de 81 na base 3, que pode ser indicado por $\log_3 81 = 4$.

$$5^x = \frac{1}{125} \Rightarrow 5^x = \left(\frac{1}{5}\right)^3 \Rightarrow 5^x = 5^{-3} \Rightarrow x = -3$$

Dizemos que -3 é o logaritmo de $\frac{1}{125}$ na base 5, que pode ser indicado por $\log_5\left(\frac{1}{125}\right) = -3$.

Sejam os números reais positivos a e b, com $a \neq 1$. Denomina-se logaritmo de b na base a o expoente c, tal que $b = a^c$, isto é:

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

Nessa representação, a é a base do logaritmo, b é o logaritmando, e c é o logaritmo.

Exemplos

- $\log_9 1 = 0 \Leftrightarrow 9^0 = 1$
- $\log_{\frac{1}{4}} 16 = -2 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = 16$
- $\log_4 64 = 3 \Leftrightarrow 4^3 = 64$
- $\log_3 3 = 1 \Leftrightarrow 3^1 = 3$

Com base na definição de logaritmos, temos $a \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$ e $b \in \mathbb{R}_+^*$. Assim, não são definidos, por exemplo:

- $\log_4(-12)$.
- $\log_1 49$.
- $\log_0 9$.
- $\log_{-3} 27$.
- $\log_8 0$.
- $\log_{-6}(-36)$.

Observação

Os logaritmos cuja base é 10 são denominados **logaritmos decimais**. Neles, costuma-se não indicar a base. O logaritmo $\log_{10} 7$, por exemplo, pode ser indicado por $\log 7$.

Consequências da definição

De acordo com a definição de logaritmo, podemos estabelecer as seguintes consequências.

a) $\log_a a = 1$

Fazendo $\log_a a = x$, temos $a^x = a^1 \Rightarrow x = 1$.

b) $\log_a 1 = 0$

Fazendo $\log_a 1 = x$, temos $a^x = 1 \Rightarrow a^x = a^0 \Rightarrow x = 0$.

c) $\log_a a^n = n$

Fazendo $\log_a a^n = x$, temos $a^x = a^n \Rightarrow x = n$.

d) $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$

Mostraremos inicialmente que $\log_a b = \log_a c \Rightarrow b = c$. De fato, fazendo $\log_a b = x$ e $\log_a c = x$, temos: $a^x = b$ e $a^x = c$. Consequentemente, $b = c$. Agora, mostraremos que $b = c \Rightarrow \log_a b = \log_a c$. Fazendo $\log_a b = x$, pela definição de logaritmo, segue que $b = a^x$. Como $b = c$, $c = a^x$. Sendo assim, $x = \log_a c$. Portanto, $\log_a b = \log_a c$.

e) $a^{\log_a b} = b$

Fazendo $\log_a b = x$, temos $a^x = b$.
Substituindo $x = \log_a b$ em $a^x = b$, temos $a^{\log_a b} = b$.

33. De acordo com a definição de logaritmos e suas consequências, calcule.

a) $\log_{21} 1$ Resposta: 0

b) $\log 10\,000$ Resposta: 4

c) $8^{\log_8 19}$ Resposta: 19

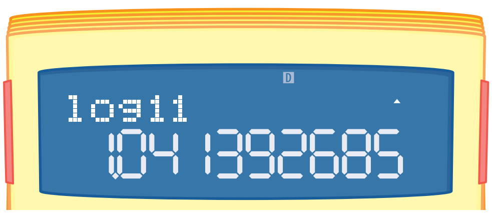
d) $\log 0{,}1$ Resposta: -1

34. Vamos calcular logaritmos decimais utilizando uma calculadora científica.

Para calcular o logaritmo decimal de 11, por exemplo, procedemos da seguinte maneira.

Inicialmente, digitamos a tecla logaritmo $\boxed{\text{log}}$, registramos o número 11 e, em seguida, digitamos a tecla $\boxed{=}$.

$\boxed{\text{log}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$

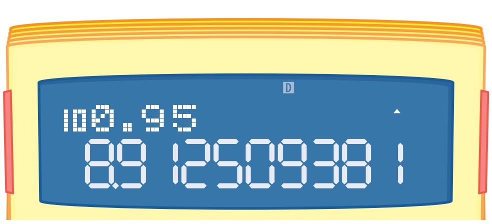


Em alguns modelos de calculadoras científicas, o cálculo do logaritmo decimal de 11 deve ser feito digitando a seguinte sequência de teclas.

$\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{\text{log}}$ $\boxed{=}$

Seja $\log b = 0{,}95$. Para calcularmos o logaritmando do b desse logaritmo decimal, por exemplo, digitamos SHIFT e a tecla $\boxed{\text{log}}$, registramos o número 0,95 e digitamos a tecla $\boxed{=}$.

SHIFT $\boxed{\text{log}}$ (10^x) $\boxed{0}$ $\boxed{\cdot}$ $\boxed{9}$ $\boxed{5}$ $\boxed{=}$



Utilizando uma calculadora científica, calcule em cada equação o valor de x com aproximação de uma casa decimal.

a) $\log 7 = x$ Resposta: $x \simeq 0{,}8$

b) $\log x = 0{,}903$ Resposta: $x \simeq 8{,}0$

c) $\log 13 = x$ Resposta: $x \simeq 1{,}1$

d) $\log x = 1{,}322$ Resposta: $x \simeq 21{,}0$

e) $\log 20 - \log 17 = x$ Resposta: $x \simeq 0{,}1$

f) $\log x = 3 + \log 25$ Resposta: $x = 25\,000$

35. Desenvolva as expressões.

a) $\log_3 \sqrt[4]{9} - 4^{\log_4 5}$ Resposta: $-\frac{9}{2}$

b) $2\log_9 1 + \left[\log_{0,5}\left(\frac{1}{8}\right)\right]^2$ Resposta: 9

c) $6^{2+\log_6 7} - \log(\log 10)$ Resposta: 252

d) $4\log_8 2\sqrt{2} + \log_{\frac{1}{5}} 0{,}04$ Resposta: 4

e) $5^{\log_{25} 4} + 2^{3+\log_2 4}$ Resposta: 34

f) $2^{\log_8 125} + 5^{3+\log_5 3}$ Resposta: 380

36. O logaritmo de certo número em determinada base é igual a 4, e o logaritmo desse mesmo número com base igual ao triplo da anterior é igual a 2. Qual é esse número? Resposta: 81

37. Cientistas observaram que a população de determinada colônia de bactérias aumenta em 20% a cada hora. Considerando a taxa de crescimento constante e $\log_{1,2} 2 = 3{,}81$, calcule aproximadamente quantas horas serão necessárias para que essa população dobre a quantidade..
Resposta: 3 h 49 min

38. Para quais valores de x está definido:

a) $\log_6(x - 9)$? Resposta: $x > 9$

b) $\log_{(2x+8)} 0{,}05$? Resposta: $x > -4$ e $x \neq -\frac{7}{2}$

c) $\log_5(1 - x) + \log_{(x+0,3)} 9$? Resposta: $-0{,}3 < x < 1$ e $x \neq 0{,}7$

d) $\log_{13}\left(\frac{3x - 6}{2 - 4x}\right)$? Resposta: $\frac{1}{2} < x < 2$

e) $\frac{\log(x - 10)}{\log_{(x+1)} 25}$? Resposta: $x > 10$

39. Sendo $\log_{(2a-10)} 2 = \log_{(4+a)}\left(\frac{b}{3} - 1\right)$ e $\log_b\left(8 - \frac{a}{2}\right) = 0$, qual é o valor de $y = 8^{\log_5 17 \cdot \log_8 (a-b)}$? Resposta: $y = 17$

40. Quando digitamos a tecla $\boxed{\text{log}}$ de uma calculadora científica e inserimos um número maior do que zero, ao pressionarmos a tecla $\boxed{=}$, obtemos um número real no visor da calculadora. Qual é a relação entre o número inserido inicialmente e o número real obtido?

41. Breno digitou em sua calculadora científica a tecla $\boxed{\sqrt{\ }}$, pressionou duas vezes $\boxed{\text{log}}$ e inseriu certo número natural n. Ao digitar a tecla $\boxed{=}$, obteve no visor da calculadora o número zero. Determine o número n digitado por Breno.
Resposta: $n = 10$

40. Sugestões de resposta: O número 10, que é a base do logaritmo, elevado ao número real que obtemos é igual ao número inserido inicialmente. O número obtido é igual ao logaritmo decimal do número inserido inicialmente.

ILUSTRAÇÕES: SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

Propriedades operatórias dos logaritmos

Neste tópico, vamos estudar as propriedades dos logaritmos, que serão úteis em diversos cálculos. Para estudar essas propriedades, considere os números reais positivos a, b e c, com a diferente de 1.

Logaritmo do produto

Em uma mesma base, o logaritmo do produto de dois números positivos é igual à soma dos logaritmos de cada um desses números.

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

Demonstração

Considerando $\log_a b = m$, $\log_a c = n$ e $\log_a (b \cdot c) = p$, temos, pela definição:

- $\log_a b = m \Leftrightarrow a^m = b$
- $\log_a c = n \Leftrightarrow a^n = c$
- $\log_a (b \cdot c) = p \Leftrightarrow a^p = b \cdot c$

Substituindo $b = a^m$ e $c = a^n$ em $a^p = b \cdot c$, temos:

$$a^p = a^m \cdot a^n \Rightarrow a^p = a^{m+n} \Rightarrow \underbrace{p}_{\log_a (b \cdot c)} = \overbrace{m}^{\log_a b} + \underbrace{n}_{\log_a c} \Rightarrow \boxed{\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c}$$

Observação

Note que $\log_a b \cdot c$ é diferente de $\log_a (b \cdot c)$. Em $\log_a b \cdot c$, temos um número c multiplicando $\log_a b$; em $\log_a (b \cdot c)$, o logaritmando é $b \cdot c$, o que possibilita a aplicação da propriedade do logaritmo do produto.

Logaritmo do quociente

Em uma mesma base, o logaritmo do quociente de dois números positivos é igual à diferença dos logaritmos de cada um desses números.

$$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

Demonstração

Considerando $\log_a b = m$, $\log_a c = n$ e $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = q$, temos, pela definição:

- $\log_a b = m \Leftrightarrow a^m = b$
- $\log_a c = n \Leftrightarrow a^n = c$
- $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = q \Leftrightarrow a^q = \frac{b}{c}$

Substituindo $b = a^m$ e $c = a^n$ em $a^q = \frac{b}{c}$, temos:

$$a^q = \frac{a^m}{a^n} \Rightarrow a^q = a^{m-n} \Rightarrow \underbrace{q}_{\log_a \left(\frac{b}{c}\right)} = \overbrace{m}^{\log_a b} - \underbrace{n}_{\log_a c} \Rightarrow \boxed{\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c}$$

Logaritmo da potência

O logaritmo de uma potência de base positiva é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência.

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$$

Demonstração

Considerando $\log_a b = c$ e $\log_a b^n = d$, temos, pela definição:

- $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$
- $\log_a b^n = d \Leftrightarrow a^d = b^n$

Substituindo $b = a^c$ em $a^d = b^n$, temos:

$$a^d = (a^c)^n \Rightarrow a^d = a^{c \cdot n} \Rightarrow \underbrace{d}_{\log_a b^n} = n \cdot \underbrace{c}_{\log_a b} \Rightarrow \boxed{\log_a b^n = n \cdot \log_a b}$$

Mudança de base

Em alguns casos, temos de efetuar cálculos com logaritmos de bases diferentes. Para isso, podemos fazer a mudança de base do logaritmo de maneira conveniente.

Acompanhe como podemos transformar $\log_a b$ em um logaritmo de base c, com a, b e c reais positivos, tais que $a \neq 1$ e $c \neq 1$:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Demonstração

Considerando $\log_a b = p$, $\log_c b = m$ e $\log_c a = n$, temos, pela definição:

- $\log_a b = p \Leftrightarrow a^p = b$
- $\log_c b = m \Leftrightarrow c^m = b$
- $\log_c a = n \Leftrightarrow c^n = a$

Como $a^p = b$ e $c^m = b$, então $a^p = c^m$.

Substituindo $a = c^n$ em $a^p = c^m$, temos:

$$\left(c^n\right)^p = c^m \Rightarrow c^{n \cdot p} = c^m \Rightarrow \underbrace{n}_{\log_c a} \cdot \overbrace{p}^{\log_a b} = \underbrace{m}_{\log_c b} \Rightarrow \log_c a \cdot \log_a b = \log_c b \Rightarrow \boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}}$$

Exemplos

- Mudando para 3 a base de $\log_7 25$, temos: $\log_7 25 = \dfrac{\log_3 25}{\log_3 7}$.
- Mudando para 10 a base de $\log_9 13$, temos: $\log_9 13 = \dfrac{\log 13}{\log 9}$.

Na igualdade $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, quando $b = c$, temos:

$$\log_a b = \frac{\overbrace{\log_b b}^{1}}{\log_b a} \Rightarrow \boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}} \text{ ou } \boxed{\log_b a \cdot \log_a b = 1}$$

Exemplo

$$\log_2 32 = 5 \Leftrightarrow \log_{32} 2 = \frac{1}{5}$$

Observação

Como $\log_2 32 \cdot \log_{32} 2 = 5 \cdot \frac{1}{5} = 1$, então $\log_2 32$ e $\log_{32} 2$ são números inversos.

De maneira geral, dizemos que $\log_c a$ e $\log_a c$, quando existirem, são números inversos.

Exercícios e problemas resolvidos

R7. Dados $\log 2 \simeq 0{,}301$, $\log 3 \simeq 0{,}477$ e $\log 5 \simeq 0{,}699$, calcule $\log_2 15$ e $\log_{500} 30\,000$.

Resolução

- $\log_2 15 = \log_2 (3 \cdot 5) = \overbrace{\log_2 3 + \log_2 5 = \frac{\log 3}{\log 2} + \frac{\log 5}{\log 2}}^{\text{mudança de base}} \simeq \frac{0{,}477}{0{,}301} + \frac{0{,}699}{0{,}301} \simeq 3{,}907$
- $\log_{500} 30\,000 = \underbrace{\log_{5 \cdot 10^2}\left(3 \cdot 10^4\right) = \frac{\log\left(3 \cdot 10^4\right)}{\log\left(5 \cdot 10^2\right)}}_{\text{mudança de base}} = \frac{\log 3 + \overbrace{\log 10^4}^{4}}{\log 5 + \underbrace{\log 10^2}_{2}} \simeq \frac{0{,}477 + 4}{0{,}699 + 2} = \frac{4{,}477}{2{,}699} \simeq 1{,}659$

R8. Resolva a equação exponencial $7^{2x-1} = 3$. Para isso, considere $\log 3 = 0{,}48$ e $\log 7 = 0{,}85$.

Resolução

Aplicamos a definição de logaritmo e utilizamos a mudança de base.

$$7^{2x-1} = 3 \Rightarrow 2x - 1 = \log_7 3 \Rightarrow 2x - 1 = \frac{\log 3}{\log 7} \Rightarrow 2x - 1 = \frac{0{,}48}{0{,}85} \Rightarrow x = \frac{\frac{0{,}48}{0{,}85} + 1}{2} \Rightarrow x \simeq 0{,}782$$

42\. c) Resposta: $\frac{1}{5}\log_2 a - \log_2 b - 2\log_2 c$

Anote as respostas no caderno.

42. Utilizando as propriedades, desenvolva cada logaritmo.

a) $\log(b\sqrt{c})$ Resposta: $\log b + \frac{1}{2}\log c$

b) $\log\left(\frac{a^2 b}{c}\right)$ Resposta: $2\log a + \log b - \log c$

c) $\log_2\left(\frac{\sqrt[5]{a}}{b \cdot c^2}\right)$

43. Escreva na forma de um único logaritmo.

a) $\log_4 5 + \log_4 9$ Resposta: $\log_4 45$

b) $8\log 1 + \log 0{,}77 - \log 0{,}11$ Resposta: $\log 7$

44. Calcule o valor da expressão $x + y - z$, sabendo que $x = \log 0{,}001^6$, $y = \log_3 243$ e $z = \log_3 \sqrt{27}$. Resposta: $-\frac{29}{2}$

45. Com o auxílio de uma calculadora científica, determine a solução das equações exponenciais.

a) $3^{x+4} = 15$ Resposta: $S = \{-1{,}535\}$

b) $27^x = 125$ Resposta: $S = \{1{,}465\}$

c) $225 = 9^{\frac{x}{4}-1}$ Resposta: $S = \{13{,}86\}$

46. Qual é o valor de x para que seja satisfeita a igualdade $\log_c xb^3 = \frac{1}{2} \cdot \log_c a + 4 \cdot \log_c b$? Resposta: $x = b\sqrt{a}$

47. A desvalorização que certo modelo de automóvel sofre pode ser calculada por meio da fórmula $v = n\left(\frac{9}{10}\right)^t$, em que v é o valor futuro, n é o valor atual, e t é o tempo, a cada dois anos, no qual o automóvel sofre a desvalorização.

a) Qual é a taxa de desvalorização desse automóvel a cada dois anos? Resposta: 10%

b) Se o valor atual de mercado desse automóvel é n reais, após quantos anos, aproximadamente, seu valor será reduzido à metade? Se necessário, utilize uma calculadora científica para auxiliá-lo nos cálculos. Resposta: 13 anos.

48. Um investimento bancário, no sistema de juro composto, rende 1% ao mês. Se forem investidos R$ 500,00, quantos meses serão necessários para que se obtenham R$ 50,00 de juros? Se necessário, utilize uma calculadora científica para auxiliá-lo nos cálculos. Resposta: 10 meses.

49. Reduza as expressões a razões de logaritmos decimais.

a) $\log_{12} 2 + \log_{12} 4$ Resposta: $\frac{\log 8}{\log 12}$

b) $\log_2 3 + \log_2 1 - \log_2 7$ Resposta: $\frac{\log\left(\frac{3}{7}\right)}{\log 2}$

c) $\log_{17} 18 - \log_{17} 12 + \log_{17}\frac{4}{3}$ Resposta: $\frac{\log 2}{\log 17}$

50. Considerando $\log a = x$ e $\log b = y$, calcule o valor das expressões.

a) $\log_a b \cdot \log_b a$ Resposta: 1

b) $\log_{\sqrt{b}} a^3$ Resposta: $\frac{6x}{y}$, com $y \neq 0$

51. Determine o valor de $z \cdot w$, sabendo que $z = \log_6 27 \cdot \log_3 36$ e $w = \log_4 10 \cdot \log \sqrt[3]{16}$. Resposta: 4

52. Calcule o número de algarismos da potência 50^{14}. Se necessário, utilize $\log 2 = 0{,}301$. Resposta: 24 algarismos.

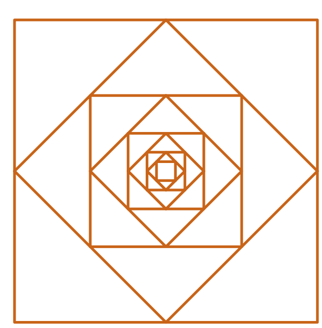
53. Determine o valor de $\log_8\left[\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}{(a \cdot b)^{\frac{1}{2}}}\right]^2$, sabendo que a e b são números positivos e $a + b = 30\sqrt{a \cdot b}$. Resposta: Alternativa **b**.

a) 0,6 b) $1,\overline{6}$ c) $2,\overline{8}$ d) 3,9 e) 4

54. Sabendo que certo microrganismo se prolifera rapidamente, dobrando sua população a cada 20 min, determine em quanto tempo, aproximadamente, uma população de 100 microrganismos passará a ser composta de 5 000 indivíduos. Se necessário, utilize uma calculadora científica para auxiliá-lo nos cálculos. Resposta: Aproximadamente 1 h 53 min.

55. Em um quadrado, se traçarmos segmentos de reta ligando os pontos médios de seus lados, obteremos um novo quadrado; ligando os pontos médios dos lados desse novo quadrado, obteremos outro quadrado. Esse processo pode ser realizado indeterminadas vezes, gerando uma sequência de quadrados. Considerando o quadrilátero inicial com lado unitário, o comprimento do lado de um quadrado é dado pela fórmula $m = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$, em que n é a posição do quadrado na sequência.

Com o auxílio de uma calculadora científica, determine quais quadrados dessa sequência têm lados com comprimento entre $\frac{\sqrt{2}}{50}$ e $\frac{2}{25}$ unidades de comprimento. Resposta: 9º, 10º e 11º quadrados.



RONALDO INACIO/ARQUIVO DA EDITORA

56. Com o auxílio de uma calculadora científica, calcule o valor de cada expressão com aproximação de três casas decimais.

a) $\log_7 5^5 + \log\sqrt[3]{4^2} - \log_{0,1} 1$ Resposta: Aproximadamente 4,537.

b) $\log\left(\log_6 3^{\frac{1}{8}}\right)^2$ Resposta: Aproximadamente −2,231.

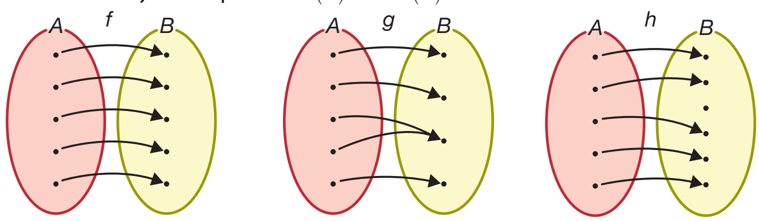
c) $\frac{\log_{\sqrt{10}} 15 + \log\sqrt{14}}{\log_5 8}$ Resposta: Aproximadamente 2,264.

Função inversa

Antes de iniciarmos nossos estudos sobre funções inversas, definiremos um conceito importante.

Uma função f é bijetiva se, e somente se, para todo $x_1 \in D(f)$ e $x_2 \in D(f)$, com $x_1 \neq x_2$, tivermos $f(x_1) \neq f(x_2)$ e $CD(f) = Im(f)$.

Entre as funções representadas a seguir, verificamos que apenas a função f é bijetiva. A função g não é bijetiva, pois existem $x_1 \in A$ e $x_2 \in A$, tal que $x_1 \neq x_2$ e $g(x_1) = g(x_2)$. Já a função h não é bijetiva, pois $CD(h) \neq Im(h)$.



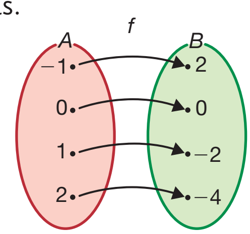
Observação

Considere a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + 1$. Se $x_1 = -3$ e $x_2 = 3$, temos $x_1 \neq x_2$, porém $f(x_1) = f(x_2) = 10$. Portanto, a função f não é bijetiva.

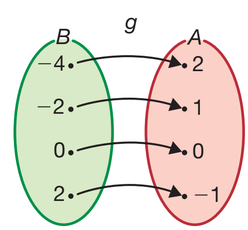
Professor, professora: Se julgar conveniente, diga aos estudantes que é possível verificar que a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + 1$ não é bijetiva observando que nem todo elemento y pertencente ao contradomínio está associado a um elemento x do domínio. Por exemplo, $-3 \in CD(f)$, mas não está associado a nenhum elemento x do domínio, ou seja, $-3 \notin Im(f)$. Logo, $CD(f) \neq Im(f)$.

Dadas as funções bijetivas f de A em B e g de B em A definidas por $f(x) = -2x$ e $g(x) = -\dfrac{x}{2}$, com $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{-4, -2, 0, 2\}$, podemos representá-las pelos seguintes diagramas.

- $f(-1) = 2$
- $f(0) = 0$
- $f(1) = -2$
- $f(2) = -4$



- $g(-4) = 2$
- $g(-2) = 1$
- $g(0) = 0$
- $g(2) = -1$

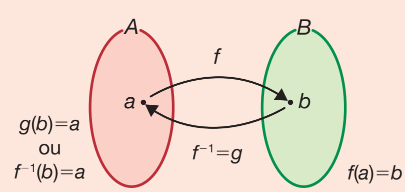


Note que:

- $D(f) = Im(g)$ e $D(g) = Im(f)$.
- Para todo $x \in A$ e $y \in B$, tal que $f(x) = y$, tem-se $g(y) = x$.

Nessas condições, dizemos que g é a função inversa de f.

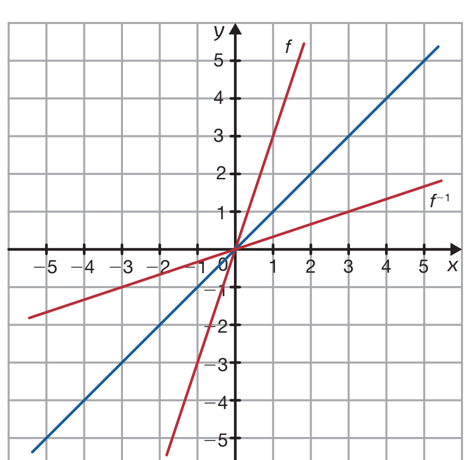
Seja uma função bijetiva f de A em B. Dizemos que uma função g de B em A é inversa de f se, para todo $a \in A$ e $b \in B$, sendo $f(a) = b$, tem-se $g(b) = a$. Em geral, indicamos a função inversa de f por f^{-1}, ou seja, $f^{-1} = g$.



Para determinarmos a inversa da função bijetiva f, definida por $f(x) = y = 3x$, por exemplo, inicialmente isolamos a variável x:

$$y = 3x \Rightarrow x = \frac{y}{3}$$

Como, de maneira geral, quando representamos o gráfico de uma função em um plano cartesiano, a variável independente x é indicada no eixo das abscissas, e a variável dependente y, no eixo das ordenadas, é comum permutar as variáveis x e y para expressar a função f^{-1}, que é a inversa de f. Assim: $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{3}$.



Observação

No caso apresentado, os gráficos de f e f^{-1} são simétricos em relação à reta em azul, que corresponde à bissetriz dos quadrantes ímpares do plano cartesiano. É possível demonstrar que os gráficos de duas funções inversas quaisquer são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares do plano cartesiano.

Função logarítmica

Professor, professora: Antes de iniciar o estudo desse tópico, converse com os estudantes a respeito da função exponencial e suas propriedades, bem como seu comportamento gráfico. Discuta os logaritmos e suas propriedades, buscando avaliar a compreensão deles a respeito de ambos os conteúdos, os quais são indispensáveis para o trabalho com os conceitos propostos neste momento.

Estudamos anteriormente que uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, definida por $f(x) = a^x$, com a real positivo diferente de 1 é denominada função exponencial. Essa função é bijetiva e, consequentemente, possui inversa.

Professor, professora: Comente com os estudantes que uma função é bijetiva quando pode ser caracterizada, simultaneamente, como uma função injetiva e sobrejetiva. Uma função f é injetiva quando dois elementos, x_1 e x_2, pertencentes ao seu domínio e distintos entre si, fornecem imagens $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$ também distintas entre si. Por outro lado, uma função f é sobrejetiva quando o contradomínio da função é igual ao seu conjunto imagem, ou seja, para todo y_1 e y_2 pertencentes ao contradomínio, existem x_1 e x_2 pertencentes ao domínio, tais que $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$.

Agora, vamos determinar a inversa f^{-1} da função exponencial. Pela definição de logaritmo, segue que:

$$y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$$

Permutando as variáveis x e y, temos $\log_a x = y$. Portanto, $f^{-1}\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ é definida por $f^{-1}(x) = \log_a x$. Essa função é denominada função logarítmica.

> Uma função $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \log_a x$ ou $y = \log_a x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, é denominada função logarítmica.

Questão A. Qual é o domínio da função logarítmica? Resposta: $\mathbb{R}_+^*$

Questão B. Qual é o conjunto imagem da função logarítmica? Resposta: $\mathbb{R}$

Exemplos

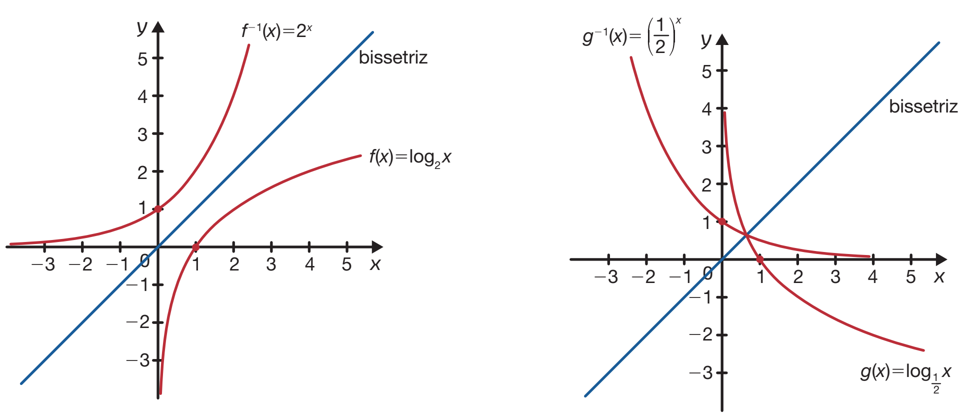
- $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log x$.
- $m\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ definida por $m(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$.

Gráfico de uma função logarítmica

Como a função exponencial e a função logarítmica são inversas, os gráficos que as representam são simétricos em relação à bissetriz do 1º e do 3º quadrantes.

Como já estudamos o gráfico da função exponencial, esboçaremos o gráfico da função logarítmica da seguinte maneira.

Observação
A bissetriz pode ser representada pela função identidade, ou seja, pela função definida por $f(x) = x$.



Observação
Se $a > 0$ e $a \neq 1$, temos $a^0 = 1$ e, consequentemente, $\log_a 1 = 0$.

> De maneira geral, é possível demonstrar que:
> - uma função logarítmica é crescente se $a > 1$. Sempre que aumentamos os valores de x, os valores correspondentes de y aumentam, isto é, $x_2 > x_1 \Leftrightarrow \log_a x_2 > \log_a x_1$;
> - uma função logarítmica é decrescente se $0 < a < 1$. Sempre que aumentamos os valores de x, os valores correspondentes de y diminuem, isto é, $x_2 > x_1 \Leftrightarrow \log_a x_2 < \log_a x_1$.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

57. Dadas as funções f e g definidas por $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = \log_3\left(\frac{1}{x}\right)$, calcule:

a) $f(16)$. Resposta: 4

b) $g(1)$. Resposta: 0

c) $g(9^{-2})$. Resposta: 4

d) $f^{-1}(5)$. Resposta: 32

e) $f(8^{-1})$. Resposta: -3

f) $g^{-1}(3)$. Resposta: $\frac{1}{27}$

g) $g(3^{-2})$. Resposta: 2

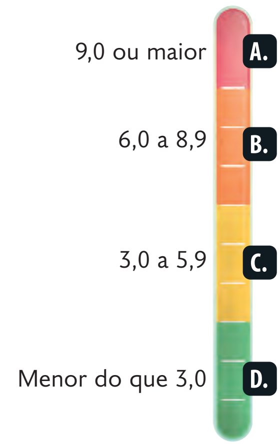
h) $f^{-1}(2)$. Resposta: 4

58. O terremoto é um fenômeno natural decorrente de movimentos da crosta terrestre, geralmente resultado do choque entre duas **placas tectônicas**, que liberam grande quantidade de energia e ocasionam tremores na terra. Com base na quantidade de energia liberada por um terremoto, é possível determinar, utilizando um aparelho chamado sismógrafo, sua magnitude na escala Richter, desenvolvida em 1935 pelo sismólogo estadunidense Charles Richter (1900-1985). Para sua elaboração, esse sismólogo atribuiu aos terremotos mais fracos, que já haviam sido registrados, valores próximos de zero e adotou uma escala logarítmica. Os valores associados a cada tipo de terremoto são chamados de **magnitude** e são medidos em graus.

Conforme o grau de magnitude registrado na escala Richter, diversos efeitos podem ser gerados, conforme o esquema seguinte.

Placas tectônicas: blocos rochosos que compõem a superfície terrestre e sustentam os continentes e oceanos.

Magnitude (graus)



Possíveis efeitos

OBJETO DIGITAL ***Carrossel de imagens:*** Terremotos

A. Tremores muito fortes que causam a destruição quase total da região afetada.

B. Terremoto destrutivo que pode acarretar severos danos às construções e provocar grandes rachaduras no solo.

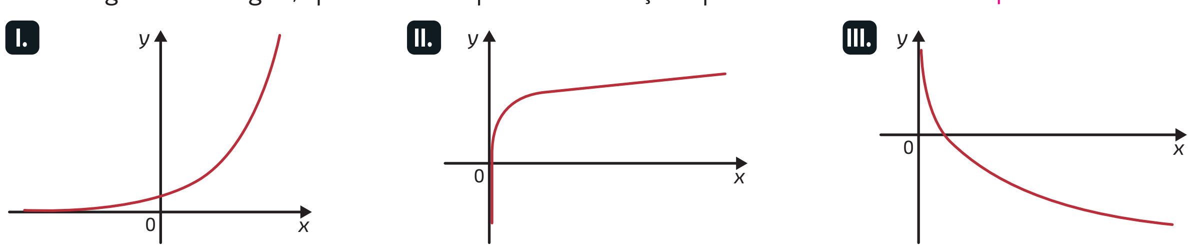
C. Abalos perceptíveis sem a utilização de equipamentos, mas pouco destruidores. Podem derrubar objetos da mobília e trincar paredes.

D. Tremores pequenos, geralmente não perceptíveis, mas registrados por equipamentos apropriados.

Fonte de pesquisa: PRESS, Frank *et al*. *Para entender a Terra*. Tradução: Rualdo Menegat *et al*. 4.ed. Porto Alegre: Bookman, 2006.

a) Sabendo que a magnitude y de um terremoto na escala Richter pode ser expressa pela função definida por $y = \frac{2}{3} \cdot \log\left(\frac{x}{7 \cdot 10^{-3}}\right)$, em que x representa a energia liberada em quilowatts-hora pelo terremoto, determine a magnitude de um terremoto que libera $7 \cdot 10^9$ kWh de energia. Quais são suas possíveis consequências? Resposta: 8 graus na escala Richter. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes respondam que as construções podem sofrer danos severos e podem ocorrer grandes rachaduras no solo.

b) Entre os gráficos a seguir, qual melhor representa a função apresentada no item **a**? Resposta: Gráfico **II**.



c) Faça uma pesquisa sobre a magnitude, na escala Richter, de alguns terremotos já registrados e suas consequências. Resposta pessoal. Nos últimos anos, os terremotos provocaram estragos que puderam ser vivenciados pela população de diversos países. Em abril de 2015, por exemplo, um terremoto de 7,8 graus na escala Richter, seguido por outro de magnitude 7,2 graus, atingiu o Nepal, localizado no continente asiático, ocasionando a morte de, aproximadamente, 8 500 pessoas, além de deixar milhares de desabrigados.

59. Determine o domínio e o conjunto imagem da função definida por:

a) $f(x) = \log(x + 3)$.
Resposta: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x > -3\}$; $Im(f) = \mathbb{R}$

b) $f(x) = \log_8(6 - x)$.
Resposta: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x < 6\}$; $Im(f) = \mathbb{R}$

c) $f(x) = 5 + \log_4(2x)$.
Resposta: $D(f) = \mathbb{R}^*_+$; $Im(f) = \mathbb{R}$

60. O nível sonoro de um ambiente, em decibéis (dB), pode ser calculado pela lei de Weber-Fechner, que é dada por $N = 10 \cdot \log\left(\dfrac{I}{10^{-12}}\right)$, em que I é a intensidade sonora medida em watts por metro quadrado $\left(W/m^2\right)$.
Qual é o nível sonoro da respiração normal de uma pessoa que tem intensidade de 10^{-11} W/m^2?
Resposta: 10 dB

61. Esboce o gráfico da função definida por: Respostas no final do **Livro do Estudante**.

a) $y = \log_4 x$.
b) $y = \log_{\frac{1}{4}} x$.
c) $y = \log_3(x + 1)$.

62. Classifique, em crescente ou decrescente, a função definida por: Resposta: Crescentes: **a**, **b**, **e**; decrescentes: **c**, **d**, **f**.

a) $f(x) = \log_5 x$.
b) $f(x) = \log x$.
c) $f(x) = \log_{\frac{1}{6}} x$.
d) $f(x) = \log_{\frac{2}{\sqrt{7}}} x$.
e) $f(x) = \log_{\frac{5}{2}} x$.
f) $f(x) = \log_{\frac{8}{9}} x$.

63. Considere a função g definida por $g(x) = \log_3 x$. Esboce, em um mesmo plano cartesiano, o gráfico das funções g e g^{-1}, identificando se são crescentes ou decrescentes. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

64. Analise os quadros.

$f(x) = a^x$

x	-2	0	3	5
$f(x)$	0,25	1	8	32

$g(x) = \log_a x$

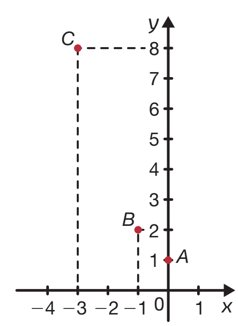
x	b	c	$4c$	d
$g(x)$	0	-3	-1	3

a) Determine o valor de a, b, c e d. Resposta: $a = 2$; $b = 1$; $c = \frac{1}{8}$ e $d = 8$.

b) Qual é o domínio e a imagem das funções f e g? Resposta: $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$; $D(g) = \mathbb{R}_+^*$; $Im(g) = \mathbb{R}$

c) As funções f e g são crescentes ou decrescentes? Justifique sua resposta.
Resposta: Crescentes, pois $a > 1$.

65. Os pontos A, B e C representados no plano cartesiano pertencem ao gráfico da função definida por $f(x) = a^x$, com a real positivo diferente de 1.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

a) Determine três pontos que pertencem ao gráfico da função g definida por $g(x) = \log_a x$. Sugestão de resposta: $(1, 0)$, $(2, -1)$ e $(8, -3)$.

b) Qual é o domínio e a imagem das funções f e g? Resposta: $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$; $D(g) = \mathbb{R}_+^*$; $Im(g) = \mathbb{R}$

c) As funções f e g são crescentes ou decrescentes?
Resposta: Decrescentes.

66. Obtenha o domínio da função definida por:

a) $g(x) = \log_{(x-4)}(x + 2)$.
Resposta: $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4 \text{ e } x \neq 5\}$

b) $g(x) = \log_{(-x)}(1 + x)$.
Resposta: $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0\}$

c) $g(x) = \log_{(2x-1)}(x^2 - 6x + 9)$.
Resposta: $D(g) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{2} \text{ e } x \neq 1 \text{ e } x \neq 3\right\}$

Equação e inequação logarítmica

Nesse tópico, estudaremos as equações e as inequações logarítmicas.

Equação logarítmica

Toda equação cuja incógnita está no logaritmando, na base ou em ambos é denominada equação logarítmica.

Dica

Lembre-se de que $\log_a b = c$ existe quando a e b são números reais positivos e $a \neq 1$.

Exemplos

- $\log_3(x - 4) = 27$
- $\log_2(x + 6) + \log_2(x - 1) = 2$
- $\log_{5x} 12 = 18$

Ao resolvermos uma equação desse tipo, devemos verificar as condições de existência do logaritmo.

Além dessa verificação, aplicaremos a seguinte propriedade:

$$\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c, \text{ com } a > 0,\ b > 0,\ c > 0 \text{ e } a \neq 1$$

Na próxima seção **Exercícios e problemas resolvidos**, é apresentada a resolução de algumas equações logarítmicas.

Em busca do crescimento mundial sustentável

ODS 5

ODS 3

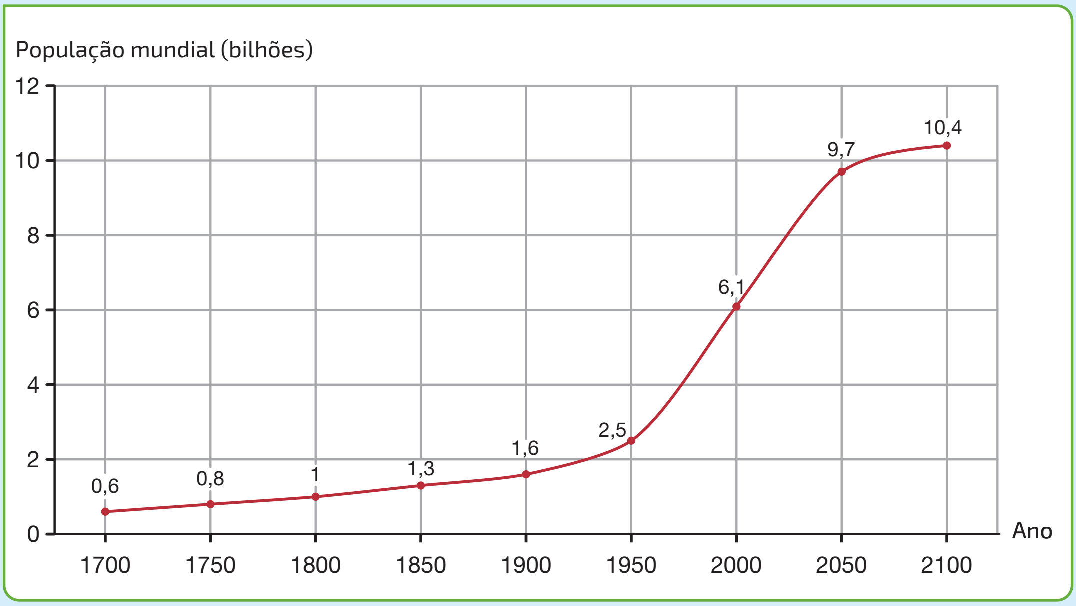
Durante boa parte da história humana, o crescimento da população mundial foi relativamente baixo. A aceleração do crescimento populacional ocorreu a partir do final do século XVIII, sobretudo nos países que desenvolveram os processos da Revolução Industrial e da urbanização.

No século XX, a população mundial registrou o seu pico de crescimento, especialmente nas décadas de 1960 e 1970, quando atingiu em média um aumento de 2,1% por ano. Desde então, o crescimento populacional iniciou um processo de desaceleração e passou a registrar taxas menores. Atualmente, há um crescimento de aproximadamente 1,0% por ano. Segundo dados divulgados pela Organização das Nações Unidas (ONU), a população mundial em 2023 era de 8 024 997 030 pessoas. O gráfico a seguir mostra o crescimento populacional mundial nos últimos séculos e a projeção estimada pela ONU até o final deste século.

Professor, professora: Oriente os estudantes a consultar mais informações sobre os **Objetivos de Desenvolvimento Sustentável** (ODS) no início deste volume.

Professor, professora: A ideia central desta seção é abordar uma situação com números muito grandes, no caso a população mundial, tal que seja necessário e conveniente utilizar uma notação para simplificar o registro desses números. Dessa maneira, ao trabalhar com potências e função exponencial, as vantagens dessa simplificação serão significativas para os estudantes.

Crescimento da população mundial, de 1700 a 2100



TATIANE GALHEIRO/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte de pesquisa: UNITED NATIONS. *World Population Prospects 2024*. Disponível em: https://population.un.org/wpp/. Acesso em: 17 jul. 2024.

No gráfico apresentado, verificamos que a estimativa do crescimento da população mundial tende a desacelerar e isso será ainda mais significativo na segunda metade do século, quando será registrado um crescimento médio de 0,15% por ano entre 2050 e 2100.

Diversos fatores influenciam a desaceleração do crescimento populacional, de acordo com o Fundo de População das Nações Unidas (Unfpa), entre eles o aumento do custo de vida e o avanço da medicina em métodos contraceptivos que favorecem os direitos reprodutivos e causam impacto na taxa de fecundidade e no planejamento familiar, contribuindo para a queda da natalidade global.

Essa desaceleração, acompanhada da expressiva marca de 8 bilhões de habitantes, levanta debates sobre taxas populacionais ideais. Afinal, é necessário controlar a população mundial? Precisamos que nasçam mais pessoas ou não?

Segundo o Unfpa, a interferência de governos e instituições em questões reprodutivas é inadequada e já causou sérias violações de direitos humanos, pois decisões sobre ter filhos ou não devem ser escolhas individuais.

Relatórios do Unfpa apontam que países onde os direitos femininos são garantidos e respeitados geralmente registram taxas de crescimento populacional mais equilibradas em comparação com países nos quais a desigualdade de gênero ainda é consideravelmente elevada. Por outro lado, a desaceleração do crescimento populacional pode ocasionar a longo prazo diversas consequências negativas, como o envelhecimento da população e a redução da força de trabalho disponível. Esses problemas afetam a economia e a sociedade, impactando a renda e a produtividade do país.

Atualmente, muitas mulheres exercem papéis de cidadãs ativas na sociedade, diferentemente de décadas dos séculos XIX e XX, em que a maioria não tinha autonomia para tomar algumas decisões. A seguir, são apresentados alguns direitos que garantem às mulheres mais autonomia, sobretudo acerca da vida reprodutiva.

Aumento da participação feminina no mercado de trabalho.

SEVENTY FOUR/SHUTTERSTOCK

Mulheres em um ambiente de trabalho.

Mais acesso de mulheres à educação.

BEAR FOTOS/SHUTTERSTOCK

Mulheres em sala de aula.

Conquista dos direitos de controle sobre a vida reprodutiva e sobre a opção pelo matrimônio.

NOWRA PHOTOGRAPHY/SHUTTERSTOCK

Momento de um matrimônio.

Acesso à educação sexual e a diferentes métodos contraceptivos.

JPC-PROD/SHUTTERSTOCK

Exemplares de métodos contraceptivos.

As intervenções por parte dos governos, na concepção da ONU, devem ocorrer por meio de políticas públicas eficientes, principalmente nas áreas da saúde, da educação e da liberdade democrática, oferecendo condições sociais à população para tomar as próprias decisões e realizar os planejamentos familiares que julgarem mais adequados. Com isso, mesmo reduzindo a taxa de crescimento populacional, é possível garantir mais qualidade de vida e envelhecimento saudável.

Observação

Garantir a autonomia e a liberdade da população para o controle sobre a própria vida e a tomada de decisões é um princípio fundamental para tornar a nossa sociedade mais justa e organizada.

Professor, professora: Converse com os estudantes sobre os significados práticos dos números apresentados nesta seção e as possíveis interpretações desses números. Reflita com eles possíveis causas e efeitos da variação deles, como: taxas de natalidade e mortalidade no mundo e as diferenças delas na comparação entre diferentes países; possível diferença na proporção entre homens e mulheres ou entre pessoas jovens e idosas ou, ainda, entre classes sociais, nas diversas populações do globo; ações políticas que refletem em medidas públicas; orientação sexual.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

1. Cite alguns fatores que podem influenciar o ritmo do crescimento da população mundial. Converse com os colegas. Resposta pessoal. Os estudantes podem citar, por exemplo, avanços na medicina, variações no custo de vida das pessoas e investimentos em saúde pública e programas de desenvolvimento social.
2. Segundo as projeções da ONU, qual será a estimativa da população mundial em 2050? Resposta: 9,7 bilhões de habitantes.
3. De que outra maneira podemos escrever o número que representa a população mundial em 2023? Sugestão de resposta: 8 bilhões de habitantes.

Exercícios e problemas resolvidos

R9. Resolva em $\mathbb{R}$ as seguintes equações.

a) $\log_2(x - 3) = 1$ **b)** $\log_{x-2}(2x - 4) = 2$ **c)** $\log(x^2 - 1) = \log(2x - 1)$

Resolução

a) $\log_2(x - 3) = 1$

Condição de existência: $x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$

Resolvendo a equação, temos:

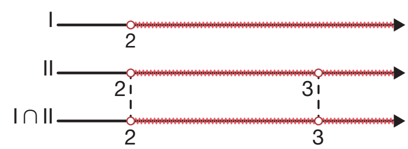
$$\log_2(x - 3) = 1 \Rightarrow 2^1 = x - 3 \Rightarrow x = 5$$

Como $x = 5$ satisfaz a condição de existência, temos $S = \{5\}$.

b) $\log_{x-2}(2x - 4) = 2$

Condições de existência:

- $2x - 4 > 0 \Rightarrow 2x > 4 \Rightarrow x > 2$ (I)
- $x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$ e $x - 2 \neq 1 \Rightarrow x \neq 3$ (II)



Logo, as condições de existência são $x > 2$ e $x \neq 3$.

Resolvendo a equação, temos:

$\log_{x-2}(2x - 4) = 2 \Rightarrow (x - 2)^2 = 2x - 4 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 2x - 4 \Rightarrow$

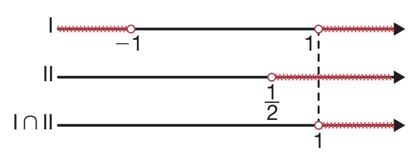
$\Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = 4$

Nesse caso, como somente $x = 4$ satisfaz as condições de existência, temos $S = \{4\}$.

c) $\log(x^2 - 1) = \log(2x - 1)$

Condições de existência:

- $x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x < -1$ ou $x > 1$ (I)
- $2x - 1 > 0 \Rightarrow 2x > 1 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$ (II)



Logo, a condição de existência é $x > 1$.

Resolvendo a equação, temos:

$\log(x^2 - 1) = \log(2x - 1) \Rightarrow x^2 - 1 = 2x - 1 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 2$

Nesse caso, como somente $x = 2$ satisfaz a condição de existência, temos $S = \{2\}$.

Inequação logarítmica

Toda desigualdade cuja incógnita está no logaritmando, na base ou em ambos é denominada **inequação logarítmica**.

Exemplos

- $\log_2(5 - x) > 27$
- $\log_4(\log_2 x) \geq 0$
- $-\log_{0,5}(x^2 - 6x) < 4$
- $\log_{\frac{1}{3}}(x + 2) + \log_{\frac{1}{3}} x < \log_{\frac{1}{3}} 8$

Para resolver uma inequação desse tipo, reduzimos os dois membros a logaritmos de mesma base. Depois, sabendo que a função logarítmica definida por $f(x) = \log_a b$ é crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$, aplicamos a seguinte propriedade:

- se $a > 1$, temos $x_2 > x_1 \Leftrightarrow \log_a x_2 > \log_a x_1$.
- se $0 < a < 1$, temos $x_2 > x_1 \Leftrightarrow \log_a x_2 < \log_a x_1$.

Na próxima página é apresentada a resolução de uma inequação logarítmica.

Observação

Note que, quando $a > 1$, a desigualdade se mantém, e quando $0 < a < 1$, a desigualdade é invertida.

Exercícios e problemas resolvidos

R10. Determine a solução da inequação $\log_{\frac{1}{2}}(x - 4) \geq 2$.

Resolução

$\log_{\frac{1}{2}}(x - 4) \geq 2$

Condição de existência: $x - 4 > 0 \Rightarrow x > 4$ (I)

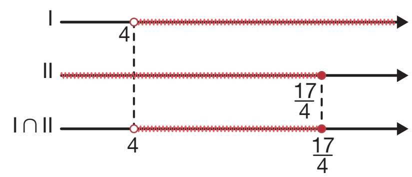
Como $a = \frac{1}{2}$ e $0 < a < 1$, o sentido da desigualdade é invertido.

$$\log_{\frac{1}{2}}(x - 4) \geq 2 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x - 4) \geq 2 \cdot \underbrace{\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}}_{1} \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x - 4) \geq \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - 4 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow x \leq \frac{1}{4} + 4 \Rightarrow x \leq \frac{17}{4} \quad \text{(II)}$$

A solução da inequação é dada pela interseção de **I** e **II**.

Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 4 < x \leq \frac{17}{4}\right\}$.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

67. Resolva as equações logarítmicas.

a) $\log_4(x + 5) = 2$ Resposta: $S = \{11\}$

b) $\log_6\sqrt{\frac{2 + x}{3}} = \frac{1}{2}$ Resposta: $S = \{16\}$

c) $\log_{-x-3}(2x - 6) = 7$ Resposta: $S = \varnothing$

d) $\log_2(x + 1) = \log_4(x^2 + 3)$ Resposta: $S = \{1\}$

e) $\log_x 4 - \log_x 16 = -1$ Resposta: $S = \{4\}$

f) $\log_3\left(\frac{x^2 - 9}{x + 3}\right) = 3$ Resposta: $S = \{30\}$

68. Com o auxílio de uma calculadora científica, resolva as equações exponenciais.

a) $3^{x-1} = 5$ Resposta: $x \simeq 2{,}465$

b) $20^x = 3^{x-2}$ Resposta: $x \simeq -1{,}158$

c) $6^{x+1} = 9^{\frac{x}{2}}$ Resposta: $x \simeq -2{,}585$

69. Sejam as funções f e g dadas por $f(x) = \log_9 2x$ e $g(x) = \log_9(x + 2)$, e k uma constante, tal que $k = \log_9 30$. Determine para quais valores de x obtemos $f(x) + g(x) = k$. Resposta: $x = 3$

70. Determine o conjunto solução de cada equação.

a) $\log_8(\log^2 10 + \log x) = 0$ Resposta: $S = \{1\}$

b) $\log^2(3 - x) = \log(3 - x)$ Resposta: $S = \{-7, 2\}$

c) $\log_{27}\left[2 + \log_5(x^2 - 11)\right] = \frac{1}{3}$ Resposta: $S = \{-4, 4\}$

71. Sejam as funções f e g dadas por $f(x) = \frac{1}{3} \cdot \log_9(19 - 2x)$ e $g(x) = \log_{27}(x - 8)$. Para quais valores de x temos $f(x) \leq g(x)$? Resposta: $\left\{x \in \mathbb{R} \mid 9 \leq x < \frac{19}{2}\right\}$

72. Resolva as inequações logarítmicas.

a) $\log_3(x - 17) < 2$ Resposta: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 17 < x < 26\}$

b) $\log_{0,5}(2 - x) \geq \log_{0,5}(x + 6)$ Resposta: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 2\}$

c) $1 \leq \log_8\left(\frac{x}{2} + 1\right)$ Resposta: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 14\}$

73. Uma represa de 2 500 m² de área usada para a criação de peixes foi invadida por certa espécie de vegetação aquática. Como ela prejudica o crescimento dos peixes, o proprietário contratou especialistas para realizar um estudo. Ao analisarem os 50 m² já invadidos pela vegetação, eles concluíram que, se nenhuma providência fosse tomada, a vegetação aquática aumentaria 35% ao ano.

a) Escreva a lei de formação de uma função f que determine a área invadida pela vegetação, em função do tempo t em anos, considerando que o proprietário não tome providência. Resposta: $f(t) = 50\,(1{,}35)^t$

b) Com o auxílio de uma calculadora científica, determine em quantos anos a vegetação tomará completamente a represa. Resposta: Aproximadamente 13 anos.

74. Obtenha a soma dos números inteiros que são soluções da inequação $9^{\log_9(x^2 - 5x)} \leq 14$. Resposta: 10

75. Quantos números inteiros negativos satisfazem simultaneamente as inequações $\log_{\frac{7}{2}}(x + 6) \geq 0$ e $\log_3(2x + x^2) \geq 1$? Resposta: 3 números.

76. Determine o domínio da função definida por:

a) $f(x) = \log_5\left[\log_{0,6}(x-3)\right]$. Resposta: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | 3 < x < 4\}$

b) $f(x) = \sqrt[3]{\log\left[\log_{0,7}(x+2)\right]}$. Resposta: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | -2 < x < -1\}$

77. Se considerarmos que um imóvel foi comprado e que a cada ano há valorização de 4% em relação ao ano anterior, quantos anos são necessários para que esse imóvel se valorize em mais de 30% em relação ao preço de compra? Se necessário, utilize uma calculadora científica. Resposta: 7 anos.

78. Ao usar o limite de crédito da conta corrente, o correntista está utilizando um empréstimo disponibilizado pelo banco, que normalmente cobra juro alto por esse serviço.

Supondo que um banco cobre juro de 8% ao mês, se um cliente utilizar R$ 700,00 do limite de crédito, em quantos meses, aproximadamente, a dívida será de R$ 1 200,00? Para responder a essa pergunta, utilize uma calculadora científica.
Resposta: 8 meses.

79. Um dos acidentes nucleares mais graves do mundo aconteceu em 1986 na central atômica de Chernobyl, localizada na cidade de Prypiat, Ucrânia (antiga União Soviética). Durante um teste de segurança mal-conduzido, alguns sistemas foram desativados, e uma falha causou um rápido aquecimento e uma explosão, lançando material radioativo por toda a região. A cidade de Prypiat foi abandonada às pressas, tornando-se uma “cidade fantasma”.

Milhares de pessoas contaminadas pela radioatividade continuaram morrendo ao longo dos anos, principalmente em decorrência de câncer. Com a explosão, foram liberados na atmosfera vários elementos radioativos, entre eles o estrôncio-90, cuja meia-vida é de cerca de 28 anos.

a) Usando a função n definida por $n(t) = n_0 \cdot 2^{-t}$, em que $n(t)$ é a quantidade restante de átomos radioativos, n_0 é a quantidade inicial, e t é o número de períodos de meia-vida, determine a porcentagem de átomos radioativos de estrôncio-90 que se encontrará na atmosfera 140 anos após o acidente em Chernobyl.
Resposta: 3,125%

b) Considerando uma massa de 700 g de estrôncio-90 lançada na atmosfera, quanto tempo, aproximadamente, é necessário para que essa massa se reduza a 50 g? Se necessário, utilize uma calculadora científica.
Resposta: 107 anos.

80. Há vários métodos para determinar a qualidade dos ovos. Um dos mais utilizados é a unidade de Haugh, que se baseia na massa do ovo e na altura do albúmen (clara), quando quebrado em uma superfície plana.

Para calcular a unidade Haugh (UH), usa-se a fórmula $UH = 100 \cdot \log\left(H - 1{,}7M^{0{,}37} + 7{,}6\right)$, em que H é a altura do albúmen em milímetros, e M é a massa em gramas. Para que um ovo seja considerado de excelente qualidade, a unidade Haugh deve ser superior a 72.

a) Com o auxílio de uma calculadora científica, calcule a unidade Haugh de um ovo com massa de 56 g e altura do albúmen de 6 mm. Podemos afirmar que esse ovo é de excelente qualidade? Por quê? Resposta: Aproximadamente 78. Sim, pois a unidade Haugh é superior a 72.

b) Qual deve ser a altura mínima aproximada, com duas casas decimais, do albúmen de um ovo de 62 g para que seja considerado de excelente qualidade? Resposta: 5,48 mm

81. A tireoide é uma glândula responsável por regular a “velocidade” do funcionamento do organismo. Essa glândula produz os denominados hormônios tiroidianos, como a triiodotironina (T3) e a tiroxina (T4).

As alterações desses hormônios são as principais causas das doenças de tireoide: hipertiroidismo e hipotiroidismo, respectivamente. Para exames de tireoide, é utilizado o elemento químico radioativo iodo-131, que tem meia-vida de oito dias, ou seja, em oito dias, metade do número de átomos radioativos se desintegra. A fórmula que calcula a quantidade de material radioativo em função do tempo de meia-vida do elemento é $n(t) = n_0 \cdot 2^{-t}$, em que $n(t)$ é a quantidade restante, n_0 é a quantidade inicial do elemento radioativo, e t é o número de períodos de meia-vida.

a) Qual é a quantidade de iodo-131 restante em um material contaminado com 4 g, passados seis períodos de meia-vida? Resposta: 0,0625 g

b) Suponha que uma clínica especializada em exames de tireoide tenha em seu estoque 10 g de iodo-131. No mínimo, quantos dias aproximadamente serão necessários para que esse estoque fique abaixo de 10^{-2} g? Para responder a essa pergunta, utilize uma calculadora científica. Resposta: 80 dias.

c) Junte-se a um colega e pesquisem os sintomas de uma pessoa que tem alguma disfunção na tireoide. Resposta pessoal. Alguns dos sintomas são: fadiga e cansaço excessivo, alteração de humor, ciclo menstrual irregular, dores musculares e fraqueza.

82. De acordo com o conteúdo estudado neste capítulo, elabore um problema envolvendo funções logarítmicas e troque com um colega para que ele o resolva. Em seguida, verifiquem se as respostas apresentadas estão corretas. Resposta pessoal. A resposta depende das informações escolhidas pelos estudantes.

83. O pH, ou potencial hidrogeniônico, permite expressar a acidez, a neutralidade ou a basicidade de uma solução aquosa por meio da concentração de íons hidrogênio, em mol por litros. Junte-se a um colega e realizem uma pesquisa sobre a maneira de expressar o pH de uma substância utilizando logaritmo e, também, sobre a escala do pH de diversas substâncias presentes em nosso dia a dia. Em seguida, com base nos resultados obtidos, elaborem um problema que envolva funções logarítmicas e o resolvam. Resposta pessoal. A resposta depende do resultado da pesquisa realizada pelos estudantes.

Anote as respostas no caderno.

SÍNTESE DO CAPÍTULO

Neste capítulo, estudamos função exponencial e função logarítmica. Agora, chegou a hora de refletir sobre seus conhecimentos! Como estratégia de estudos, sugerimos que você faça uma autoavaliação, revise conceitos e sintetize o que foi estudado. Para isso, resolva as questões propostas.

1. Você conhecia algum dos conteúdos estudados neste capítulo? Cite-os.
Resposta pessoal. A resposta depende dos conhecimentos prévios dos estudantes.

2. Você teve dificuldades em algum dos conteúdos estudados ou ficou com dúvidas? Reflita e, se necessário, retome o que foi estudado.
Resposta pessoal. A resposta depende dos conteúdos assimilados pelos estudantes.

3. Cite duas situações em que está presente o conceito de:

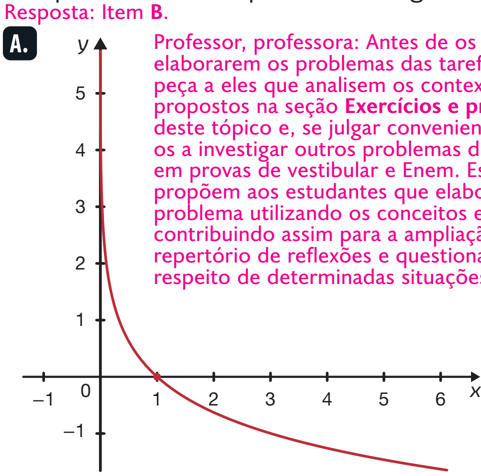
a) função exponencial. Sugestão de resposta: Ao estudar o crescimento populacional de uma bactéria e o decaimento radioativo de uma substância radioativa.

b) função logarítmica. Sugestão de resposta: Ao medir intensidades em escalas de pH e a magnitude de terremotos na escala Richter.

4. Quando uma função exponencial é crescente? E quando ela é decrescente?
Resposta: Uma função exponencial é crescente quando $a > 1$, e decrescente, quando $0 < a < 1$.

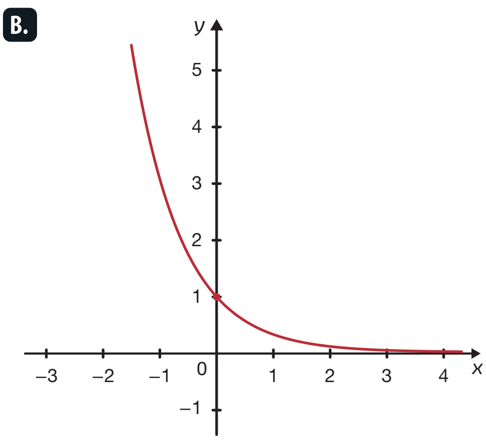
5. Em qual dos itens é apresentado o gráfico de uma função exponencial?
Resposta: Item **B**.

A.



Professor, professora: Antes de os estudantes elaborarem os problemas das tarefas **82** e **83**, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** deste tópico e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem. Essas tarefas propõem aos estudantes que elaborem um problema utilizando os conceitos estudados, contribuindo assim para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações.

B.



ILUSTRAÇÕES: VINÍCIUS COSTA/ARQUIVO DA EDITORA

6. Resposta pessoal. Sugestão de resposta: Inicialmente, reduziria os dois membros a potências de mesma base, ou seja, escreveria 256 como uma potência de base 2. Depois, usando a propriedade $a^b = a^c \Leftrightarrow b = c$, para a, b e c reais, com a não nulo, escreveria a equação $x - 2 = 8$. Por fim, resolveria essa equação e determinaria o valor de x.

6. Explique com suas palavras como você resolveria a equação exponencial $2^{x-2} = 256$.

7. Escreva um passo a passo para calcular log23 usando uma calculadora. Sugestão de resposta: 1. Digite a tecla log da calculadora; 2. Registre o número 23. Para isso, pressione as teclas 2 e 3, nessa ordem; 3. Digite a tecla =.

8. Mostre que $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$.
Resposta no final do **Livro do Estudante**.

9. Mostre que $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$.
Resposta no final do **Livro do Estudante**.

10. Resposta pessoal. Antes de os estudantes elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos nas seções **Exercícios e problemas** deste capítulo e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

10. Escolha um dos conteúdos estudados neste capítulo e elabore um problema envolvendo-o. Depois, troque com um colega para que ele o resolva. Por fim, verifique se a resposta obtida por ele está correta.

11. Faça uma síntese do que foi estudado neste capítulo. Nela, use desenhos e dê exemplos.
Resposta pessoal. A resposta depende dos assuntos que o estudante listar.

CAPÍTULO
6

SEQUÊNCIAS

NETFLIX/EVERETT COLLECTION/FOTOARENA

Cena do filme *A Fuga das galinhas*: *A ameaça dos* nuggets, que utiliza a técnica de *stop motion* para ser produzido.

Muito antes da era digital, os desenhos animados eram criados por meio de uma técnica simples chamada **animação tradicional**. Nela, uma equipe de artistas confecciona cada quadro da animação com uma sequência de desenhos muito parecidos, entre os quais há pequenos detalhes diferentes. Desse modo, ao passar rapidamente essas imagens em sequência, tem-se a ilusão do movimento. Por exemplo, um episódio de 7 minutos para a TV da animação brasileira “A Turma da Mônica”, produzido em animação tradicional, exigia a criação de mais de 200 mil folhas ilustradas, levando cerca de um mês para ser finalizado.

Outra técnica parecida é o ***stop motion***, que em português significa “movimento parado”. Nesse caso, em vez de desenhos, são utilizadas fotografias sequenciais de um objeto, como um boneco de massa de modelar, sofrendo leves mudanças de posição. Um filme que usou essa técnica foi a animação britânica-americana *A Fuga das galinhas*: *A ameaça dos* nuggets, lançada em 2023. Foram usadas 24 fotos para cada segundo, com duração total do filme de 101 minutos. De acordo com o diretor e animador Thiago Calçado, que participou das gravações, em um bom dia de trabalho conseguiam gravar cerca de 2 segundos de filmagem.

Ambas as técnicas estão relacionadas com o fenômeno da **persistência retiniana**, que provoca uma ilusão de ótica no nosso cérebro, fazendo parecer que algo se move continuamente quando, na verdade, consiste em uma sequência de imagens estáticas reproduzidas por segundo.

Além das técnicas mencionadas, atualmente existem *softwares* de computador que possibilitam a criação de animações digitais com mais fluidez, efeitos e realismo, de maneira mais rápida e acessível.

Professor, professora: As páginas de abertura associam, de maneira intuitiva, o conceito de sequências à técnica de flipagem. Essa técnica consiste em uma sequência de desenhos muito parecidos, ou seja, com pequenas diferenças entre eles, com o objetivo de criar a ilusão do movimento nos desenhos animados. Desse modo, uma imagem estática sempre depende das anteriores para que, na flipagem, ocorra a ilusão de movimento. Isso também ocorre nas sequências numéricas, ou seja, há uma dependência do termo anterior para formar a sequência por meio de uma lei de recorrência.

Neste capítulo, você vai estudar:

- sequências numéricas;
- progressões aritméticas;
- fórmula do termo geral de uma progressão aritmética;
- soma dos *n* primeiros termos de uma progressão aritmética;
- progressões geométricas;
- fórmula do termo geral de uma progressão geométrica;
- soma dos *n* primeiros termos de uma progressão geométrica.

PARA EXPANDIR

Que tal você e sua turma verificarem a possibilidade de assistir juntos a um filme no cinema? Pesquise os filmes que estão em cartaz, verifique a classificação indicativa e divirta-se.

Professor, professora: Oriente os estudantes a escrever as respostas no caderno.

1. Como funciona a técnica denominada **animação tradicional**?

1. Resposta: Nessa técnica, é criada uma sequência com desenhos muito parecidos, com pequenas diferenças. Ao passar rapidamente as imagens em sequência, tem-se a ilusão do movimento.

2. De acordo com as informações do texto, quantas fotos foram usadas em 15 minutos de filmagem da animação *A fuga das galinhas*: *A ameaça dos* nuggets? Resposta: 21 600 fotos.

3. Escreva em seu caderno a quantidade total de fotos utilizada em cada um dos primeiros 10 segundos da animação *A Fuga das galinhas*: *A ameaça dos* nuggets. Resposta: 24, 48, 72, 96, 120, 144, 168, 192, 216 e 240.

Sequências numéricas

Antes de iniciarmos nosso estudo sobre progressões aritméticas, que constituem exemplo de sequência numérica, vamos definir uma sequência de números reais.

Uma **sequência de números reais** é uma função a**:** $\mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada número natural não nulo n um número real a_n.

Usualmente, indicamos uma sequência por $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$. Os números a_1, a_2, $a_3, \ldots$, $a_n, \ldots$ são chamados **termos da sequência**. O número a_1 é o primeiro termo, a_2 é o segundo termo e assim sucessivamente. O número a_n é o n-ésimo termo da sequência.

Outro conceito que será importante em nossos estudos é o de sequências finitas.

Uma **sequência finita** é uma função cujo domínio é um subconjunto de $\mathbb{N}^*$, cuja forma é $I_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Indicaremos uma sequência finita por $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ e diremos que ela tem n termos.

Observação

Nesta coleção, consideraremos apenas sequências de números reais. Desse modo, a fim de simplificar a escrita, quando dissermos **sequência numérica**, estaremos nos referindo a uma sequência de números reais.

Observação

Quando uma sequência não é finita, dizemos que ela é infinita.

Progressão aritmética

Considere a sequência $(4, 8, 12, 16, \ldots)$, em que, do segundo termo em diante, cada um deles é igual ao termo anterior mais 4.

$$a_2 = a_1 + 4 = 8$$
$$a_3 = a_2 + 4 = 12$$
$$a_4 = a_3 + 4 = 16$$
$$\vdots$$

Sequências com essa característica são chamadas **progressões aritméticas**.

Chamamos de **progressão aritmética** (PA) toda sequência numérica em que, do segundo termo em diante, cada um deles é igual ao termo anterior adicionado a uma constante r, chamada **razão** da progressão.

- Se $r = 0$, então a PA é **constante**.
- Se $r > 0$, então a PA é **crescente**.
- Se $r < 0$, então a PA é **decrescente**.

Questão A. Qual é a razão da PA $(4, 8, 12, 16, \ldots)$?
Resposta: 4

Exemplos

- Na PA $(9, 9, 9, 9, 9, \ldots)$, temos $r = 0$. Portanto, essa PA é constante.
- Na PA $(-5, -1, 3, 7, 11, \ldots)$, temos $r = 4$. Portanto, essa PA é crescente.
- Na PA $(12, 9, 6, 3, 0, \ldots)$, temos $r = -3$. Portanto, essa PA é decrescente.

Questão B. A PA $(-5, -10, -15, -20, \ldots)$ é crescente, decrescente ou constante? Resposta: Decrescente.

Considerando a PA $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \ldots)$, temos:

$$a_2 = a_1 + r$$
$$a_3 = a_2 + r$$
$$a_4 = a_3 + r$$
$$a_5 = a_4 + r$$
$$\vdots$$

De maneira geral:

O n-ésimo termo de uma PA, em que o primeiro termo é a_1 e a razão é r, é dado pela fórmula de recorrência:

$$a_n = a_{n-1} + r$$

Em uma PA, $a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$, então:

$$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n \Rightarrow 2a_n = a_{n-1} + a_{n+1} \Rightarrow a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Considerando a_{n-1}, a_n e a_{n+1} três termos consecutivos de uma PA, o termo central a_n é igual à média aritmética dos outros dois.

A seguir, são apresentadas duas maneiras de representar uma PA de razão r e termos desconhecidos.

- Se $a_1 = x$, temos $(x,\ x + r,\ x + 2r, \ldots)$.
- Se $a_1 = x - r$, temos $(x - r,\ x,\ x + r, \ldots)$.

Fórmula do termo geral de uma PA

Considere a PA $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \ldots)$ de razão r. Nesse caso, temos:

$$a_1 = a_1 + 0r$$
$$a_2 = a_1 + r$$
$$a_3 = \underbrace{a_2}_{a_1 + r} + r \Rightarrow a_3 = a_1 + 2r$$
$$a_4 = \underbrace{a_3}_{a_1 + 2r} + r \Rightarrow a_4 = a_1 + 3r$$
$$a_5 = \underbrace{a_4}_{a_1 + 3r} + r \Rightarrow a_5 = a_1 + 4r$$
$$a_6 = \underbrace{a_5}_{a_1 + 4r} + r \Rightarrow a_6 = a_1 + 5r$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_{n-1} + r \Rightarrow a_n = a_1 + (n - 1)r$$
$$\vdots$$

Note que qualquer termo de uma PA pode ser escrito em função de a_1 e r.

A fórmula do termo geral de uma PA é:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

Nessa fórmula:

- a_n: n-ésimo termo.
- a_1: primeiro termo.
- n: ordem do termo.
- r: razão.

Observação

Também podemos escrever os termos de uma PA em função de outros termos e de sua razão. Exemplos:

- $a_3 = a_1 + 2r$
- $a_4 = a_1 + 3r$
- $a_6 = a_2 + 4r$
- $a_{18} = a_8 + 10r$
- $a_{18} = a_{20} - 2r$

Questão C.

Escreva um algoritmo que possibilite calcular um termo qualquer de uma PA de razão r, dados o primeiro termo, a ordem do termo e a razão r.

Resposta no final do **Livro do Estudante**.

Exercícios e problemas resolvidos

R1. Determine o 65º termo da PA $(-45, -52, -59, \ldots)$.

Resolução

Temos $a_1 = -45$ e $r = -7$.

Determinamos a_{65} aplicando a fórmula do termo geral para $n = 65$.

$$a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow a_{65} = -45 + (65-1)\cdot(-7) = -45 - 448 \Rightarrow a_{65} = -493$$

Portanto, $a_{65} = -493$.

R2. Quantos são os termos da PA $(9, 13, 17, \ldots, 149)$?

Resolução

Temos $a_1 = 9$, $r = 4$ e $a_n = 149$.

Obtemos a posição n do último termo da PA aplicando a fórmula do termo geral.

$$a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow 149 = 9 + (n-1)\cdot 4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{140}{4} = n - 1 \Rightarrow n = 35 + 1 \Rightarrow n = 36$$

Portanto, essa PA tem 36 termos.

R3. Quantos múltiplos de 5 existem entre os números 12 e 71?

Resolução

Os múltiplos de 5 no intervalo dado formam a sequência $(15, 20, 25, \ldots, 70)$. Note que a sequência é uma PA, tal que $a_1 = 15$, $r = 5$ e $a_n = 70$.

Utilizando a fórmula do termo geral da PA, obtemos a posição n do último termo.

$$a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow 70 = 15 + (n-1)\cdot 5 \Rightarrow \frac{55}{5} = n - 1 \Rightarrow n = 11 + 1 \Rightarrow n = 12$$

Portanto, existem 12 múltiplos de 5 entre 12 e 71.

Dica

Os múltiplos de 5 entre 12 e 71 são: 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65 e 70.

R4. Interpole nove meios aritméticos entre -7 e 23.

Dica

Interpolar meios aritméticos significa colocar números reais entre dois números dados, de modo que a sequência formada por todos esses números seja uma PA.

Resolução

Inicialmente, devemos considerar a PA tal que $a_1 = -7$ e $a_{11} = 23$, conforme o esquema a seguir.

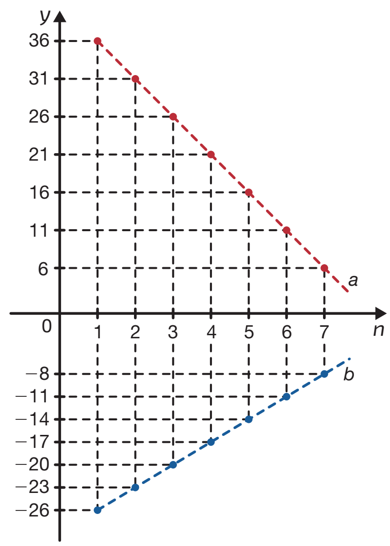
$$\underbrace{-7}_{a_1}, \underbrace{\underbrace{\_\_}_{a_2}, \underbrace{\_\_}_{a_3}, \underbrace{\_\_}_{a_4}, \underbrace{\_\_}_{a_5}, \underbrace{\_\_}_{a_6}, \underbrace{\_\_}_{a_7}, \underbrace{\_\_}_{a_8}, \underbrace{\_\_}_{a_9}, \underbrace{\_\_}_{a_{10}}}_{\text{9 meios aritméticos}}, \underbrace{23}_{a_{11}}$$

Utilizando a fórmula do termo geral da PA, calculamos a razão r.

$$a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow a_{11} = a_1 + (11-1)r \Rightarrow 23 = -7 + 10r \Rightarrow 10r = 30 \Rightarrow r = 3$$

Portanto, a sequência é $(-7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23)$.

R5. Analise a representação gráfica das progressões aritméticas $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ e $(b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$.



Observação

Uma PA é uma função definida por $a(n) = a_1 + (n - 1)\,r$ de domínio $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n, \ldots\}$. Assim, a representação gráfica dos termos da PA é formada pelos pares ordenados $(n, a(n))$. Esses pontos pertencem ao gráfico da função afim definida por $a(n) = a_1 + (n - 1)r$.

a) Faça a classificação de cada PA em crescente, decrescente ou constante.

b) Determine o 1º termo negativo da PA $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$.

c) Determine o 1º termo positivo da PA $(b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$.

d) A partir de qual termo $b_n > a_n$?

Resolução

a) Sejam r_a e r_b as razões de $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ e $(b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$, respectivamente. Analisando o gráfico, temos:

$r_a = a_2 - a_1 = 31 - 36 = -5$

$r_b = b_2 - b_1 = -23 - (-26) = 3$

Como $r_a < 0$ e $r_b > 0$, então $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ é decrescente e $(b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$ é crescente.

Observação

Note que o coeficiente a de cada função é igual à razão da PA. Logo, a função definida por:

- $a(n)$ é decrescente, pois $r_a < 0$.
- $b(n)$ é crescente, pois $r_b > 0$.

b) Inicialmente, escrevemos a fórmula do termo geral da PA.

$$a_n = a_1 + (n - 1)r_a \Rightarrow a_n = 36 + (n - 1) \cdot (-5) \Rightarrow a_n = 41 - 5n$$

Em seguida, determinamos a posição do primeiro termo, tal que $a_n < 0$.

$$a_n < 0 \Rightarrow 41 - 5n < 0 \Rightarrow -5n < -41 \Rightarrow n > \frac{41}{5} \Rightarrow n > 8{,}2$$

O menor número natural que satisfaz a condição é $n = 9$. Segue que:

$$a_9 = 41 - 5 \cdot 9 = -4$$

Portanto, $a_9 = -4$ é o primeiro termo negativo da PA $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$.

c) Temos:

$$b_n = b_1 + (n-1)r_b \Rightarrow b_n = -26 + (n-1) \cdot 3 \Rightarrow b_n = 3n - 29$$

Logo, para $b_n > 0$, segue:

$$b_n > 0 \Rightarrow 3n - 29 > 0 \Rightarrow 3n > 29 \Rightarrow n > \frac{29}{3} \Rightarrow n > 9{,}666\ldots$$

O menor número natural que satisfaz a condição é $n = 10$.

$$b_{10} = 3 \cdot 10 - 29 = 1$$

Portanto, $b_{10} = 1$ é o primeiro termo positivo da PA $(b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$.

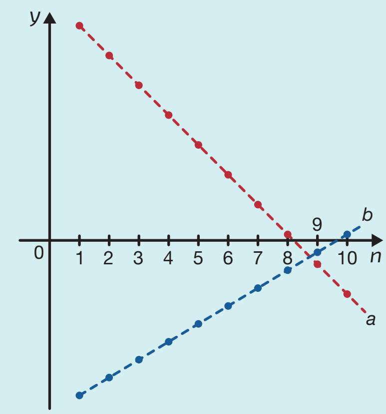
d) Resolvendo a inequação $b_n > a_n$, temos:

$$b_n > a_n \Rightarrow 3n - 29 > 41 - 5n \Rightarrow 8n > 70 \Rightarrow n > \frac{70}{8} \Rightarrow n > 8{,}75$$

O menor número natural que satisfaz a condição é $n = 9$.
Portanto, a partir do 9º termo, $b_n > a_n$.

Observação

Representando mais alguns termos da PA, podemos verificar no gráfico as conclusões dos itens **b**, **c** e **d**.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

1. Calcule a razão das progressões aritméticas.

a) $(3, 10, 17, \ldots)$ Resposta: 7

b) $(42, 39, 36, \ldots)$ Resposta: -3

c) $(-7, -3, 1, \ldots)$ Resposta: 4

d) $(5, -3, -11, \ldots)$ Resposta: -8

e) $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \ldots\right)$ Resposta: $\frac{1}{4}$

f) $(2{,}3; 1{,}4; 0{,}5)$ Resposta: $-0{,}9$

2. Escreva uma PA de 6 termos em que:

a) $a_1 = 4$ e $r = 9$.
Resposta: $(4, 13, 22, 31, 40, 49)$

b) $a_1 = 23$ e $a_2 = 18$.
Resposta: $(23, 18, 13, 8, 3, -2)$

c) $a_6 = 19$ e $r = 2$.
Resposta: $(9, 11, 13, 15, 17, 19)$

d) $a_4 = 3$ e $r = \frac{5}{2}$.
Resposta: $\left(-\frac{9}{2}, -2, \frac{1}{2}, 3, \frac{11}{2}, 8\right)$

e) $a_6 = -10$ e $r = -6$.
Resposta: $(20, 14, 8, 2, -4, -10)$

f) $a_1 = -5$ e $r = 0$.
Resposta: $(-5, -5, -5, -5, -5, -5)$

3. Determine:

a) o 20º termo da PA $(2, 7, \ldots)$. Resposta: 97

b) a razão da PA em que $a_1 = 17$ e $a_{32} = -45$. Resposta: -2

4. Obtenha os três primeiros termos da PA na qual $a_{12} = 7$ e $a_{14} = -9$.
Resposta: 95, 87, 79

5. Mônica usou um recipiente graduado vazio, com 1,5 L de capacidade, para acumular a água que goteja de uma torneira. Após algum tempo, ela observou o acúmulo de 260 mL de água. Depois disso, ela verificou a quantidade de água no recipiente a cada 10 min.

ODS 12

Professor, professora: Oriente os estudantes a consultar mais informações sobre os **Objetivos de Desenvolvimento Sustentável** (ODS) no início deste volume.

Registros de Mônica

Medição	Quantidade de água
1	260 mL
2	300 mL
3	340 mL
4	380 mL

Considerando que seja mantido o ritmo de gotejamento, deduza uma fórmula que relacione a quantidade de água no recipiente em função da medição realizada por Mônica. Em seguida, responda às questões.

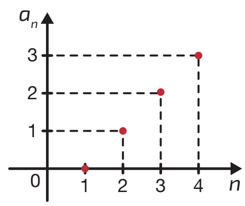
a) Quantos minutos passaram desde que Mônica colocou o recipiente embaixo da torneira até realizar a primeira medição? Resposta: Passaram-se 65 min.

b) Do momento em que Mônica colocou o recipiente embaixo da torneira em diante, quantos minutos foram necessários para que ele ficasse completamente cheio? Resposta: Foram necessários 375 min.

7. a) Resposta: As lâmpadas vermelha e azul piscaram juntas às 13 h 3 min 24 s. Seis segundos depois, piscaram juntas as lâmpadas azul e branca.

6. Determine a fórmula do termo geral e faça a classificação de cada PA representada graficamente em crescente, decrescente ou constante.

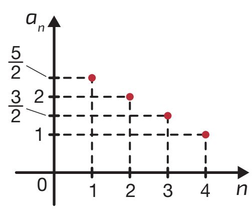
A.



RONALDO INÁCIO/ ARQUIVO DA EDITORA

Resposta: $a_n = n - 1$; crescente.

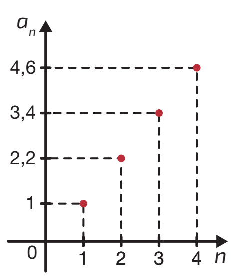
B.



RONALDO INÁCIO/ ARQUIVO DA EDITORA

Resposta: $a_n = \frac{5}{2} + (n - 1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$; decrescente.

C.



VINÍCIUS COSTA/ ARQUIVO DA EDITORA

Resposta: $a_n = 1 + (n - 1) \cdot 1{,}2$; crescente.

7. Um sinalizador eletrônico contém três lâmpadas nas cores vermelha, azul e branca. Elas piscam respectivamente a cada 4, 3 e 7 segundos.

Uma pessoa observa que as três lâmpadas piscaram juntas exatamente às 13 h.

a) Quais lâmpadas piscaram juntas às 13 h 3 min 24 s? E seis segundos depois?

b) Até as 14 h, quantas vezes a lâmpada branca terá piscado? Resposta: 514 vezes.

c) Escreva os horários exatos das três últimas piscadas da lâmpada branca até as 14 h.

d) A lâmpada azul piscou junto com a branca em algum dos horários que você determinou no item anterior? Se sim, em qual? Resposta: Sim, às 13 h 59 min 51 s.

e) A lâmpada vermelha piscou junto com a branca em algum dos horários determinados no item **c**? Se sim, em qual?
Resposta: Sim, às 13 h 59 min 44 s.

8. O computador de Marcela foi comprado em 1º de março de 2024 e sofreu depreciação de R$ 25,00 a cada mês. Sabendo que em 1º de março de 2026 esse computador foi avaliado em R$ 1800,00, escreva uma fórmula que expresse seu valor, em reais, a cada mês. Depois, determine, também em reais, o valor desse computador em 1º de julho de 2024.
Resposta: $a_n = 2\,400 + (n - 1) \cdot (-25)$; R$ 2 300,00

9. Um professor de Matemática pediu aos estudantes da sala que escrevessem uma PA. Duas progressões aritméticas escritas por eles foram $(2, 8, 14, \dots, 458)$ e $(6, 10, 14, \dots, 386)$. Quantos termos em comum têm essas progressões?
Resposta: Essas progressões têm 32 termos em comum.

10. Analise o quadro.

Montante obtido em uma aplicação a juro simples em função do tempo

Tempo	Montante
1	M_1
2	M_2
3	M_3
⋮	⋮
n	M_n
⋮	⋮

a) Mostre que a sequência dos montantes $(M_1, M_2, \dots, M_n, \dots)$ é uma PA. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

b) Utilizando a relação entre PA e função afim, mostre que $M = C(1 + it)$, em que M, C, i e $t(t > 0)$ indicam, respectivamente, o montante, o capital, a taxa de juro (na forma decimal) e o tempo.
Resposta no final do **Livro do Estudante**.

11. Existem 6 praças de pedágio entre as cidades **X** e **Y**, que distam 420 km uma da outra. As praças de pedágio estão localizadas à mesma distância uma da outra, e essa distância também é a mesma entre as cidades **X** e **Y** e suas respectivas praças de pedágio mais próximas. Considerando as informações, calcule a distância percorrida por um automóvel que se desloca da 2ª até a 5ª praça de pedágio. Resposta: 180 km

12. Determine a razão da progressão aritmética que se obtém inserindo 5 termos entre 3 e 27.
Resposta: 4

13. Interpole 11 meios aritméticos entre −16 e 20 e calcule o valor de $a_5 + a_6 + a_8$. Resposta: 0

14. Deseja-se interpolar 5 meios aritméticos entre cada termo da PA (1, 3, 5).

a) Determine a razão da PA obtida. Resposta: $\frac{1}{3}$

b) Qual é a quantidade de termos dessa nova PA? Resposta: 13 termos.

c) Quantos e quais são os termos dessa nova PA que pertencem a $\mathbb{N}$? Resposta: 5 termos: 1, 2, 3, 4 e 5

7. c) Resposta: Os horários exatos das três últimas piscadas antes das 14 h foram: 13 h 59 min 58 s; 13 h 59 min 51 s; 13 h 59 min 44 s.

PA e função afim

Considere a PA $(-2, 0, 2, 4, 6, \ldots)$ de razão 2 e a função afim definida por $f(x) = 3x + 5$. Vamos verificar que a sequência $\big(f(-2),\ f(0),\ f(2),\ f(4),\ f(6), \ldots\big)$ também é uma PA. De fato:

$$\begin{aligned} f(-2) &= 3 \cdot (-2) + 5 = -1 \\ f(0) &= 3 \cdot 0 + 5 = 5 \\ f(2) &= 3 \cdot 2 + 5 = 11 \\ f(4) &= 3 \cdot 4 + 5 = 17 \\ f(6) &= 3 \cdot 6 + 5 = 23 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Note que $(-1, 5, 11, 17, 23, \ldots)$ é uma PA de razão 6. A razão dessa nova PA é igual ao produto entre o coeficiente a da função afim $(a = 3)$ e a razão da PA anterior $(r = 2)$, ou seja, $6 = 3 \cdot 2$.

Considerando a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4, \ldots,\ x_n, \ldots$ elementos de uma PA de razão r, f será uma função afim, definida por $f(x) = ax + b$, se, e somente se, $\big(f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3),\ f(x_4), \ldots,\ f(x_n), \ldots\big)$ for uma PA de razão $a \cdot r$.

Exemplos

- Sejam a função afim definida por $f(x) = 4x - 2$ e a PA $(-6, -1, 4, 9, 14, 19, \ldots)$ de razão 5. A sequência $\big(f(-6), f(-1), f(4), f(9), f(14), f(19), \ldots\big)$, dada por $(-26, -6, 14, 34, 54, 74, \ldots)$, é uma PA de razão $20 = 4 \cdot 5$.
- Sejam a função afim definida por $f(x) = \frac{2}{3}x + 1$ e a PA $(12, 6, 0, -6, -12, -18, \ldots)$ de razão -6. A sequência $\big(f(12), f(6), f(0), f(-6), f(-12), f(-18), \ldots\big)$, dada por $(9, 5, 1, -3, -7, -11, \ldots)$, é uma PA de razão $-4 = \frac{2}{3} \cdot (-6)$.

PA e função quadrática

Considere a PA $(1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots)$ de razão 1 e a função quadrática definida por $f(x) = 2x^2$. Nesse caso, a sequência $\big(f(1), f(2), f(3), f(4), f(5), f(6), \ldots\big)$ não é uma PA, ou seja, a diferença entre termos consecutivos não é constante.

$$\begin{aligned} f(2) - f(1) &= 8 - 2 = 6 \\ f(3) - f(2) &= 18 - 8 = 10 \\ f(4) - f(3) &= 32 - 18 = 14 \\ f(5) - f(4) &= 50 - 32 = 18 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Porém, a sequência $(6, 10, 14, 18, \ldots)$, formada por essas diferenças, é uma PA, nesse caso, de razão 4.

A função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ será uma função quadrática, definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, se, e somente se, para toda PA $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4, \ldots,\ x_n, \ldots)$ de razão não nula r, a sequência $\big(f(x_2) - f(x_1),\ f(x_3) - f(x_2),\ f(x_4) - f(x_3), \ldots,\ f(x_n) - f(x_{n-1}), \ldots\big)$ for uma PA de razão $2ar^2$.

Observação

As propriedades apresentadas nesta página podem ser demonstradas, porém, nesta coleção, apenas serão enunciadas.

Exemplos

- Sejam a função quadrática definida por $f(x) = -x^2 + 2x - 2$ e a PA $(3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots)$ de razão 2. A sequência $\left(f(5) - f(3), f(7) - f(5), f(9) - f(7), f(11) - f(9), f(13) - f(11), \dots\right)$, dada por $(-12, -20, -28, -36, -44, \dots)$, é uma PA de razão $-8 = 2 \cdot (-1) \cdot 2^2$.
- Sejam a função definida por $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x$ e a PA $(-12, -6, 0, 6, 12, 18, \dots)$ de razão 6. A sequência $\left(f(-6) - f(-12),\ f(0) - f(-6),\ f(6) - f(0),\ f(12) - f(6), f(18) - f(12), \dots\right)$, dada por $(78, 42, 6, -30, -66, \dots)$, é uma PA de razão $-36 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 6^2$.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

15. Calcule o valor de a para o qual a função definida por $f(x) = ax + 7$ determina uma PA de razão -10, a partir da PA $(-8,\ -3, 2, 7, 12, 17, 22, 27, \dots)$.
Resposta: $a = -2$

16. Em uma promoção, certa concessionária vendeu 35 automóveis em 5 domingos de feirão. A quantidade de veículos comercializados em cada feirão forma uma PA de razão r. O número de pessoas que visitou o feirão em cada domingo é dado pela função cuja lei de formação é $f(x) = 8x - 3$, em que x é a quantidade de veículos comercializados.

a) Se no 1º domingo de feirão a concessionária vendeu 3 veículos, determine a quantidade de veículos que foi vendida a mais no 2º domingo. O que esse valor representa em relação à PA de razão r? Resposta: 2 veículos a mais. Esse valor representa a razão em relação à PA de razão r.

b) Escreva os termos da PA que representa a quantidade de veículos vendidos. Resposta: $(3, 5, 7, 9, 11)$

c) Determine a sequência da quantidade de visitantes nos 5 domingos. Resposta: $(21, 37, 53, 69, 85)$

17. Dizemos que uma partícula está em movimento retilíneo uniforme quando ela se desloca com velocidade constante em uma linha reta. Cada um dos quadros apresenta a posição de uma partícula, que está em movimento retilíneo uniforme, em função do tempo.

Posição da partícula A em função do tempo

Tempo (s)	0	1	2	3
Posição (m)	5	10	15	20

Posição da partícula B em função do tempo

Tempo (s)	0	2	4	6
Posição (m)	0	13	26	39

Escreva uma fórmula que expresse a posição p, em metros, de cada uma dessas partículas em função do tempo t, em segundos.
Resposta: Partícula **A**: $p(t) = 5t + 5$; Partícula **B**: $p(t) = \frac{13}{2}t$

18. A função definida por $f(x) = 2x - 4$ determina os termos de uma PA a partir da PA $(-4, -1, 2, 5, 8, 11, 14, 17)$. Quanto a essa nova PA, determine seus termos e sua razão.
Resposta: $(-12, -6, 0, 6, 12, 18, 24, 30)$; 6

19. Escreva a lei da função afim que determina a PA $(-26, -5, 16, \dots)$ a partir da PA $(10, 3, -4, \dots)$.
Resposta: $f(x) = -3x + 4$

20. Sabendo que a sequência $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ é uma PA, verifique quais das funções a seguir podem ser quadráticas. Resposta: Funções f, h e m.

a) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x_1) = 2$, $f(x_2) = 7$, $f(x_3) = 33$, e $f(x_4) = 80$.

b) g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x_1) = 6$, $g(x_2) = 7$, $g(x_3) = 12$, e $g(x_4) = 15$.

c) h: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x_1) = -15$, $h(x_2) = -4$, $h(x_3) = -15$, e $h(x_4) = -48$.

d) m: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $m(x_1) = 11$, $m(x_2) = 35$, $m(x_3) = 75$, e $m(x_4) = 131$.

21. Sejam a PA $\left(f(x_2) - f(x_1),\ f(x_3) - f(x_2),\ f(x_4) - f(x_3), \dots\right)$ de razão 64 e $f(x) = 2x^2 - 3$ a lei de formação de uma função quadrática. Determine a razão da PA $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4, \dots)$. Resposta: 4 ou -4

22. Considere a PA $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ de razão 7 e f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função quadrática tal que $f(x_1) = -4$, $f(x_2) = 3$ e $f(x_3) = -88$. A função f tem valor de máximo ou de mínimo? Justifique sua resposta.
Resposta: Máximo, pois $a = -1 < 0$.

23. Verifique numericamente que a afirmação a seguir é verdadeira. Justifique sua resposta.
Respostas no final do **Livro do Estudante**.

Se f for uma função quadrática e $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4, \dots,\ x_n, \dots)$ for uma PA de razão r, então, a razão da PA $\left(f(x_2) - f(x_1),\ f(x_3) - f(x_2),\ f(x_4) - f(x_3), \dots, f(x_n) - f(x_{n-1}), \dots\right)$ será $2ar^2$.

Soma dos *n* primeiros termos de uma PA

Em certo teatro, as poltronas estão dispostas em 14 filas, e a 1ª fila tem 20 poltronas; a 2ª fila, 24 poltronas; a 3ª fila, 28 poltronas; e assim por diante, formando a seguinte PA de razão 4.

$$(20, 24, 28, 32, \ldots, 60, 64, 68, 72)$$

Podemos calcular a quantidade total de poltronas desse teatro realizando a adição a seguir. Com isso, obteremos a soma dos termos de uma PA.

$$20 + 24 + 28 + 32 + \ldots + 60 + 64 + 68 + 72$$

De acordo com a quantidade de termos da PA, esse cálculo pode ser muito trabalhoso, se realizado termo a termo. Outra maneira de obter esse resultado é usando uma fórmula.

Observação

Em uma PA finita, a_1 e a_n são chamados **termos extremos**; os termos a_2 e a_{n-1}, a_3 e a_{n-2}, a_4 e a_{n-3} e assim por diante são chamados **termos equidistantes** dos extremos.

Antes de obtermos essa fórmula, analisaremos a seguinte propriedade: em uma PA finita, adicionando os termos extremos ou os termos equidistantes dos extremos, obtemos o mesmo resultado. Na PA apresentada anteriormente, temos, por exemplo:

$$(20, 24, 28, 32, \ldots, 60, 64, 68, 72)$$

$$32 + 60 = 92$$

$$28 + 64 = 92$$

$$24 + 68 = 92$$

$$20 + 72 = 92$$

Questão E. Professor, professora: Oriente os estudantes a escrever a resposta no caderno.
Junte-se a dois colegas e, utilizando a relação entre PA e função afim, mostrem que $a_1 + a_n = a_x + a_y$, tal que a_x e a_y são termos equidistantes dos extremos, ou seja, que a afirmação apresentada a seguir é verdadeira. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

Em uma PA finita, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos.

Agora, obteremos uma fórmula que permite calcular a soma dos *n* primeiros termos de uma PA. Indicamos a soma dos *n* primeiros termos de uma PA por S_n. Escrevendo essa soma de duas maneiras, temos:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \qquad \text{(I)}$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1 \qquad \text{(II)}$$

Adicionando I e II membro a membro, temos:

$$\begin{array}{rcccccccccccc} & S_n = & a_1 & + & a_2 & + & a_3 & + \ldots + & a_{n-2} & + & a_{n-1} & + & a_n \\ + & S_n = & a_n & + & a_{n-1} & + & a_{n-2} & + \ldots + & a_3 & + & a_2 & + & a_1 \\ \hline \end{array}$$

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + \underbrace{(a_2 + a_{n-1})}_{a_1 + a_n} + \underbrace{(a_3 + a_{n-2})}_{a_1 + a_n} + \ldots + \underbrace{(a_{n-2} + a_3)}_{a_1 + a_n} + \underbrace{(a_{n-1} + a_2)}_{a_1 + a_n} + (a_n + a_1)}_{n \text{ vezes}}$$

Note que existem *n* parcelas $(a_1 + a_n)$, então, podemos escrever essa igualdade da seguinte maneira:

$$2S_n = n(a_1 + a_n) \Rightarrow S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Questão D.

Como você faria para obter a soma dos números naturais de 1 a 10? E de 1 a 50?
Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes digam, por exemplo, que para obter a soma dos números naturais de 1 a 10, basta observar que $1 + 10 = 11$, $2 + 9 = 11$, $3 + 8 = 11$ e assim por diante, com os cinco pares possíveis, sendo a soma, portanto, $5 \cdot 11 = 55$. Já para obter a soma dos números naturais de 1 a 50, basta observar que $1 + 50 = 51$, $2 + 49 = 51$, $3 + 48 = 51$ e assim por diante, com os 25 pares possíveis, sendo a soma, portanto, $25 \cdot 51 = 1275$.

A fórmula que permite calcular a soma dos n primeiros termos de uma PA é:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Nessa fórmula:

S_n: soma dos n primeiros termos.

a_1: primeiro termo.

a_n: n-ésimo termo.

n: quantidade de termos.

Exemplo

Na PA $(20, 24, 28, 32, \ldots, 68, 72)$, apresentada na página anterior, $a_n = 72$, $a_1 = 20$ e $n = 14$. Calculando S_n, temos:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \Rightarrow S_{14} = \frac{14 \cdot (20 + 72)}{2} = 644$$

Assim, a quantidade de poltronas do teatro é 644.

Questão F.

Escreva um algoritmo que possibilite calcular a soma dos n primeiros termos de uma PA de razão r, dados o primeiro termo, o número n de termos e a razão r.

Resposta no final do Livro do Estudante.

Exercícios e problemas resolvidos

R6. Calcule a soma dos 15 primeiros termos da PA $(-3, 4, 11, \ldots)$.

Resolução

Nessa PA, temos:

- $a_1 = -3$
- $r = 4 - (-3) = 7$
- $a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow a_{15} = -3 + (15 - 1) \cdot 7 = 95$

Utilizando a fórmula e tomando $n = 15$, obtemos:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \Rightarrow S_{15} = \frac{15 \cdot (-3 + 95)}{2} = \frac{15 \cdot 92}{2} = 690$$

Portanto, a soma dos 15 primeiros termos da PA $(-3, 4, 11, \ldots)$ é 690.

R7. Determine a soma dos 100 primeiros termos da PA $(-10, -15, -20, \ldots)$.

Resolução

Nessa PA, temos:

- $a_1 = -10$
- $r = -15 - (-10) = -5$
- $a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow a_{100} = -10 + (100 - 1) \cdot (-5) = -505$

Utilizando a fórmula e tomando $n = 100$, obtemos:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \Rightarrow S_{100} = \frac{100 \cdot (-10 + (-505))}{2} = \frac{100 \cdot (-515)}{2} = -25\,750$$

Portanto, a soma dos 100 primeiros termos da PA $(-10, -15, -20, \ldots)$ é $-25\,750$.

R8. Calcule o produto $P = (-1)^1 \cdot (-1)^2 \cdot (-1)^3 \cdot \ldots \cdot (-1)^{50}$.

Resolução

Podemos escrever o produto da seguinte forma:

$$P = (-1)^1 \cdot (-1)^2 \cdot (-1)^3 \cdot \ldots \cdot (-1)^{50} = (-1)^{1+2+3+\ldots+50}$$

Note que os parcelas da adição $(1 + 2 + 3 + \ldots + 50)$ formam uma PA, tal que $a_1 = 1$, $r = 1$ e $a_{50} = 50$. Logo:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \Rightarrow S_{50} = \frac{50 \cdot (1 + 50)}{2} = 1275$$

Portanto, $P = (-1)^{1+2+3+\ldots+50} = (-1)^{1275} = -1$.

Professor, professora: Se necessário, enfatize para os estudantes que -1 elevado a um número par é igual a 1 e -1 elevado a um número ímpar é igual a -1.

Exercícios e problemas

24. a) Resposta pessoal. Caso julgue conveniente, instigue os estudantes a perceber que $100 + 1 = 101$, $99 + 2 = 101$, $98 + 3 = 101$ e assim por diante, com os cinquenta pares possíveis, sendo a soma, portanto, $50 \cdot 101 = 5\,050$; 5 050.

Anote as respostas no caderno.

24. c) Resposta pessoal. Espera-se que, usando a fórmula, os estudantes verifiquem que a soma dos números naturais de 1 a 100 é 5 050 e que a soma dos números naturais de 1 a 1 000 é 500 500.

24. Carl Friedrich Gauss (1777-1855) é considerado o maior matemático do século XIX.

MUSEU PUSHKIN, MOSCOU

OBJETO DIGITAL ***Podcast*:** Gauss: a lenda do menino-prodígio

Carl Friedrich Gauss, de Christian Albrecht Jensen. Pintura em tela, 66 cm × 52 cm, 1840.

Há uma história que conta que Gauss, aos 10 anos, calculou mentalmente a soma da progressão aritmética $1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100$.

a) Junte-se a um colega e elaborem uma estratégia para calcular a soma dos números naturais de 1 a 100, sem usar a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PA. Qual é a soma desses números?

b) Usando a estratégia elaborada por vocês no item **a**, calculem a soma dos números naturais de 1 a 1 000. Resposta: 500 500

c) Usando a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PA, verifiquem se as respostas obtidas nos itens anteriores estão corretas.

25. Calcule a soma dos primeiros:

a) 15 termos da PA $(5, 9, 13, \dots)$. Resposta: 495

b) 36 termos da PA $(17, 11, 5, \dots)$. Resposta: $-3\,168$

c) 20 termos da PA $(6, 12, 18, \dots)$. Resposta: 1 260

d) 26 termos da PA $(15, 20, 25, \dots)$. Resposta: 2 015

e) 30 termos da PA $(13, 11, 9, \dots)$. Resposta: -480

f) 18 termos da PA $(120, 100, 80, \dots)$. Resposta: -900

26. Determine a soma dos termos de cada PA.

a) $(3, 11, 19, \dots, 115)$ Resposta: 885

b) $(86, 83, 80, \dots, 35)$ Resposta: 1 089

c) $(-8, -5, -2, \dots, 22)$ Resposta: 77

d) $(-6, -4, -2, \dots, 12)$ Resposta: 30

e) $(10, 14, 18, \dots, 54)$ Resposta: 384

f) $(21, 29, 37, \dots, 141)$ Resposta: 1 296

27. A soma dos 25 primeiros termos de uma PA é 225. Sabendo que a razão é 4, calcule o 18º termo dessa progressão. Resposta: 29

28. Na PA $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_7)$, de razão -7, a soma de todos os termos é 0. Determine a_1. Resposta: 21

29. Sabendo que o 21º termo de uma PA é 32 e sua razão equivale a 5% do 1º termo, verifique qual das afirmativas é verdadeira. Resposta: Alternativa **a**.

a) O 1º termo é um quadrado perfeito.

b) A soma dos 11 primeiros termos é um quadrado perfeito.

c) a_{44} é maior do que 550.

30. Determine o valor de x na equação:

a) $(x + 1) + (x + 2) + \dots + (x + n) + \dots + (x + 100) = 7\,450$ Resposta: $x = 24$

b) $(3x + 2) + (3x + 5) + \dots + (3x + 3n - 1) + \dots + (3x + 59) = 630$ Resposta: $x = \frac{1}{3}$

31. Qual é o valor do produto
$(a) \cdot (ab) \cdot (ab^2) \cdot (ab^3) \cdot (ab^4) \cdot \dots \cdot (ab^{n-1})$?
Resposta: $a^n \cdot b^{\frac{n(n-1)}{2}}$

32. Analise os esquemas.

I) 2
$2 + 4 = 6$
$2 + 4 + 6 = 12$
$2 + 4 + 6 + 8 = 20$
$2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30$
⋮

II) 1
$1 + 3 = 4$
$1 + 3 + 5 = 9$
$1 + 3 + 5 + 7 = 16$
$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$
⋮

a) A sequência $(2, 6, 12, 20, 30, \dots)$ é uma PA? E a sequência $(1, 4, 9, 16, 25, \dots)$? Justifique sua resposta. Resposta: Não. Não. A diferença entre dois termos consecutivos não é constante.

b) Determine a fórmula do termo geral das sequências citadas no item **a**. Resposta: $n(n + 1)$; n^2

c) Determine o 20º termo de ambas as sequências e explique o que esses termos representam. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

33. Determine a soma dos 50 primeiros termos de uma PA sabendo que a soma dos 18 primeiros termos é 540 e a soma dos 30 primeiros termos também é 540. Resposta: -100

34. Considere a soma dos n primeiros termos da PA $(47, 41, 35, \dots)$. Qual é o menor valor de n para que essa soma seja negativa? Resposta: 17

Progressão geométrica

Em certo experimento, foi observado que a quantidade de bactérias de uma amostra duplica a cada dia, conforme o esquema.

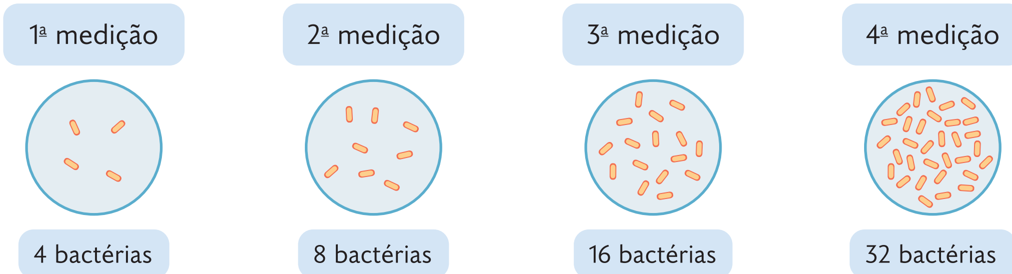


Imagem sem proporção e em cores fantasia.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

A quantidade de bactérias dessa amostra, a cada dia, pode ser representada por meio da sequência $(4, 8, 16, 32, 64, \ldots)$.

Podemos verificar que, do segundo termo dessa sequência em diante, cada um deles é igual ao termo anterior multiplicado por 2.

$$a_2 = a_1 \cdot 2 = 8$$
$$a_3 = a_2 \cdot 2 = 16$$
$$a_4 = a_3 \cdot 2 = 32$$
$$a_5 = a_4 \cdot 2 = 64$$
$$\vdots$$

Sequências com essa característica são chamadas **progressões geométricas**.

Chamamos **progressão geométrica** (PG) toda sequência numérica na qual cada termo, do segundo em diante, é igual ao anterior multiplicado por uma constante q, chamada **razão** da progressão.

- Se $q = 1$, então, a PG é **constante**.
- Se $q > 1$ e $a_1 > 0$ ou $0 < q < 1$ e $a_1 < 0$, então, a PG é **crescente**.
- Se $q > 1$ e $a_1 < 0$ ou $0 < q < 1$ e $a_1 > 0$, então, a PG é **decrescente**.
- Se $q < 0$, então, a PG é **alternante**.

Questão G.

Qual é a razão da PG $(4, 8, 16, 32, 64, \ldots)$?

Resposta: 2

Exemplos

- Na PG $(5, 5, 5, 5, 5, \ldots)$, temos $q = 1$. Assim, essa PG é constante.
- Na PG $\left(-8, -4, -2, -1, -\frac{1}{2}, \ldots\right)$, temos $q = \frac{1}{2}$ e $a_1 = -8$. Como $0 < q < 1$ e $a_1 < 0$, essa PG é crescente.
- Na PG $(-3, -9, -27, -81, -243, \ldots)$, temos $q = 3$ e $a_1 = -3$. Como $q > 1$ e $a_1 < 0$, essa PG é decrescente.
- Na PG $\left(\frac{1}{25}, -\frac{1}{5}, 1, -5, 25, \ldots\right)$, temos $q = -5$. Como $q < 0$, essa PG é alternante.

Considerando a PG $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \ldots)$, temos:

$$a_2 = a_1 \cdot q$$
$$a_3 = a_2 \cdot q$$
$$a_4 = a_3 \cdot q$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_{n-1} \cdot q$$
$$\vdots$$

Observação

Também podemos escrever os termos de uma PG em função de outros termos e da razão dela.

- $a_4 = \underbrace{a_2 \cdot q}_{a_3} \cdot q \Rightarrow a_4 = a_2 \cdot q^2$
- $a_5 = a_1 \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q \Rightarrow a_5 = a_1 \cdot q^4$
- $a_9 = \frac{a_{10}}{q}$

De maneira geral:

O n-ésimo termo de uma PG, em que o primeiro termo é a_1 e a razão é q, é dado pela fórmula de recorrência:

$$a_n = a_{n-1} \cdot q, \text{ para } n \text{ natural com } n \geq 2$$

Em uma PG, $a_n : a_{n-1} = a_{n+1} : a_n$, então:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

Considerando a_{n-1}, a_n, a_{n+1} termos consecutivos de uma PG, temos $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$.

A seguir, são apresentadas duas maneiras de representar uma PG de razão q e termos desconhecidos.

- Se $a_1 = x$, temos $(x, x \cdot q, x \cdot q^2, \ldots)$.
- Se $a_1 = \frac{x}{q}$, temos $\left(\frac{x}{q}, x, x \cdot q, \ldots\right)$.

Professor, professora: Depois da apresentação do conceito de progressão geométrica, converse com os estudantes a respeito das semelhanças e diferenças entre esse tipo de sequência e as progressões aritméticas, de tal modo que eles possam reconhecer sequências e progressões aritméticas nas diferentes situações nas quais podem ser aplicadas.

Exercícios e problemas resolvidos

R9. Determine a razão da PG de cinco termos, tal que $a_1 + a_4 = 505$ e $a_2 + a_5 = 2\,525$.

Resolução

Inicialmente, escrevemos os termos da PG em função de a_1.

- $a_2 = a_1 \cdot q$
- $a_3 = a_2 \cdot q = (a_1 \cdot q) \cdot q = a_1 \cdot q^2$
- $a_4 = a_3 \cdot q = (a_1 \cdot q^2) \cdot q = a_1 \cdot q^3$
- $a_5 = a_4 \cdot q = (a_1 \cdot q^3) \cdot q = a_1 \cdot q^4$

Do enunciado, temos:

$$\begin{cases} a_1 + a_4 = 505 \\ a_2 + a_5 = 2\,525 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_1 \cdot q^3 = 505 \\ a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^4 = 2\,525 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1(1 + q^3) = 505 \\ a_1 \cdot q(1 + q^3) = 2\,525 \end{cases}$$

Utilizando o método da substituição, isolamos a_1 na primeira equação e substituímos na segunda.

- $a_1(1 + q^3) = 505 \Rightarrow a_1 = \dfrac{505}{(1 + q^3)}$
- $a_1 \cdot q(1 + q^3) = 2\,525 \Rightarrow \dfrac{505}{\cancel{(1 + q^3)}} \cdot q\cancel{(1 + q^3)} = 2\,525 \Rightarrow q = \dfrac{2\,525}{505} = 5$

Portanto, a razão dessa PG é 5.

R10. Escreva os seis primeiros termos de uma PG crescente tal que $a_3 = 8$ e $a_5 = 32$.

Resolução

Inicialmente, determinamos a razão da PG escrevendo a_5 em função de a_3.

$$a_5 = \underbrace{a_3 \cdot q}_{a_4} \cdot q \Rightarrow a_5 = a_3 \cdot q^2 \Rightarrow 32 = 8 \cdot q^2 \Rightarrow q^2 = \frac{32}{8} \Rightarrow q^2 = 4 \Rightarrow q = -2 \text{ ou } q = 2$$

Como a PG é crescente, então $q = 2$.

Em seguida, substituímos o valor de q e obtemos a_1.

$$a_3 = \underbrace{a_1 \cdot q}_{a_2} \cdot q \Rightarrow a_3 = a_1 \cdot q^2 \Rightarrow 8 = a_1 \cdot 2^2 \Rightarrow a_1 = \frac{8}{4} = 2$$

Portanto, os seis primeiros termos da PG são, nesta ordem, 2, 4, 8, 16, 32 e 64.

Anote as respostas no caderno.

35. c) Resposta: $q = \frac{2}{3}$; decrescente.

35. d) Resposta: $q = -\frac{2}{3}$; alternante. 35. e) Resposta: $q = \frac{1}{2}$; crescente. 35. f) Resposta: $q = -\sqrt{2}$; alternante.

35. Determine a razão de cada PG e classifique-as em crescente, decrescente, constante ou alternante.

a) Resposta: $q = 2$; crescente.

a) $(5, 10, 20, \ldots)$
b) $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -\sqrt{3})$
c) $\left(3, 2, \frac{4}{3}, \ldots\right)$
d) $(27, -18, 12, \ldots)$
e) $(-12, -6, -3, \ldots)$
f) $(-\sqrt{2}, 2, -2\sqrt{2}, \ldots)$

35. b) Resposta: $q = 1$; constante.

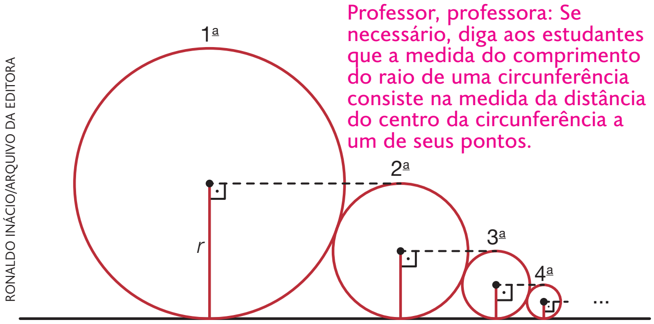
36. Identifique, em cada item, se a sequência cuja lei dada é uma PG. Nos casos em que for PG, determine a razão dela.

a) $a_n = 5(-1)^n, n \in \mathbb{N}^*$ Resposta: Sim; $q = -1$
b) $a_n = -3n, n \in \mathbb{N}^*$ Resposta: Não.
c) $a_n = 4^n, n \in \mathbb{N}^*$
Resposta: Sim; $q = 4$

37. Analise a imagem e determine, em função de r, os cinco primeiros termos da sequência:

- dos comprimentos dos raios das circunferências.
- dos comprimentos das circunferências.
- das áreas dos círculos delimitados pelas circunferências.

Professor, professora: Se necessário, diga aos estudantes que a medida do comprimento do raio de uma circunferência consiste na medida da distância do centro da circunferência a um de seus pontos.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

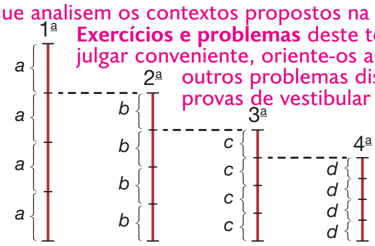
As sequências que você escreveu são progressões geométricas? Se sim, determine a razão de cada uma delas. Respostas no final do **Livro do Estudante**.

Dica

O comprimento C de uma circunferência e a área A de um círculo delimitado por ela são dados, respectivamente, por $C = 2\pi r$ e $A = \pi r^2$, em que r é o comprimento do raio da circunferência.

38. Com base nas imagens, elabore duas questões acerca de progressões geométricas e entregue a um colega, para que as resolva.

Resposta pessoal. Antes de os estudantes elaborarem as questões, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** deste tópico e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

39. Sabendo que os termos da PG $(x - 3, x - 1, x + 5, \ldots)$ são números reais, escreva os sete primeiros termos numéricos dessa progressão.
Resposta: 1, 3, 9, 27, 81, 243 e 729.

40. Classifique a PG $(8 - 5b, 14 + b, 18 + 5b)$ em crescente, decrescente, constante ou alternante.
Resposta: $b = -1$, PG constante; $b = -2$, PG decrescente.

41. A soma dos três termos de uma PG é 14 e o produto deles, -216. Determine essa PG e sua razão.
Resposta: $(2, -6, 18)$ e $q = -3$ ou $(18, -6, 2)$ e $q = -\frac{1}{3}$

42. Acompanhe os procedimentos necessários para determinar, com a ajuda de uma calculadora, os termos de uma PG em que $a_1 = 1000$ e $q = 1{,}007$, ou seja, os termos de uma PG cujos valores crescem a uma taxa de 0,7%.

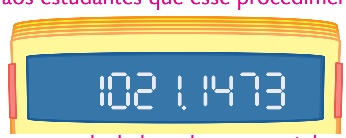
A. Temos $a_1 = 1000$. Efetuando $1{,}007 \cdot 1000$, obtemos a_2.

Professor, professora: Caso não haja calculadoras disponíveis para todos os estudantes, reúna-os em grupos para que possam realizar a tarefa. Outra possibilidade é providenciar e levar algumas calculadoras para a sala de aula.

B. Digitando a tecla $\boxed{=}$ pela 2ª vez, obtemos a_3.

C. Digitando a tecla $\boxed{=}$ pela 3ª vez, obtemos uma aproximação para a_4.

Professor, professora: Diga aos estudantes que esse procedimento funciona em uma calculadora comum, o que pode não ocorrer em uma calculadora científica ou na calculadora de um *smartphone*, por exemplo.



ILUSTRAÇÕES: SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

D. Assim, para calcular a_n, devemos digitar a tecla $\boxed{=}$ uma quantidade de vezes correspondente a $(n - 1)$.

No ano de 2020, o IBGE estimou que havia aproximadamente 211 755 692 habitantes no nosso país. Já no ano de 2021, porém, foi estimada uma população de cerca de 213 317 639 habitantes. Isso representou uma taxa estimada de crescimento de, aproximadamente, 0,73% de um ano para o outro.

Supondo que essa taxa tivesse permanecido inalterada no decorrer dos anos, responda às questões utilizando os procedimentos apresentados.

a) Qual era a quantidade aproximada de habitantes no Brasil em 2022?
Resposta: Aproximadamente 214 874 858 habitantes.

b) Em qual ano estima-se que a população brasileira ultrapassará os 220 milhões de habitantes?
Resposta: Em 2026.

Professor, professora: A tarefa **38** propõe aos estudantes que elaborem duas questões utilizando os conceitos estudados, contribuindo para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações.

Fórmula do termo geral de uma PG

Considere a PG $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots)$ de razão q. Nesse caso, temos:

$$a_1 = a_1 \cdot q^0$$
$$a_2 = a_1 \cdot q$$
$$a_3 = \underbrace{a_2}_{a_1 \cdot q} \cdot q \Rightarrow a_3 = a_1 \cdot q \cdot q \Rightarrow a_3 = a_1 \cdot q^2$$
$$a_4 = \underbrace{a_3}_{a_1 \cdot q^2} \cdot q \Rightarrow a_4 = a_1 \cdot q^2 \cdot q \Rightarrow a_4 = a_1 \cdot q^3$$
$$a_5 = \underbrace{a_4}_{a_1 \cdot q^3} \cdot q \Rightarrow a_5 = a_1 \cdot q^3 \cdot q \Rightarrow a_5 = a_1 \cdot q^4$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_{n-1} \cdot q \Rightarrow a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$
$$\vdots$$

Qualquer termo de uma PG pode ser escrito em função de a_1 e q.

A fórmula do termo geral de uma PG é:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Nessa fórmula:

- a_n: n-ésimo termo.
- a_1: primeiro termo.
- n: ordem do termo.
- q: razão.

Professor, professora: Oriente os estudantes a escrever as respostas no caderno.

Questão H. Escreva um algoritmo que possibilite calcular um termo qualquer de uma PG, dados o primeiro termo, a ordem do termo e a razão q. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

Exercícios e problemas resolvidos

R11. Qual é o 8º termo da PG (3, 12, 48, ...)?

Resolução

Inicialmente, determinamos a razão da PG.

$$q = \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow q = \frac{12}{3} = 4$$

Em seguida, calculamos a_8 utilizando a fórmula do termo geral.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_8 = 3 \cdot 4^{8-1} = 3 \cdot 4^7 = 3 \cdot 16\,384 = 49\,152$$

Portanto, o 8º termo dessa PG é 49 152.

R12. Determine a quantidade de termos da PG $\left(81, 27, 9, \ldots, \frac{1}{9}\right)$.

Resolução

Temos $a_1 = 81$, $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{27}{81} = \frac{1}{3}$ e $a_n = \frac{1}{9}$.

Aplicando a fórmula do termo geral, obtemos a posição do último termo da PG.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{9} = 81 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{9 \cdot 81} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{3^2 \cdot 3^4} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{3^{2+4}}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow 6 = n - 1 \Rightarrow n = 7$$

Portanto, essa PG tem 7 termos.

R13. Interpole três meios geométricos entre 1 e 625.

> **Dica**
> Interpolar **meios geométricos** significa colocar números reais entre dois números dados, de tal modo que a sequência formada por todos esses números seja uma PG.

Resolução

Inicialmente, devemos considerar a PG tal que $a_1 = 1$ e $a_5 = 625$, conforme o esquema.

$$\underbrace{1}_{a_1},\ \underbrace{\underbrace{\_\_}_{a_2},\ \underbrace{\_\_}_{a_3},\ \underbrace{\_\_}_{a_4}}_{\text{3 meios geométricos}},\ \underbrace{625}_{a_5}$$

Utilizando a fórmula do termo geral da PG, calculamos a razão q.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_5 = a_1 \cdot q^{5-1} \Rightarrow 625 = 1 \cdot q^4 \Rightarrow 625 = q^4 \Rightarrow q = \pm\sqrt[4]{625}$$

Nesse caso, temos $q = 5$ ou $q = -5$.

Portanto, são duas sequências possíveis.

- Para $q = 5$, a sequência é crescente $(1, 5, 25, 125, 625)$;
- Para $q = -5$, a sequência é alternante $(1, -5, 25, -125, 625)$.

R14. Certo investimento a juro composto é remunerado mensalmente a uma taxa fixa de 0,65%. Por exemplo, se uma pessoa investiu R\$ 100,00, com índice do mês em 0,65%, após um mês será aplicada a seguinte correção:

$$100 \cdot \underbrace{1{,}0065}_{100{,}65\%} = 100{,}65$$

Nesse caso, os R\$ 100,00 renderam R\$ 0,65 em 1 mês.

Se um capital de R\$ 12 000,00 for aplicado nesse investimento, qual será a quantia obtida ao final de dois anos?

Resolução

Inicialmente, calculamos a quantia (com todas as casas decimais) obtida ao final do:

- 1º mês: $12\,000 \cdot 1{,}0065 = 12\,078$
- 2º mês: $12\,078 \cdot 1{,}0065 = 12\,156{,}507$
- 3º mês: $12\,156{,}507 \cdot 1{,}0065 = 12\,235{,}5243$

A sequência $(12\,078; 12\,156{,}507; 12\,235{,}5243; \ldots)$ é uma PG, tal que $a_1 = 12\,078$ e $q = 1{,}0065$. Desse modo, ao final do 24º mês, que corresponde a 2 anos, teremos:

> **Observação**
> Do segundo mês em diante, a quantia obtida é calculada sobre o capital do mês anterior.

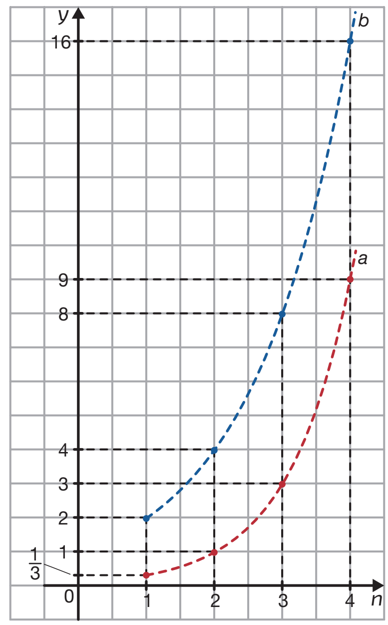
$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_{24} = 12\,078 \cdot 1{,}0065^{24-1} = 12\,078 \cdot 1{,}0065^{23} \Rightarrow a_{24} \simeq 14\,018{,}84$$

Portanto, a quantia obtida ao final de dois anos será R\$ 14 018,84.

> **Observação**
> O cálculo aproximado de $1{,}0065^{23}$ pode ser feito com uma calculadora científica. Para isso, basta digitar a seguinte sequência de teclas.
>
> [1] [.] [0] [0] [6] [5] [^] [2] [3] [=]
>
> 
>
>
> Em algumas calculadoras, a tecla [x^y] substitui a tecla [^].

SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

R15. Analise a representação gráfica das progressões geométricas $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ e $(b_1, b_2, \dots, b_n, \dots)$.



Observação

Uma PG é uma função definida por $a(n) = a_1 \cdot q^{n-1}$ de domínio $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, n, \dots\}$. Assim, a representação gráfica dos termos da PG é formada pelos pares ordenados $(n, a(n))$. Esses pontos pertencem ao gráfico da função do tipo exponencial definida por $a(n) = a_1 \cdot q^{n-1}$.

Qual PG tem razão maior?

Resolução

Sejam q_a e q_b as razões das progressões geométricas $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ e $(b_1, b_2, \dots, b_n, \dots)$, respectivamente. Analisando o gráfico, temos:

- $q_a = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{1}{\frac{1}{3}} = 3$
- $q_b = \dfrac{b_2}{b_1} = \dfrac{4}{2} = 2$

Assim, $q_a > q_b$.

47. b) Resposta: Representa a quantidade de medicamento ingerida por Júlio na quarta semana de tratamento.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

43. Determine a fórmula do termo geral e calcule o valor de a_6 em cada PG. Respostas no final do **Livro do Estudante**.

a) $(2, 8, 32, \dots)$

b) $(-48, -24, -12, \dots)$

c) $(-7, 14, -28, \dots)$

d) $\left(\dfrac{64}{25}, \dfrac{8}{5}, 1, \dots\right)$

44. Qual termo da PG $(729, 2\,430, 8\,100, \dots)$ é igual a 1 000 000? Resposta: a_7

45. Dada a PG $\left(1, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{1}{2}, \dots\right)$, determine a razão e o valor de $a_5 : a_7$. Resposta: $q = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $a_5 : a_7 = 2$.

46. Em uma progressão geométrica de n termos, $a_5 = 648$, $a_n = 2\,187$ e $q = 1{,}5$. Determine a quantidade de termos dessa PG. Resposta: $n = 8$

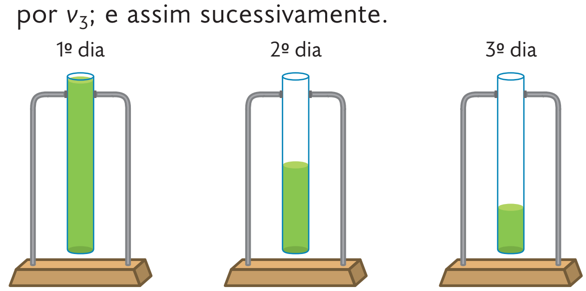
47. Júlio realiza um tratamento médico no qual deve ingerir doses semanais de certo medicamento durante seis semanas. A dose ingerida do medicamento, por recomendação médica, deve aumentar semanalmente, conforme uma PG. Sabe-se que na primeira semana ele ingeriu 32 mg desse medicamento e na terceira, 72 mg.

a) Qual é a PG que representa a quantidade de medicamento ingerido por Júlio semanalmente, durante todo o tratamento?
Resposta: (32, 48, 72, 108, 162, 243)

b) O que representa o quarto termo dessa sequência?

c) Escreva uma fórmula que expresse a dose do medicamento, em miligramas, em função do tempo, medido em semanas.
Resposta: $a_n = 32 \cdot (1{,}5)^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$ e $n \leq 6$

48. Um cientista observou que certa substância **volátil**, ao ficar exposta ao ambiente, perde uma porcentagem x do seu volume a cada dia. O volume inicial da substância é dado por v_1. Passado um dia, o volume é dado por v_2; mais um dia, por v_3; e assim sucessivamente.



48. a) Resposta: PG

a) A sequência $(v_1, v_2, v_3, \dots)$ é uma PA ou uma PG?

b) Sabendo que $v_6 = 800$ mm³ e $v_7 = 400$ mm³, determine v_{10}. Resposta: $v_{10} = 50$ mm³

c) De acordo com os dados do item **b**, calcule o volume inicial dessa substância. Resposta: 25 600 mm³

d) Escreva uma fórmula que expresse o volume da substância em função do tempo, medido em dias. Resposta: $v_n = 25\,600 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Volátil: termo atribuído a uma substância que, em pressão e temperatura ambientes, tem a propriedade de vaporizar.

49. Calcule o valor de b de modo que as sequências sejam PG.

a) $(45, b, 20)$ Resposta: 30 ou −30

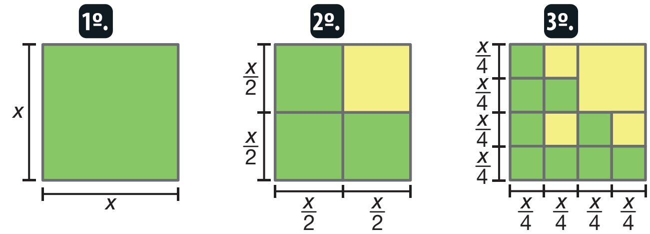
b) $(b + 3, b + 17, b + 59)$ Resposta: 4

c) $(b + 1, b - 3, b - 15)$ Resposta: −3

53. b) Resposta: A 2ª aplicação. O montante obtido ao final de dois anos na 1ª e na 2ª aplicação é, respectivamente, R$ 12 080,00 e R$ 12 194,23.

50. Que número devemos adicionar a 3, 18 e 48 para que, nessa ordem, formem uma PG? Resposta: 12

51. Analise a sequência de figuras.



a) Escreva, em função de x, os 5 primeiros termos da sequência que representa as áreas em:
Respostas no final do **Livro do Estudante**.
- verde.
- amarelo.

b) Qual das sequências escritas por você é uma PG? Justifique sua resposta.

c) Determine o 10º termo de cada uma dessas sequências.

51. c) Resposta: Verde: $\left(\frac{3}{4}\right)^9 \cdot x^2$; amarelo: $\left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^9\right] \cdot x^2$.

52. Considerando a PA de razão $r = 25$ e 1º termo $a_1 = 100$, e a PG de razão $q = 2$ e 1º termo $b_1 = 1$, é correto afirmar que: Resposta: Alternativa **b**.

a) $\frac{a_3}{b_3} = 10\,a_7$.

b) $a_n < b_n$, para $n \geq 10$.

c) Os termos da PG passam a ser maiores do que os termos da PA só do 11º termo em diante.

53. Cláudia recebeu de um banco duas propostas de aplicação financeira. Na 1ª aplicação, R$ 10 000,00 renderão uma quantia fixa de R$ 260,00 a cada trimestre. Na 2ª aplicação, o mesmo capital renderá juros mensais a uma taxa de 0,83%.

a) Em qual das aplicações os montantes obtidos ao final de cada período formarão uma PG?
Resposta: Na 2ª aplicação.

b) Qual das aplicações é mais rentável ao final de 2 anos de investimento? Justifique sua resposta.

c) Escreva, para cada uma das aplicações, uma fórmula que expresse o montante em função do tempo.
Resposta no final do **Livro do Estudante**.

54. Com folhas de papel de 0,1 mm de espessura são feitas pilhas, da seguinte maneira.

- 1ª pilha: colocam-se 6 folhas e, em seguida, retiram-se 5.
- 2ª pilha: colocam-se 18 folhas e, em seguida, retiram-se 10.
- 3ª pilha: colocam-se 54 folhas e, em seguida, retiram-se 15.
- 4ª pilha: colocam-se 162 folhas e, em seguida, retiram-se 20.

⋮ 54. b) Resposta: 1 180,48 cm

a) Quantas folhas há na 10ª pilha? Resposta: 118 048 folhas.

b) Qual é a altura, em centímetros, da 10ª pilha?

55. Em 1798, o economista inglês Thomas Robert Malthus (1766-1834) desenvolveu uma teoria na qual afirmava que a população mundial tenderia a crescer em progressão geométrica, enquanto a produção de alimentos aumentaria em progressão aritmética. Isso levaria a população mundial a passar fome.

Até o século XX, a teoria de Malthus não pôde ser comprovada – pois a produção mundial de alimentos foi suficiente para o número de habitantes do planeta. De acordo com especialistas, o economista teria ignorado, por exemplo, que os avanços tecnológicos permitiriam que a curva da produção de alimentos se mantivesse acima da curva de crescimento da população.

Outro fator que não comprovou a teoria de Malthus foi o crescimento populacional, que não aumentou no ritmo esperado por ele. Os dados para a época eram limitados e Malthus apoiou suas conclusões apenas observando o comportamento demográfico de uma determinada região. Na década de 1960, por exemplo, a população mundial crescia, em média, cerca de 2% ao ano, porém, de 2005 a 2015, a população cresceu, em média, aproximadamente 1,2% ao ano.

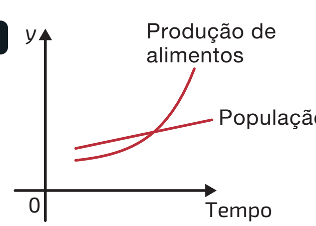
a) Escreva os 10 primeiros termos da:
- PA em que $a_1 = 2$ e $r = 2$.
Resposta: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 e 20
- PG em que $a_1 = 2$ e $q = 2$.
Resposta: 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 e 1 024

b) Observando as sequências obtidas no item **a**, em qual delas há um crescimento maior quando comparamos um termo qualquer ao seu anterior? Resposta: Observa-se crescimento maior na PG.

c) De acordo com a resposta ao item **b**, explique com suas palavras a conclusão a que chegou Malthus de que, se a população mundial crescesse em PG e a produção de alimentos em PA, isso acarretaria fome após determinado momento.

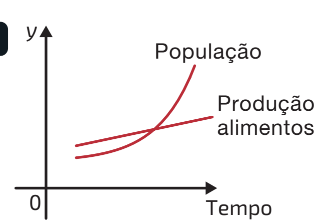
d) Qual dos gráficos a seguir pode representar a lei de Malthus? Resposta: O gráfico II.

I.



55. c) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes concluam que, depois de certo valor de n, os termos da PG serão maiores do que os termos da PA.

II.



51. b) Sugestão de resposta: Aquela que representa os valores das áreas em verde, pois, do 2º termo em diante, o quociente entre um termo e seu antecessor é uma constante. No caso da outra sequência, esse quociente não é constante.

56. b) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes digam que esses locais podem se tornar criadouros do mosquito *Aedes aegypti*, possibilitando a transmissão da dengue para as pessoas que moram na residência e em regiões próximas, além da proliferação do mosquito para outras regiões.

56. A dengue é uma doença viral que afeta milhares de brasileiros todos os anos, além de ser um dos principais problemas de saúde pública. Em geral, é mais comum em países tropicais e subtropicais, nos quais o clima é propício para a proliferação do mosquito *Aedes aegypti*, principal transmissor dela.

ODS 3

Quando uma pessoa é picada por um mosquito infectado, os sintomas da doença começam a aparecer entre 3 e 15 dias, sendo a média de 5 ou 6 dias. Entre os sintomas, podemos citar febre alta, dores no corpo (principalmente nos ossos e articulações), dores de cabeça e atrás dos olhos, manchas e erupções na pele, náuseas e vômito, tontura, cansaço extremo e perda de paladar e apetite.


CESAR DINIZ/PULSAR IMAGENS

Agentes de vigilância em saúde, da prefeitura do município de São Paulo, combatendo focos de mosquitos *Aedes aegypti* nos bairros da cidade, em 2024.

Ao suspeitar que está com dengue por sentir alguns desses sintomas, é importante consultar um médico em um hospital ou uma Unidade Básica de Saúde (UBS), a fim de realizar o tratamento adequado. Também é indicado ingerir bastante líquido durante o período da doença, para evitar a desidratação.

A maneira mais eficaz de prevenir a dengue é por meio de ações que combatam o acúmulo de água, pois esse é o local propício para a procriação do *Aedes aegypti*. Os órgãos públicos devem ter iniciativas para esse fim, como a visitação às casas, feita por agentes de saúde que verificam a existência de focos e orientam os moradores. Portanto, a contribuição da população é essencial para o controle e o combate da proliferação do mosquito. Prevenir a dengue é adotar ações simples que evitam que a água parada se torne criadouro do mosquito.

56. e) Resposta pessoal. Converse com os estudantes a respeito da importância da fiscalização de suas residências a fim de evitar a proliferação do mosquito.

Apesar de os ovos do mosquito serem depositados de preferência em locais que acumulam água limpa e parada, existem estudos que indicam a possibilidade de encontrar focos em água suja também, por isso a importância de impedir o acúmulo de água parada, seja ela limpa ou suja.

a) Suponha que uma fêmea do mosquito *Aedes aegypti* (1ª geração) infectada com o vírus da dengue coloque 200 ovos em um reservatório com água parada no quintal de uma casa. Além disso, considere que, nas gerações futuras, metade das crias serão fêmeas; 30% delas nascerão infectadas com o vírus; e as crias se reproduzirão no mesmo local e seus descendentes representarão as mesmas proporções indicadas anteriormente.

- Qual será a quantidade de fêmeas do *Aedes aegypti* infectadas nesse reservatório na 2ª geração? E na 3ª geração? Resposta: 2ª geração: 30 fêmeas infectadas; 3ª geração: 900 fêmeas infectadas.
- Considerando essas informações, escreva a sequência das quantidades de fêmeas infectadas nas 5 primeiras gerações. Essa sequência é uma PA ou uma PG?
Resposta: (1, 30, 900, 27 000, 810 000); PG.
- Escreva uma fórmula que expresse a quantidade de fêmeas infectadas em função da geração. Em seguida, com o auxílio de uma calculadora, determine a quantidade de fêmeas infectadas na 8ª geração.
Resposta: $I_n = 30^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 1$; $2{,}178 \cdot 10^{10}$ fêmeas infectadas.

b) Quais consequências pode haver se deixarmos água parada em alguns locais de nossa residência?

56. c) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes percebam que a maneira mais eficaz de prevenção da dengue – doença viral que é um dos principais problemas de saúde pública – é o combate ao mosquito.

c) De acordo com as informações apresentadas no texto desta tarefa, converse com os colegas e o professor sobre a importância da contribuição das pessoas para controle e combate da proliferação do mosquito *Aedes aegypti*.

d) Faça uma pesquisa e determine medidas que devem ser adotadas para evitar o acúmulo de água parada e, consequentemente, impedir a proliferação do mosquito *Aedes aegypti* e a transmissão da dengue e demais doenças.

e) Com base na pesquisa feita da questão anterior, verifique se sua residência está protegida de criadouros do *Aedes aegypti*. Em caso negativo, busque auxílio e tome as providências pesquisadas para protegê-la.

PARA EXPANDIR

Que tal obter mais informações sobre o combate ao *Aedes aegypti*, a prevenção de doenças e os cuidados com sua família? Para isso, leia o artigo ***Prevenção e combate ao Aedes aegypti***, publicado no *site* do Unicef Brasil. Disponível em: https://www.unicef.org/brazil/prevencao-e-combate-ao-aedes-aegypti. Acesso em: 19 jun. 2024.

56. d) Sugestão de resposta: Armazene lixo em sacos plásticos e faça o descarte em lixeiras tampadas adequadamente; caso haja plantas em sua residência, encha de areia os pratinhos que ficam embaixo dos vasos; não deixe acumular água nas calhas, limpando-as; tampe bem a caixa-d'água; deixe os vasilhames armazenados de cabeça para baixo, em um local onde estejam abrigados da chuva.

57. Interpole 4 meios geométricos entre 3 e 96.
Resposta: $(3, 6, 12, 24, 48, 96)$

58. Ao inserir 3 meios geométricos entre 2 e 8, tem-se uma PG crescente. Calcule a razão dela.
Resposta: $\sqrt{2}$

59. O quadro apresenta o montante obtido em uma aplicação a juro composto em função do tempo.

Montante em função do tempo

Tempo	1	2	3	...	n	...
Montante	M_1	M_2	M_3	...	M_n	...

a) A sequência dos montantes $(M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots)$ é uma PG? Justifique sua resposta.

b) Mostre que $M = C(1 + i)^t$, em que M, C, i e $t\,(t > 0)$ indicam, respectivamente, o montante, o capital, a taxa de juro (na forma decimal) e o tempo. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

60. (Enem, 2008) **Fractal** (do latim *fractus*, fração, quebrado) – objeto que pode ser dividido em partes que possuem semelhança com o objeto inicial. A geometria fractal, criada no século XX, estuda as propriedades e o comportamento dos fractais – objetos geométricos formados por repetições de padrões similares.

O triângulo de Sierpinski, uma das formas elementares da geometria fractal, pode ser obtido por meio dos seguintes passos:

1. Comece com um triângulo equilátero (Figura 1).

2. Construa um triângulo em que cada lado tenha a metade do tamanho do lado do triângulo anterior e faça três cópias.

3. Posicione essas cópias de maneira que cada triângulo tenha um vértice comum com um dos vértices de cada um dos outros dois triângulos, conforme ilustra a Figura 2.

4. Repita sucessivamente os passos 2 e 3 para cada cópia dos triângulos obtidos no passo 3 (Figura 3).

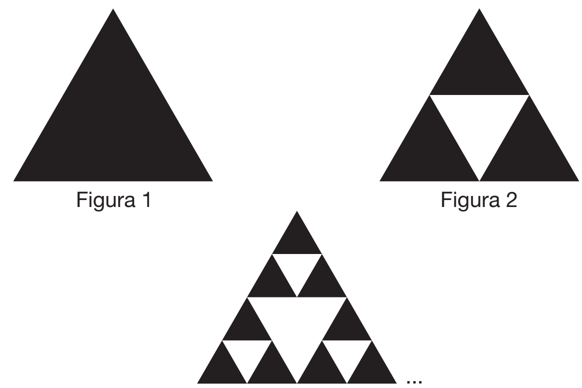
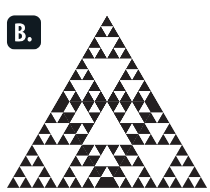


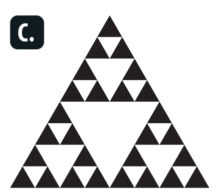
Figura 1 Figura 2 Figura 3 ...

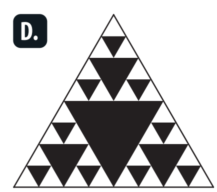
ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA/ENEM 2008

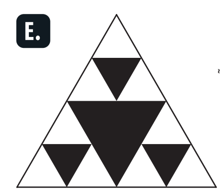
De acordo com o procedimento descrito, a figura 4 da sequência apresentada anteriormente é:
Resposta: Alternativa **C**.

A. 

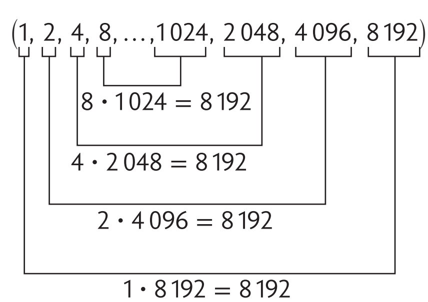
B. 

C. 

D. 

E. 

61. Considere a PG $(1, 2, 4, 8, \ldots, 1\,024, 2\,048, 4\,096, 8\,192)$. Nela, multiplicando os termos extremos ou os termos equidistantes dos extremos, obtemos o mesmo resultado.



59. a) Resposta: Cada termo da sequência, do segundo em diante, é obtido pela multiplicação do termo anterior por uma constante, nesse caso $1 + i$. Então, a sequência dos montantes é uma PG de razão $q = 1 + i$.

a) Determine a_7 e a_8. Qual é o valor de $a_7 \cdot a_8$?
Resposta: $a_7 = 64$ e $a_8 = 128$; 8 192

b) Junte-se a dois colegas e, utilizando a relação entre PG e função do tipo exponencial, mostrem que $a_1 \cdot a_n = a_x \cdot a_y$, tal que a_x e a_y são termos equidistantes dos extremos, ou seja, que a afirmação apresentada a seguir é verdadeira. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

Em uma PG finita, o produto entre dois termos equidistantes dos extremos é igual ao produto dos extremos.

TRABALHO E JUVENTUDES

O que faz um geneticista?

Professor, professora: Por ser pessoal e de grande responsabilidade, é comum que o ato de escolher uma carreira profissional gere estresse nos estudantes. Sendo assim, trabalhe esse assunto com eles, tendo cuidado para não causar mais ansiedade e dúvidas. Explique-lhes também que é comum algumas pessoas mudarem de profissão ao longo da vida até se identificarem com uma em particular.

Como vimos, é possível estabelecer uma lei de formação para uma progressão geométrica e, assim, generalizar padrões e efetuar diversos cálculos. Até mesmo os geneticistas podem utilizar a progressão geométrica para realizar o sequenciamento de DNA. Porém, você conhece essa profissão?

O geneticista é um profissional especializado em Genética. Uma de suas atribuições é o estudo de genes de diferentes seres vivos, bem como a promoção de pesquisas sobre as estruturas genéticas desses seres. Assim, eles estudam genes vegetais, humanos e de outros animais, com o objetivo de entender todas as informações ali contidas.

Os geneticistas podem atuar em diferentes áreas, como a Medicina, a Agricultura e a Pecuária. Na Medicina, um geneticista trabalha com modificação genética, pesquisando doenças hereditárias e síndromes genéticas. Além disso, pode desenvolver medicamentos e tratamentos na área da saúde. Na Agricultura, o geneticista realiza melhoramentos para criar plantas mais produtivas e mais resistentes a doenças, por exemplo. Já na Pecuária, ele trabalha promovendo o melhoramento genético de algumas raças, pesquisando doenças e desenvolvendo medicamentos.

MARVENT/SHUTTERSTOCK

Grupo de geneticistas trabalhando em laboratório.

PARA EXPANDIR

Que tal conhecer o local de trabalho de um geneticista? Nessa visita, aproveite para conhecer mais o dia a dia desse profissional.

Observação

Ainda não há um curso específico para se tornar geneticista. É comum que os profissionais da área se graduem em cursos como Ciências biológicas, Biomedicina e Medicina e que se especializem na área de Genética.

1. Resposta pessoal. Incentive todos os estudantes a participar comentando o que mais lhes chamou a atenção, mesmo aqueles que não atuariam como geneticistas. Peça aos que se identificaram com a profissão que exponham o motivo da escolha e digam se alguma das áreas de atuação lhes pareceu mais atraente.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

1. Quais aspectos da profissão de geneticista mais chamaram a sua atenção? Você exerceria essa profissão? Em acaso afirmativo, em qual das possíveis áreas você atuaria? Converse com os colegas sobre isso.

2. Forme dupla com um colega e pesquisem uma das áreas de atuação do geneticista citadas no texto a fim de descobrir qual é a importância desse profissional para a sociedade. Procurem saber como é o cotidiano e como está o mercado de trabalho dessa profissão atualmente. Anotem as informações que acharem relevantes e as expliquem em sala de aula, a fim de compartilhar com os colegas.
Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes escolham uma das áreas de atuação do geneticista e obtenham informações sobre ela. É importante que eles pesquisem as contribuições desses profissionais para a sociedade, buscando reconhecê-los e valorizá-los. Além disso, saber mais sobre o dia a dia de trabalho de um geneticista e sobre o mercado de trabalho na área atualmente pode contribuir para que os estudantes percebam se há ou não interesse pela profissão.

PG e função

Considere a PA $(0, 2, 4, 6, 8, \ldots)$ de razão 2, e a função do tipo exponencial definida por $f(x) = 2 \cdot 3^x$. Podemos verificar que a sequência $\left(f(0), f(2), f(4), f(6), f(8), \ldots\right)$ é uma PG.

$$f(0) = 2 \cdot 3^0 = 2 \cdot 1 = 2$$
$$f(2) = 2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = 18$$
$$f(4) = 2 \cdot 3^4 = 2 \cdot 81 = 162$$
$$f(6) = 2 \cdot 3^6 = 2 \cdot 729 = 1\,458$$
$$f(8) = 2 \cdot 3^8 = 2 \cdot 6\,561 = 13\,122$$
$$\vdots$$

Professor, professora: Após estudar a relação entre progressões geométricas e funções exponenciais, proponha um estudo a respeito dos comportamentos gráficos correspondentes, com o intuito de esclarecer aos estudantes que as progressões geométricas podem ser relacionadas a uma função de domínio discreto, no caso, formado pelo conjunto de números naturais não nulos. Sendo assim, sua representação gráfica, diferente das funções de domínio real, deve ser feita através de pontos, e não de uma curva contínua.

Além disso:

$$\frac{18}{2} = \frac{162}{18} = \frac{1\,458}{162} = \frac{13\,122}{1\,458} = 9$$

Portanto, $(2, 18, 162, 1\,458, 13\,122, \ldots)$ é uma PG de razão 9.

A razão dessa PG é igual ao coeficiente a da função definida por $f(x) = b \cdot a^x$ elevado à razão r da PA, ou seja, $a^r = 3^2 = 9$.

Dadas a função do tipo exponencial $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = b \cdot a^x$ e a PA $(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n, \ldots)$ de razão r, a sequência $\left(f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4), \ldots, f(x_n), \ldots\right)$ é uma PG de razão a^r.

Observação

A propriedade apresentada nesta página pode ser demonstrada, porém, nesta coleção, será apenas enunciada.

Exercícios e problemas resolvidos

R16. Sejam a PA $(5, -1, -7, \ldots)$ de razão $r = -6$ e a função definida por $f(x) = 7 \cdot 2^x$. Determine os cinco primeiros termos da PG $\left(f(5), f(-1), f(-7), \ldots\right)$ e a razão dela.

Resolução

Inicialmente, obtemos os cinco primeiros termos da PA: $5, -1, -7, \underbrace{-13}_{-7+(-6)}$ e $\overbrace{-19}^{-13+(-6)}$.

Agora, calculamos os cinco primeiros termos da PG.

Cinco primeiros termos da PG $\left(f(5), f(-1), f(-7), \ldots\right)$

x	5	-1	-7	-13	-19
$f(x) = 7 \cdot 2^x$	224	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{128}$	$\frac{7}{8\,192}$	$\frac{7}{524\,288}$

Observação

A razão da PG também pode ser obtida por:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{7}{2}}{224} = \frac{1}{64}$$

Logo, os cinco primeiros termos da PG são, nessa ordem:

$$224, \frac{7}{2}, \frac{7}{128}, \frac{7}{8\,192} \text{ e } \frac{7}{524\,288}$$

A razão da PG é:

$$q = a^r \Rightarrow q = 2^{-6} = \frac{1}{64}$$

R17. Determine o valor de a de modo que a função do tipo exponencial definida por $f(x) = 2 \cdot a^x$, aplicada aos termos de uma PA de razão $r = 3$, gere uma PG de razão $q = 125$.

Resolução

A razão da PG é igual ao coeficiente a da função elevado à razão r da PA. Assim:

$$q = a^r \Rightarrow 125 = a^3 \Rightarrow a = \sqrt[3]{125} = 5$$

62. Sejam a PA $(-4, -1, 2, 5, 8)$ e as funções f e g definidas por $f(x) = 3x + 2$ e $g(x) = 3 \cdot 2^x$. Para cada sequência a seguir, calcule o valor dos seus termos, classifique-as em PA ou PG e determine as razões delas. Respostas no final do **Livro do Estudante**.

a) $(f(-4), f(-1), f(2), f(5), f(8))$

b) $(g(-4), g(-1), g(2), g(5), g(8))$

63. Em um laboratório, observou-se que a quantidade de indivíduos de uma colônia de bactérias dobrava a cada hora. A função que representa a quantidade de bactérias em função do tempo t, em horas, é dada por $f(t) = x \cdot a^t$, em que x é a quantidade de bactérias no instante inicial $(t = 0)$.

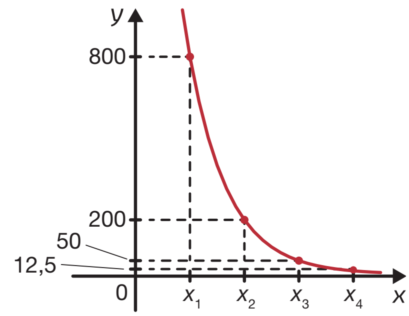
a) Determine o valor de a. Resposta: $a = 2$

b) Escreva a PG que representa a quantidade de indivíduos dessa colônia no início de cada uma das quatro primeiras horas. Resposta: $(x, 2x, 4x, 8x)$

c) Qual era a quantidade de indivíduos no início da 10ª hora? Resposta: $512x$

64. Sabendo que $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ é uma PA de razão 3, determine a razão da PG $(f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots)$, em que $f(x) = -2 \cdot 9^x$. Resposta: 729

65. Analise o gráfico da função definida por $f(x) = b \cdot a^x$.



Sabendo que $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3 = 2$, calcule o valor de a. Resposta: $a = \frac{1}{2}$

66. Daniel comprou um terreno de R$ 180 000,00 em uma região da cidade com valorização média de aproximadamente 12% ao ano. Calcule o valor aproximado desse terreno ao final de cinco anos.

Resposta: Aproximadamente R$ 317 221,50.

Soma dos *n* primeiros termos de uma PG

Considere a PG $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{n-1}, a_n, \ldots)$ de razão q. Indicando a soma dos n primeiros termos dessa PG por S_n, temos:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \quad \text{(I)}$$

Multiplicando os dois membros dessa igualdade pela razão q, obtemos:

$$S_n \cdot q = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + a_3 \cdot q + a_4 \cdot q + \ldots + a_{n-2} \cdot q + a_{n-1} \cdot q + a_n \cdot q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_n \cdot q = a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n + a_n \cdot q \quad \text{(II)}$$

Realizando, membro a membro, a subtração (I) − (II), temos:

$$\begin{array}{rl} S_n = & a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \\ - S_n \cdot q = & a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n + a_n \cdot q \\ \hline S_n - S_n \cdot q = & a_1 - a_n \cdot q \end{array}$$

Sabemos que $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. Logo:

$$S_n - S_n \cdot q = a_1 - a_n \cdot q \Rightarrow S_n(1 - q) = a_1 - a_1 \cdot \underbrace{q^{n-1} \cdot q}_{q^n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_n(1 - q) = a_1 - a_1 \cdot q^n \Rightarrow S_n(1 - q) = a_1(1 - q^n) \Rightarrow S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}, \text{ para } q \neq 1$$

OBJETO DIGITAL ***Vídeo***: Uma soma infinita de parcelas positivas pode resultar em um número finito?

A fórmula que permite calcular a soma dos n primeiros termos de uma PG é:

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}, \text{ para } q \neq 1$$

Nessa fórmula:

- S_n: soma dos n primeiros termos.
- a_1: primeiro termo.
- n: quantidade de termos.
- q: razão.

Observação

Se realizássemos (II) − (I), obteríamos $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$, para $q \neq 1$. Essa fórmula pode ser escrita como $S_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1}$, para $q \neq 1$.

Exercícios e problemas resolvidos

R18. Calcule a soma dos termos da PG $(5, 15, 45, \dots, 3\,645)$.

Resolução

Temos $a_1 = 5$, $q = \dfrac{15}{5} = 3$ e $a_n = 3\,645$.

Aplicando a fórmula $S_n = \dfrac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1}$, segue que:

$$S_n = \frac{3\,645 \cdot 3 - 5}{3 - 1} = \frac{10\,935 - 5}{2} = \frac{10\,930}{2} = 5\,465$$

Portanto, a soma dos termos dessa PG é 5 465.

R19. Eduardo recebeu um *e-mail* dizendo "Ganhe dinheiro fácil", com a seguinte proposta: ele deveria ser vendedor de uma empresa e recrutar 10 novos vendedores (1º nível). Cada um desses recrutaria mais 10 vendedores (2º nível), e assim sucessivamente. Ao atingir o 10º nível, Eduardo ganharia uma grande quantia em dinheiro. Sabendo que os vendedores podem ser recrutados uma única vez e que a população mundial é menor do que 9 bilhões de pessoas, é possível que ele ganhe esse dinheiro?

Resolução

Inicialmente, calculamos o número de vendedores recrutados nos primeiros níveis.

- 1º nível: $1 \cdot 10 = 10$, ou seja, 10 vendedores.
- 2º nível: $10 \cdot 10 = 100$, ou seja, 100 vendedores.
- 3º nível: $100 \cdot 10 = 1\,000$, ou seja, 1 000 vendedores.

Analisando a sequência $(10, 100, 1\,000, \dots)$, verificamos que ela é uma PG tal que $a_1 = 10$ e $q = 10$.

No 10º nível, o total de vendedores recrutados é:

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

$$S_{10} = \frac{10 \cdot (1 - 10^{10})}{1 - 10} = \frac{10 \cdot (-9\,999\,999\,999)}{-9} = \frac{-99\,999\,999\,990}{-9} = 11\,111\,111\,110$$

Assim, no 10º nível, o total de vendedores é maior do que 11 bilhões.

Portanto, não é possível que Eduardo ganhe esse dinheiro, pois a quantidade de vendedores que deve ser recrutada é superior à população mundial.

Observação

Embora o que é proposto nesse tipo de *e-mail* possa ser tentador para muitos, em geral, as metas solicitadas são inatingíveis. Propostas que chegam via *e-mail* ou aplicativos utilizando títulos apelativos para prometer renda extra ou dinheiro fácil costumam ser golpes financeiros. Recomenda-se não responder a essas mensagens e descartá-las assim que sejam recebidas.

R20. Em uma PG de cinco termos, a razão é $q = 1$ e a soma de seus termos é $S_5 = 175$. Escreva os termos dessa PG.

Resolução

Adicionando os termos da PG, temos:

$$S_5 = a_1 + \underbrace{a_1 \cdot q}_{a_2} + \underbrace{a_1 \cdot q^2}_{a_3} + \underbrace{a_1 \cdot q^3}_{a_4} + \underbrace{a_1 \cdot q^4}_{a_5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 175 = a_1 + a_1 \cdot 1 + a_1 \cdot 1^2 + a_1 \cdot 1^3 + a_1 \cdot 1^4 \Rightarrow 175 = 5a_1 \Rightarrow a_1 = 35$$

Portanto, a PG é $(35, 35, 35, 35, 35)$.

Observação

De modo geral, se uma PG tem razão $q = 1$, então:

$$S_n = a_1 + a_1 \cdot 1 + a_1 \cdot 1^2 + \dots + a_1 \cdot 1^{n-1} \Rightarrow S_n = \underbrace{a_1 + a_1 + a_1 + \dots + a_1}_{n \text{ parcelas}} \Rightarrow S_n = n \cdot a_1$$

Anote as respostas no caderno.

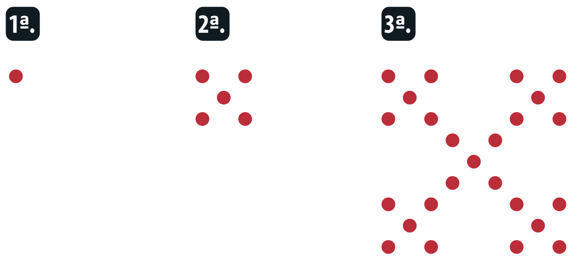
67. Determine a soma dos oito primeiros termos de cada PG.

a) $(3, 12, 48, \ldots)$ Resposta: 65 535

b) $(-4, 8, -16, \ldots)$ Resposta: 340

c) $(5\,000, 500, 50, \ldots)$ Resposta: 5 555,5555

68. Débora desenhou uma sequência de pontos conforme apresentado.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

a) Determine a quantidade de pontos da 5ª figura da sequência. Resposta: 625 pontos.

b) Quantos pontos Débora terá desenhado ao concluir a 5ª figura da sequência?
Resposta: 781 pontos.

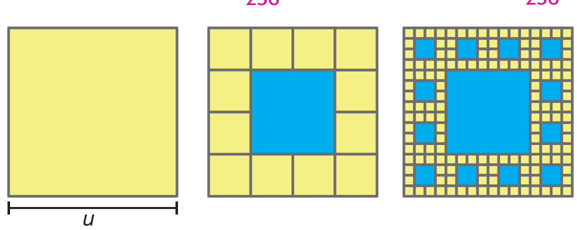
69. A soma dos n primeiros termos da PG $(3, -6, 12, \ldots)$ é 129. Qual é o valor de n?
Resposta: $n = 7$

70. Calcule o valor de x e a quantidade de termos da PG $(2x, 8x, \ldots, 512x)$, sabendo que a soma dos seus termos é $-1\,364$.
Resposta: $x = -2$; $n = 5$

71. Em uma PG, temos $S_6 = 756$. Se a razão dessa PG é 2, determine a_1.
Resposta: 12

72. As figuras da sequência são formadas por regiões quadradas. Considerando as 5 primeiras, determine a soma das áreas em:

a) amarelo. Resposta: $\frac{781}{256}u^2$ b) azul. Resposta: $\frac{499}{256}u^2$



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

73. Uma bola, a uma altura de 18 m, cai em queda livre e, a cada vez que se choca com o solo, recupera apenas 40% de sua altura anterior.

a) Determine a altura máxima aproximada, em metros, atingida pela bola logo após o 3º choque. Resposta: 1,152 m

b) Calcule a distância total mínima percorrida pela bola quando ela tiver se chocado com o solo pela 3ª e pela 4ª vez.
Resposta: 38,16 m; 40,464 m

74. Para o controle de populações de baratas, certo laboratório desenvolveu um veneno capaz de fazer uma barata contaminada por ele, enquanto viva, contaminar todas as que entrarem em contato com ela.

Suponha que uma barata contaminada leve um minuto para morrer e que, nesse período, contamine outras três baratas. Estas, antes de morrer, contaminarão outras três cada uma, e assim por diante. Considerando esse cenário, determine:

a) a quantidade mínima de baratas mortas em 5 min numa população de 300 baratas.
Resposta: 121 baratas

b) o tempo máximo para que morram 300 baratas.
Resposta: 6 min

75. Há indícios de que a civilização babilônica já conhecia fórmulas gerais para a soma de progressões geométricas. Em uma tábula babilônica datada por volta de 300 a.C., Otto Neugebauer encontrou um problema com a seguinte afirmação (em notação atual):

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^9 = 2^9 + 2^9 - 1$$

a) Em relação à PG cuja soma é apresentada anteriormente:

- qual é o primeiro termo? Resposta: $a_1 = 1$
- qual é a razão? Resposta: $q = 2$
- qual é o total de termos? Resposta: $n = 10$

b) Mostre, por meio de cálculos, que a igualdade obtida pelos babilônios está correta.

76. Certo programa de televisão ofereceu prêmios em dinheiro às pessoas que participassem de uma gincana de perguntas e respostas. O apresentador do programa faria a primeira pergunta e, se o participante respondesse corretamente, ganharia R$ 100,00. Caso continuasse acertando, ganharia R$ 200,00 pela segunda pergunta, R$ 400,00 pela terceira, e assim sucessivamente. Quando o participante errasse a resposta, sua participação se encerraria e ele levaria apenas as quantias obtidas anteriormente.

a) Se um participante responder corretamente apenas seis perguntas, qual será sua premiação?
Resposta: R$ 6 300,00

b) Sabendo que nesse jogo a maior quantia paga por uma resposta correta é R$ 51 200,00, qual é a quantidade máxima de perguntas que podem ser realizadas a um mesmo participante?
Resposta: 10 perguntas.

c) Se um participante responder corretamente a todas as perguntas que lhe forem propostas, sendo esta a quantidade máxima, qual será sua premiação? Resposta: R$ 102 300,00

75. b) Resposta: $S_{10} = \frac{1 \cdot (1 - 2^{10})}{1 - 2} = \frac{1 - 2^{10}}{-1} = 2^{10} - 1 = 2 \cdot 2^9 - 1 = 2^9 + 2^9 - 1$

SÍNTESE DO CAPÍTULO

Neste capítulo, estudamos as progressões aritméticas e as progressões geométricas. Agora, chegou a hora de refletir sobre o que você aprendeu! Como estratégia de estudos, sugerimos que faça uma autoavaliação, revise conceitos e sintetize o que foi estudado. Para isso, resolva as questões propostas.

1. Você conhecia algum dos conteúdos estudados neste capítulo? Cite-os.
Resposta pessoal. Orientações sobre essa questão no **Suplemento para o professor**.

2. A seguir, estão apresentados os principais assuntos estudados neste capítulo.

2. Resposta pessoal. Orientações sobre essa questão no **Suplemento para o professor**.

- Progressão aritmética.
- Progressão geométrica.
- Fórmula do termo geral de uma progressão aritmética.
- Fórmula do termo geral de uma progressão geométrica.
- Soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética.
- Soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica.

Você teve dificuldade em algum deles? Não se lembra de algum desses conceitos? Ficou com dúvidas? Reflita sobre esses questionamentos e, se necessário, retome o que foi estudado.

7. a) Sugestão de resposta: Uma progressão aritmética é uma função, de domínio $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n, \ldots\}$, definida por $a(n) = a_1 + (n - 1)r$, em que a_1 é o primeiro termo da progressão, n é a ordem do termo e r é a razão.

7. b) Sugestão de resposta: Uma progressão geométrica é uma função, de domínio $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n, \ldots\}$, definida por $a(n) = a_1 \cdot q^{n-1}$, em que a_1 é o primeiro termo da progressão, n é a ordem do termo e q é a razão.

3. Defina uma sequência de números reais. Sugestão de resposta: Uma sequência de números reais é uma função $a\colon \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada número natural não nulo n um número real a_n.

4. Quais itens apresentam afirmações corretas? Resposta: Alternativas **b** e **d**.

a) Uma progressão geométrica de razão q e primeiro termo a_1 é crescente se $q > 1$ e $a_1 < 0$ ou $0 < q < 1$ e $a_1 > 0$.

b) Uma progressão aritmética de razão q é crescente se $q > 0$.

c) Uma progressão aritmética de razão q é constante se $q = 1$.

d) Uma progressão geométrica de razão q é alternante se $q < 0$.

5. Considere o algoritmo apresentado.

a) O que significa o valor de q nesse algoritmo?
Resposta: A razão de uma PG.

b) O que obtemos como resultado ao atribuir os valores de q, n e a_n e executar esse algoritmo?
Resposta: O primeiro termo de uma PG.

Início
1. Leia o valor de q.
2. Leia o valor de n.
3. Leia o n-ésimo termo (a_n).
4. Calcule $a_1 = \dfrac{a_n}{q^{n-1}}$.
Fim

10. Resposta pessoal. Antes de os estudantes elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos nas seções **Exercícios e problemas** deste capítulo e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

6. Escreva um algoritmo que possibilite calcular o primeiro termo de uma PA de razão r, dados o n-ésimo termo, o valor de n e a razão r. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

7. Reescreva as afirmações a seguir tornando-as verdadeiras.

a) Uma progressão aritmética é uma função, de domínio $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n, \ldots\}$, definida por $a(n) = a_1 + (n^2 - 1)r$, em que a_1 é o primeiro termo da progressão, n é a ordem do termo e r é a razão.

b) Uma progressão geométrica é uma função, de domínio $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n, \ldots\}$, definida por $a(n) = a_1 \cdot q^{n-1}$, em que a_1 é o primeiro termo da progressão, n é a ordem do termo e q é a razão.

8. Mostre que a soma S_n dos n primeiros termos de uma PA é $S_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2}$ em que a_n, a_1 e n indicam, respectivamente, o n-ésimo termo, o primeiro termo e a quantidade de termos.
Resposta no final do **Livro do Estudante**.

9. Ao adicionar os 25 primeiros termos da PG $(2, 4, 8, 16, \ldots)$, obtemos 33 554 432 como resultado? Justifique sua resposta. Sugestão de resposta: Não, pois o 25º termo dessa PG é 33 554 432 e, como todos os seus termos são positivos, a soma é maior do que 33 554 432.

10. Escolha um dos conteúdos estudados neste capítulo e elabore um problema envolvendo-o. Depois, troque com um colega para que ele o resolva. Por fim, verifique se a resposta obtida por ele está correta.

11. Faça uma síntese do que foi estudado neste capítulo, usando desenhos e dando exemplos.
Resposta pessoal. Orientações sobre essa questão no **Suplemento para o professor**.

CAPÍTULO

7

MATEMÁTICA FINANCEIRA

HANANEKO_STUDIO/SHUTTERSTOCK

Representação de um momento de controle familiar de gastos com o cartão de crédito.

Professor, professora: Explique aos estudantes sobre as facilidades de se realizar uma compra pela internet, como a comodidade em não precisar se deslocar até uma loja física e enfrentar filas; a possibilidade de comprar o que precisa a qualquer hora do dia, sem precisar se preocupar com o horário de fechamento do comércio; a viabilidade de se realizar a comparação de preços em diversos estabelecimentos, de maneira fácil e rápida, escolhendo o local mais acessível para efetivar a compra; entre outras. O cartão de crédito, débito em conta, boleto bancário e as carteiras digitais são os principais métodos de pagamento aceitos no comércio eletrônico. Se julgar conveniente, diga aos estudantes que a evolução da tecnologia fez com que os cartões de crédito se aprimorassem, garantindo mais segurança ao consumidor. Inicialmente feitos de papel, hoje em dia os cartões contam com um *chip* que guarda as informações e dificulta ao extremo o processo de clonagem.

Muitas pessoas utilizam atualmente o cartão de crédito em suas compras. Essa modalidade pode oferecer vantagens, como a opção pelo parcelamento, a participação em programas de recompensa e a construção de uma boa reputação financeira por meio de um histórico de créditos. Por outro lado, a possibilidade de gastar um dinheiro que ainda não foi recebido pode levar o consumidor a exagerar nos gastos e, consequentemente, ficar endividado.

A maneira mais comum de endividamento pelo cartão de crédito é o crédito rotativo, que acumula a dívida restante para o próximo mês sob o acréscimo de juros. Por exemplo, ao pagar o mínimo, estipulado em 10% do total, em uma fatura cujo valor total é R$ 1000,00, os R$ 900,00 restantes deverão ser pagos no mês seguinte acrescido de juros. Se a taxa de juros for 20% ao mês, o valor pago no mês seguinte será o da nova fatura adicionado aos R$ 1080,00 correspondentes à fatura do mês anterior.

A falta de educação financeira, o acesso facilitado ao crédito e os juros abusivos são fatores que contribuem para esse tipo de endividamento. Até 2023, cada banco definia o percentual dos juros cobrados sobre o crédito rotativo. Assim, o percentual cobrado por algumas instituições passava de 450% ao ano, valor considerado abusivo por especialistas. Em janeiro de 2024, entrou em vigor a Lei nº 14 690/2023, que determina que os juros cobrados sobre créditos rotativos não podem ultrapassar 100% da dívida original. Por exemplo, se R$ 1000,00 entram no crédito rotativo, o banco poderá cobrar, no total, outros R$ 1000,00 em juros e encargos.

A mudança na legislação foi importante para reduzir a cobrança de juros abusivos. Porém, é fundamental que o consumidor assuma uma postura de cautela e consciência ao usar o cartão de crédito, para evitar complicações financeiras.

Neste capítulo, você vai estudar:

- porcentagem;
- indicadores sociais;
- indicadores econômicos;
- acréscimos e descontos sucessivos;
- juro simples;
- juro composto;
- equivalência de capitais;
- sistema Price;
- planejamento orçamentário.

1. Resposta pessoal. Os estudantes podem mencionar como vantagem a possibilidade de parcelamento de itens que não teriam condições de adquirir à vista, a participação em clubes de vantagem, entre outras possibilidades. Como desvantagem, eles podem mencionar a possibilidade de endividamento, o fato de ficarem por muito tempo pagando um item que já pode ter sido consumido, entre outras possibilidades.

Professor, professora: Oriente os estudantes a escrever as respostas no caderno.

1. Cite uma vantagem e uma desvantagem para o consumidor referente ao uso do cartão de crédito.

2. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes mencionem a estipulação de um valor máximo mensal a ser gasto com cartão de crédito, a definição dos tipos de despesa, o uso de aplicativos de controle de gasto, entre outras iniciativas.

2. Converse com os colegas sobre estratégias para não cair em complicações financeiras por causa de compras com cartão de crédito.

3. Considere uma fatura de R$ 1000,00, que poderá ser paga somente após um ano de sua emissão. Calcule o valor desse pagamento considerando a taxa de 450% ao ano, estabelecida por alguns bancos antes da Lei 14 690/2023 e, depois, recalcule usando a taxa de 100%, definida após a nova legislação.

Resposta: Antes da lei, o valor pago após um ano seria R$ 5 500,00; depois da lei, deve ser R$ 2 000,00.

Estudando Matemática financeira

Você já parou para pensar como eram as relações comerciais quando não existia o dinheiro? Por muitos séculos, as pessoas utilizavam o **escambo** quando precisavam de alguma mercadoria, ou seja, para conseguir um produto, tinham de oferecer algo em troca a outro negociante, que, por sua vez, precisava estar disposto a realizar a troca. Essa necessidade mútua entre negociantes complicava, em muitos casos, as transações. De situações como essas, surgiram as primeiras moedas.

No mundo, existem diversas moedas, como o real no Brasil, o iene no Japão e o dólar nos Estados Unidos.

No Brasil, a fabricação das cédulas e moedas de real é de responsabilidade da Casa da Moeda do Brasil (CMB), que também controla o meio circulante nacional, correspondente a cédulas e a moedas metálicas.

Utilizar o dinheiro de maneira adequada, sabendo gastar mensalmente uma quantia menor do que a que se ganha, e poupar, se possível, alguma parte dessa remuneração são ações importantes para uma vida financeira equilibrada. Nesse sentido, é fundamental estudar porcentagem, acréscimo, desconto e juro, que são alguns elementos que compõem a chamada Matemática financeira.

Analise algumas situações envolvendo a Matemática financeira.

Quando tomamos um empréstimo, temos de pagar juro e outras despesas.

Quando compramos um produto, podemos obter descontos pagando à vista, ou acréscimos, pagando a prazo.

O não pagamento do valor total da fatura do cartão de crédito pode ocasionar uma grande dívida, pois nesse caso a taxa de juro costuma ser alta.

Ao poupar e realizar aplicações em instituições financeiras, recebemos juros.

Podemos frequentar um curso universitário em uma instituição particular fazendo um financiamento estudantil.

ILUSTRAÇÕES: HELOÍSA PINTARELLI/ARQUIVO DA EDITORA

Neste tópico, estudaremos várias situações que envolvem a Matemática financeira. Antes, porém, vamos relembrar alguns conceitos relacionados à porcentagem.

Escambo: troca de mercadorias sem uso de moeda.

Observação

É possível verificar a prática do escambo atualmente em algumas tradições de subsistência, como em comunidades ribeirinhas, quilombolas, indígenas, e em outros grupos que, por opção ou necessidade, vivem afastados dos grandes centros metropolitanos e não têm acesso fácil aos bens e serviços disponíveis no comércio contemporâneo. Em 2023, por exemplo, ribeirinhos de São Francisco do Mainã, no Amazonas, afetados por um grande período de estiagem e desabastecidos pela dificuldade de acesso das embarcações, recorreram ao escambo para manutenção da família e da comunidade local.

Estudando porcentagem

Professor, professora: Ao desenvolver o trabalho com esta página, solicite aos estudantes que pesquisem textos divulgados pela mídia nos quais seja possível identificar o conceito de porcentagem. É importante que eles interpretem esses textos, uma vez que a leitura e interpretação de situações variadas faz parte de sua formação e é fundamental para a construção do pensamento crítico.

Provavelmente, em anos anteriores, você estudou assuntos envolvendo porcentagem. Acompanhe a informação a seguir.

> Segundo o Comitê Gestor da Internet no Brasil, em 2023, 41 em cada 100 domicílios brasileiros tinham computador.

Fonte de pesquisa: https://data.cetic.br/cetic/explore/?idPesquisa5TIC_DOM. Acesso em: 12 abr. 2024.

Na informação apresentada, a relação "41 em cada 100" pode ser representada por uma fração cujo denominador é igual a 100, isto é, $\frac{41}{100}$. Essa fração também pode ser representada na forma decimal ou na forma percentual, que é 41% (lê-se: quarenta e um por cento).

$$\frac{41}{100} = 0{,}41 = 41\%$$

A razão entre um número real x e o número 100, indicado por $x\%$, é denominada **porcentagem** ou **taxa percentual**.

Exemplo 1

Em uma sala de aula do 3º ano do Ensino Médio há 25 estudantes, e desses, 12 são do sexo masculino. Como dos 25 estudantes 12 são do sexo masculino, obtemos a fração $\frac{12}{25}$. Para descrever essa fração na forma porcentual, podemos:

a) escrever uma fração equivalente com denominador igual a 100.

$$\frac{12}{25} = \frac{12 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{48}{100} = 48\%$$

b) escrevê-la na forma decimal.

$$\frac{12}{25} = 0{,}48 = 48\%$$

c) usar regra de três simples.

$$\frac{12}{25} = \frac{x}{100} \Rightarrow 25x = 1\,200 \Rightarrow x = 48$$

Portanto, a taxa percentual de estudantes do sexo masculino dessa sala é 48%.

Professor, professora: No item **a** do exemplo **1**, foi simples obter a fração equivalente a $\frac{12}{25}$ com denominador 100. No entanto, isso nem sempre acontece. Dessa maneira, diga aos estudantes que o modo mais conveniente para se obter a taxa percentual vai depender da situação.

Exemplo 2

O tanque de combustível de um carro, que tem capacidade para 45 L, estava cheio. Desse total, foram consumidos 18 L. Podemos determinar a taxa percentual do combustível consumido da seguinte maneira.

Como 18 L de 45 L foram consumidos, escrevemos a fração $\frac{18}{45}$. Assim:

$$\frac{18}{45} = 0{,}4 = \frac{40}{100} = 40\%$$

Portanto, a taxa percentual do combustível consumido é 40%.

Observação

Nesse caso, para escrever a fração $\frac{18}{45}$ na forma percentual, também poderíamos escrever uma fração equivalente com denominador igual a 100 ou utilizar regra de três simples.

Exemplo 3

A taxa do condomínio do prédio em que José mora custa R$ 512,00 por mês. Se for paga antes do vencimento, tem um desconto de 8% sobre esse valor. Podemos calcular o valor do condomínio que José irá pagar da seguinte maneira.

Calculando quantos reais correspondem a 8% do valor do condomínio, obtemos:

$$8\% \text{ de } 512, \text{ ou seja, } \frac{8}{100} \cdot 512 = 0{,}08 \cdot 512 = 40{,}96.$$

Subtraindo o valor obtido da taxa de condomínio, obtemos:

$$512 - 40{,}96 = 471{,}04$$

Outra maneira de fazer esse cálculo é considerar R$ 512,00 como 100%. Com o desconto, o valor passa a ser $100\% - 8\% = 92\%$. Realizando o cálculo, temos:

$$92\% \text{ de } 512, \text{ ou seja, } \frac{92}{100} \cdot 512 = 0{,}92 \cdot 512 = 471{,}04.$$

Portanto, José vai pagar R$ 471,04 de condomínio com o desconto.

OBJETO DIGITAL ***Infográfico clicável*: Elementos do cupom fiscal**

Exemplo 4

Fernanda pagou R$ 375,00 em uma prestação do financiamento de sua motocicleta, o que corresponde a 12% de seu salário. Podemos calcular o valor do salário de Fernanda da seguinte maneira.

Indicando por s o salário de Fernanda, calculamos 12% de s, ou seja:

$$\frac{12}{100} \cdot s = 375 \Rightarrow 12s = 37\,500 \Rightarrow s = \frac{37\,500}{12} \Rightarrow s = 3\,125$$

Portanto, o salário de Fernanda é R$ 3 125,00.

Exemplo 5

Uma biblioteca tem 30 000 livros em seu acervo, e a cada ano são adicionados 20% de novos livros. Podemos calcular a quantidade de livros daqui a três anos da seguinte maneira.

Sabendo que a quantidade de livros aumenta 20% ao ano, obtemos o percentual acumulado ao considerarmos três anos:

$$(1 + 0{,}20) \cdot (1 + 0{,}20) \cdot (1 + 0{,}20) = 1{,}728$$

Aplicando esse percentual acumulado sobre 30 000, temos:

$$30\,000 \cdot 1{,}728 = 51\,840$$

Portanto, em três anos, a quantidade de livros dessa biblioteca será 51 840.

Exemplo 6

Certo eletrodoméstico teve um reajuste de 3%, passando a custar R$ 590,00. Podemos calcular o valor desse eletrodoméstico antes do reajuste da seguinte maneira.

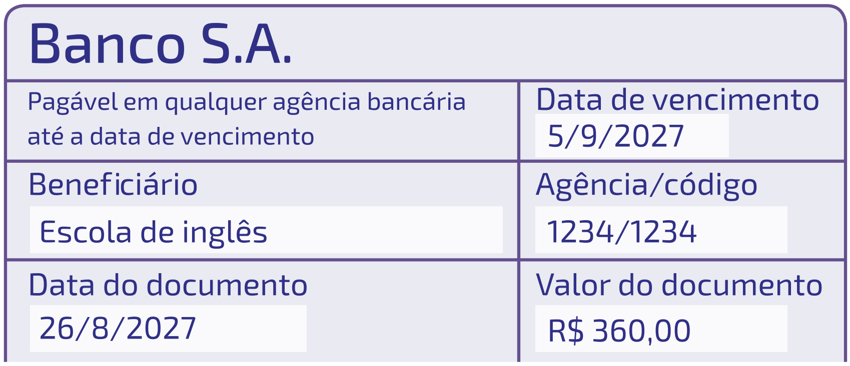
Indicando por x o preço do eletrodoméstico antes do reajuste, temos:

$$x + 3\%x = 590 \Rightarrow x + \frac{3}{100}x = 590 \Rightarrow \frac{103}{100}x = 590 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = \frac{59\,000}{103} \Rightarrow x \simeq 572{,}82$$

Portanto, o preço do eletrodoméstico antes do reajuste era aproximadamente R$ 572,82.

Exercícios e problemas resolvidos

R1. O valor da mensalidade de um curso de inglês no mês de setembro de 2027 está representado a seguir.



Banco S.A.	
Pagável em qualquer agência bancária até a data de vencimento	Data de vencimento 5/9/2027
Beneficiário Escola de inglês	Agência/código 1234/1234
Data do documento 26/8/2027	Valor do documento R$ 360,00

RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

No mês seguinte, o valor da mensalidade sofreu um acréscimo de 9%. Qual foi o valor da mensalidade após o acréscimo?

Resolução

Podemos calcular o valor da mensalidade após o acréscimo de duas maneiras.

1ª maneira: calculamos 9% do valor da mensalidade antes do acréscimo e, em seguida, adicionamos o valor obtido ao da mensalidade de setembro.

9% de 360, ou seja, $\frac{9}{100} \cdot 360 = 0{,}09 \cdot 360 = 32{,}4$.

$$360 + 32{,}4 = 392{,}4$$

2ª maneira: consideramos o valor da mensalidade antes do acréscimo como 100%, que, então, após o acréscimo passou a ser $100\% + 9\% = 109\%$. Por fim, calculamos 109% do valor antes do acréscimo.

109% de 360, ou seja, $\frac{109}{100} \cdot 360 = 1{,}09 \cdot 360 = 392{,}4$.

Portanto, o valor da mensalidade após o acréscimo foi R$ 392,40.

R2. Márcia paga mensalmente uma prestação correspondente a 5% do seu salário. Em certo mês, a prestação teve um desconto de 2,8%, e o salário de Márcia, um acréscimo de 8%. Nesse mês, a qual porcentagem do salário de Márcia correspondeu a prestação?

Resolução

Indicando por P_0 e S_0 os valores da prestação e do salário antes do desconto e do acréscimo, respectivamente, obtemos P_0 igual a 5% de S_0. Assim:

$$P_0 = \frac{5}{100} \cdot S_0 \Rightarrow \frac{P_0}{S_0} = \frac{5}{100}$$

Sejam P e S os valores da prestação e do salário após o desconto e o acréscimo, respectivamente. A prestação diminuiu 2,8%, e o salário aumentou 8%. Logo:

- P é igual a $\underbrace{97{,}2\%}_{100\% - 2{,}8\%}$ de P_0, ou seja, $P = \frac{97{,}2}{100} \cdot P_0$.
- S é igual a $\underbrace{108\%}_{100\% + 8\%}$ de S_0, ou seja, $S = \frac{108}{100} \cdot S_0$.

Desse modo, a razão entre o valor da prestação e do salário é:

$$\frac{P}{S} = \frac{\frac{97{,}2}{\cancel{100}} \cdot P_0}{\frac{108}{\cancel{100}} \cdot S_0} \Rightarrow \frac{P}{S} = \frac{97{,}2}{108} \cdot \underbrace{\frac{P_0}{S_0}}_{\frac{5}{100}} = \frac{P}{S} = \frac{97{,}2}{108} \cdot \frac{5}{100} \Rightarrow \frac{P}{S} = \frac{486}{10\,800} = 0{,}045 = 4{,}5\%$$

Portanto, nesse mês, o valor da prestação correspondeu a 4,5% do salário de Márcia.

R3. A fim de aumentar as vendas, certa loja fez uma promoção e ofereceu 30% de desconto sobre o preço de todos os produtos. Após essa promoção, alguns dos produtos não foram vendidos e, então, a loja aplicou um novo desconto de 15% sobre o preço promocional de cada um deles. Qual foi o desconto total aplicado sobre o preço dos produtos que não foram vendidos nessa promoção?

Resolução

Indicando por P_I, P_P e P_F o preço inicial, o preço promocional e o preço final do produto, respectivamente, temos:

- P_P é igual a $\underbrace{70\%}_{100\% - 30\%}$ de P_I, ou seja, $P_P = \frac{70}{100}P_I$;
- P_F é igual a $\underbrace{85\%}_{100\% - 15\%}$ de P_P, ou seja, $P_F = \frac{85}{100}P_P$.

Desse modo:

$$P_F = \frac{85}{100}P_P = \frac{85}{100} \cdot \frac{70}{100}P_I = \frac{5\,950}{10\,000}P_I = 0{,}595\,P_I = 59{,}5\%\,P_I$$

Como P_F é igual a $59{,}5\%\,P_I$, então o desconto total aplicado sobre os produtos que não foram vendidos na promoção foi:

$$P_I - 59{,}5\%\,P_I = 40{,}5\%\,P_I$$

Portanto, foi aplicado um desconto total de 40,5% sobre o preço dos produtos que não foram vendidos na promoção. Professor, professora: Ao trabalhar com as tarefas da seção **Exercícios e problemas**, sempre que julgar conveniente, oriente os estudantes a utilizar uma calculadora para efetuar os cálculos necessários.

1. a) Resposta: 30% 1. b) Resposta: 68% 1. c) Resposta: 14% 1. d) Resposta: 32% 1. e) Resposta: 12,5%

2. a) Resposta: 0,07 2. b) Resposta: 0,48 2. c) Resposta: 0,9 2. d) Resposta: 0,045 2. e) Resposta: 0,6138

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

1. Escreva cada fração na forma percentual.

a) $\frac{3}{10}$ b) $\frac{17}{25}$ c) $\frac{7}{50}$ d) $\frac{24}{75}$ e) $\frac{1}{8}$

2. Escreva cada porcentagem em sua forma decimal.

a) 7% b) 48% c) 90% d) 4,5% e) 61,38%

3. O gerente de uma fábrica de peças de automóvel registrou que, de 60 peças produzidas por minuto, três apresentam defeitos. Qual é a taxa de peças defeituosas dessa fábrica? Resposta: 5%

4. O Índice Geral de Preços do Mercado (IGP-M) é o índice utilizado para o cálculo do reajuste de aluguéis de imóveis.

a) O aluguel do apartamento em que Roberto mora será reajustado de acordo com esse índice, que, no período considerado, foi 11,32%. Sabendo que Roberto paga R$ 925,00 de aluguel, qual deverá ser o novo valor após o reajuste? Resposta: R$ 1029,71

b) Nem todas as pessoas têm casa própria ou condições de pagar aluguel de sua moradia. Em alguns casos, indivíduos em extrema pobreza acabam em situação de rua e sem acesso às condições mínimas de qualidade de vida. Em sua opinião, o que poderia ser feito para que todos os cidadãos tivessem direito a moradia? 4. b) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes apresentem diversas sugestões como: políticas públicas que melhorem as condições de subsistência da população e minimizem as desigualdades sociais, gerando mais emprego e favorecendo oportunidades de renda e de saúde iguais para todos.

5. Na compra de uma embalagem com dois desodorantes, um supermercado oferece a seguinte promoção.

LEONARDO GIBRAN/ARQUIVO DA EDITORA

Se um desodorante custa R$ 15,60, quantos reais uma pessoa pagará se comprar, nessa promoção, duas dessas embalagens? Resposta: R$ 43,68

6. Em uma loja de roupas e acessórios femininos, 45% dos produtos são calçados e, entre os calçados, 60% têm salto alto. 6. a) Resposta: 540 são calçados.

a) Sabendo que a loja tem 1200 produtos ao todo, quantos deles são calçados?

b) Entre os calçados dessa loja, quantos têm salto alto? Resposta: 324 calçados.

7. O valor do **meio circulante** no Brasil no dia 4 de abril de 2024 era R$ 332 393 398 554,14. No dia seguinte, o meio circulante brasileiro contabilizou R$ 332 196 699 532,14. Resposta: Alternativa **c**.

> **Meio circulante:** moeda em espécie (cédulas de notas e moedas metálicas) efetivamente disponível em circulação entre a população e nas agências bancárias.

Essa diferença indica que entre esses dois dias ocorreu, no valor do meio circulante:

a) um aumento entre 0,5% e 1%.

b) um aumento entre 1% e 2%.

c) uma redução entre 0% e 0,1%.

d) uma redução entre 1% e 2%.

e) um aumento entre 1% e 1,5%.

8. Um comerciante tem um lucro de 60% sobre o preço de custo de um produto. No último mês, ele vendeu 47 unidades desse produto e arrecadou R$ 5 113,60. Qual é o preço de custo de cada unidade desse produto? Resposta: R$ 68,00

9. Dos 240 colaboradores de uma empresa, 80% concluíram o Ensino Médio e 20%, o Ensino Superior. Devido à alta demanda de trabalho, essa empresa contratou 80 novos colaboradores, todos com Ensino Superior completo. Sabendo que nenhum colaborador foi demitido ou pediu dispensa, determine quantos por cento do novo total de colaboradores têm Ensino Superior completo.
Resposta: 40%

10. O salário de Marcos é 8% maior do que o salário de Bruno. Sabendo que no próximo mês Marcos receberá um aumento de 25% sobre o valor de seu salário, determine quantos por cento seu salário será maior do que o de Bruno. Resposta: Alternativa **e**.

a) 25%

b) 31%

c) 32%

d) 33%

e) 35%

11. Antes de concluir a compra de um *notebook*, Marisa realizou uma pesquisa de preços de um mesmo modelo em duas lojas.

- Loja **A**: R$ 2 290,00 com desconto de 6% no pagamento à vista.
- Loja **B**: R$ 2 350,00 com desconto de 15% no pagamento à vista.

Em qual das duas lojas é mais vantajoso Marisa realizar a compra à vista? Nessa loja, quantos reais ela vai pagar pelo *notebook*?
Resposta: Na loja **B**; R$ 1 997,50

12. Uma revendedora de automóveis usados tem um lucro de 12% por automóvel vendido sobre o preço de venda. Supondo que em uma venda ela obtenha lucro de R$ 2 520,00, por quantos reais foi vendido esse automóvel? Resposta: R$ 21 000,00

13. Guilherme fez a prova de um concurso público, mas não foi aprovado. Analise a seguir o seu desempenho. Professor, professora: Os dados informados na tabela são fictícios.

Quantidade de questões que Guilherme acertou no concurso público, em 2023

Tema	Quantidade de questões	Quantidade de acertos
Conhecimentos gerais	12	8
Informática	13	7
Matemática	15	9
Português	10	6

Fonte de pesquisa: Avaliadores do concurso.

13. b) Resposta: Conhecimentos gerais; Informática.

a) Quantos por cento das questões da prova ele acertou? Resposta: 60%

b) Em qual tema Guilherme obteve o melhor desempenho? E o pior desempenho?

c) Em seus estudos, a qual tema Guilherme deve se dedicar mais para tentar ser aprovado no próximo concurso? Por quê?

d) Se você fosse prestar um concurso público, quais seriam as atitudes mais importantes no momento do estudo? Por quê? Sugestão de resposta: Focar os estudos nos conteúdos que tiver menos conhecimento.

14. André e Mia estão jogando *videogame*. Ao final da segunda fase, Mia estava com 15 pontos a menos do que André. Analisando as pontuações, ela percebeu que, se aumentasse em 5% seus pontos, ficaria com 25 pontos a mais do que André. Qual era a pontuação de André ao final da segunda fase? Resposta: 815 pontos.

15. O preço de uma motocicleta, que custava R$ 12 000,00, teve um aumento de 25%. Devido à queda nas vendas por causa do aumento, o preço dessa motocicleta sofreu uma redução, voltando a custar o mesmo que antes do aumento.

a) Qual foi o preço dessa motocicleta após o aumento? Resposta: R$ 15 000,00

b) Qual foi a taxa aplicada para que o preço da motocicleta voltasse a ser o mesmo de antes do aumento? Resposta: 20%

c) As taxas de aumento e redução foram iguais? Justifique sua resposta.

16. Em um pequeno município, foram computados 10 300 votos para a eleição de prefeito. O candidato da situação (do mesmo partido político do atual prefeito) obteve 32% dos votos, e o candidato da oposição obteve 41% dos votos.

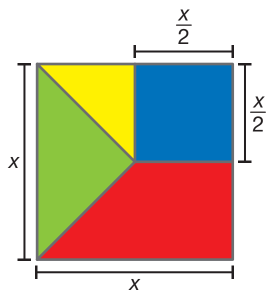
Quantos votos de diferença houve entre esses dois candidatos? Resposta: 927 votos.

13. c) Resposta: Informática. Sugestão de resposta: Nesse tema, ele obteve o pior desempenho.

15. c) Resposta: Não, pois R$ 3 000,00 correspondem a uma taxa de 25% referente a R$ 12 000,00 e a uma taxa de 20% referente a R$ 15 000,00.

17. A diferença entre dois números naturais é 40. Adicionando 30% do maior número com 60% do menor número obtemos 75. Quais são esses números?
Resposta: 110 e 70

18. O logotipo de uma empresa pode ser formado por um símbolo que representa sua marca, indicando os serviços ou produtos que comercializa. Muito utilizado em anúncios, é um modo de tornar a empresa conhecida. Analise o logotipo, em formato de quadrado, de determinada escola infantil.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

a) Quantos por cento do total representa a parte amarela? E a parte verde? Resposta: 12,5%; 25%

b) Em relação à parte azul, a parte vermelha corresponde a quantos por cento a mais?
Resposta: 50%

19. O gerente de uma loja concedeu um desconto de 10% em certa mercadoria que custava R$ 40,00. Devido ao grande volume de vendas dessa mercadoria, o preço sofreu um acréscimo de 11%. Podemos afirmar que o preço final dessa mercadoria, em relação ao preço inicial: Resposta: Alternativa **c**.

a) aumentou R$ 0,40.
b) não sofreu alteração.
c) diminuiu R$ 0,04.
d) aumentou R$ 0,04.
e) diminuiu R$ 0,40.

20. Pedro vende empadas de frango, de creme de milho e de palmito. Analise algumas informações sobre as vendas de fevereiro.

- Ao todo, foram vendidas 582 empadas.
- Foram vendidas 90 empadas de frango a mais que de palmito.
- A quantidade de empadas de creme de milho vendida foi 40% da quantidade de empadas de frango vendida.

Quantas empadas de cada sabor Pedro vendeu nesse mês? Resposta: Frango: 280 empadas; creme de milho: 112 empadas; palmito: 190 empadas.

21. Para produzir uma encomenda de certo tipo de parafuso, uma indústria colocou em funcionamento duas de suas máquinas. Da quantidade total, a máquina **A** produziu 60%, e a **B**, 40%. Sabendo que as máquinas **A** e **B** produzem, respectivamente, 1% e 3% de parafusos defeituosos, determine a porcentagem de parafusos defeituosos dessa encomenda. Resposta: 1,8%

22. Em uma negociação salarial entre o sindicato de uma categoria e as empresas, verificou-se que, se o piso salarial aumentasse 7%, passaria a ser R$ 2 011,60. Mas, se o aumento for de 13%, qual será o piso salarial dessa categoria?
Resposta: R$ 2 124,40

23. (Enem, 2003) O tabagismo (vício do fumo) é responsável por uma grande quantidade de doenças e mortes prematuras na atualidade. O Instituto Nacional do Câncer divulgou que 90% dos casos diagnosticados de câncer de pulmão e 80% dos casos diagnosticados de **enfisema pulmonar** estão associados ao consumo de tabaco. Paralelamente, foram mostrados os resultados de uma pesquisa realizada em um grupo de 2 000 pessoas com doenças de pulmão, das quais 1 500 são casos diagnosticados de câncer e 500 são casos diagnosticados de enfisema.

Com base nessas informações, pode-se estimar que o número de fumantes desse grupo de 2 000 pessoas é, aproximadamente: Resposta: Alternativa **e**.

a) 740 b) 1 100 c) 1 310 d) 1 620 e) 1 750

Enfisema pulmonar: doença caracterizada pela perda da elasticidade da musculatura pulmonar, geralmente causada por uma irritação prolongada.

Observação

De acordo com a ONU, o risco de desenvolver formas graves de certas doenças, como enfisema pulmonar e COVID-19, aumenta consideravelmente em pessoas fumantes. Respeite a vida! Não fume!

24. Nicolo Tartaglia nasceu em Brescia (1499) e faleceu em Veneza (1557), na Itália. Devido a um ferimento no céu da boca, era conhecido como “o gago”. Entre suas produções matemáticas, esse matemático escreveu o que se considera a melhor Aritmética do século XVI, contendo discussões de operações numéricas e Aritmética mercantil de seu tempo.

Fonte de pesquisa: EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. 2. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2004. p. 307-308.

Tartaglia, propôs o problema a seguir, que envolve transações financeiras entre moedas distintas.
Resposta: Aproximadamente 463,30 liras de Módena.

> [...]
>
> Se 100 liras de Módena equivalem a 115 liras de Veneza, 180 liras de Veneza valem 150 em Corfu, e 240 liras de Corfu montam a 360 liras de Negroponte, por quantas liras de Módena se cambiam 666 de Negroponte?
>
> [...]
>
> EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. 2. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2004. p. 322.

Resolva o problema proposto por Tartaglia.

A profissão de contador

Como vimos, o juro é um tipo de "aluguel" que uma instituição financeira ou pessoa pode pagar ou receber ao emprestar dinheiro. Quando uma empresa ou pessoa recorre a essas instituições para fazer um empréstimo, o contador é o profissional que pode orientá-las a respeito dos juros cobrados sobre o valor emprestado, por exemplo, contribuindo para cuidar da saúde financeira da empresa ou do indivíduo. Você já tinha ouvido falar nessa profissão?

O contador é um profissional essencial para o bom funcionamento e o desenvolvimento de uma organização. Assim, quando uma pessoa opta por abrir uma empresa, o contador pode auxiliá-la com orientações sobre os diferentes tipos de impostos cobrados no município, no estado e no país. Além disso, no dia a dia, por meio de balanços, o contador apresenta resultados financeiros que contribuem para que o empresário escolha as melhores estratégias de negócio e para que tome decisões relacionadas à redução de custos.

Outra função do contador é prestar assessoria trabalhista, calculando os impostos a serem recolhidos, como o Fundo de Garantia do Tempo de Serviço (FGTS) e as guias de recolhimento da Previdência Social (INSS), bem como a produção e o cálculo da folha de pagamento dos funcionários. Em geral, os contadores podem trabalhar em escritórios de contabilidade, empresas ou até mesmo em repartições públicas. Atualmente, a profissão de contador tem um dos maiores índices de empregabilidade no Brasil, chegando a cerca de 94%, ou seja, é uma profissão com considerável oferta de trabalho.

DRAZEN ZIGIC/SHUTTERSTOCK

Muitos contadores atuam em conjunto com outros profissionais, como economistas e administradores.

Observação

Para se tornar um contador é preciso que os interessados na profissão sejam graduados em Ciências Contábeis em alguma das instituições de Ensino Superior reconhecidas pelo Ministério da Educação (MEC). Além disso, após a finalização do curso, o profissional precisa se credenciar no Conselho Regional de Contabilidade (CRC) da região em que vive.

1. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes comentem se houve identificação deles com a profissão ou não. Em caso afirmativo, incentive-os a compartilhar com os colegas os aspectos da profissão que mais chamaram sua atenção, a ponto de ser uma opção como carreira profissional a ser seguida. Aos que não se identificaram, peça-lhes que expliquem o motivo, esclarecendo os diferentes pontos de vista e promovendo a valorização e o acolhimento dessas diferenças.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

Oriente os estudantes a escrever as respostas no caderno.

1. Você se identificou com a profissão de contador? Converse com os colegas.

2. De acordo com as informações do texto, por que o contador é um profissional essencial para o bom funcionamento e o desenvolvimento de uma empresa?

3. Junte-se a mais dois colegas e montem um grupo para entrevistar um contador do município. Durante a entrevista, atentem para o que ele desenvolve na empresa e para a rotina de trabalho dele (referente aos prazos diários, semanais e mensais). Em sala de aula, apresentem os resultados da pesquisa aos colegas. Resposta pessoal. O objetivo desta tarefa é aproximar os estudantes do dia a dia do profissional de Ciências Contábeis, bem como favorecer o trabalho em grupo, pois cada estudante pode se responsabilizar por uma etapa da entrevista.

2. Resposta: De acordo com o texto, o contador é o profissional que pode orientar o processo de abertura de uma empresa, fornecendo informações sobre a tributação de impostos municipais, estaduais e federais. Além disso, ele oferece assessoria trabalhista e apresenta resultados financeiros por meio de balanços, contribuindo para a tomada de decisões dos gestores da empresa.

DESENVOLVIMENTO SUSTENTÁVEL

Gerando energia elétrica renovável

Professor, professora: Oriente os estudantes a consultar mais informações sobre os **Objetivos de Desenvolvimento Sustentável** (ODS) no início deste volume.

ODS 7

Você já ouviu falar em fontes renováveis e em fontes não renováveis de energia e de que maneira elas podem ser usadas para gerar energia elétrica?

As fontes renováveis são aquelas que não se esgotam no ambiente, pois os recursos dos quais dependem são capazes de se renovar naturalmente a um ritmo igual ou superior ao de seu uso, como é o caso da luz solar, da água, do ar e do solo.

As fontes não renováveis de energia, por sua vez, são aquelas que dependem de recursos que podem se esgotar, pois não se renovam no ambiente a um ritmo igual ou superior ao seu uso. O petróleo, por exemplo, demora milhões de anos para se renovar na natureza, por isso é considerado uma fonte não renovável de energia. Outros exemplos de fontes de energia não renováveis são a fóssil, composta de gás natural, carvão mineral e derivados de petróleo, e a nuclear, que gera energia a partir da fissão nuclear.

Além de se esgotarem, o uso das fontes não renováveis para gerar energia elétrica pode causar diversos problemas ambientais. A queima do carvão mineral para gerar energia, por exemplo, libera gases poluentes na atmosfera, contribuindo para o aumento do aquecimento global.

A **matriz elétrica** brasileira, no entanto, tem indicado crescimento nos últimos anos, em razão da expansão das fontes de energia renovável, como a eólica e a solar. De acordo com a Agência Nacional de Energia Elétrica (Aneel), a matriz elétrica do Brasil cresceu 3,3 GW até o mês de abril de 2023, com participação expressiva das usinas solares fotovoltaicas, com 37,19% na capacidade instalada.

Matriz elétrica: conjunto de fontes disponíveis apenas para geração de energia elétrica.

A instalação das placas fotovoltaicas costuma ter custo elevado e a fabricação delas depende de recursos que podem se esgotar no ambiente, como o silício e outros minérios. Apesar disso, a geração de energia depende prioritariamente da luz solar, um recurso natural renovável, que é considerado uma fonte limpa, por não poluir o meio ambiente. Confira a seguir como é possível transformar a luz solar em energia elétrica.

JOA SOUZA/SHUTTERSTOCK

A. A energia elétrica é gerada por meio da luz solar nos chamados painéis solares ou fotovoltaicos.

B. Para melhorar sua eficiência, esses painéis devem ser instalados em locais com alta incidência de luz solar e posicionados em determinada inclinação, como em telhados de residências e estabelecimentos comerciais, em estacionamentos e no chão.

Placas fotovoltaicas instaladas na fazenda de produção de energia, em Oliveira dos Brejinhos, Bahia, retratadas em junho de 2023.

3. b) Resposta pessoal. A respeito dos benefícios para o meio ambiente, espera-se que os estudantes expliquem que a energia solar depende prioritariamente de uma fonte renovável de energia, a luz solar, não emitindo poluentes na atmosfera. Por isso, é considerada uma fonte limpa.*

PABLO COZZAGLIO/AFP

C. Existem também as chamadas usinas heliotérmicas, que utilizam o calor do Sol para aquecer a água, transformando-a em vapor capaz de girar uma turbina, que, por sua vez, também gera energia elétrica.

*Além disso, sua instalação não demanda ocupação nem destruição de grandes áreas de ecossistemas. Sobre as vantagens econômicas, os estudantes podem mencionar que, embora a instalação dos painéis fotovoltaicos tenha custo elevado, os painéis ou as placas utilizadas na produção de energia têm baixo custo de manutenção. A tecnologia empregada também permite alimentar o sistema elétrico de lugares afastados de grandes centros urbanos, por exemplo, permitindo que a geração de energia alcance comunidades instaladas em locais remotos.

Vista aérea da primeira usina termossolar da América Latina, em Antofagasta, no Chile, retratada em 2023.

As usinas hidrelétricas representam a maior participação na matriz elétrica nacional. Você sabia disso? Nesse tipo de usina, a energia elétrica é gerada por meio do movimento da água. Embora seja uma fonte de energia renovável, a instalação de uma usina hidrelétrica causa grandes impactos sociais e ambientais, pois depende do alagamento da região onde será instalada, forçando a migração de comunidades que vivem no entorno e resultando no desaparecimento da fauna e da flora local.

3. a) Sugestões de resposta: Além de agravar o problema do aquecimento global, a liberação de gases poluentes na atmosfera por meio da queima de combustíveis fósseis causa problemas como o aumento do efeito estufa e as diversas alterações climáticas. O processo de geração de energia nas usinas termonucleares apresenta riscos ao ambiente e aos seres humanos, pois, além de produzir resíduos radioativos, pode ocasionar acidentes. Essas fontes também se originam de reservas naturais finitas e o seu uso indiscriminado pode levar ao esgotamento no decorrer do tempo.

Barragem da Usina Hidrelétrica de Belo Monte, localizada no rio Xingu, município de Altamira, PA, em 2024.

PARALAXIS/ISTOCK/GETTY IMAGES

Professor, professora: Oriente os estudantes a escrever as respostas no caderno.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

1. Resposta pessoal. Oriente os estudantes a compartilhar o que sabem do tema com os colegas. Caso necessário, mencione outros exemplos de fontes renováveis de energia, como a biomassa, que gera os biocombustíveis, e a geotérmica, uma energia gerada pelo calor do interior do planeta Terra e que é mais comum em outros países, como nos Estados Unidos e na Indonésia.

1. Você conhece outras fontes renováveis de energia além das mencionadas no texto? Conte aos colegas.

2. Qual é a relação entre o crescimento da matriz elétrica brasileira no ano de 2023 e as usinas solares e eólicas? Qual é o valor correspondente em megawatts (MW) da participação das usinas elétricas fotovoltaicas nesse crescimento? Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes expliquem que a matriz elétrica brasileira cresceu no ano de 2023 justamente por conta da expansão das fontes de energia renovável, por meio das usinas solares fotovoltaicas e das usinas eólicas. O valor em megawatts (MW) da participação das usinas elétricas fotovoltaicas é de 1 243,4 MW.

3. Junte-se a um colega e pesquisem os seguintes assuntos:

a) Prejuízos causados ao meio ambiente pelo uso das fontes não renováveis de energia.

b) Benefícios do uso da energia solar, incluindo a questão ambiental e econômica.

Em seguida, escreva um texto explicando de que maneira a energia solar pode contribuir para assegurar o acesso à energia de modo sustentável e com preço acessível para todos, conforme o **Objetivo 7** da Agenda 2030. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes relacionem os benefícios e as vantagens da energia solar ao Objetivo 7 da Agenda 2030, uma vez que seu uso, em detrimento das fontes não renováveis de energia elétrica, possibilita a participação do Brasil na matriz energética global por meio de energias renováveis, pois é uma energia limpa e sustentável.

Indicadores econômicos

Alguns indicadores econômicos, como a taxa de inflação, o PIB e a taxa de desemprego, servem como diagnóstico do desempenho e de possíveis problemas no cenário econômico, norteando propostas governamentais para melhorias.

Taxa de inflação

O aumento persistente e generalizado dos preços de bens e serviços é conhecido como **inflação**. Altas taxas de juro, desequilíbrio da balança de pagamentos, emissão de moeda para cobrir **déficit** público, aumento de preços e altos custos de produção são algumas causas desse crescimento desproporcional, que pode gerar desequilíbrio na economia de um país.

Déficit: saldo negativo entre a receita e a despesa em um orçamento.

Professor, professora: O assunto explorado nesta página apresenta uma abordagem com aplicação matemática prática na área da Economia. Peça aos estudantes que leiam o texto e respondam às questões propostas. Caso tenham dificuldade, promova uma roda de conversa com a turma para fomentar a discussão. Informe aos estudantes que o público-alvo do IPCA abrange as famílias com rendimentos mensais entre um e quarenta salários mínimos, qualquer que seja a fonte de rendimentos, e residentes nas áreas urbanas das regiões pesquisadas. Já o INPC abrange as famílias com rendimentos mensais entre um e seis salários mínimos, sendo a pessoa de referência assalariada em sua ocupação principal e residente nas áreas urbanas das regiões pesquisadas. Explique também que o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) é o órgão responsável por realizar essas medições.

A inflação é calculada pelos índices de preço, popularmente chamados índices de inflação, e o índice oficial utilizado pelo governo brasileiro é o Índice de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA). Como o IPCA se baseia em uma cesta padrão constituída com base em uma amostra da população brasileira, é possível que ocorram diferentes **índices pessoais de inflação**. Por exemplo, uma família que usa com pouca frequência o transporte público ou o veículo próprio pode ter um índice pessoal de inflação diferente do oficial, que atribui peso significativo ao custo com transportes.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

QUANTO MENOR A INFLAÇÃO, MAIS SE CONSOME.

QUANTO MAIOR A INFLAÇÃO, MENOS SE CONSOME.

Vamos analisar, por exemplo, o índice pessoal de preços de uma família e compará-lo ao IPCA. Para isso, considere a seguinte situação.

Os gastos aproximados de uma família com produtos e serviços em dezembro de 2021 foi R$ 3 427,00 e, em dezembro de 2022, R$ 3 629,00. Considerando que a taxa de inflação em 2022, segundo o IPCA, foi 5,79%, vamos verificar se o índice pessoal de inflação dessa família se aproximou do índice oficial.

- Inicialmente, calculamos o aumento dos gastos, em reais, de um ano em relação ao outro.

$$\text{R\$ } 3\,629{,}00 - \text{R\$ } 3\,427{,}00 = \text{R\$ } 202{,}00$$

- Utilizando a regra de três simples, obtemos o índice pessoal de preços dessa família.

$$\frac{202}{3\,427} \simeq 0{,}0589 = 5{,}89\%$$

O índice pessoal de preços dessa família se aproximou do índice oficial, que foi 5,79% em 2022.

Questão A. Em 2023, os gastos aproximados de uma família aumentaram de R$ 3 557,00 para R$ 3 835,00, e o IPCA nesse ano foi 4,62%. Determine se o índice pessoal de inflação dessa família ficou próximo do índice oficial. Resposta: Não se aproximou do índice oficial, pois o índice pessoal de preços dessa família ficou em torno de 7,8%, enquanto o índice oficial foi 4,62%, representando uma diferença de, aproximadamente, 3,18%.

Professor, professora: Explique aos estudantes que, além dos índices citados no texto, há outros que medem a inflação. O IBGE, por exemplo, considera outros quatro índices de inflação, a saber, Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo 15 (IPCA-15), Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo Especial (IPCA-E), Índice de Preços ao Produtor – Indústrias Extrativas e de Transformação (IPP) e Sistema Nacional de Pesquisa de Custos e Índices da Construção Civil (SINAPI). Há ainda instituições de pesquisa que consideram o Índice Geral de Preços (IGP) e o Índice de Preços ao Consumidor (IPC).

PARA EXPANDIR

O IBGE fornece uma calculadora que permite atualizar um valor pela variação do Índice de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA) entre duas datas. Disponível em: https://www.ibge.gov.br/explica/inflacao.php. Acesso em: 28 jun. 2024.

Produto Interno Bruto

Professor, professora: Ao trabalhar com este tópico, informe aos estudantes que o PIB é considerado o principal indicador macroeconômico de um município, estado ou país. Ao final desse tópico, os estudantes devem compreender que o PIB é um importante referencial para o desempenho econômico, mas também que ele não mede o nível de desenvolvimento de um país.

O **Produto Interno Bruto** (PIB) é a soma de todos os bens e serviços produzidos por um país, estado ou cidade, em determinado período de tempo (geralmente, um ano ou um trimestre). Para efetuar o cálculo do PIB, são utilizados os preços de mercado, ou seja, os preços que os consumidores estão dispostos a pagar.

A fim de evitar contagens duplas, o PIB mede apenas os bens e serviços finais. Por exemplo, se considerarmos a produção de R$ 100,00 de cana-de-açúcar e de R$ 250,00 de etanol – ao preço pago pelo consumidor –, o PIB será R$ 250,00, pois o valor da cana-de-açúcar está incluído no valor do etanol.

ILUSTRAÇÕES: LEONARDO GIBRAN/ARQUIVO DA EDITORA

Já a cana-de-açúcar exportada é um **bem final** e, consequentemente, considerada no cálculo do PIB.

Bem final: refere-se ao bem que já está disponível para o consumidor.

No cálculo do PIB, são considerados apenas os produtos comercializados por empresas. Nesse caso, não são considerados itens produzidos ilegalmente nem itens produzidos para consumo próprio ou para o usufruto de conhecidos. Além disso, não são incluídas vendas entre familiares, como uma motocicleta vendida a um irmão.

Observação

O cálculo do PIB é muito complexo e envolve uma série de dados estatísticos sobre empresas, pessoas físicas, investimentos públicos, destino de importações e exportações, entre outros. No Brasil, o órgão responsável por esse cálculo é o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE).

Leia parte de uma notícia relacionada ao PIB do Brasil.

> **Desempenho do PIB no primeiro trimestre de 2024**
>
> Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), o produto interno bruto (PIB) avançou 0,8% no primeiro trimestre de 2024, na comparação com o período imediatamente anterior, já livre de efeitos sazonais, sucedendo dois trimestres de crescimento virtualmente nulo. Na comparação interanual, o resultado também foi positivo, com alta de 2,5% sobre o primeiro trimestre de 2023. [...]
>
> CARVALHO, Leonardo Mello de; SANTOS, Claudio Hamilton Matos dos. Desempenho do PIB no primeiro trimestre de 2024. *Carta de Conjuntura*, 6 jun. 2024. Disponível em: https://www.ipea.gov.br/cartadeconjuntura/index.php/2024/06/desempenho-do-pib-no-primeiro-trimestre-de-2024/. Acesso em: 10 jul. 2024.

O PIB ajuda a compreender um país, mas não expressa fatores importantes, como a distribuição de renda, a qualidade de vida e a educação. Em tópicos seguintes, serão estudados indicadores que ajudam a compreender alguns desses fatores sociais.

PIB *per capita*

O PIB *per capita* de um país ou território é dado pela divisão entre o PIB desse país ou território e sua população. Esse indicador expressa o nível médio de riquezas de bens ou serviços da população do país ou território em determinado período.

Vamos determinar, por exemplo, o PIB *per capita* do Brasil em 2022. Nesse ano, a população brasileira era aproximadamente 203 080 756 habitantes e o PIB nacional, 9,9 trilhões de reais. Desse modo, o PIB *per capita* é:

$$\frac{9{,}9 \cdot 10^{12}}{203\,080\,756} \simeq 48\,749{,}08$$

Nesse caso, podemos dizer que, considerando o ano de 2022, o nível médio de riquezas de bens ou serviços da população brasileira era aproximadamente R$ 48 749,08.

Questão B. Faça uma pesquisa para saber qual é o PIB e a população do município onde você vive, em determinado ano. Em seguida, determine o PIB *per capita* desse município no ano considerado. Resposta pessoal. A resposta depende do município onde o estudante reside.

Observação

De modo geral, regiões ou países com PIB *per capita* elevado costumam apresentar também melhores indicadores de desenvolvimento e de qualidade de vida, devido ao crescimento da renda da população. Porém, em algumas situações, se um país ou região apresenta um PIB *per capita* muito grande, mas concentrado em uma pequena parte da população, a situação econômica e social da maioria das pessoas não é boa. O nome disso é desigualdade.

Taxa de desemprego

Leia parte de uma reportagem.

> A **taxa anual de desocupação** do país foi de 7,8% em 2023, o que representa uma queda de 1,8 ponto percentual (p.p.) frente à média do ano anterior. Regionalmente, 26 das 27 unidades da federação (UFs) registraram queda nesse indicador, com destaque para o Acre (-4,9 p.p.), o Maranhão (-3,5 p.p.) e o Rio de Janeiro e Amazonas (ambos -3,2 p.p.). Por outro lado, o único estado onde a taxa de desocupação cresceu foi Roraima (1,7 p.p.).

PNAD Contínua Trimestral: em 2023, taxa anual de desocupação cai em 26 UFs. *Agência IBGE notícias*, 16 fev. 2024. Disponível em: https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-sala-de-imprensa/2013-agencia-de-noticias/releases/39206-pnad-continua-trimestral-em-2023-taxa-anual-de-desocupacao-cai-em-26-ufs. Acesso em: 10 jul. 2024.

É comum nos depararmos com notícias que apresentam informações a respeito da **taxa de desemprego** atual no Brasil, quase sempre comparada a dados de períodos anteriores, o que ajuda a analisar e prever situações que influenciam o desenvolvimento socioeconômico do país.

De modo resumido, a taxa de desemprego ou "taxa de desocupação" é o percentual da população residente economicamente ativa que se encontra sem trabalho e da população que gostaria de ter um emprego mas não procura porque lhe falta qualificação ou que não esteja procurando emprego no período de referência, em determinado espaço geográfico, no ano considerado.

Observação

Define-se como população economicamente ativa (PEA) o contingente de pessoas de 16 anos ou mais que está trabalhando ou procurando trabalho.

Fonte de pesquisa: https://www.ibge.gov.br/apps/snig/v1/?loc=0&cat=128,-1,1,2,-2,-3&ind=4726. Acesso em: 17 jul. 2024.

Exemplo

Sabendo que no ano da reportagem apresentada a população economicamente ativa era 109,2 milhões, para determinar a população desocupada, calculamos 7,8% de 109,2 milhões.

$$0{,}078 \cdot 109\,200\,000 = 8\,517\,600$$

Portanto, no Brasil, a população desocupada no período da reportagem era aproximadamente 8,5 milhões de pessoas.

Indicadores sociais

Junto aos indicadores econômicos, os indicadores sociais, como o Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) e o coeficiente de Gini – que mede o índice de desigualdade social –, formam um conjunto significativo de informações que possibilita analisar a qualidade de vida e bem-estar da população, o acesso a bens e serviços, a concretização de direitos humanos e sociais, as desigualdades e suas consequências na realidade social, para que possam ser implementadas políticas públicas.

Índice de Desenvolvimento Humano

Diferentemente dos indicadores com objetivos voltados à economia, como o PIB, o **Índice de Desenvolvimento Humano** (IDH) está voltado às pessoas, suas capacidades e oportunidades. Divulgado anualmente desde 1990 pelo Relatório de Desenvolvimento Humano (RDH), o índice mede o progresso do desenvolvimento com base em três dimensões: **saúde**, **educação** e **renda.**

Observação

O IDH é publicado pelo Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento (PNUD).

Dimensões e indicadores para medir o IDH

Dimensão Saúde (I_S: Índice de saúde)

Indicador: Expectativa de vida ao nascer.

Dimensão Educação (I_E: Índice de educação)

Indicador 1: Taxa de alfabetização de pessoas com 15 anos ou mais.

Indicador 2: Taxa bruta de frequência à escola (taxa bruta de matrículas nos três níveis de ensino – Fundamental, Médio e Superior) em relação à população residente no município na faixa etária de 7 a 22 anos).

Dimensão Renda (I_R: Índice de renda)

Indicador: Renda *per capita* (para obter esse valor, adiciona-se a renda de todos os residentes e divide-se a soma pela quantidade de pessoas que moram no município – inclusive crianças ou pessoas com renda igual a zero).

KEITHY MOSTACHI/ARQUIVO DA EDITORA

Dica

O IDH varia de 0 (nenhum desenvolvimento humano) a 1 (desenvolvimento humano total).

Professor, professora: Comente com os estudantes que o Relatório do Índice de Desenvolvimento Humano de 2010 divulgado pela Organização das Nações Unidas (ONU) introduziu o Índice de Desenvolvimento Humano Ajustado à Desigualdade (IDHAD), que considera os resultados do IDH como potenciais caso as desigualdades não existissem. Nesse sentido, o IDHAD reflete não apenas o nível de desenvolvimento, mas também o grau de desigualdade na distribuição desse desenvolvimento nos países.

O IDH é dado por:

$$IDH = \frac{1}{3} \cdot I_S + \frac{1}{3} \cdot I_E + \frac{1}{3} \cdot I_R$$

A seguir, estão indicados os grupos em que os países são classificados de acordo com seu IDH, considerando três casas decimais.

Grupos de classificação do IDH

Muito alto desenvolvimento humano: $0{,}800 \geq IDH$

Alto desenvolvimento humano: $0{,}700 \leq IDH \leq 0{,}799$

Médio desenvolvimento humano: $0{,}550 \leq IDH \leq 0{,}699$

Baixo desenvolvimento humano: $IDH < 0{,}550$

KEITHY MOSTACHI/ARQUIVO DA EDITORA

O IDH da Noruega em 2021, por exemplo, foi 0,964, o que classifica o país com desenvolvimento humano muito alto. Já Serra Leoa, no mesmo ano, teve 0,456 de IDH, classificando o país com baixo desenvolvimento humano.

O IDH trouxe muitos avanços para a análise de tendências locais e globais, e é referência para os **Objetivos de Desenvolvimento Sustentável** (ODS), para a diminuição da pobreza, a proteção do planeta e para garantir que todas as pessoas tenham prosperidade. Contudo, é necessário considerar que o IDH não envolve todos os aspectos do desenvolvimento humano, como sustentabilidade, equidade e democracia. Essa é uma crítica que deve ser relevada ao se analisar o índice.

Questão C. Pesquise o IDH mais recente do Brasil. De acordo com o IDH obtido, qual é a classificação do Brasil?

Resposta: A resposta depende do ano vigente. Em 2022, o IDH do Brasil era 0,760. Nesse ano, o país foi classificado como alto desenvolvimento humano.

Coeficiente de Gini

Quando um parâmetro numérico socioeconômico relativo a uma população é analisado, em geral, deve-se combiná-lo a outros dados para avaliar criticamente os resultados. No 2º trimestre de 2023, o Brasil encontrava-se entre os dez primeiros países com maior PIB do mundo, resultado que representava movimento na economia. Porém, ao ser analisada a concentração de renda da população no mesmo período, verifica-se que o país estava entre os países mais desiguais do mundo, sendo esse um dos principais problemas sociais que afetam a população brasileira.

Um dos modos de medir o grau de concentração de renda de determinada população é por meio do **coeficiente de Gini**, que aponta a diferença entre os rendimentos dos mais pobres e dos mais ricos. Numericamente, o coeficiente varia de 0 a 1 e possibilita algumas interpretações.

Interpretações do coeficiente de Gini

Quanto mais próximo de 1 (um):
- maior é a desigualdade de renda entre a população;
- a renda dos mais pobres é mais distante da renda dos mais ricos;
- há maior desigualdade social.

Quanto mais próximo de 0 (zero):
- maior é a igualdade de renda entre a população;
- a renda dos mais pobres é mais próxima da renda dos mais ricos;
- há menor desigualdade social.

RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

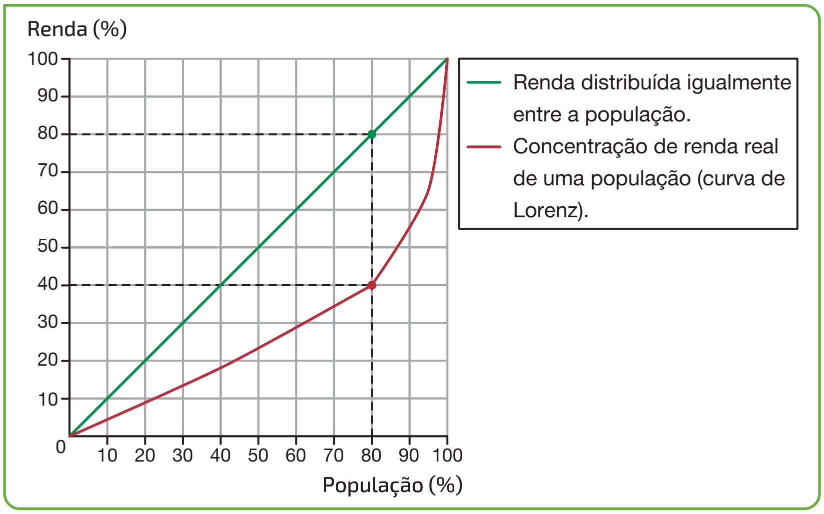
Professor, professora: Comente com os estudantes que a principal diferença entre o IDHAD e o Índice de Gini é que o primeiro considera todas as dimensões já elencadas pelo IDH (saúde, educação e renda), ajustando-o de acordo com a desigualdade nessas dimensões, enquanto o segundo foca na concentração de renda, sem envolver necessariamente outros aspectos do desenvolvimento humano.

Professor, professora: Se julgar conveniente, proponha aos estudantes que pesquisem o coeficiente de Gini mais recente para o Brasil e sua posição atual em relação a outros países e aos próprios estados brasileiros. Depois, inicie uma roda de conversa para avaliar o significado desses indicadores e levá-los a refletir sobre a distribuição de renda em nosso território. Verifique se eles percebem que a desigualdade econômica reduz a qualidade de vida e prejudica a população, pois aumenta a pobreza, intensifica a fome e afeta as condições de saúde das classes desfavorecidas. Explique que esse coeficiente é importante na tomada de decisões políticas e administrativas, pois permite identificar cenários com necessidades mais urgentes de intervenção nas condições de vida das regiões e quais delas estão com melhor distribuição de renda entre a população.

É importante notar que o coeficiente de Gini não se trata de um indicador de fluxo de produção de um país. Assim, um país pode ter uma forte representatividade econômica (PIB alto) e a renda ser concentrada nas mãos dos mais ricos (alto coeficiente de Gini). Do mesmo modo, um país pode ter uma economia ruim (PIB baixo) e maior igualdade de renda (baixo coeficiente de Gini); nesse caso, todos ganham igualmente pouco.

Um recurso usado para visualizar a concentração de renda que está relacionado ao coeficiente de Gini é a **curva de Lorenz**, uma representação gráfica que indica a distribuição relativa de determinado rendimento.

Curva de Lorenz



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte de pesquisa: D'ANTONA, A. de O; BUENO, M do C. B. Distribuição da população e dispersão urbana no Estado de São Paulo, 2010. *In*: OJIMA, R; MARANDOLA JR., E. *Dispersão urbana e mobilidade populacional:* Implicações para o planejamento urbano e regional. São Paulo: Blucher, 2016. p. 137.

Observação

A linha em verde representa rendimento completamente igualitário, ou seja, todos da população teriam a mesma renda. Nesse caso, o coeficiente de Gini é igual a zero. Já a linha em vermelho representa a concentração de renda de determinada população real. Quanto mais próxima da linha em verde, mais igualitária será a distribuição de renda e menor o coeficiente de Gini, e quanto mais distante da linha em verde, maior será o coeficiente de Gini e mais desigual será a distribuição de renda.

Analisando a linha verde do gráfico no ponto (80, 80), verificamos que 80% da população concentra 80% da renda, ou seja, a renda está distribuída igualmente entre a população representada. Por outro lado, analisando a linha vermelha do gráfico no ponto (80, 40), verificamos que 80% da população concentra apenas 40% da renda, ou seja, há uma distribuição de renda desigual da população.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

25. Um comerciante produz sorvetes em seu estabelecimento, comprando a matéria-prima de um mesmo fornecedor, que reajusta os preços no final de cada ano. Em dezembro de 2023, após o reajuste, cada unidade de certo sorvete era vendida por R$ 2,31, sendo gastos R$ 1,20 com matéria-prima, R$ 0,50 com custos de produção e armazenagem e R$ 0,61 de lucro por unidade. Já em dezembro de 2024, o fornecedor aumentou o preço da matéria-prima em 10%, enquanto os custos de produção e armazenagem aumentaram de acordo com o IPCA, que foi de 5,79% no período. Se o preço de venda de cada unidade desse sorvete também foi reajustado de acordo com o IPCA, qual é a porcentagem da redução do lucro por unidade?
Resposta: Aproximadamente 3,3%.

26. O gráfico a seguir apresenta a composição do PIB de determinado município.

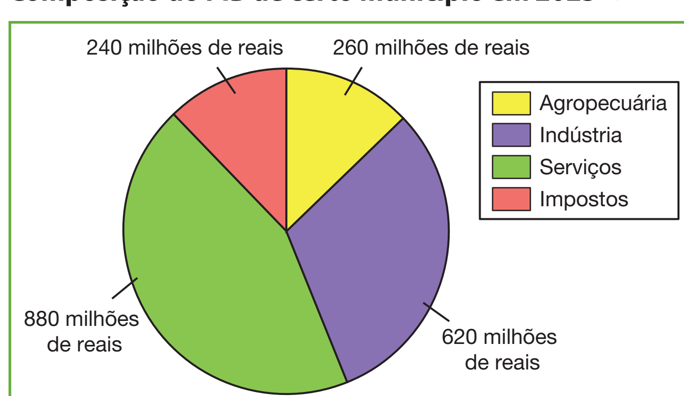
Com o objetivo de aumentar o PIB desse município, a prefeitura decidiu investir em infraestrutura. Com o investimento previsto, foram apresentadas duas opções. Professor, professora: As informações apresentadas no gráfico são fictícias.

- Opção **A**: investir em melhorias na agropecuária, prevendo aumento de 12% na produção desse setor.
- Opção **B**: investir em melhorias na indústria, prevendo aumento de 6% na produção desse setor.

a) Qual dessas opções apresenta uma previsão de maior valor para o PIB do município?
Resposta: Investir em melhorias na indústria.

b) Pesquise a composição do PIB do município onde você mora e apresente informações sobre a economia, identificando suas características e comparando os valores com os de outros municípios.
Resposta pessoal. A resposta depende do município onde os estudantes residem. Espera-se que eles identifiquem qual atividade econômica é predominante no município onde moram e que façam comparações com os municípios da região ou com os municípios que têm características semelhantes.

Composição do PIB de certo município em 2025



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte de pesquisa: Prefeitura do município.

Professor, professora: Se julgar apropriado, solicite aos estudantes que façam pesquisas sobre o mercado de trabalho e as taxas de trabalho informal para responder ao item **b** da tarefa **27**.

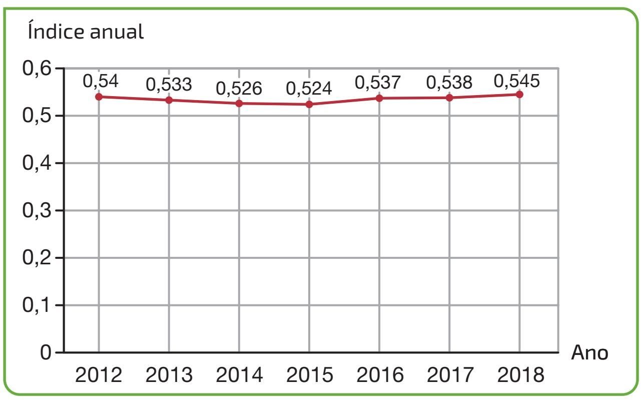
27. No final do 1º bimestre de 2024, havia 109,33 milhões de pessoas economicamente ativas no Brasil. Além disso, calculamos a população desocupada, que era de, aproximadamente, 7,5 milhões de pessoas. Nesse mesmo ano, o número de trabalhadores informais era de aproximadamente 39,3 milhões.

a) Quantos por cento da população ocupada os trabalhadores informais representam?
Resposta: Aproximadamente 38,59%.

b) Em sua opinião, o trabalho informal deve aumentar ou diminuir nos próximos anos? Cite informações que fundamentem sua estimativa.
Resposta pessoal. A resposta depende da vivência dos estudantes.

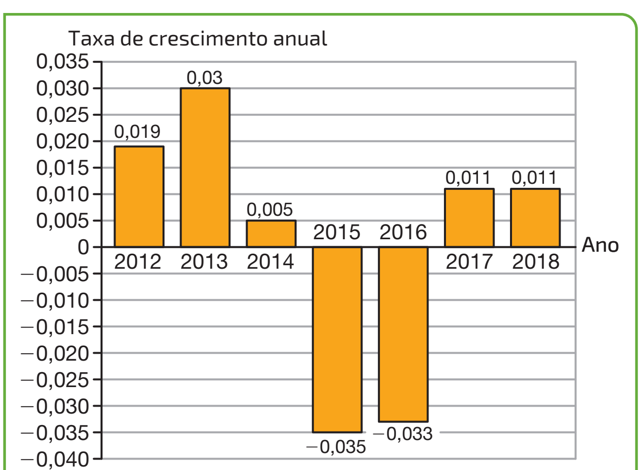
28. Uma maneira de compreender melhor as características de uma população é analisar dois ou mais indicadores socioeconômicos simultaneamente.

Coeficiente de Gini do rendimento médio mensal real domiciliar *per capita* no Brasil de 2012 a 2018



Fonte de pesquisa: Pnad. *IBGE*. Disponível em: https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv101673_informativo.pdf. Acesso em: 12 abr. 2024.

Taxa de crescimento anual do PIB do Brasil de 2012 a 2018



Fonte de pesquisa: IBGE. *Contas nacionais trimestrais*: indicadores de volume e valores correntes 2018. Disponível em: https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/periodicos/2121/cnt_2018_4tri.pdf. Acesso em: 12 abr. 2024.

Em sua opinião, o que podemos concluir com base nas informações desses dois indicadores?

28. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes concluam que o PIB não influencia a desigualdade de um país – fato que pode ser observado nos anos de 2014 e 2015 – e percebam a importância de analisar diferentes indicadores.

30. a) Resposta: Aproximadamente 0,892.

29. Um dos grupos analisados pelo IBGE é o de pessoas que gostariam de ter um trabalho, mas que não procuram emprego por considerar que não se adéquam ao mercado, ou que desistiram de procurar trabalho, denominados desalentados. Em 2023, o contingente de pessoas desalentadas em um trimestre foi estimado em, aproximadamente, 3,7 milhões. Em comparação com 2022 no mesmo período, houve uma redução de 12,4%. Calcule qual era, aproximadamente, o contingente de pessoas desalentadas nesse trimestre de 2023.
Resposta: Aproximadamente 4,22 milhões de pessoas.

30. O índice de educação e o índice de renda de certo país são, respectivamente, 0,758 e 0,723.

a) Sabendo que o índice de saúde é calculado com base na expectativa de vida E, utilizando a expressão $I_S = \dfrac{E - 25}{60}$, e que a expectativa de vida desse país é de 78,5 anos, calcule I_S.

b) Qual é o IDH desse país? Qual é a classificação desse país de acordo com seu IDH?
Resposta: 0,791. Alto desenvolvimento humano.

31. Classifique cada uma das afirmações em verdadeira ou falsa. Em seguida, reescreva as falsas tornando-as verdadeiras. Respostas no final do **Livro do Estudante**.

a) Entre dois países diferentes, aquele com índice de saúde maior também terá o IDH maior.

b) Se um país apresenta um IDH de 0,765, podemos afirmar, apenas analisando esse indicador, que ele tem uma boa distribuição de renda.

32. Leia o texto sobre o IDH brasileiro e aponte algumas mudanças que devem ser implementadas no país para que esse índice aumente.

Professor, professora: Diga aos estudantes que, em geral, os países almejam alcançar um IDH de 0,800.

> [...]
> O IDH brasileiro foi de 0,761 em 2018, o que representou um leve aumento de 0,001 ponto na comparação com 2017. O Brasil permanece sendo considerado uma nação de alto desenvolvimento humano. No entanto, mesmo com o aumento, caiu no *ranking* geral porque outros países avançaram mais rapidamente.
>
> Ao destacar os altos índices de desigualdade brasileiros, o relatório lembrou que pesquisas domiciliares no Brasil mostraram que os 10% mais ricos receberam mais de 40% da renda total do país em 2015. Quando consideradas todas as formas de renda, não apenas as reportadas nas pesquisas domiciliares, as estimativas sugerem que os 10% mais ricos de fato concentram 55% do total da renda do país.
>
> [...]

32. Resposta pessoal.

Relatório de desenvolvimento humano do PNUD destaca altos índices de desigualdade no Brasil. *Nações Unidas Brasil*. 9 dez. 2019. Disponível em: https://brasil.un.org/pt-br/84733-relat%C3%B3rio-de-desenvolvimento-humano-do-pnud-destaca-altos-%C3%ADndices-de-desigualdade-no-brasil. Acesso em: 30 set. 2024.

TRABALHO E JUVENTUDES

O que faz um assistente social?

1. Resposta pessoal. Incentive os estudantes a comentar suas impressões com relação à profissão, questionando-os se se identificaram com alguma área de atuação. Em caso positivo, peça a eles que compartilhem os motivos da escolha.

Além de auxiliar no conhecimento das necessidades básicas de uma população e seu desenvolvimento, as informações obtidas pelos indicadores sociais, como o Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) e o coeficiente de Gini, possibilitam o trabalho de profissionais como o assistente social, que atua na defesa dos direitos de indivíduos em situação de vulnerabilidade.

Por meio de dados sobre a qualidade de vida do seu público-alvo, como jovens e pessoas idosas em situação de abandono, o assistente social avalia as condições de saúde, segurança, trabalho, habitação, entre outras. Esse profissional é responsável por garantir que aqueles mais necessitados tenham acesso a recursos e serviços fundamentais para uma vida mais digna. Seu trabalho envolve a identificação de necessidades sociais e o encaminhamento adequado a programas governamentais e serviços especializados.

A cooperação com outras áreas profissionais é uma prática comum entre os assistentes sociais. Visando um atendimento abrangente, eles podem trabalhar em parceria com médicos, psicólogos, advogados, entre outros especialistas.

O assistente social também pode atuar em uma variedade de instituições. Confira algumas delas a seguir.

- Escolas.
- Hospitais.
- ONGs (organizações não governamentais).
- Unidades prisionais.
- Comunidades carentes.
- Departamento de Gestão de Pessoas em empresas privadas.

Dessa maneira, norteado pelos indicadores sociais, o trabalho do assistente social é fundamental para o planejamento de práticas direcionadas à melhoria da qualidade de vida da população.


LIGHT FIELD STUDIOS/SHUTTERSTOCK

Assistente social conversando com uma pessoa idosa.

2. Resposta pessoal. Em razão da variedade de atuações possíveis para o assistente social, os estudantes podem encontrar rotinas de trabalho muito diferentes e citar exemplos como o de profissionais atuantes em ONGs, que auxiliam na elaboração de ações e projetos, realizando eventos e guiando equipes; profissionais que trabalham em hospitais, orientando os pacientes quanto aos seus direitos e proporcionando um acolhimento humanizado a eles; profissionais atuantes em empresas privadas, que auxiliam os funcionários em questões pessoais ou familiares, possibilitando um bom ambiente de trabalho; entre outras possibilidades de atuação. Instigue-os a comentar aspectos da rotina do profissional que mais chamou a atenção deles e a sua importância.

Observação

Para se tornar um assistente social é necessário cursar uma graduação em Serviço Social em uma instituição de Ensino Superior que seja reconhecida pelo Ministério da Educação (MEC) e se registrar no Conselho Regional de Serviço Social (Cress).

Atividades

Professor, professora: Oriente os estudantes a escrever as respostas no caderno.

Anote as respostas no caderno.

1. Converse com os colegas a respeito da profissão de assistente social. Você se identificou com ela?

2. Pesquise na internet a rotina de trabalho de um assistente social ou converse com um profissional da área. Depois, compartilhe com os colegas o que você descobriu.

3. Além do assistente social, quais outros profissionais podem utilizar indicadores sociais para orientar seu trabalho? Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes considerem que os indicadores sociais servem de norteadores para avaliarmos o contexto de determinada população. Jornalistas, professores, economistas e políticos estão entre os profissionais que podem utilizar os indicadores sociais para orientar seu trabalho.

Acréscimos e descontos sucessivos

Vimos anteriormente algumas situações envolvendo acréscimos e descontos. Nelas, tanto os acréscimos quanto os descontos incidiam sobre o valor inicial. Agora, vamos estudar algumas situações que envolvem acréscimos e descontos sucessivos. Analise alguns exemplos.

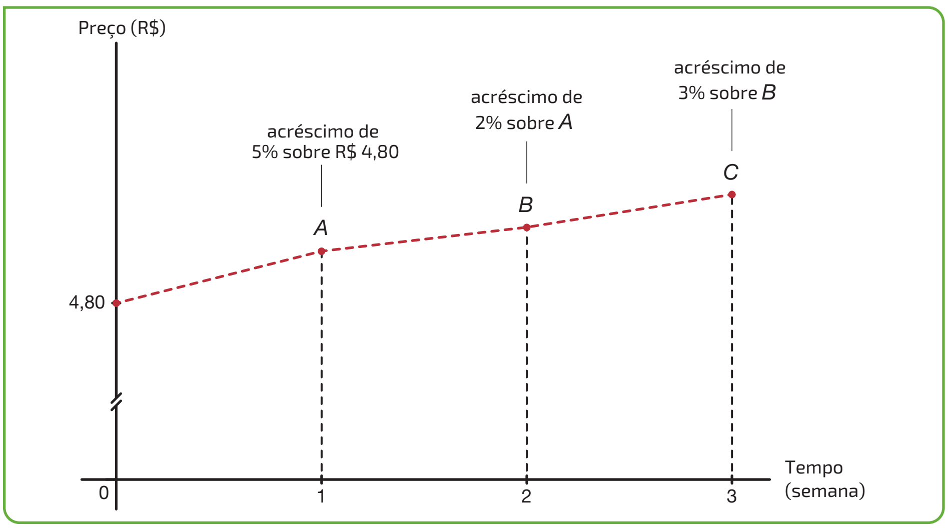
Professor, professora: Ao tratar de variações nos preços de produtos e serviços, é conveniente comentar, ainda que de maneira breve, os motivos que podem acarretar essas oscilações. No exemplo desta página, a alteração no preço do produto se deu em função da baixa produtividade na entressafra, mas outros fatores podem influir no preço de um produto ou de um serviço. Em geral, preço é regido pela lei da oferta e da procura, aumentando quando a oferta é pequena e a procura é grande e diminuindo quando a oferta é grande e a procura é pequena, tendendo (mas nem sempre encontrando) a um equilíbrio entre a capacidade dos meios de produção e a demanda do mercado consumidor. Efeitos sazonais, volubilidade da natureza, eventos imprevisíveis e circunstâncias de força maior, contudo, são alguns fatores que podem alterar drasticamente o preço de um produto em um curto período de tempo. No caso de serviços, o grau de especialidade ou até a fama da pessoa ou empresa responsável pela execução são alguns pontos que elevam ou diminuem o valor a ser cobrado.

Exemplo 1

Em um supermercado, 1 L de leite custava R$ 4,80. Em razão da baixa produtividade na entressafra, o preço do produto teve, durante três semanas, acréscimos de 5%, 2% e 3%, respectivamente.

Professor, professora: Os dados apresentados no gráfico são fictícios.

Preço de 1 L de leite em um supermercado em janeiro de 2024



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte de pesquisa: Supermercado.

LEONARDO GIBRAN/ARQUIVO DA EDITORA

Podemos calcular o preço do litro de leite nesse supermercado após os acréscimos da seguinte maneira.

Após o 1º acréscimo: $\overbrace{105\%}^{100\% + 5\%}$ de 4,8, ou seja, $\frac{105}{100} \cdot 4{,}8 = 1{,}05 \cdot 4{,}8 = 5{,}04$

Após o 2º acréscimo: $\overbrace{102\%}^{100\% + 2\%}$ de 5,04, ou seja, $\frac{102}{100} \cdot 5{,}04 = 1{,}02 \cdot 5{,}04 \simeq 5{,}15$

Após o 3º acréscimo: $\overbrace{103\%}^{100\% + 3\%}$ de 5,15, ou seja, $\frac{103}{100} \cdot 5{,}515 = 1{,}03 \cdot 5{,}15 \simeq 5{,}30$

Note que, nessa situação, não podemos adicionar 5%, 2% e 3% e calcular um único acréscimo de 10% sobre o valor de R$ 4,80, pois, nesse caso, o litro do leite passaria a custar R$ 5,28, o que não está correto. Para obter uma única porcentagem equivalente aos três acréscimos, devemos multiplicar os fatores de atualização, isto é:

$$1{,}05 \cdot 1{,}02 \cdot 1{,}03 = 1{,}10313 = 110{,}313\%$$

Agora, calculamos 110,313% de 4,8:

$$\frac{110{,}313}{100} \cdot 4{,}8 = 1{,}10313 \cdot 4{,}8 \simeq 5{,}30$$

Observação

Os valores 1,05; 1,02; 1,03 são chamados fatores de atualização.

Portanto, o preço de 1 L de leite nesse supermercado após os três acréscimos sucessivos é R$ 5,30.

Observação

Os acréscimos sucessivos de 5%, 2% e 3% equivalem a um único acréscimo de $\underbrace{10{,}313\%}_{110{,}313\% - 100\%}$.

Indicando por P_0 o valor inicial e por $i_1, i_2, i_3, \ldots, i_n$ as taxas de acréscimos sucessivos na forma decimal, os valores indicados por $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$, respectivamente, obtidos após cada acréscimo, são dados por:

$P_1 = P_0 \cdot (1 + i_1)$

$P_2 = P_1 \cdot (1 + i_2) = P_0 \cdot (1 + i_1) \cdot (1 + i_2)$

$P_3 = P_2 \cdot (1 + i_3) = P_0 \cdot (1 + i_1) \cdot (1 + i_2) \cdot (1 + i_3)$

$\vdots$

$P_n = P_{n-1} \cdot (1 + i_n) = P_0 \cdot (1 + i_1) \cdot (1 + i_2) \cdot (1 + i_3) \cdot \ldots \cdot (1 + i_n)$

Assim, o valor final $P_n = P$, obtido após todos os acréscimos sucessivos, é dado por:

$$P = P_0 \cdot (1 + i_1) \cdot (1 + i_2) \cdot (1 + i_3) \cdot \ldots \cdot (1 + i_n)$$

Exemplo 2

Uma loja de eletrodomésticos está realizando uma liquidação. Um televisor de LED, por exemplo, que inicialmente custava R$ 2 500,00, sofreu um desconto de 20%. Se o cliente pagar à vista, tem mais 10% de desconto sobre o valor de liquidação do produto. Para determinar o preço do televisor pago à vista na liquidação, calculamos o preço do televisor após cada desconto.

Após o 1º desconto: $\overbrace{80\%}^{100\% - 20\%}$ de 2 500, ou seja:

$$\frac{80}{100} \cdot 2\,500 = 0{,}8 \cdot 2\,500 = 2\,000$$

Após o 2º desconto: $\overbrace{90\%}^{100\% - 10\%}$ de 2 000, ou seja:

$$\frac{90}{100} \cdot 2\,000 = 0{,}9 \cdot 2\,000 = 1\,800$$

Note que, nessa situação, não podemos adicionar 20% e 10% e calcular um único desconto de 30% sobre o valor de R$ 2 500,00, pois, nesse caso, o televisor passaria a custar R$ 1 750,00, o que não está correto. Para obter uma única porcentagem equivalente aos dois descontos, devemos multiplicar os fatores de atualização, isto é:

$$0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}72 = 72\%$$

Agora, calculamos 72% de 2 500:

$$\frac{72}{100} \cdot 2\,500 = 0{,}72 \cdot 2\,500 = 1\,800$$

Portanto, o preço do televisor após os dois descontos sucessivos é R$ 1 800,00.

Observação

Os valores 0,8 e 0,9 também são chamados fatores de atualização.

Observação

Os descontos sucessivos de 20% e 10% equivalem a único desconto de $\underbrace{28\%}_{100\% - 72\%}$.

Indicando por P_0 o valor inicial e por $i_1, i_2, i_3, \ldots, i_n$ as taxas de descontos sucessivos na forma decimal, os valores indicados por $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$, respectivamente, obtidos após cada desconto, são dados por:

$P_1 = P_0 \cdot (1 - i_1)$

$P_2 = P_1 \cdot (1 - i_2) = P_0 \cdot (1 - i_1) \cdot (1 - i_2)$

$P_3 = P_2 \cdot (1 - i_3) = P_0 \cdot (1 - i_1) \cdot (1 - i_2) \cdot (1 - i_3)$

$\vdots$

$P_n = P_{n-1} \cdot (1 - i_n) = P_0 \cdot (1 - i_1) \cdot (1 - i_2) \cdot (1 - i_3) \cdot \ldots \cdot (1 - i_n)$

Assim, o valor final $P_n = P$, obtido após todos os descontos sucessivos, é dado por:

$$P = P_0 \cdot (1 - i_1) \cdot (1 - i_2) \cdot (1 - i_3) \cdot \ldots \cdot (1 - i_n)$$

R4. Certa loja concedeu 10% de desconto em um produto e logo depois, pelo pagamento à vista, mais 40% de desconto no mesmo produto. Esses descontos correspondem a um único desconto de quantos por cento?

Resolução

Para calcular o desconto único, multiplicamos inicialmente os fatores de atualização.

$$\underbrace{0{,}9}_{100\% - 10\% = 90\%} \cdot \overbrace{0{,}6}^{100\% - 40\% = 60\%} = 0{,}54 = 54\%$$

Portanto, descontos sucessivos de 10% e 40% equivalem a um único desconto de 46%, pois $100\% - 54\% = 46\%$.

R5. Uma loja vende produtos pela internet e, sobre o preço do anúncio, são acrescidos 3% de comissão para o *site*. Quanto um consumidor vai pagar por um produto anunciado por R$ 130,00 se ele receber desconto de 10% sobre o preço já acrescido da comissão do *site*?

ILUSTRAÇÃO DE VINÍCIUS COSTA/ARQUIVO DA EDITORA. FOTO: NEW AFRICA/SHUTTERSTOCK

Resolução

O valor inicial é $P_0 = 130$, a taxa de acréscimo é $i_1 = \underbrace{0{,}03}_{3\%}$ e a taxa de desconto é $i_2 = \underbrace{0{,}1}_{10\%}$.

Logo:

$$P = 130 \cdot \underbrace{(1 + 0{,}03)}_{\text{acréscimo}} \cdot \underbrace{(1 - 0{,}1)}_{\text{desconto}} = 130 \cdot 1{,}03 \cdot 0{,}9 = 120{,}51$$

Portanto, o consumidor vai pagar R$ 120,51 pelo produto.

Observação

Para n acréscimos e m descontos aplicados sucessivamente a um valor inicial P_0, podemos calcular o valor final P utilizando a fórmula:

$$P = P_0 \cdot \underbrace{(1 + i_1) \cdot \ldots \cdot (1 + i_n)}_{\text{acréscimos sucessivos}} \cdot \underbrace{(1 - i_1) \cdot \ldots \cdot (1 - i_m)}_{\text{descontos sucessivos}}$$

R6. Responda à seguinte questão e justifique sua resposta.

Dado um valor inicial P_0, se aplicarmos, sucessivamente, um acréscimo e um desconto, ambos de 10%, então obteremos o próprio valor P_0?

Resolução

Não, pois:

$$P = P_0 \cdot \underbrace{(1 + 0{,}1)}_{\substack{\text{acréscimo} \\ \text{de 10\%}}} \cdot \underbrace{(1 - 0{,}1)}_{\substack{\text{desconto} \\ \text{de 10\%}}} = P_0 \cdot 1{,}1 \cdot 0{,}9 = P_0 \cdot \underbrace{0{,}99}_{99\%}$$

O valor final é 99% do valor inicial. Portanto, não é o próprio valor P_0.

R7. Sobre uma fatura, é cobrado 0,1% de acréscimo sucessivo por dia de atraso. Por essa fatura foi pago R$ 311,24, com quatro dias de atraso.

Determine o valor da fatura caso ela tivesse sido paga:

a) sem acréscimo. **b)** com um dia de atraso.

Resolução

a) O valor final da fatura é $P = 311{,}24$. Assim, segue que:

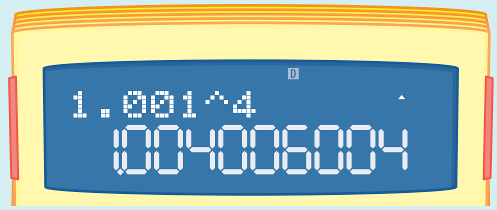
$$311{,}24 = P_0 \cdot \underbrace{(1 + 0{,}001)}_{\substack{\text{acréscimo de} \\ \text{0,1\% no 1º dia}}} \cdot \underbrace{(1 + 0{,}001)}_{\substack{\text{acréscimo de} \\ \text{0,1\% no 2º dia}}} \cdot \underbrace{(1 + 0{,}001)}_{\substack{\text{acréscimo de} \\ \text{0,1\% no 3º dia}}} \cdot \underbrace{(1 + 0{,}001)}_{\substack{\text{acréscimo de} \\ \text{0,1\% no 4º dia}}} \Rightarrow 311{,}24 = P_0 \cdot 1{,}001^4 \Rightarrow P_0 = \frac{311{,}24}{1{,}001^4} \simeq 310$$

Portanto, o valor da fatura paga sem acréscimo seria R$ 310,00.

Observação

O cálculo de $1,001^4$ pode ser realizado com uma calculadora científica:

1 . 0 0 1 ^ 4 =



Em algumas calculadoras, a tecla x^y substitui a tecla ^.

b) Do item **a**, sabemos que o valor inicial é R$ 310,00. Logo:

$$P = 310 \cdot \overbrace{(1 + 0{,}001)}^{\text{acréscimo de 0,1\%}} = 310 \cdot 1{,}001 = 310{,}31$$

Portanto, o valor da fatura paga com um dia de atraso seria R$ 310,31.

R8. A seguir, estão apresentados alguns valores de referência usados em um laboratório para avaliar a taxa de glicose de um adulto em jejum por meio de exames.

Valores de referência para taxa de glicose no sangue de um adulto em jejum

Glicemia normal	Taxa de glicose igual ou menor do que 100 mg/dL
Glicemia alterada	Taxa de glicose maior do que 100 mg/dL e igual ou menor do que 126 mg/dL
Diabetes	Taxa de glicose maior do que 126 mg/dL

Fonte de pesquisa: Você sabe o que é a pré-diabetes? Entenda tudo sobre o assunto! *TJDFT*. Disponível em: https://www.tjdft.jus.br/informacoes/programas-projetos-e-acoes/pro-vida/dicas-de-saude/pilulas-de-saude/voce-sabe-o-que-e-a-pre-diabetes-entenda-tudo-sobre-o-assunto. Acesso em: 17 jul. 2024.

Dica

Um decilitro (dL) equivale à décima parte de um litro, ou seja, $1 \text{ dL} = \frac{1}{10} \text{ L}$.

Um paciente fez um exame de glicose nesse laboratório e comprovou que sua taxa de glicose era de 190 mg/dL. Seu médico prescreveu um tratamento em duas etapas. Na primeira etapa, ele conseguiu reduzir a taxa em 35% e na segunda etapa, em 20%.

Ao calcular a taxa de glicose após as duas reduções, o paciente verificou que:

a) continuava com taxa de diabetes.

b) estava com a taxa de glicemia normal.

c) estava com a glicemia alterada.

Resolução

Inicialmente, calculamos a taxa de glicose T após as reduções.

$$T = 190 \cdot (1 - 0{,}35) \cdot (1 - 0{,}2) = 98{,}8$$

Desse modo, com taxa de glicose igual a 98,8 mg/dL, ele estará na categoria de glicemia normal. Portanto, a alternativa correta é **b**.

33. Escreva as taxas acumulativas, de acréscimos ou descontos sucessivos, e represente-as por uma única porcentagem.

a) acréscimos de 4% e 8%.
Resposta: Acréscimo de 12,32%.

b) desconto de 13% e 6%.
Resposta: Desconto de 18,22%.

c) três acréscimos de 5%.
Resposta: Acréscimo de aproximadamente 15,76%.

d) dois descontos de 3% e acréscimo de 7%.
Resposta: Acréscimo de aproximadamente 0,68%.

34. Um pequeno produtor rural vende um quilograma de certa hortaliça por R$ 1,79 a um intermediário, que a revende a uma central de abastecimento com lucro de 30%. A central, por sua vez, vende a um supermercado, lucrando 40%, e o supermercado revende ao consumidor final com lucro de 50%. Quantos reais o consumidor final paga pelo quilograma dessa hortaliça?
Resposta: Aproximadamente R$ 4,89.

35. Em uma loja, certo modelo de camiseta, que custava R$ 72,00, teve aumento no preço de 8%. Como diminuíram as vendas desse modelo, a loja realizou uma promoção na compra à vista, oferecendo 15% de desconto. Qual é o valor a ser pago por um cliente que comprar esse modelo de camiseta efetuando o pagamento à vista?
Resposta: R$ 66,10

36. Ao longo de dois anos, o salário de Roberta foi aumentado em 2%, 6% e 4%. Sabendo que após esses reajustes o salário dela passou a ser R$ 3 202,72, em quantos reais aumentou o salário de Roberta nesse período? Resposta: R$ 354,46

37. Alex comprou certa mercadoria por R$ 60,00 e a colocou à venda por um preço que lhe renderia 25% de lucro. Como não conseguiu vendê-la, resolveu conceder um desconto de 12%, caso a compra fosse feita à vista.

a) Quantos reais um consumidor terá de desembolsar caso efetue a compra à vista?
Resposta: R$ 66,00

b) Qual é a porcentagem que Alex lucrará se a mercadoria for vendida à vista? Resposta: 10%

38. Para fazer a festa de formatura, a comissão de certa turma de 3º ano do Ensino Médio estipulou que todo formando pagasse uma mensalidade. Na tentativa de evitar atrasos no pagamento, foi combinada uma multa de 4% para pagamentos realizados após o quinto dia útil de cada mês e, após o cálculo da multa, mais 0,6% de acréscimo sucessivo por dia de atraso. Em certo mês, após dois dias de atraso, um estudante pagou R$ 65,78 de mensalidade. Qual seria o valor dessa mensalidade caso o pagamento tivesse sido feito até o quinto dia útil? Resposta: R$ 62,50

39. (Enem, 2013) Para aumentar as vendas no início do ano, uma loja de departamentos remarcou os preços de seus produtos 20% abaixo do preço original. Quando chegam ao caixa, os clientes que possuem o cartão fidelidade da loja têm direito a um desconto adicional de 10% sobre o valor total de suas compras.

Um cliente deseja comprar um produto que custava R$ 50,00 antes da remarcação de preços. Ele não possui o cartão fidelidade da loja. Caso esse cliente possuísse o cartão fidelidade da loja, a economia adicional que obteria ao efetuar a compra, em reais, seria de: Resposta: Alternativa **e**.

a) 15,00
b) 14,00
c) 10,00
d) 5,00
e) 4,00

40. Em certo ano, em determinada região, no mês de fevereiro, choveu 18% a mais do que no mês de janeiro. Em contrapartida, choveu no mês de março 15% a menos do que no mês de fevereiro. Em qual mês choveu mais nessa região, em janeiro ou em março? Quantos por cento?
Resposta: Março; 0,3%.

41. Certa loja promoveu uma liquidação na qual o consumidor poderia escolher entre dois tipos de desconto para pagamento à vista: dois descontos sucessivos de 35% ou um único desconto de 60%. Qual dos tipos de desconto é mais vantajoso para o consumidor?
Resposta: Um único desconto de 60%.

42. Para aumentar em 50% a área de um triângulo qualquer, quantos por cento devemos aumentar a altura se aumentarmos o comprimento da base em 20%? Resposta: 25%

43. Uma empresa de transporte coletivo municipal reajustou três vezes a tarifa de ônibus nos últimos quatro anos. Os reajustes foram acréscimos de 5%, 4% e 5%, sendo que a tarifa passou a ser R$ 4,65.

a) Qual é a porcentagem da taxa de acréscimo considerando apenas os dois primeiros reajustes? E se forem considerados os três reajustes? Resposta: 9,2%; 14,66%

b) Qual era o valor da tarifa antes de ocorrer os três reajustes? Resposta: R$ 4,06

44. Determinado produto custava R$ 600,00 e teve dois descontos sucessivos, de 7% e x% e, em seguida, um aumento de 15%. Calcule o valor do desconto de x%, sabendo que o valor atual do produto é R$ 577,53. Resposta: 10%

45. Devido a novos custos, um comerciante vai aumentar o preço de venda de certo produto. No entanto, para evitar uma queda nas vendas, ele aplicará, inicialmente, um acréscimo de x% e, após dois meses, outro acréscimo de x%, obtendo um acréscimo final de 21% sobre o preço inicial desse produto. De quantos por cento será cada um desses acréscimos? Resposta: 10%

46. Aroldo fez um curso sobre planejamento financeiro e consumo consciente. Usando os conhecimentos adquiridos, ele estabeleceu um plano para poupar dinheiro e, assim, fazer uma viagem.

a) Em sua opinião, a decisão tomada por Aroldo está correta? Justifique sua resposta.

b) As quantias que Aroldo poupou mensalmente, nos quatro primeiros meses, estão apresentadas no quadro. Por ter aplicado seu dinheiro em uma instituição financeira, ao final de cada mês Aroldo recebia 3% do saldo disponível em conta. Sabendo que os 3% recebidos não foram retirados em nenhum dos meses, e que os juros do próximo mês eram calculados sobre o saldo atual, determine quantos reais ele tinha ao final do 3º mês de aplicação. Resposta: R$ 3 102,72

c) Em sua opinião, de que maneira adquirir conhecimentos sobre planejamento financeiro e consumo consciente pode beneficiar as pessoas?

Quantias em reais poupadas por Aroldo durante quatro meses

Mês	Quantia (em reais)
1º	1 500
2º	700
3º	700
4º	700

47. Renata pesquisou o preço de determinado modelo de *smartphone* e notou que, em certa loja *on-line*, o preço do aparelho aumentou em 20% uma semana antes de uma promoção. Durante essa promoção, os preços de todos os produtos dessa loja sofreram um desconto de 10% e o preço do *smartphone* tinha um desconto adicional de 5%.

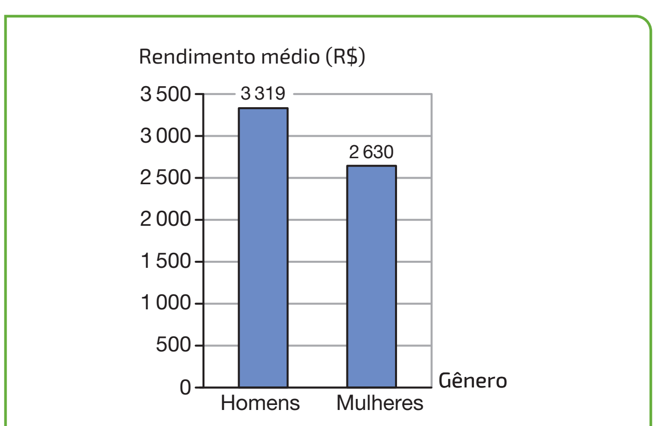
a) Nessa promoção, de quantos por cento foi o desconto oferecido sobre o preço do *smartphone*? Resposta: 14,5%

b) O preço desse *smartphone* com os descontos é maior ou menor do que o preço dele antes do aumento de 20%? Justifique sua resposta. Resposta: Maior, pois, se indicarmos por x o preço do *smartphone* antes do aumento de 20%, teríamos que, após os descontos, seu preço seria $1{,}026x$.

48. Pesquisas do IBGE apontam que, no país, há uma significativa disparidade entre as médias dos salários recebidos por homens e por mulheres. A diferença entre os rendimentos médios mensais, embora tenha diminuído ligeiramente nos últimos anos, continua contribuindo para a desigualdade de gênero no Brasil.

Professor, professora: Explique aos estudantes que o termo rendimento é referente ao total das importâncias recebidas por uma pessoa durante determinado período de tempo.

Rendimento médio mensal das pessoas de 14 anos ou mais de idade no 4º trimestre de 2023



VINÍCIUS COSTA/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte de pesquisa: IBGE. Disponível em: https://sidra.ibge.gov.br/Tabela/5436#resultado. Acesso em: 26 ago. 2024.

46. a) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes respondam que sim, pois Aroldo buscou conhecimento sobre planejamento financeiro e colocou em prática seus conhecimentos acerca do consumo consciente.

46. c) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes respondam que aprender sobre planejamento financeiro e consumo consciente é essencial para lidar de forma eficiente com o dinheiro, avaliando as oportunidades para poupar, investir e comprar com consciência.

No 1º trimestre de 2024 a diferença entre o rendimento médio mensal de homens e mulheres aumentou cerca de 0,2%, quando comparado ao 4º trimestre de 2023. Já no 2º trimestre de 2024, essa diferença diminuiu cerca de 0,7%, quando comparado ao trimestre anterior. Qual é a porcentagem aproximada correspondente à diferença do rendimento médio mensal de homens e mulheres no 2º trimestre de 2024?
Resposta: Aproximadamente 78,8%.

O que é juro?

Quando uma pessoa realiza um empréstimo no banco, ela deve pagar, além da quantia emprestada, um valor a mais correspondente ao juro, isto é, um tipo de “aluguel” pelo período em que o dinheiro ficou emprestado.

Outra circunstância envolvendo juro acontece quando uma pessoa faz uma aplicação de certa quantia, em algum tipo de investimento. Nesse caso, a pessoa recebe juro de acordo com o período em que essa quantia ficou aplicada.

Quando o pagamento de uma fatura é efetuado com atraso, ela é acrescida de juro correspondente ao tempo de atraso.

A seguir, analise alguns termos utilizados em situações que envolvem juro.

Capital (c): quantia em dinheiro investida ou emprestada.

Juro (j): rendimento ou acréscimo pago pelo investimento ou empréstimo de certa quantia.

Taxa de juro (i): porcentagem que se recebe de rendimento de um investimento ou que se paga pelo empréstimo de certa quantia.

Montante (M): soma do capital com o juro, indicado por $M = c + j$.

Tempo (t): período em que se investe ou empresta certa quantia, podendo ser dado em dias, meses, anos etc.

ILUSTRAÇÕES: HELOÍSA PINTARELLI/ARQUIVO DA EDITORA

Neste tópico, vamos estudar o **juro simples** e o **juro composto**.

Juro simples

Simone pretende fazer um curso sobre investimentos na bolsa de valores. A organizadora do curso oferece dois tipos de pagamento: R$ 1000,00 à vista no momento da matrícula ou, ao final de um ano de curso, esse valor acrescido de uma taxa de juro simples de 12,5% a.a. (ao ano). Podemos calcular o montante pago por Simone, caso ela opte pelo pagamento ao final do curso, da seguinte maneira.

- capital (c): R$ 1000,00
- tempo (t): 1 ano
- taxa de juro (i): 12,5% a.a.

Calculamos o juro simples referente a um ano, ou seja, 12,5% de R$ 1000,00.

$$0{,}125 \cdot 1000 = 125$$

Assim, ao final do curso, Simone pagará R$ 125,00 de juro. Como queremos determinar o montante pago por Simone ao final desse período, adicionamos o capital e o juro.

$$M = c + j \Rightarrow M = 1000 + 125 = 1125$$

Portanto, ao final dos 12 meses, Simone pagará R$ 1125,00.

Supondo que o período para pagamento do curso realizado por Simone fosse expandido e que a taxa fosse mantida, teríamos a cada ano um acréscimo de R$ 125,00 no montante, pois no regime de juro simples a taxa é aplicada sempre sobre o capital inicial.

Professor, professora: Verifique se os estudantes conhecem ou já ouviram falar de outros tipos de investimentos em renda fixa, como o certificado de depósito bancário (CDB), debêntures e a poupança, e em renda variável, como os fundos de investimento, derivativos e *Exchange Traded Funds* (ETF).

Se julgar oportuno, solicite aos estudantes que acessem o *site* Portal do Investidor da Comissão de Valores Mobiliários (CVM). Nele, é possível obter informações cruciais para quem deseja fazer parte do mundo dos investimentos. Disponível em: https://www.gov.br/investidor/pt-br. Acesso em: 29 jul. 2024.

Calculamos o juro simples por meio da fórmula:

$$j = c \cdot i \cdot t$$

Nessa fórmula:

- j: juro
- c: capital
- i: taxa de juro simples
- t: período de tempo

Para calcular o montante, utilizamos a seguinte fórmula:

$$M = c + \overbrace{j}^{c \cdot i \cdot t} \Rightarrow M = c + c \cdot i \cdot t \Rightarrow M = c(1 + i \cdot t)$$

Nessas fórmulas, ao substituir a taxa de juro, devemos escrevê-la na forma decimal.

Ao utilizar as fórmulas apresentadas anteriormente, precisamos verificar se a taxa de juro e o período de tempo estão em uma mesma unidade de medida de tempo. Por exemplo, se a taxa de juro é dada ao ano, o período de tempo também deve estar em anos. Nos casos em que isso não ocorre, devemos converter a taxa ou o período à mesma unidade de tempo.

No juro simples, uma taxa de 2,1% a.m. (ao mês), por exemplo, é equivalente a 25,2% a.a., pois $\underbrace{0{,}021}_{2{,}1\%} \cdot 12 = \underbrace{0{,}252}_{25{,}2\%}$.

De maneira parecida, uma taxa de 36% a.a. no juro simples é equivalente a 3% a.m., pois $\underbrace{0{,}36}_{36\%} : 12 = \underbrace{0{,}03}_{3\%}$.

Observação

Duas taxas são equivalentes quando, se aplicadas em um mesmo capital e durante um mesmo período de tempo, produzem montantes iguais.

Exercícios e problemas resolvidos

R9. Sérgio comprou R$ 12 000,00 em móveis para sua nova loja. Uma das condições de pagamento oferecida a ele foi pagar R$ 12 900,00 depois de 15 dias da data da compra. Considerando o sistema de juro simples, o mês com 30 dias e que a cobrança seja diária, qual foi a taxa de juro mensal oferecida a ele nessa condição?

Resolução

Inicialmente, escreveremos o tempo em meses. Para isso, fazemos:

$$\frac{15}{30} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Utilizando a fórmula $M = c \cdot (1 + i \cdot t)$, para $M = 12\,900$, $c = 12\,000$ e $t = 0{,}5$, temos:

$$12\,900 = 12\,000 \cdot (1 + i \cdot 0{,}5) \Rightarrow \frac{12\,900}{12\,000} = 1 + i \cdot 0{,}5 \Rightarrow i = 0{,}15 = 15\%$$

Portanto, a taxa de juro simples oferecida a ele foi 15% a.m.

R10. Para o cliente que atrasa o pagamento da fatura mensal, uma companhia de abastecimento de água cobra multa diária de 0,4% sobre o valor da fatura do mês. O fornecimento de água é interrompido quando o valor da multa torna-se maior do que 20% do valor da fatura sobre o qual incide a multa. Considerando o mês com 30 dias, determine o número de meses e dias de atraso até que a companhia faça o corte do fornecimento de água por falta de pagamento.

Resolução

De acordo com o enunciado, 20% do valor de c da fatura é dado por:

$$\frac{20}{100} \cdot c = 0{,}2c$$

Assim, temos:

$$j > 0{,}2c \Rightarrow c \cdot i \cdot t > 0{,}2c \Rightarrow c \cdot 0{,}004 \cdot t > 0{,}2c \Rightarrow t > \frac{0{,}2}{0{,}004} \Rightarrow t > 50$$

Portanto, o corte no fornecimento de água será feito após 50 dias de atraso.

Juro composto

Professor, professora: Após trabalhar com esta página, se julgar conveniente, construa na lousa um quadro comparativo entre juro simples e juro composto. Nessa construção, incentive a participação ativa dos estudantes, solicitando que apresentem características de cada um desses sistemas de juro.

A Matemática primitiva começou a ser desenvolvida a partir de embasamentos práticos, quando, ao longo dos rios Nilo, Tigre, Eufrates, entre outros, surgiram sociedades, como os babilônios e os egípcios. A partir de tarefas como o controle de inundações desses rios e da drenagem de pântanos, foi possível o desenvolvimento de tecnologias e da Matemática, originando-se a chamada Matemática primitiva. Essas práticas requeriam o cálculo de calendários funcionais, o desenvolvimento de um sistema de medidas, a criação de métodos de agrimensura, a instituição de práticas financeiras e comerciais para o lançamento e a arrecadação de taxas etc. Alguns dos documentos, registrados em tábulas de argila, mostram que os sumérios, antiga civilização que viveu na região da Mesopotâmia por volta de 2100 a.C., já utilizavam vários tipos de conhecimentos financeiros, como os atualmente denominados juro simples e juro composto.

Fonte de pesquisa: EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. da Unicamp, 2004. p. 57-60.


BRIDGEMAN IMAGES/EASY MEDIABANK – MUSEU DO LOUVRE, PARIS

Tábula mesopotâmica que apresenta cálculos financeiros, exposta no Museu do Louvre, em Paris, França.

Para iniciarmos o estudo com **juro composto**, considere o seguinte exemplo.

Exemplo

Talita aplicou R$ 2 580,00 a uma taxa de juro composto de 3% a.m. durante três meses. Podemos calcular o montante obtido ao final dessa aplicação da seguinte maneira.

O sistema de juro composto corresponde a um caso particular de acréscimos sucessivos, cujas taxas de acréscimo são todas iguais. Para calcular os acréscimos sucessivos, utilizamos a seguinte fórmula:

$$P = P_0 \cdot (1 + i_1) \cdot (1 + i_2) \cdot (1 + i_3) \cdot \cdots \cdot (1 + i_n)$$

Fazendo $P = M$ e $P_0 = c$, temos:

$$M = c \cdot (1 + i_1) \cdot (1 + i_2) \cdot (1 + i_3) \cdot \cdots \cdot (1 + i_n)$$

Substituindo na fórmula c por 2 580 e $i_1 = i_2 = i_3$ por 0,03:

$$M = 2\,580 \cdot (1 + 0{,}03) \cdot (1 + 0{,}03) \cdot (1 + 0{,}03) \simeq 2\,819{,}24$$

Portanto, o montante obtido ao final da aplicação foi R$ 2 819,24.

Calculamos o montante obtido ao aplicar um capital a juro composto da seguinte maneira.

$M = c \cdot (1 + i_1) \cdot (1 + i_2) \cdot (1 + i_3) \cdot \cdots \cdot (1 + i_n)$, em que $i_1 = i_2 = i_3 = \cdots = i_n = i$

Como as taxas de acréscimos estão associadas a um período de tempo, temos $n = t$. Logo:

$$M = c \cdot \underbrace{(1 + i) \cdot (1 + i) \cdot (1 + i) \cdot \cdots \cdot (1 + i)}_{t \text{ fatores iguais}}$$

$$M = c \cdot (1 + i)^t$$

OBJETO DIGITAL ***Podcast*:** Uma aplicação do juro composto: 1 centavo que dobra seu valor diariamente ou 1 000 reais por dia?

Nessa fórmula:

- a taxa de juro deve ser escrita na forma decimal;
- o tempo e a taxa de juro devem estar na mesma unidade de medida de tempo.

Utilizando essa fórmula para obter o montante da situação apresentada no exemplo, temos:

$$M = c \cdot (1 + i)^t$$
$$M = 2\,580 \cdot (1 + 0{,}03)^3 = 2\,580 \cdot 1{,}03^3 \simeq 2\,819{,}24$$

Observação

No juro composto, não podemos multiplicar ou dividir uma taxa dada em certo período e obter uma equivalente em outro período, como ocorre no juro simples. No caso do juro composto, é necessário realizar outros cálculos.

Questão D. João aplicou R$ 1500,00 em um investimento de renda fixa a uma taxa de juro composto de 0,38% a.m. durante um ano. Que montante ele obteve ao final desse investimento? Resposta: R$ 1569,85

Exercícios e problemas resolvidos

R11. Utilizando uma calculadora, determine o montante obtido ao final de cada um dos três primeiros meses, ao se investir um capital de R$ 235,00 a juro composto de 5% ao mês.

Resolução

Para determinar o montante ao final do 1º mês, acrescentamos ao capital 5% do valor do capital, ou seja, multiplicamos $\underbrace{1{,}05}_{1+0{,}05}$ por 235. Utilizando a calculadora comum, digitamos a sequência de teclas a seguir.

1 · 0 5 × 2 3 5 =

Professor, professora: As etapas de cálculo necessárias na resolução desta tarefa podem variar de acordo com o modelo da calculadora.

Para determinar o montante do 2º e do 3º mês, respectivamente, digitamos novamente a tecla = duas vezes.

=

2º mês

=

3º mês

Observação

Ao digitar novamente a tecla =, a calculadora repete a operação 1 · 0 5 ×, isto é, multiplica o resultado anterior por 1,05. Desse modo, obtemos o montante do mês seguinte no sistema de juro composto.

ILUSTRAÇÕES: SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

Professor, professora: Diga aos estudantes que este exercício resolvido também pode ser desenvolvido com uma calculadora científica ou com o aplicativo Calculadora de um *smartphone*.

R12. Leandro aplicou R\$ 30 000,00 a juros compostos de 1% ao mês. Considerando que os juros são calculados mensalmente e reinvestidos na aplicação, responda às seguintes questões:

a) Quantos reais Leandro terá após 5 meses de aplicação?

b) Qual será o valor dos juros obtidos ao final desse período?

c) Qual seria o montante total após 5 meses de aplicação se a taxa de juros fosse de 2% ao mês?

d) Qual é o valor mínimo necessário para Leandro aplicar caso ele necessite obter R\$ 40 000,00 ao final de 5 meses de aplicação, considerando a taxa de 1% ao mês?

Resolução

a) Utilizando a fórmula $M = c(1+i)^t$, para $c = 30\,000$, $i = 0{,}01$ e $t = 5$, temos:

$$M = 30\,000(1+0{,}01)^5 = 30\,000 \cdot 1{,}01^5 \simeq 30\,000 \cdot 1{,}051 = 31\,530$$

Portanto, Leandro terá, aproximadamente, R\$ 31 530,00 após 5 meses de aplicação.

b) Para calcular os juros obtidos, subtraímos do montante (M) o valor do capital aplicado (c), ou seja:

$$M - c = 31\,530 - 30\,000 = 1\,530$$

Portanto, o valor dos juros obtidos é R\$ 1 530,00.

c) Utilizando a fórmula $M = c(1+i)^t$, para $c = 30\,000$, $i = 0{,}02$ e $t = 5$, temos:

$$M = 30\,000(1+0{,}02)^5 = 30\,000 \cdot 1{,}02^5 \simeq 30\,000 \cdot 1{,}104 = 32\,120$$

Portanto, o montante seria de aproximadamente R\$ 32 120,00 após 5 meses de aplicação se a taxa de juros fosse de 2% ao mês.

d) Utilizando a fórmula $M = c(1+i)^t$, para $M = 40\,000$, $i = 0{,}01$ e $t = 5$, temos:

$$40\,000 = c(1+0{,}01)^5$$
$$40\,000 = c \cdot 1{,}01^5$$
$$40\,000 \simeq c \cdot 1{,}051$$
$$c \simeq \frac{40\,000}{1{,}051} = 38\,059{,}00$$

Portanto, o valor mínimo necessário para Leandro aplicar é de R\$ 38 059,00.

R13. Jonas aplicou, no investimento **A**, R\$ 10 000,00 durante 12 meses a uma taxa de juro composto de 4% a.m. Supondo que Jonas opte por investir durante 12 meses na **caderneta de poupança** a uma taxa de juro de 0,5% a.m., qual deve ser o capital aplicado para que ele obtenha o mesmo montante obtido no investimento **A**?

Caderneta de poupança: um dos investimentos mais populares do país, que conta com simplicidade e baixo risco. Além disso, é garantida pelo governo e suas regras de funcionamento são reguladas pelo Banco Central.

Resolução

Indicando por M_A o montante obtido no investimento **A**, temos:

$$M_A = c \cdot (1+i)^t \Rightarrow M_A = 10\,000 \cdot (1+0{,}04)^{12} \simeq 16\,010{,}32$$

Seja M_P e c_P, respectivamente, o montante desejado com a aplicação na caderneta de poupança e o capital aplicado na caderneta de poupança. Assim:

$$M_P = c_P \cdot (1+i)^t \Rightarrow 16\,010{,}32 = c_P \cdot (1+0{,}005)^{12} \Rightarrow c_P = \frac{16\,010{,}32}{1{,}005^{12}} \simeq 15\,080{,}21$$

Portanto, a fim de obter o mesmo montante alcançado no investimento **A**, Jonas deveria aplicar R\$ 15 080,21 na caderneta de poupança.

R14. Geraldo pagou R\$ 321,92 por um boleto de cobrança com três dias de atraso. Sabendo que sobre esse boleto foi cobrado 0,2% de acréscimo sucessivo por dia de atraso, calcule o valor original desse boleto caso tivesse sido pago em dia. Resolva esse problema utilizando a fórmula $M = c \cdot (1+i)^t$.

Resolução

Utilizando a fórmula $M = c(1+i)^t$, para $M = 321{,}92$, $i = 0{,}002$ e $t = 3$, temos:

$$321{,}92 = c \cdot (1+0{,}002)^3 \Rightarrow 321{,}92 = c \cdot 1{,}002^3 \Rightarrow c \simeq \frac{321{,}92}{1{,}006} \simeq 320$$

Portanto, o valor original desse boleto seria R\$ 320,00.

Acessando tecnologias

Cálculo de juro simples em planilhas eletrônicas

As planilhas eletrônicas são tabelas que podem ser preenchidas com diversas informações, como textos, dados numéricos e fórmulas. Além disso, elas possibilitam a organização de dados e têm recursos para realizar cálculos, esboçar gráficos, restringir dados, fazer preenchimentos automáticos, entre outras funcionalidades. Algo importante a destacar é que uma planilha se divide em regiões retangulares, denominadas células, indicadas pelo cruzamento de uma linha (indicada por um número) com uma coluna (indicada por uma letra). As planilhas eletrônicas são úteis para abordar diversos assuntos, como os que estão relacionados à Matemática financeira.

Apresentaremos a seguir um exemplo envolvendo juro simples.

Arnaldo pagou uma dívida de R$ 15 000,00, cuja cobrança era diária, com 10 dias de atraso. Sabendo que nessa dívida era cobrado juro de mora de 1,2% a.m. e considerando o mês com 30 dias, determine a quantia, em reais, paga por Arnaldo.

Observação

Juro de mora é aquele cobrado sobre pequenos atrasos no pagamento de uma dívida.

A. Com uma planilha eletrônica "aberta", preencha as células conforme apresentado na figura **1**.

	A	B	C
1	Período (dia)	Juro (R$)	Montante (R$)
2	0	0	15000
3	1		
4	2		

Figura **1**.

B. Preencha o intervalo **A2:A12** com a sequência dos números naturais de 0 a 10. Para isso, selecione o intervalo **A2:A3**, clique sobre a **Guia de autopreenchimento** e arraste até a célula **A12**.

Dica

Uma taxa de 1,2% a.m. é equivalente a 0,04% a.d. (ao dia).

C. Calcule o juro ao final do 1º dia. Para isso, digite =0,0004*C$2 na célula **B3** e pressione **Enter**.

Professor, professora: Auxilie os estudantes no uso da **Guia de autopreenchimento**, orientando-os a clicar no quadrado preto no canto inferior direito da célula e arrastar sobre as células em que se deseja reaplicar o conteúdo ou as fórmulas.

Observação

Para que o juro simples calculado na célula **B3**, relacionado ao capital de R$ 15 000,00 (célula **C2**), seja mantido nas células seguintes, na **Guia de autopreenchimento**, utilizamos o símbolo $ (cifrão) em = 0,0004 * C$2.

Professor, professora: No **Suplemento para o professor**, há mais informações sobre a planilha eletrônica usada nesta seção.

D. Calcule o montante ao final do 1º dia. Para isso, na célula **C3**, digite =C2+B3 e pressione **Enter**.

E. Preencha a planilha com o juro e o montante ao final de cada período. Para isso, selecione o intervalo **B3:C3**, clique sobre a **Guia de autopreenchimento** e arraste até a linha 12 (correspondente ao 10º dia) conforme a figura **2**.

Portanto, o valor da dívida que Arnaldo pagou é R$ 15 060,00.

	A	B	C
1	Período (dia)	Juro (R$)	Montante (R$)
2	0	0	15000
3	1	6	15006
4	2	6	15012
5	3	6	15018
6	4	6	15024
7	5	6	15030
8	6	6	15036
9	7	6	15042
10	8	6	15048
11	9	6	15054
12	10	6	15060

ILUSTRAÇÕES: SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

Figura **2**.

Agora é sua vez!

1. Em qual célula foi inserido o valor inicial da dívida? Em qual célula foi calculado o valor do montante correspondente ao dia do pagamento dessa dívida? Resposta: Célula **C2**; célula **C12**.

2. De acordo com essa planilha, qual foi o valor do juro obtido ao final de cada dia?
Resposta: R$ 6,00

3. Utilizando uma planilha eletrônica, determine qual será o valor pago de uma dívida de R$ 135,00 que foi quitada 15 dias após o vencimento, sobre a qual incidiu juro de mora de 0,9% a.m. Se não for possível o acesso ao *software*, realize os cálculos em seu caderno. Resposta: R$ 135,61

Cálculo de juro composto em planilhas eletrônicas

Agora, utilizando esse mesmo recurso, vamos resolver uma situação envolvendo juro composto.

Márcia aplicou, em um investimento de renda fixa, R$ 15 000,00 durante 10 meses a uma taxa de juro composto de 1% a.m. Qual foi o montante obtido por ela ao final desses 10 meses?

A. Com uma planilha eletrônica "aberta", preencha as células conforme apresentado na figura **3**.

	A	B	C
1	Período (mês)	Juro (R$)	Montante (R$)
2	0	0	15000
3	1		

Figura **3**.

B. Preencha o intervalo **A2:A12** com a sequência dos números naturais de 0 a 10. Para isso, selecione o intervalo **A2:A3**, clique sobre a **Guia de autopreenchimento** e arraste até a célula **A12**.

C. Calcule o juro ao final do 1º mês. Para isso, digite =0,01*C2 na célula **B3** e pressione **Enter**.

Observação

Note que nesse caso não utilizamos o símbolo $, pois não desejamos que o capital (célula **C2**) seja mantido.

D. Calcule o montante ao final do 1º mês. Para isso, na célula **C3**, digite =C2+B3 e pressione **Enter**.

E. Preencha a planilha com o juro e o montante ao final de cada período. Para isso, selecione o intervalo **B3:C3**, clique sobre a **Guia de autopreenchimento** e arraste até a linha 12 (correspondente ao 10º mês), de acordo com a figura **4**.

	A	B	C
1	Período (mês)	Juro (R$)	Montante (R$)
2	0	0	15000
3	1	150	15150
4	2	151,5	15301,5
5	3	153,02	15454,52
6	4	154,55	15609,06
7	5	156,09	15765,15
8	6	157,65	15922,8
9	7	159,23	16082,03
10	8	160,82	16242,85
11	9	162,43	16405,28
12	10	164,05	16569,33

Figura **4**.

ILUSTRAÇÕES: SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

Para exibir os montantes ao final de cada período com no máximo duas casas decimais, como na planilha apresentada, selecione o intervalo **C2:C12** e clique sobre a opção **Excluir casa decimal** três vezes.

Portanto, o montante obtido, ao final desses 10 meses, foi R$ 16 569,33.

Agora é sua vez!

4. No exemplo apresentado, selecione as células referentes ao 10º mês e, utilizando a **Guia de autopreenchimento**, arraste-as até a linha 242. Calcule quantas vezes o montante é maior do que o capital inicial ao final de:

a) 3 anos. Resposta: Aproximadamente 1,43 vez maior.
b) 5 anos. Resposta: Aproximadamente 1,82 vez maior.
c) 10 anos. Resposta: Aproximadamente 3,3 vezes maior.
d) 20 anos. Resposta: Aproximadamente 10,9 vezes maior.

5. Utilizando uma planilha eletrônica, determine qual será o valor do montante obtido em uma aplicação de R$ 18 530,00 durante 30 anos, a uma taxa de juro composto de 12% a.a. Resposta: R$ 555 157,36

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

Dica

Nas tarefas desta seção, quando necessário, considere o mês com 30 dias.

49. Sabendo que um capital c, aplicado a juro simples, rende em 4 meses o equivalente a $\frac{1}{5}$ de seu valor, determine a taxa de juro simples mensal.
Resposta: 5% a.m.

50. Uma pessoa aplicou uma quantia **A** em um investimento de 6% a.a. e uma quantia **B** em um investimento de 7% a.a., ambos no sistema de juro simples, obtendo R$ 345,00 de rendimento total ao final de um ano. Sabendo que o rendimento total seria de R$ 370,00 se as quantias **A** e **B** fossem aplicadas, respectivamente, nos investimentos de 7% a.a. e 6% a.a., calcule o valor total aplicado por essa pessoa. Resposta: R$ 5 500,00

51. Luiz pagou um boleto bancário no valor de R$ 750,00 com 12 dias de atraso. Sabendo que foi cobrado 2,4% a.m. de juro de mora e que a cobrança é diária, determine o valor que ele pagou.
Resposta: R$ 757,20

52. Certa loja de informática vende um teclado à vista por R$ 270,00 ou em parcela única de R$ 298,35, paga 90 dias após a compra. Caso um consumidor deseje comprar esse teclado pagando-o após 90 dias, qual será a taxa mensal de juro simples a pagar? Resposta: 3,5% a.m.

53. Em certa loja, Daniele comprou o refrigerador indicado no cartaz em duas parcelas iguais de R$ 1 100,00: a 1ª no ato da compra, e a 2ª após 30 dias, acrescida de juro.

LEONARDO GIBRAN/ARQUIVO DA EDITORA

a) Qual é a taxa de juro mensal cobrada por essa loja? Resposta: 10% a.m.

b) Quantos reais Daniele economizaria se pagasse o valor total à vista, sabendo que nessa modalidade de pagamento a loja ainda concede ao consumidor 8% de desconto sobre o preço do cartaz? Resposta: R$ 268,00

54. Luís aplicou R$ 2 600,00 em um fundo de investimento que lhe rende juro composto de 18% a.a. Qual será o montante obtido por Luís após três anos de investimento? Resposta: R$ 4 271,88

55. Um investidor aplicou R$ 1 100,00 em certo investimento. Analise no quadro a taxa de juro em cada um dos três primeiros meses de aplicação.

Taxa de juro em cada mês de aplicação

Mês	1º	2º	3º
Taxa de juro	3,2% a.m.	3,2% a.m.	0,5% a.m.

Dica

Nesse período, o investidor não aplicou outra quantia nem fez retiradas.

Qual foi o montante ao final do 3º mês?
Resposta: R$ 1 177,39

56. Qual deve ser a taxa de juro mensal para que um capital investido sob o regime de juro composto quadriplique em 70 meses? Para responder essa pergunta, utilize uma calculadora. Resposta: 2%

57. Fabiana tomou como empréstimo a importância de R$ 3 500,00 de certa instituição financeira que cobra uma taxa fixa de 4% a.m., no regime de juro composto. Sabendo que ela pretende pagar essa dívida em parcela única após quatro meses, quantos reais de juro Fabiana pagará por esse empréstimo?
Resposta: R$ 594,50

58. Certo capital foi aplicado à taxa de juro composto de 1,8% a.m. durante um ano e dois meses, gerando um montante de R$ 729,15.

a) Qual foi o capital investido nessa aplicação?
Resposta: Aproximadamente R$ 568,00.

b) Ao final do período, qual foi o percentual de aumento dessa aplicação?
Resposta: Aproximadamente 28,37%.

59. Uma pessoa aplicou R$ 15 000,00 em um fundo de investimento que rende certa taxa de juro composto. Sabendo que após dois anos o montante obtido foi R$ 17 496,00 determine a taxa de juro composto anual dessa aplicação. Resposta: 8%

60. Em certa loja, uma bola de futsal que custa R$ 120,00 à vista pode ser paga em duas parcelas, sendo uma de entrada, no ato da compra, no valor de R$ 70,00, e outra dois meses após a compra, no valor de R$ 54,08, capitalizada a juro composto. Qual é a taxa mensal de juro composto cobrada por essa loja? Resposta: 4%

61. Um investidor aplicou R$ 2 300,00 em um fundo monetário que rende juro composto de 1,7% a.m. Passados três meses, ele aplicou mais R$ 1 100,00 nesse mesmo fundo.

a) Quantos reais de juro esses investimentos renderam juntos após a 1ª aplicação completar um ano? Resposta: R$ 695,87

b) Se seis meses após a 1ª aplicação esse investidor retirasse R$ 3 000,00, qual seria o montante dois anos após a 2ª aplicação? Resposta: R$ 999,98

Professor, professora: Caso julgue necessário, oriente os estudantes a utilizar uma calculadora científica ou uma calculadora de *smartphone*, para efetuar os cálculos da tarefa **56**, considerando $\sqrt[70]{4} = 4^{\left(\frac{1}{70}\right)}$.

64. c) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes digam que sim, pois nesse caso o montante obtido seria R$ 12 509,69, que é maior do que o montante total obtido ao aplicar simultaneamente nos investimentos **A** e **B**.

62. Um empréstimo de R$ 8 600,00 a uma taxa de juro composto de 8% a.a. foi quitado da seguinte maneira:

- dois anos após o empréstimo, houve um pagamento de R$ 3 700,00.
- três anos após o 1º pagamento, houve outro, agora no valor de R$ 4 900,00.
- dois anos após o 2º pagamento, a dívida foi liquidada.

Com base nessas informações, responda às questões.

a) Qual era o saldo devedor após o 2º pagamento? Resposta: R$ 3 075,29

b) Quanto foi pago de juro ao término do pagamento da dívida? Resposta: R$ 3 587,02

63. Júlio aplicou, sob o regime de juro composto, a importância de R$ 7 500,00, com taxa de 2,5% a.m., por dois trimestres. Professor, professora: Se julgar conveniente, diga aos estudantes que um trimestre corresponde a um período de três meses.

a) Qual foi o montante ao fim desse período? Resposta: R$ 8 697,70

b) Devido a pagamentos de impostos, o montante a ser retirado por Júlio sofrerá uma redução de 3%. Qual será o valor líquido retirado após esse investimento? Resposta: R$ 8 436,77

64. Certo investidor aplicou simultaneamente, em regime de juro composto, durante oito meses, dois capitais da seguinte maneira:

- investimento **A**: R$ 5 000,00 com taxa de juro de 3% a.m.
- investimento **B**: R$ 4 500,00 com taxa de juro de 3,5% a.m.

a) Qual foi o montante total obtido ao final do 8º mês com esses investimentos? Resposta: R$ 12 259,50

b) Qual dos investimentos gerou o maior rendimento? Resposta: O investimento **B**.

c) Em sua opinião, seria mais vantajoso se esse investidor aplicasse todo o capital no investimento de maior rentabilidade? Justifique sua resposta.

65. Em 2019, os contribuintes brasileiros tiveram de trabalhar até o dia 2 de junho somente para pagar impostos. Suponha que nesse mesmo ano uma pessoa pagou R$ 12 000,00 de impostos.

a) Se esse capital tivesse sido aplicado a uma taxa de juro composto de 0,6% a.m., durante um ano, quantos reais renderia essa aplicação? Resposta: R$ 893,09

b) Junte-se a um colega e façam uma pesquisa sobre alguns impostos cobrados no Brasil e a que são destinados. Na opinião de vocês, há setores que precisariam receber uma parcela maior de investimento? Converse com seus colegas e com o professor a respeito dessas questões. Resposta pessoal. A resposta depende do resultado da pesquisa dos estudantes.

66. Mário tem R$ 20 000,00 aplicados a uma taxa de juros compostos de 2% ao mês. Ele deseja comprar uma motocicleta cujo preço à vista, com todos os descontos possíveis, é R$ 21 000,00. Sabendo que esse valor não será reajustado nos próximos meses e que ele escolheu manter todo o seu dinheiro aplicado até que o montante atinja o valor da motocicleta, Mário deve esperar: Resposta: Alternativa **d**.

a) quatro meses e terá a quantia exata.

b) quatro meses e ainda sobrarão, aproximadamente, R$ 430,00.

c) três meses e terá a quantia exata.

d) três meses e ainda sobrarão, aproximadamente, R$ 225,00.

67. Certa instituição financeira apresentou ao cliente três possibilidades de investimento, com rentabilidades líquidas garantidas pelo período de um ano.

Investimento **A**: 3% ao mês
Investimento **B**: 36% ao ano
Investimento **C**: 18% ao semestre

LAÍS GARBELINI/ ARQUIVO DA EDITORA

Para esses investimentos, as rentabilidades incidem sobre o valor do período anterior, conforme exemplo de análise das rentabilidades aproximadas apresentado na tabela.

Análise das rentabilidades para o investimento A

n	$1{,}03^n$
3	1,093
6	1,194
9	1,305
12	1,426

Fonte de pesquisa: Anotações da instituição financeira.

Considerando que esse cliente decida investir uma determinada quantia no investimento com a maior rentabilidade anual, ele deverá: Resposta: Alternativa **c**.

a) escolher qualquer uma das três opções de investimento, pois as suas rentabilidades anuais são iguais a 36%.

b) escolher o investimento **B**, pois sua rentabilidade de 36% é maior que as rentabilidades de 3% do investimento **A** e de 18% do investimento **C**.

c) escolher o investimento **A**, pois a sua rentabilidade anual é maior que as rentabilidades anuais dos investimentos **B** e **C**.

d) escolher o investimento **C**, pois sua rentabilidade de 39% ao ano é maior que a rentabilidade de 36% ao ano dos investimentos **A** e **B**.

Situações envolvendo juro simples e juro composto

Nas páginas anteriores, calculamos juro simples e composto. Agora, vamos analisar uma situação em que uma pessoa precisa decidir sob qual desses sistemas ela vai aplicar determinada quantia.

Certo investidor vai aplicar R$ 23 000,00 durante cinco anos. Nessas condições, foram-lhe oferecidos dois tipos de investimento: o investimento **A** e o investimento **B**. Nos quadros, são apresentados os montantes obtidos ao final de cada período nos cinco primeiros meses de aplicação.

Investimento A sob o regime de juro simples à taxa de juro de 7% a.m.

Período (mês)	Montante
0	R$ 23 000,00
1	R$ 24 610,00
2	R$ 26 220,00
3	R$ 27 830,00
4	R$ 29 440,00
5	R$ 31 050,00
⋮	⋮

Investimento B sob o regime de juro composto à taxa de juro de 5% a.m.

Período (mês)	Montante
0	R$ 23 000,00
1	R$ 24 150,00
2	R$ 25 357,50
3	R$ 26 625,38
4	R$ 27 956,64
5	R$ 29 354,48
⋮	⋮

Observação

Nessa situação fictícia, o regime de juro utilizado no investimento **A** é o de juro simples. Vale destacar que em situações cotidianas não há investimento sob esse regime de juro.

No investimento **A**, por ser utilizado o sistema de juro simples, sempre é acrescido ao montante um mesmo valor, ou seja, o montante apresenta um crescimento linear. Já no investimento **B**, por ser usado o sistema de juro composto, o montante aumentará cada vez mais rápido com o passar do tempo, pois o juro é calculado sempre sobre o montante obtido no período anterior. Nesse caso, dizemos que o montante apresenta um crescimento exponencial.

Questão E. Em sua opinião, qual dos investimentos é o mais vantajoso para esse investidor?

Questão E. Resposta pessoal. Espera-se que para responder a essa questão os estudantes levem em consideração o montante obtido ao final de cinco anos, e não o montante correspondente ao 5º mês de aplicação.

Vamos calcular o montante obtido ao final da aplicação, em cada um dos investimentos, para verificarmos qual é o mais vantajoso para o investidor.

Investimento A

$M = c \cdot (1 + i \cdot t)$

$M = 23\,000 \cdot (1 + 0{,}07 \cdot 60)$

$M = 119\,600$

Investimento B

$M = c \cdot (1 + i)^t$

$M = 23\,000 \cdot (1 + 0{,}05)^{60}$

$M = 429\,621{,}28$

Logo, o montante obtido ao final da aplicação no investimento **A** seria R$ 119 600,00 e no investimento **B** seria R$ 429 621,28. Note que, mesmo aparentando ser mais vantajoso nos cinco primeiros meses de aplicação, o investimento **A** oferece, ao investidor, um montante bem inferior ao oferecido pelo investimento **B**. Portanto, o investimento **B** é o mais vantajoso.

Questão F. Se esse investidor aplicasse esse capital durante sete meses, qual seria o investimento mais vantajoso? E se ele fosse investir durante dois anos? Justifique suas respostas.

Questão F. Resposta: Caso a aplicação fosse em um período de sete meses, o investimento **A** traria, ao investidor, um montante de R$ 34 270,00, enquanto o investimento **B** traria um montante de R$ 32 363,31. Portanto, em sete meses, o investimento **A** seria mais vantajoso. Caso a aplicação fosse em um período de dois anos, o investimento **A** traria, ao investidor, um montante de R$ 61 640,00 enquanto o investimento **B** traria um montante de R$ 74 177,30. Portanto, em dois anos, o investimento **B** seria mais vantajoso.

R15. Na planilha eletrônica a seguir, estão os montantes obtidos ao final dos seis primeiros períodos em dois investimentos: um com taxa de juro simples e o outro com taxa de juro composto.

	A	B	C
1	Período (mês)	Montante no investimento **A** (R$)	Montante no investimento **B** (R$)
2	0	23560	23560
3	1	25916	24384,6
4	2	28272	25238,06
5	3	30628	26121,39
6	4	32984	27035,64
7	5	35340	27981,89
8	6	37696	28961,26

SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

a) Qual dos investimentos utiliza o regime de juro composto?

b) Qual é a taxa de juro mensal do investimento **A**? E do investimento **B**?

c) Qual investimento é mais vantajoso, caso o período de aplicação seja de 12 anos?

Resolução

a) Calculando, para cada um dos investimentos, a diferença entre o montante obtido ao final do 2º mês e o obtido ao final do 1º mês, temos:

Investimento A

$28\,272 - 25\,916 = 2\,356$

Investimento B

$25\,238{,}06 - 24\,384{,}6 = 853{,}46$

Agora, calculando, para cada um dos investimentos, a diferença entre o montante obtido ao final do 3º mês e o obtido ao final do 2º mês, temos:

Investimento A

$30\,628 - 28\,272 = 2\,356$

Investimento B

$26\,121{,}39 - 25\,238{,}06 = 883{,}33$

Como o valor acrescido ao montante no investimento **B** aumenta com o passar do tempo, então esse investimento utiliza o regime de juro composto.

b) Sabemos que o juro obtido ao final do primeiro mês no investimento **A** é R$ 2 356,00. Assim:

$$\frac{2\,356}{23\,560} = 0{,}1 = 10\%$$

Já no investimento **B**, o juro obtido ao final do primeiro mês é dado por 24 384,60 − 23 560. Assim:

$$\frac{24\,384{,}6 - 23\,560}{23\,560} = \frac{824{,}6}{23\,560} = 0{,}035 = 3{,}5\%$$

Portanto, a taxa de juro do investimento **A** é 10% a.m., e a do investimento **B** é 3,5% a.m.

c) Calculando o montante obtido ao final de 12 anos para o investimento **A**, temos:

$$M = c(1 + i \cdot t) \Rightarrow M = 23\,560 \cdot (1 + 0{,}1 \cdot 12 \cdot 12) = 362\,824$$

Calculando o montante obtido ao final de 12 anos para o investimento **B**, temos:

$$M = c\,(1 + i)^t \Rightarrow M = 23\,560 \cdot (1 + 0{,}035)^{12 \cdot 12} \simeq 3\,338\,763{,}5$$

Professor, professora: No expoente do cálculo do item **c**, 12 vezes 12 corresponde a 144 meses, ou seja, 12 anos.

Como R$ 3 338 763,50 é maior do que R$ 362 824,00, então o investimento **B** é o mais vantajoso caso o período de aplicação seja de 12 anos.

Anote as respostas no caderno.

68. Arlindo está em dúvida entre as seguintes opções para investir R$ 12 000,00.

69. b) Resposta: Investimento **A**: 10% a.m.; investimento **B**: 7,5% a.m.; investimento **C**: 7,5% a.m.

- Opção **1**: investir sob regime de juro composto a uma taxa de 6,5% a.a.
- Opção **2**: Investir sob regime de juro simples a uma taxa de 6,5% a.a.

69. d) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes respondam que, se o período de investimento for 12 anos, é melhor optar pelo investimento **B**; já se o período de investimento for cinco meses, seria melhor optar pelo investimento **A**.

Utilizando uma calculadora, responda:

a) Após quanto tempo o investimento obtido em ambas as opções será o mesmo? Resposta: Após 1 ano.

b) Caso Arlindo aplique esse capital por dois anos, qual é a diferença entre o montante obtido em cada uma das opções? Resposta: R$ 50,70

69. A planilha eletrônica a seguir apresenta o montante obtido ao final de alguns períodos em três investimentos diferentes.

Sabendo que nesses investimentos é utilizado o regime de juro simples ou de juro composto, responda às questões.

a) Em qual desses investimentos o montante apresenta um crescimento exponencial? E em qual apresenta crescimento linear? Resposta: No investimento **B**; nos investimentos **A** e **C**.

b) Qual é a taxa de juro mensal de cada um desses investimentos?

c) Se o capital aplicado no investimento **A** fosse aplicado no investimento **C**, qual seria o montante ao final do 10º mês? Resposta: R$ 15 689,28

	A	B	C	D
1	Período (mês)	Montante no investimento **A** (R$)	Montante no investimento **B** (R$)	Montante no investimento **C** (R$)
2	0	8965,3	12589	56000
3	1	9861,83	13533,18	60200
4	2	10758,36	14548,16	64400
5	3	11654,89	15639,28	68600
6	4	12551,42	16812,22	72800
7	5	13447,95	18073,14	77000
8	6	14344,48	19428,62	81200
9	7	15241,01	20885,77	85400
10	8	16137,54	22452,2	89600
11	9	17034,07	24136,12	93800
12	10	17930,6	25946,33	98000

SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

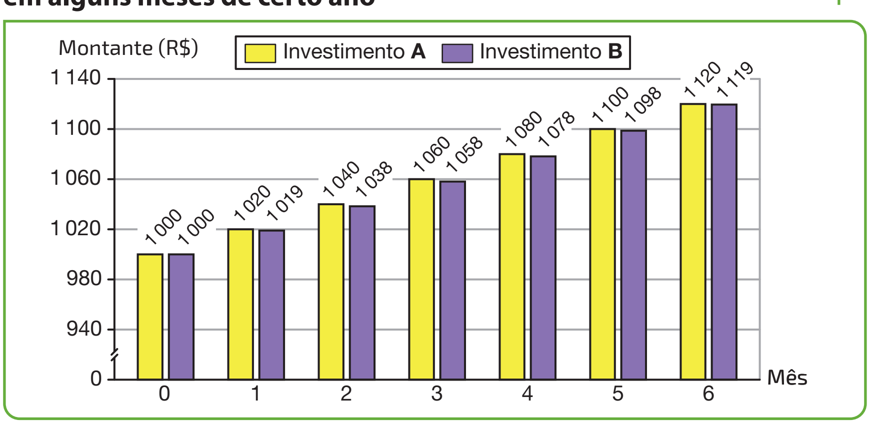
d) Suponha que você precise escolher entre um desses investimentos para aplicar R$ 27 000,00 durante 12 anos. Por qual dos investimentos você optaria? E se o período de investimento fosse de cinco meses?

Dica
Para responder ao item **d**, utilize uma planilha eletrônica.

70. Analise a seguir o montante obtido ao final de cada mês em dois investimentos.

Professor, professora: As informações apresentadas no gráfico são fictícias.

Montante obtido ao final de cada período nos investimentos A e B, em alguns meses de certo ano



Fonte de pesquisa: Instituição financeira.

RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

70. e) Resposta pessoal. Espera-se que, após realizar a pesquisa, os estudantes comentem, por exemplo, que se a pessoa quer retorno do dinheiro em pouco tempo, o investimento a curto prazo, em média de dois anos, é o mais indicado, e que se não houver pressa, os investimentos a médio e longo prazo são mais vantajosos.

a) Qual é a taxa de juro mensal de cada um desses investimentos? Resposta: Investimento **A**: 2% a.m.; investimento **B**: 1,9% a.m.

b) Em qual desses investimentos é utilizado o sistema de juro composto? Resposta: No investimento **B**.

c) Em sua opinião, o montante obtido ao final do 7º mês será maior em qual dos investimentos? Justifique sua resposta. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes estimem que 1,9% de R$ 1119,55 é maior do que 2% de R$ 1 000,00.

d) Calcule o montante obtido ao final do 7º mês em cada um dos investimentos. Sua previsão no item **c** está correta? Resposta: Investimento A: R$ 1140,00; investimento **B**: R$ 1140,83. A resposta depende da estimativa realizada pelo estudante no item **c**.

e) Faça uma pesquisa a respeito das características dos investimentos de longo, médio e curto prazo. Em sua opinião, quando devemos aplicar um capital em investimentos de longo prazo? E em investimentos de curto prazo? Converse com os colegas e o professor a respeito dessas questões e sobre a importância de poupar.

Equivalência de capitais

Pagar R$ 100,00 hoje ou R$ 110,00 daqui a um mês? É vantajoso pagar à vista ou em prestações mensais iguais? Em seis vezes de R$ 60,00 ou em oito de R$ 48,00? Para responder a perguntas como essas, devemos analisar o valor de uma quantia no decorrer do tempo.

Questão G. Considere que você encontrou um investimento que faça seu dinheiro render 8% a.m. Nesse caso, ao fazer uma compra, você optaria por pagar R$ 100,00 hoje ou R$ 110,00 daqui a um mês? Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes respondam que, como o dinheiro rende 8% a.m., daqui a um mês R$ 100,00 serão um montante de R$ 108,00. Assim, é mais vantajoso pagar R$ 100,00 hoje do que R$ 110,00 daqui a um mês.

Em tópico anterior, vimos que um capital c no regime de juro composto, aplicado por t períodos de tempo a uma taxa i, resulta em um montante $M = c \cdot (1 + i)^t$. Em outras palavras: uma quantia C_0 equivalerá no futuro, depois de t períodos de tempo, a uma quantia $C_F = C_0 \cdot (1 + i)^t$. Essa é a **fórmula fundamental da equivalência de capitais**.

O valor futuro (VF) de um capital é dado pelo produto entre o valor atual (VA) e $(1 + i)^t$. Já o valor atual de um capital é dado pelo quociente entre o valor futuro e $(1 + i)^t$. Ou seja:

$$\text{VF} = \text{VA}(1 + i)^t$$

$$\text{VA} = \frac{\text{VF}}{(1 + i)^t}$$

Nessas fórmulas:

- a taxa de juro deve ser escrita na forma decimal;
- a taxa de juro e o período devem estar na mesma unidade de medida de tempo.

Observação

Para determinar a equação de equivalência de capitais, é preciso saber se a capitalização é simples ou composta. Nesta coleção, abordaremos somente casos que envolvem capitalização composta. Se o problema não especificar o tipo de capitalização, deve-se utilizar o regime de juro composto.

Exemplo 1 Professor, professora: Orientações sobre o cálculo de equivalência de capitais envolvendo juro simples no **Suplemento para o professor**.

Depois de 12 meses a uma taxa de juro de 5% a.a., uma quantia de R$ 1 300,00 equivalerá a uma quantia de R$ 1 365,00, pois:

$$\text{VF} = \text{VA}(1 + i)^t \Rightarrow \text{VF} = 1\,300(1 + 0{,}05)^1 = 1\,365$$

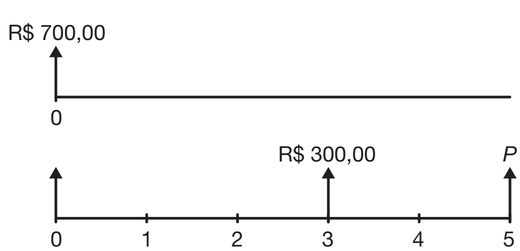
Daqui a 25 meses, uma quantia de R$ 7 368,00 a uma taxa de 0,9% a.m. equivale hoje a uma quantia de R$ 5 889,39, pois:

$$\text{VA} = \frac{\text{VF}}{(1 + i)^t} \Rightarrow \text{VA} = \frac{7\,368}{(1 + 0{,}009)^{25}} \simeq 5\,889{,}39$$

Exemplo 2

Artur tomou um empréstimo de R$ 700,00 a uma taxa de juro de 12% a.m. Ele quitou esse empréstimo da seguinte maneira: três meses após o empréstimo, pagou R$ 300,00; dois meses após o primeiro pagamento, quitou a dívida.

Para determinarmos qual foi o valor do último pagamento P, podemos construir esquemas de pagamento.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

Os esquemas de pagamento são equivalentes.

Vamos igualar os valores, no mesmo período, dos pagamentos nos dois esquemas. Para isso, devemos considerar, por exemplo, o período 0. Desse modo, temos:

$$700 = \frac{300}{(1 + 0{,}12)^3} + \frac{P}{(1 + 0{,}12)^5} \Rightarrow P \simeq 857{,}32$$

Portanto, o último pagamento foi R$ 857,32.

Exemplo 3

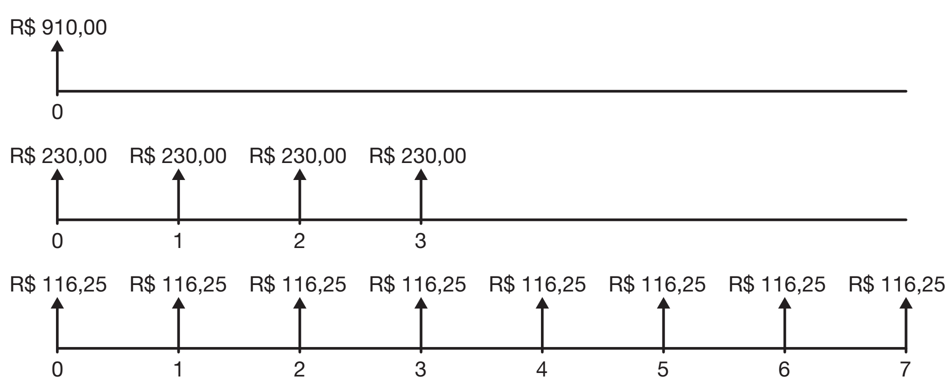
Ao realizar certa compra, um consumidor pode escolher as seguintes opções de pagamento:

Opção **1**: à vista, por R$ 910,00.

Opção **2**: quatro prestações mensais de R$ 230,00 cada, com a primeira parcela paga no ato da compra.

Opção **3**: oito prestações mensais de R$ 116,25 cada, com a primeira parcela paga no ato da compra.

Sabendo que o dinheiro desse consumidor rende 1,5% a.m., vamos determinar qual é a melhor opção para ele. Para isso, construímos os esquemas de pagamento.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Em seguida, para comparar as opções, determinamos o valor dos conjuntos de pagamento no mesmo período. Considerando o período 0, temos:

Opção **1**: 910

Opção **2**:

$$230 + \frac{230}{(1 + 0{,}015)^1} + \frac{230}{(1 + 0{,}015)^2} + \frac{230}{(1 + 0{,}015)^3} \simeq 899{,}81$$

Opção **3**:

$$116{,}25 + \frac{116{,}25}{(1 + 0{,}015)^1} + \frac{116{,}25}{(1 + 0{,}015)^2} + \frac{116{,}25}{(1 + 0{,}015)^3} + \frac{116{,}25}{(1 + 0{,}015)^4} +$$
$$+ \frac{116{,}25}{(1 + 0{,}015)^5} + \frac{116{,}25}{(1 + 0{,}015)^6} + \frac{116{,}25}{(1 + 0{,}015)^7} \simeq 883{,}29$$

Portanto, esse consumidor deve optar pelo pagamento em oito prestações.

Professor, professora: Na seção **Acessando tecnologias** deste tópico, será apresentado o cálculo da opção **2** em uma planilha eletrônica. Caso julgue pertinente, desenvolva o trabalho com essa seção ao apresentar o exemplo **3**.

Questão H. Considerando que o dinheiro de Marta está investido para render 1,8% a.m., que opção de pagamento ela deve escolher entre as apresentadas a seguir para realizar uma compra?

Resposta: Opção **1**.

- Opção **1**: à vista, por R$ 70,00.
- Opção **2**: três prestações de R$ 26,00, com a primeira paga um mês após a compra.

Dica

Fique atento! A melhor opção para uma pessoa nem sempre é a melhor para outra.

Observação

Quando nada for dito sobre a data de pagamento da primeira parcela, considere que ela será paga um mês após a compra.

Resolvendo por etapas

Leandro vai comprar uma geladeira. Para pagá-la, a loja lhe oferece as seguintes opções:

- Opção **1**: à vista, com 15% de desconto sobre o preço da geladeira.
- Opção **2**: valor da geladeira dividido em três parcelas mensais iguais, com a primeira paga no ato da compra.
- Opção **3**: valor da geladeira dividido em sete parcelas mensais iguais, com a primeira paga no ato da compra.

Se o dinheiro de Leandro está investido e rende 2% a.m., qual é a opção de pagamento mais vantajosa para ele?

A. Compreendendo o problema

1. O que se pede no problema?
A opção de pagamento mais vantajosa para Leandro.

2. Quais são os dados apresentados no problema?
Pagamento à vista tem 15% de desconto; nas opções de parcelamento, as prestações são iguais e a primeira é paga no ato da compra; o dinheiro de Leandro rende 2% a.m.

B. Organizando as ideias e elaborando um plano

1. Registrando um possível plano.
Inicialmente, determinamos um suposto preço para a geladeira. Em seguida, calculamos 15% desse valor e também o valor de cada parcela nas opções de pagamento **2** e **3**. Na sequência, determinamos e comparamos os valores dos conjuntos de pagamentos no mesmo período.

2. Escolhendo as notações.
P_V: preço à vista no período 0.
P_2: valor do conjunto de pagamentos da opção **2** no período 0.
P_3: valor do conjunto de pagamentos da opção **3** no período 0.

C. Executando o plano

Passo 1

Supondo que a geladeira custe R$ 2 100,00, vamos determinar o preço à vista e o valor de cada parcela nas opções de pagamento **2** e **3**.

Preço à vista.

Como $0{,}85 \cdot 2\,100 = 1785$, então essa geladeira custará R$ 1 785,00 à vista.

Valor de cada parcela na opção **2**.

$$\frac{2\,100}{3} = 700$$

Desse modo, na opção **2**, o valor de cada parcela será R$ 700,00.

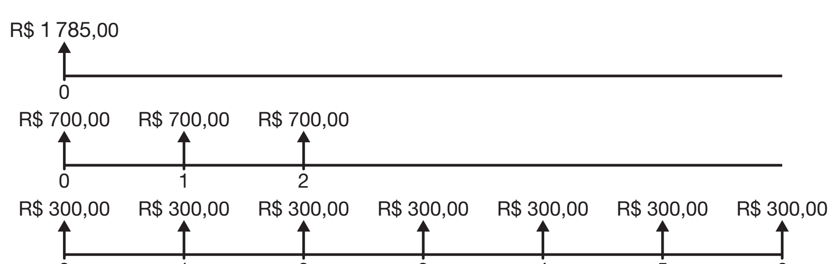
Valor de cada parcela na opção **3**.

$$\frac{2\,100}{7} = 300$$

Desse modo, na opção **3**, o valor de cada parcela será R$ 300,00.

Passo 2

Em seguida, construímos os esquemas de pagamento.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Passo 3

Comparando os valores no período 0, temos:

- $P_v = 1785$
- $P_2 = 700 + \frac{700}{(1 + 0{,}02)^1} + \frac{700}{(1 + 0{,}02)^2} \simeq 2\,059{,}09$
- $P_3 = 300 + \frac{300}{(1 + 0{,}02)^1} + \frac{300}{(1 + 0{,}02)^2} + \frac{300}{(1 + 0{,}02)^3} + \frac{300}{(1 + 0{,}02)^4} + \frac{300}{(1 + 0{,}02)^5} + $
  $+ \frac{300}{(1 + 0{,}02)^6} \simeq 1980{,}43$

Portanto, a opção mais vantajosa para Leandro é a opção **1**, ou seja, o pagamento à vista.

D. Verificando a solução obtida

Utilizando a regra de três simples, percebemos que o valor obtido para P_v está correto.

Quantia (R$)	Porcentagem (%)
x	100
1785	85

$$85x = 100 \cdot 1785$$
$$x = \frac{178\,500}{85}$$
$$x = 2\,100$$

Para verificar se o valor obtido para P_2 está correto, vamos construir um quadro.

Valores e saldos por período

Período	Valor da parcela (R$)	Valor futuro, após um mês, do saldo do período anterior, a uma taxa de 2% a.m. (R$)	Saldo (R$)
0	700	0	$2\,059{,}09 - 700 = 1\,359{,}09$
1	700	$1\,359{,}09 \cdot (1 + 0{,}02) \simeq 1\,386{,}27$	$1\,386{,}27 - 700 = 686{,}27$
2	700	$686{,}27 \cdot (1 + 0{,}02) \simeq 700$	$700 - 700 = 0$

Professor, professora: Oriente os estudantes a efetuar os cálculos para confirmar o valor da terceira opção de pagamento. Com a ajuda deles, escreva o quadro na lousa contendo os resultados obtidos.

Como no final do 2º período o saldo é 0, o valor obtido está correto. De maneira semelhante, verificamos que o valor obtido para P_3 está correto.

Observação

Verifique se é possível utilizar, com algumas adequações, o plano apresentado na seção **Resolvendo por etapas** para obter a solução de alguns problemas parecidos propostos na seção **Exercícios e problemas** deste tópico.

Agora é você quem resolve!

Respostas no final do **Livro do Estudante**.

1. Leia o problema.

Denise vai comprar um computador que custa R$ 1500,00. Para pagá-lo, foram oferecidas a ela as seguintes opções:

Opção **1**: à vista, no valor de R$ 1500,00.

Opção **2**: três parcelas de R$ 500,00 por mês, com a primeira paga um mês após a compra.

Opção **3**: parcela única de R$ 1650,00, seis meses após a compra.

Sabendo que o dinheiro de Denise rende 3% a.m., qual é a opção mais vantajosa para ela?

2. É possível resolver o problema utilizando, com algumas adequações, o plano apresentado nesta seção? Qual é a resposta deste problema?

Acessando tecnologias

Valor atual de uma quantia em planilha eletrônica

Vamos efetuar o cálculo proposto no exemplo **3** da página **255**, correspondente à opção **2**, com o auxílio de uma planilha eletrônica.

A. Com a planilha aberta, preencha as células conforme exemplo a seguir.

	A	B	C	D
1	Período (mês)	Prestação (R$)	Valor atual (R$)	Resultado (R$)
2	0	230		
3	1			

B. Preencha o intervalo **A2:A5** com a sequência dos números naturais de 0 a 3. Para isso, selecione o intervalo **A2:A3**, clique sobre a **Guia de autopreenchimento** e arraste até a célula **A5**.

C. Calcule o valor atual da quantia paga no ato da compra no período 0. Para isso, digite =B2/(1+0,015)^A2 na célula **C2** e pressione **Enter**.

D. Preencha a planilha com a quantia paga em cada prestação. Para isso, selecione a célula **B2**, clique sobre a **Guia de autopreenchimento** e arraste até a linha **5**.

E. Preencha a planilha com o valor atual de cada uma das prestações no período 0. Para isso, selecione a célula **C2**, clique sobre a **Guia de autopreenchimento** e arraste até a linha **5**.

	A	B	C	D
1	Período (mês)	Prestação (R$)	Valor atual (R$)	Resultado (R$)
2	0	230	230	899,91
3	1	230	226,6	
4	2	230	223,25	
5	3	230	219,95	

Para exibir os valores de cada período com no máximo duas casas decimais, como na planilha apresentada, selecione o intervalo **C2:C5** e clique sobre a opção **Excluir casa decimal** três vezes.

F. Calcule a soma dos valores atuais das prestações no período 0. Para isso, digite =SOMA(C2**:**C5) na célula **D2**.

Portanto, como foi calculado para a opção **2**, a soma dos valores atuais das prestações no período 0 é R$ 899,81.

Agora é sua vez!

1. Utilizando uma planilha eletrônica, determine o valor futuro, após seis meses, de R$ 1 500,00 a uma taxa de 12% a.m. Resposta: R$ 2 960,73

2. De maneira semelhante à apresentada, efetue o cálculo correspondente à opção **3**, proposto no exemplo **3** da página **255**. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

Exercícios e problemas resolvidos

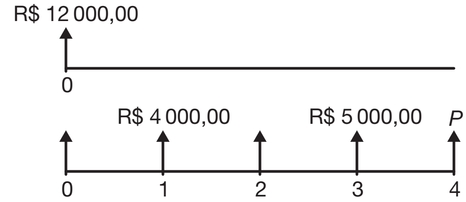
R16. Edvaldo captou um empréstimo de R$ 12 000,00 a uma taxa de juro de 22% a.a. Ele quitou esse empréstimo da seguinte maneira:

- um ano após o empréstimo, pagou R$ 4 000,00;
- dois anos após o 1º pagamento, pagou R$ 5 000,00;
- um ano após o 2º pagamento, quitou o empréstimo.

Qual foi o valor pago por Edvaldo no último pagamento?

Resolução

Para que seja determinado o valor do último pagamento, indicamos o valor desconhecido por P e construímos os esquemas de pagamento.



Em seguida, igualamos os valores, no mesmo período, dos pagamentos nos dois esquemas. Considerando o período 0, temos:

$$12\,000 = \frac{4\,000}{(1+0{,}22)^1} + \frac{5\,000}{(1+0{,}22)^3} + \frac{P}{(1+0{,}22)^4} \Rightarrow P \simeq 13220{,}62$$

Portanto, o último pagamento realizado por Edvaldo foi R$ 13 220,62.

R17. Elaine comprou um televisor. Para pagá-lo, ela pode escolher uma das opções apresentadas a seguir.

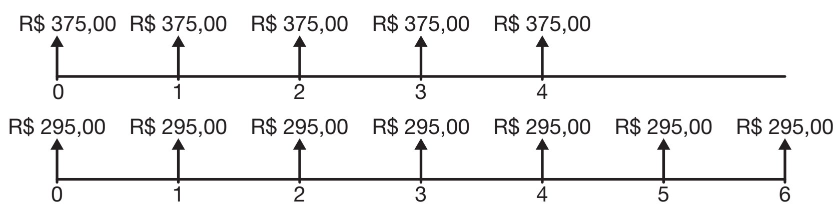
Opção **A**: cinco prestações mensais de R$ 375,00 cada.

Opção **B**: sete prestações mensais de R$ 295,00 cada.

Sabendo que em ambas as opções a primeira parcela é paga no ato da compra e que o dinheiro de Elaine rende 4% a.m., qual é a opção mais vantajosa para ela?

Resolução

Inicialmente, representamos os esquemas de pagamento.



Comparando os valores no período **4**, temos:

Opção **A**:

$$375 \cdot (1+0{,}04)^4 + 375 \cdot (1+0{,}04)^3 + 375 \cdot (1+0{,}04)^2 + 375 \cdot (1+0{,}04)^1 + 375 \simeq 2\,031{,}12$$

Opção **B**:

$$295 \cdot (1+0{,}04)^4 + 295 \cdot (1+0{,}04)^3 + 295 \cdot (1+0{,}04)^2 +$$

$$+ 295 \cdot (1+0{,}04)^1 + 295 + \frac{295}{(1+0{,}04)} + \frac{295}{(1+0{,}04)^2} \simeq 2\,154{,}21$$

Portanto, Elaine deve optar pelo pagamento em cinco prestações, ou seja, pela opção **A**.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

Dica

As tarefas desta seção devem ser resolvidas com o auxílio de uma calculadora ou planilha eletrônica.

71. Para pagar um perfume, Lara tem as seguintes opções: Resposta: Opção 3.

Opção **1**: à vista, por R$ 270,00.

Opção **2**: uma entrada de R$ 100,00 e, após um mês, uma parcela de R$ 170,00.

Opção **3**: sem entrada e três parcelas mensais e consecutivas de R$ 90,00 cada.

Sabendo que o dinheiro de Lara rende 0,5% a.m., qual é a opção de pagamento mais vantajosa para ela?

72. No dia 10 de maio de 2024, Carlos comprou uma calça e um sapato, gastando, ao todo, R$ 300,00. A loja ofereceu a ele três opções de pagamento:

- à vista, com 3% de desconto;
- duas prestações mensais de R$ 150,00, com a primeira parcela paga no ato da compra;
- no cartão de crédito, em dez prestações de R$ 30,00.

Sabendo que o dinheiro de Carlos rende 0,8% ao mês e que no cartão de crédito a primeira prestação vence apenas no dia 10 de junho de 2024, determine qual é a opção mais vantajosa para ele.
Resposta: O pagamento em dez prestações de R$ 30,00 no cartão de crédito.

Sistema Price

Professor, professora: Para iniciar os estudos, procure estabelecer uma conversa com os estudantes a fim de verificar o quanto eles já sabem sobre os temas de financiamento e amortização de dívidas, buscando situá-los no assunto. Com comentários e perguntas, fomente o debate quanto às vantagens e desvantagens de compras parceladas, e quanto aos planos deles para realização de sonhos futuros e para a conquista de seus objetivos materiais, levando-os a refletir sobre as opções mais factíveis. Instigue-os a aperfeiçoar seus planos com base na aprendizagem advinda deste tópico sobre sistema de amortização.

Estudamos anteriormente que, em algumas situações, a indisponibilidade de capital para adquirir um bem pode levar um indivíduo a realizar um financiamento. Ao efetuar os pagamentos parciais para saldar uma dívida, ocorre sua amortização.

Amortização é o processo de redução de uma dívida por meio de pagamentos parciais, que podem ser mensais, bimestrais, anuais, entre outros. Cada pagamento (ou prestação) realizado corresponde ao juro e a uma parte do capital (valor da dívida), sendo o juro calculado sobre o saldo devedor.

Observação

O saldo devedor corresponde à diferença entre o valor da dívida e o que já foi pago.

De maneira resumida, a prestação é dada por:

$$\text{Prestação} = \text{Amortização} + \text{Juro}$$

As maneiras de pagamento de uma dívida estão associadas a diferentes sistemas de amortização, sendo dois dos principais o Sistema de Amortização Constante (SAC), em que a amortização da dívida é constante, igual em cada período, e o sistema Price ou Francês, com prestações fixas.

A seguir, iremos estudar o sistema Price, em que o devedor paga o empréstimo em prestações fixas, sendo o número de prestações variável, de acordo com o contrato entre as partes (devedor e credor).

Esse sistema foi desenvolvido e utilizado pela primeira vez na França, no século XIX. No entanto, foi concebido pelo economista e matemático inglês Richard Price (1723-1791), que incorporou a teoria de juro composto às amortizações de empréstimos. Dessa maneira, recebeu a denominação de sistema Price ou, ainda, “Tabela Price”.

Fonte de pesquisa: DI AGUSTINI, Carlos Alberto; ZELMANOVITS, Nei Schilling. *Matemática aplicada à gestão de negócios*. 1. ed. Rio de Janeiro: FGV, 2005. p. 87-89.

BIBLIOTECA NACIONAL DO PAÍS DE GALES, ABERYSTWYTH

Richard Price, de Benjamin West. Óleo sobre tela, 92,8 cm × 72,4 cm, 1788.

Para calcular o valor de cada prestação de um empréstimo no sistema Price, utilizamos a fórmula:

Professor, professora: A fórmula apresentada não será demonstrada, pois o mais importante neste momento é que o estudante perceba a relação entre as variáveis e sua aplicação.

$$P = \frac{c \cdot i}{1 - (1 + i)^{-n}}$$

Nessa fórmula, temos:

P: valor da prestação.

c: valor do bem ou empréstimo.

i: taxa de juro na forma decimal.

n: quantidade de prestações.

Observação

Quando não informarmos o regime de juro, considere o regime de juro composto.

Professor, professora: Diga aos estudantes que os cálculos podem ser realizados em uma calculadora científica. Os procedimentos para isso serão trabalhados no problema **R18** da seção **Exercícios e problemas resolvidos** da página seguinte.

Exemplo

Paula fez um empréstimo de R$ 3 000,00, que deve ser pago em cinco prestações mensais à taxa de juro de 2,5% a.m., no sistema Price. Utilizando a fórmula apresentada anteriormente, podemos calcular o valor de cada prestação da seguinte maneira:

$$P = \frac{c \cdot i}{1 - (1 + i)^{-n}} = \frac{3\,000 \cdot 0{,}025}{1 - (1 + 0{,}025)^{-5}} \simeq 645{,}74$$

Portanto, o valor de cada prestação é, aproximadamente, R$ 645,74.

Observação

Quando nada for dito sobre a data de pagamento da primeira parcela, considere que ela será paga um mês após a compra ou o empréstimo.

Como no sistema Price os pagamentos são parcelados, é conveniente construir um demonstrativo indicando a situação da dívida em cada período de tempo. Analise como ficaria o demonstrativo em relação ao empréstimo feito por Paula.

Demonstrativo de amortização do empréstimo de Paula no sistema Price

n	Pagamento (R$)	Juro (R$)	Amortização (R$)	Saldo devedor (R$)
0	0	0	0	3 000,00
1	645,74	$\underbrace{75{,}00}_{3\,000 \cdot 0{,}025}$	$\underbrace{570{,}74}_{645{,}74 - 75}$	$\underbrace{2\,429{,}26}_{3\,000 - 570{,}74}$
2	645,74	$\underbrace{60{,}73}_{2\,429{,}26 \cdot 0{,}025}$	$\underbrace{585{,}01}_{645{,}74 - 60{,}73}$	$\underbrace{1\,844{,}25}_{2\,429{,}26 - 585{,}01}$
3	645,74	46,11	599,63	1 244,62
4	645,74	31,11	614,63	629,99
5	645,74	15,75	629,99	0

Observação

No demonstrativo, os cálculos para obter os valores para $n = 1$ e $n = 2$ estão indicados. Nas demais linhas, os resultados são obtidos de maneira semelhante, e por isso não foram indicados.

Analisando o demonstrativo, nota-se que a quantia correspondente ao juro é cada vez menor, pois é calculada sobre o saldo devedor, que também é cada vez menor.

Exercícios e problemas resolvidos

R18. Construa um demonstrativo do sistema Price de acordo com as informações apresentadas no anúncio.

LEONARDO GIBRAN/ARQUIVO DA EDITORA

Resolução

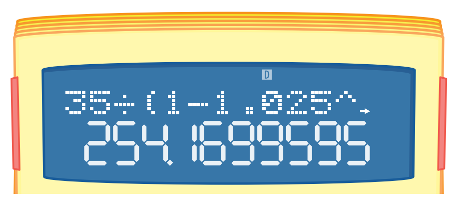
Inicialmente, calculamos o valor de cada parcela utilizando a fórmula.

$$P = \frac{c \cdot i}{1 - (1 + i)^{-n}} \Rightarrow P = \frac{1\,400 \cdot 0{,}025}{1 - (1 + 0{,}025)^{-6}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = \frac{35}{1 - (1{,}025)^{-6}} \Rightarrow P \simeq 254{,}17$$

Utilizando uma calculadora científica, podemos efetuar esse cálculo com a sequência de teclas a seguir.

3 5 ÷ (1 − 1 · 0 2 5 ^ − 6) =



SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

Logo, o valor de cada parcela é R$ 254,17.

Em seguida, construímos o demonstrativo.

Demonstrativo de amortização na compra do *smartphone* no sistema Price

n	Pagamento (R$)	Juro (R$)	Amortização (R$)	Saldo devedor (R$)
0	0	0	0	1 400,00
1	254,17	$\underbrace{35{,}00}_{1\,400 \cdot 0{,}025}$	$\underbrace{219{,}17}_{254{,}17 - 35}$	$\underbrace{1\,180{,}83}_{1\,400 - 219{,}17}$
2	254,17	29,52	224,65	956,18
3	254,17	23,90	230,27	725,91
4	254,17	18,15	236,02	489,89
5	254,17	12,25	241,92	247,97
6	254,17	6,20	247,97	0

R19. Anderson pretende comprar um imóvel no valor de R$ 150 000,00. Para isso, ele vai dar uma entrada de R$ 50 000,00 e fazer um financiamento imobiliário para pagar o restante. Após pesquisar algumas opções, ele recebeu a seguinte proposta: pagamento de 120 parcelas mensais, com juro de 0,5% a.m. no sistema Price. Qual é o valor de cada prestação no financiamento oferecido a Anderson?

Resolução

Inicialmente, calculamos a quantia *c* que Anderson vai financiar.

$$c = 150\,000 - 50\,000 = 100\,000$$

Assim, a quantia financiada será R$ 100 000,00.

Em seguida, calculamos o valor de cada prestação utilizando a fórmula.

$$P = \frac{c \cdot i}{1 - (1 + i)^{-n}}$$

$$P = \frac{100\,000 \cdot 0{,}005}{1 - (1 + 0{,}005)^{-120}} \simeq 1\,110{,}21$$

Portanto, o valor de cada uma das prestações é R$ 1 110,21.

R20. Tatiana comprou um automóvel. O pagamento dessa compra será realizado da seguinte maneira: entrada de R$ 19 000,00 mais 18 parcelas mensais fixas de R$ 1 369,49, com juro mensal de 2,3%. Qual é o preço desse automóvel?

Resolução

Inicialmente, calculamos o valor financiado *c* por Tatiana.

$$P = \frac{c \cdot i}{1 - (1 + i)^{-n}}$$

$$1\,369{,}49 = \frac{c \cdot 0{,}023}{1 - (1 + 0{,}023)^{-18}}$$

$$1\,369{,}49 = c \cdot \frac{0{,}023}{1 - (1{,}023)^{-18}}$$

$$c = \frac{1\,369{,}49 \cdot \left(1 - 1{,}023^{-18}\right)}{0{,}023} \simeq 20\,000$$

Desse modo, Tatiana financiou R$ 20 000,00. Adicionando o valor financiado e a entrada paga por ela, temos:

$$\text{R\$ } 19\,000{,}00 + \text{R\$ } 20\,000{,}00 = \text{R\$ } 39\,000{,}00$$

O preço desse automóvel é R$ 39 000,00.

R21. Para comprar um produto que custa R$ 2 000,00, Lucas pode escolher uma das opções apresentadas a seguir.

Opção **A**: três prestações mensais sem entrada, no sistema Price.

Opção **B**: parcela única, paga após três meses da compra.

Sabendo que em ambas as opções a taxa de juro é 2% a.m., em qual delas o preço final do produto é menor?

Resolução

Inicialmente, calculamos o valor de cada prestação *P* na opção **A**.

$$P = \frac{c \cdot i}{1 - (1 + i)^{-n}} \Rightarrow P = \frac{2\,000 \cdot 0{,}02}{1 - (1 + 0{,}02)^{-3}} \simeq 693{,}51$$

Desse modo, o preço final do produto na opção **A** é:

$$3 \cdot \text{R\$ } 693{,}51 = \text{R\$ } 2\,080{,}53$$

Por fim, vamos calcular o preço final *M* do produto na opção **B**.

$$M = c \cdot (1 + i)^n \Rightarrow M = 2\,000 \cdot (1 + 0{,}02)^3 \simeq 2\,122{,}42$$

Portanto, o preço final do produto é menor na opção **A**.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

73. Para realizar empréstimos em certo banco que cobra juro no sistema Price, é exigido que o valor da prestação não ultrapasse 25% do salário líquido do cliente. É possível que uma pessoa que recebe R$ 2 200,00 de salário líquido mensal empreste R$ 3 900,00 desse banco, para serem pagos em um ano com prestações mensais fixas e juro de 1,9% a.m. no sistema Price? Justifique sua resposta. Resposta: Sim, pois o valor da prestação (R$ 366,52) é menor do que 25% do salário líquido (R$ 550,00) dessa pessoa.

74. Certo cliente de um banco realizou um empréstimo que será pago em nove prestações mensais de R$ 928,46 sem entrada, com juro de 1,4% a.m. no sistema Price. Quantos reais esse cliente emprestou do banco? Resposta: R$ 7 800,02

75. Felipe trocará seu automóvel usado por um novo. A imagem apresenta o anúncio do automóvel que ele deseja comprar.

LEONARDO GIBRAN/ARQUIVO DA EDITORA

Para essa compra, Felipe vai dar seu automóvel como entrada, no valor de R$ 25 000,00, e vai pagar o restante em 48 parcelas mensais no sistema Price.

a) Determine o valor de cada parcela paga por Felipe. Resposta: R$ 1 316,69

b) Nessas condições, quantos reais de juro Felipe pagará? Resposta: R$ 13 201,12

76. Uma empresa tomou emprestado uma quantia de R$ 75 000,00 a ser paga em oito parcelas mensais no sistema Price. Admitindo que a taxa de juro é de 2% ao mês, determine o valor:

a) do juro embutido na 4ª parcela. Resposta: R$ 965,15

b) da amortização na 5ª parcela. Resposta: R$ 9 458,52

c) do saldo devedor após o pagamento da 6ª parcela. Resposta: R$ 19 878,32

77. Analise parte de um demonstrativo de amortização no sistema Price.

Parte do demonstrativo de amortização no sistema Price

n	Pagamento (R$)	Juro (R$)	Amortização (R$)	Saldo devedor (R$)
0	0	0	0	2 000,00
1	234,46	60	174,46	1 825,54

Com base nos dados apresentados, determine o saldo devedor após o pagamento da 3ª parcela. Resposta: R$ 1 460,77

78. Poupar é adiar o consumo no momento presente, a fim de consumir de modo mais eficiente no futuro. Essa ação garante ao consumidor juntar reservas que serão utilizadas posteriormente e um consumo que não ultrapasse sua renda.

Contudo, por conta das diversas realidades financeiras dos consumidores ou por simples desconhecimento do assunto, as pessoas costumam poupar e investir pouco. Geralmente, quando compramos a prazo, deixamos de ganhar descontos e podemos até pagar juro e outros custos adicionais.

A questão não está entre comprar e não comprar, mas entre receber a mercadoria pagando prestações e juro ou poupar e comprar a mercadoria com desconto no futuro.

A melhor solução nem sempre é alongar o prazo de pagamento. O segredo para uma compra mais vantajosa, muitas vezes, consiste na pesquisa de preços e na possibilidade de pagamentos à vista.

a) Suponha que o consumidor queira comprar um televisor que custa à vista R$ 2 378,27, em 12 parcelas mensais iguais, com juro de 2% a.m. Calcule o valor de cada parcela e o total a ser pago. Resposta: Valor da parcela: R$ 224,89; total pago: R$ 2 698,68.

b) Quanto maior a quantidade de parcelas, maior é o preço pago pelo produto? Justifique sua resposta. Resposta: Sim. Ao aumentar o número de parcelas, há um aumento no juro, pois este é mensal.

c) Faça uma pesquisa sobre o preço à vista e a prazo de um produto e construa uma tabela indicando a situação da dívida em cada período de tempo. Resposta pessoal. Orientações sobre este item no **Suplemento para o professor**.

Controle do orçamento familiar

Uma das etapas mais importantes da organização financeira é o registro e a análise de receitas e despesas. É comum que as receitas sejam divididas entre **fixas**, como o salário, e **variáveis**, como benefícios e horas extras. Outra opção é dividi-las conforme a **fonte**, ou seja, de quem ou de onde vem cada uma delas.

Já as despesas podem ser divididas em categorias de acordo com o **motivo dos gastos**. Por exemplo, despesas com moradia devem estar separadas das despesas com saúde ou lazer. É possível também dividir as despesas em fixas, variáveis e extras ou, então, em relação às necessidades individuais ou familiares.

Após definir as categorias das despesas, podemos adicionar a quantia gasta em cada uma delas e determinar a quantos por cento da receita cada uma corresponde. Assim, é possível compreender o impacto dos tipos de gasto no orçamento e **tomar decisões** sobre como reduzi-los.

Analise, por exemplo, os registros feitos por Renata para controlar suas receitas e despesas. Professor, professora: As informações apresentadas nesta página são fictícias.

Observação

Geralmente, é mais simples organizar as receitas do que as despesas, porém, compreender "de onde vem" o dinheiro pode auxiliar no planejamento das despesas e de projetos.

As despesas podem ser feitas diariamente e a maneira com que é feita a divisão interfere diretamente na compreensão de como é gasto o dinheiro.

Receitas de Renata de janeiro a junho de 2024, em reais

Fonte da receita	Janeiro	Fevereiro	Março	Abril	Maio	Junho
Salário	R$ 2 500,00	R$ 2 500,00	R$ 2 500,00	R$ 2 500,00	R$ 2 500,00	R$ 2 500,00
Horas extras	R$ 0,00	R$ 500,00	R$ 0,00	R$ 250,00	R$ 0,00	R$ 0,00
Total	R$ 2 500,00	R$ 3 000,00	R$ 2 500,00	R$ 2 750,00	R$ 2 500,00	R$ 2 500,00

Fonte de pesquisa: Anotações de Renata.

Despesas de Renata de janeiro a junho de 2024, em reais

Motivo da despesa	Janeiro	Fevereiro	Março	Abril	Maio	Junho
Moradia	R$ 750,00	R$ 750,00	R$ 750,00	R$ 750,00	R$ 750,00	R$ 750,00
Alimentação	R$ 280,00	R$ 291,00	R$ 270,00	R$ 275,00	R$ 280,00	R$ 280,00
Transporte	R$ 900,00	R$ 876,00	R$ 920,00	R$ 891,00	R$ 900,00	R$ 920,00
Outros	R$ 270,00	R$ 234,00	R$ 280,00	R$ 319,00	R$ 250,00	R$ 410,00
Total	R$ 2 200,00	R$ 2 150,00	R$ 2 220,00	R$ 2 245,00	R$ 2 180,00	R$ 2 360,00
Saldo	R$ 300,00	R$ 850,00	R$ 280,00	R$ 505,00	R$ 320,00	R$ 140,00

Fonte de pesquisa: Anotações de Renata.

Porcentagem das receitas de Renata gasta mensalmente, por motivo da despesa, de janeiro a junho de 2024

Motivo da despesa	Janeiro	Fevereiro	Março	Abril	Maio	Junho
Moradia	30%	25%	30%	$\simeq$ 27,3%	30%	30%
Alimentação	11,2%	9,7%	10,8%	10%	11,2%	11,2%
Transporte	36%	29,2%	36,8%	32,4%	36%	36,8%
Outros	10,8%	7,8%	11,2%	11,6%	10%	16,4%
Total	88%	71,7%	88,8%	$\simeq$ 81,3%	87,2%	94,4%

Fonte de pesquisa: Anotações de Renata.

Professor, professora: Ao final desta página, proponha uma reflexão sobre o papel dos jovens no orçamento familiar, ressaltando a importância de planejar os gastos em todas as esferas da vida e mostrando como evitar a compra de produtos ou serviços dos quais não têm necessidade. Caso julgue pertinente, traga para o debate trechos do livro **Dinheiro não dá em árvore** (GODFREY, Neale S.; EDWARDS, Carolina. *Dinheiro não dá em árvore*: um guia para os pais criarem filhos financeiramente responsáveis. São Paulo: Jardim dos Livros, 2007).

Com esses registros, percebemos, por exemplo, que as despesas com transporte comprometem a maior parte da receita de Renata. Ao compreender o impacto desses gastos em seu orçamento, ela pode buscar opções para reduzi-lo. Afinal, se os gastos com transporte forem reduzidos, o dinheiro economizado pode ser usado em projetos ou outros gastos que melhorem a qualidade de vida dela.

Professor, professora: Explique aos estudantes que essa planilha é pessoal. Nesse caso, cada um, de acordo com suas necessidades, deve adicionar receitas, despesas fixas, despesas variadas e despesas extras. As sugeridas na imagem são apenas alguns exemplos.

Acessando tecnologias

Planilha eletrônica de controle de gastos

Nesta seção, vamos apresentar a estrutura de uma planilha eletrônica de controle de gastos, que realiza cálculos automaticamente e é personalizável.

A. Com a planilha "aberta", preencha as células conforme apresentado na figura **1**.

B. Na linha 1, complete as células a partir de **D1** com o nome de cada mês do ano. Em seguida, digite na célula **D5** (figura **2**) a fórmula =SOMA(D2**:**D4), que possibilita calcular a receita total do mês de janeiro.

4		Outros				
5		Total	=SOMA(D2:D4)			

Figura **2**.

C. Na sequência, selecione a célula **D5**, clique sobre a **Guia de autopreenchimento**, segure e arraste até a coluna desejada, para replicar essa fórmula para cada um dos outros meses.

D. Assim como nos passos **B** e **C**, preencha a planilha com as fórmulas correspondentes ao total das despesas fixas, variáveis e extras para cada um dos meses.

	A	B	C
1			Mês
2			Salário
3	Receitas		Horas extras
4			Outros
5			Total
6			
7			Aluguel
8			Plano de saúde
9		Fixas	Total
10			Porcentagem da receita
11			
12			Alimentação
13			Transporte
14	Despesas	Variáveis	Total
15			Porcentagem da receita
16			
17			Médico
18			Dentista
19		Extras	Total
20			Porcentagem da receita
21			
22	Saldo		

Figura **1**.

E. Escreva a fórmula que possibilite calcular a porcentagem das despesas fixas em relação à receita do mês de janeiro, digitando =D14/D15*100&"%" na célula **D10** (figura **3**). Depois, selecione a célula **D10**, clique sobre a **Guia de autopreenchimento**, segure e arraste até a coluna desejada para preencher a planilha com essa fórmula para cada um dos outros meses. De maneira semelhante à apresentada, preencha a planilha com as fórmulas correspondentes à porcentagem das despesas variáveis e extras para cada um dos meses.

9		Fixas	Total		
10			Porcentagem da receita	=D14/D15*100&"%"	
11					

Figura **3**.

F. Escreva a fórmula que possibilite calcular o saldo para o mês de janeiro (figura **3**). Para isso, digite =D5−(D9+D14+D19) na célula **D22**. Por fim, selecione a célula **D22**, clique sobre a **Guia de autopreenchimento**, segure e arraste até a coluna desejada para preencher a planilha com essa fórmula para cada um dos outros meses.

Agora é sua vez!

2. Resposta pessoal. Oriente os estudantes a registrar suas receitas e despesas mensais durante certo período de tempo, podendo fazer o controle diariamente ou semanalmente. Ao final do período, se julgar conveniente, solicite-lhes que construam um relatório sobre a composição de seus gastos, utilizando apenas as porcentagens de cada categoria, sem apresentar os valores específicos.

1. Escreva os procedimentos necessários para que o total das despesas fixas mensais seja preenchido automaticamente.

Resposta: Basta digitar =SOMA(D7**:**D8) na célula **D9** e, em seguida, selecionar a célula **D9**, clicar sobre a **Guia de autopreenchimento** e arrastar até a coluna desejada.

2. Registre, em uma planilha eletrônica, suas receitas e despesas pessoais e adicione as fórmulas para que os cálculos sejam realizados automaticamente. Se não for possível o acesso ao *software*, realize essa tarefa em seu caderno.

3. De acordo com a planilha construída na questão **2**, o que você percebe em relação ao seu orçamento pessoal? Em sua opinião, é necessário tomar alguma atitude para economizar em alguma despesa?

Resposta pessoal. A resposta depende da planilha construída pelo estudante.

ILUSTRAÇÕES: SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

Decisões financeiras

Após registrar, organizar e compreender o orçamento familiar, é possível tomar decisões sobre o que fazer com o dinheiro. Para realizar planos e sonhos, além de poupar, é necessário saber investir.

Quando uma pessoa tem uma dívida e a quantia para quitá-la, é melhor que ela quite sua dívida ou invista o dinheiro para quitá-la posteriormente?

Para responder a essa pergunta, vamos comparar, por exemplo, os valores acumulados com juro em um financiamento a uma taxa de 6,5% a.a. e os acumulados com o juro recebido em um investimento a uma taxa de 4,5% a.a., ambos com o mesmo capital inicial de R$ 10 000,00.

Questão I. De acordo com as informações apresentadas, em sua opinião, é mais vantajoso quitar a dívida ou investir o dinheiro? Justifique sua resposta.

Questão I. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes optem por quitar a dívida, pois, ao realizar algumas comparações, podemos perceber que os valores acumulados com o juro do financiamento são muito maiores do que os acumulados com o juro do investimento.

Realizando alguns cálculos é possível notar que os valores acumulados com o juro do financiamento são muito maiores do que os acumulados com o juro do investimento. Isso acontece, em geral, porque as taxas de juro praticadas pelas instituições financeiras são maiores para dívidas do que para investimentos. A recomendação é sempre quitar as dívidas e depois iniciar sua poupança.

Observação

Quando se trata de opções que envolvem taxa de juro, é importante simular os valores ao longo do tempo e verificar qual opção dá um retorno melhor.

Questão J. Suponha que uma família de quatro pessoas, composta por dois adultos, um adolescente e uma criança, viva com uma receita mensal de R$ 6 000,00. Distribua essa renda em despesas fixas, variáveis e extras e categorize, no caderno, o que e qual quantidade de receita irá compor cada uma dessas despesas. Resposta pessoal. Orientações sobre essa questão no **Suplemento para o professor**.

81. Professor, professora: Caso não haja calculadoras para todos os estudantes, reúna-os em grupos para que possam realizar a tarefa ou, então, avalie a possibilidade de levar algumas calculadoras para a sala de aula.

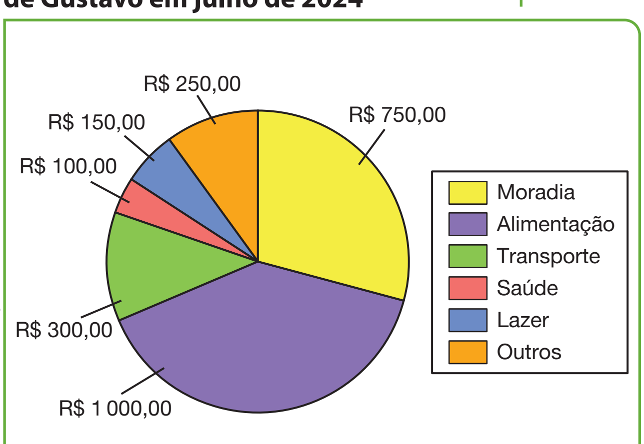
Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

79. Analise a composição das despesas da família de Gustavo em julho de 2024.

Professor, professora: Os dados apresentados no gráfico são fictícios.

Quantia gasta por categoria pela família de Gustavo em julho de 2024



Fonte de pesquisa: Registros de Gustavo.

a) Entre as despesas da família de Gustavo, qual é a maior? Resposta: Alimentação.

b) Sabendo que as receitas da família de Gustavo somam R$ 4 200,00, determine a quantos por cento da receita corresponde cada uma das despesas. Resposta: Moradia: aproximadamente 17,9%; alimentação: aproximadamente 23,8%; transporte: aproximadamente 7,14%; saúde: aproximadamente 2,38%; lazer: aproximadamente 3,57%; outros: aproximadamente 5,95%.

80. Após analisar a planilha de orçamento familiar, a família de Marcelina decidiu investir, mensalmente, R$ 120,00 durante cinco anos, a uma taxa de juro de 0,7% a.m.

Utilizando a ferramenta **Aplicação com depósitos regulares** da Calculadora do Cidadão, determine qual será o montante obtido ao final desse período. Resposta: R$ 8 972,13

81. De acordo com a planilha orçamentária de Ângelo, ele não vai conseguir pagar as próximas parcelas do financiamento de seu automóvel. Diante dessa situação, ele entrou em contato com a instituição financeira para renegociar sua dívida de R$ 12 000,00. Sendo assim, foram oferecidos a ele três prazos para pagamento.

- Prazo **1**: 24 parcelas mensais fixas.
- Prazo **2**: 36 parcelas mensais fixas.
- Prazo **3**: 48 parcelas mensais fixas.

Sabendo que a taxa de juro para qualquer um dos prazos é de 2% a.m. e que Ângelo dispõe de R$ 500,00 mensais para realizar o pagamento dessa dívida, qual dos prazos ele deve escolher? Utilize uma calculadora para responder essa pergunta e justifique sua resposta. Sugestão de resposta: Ângelo deve escolher o pagamento em 36 parcelas, pois a opção em 24 parcelas não cabe em seu orçamento mensal e o pagamento em 48 parcelas tem maior juro.

SÍNTESE DO CAPÍTULO

Neste capítulo, estudamos assuntos relacionados à Matemática Financeira. Agora, chegou a hora de refletir sobre o que você aprendeu! Como estratégia de estudos, sugerimos que você faça uma autoavaliação, revise conceitos e sintetize o que foi estudado. Para isso, resolva as questões propostas.

4. Sugestão de resposta: Multiplicaria os fatores de atualização para obter a porcentagem do valor final do produto e, depois, subtrairia de 100% a porcentagem obtida anteriormente.

1. Você conhecia algum dos conteúdos estudados neste capítulo? Cite-os.
Resposta pessoal. Orientações sobre essa questão no **Suplemento para o professor**.

2. A seguir estão apresentados os principais assuntos estudados neste capítulo.

Porcentagem. | Taxa de inflação. | Juro simples. | Acréscimos sucessivos.

Produto Interno Bruto (PIB). | Coeficiente de Gini. | Juro composto. | Descontos sucessivos.

Índice de Desenvolvimento Humano (IDH). | Sistema Price. | Taxa de desemprego.

Você teve dificuldades em algum deles? Não recorda algum desses conceitos? Ficou com dúvidas? Reflita sobre esses questionamentos e, se necessário, retome o que foi estudado.
Resposta pessoal. Orientações sobre essa questão no **Suplemento para o professor**.

3. Certo item de decoração de uma loja de artigos domésticos receberá um desconto de 20% sobre o preço inicial. No entanto, para promover as vendas, a loja decidiu incluir um acessório especial a esse item, acrescentando 15% ao preço. Qual estratégia você utilizaria para calcular o preço final desse item de decoração após os dois ajustes de preço? Sugestão de resposta: Calcularia o preço desse item após os 20% de desconto e, a partir desse resultado, calcularia o aumento de 15%.

4. Considerando dois descontos sucessivos de 10% no valor de um produto, qual estratégia você utilizaria para determinar a porcentagem correspondente a um único desconto sobre o mesmo valor inicial?

5. Qual conceito está corretamente associado ao indicador econômico em questão? Resposta: Alternativa **c**.

a) A taxa de inflação é o aumento persistente e generalizado dos preços de bens e serviços, sendo influenciada por diversos fatores como demanda agregada, oferta de moeda, custos de produção, entre outros.

b) O Produto Interno Bruto (PIB) é a soma de todos os bens e serviços produzidos por um país, estado ou cidade em um determinado período de tempo, refletindo os preços de mercado, ou seja, os preços que os consumidores estão pagando.

c) O PIB *per capita* expressa o nível médio de renda da população de um país ou território em determinado período, sendo calculado pela divisão do PIB desse país ou território por sua população.

6. Certa instituição financeira disponibilizou duas propostas diferentes para um retorno financeiro sobre um investimento de R$ 10 000,00. Resposta: A proposta **A**, pois oferece o maior retorno.

- Proposta **A**: o investidor receberá um retorno fixo de 2% ao mês sobre o capital investido durante um período de 12 meses.
- Proposta **B**: o investidor receberá um retorno de 1,3% ao mês sobre o regime de juro composto ao longo de um período de 12 meses.

Qual das propostas de investimento é a mais vantajosa? Justifique sua resposta.

7. Escolha um dos conteúdos estudados neste capítulo e elabore um problema sobre o assunto de que ele trata. Depois, troque com um colega para que ele resolva o seu problema e você resolva o dele. Por fim, verifique se a resposta obtida por ele está correta. Resposta pessoal. Antes de os estudantes elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos nas seções **Exercícios e problemas** deste capítulo e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e do Enem.

8. Faça uma síntese do que foi estudado neste capítulo. Nela, use desenhos e dê exemplos.
Resposta pessoal. Orientações sobre essa questão no **Suplemento para o professor**.

Ação e participação

Esta seção propõe um trabalho articulado com outros componentes curriculares envolvendo objetivos comuns, além da proposta de trabalho em grupo cujo objetivo principal é favorecer o desenvolvimento de habilidades e a compreensão relacionada a alguns assuntos específicos. Por ser um trabalho em grupo, vocês podem pensar em vários questionamentos durante a execução do projeto, organizar as ideias e fazer anotações no caderno. Nesse momento de surgimento de ideias e de planejamentos, é necessária a participação de todos, além de um registro escrito coletivo com as anotações que considerarem mais relevantes.

Um projeto constitui-se em uma proposta de trabalho temporária e única, ou seja, não repetitiva, caracterizada por ter início, meio e fim bem definidos e com objetivo claro e viável.

Professor, professora: A elaboração e a execução bem-sucedida de um projeto interdisciplinar requerem um trabalho devidamente programado entre professores de diversos componentes curriculares e estudantes. Por esse motivo, é importante combinar os momentos de orientação e acompanhamento individual e coletivo com os demais professores envolvidos.

O **tema** para ser trabalhado em um projeto pode surgir de diversas ideias, como a constatação de uma necessidade da comunidade escolar e da comunidade do bairro onde a escola está localizada ou até mesmo um tema de interesse da turma. Dependendo do tema escolhido, vocês precisam estudar mais sobre o assunto antes de seguir com as outras etapas.

Com um tema definido, é o momento de estabelecer os **objetivos** com metas claras que possam ser verificadas ao longo da execução do projeto.

A próxima etapa é o **planejamento**, no qual se define quem vai participar e qual será a responsabilidade de cada um. Todas essas informações devem estar anotadas e ter prazos definidos.

Com base no planejamento, é elaborado um cronograma de acompanhamento, e, em determinadas datas, será necessário verificar se os objetivos estão sendo atingidos até ali e se é preciso alterar algo, fazendo uma correção de rota ou novos alinhamentos.

ILUSTRAÇÕES: FABIO EIJI SIRASUMA/ARQUIVO DA EDITORA

Na etapa de planejamento, pode-se tratar também da coleta de informações sobre o tema por meio da consulta de diversas fontes, como preenchimento de formulário, enquete em aplicativo ou o método de entrevistas.

O planejamento precisa prever também como será a apresentação do trabalho, determinando os recursos e as estratégias de apresentação, como *slides*, cartazes, esquemas e até as falas de cada participante, no caso de apresentação presencial ou virtual.

Em seguida, ocorre a etapa de **desenvolvimento**, também denominada implementação ou execução, que é a realização do trabalho seguindo a organização do planejamento. Geralmente, nessa etapa, são necessários alguns ajustes, definidos em momentos de avaliação, a fim de verificar se os objetivos estabelecidos estão sendo alcançados. A data para esses momentos de avaliação já deve estar definida no cronograma de acompanhamento.

Na etapa de desenvolvimento, o recurso definido no planejamento como estratégia de apresentação deve ser detalhado e produzido, e todas as possíveis falas de cada participante devem ser redigidas.

Depois disso, ocorre a **divulgação** do trabalho, na qual se torna público o resultado de todo o projeto. Dependendo do que foi planejado, essa divulgação é feita para a comunidade escolar, mostrando os resultados obtidos, ou nas mídias da escola e em outras plataformas. Por isso, é importante guardar os registros pesquisados e outros de momentos do desenvolvimento, como fotos, vídeos, textos e anotações por escrito.

ILUSTRAÇÕES: FABIO EIJI SIRASUMA/ARQUIVO DA EDITORA

Todo projeto deve finalizar com a etapa de **avaliação**, na qual são analisados os resultados do trabalho. Nesse momento, seria adequado fazer uma autoavaliação sobre a participação individual, além de uma avaliação coletiva, para verificação do desempenho e da evolução das aprendizagens do conteúdo, inclusive dos diferentes componentes curriculares envolvidos, se houver. Por fim, é importante o professor também apresentar uma avaliação do grupo considerando o convívio social, a participação, a colaboração e o cumprimento de prazos e das metas estabelecidas.

Neste volume, vamos apresentar duas sugestões de projetos com os temas já definidos. Estamos propondo a vocês a realização de cada um deles. Bom trabalho!

Professor, professora: Para que a avaliação e a autoavaliação sejam produtivas, esclareça aos estudantes, sempre no início de um projeto, quais serão os pontos avaliados e os aspectos que se espera desenvolver durante a execução das tarefas. Desse modo, eles podem acompanhar o próprio desempenho e atingir melhores resultados.

Professor, professora: Ao iniciar o trabalho com este projeto, verifique se os estudantes destacam os seus principais objetivos, que são: compreender o que é acessibilidade; reconhecer a importância da acessibilidade; conhecer e refletir sobre maneiras de promover a acessibilidade em locais públicos; verificar como a acessibilidade está sendo tratada no bairro; produzir uma foto-denúncia para divulgar a situação da acessibilidade no bairro.

Projeto A – Acessibilidade nas ruas do bairro

Início de conversa

Aproveite as questões do **Início de conversa** para verificar o conhecimento prévio dos estudantes acerca do tema acessibilidade, que será abordado nesta seção. Incentive a participação de todos, permitindo-lhes expor suas ideias, opiniões e possíveis dúvidas. Se julgar necessário, comente que essas e outras questões serão retomadas durante o desenvolvimento da atividade.

Analise a imagem apresentada e responda às perguntas.

Professor, professora: Para a execução desse projeto, será necessário prever no mínimo 8 aulas.

RAIL MELLADO ORTIZ/SHUTTERSTOCK

Pessoa em cadeira de rodas diante de uma escada em um local público.

a) O que é possível notar na imagem? Converse com o professor e os colegas sobre esse assunto.

b) Em sua opinião, por que a acessibilidade em espaços públicos é importante?

c) Que tipos de barreiras relacionadas à acessibilidade deveriam deixar de existir no acesso a locais públicos do seu bairro?

b) Resposta: Para que pessoas com deficiência tenham qualidade de vida e exerçam plenamente a cidadania.

c) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes reflitam sobre a falta de adequações e façam listas desses obstáculos para usar essas informações no momento dos registros fotográficos das foto-denúncias.

Em ação

Professor, professora: Ao desenvolver este projeto com os estudantes, é possível estabelecer uma relação entre **Matemática**, **Geografia** e **Língua Portuguesa**. Quanto à **Geografia**, a relação ocorre por meio da exploração de conceitos e noções referentes à mobilidade e urbanização. Já a respeito de **Língua Portuguesa**, a relação acontece por meio da leitura e da interpretação dos textos apresentados na seção, bem como da produção e da divulgação do gênero foto-denúncia.

A **acessibilidade** é um direito fundamental garantido pela Constituição Federal, que assegura a todas as pessoas, independentemente de suas condições físicas ou perceptivas, o acesso seguro e autônomo a espaços, serviços, produtos e informações. Nos últimos anos, a preocupação com a acessibilidade tem crescido, trazendo benefícios não apenas para pessoas com deficiência, mas para toda a sociedade, promovendo inclusão, diversidade e igualdade de direitos. Investir em acessibilidade é também investir no bem-estar social e no desenvolvimento sustentável.

Neste projeto, você e seus colegas deverão verificar a acessibilidade no bairro onde moram ou estudam. Em seguida, produzirão **foto-denúncias** para divulgar a situação da acessibilidade no bairro e alertar a comunidade sobre a importância de garantir os direitos das pessoas com deficiência.

a) Sugestão de resposta: É possível notar uma pessoa em cadeira de rodas parada na base de uma escada, impossibilitada de seguir em frente devido aos degraus. Converse com os estudantes sobre as dificuldades que eles acham que a pessoa retratada na fotografia deve passar nessa situação.

Foto-denúncia: gênero discursivo de linguagem imagética, cujo objetivo principal é usar fotografias como instrumentos de denúncia de situações injustas, antiéticas ou ilícitas, como violação de direitos humanos ou degradação do meio ambiente.

Antes de começar, pesquise dados oficiais sobre pessoas com deficiência e leia algumas publicações sobre os diferentes tipos de deficiência física e a existência de normas e políticas públicas que visem garantir condições de acessibilidade e inclusão dessa população.

LAÍS GARBELINI/ARQUIVO DA EDITORA

Professor, professora: Verifique a possibilidade de preparar uma aula em conjunto com o professor de **Geografia** com o objetivo de orientar os estudantes na realização das pesquisas sobre os dados oficiais – como quantidade de pessoas com deficiência, quantas têm acesso a educação, trabalho e renda – e as normas e especificações relacionadas à acessibilidade e à inclusão, bem como na escolha das estratégias e dos instrumentos que serão usados para fazer a verificação da acessibilidade nas ruas do bairro.

Professor, professora: Durante a etapa de pesquisas sobre o assunto, instigue os estudantes a estabelecer relação entre esse assunto e a **ODS 11 – Cidades e comunidades sustentáveis**. Verifique se eles compreendem que garantir a acessibilidade é uma maneira de tornar a cidade mais inclusiva e segura. Comente que existem outras ações que podem contribuir para que esse objetivo seja alcançado, como o acesso à habitação segura, adequada e acessível, o acesso aos serviços básicos, o transporte público seguro, sustentável e com preço acessível e o acesso a espaços públicos seguros e inclusivos.

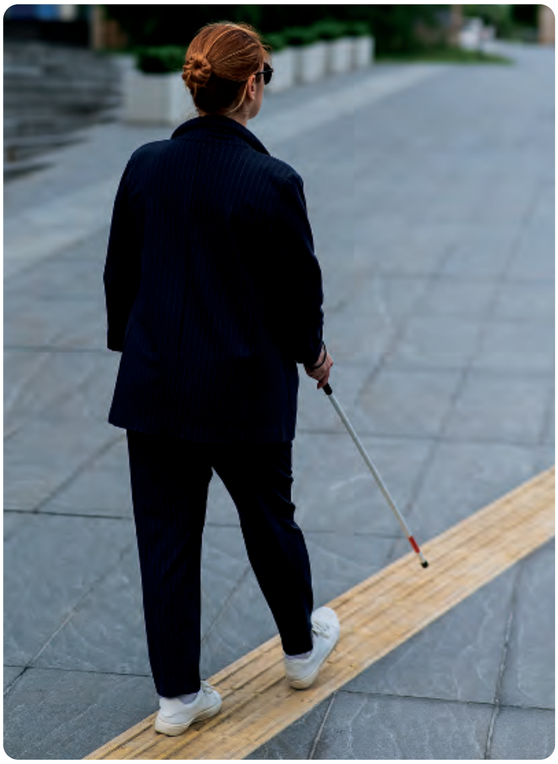
Pesquisando mais sobre o tema

Medidas para promover a acessibilidade incluem adaptações em ambientes físicos, como a instalação de rampas de acesso, elevadores, vagas de estacionamento reservadas, faixas táteis e semáforos sonoros. Esses são alguns exemplos que promovem a acessibilidade arquitetônica.

Acompanhe alguns exemplos de medidas que permitem a acessibilidade arquitetônica.

NEREU JR/PULSAR IMAGENS

Semáforo sonoro, que auxilia pessoas com deficiência visual a atravessar uma via, emitindo para isso um sinal sonoro que indica o momento da travessia segura.


RESHETNIKOV_ART/SHUTTERSTOCK

Calçada tátil, que ajuda a guiar de maneira segura as pessoas com deficiência visual em direção a locais de interesse, como escadas, elevadores, portas e áreas de embarque.

JOA SOUZA/SHUTTERSTOCK

Vaga de estacionamento reservada para pessoas com deficiência ou mobilidade reduzida.


JUANAN BARROS MORENO/SHUTTERSTOCK

Rampa de acesso, que permite a pessoas com deficiência ou mobilidade reduzida o embarque e o desembarque facilitado em transporte público.

Essas são algumas das medidas que precisam existir na região para garantir acessibilidade a pessoas com deficiência. Vocês deverão pesquisar outras medidas, além dessas, que poderiam ser implantadas e até se tornar obrigatórias em sua região, a fim de garantir o direito de fácil acesso a todas as pessoas.

A acessibilidade não se restringe aos espaços públicos. O acesso à informação, à tecnologia, à educação, à leitura, ao entretenimento e à possibilidade de participar de provas e concursos também é direito de todos. Há ferramentas que ajudam a promover essa acessibilidade. Línguas e sistemas de escrita acessíveis como a Língua Brasileira de Sinais (LIBRAS) e o braile são exemplos disso. Além deles, há recursos de acessibilidade no ambiente digital, como a audiodescrição, os audiolivros, também conhecidos como *audiobooks*, leitores de tela, ampliadores de texto, legendas *closed caption*, entre outros.

SMPED

Símbolo de Língua Brasileira de Sinais, usado para representar a presença de um interlocutor surdo, um ouvinte com fluência na língua ou um tradutor e intérprete em Libras.

SMPED

Símbolo de *closed caption*, usado para sinalizar um recurso de legenda que inclui informações sobre sons importantes na narrativa, como aplausos, risadas e até silêncio.

SMPED

Símbolo de audiodescrição, que é uma ferramenta de acessibilidade para a compreensão de imagens e voltada para pessoas com deficiência visual.

SIB FILM/SHUTTERSTOCK

Teclado em braile, utilizado por pessoas com deficiência visual.

DESIGN PICS INC/ALAMY/FOTOARENA

Professor, professora: Combine com o professor de **Língua Portuguesa** a melhor estratégia para orientar os estudantes na produção da foto-denúncia. É importante que sejam abordadas as características, os elementos composicionais e a função sociocomunicativa desse gênero, destacando seu papel de informar e provocar reflexões.

Usuário com deficiência visual manuseando um computador com leitor de tela.

Planejamento

Organizem uma roda de conversa em sala de aula para determinar as tarefas necessárias para a realização deste projeto.

Escolham o bairro onde será feita a verificação da acessibilidade. Dependendo da quantidade de estudantes e da divisão dos grupos, a verificação pode ser feita em mais de um bairro.

Professor, professora: Caso o passeio pelo bairro seja inviável, oriente os estudantes a usar aplicativos e *sites* de geolocalização, que permitam explorar virtualmente um local ao nível do chão, apresentando imagens atualizadas das ruas.

Determinem quais estruturas serão analisadas durante a pesquisa. Algumas sugestões incluem: rampas de acesso, piso tátil, guia rebaixada para pessoas em cadeiras de rodas, semáforo sonoro, ausência de obstáculos no piso que comprometam a mobilidade e vagas de estacionamento destinadas a pessoas com deficiência e mobilidade reduzida.

Dividam a turma em grupos para a realização da atividade. Uma opção é cada grupo ficar responsável por uma das estruturas a serem observadas. Combinem como será feita a verificação, que pode ser feita com um passeio pelo bairro sob a supervisão do professor.

Definam a data em que a verificação será feita e conversem sobre como serão feitos os registros. Para isso, vocês podem providenciar câmeras fotográficas ou usar câmeras de telefone celular. No caso da visita virtual, vocês podem fazer capturas da tela do computador ou celular.

Dica

As informações sobre conceitos e regras de acessibilidade, incluindo medidas do ângulo de inclinação de rampas de acesso, da largura de calçadas, entre outras, podem ser consultadas na cartilha de orientação de acessibilidade. Disponível em: https://portal.crea-sc.org.br/wp-content/uploads/2022/05/CARTILHA_ACESSIBILIDADE_2022.pdf. Acesso em: 26 jul. 2024.

Professor, professora: Caso a estratégia definida para fazer a verificação dos elementos de acessibilidade seja a visita virtual, avalie a possibilidade de organizar uma ou mais aulas na sala de informática para que essas visitas sejam feitas com a sua orientação e supervisão, dando as explicações necessárias para que os estudantes acessem e utilizem os aplicativos e *sites* escolhidos.

Desenvolvimento

Na data estabelecida, cada grupo fará a verificação da estrutura pela qual ficou responsável. Para isso, utilizem a estratégia que foi definida anteriormente: visita presencial com a supervisão do professor ou de um adulto responsável.

Ao fazer a verificação, observem se o elemento existe no local visitado e, com auxílio do professor, confirme se está instalado adequadamente. Registrem por meio de fotografias e façam anotações de informações que possam ser úteis na hora de produzir a legenda da foto-denúncia.

Com os registros em mãos, cada grupo deverá produzir uma foto-denúncia com o objetivo de chamar a atenção da população e dos governantes para as condições do bairro em relação à acessibilidade. Para conhecer um pouco mais sobre esse gênero jornalístico/midiático, vocês podem pedir orientações ao professor de **Língua Portuguesa**.

Divulgação

Chegou o momento de divulgar as foto-denúncias que vocês produziram para a escola, familiares, amigos e comunidade. A foto-denúncia é usada para denunciar problemas sociais e pode incluir uma legenda para explicar o contexto. Essa ferramenta busca promover reflexão para um problema e promover mudanças na sociedade.

Decidam com o professor como divulgar: em um mural ou nas mídias sociais da escola.

Professor, professora: O intuito dessa divulgação é revelar a situação da acessibilidade no bairro e sensibilizar a população sobre a importância de proporcionar acesso e participação de toda a comunidade local na vida social com autonomia e segurança. Caso seja possível, os estudantes podem explicar o passo a passo da realização da atividade e apresentar algumas informações que não constem nas foto-denúncias, mas que eles julguem importantes para fins de esclarecimento. Eles podem enviar a foto-denúncia digitalmente para órgãos públicos, chamando a atenção para os problemas destacados.

Avaliação e reflexão

Junte-se aos colegas para refletir sobre o processo e a execução da atividade, avaliando quais foram os pontos positivos e negativos, o que foi aprendido em cada etapa e o que pode ser melhorado. A conversa pode ser direcionada pelos tópicos a seguir.

- Dedicação na realização de cada etapa da atividade.
- Participação no planejamento e na execução de tarefas individuais e coletivas.
- Cumprimento de tarefas e prazos.
- Pontos positivos e negativos do processo.
- O que pode ser melhorado para futuras atividades semelhantes.
- Análise dos resultados obtidos para verificar se foram satisfatórios.

Professor, professora: Reforce aos estudantes a importância de aproveitar esse momento para verificar: se os objetivos propostos foram alcançados; se as estratégias adotadas e as decisões tomadas pelo grupo foram as mais adequadas; e quais mudanças podem ser feitas para obter melhor resultado em novos projetos.

Professor, professora: Ao iniciar o trabalho com este projeto, verifique se os estudantes destacam os seus principais objetivos, que são: compreender o conceito amplo de saúde; reconhecer a importância do autoconhecimento para manter hábitos saudáveis; reconhecer que a saúde envolve outros aspectos além da ausência de doenças; identificar e refletir sobre problemas de saúde comuns na comunidade local; conhecer o calendário da saúde; criar um perfil em rede social divulgar conteúdos sobre saúde individual e coletiva.

Projeto B – Cuidados com a saúde

Início de conversa

Analise a imagem apresentada e responda às questões.

c) Resposta pessoal. Os estudantes podem mencionar as seguintes práticas: consultar um médico e realizar exames de rotina periodicamente; alimentar-se adequadamente; praticar esportes e outras atividades físicas; buscar o autoconhecimento; manter acompanhamento psicoterapêutico; equilibrar atividades de trabalho, estudos e lazer; reservar momentos para estar com pessoas de quem gosta; viver em condições financeiras dignas; entre outras.


HELOÍSA PINTARELLI/ARQUIVO DA EDITORA

Professor, professora: Aproveite as questões do **Início de conversa** para verificar o conhecimento prévio dos estudantes acerca do tema **Cuidados com a saúde**, que será abordado nesta seção. Incentive a participação de todos, permitindo que exponham suas ideias, opiniões e possíveis dúvidas. Se julgar necessário, comente que essas e outras questões serão retomadas durante o desenvolvimento da atividade.

Para nos sentirmos saudáveis, é necessário estar bem em várias áreas da nossa vida.

a) Em sua opinião, o que significa estar saudável? Converse com os colegas sobre o assunto. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes reconheçam que, além da ausência de doenças, saúde é uma área que envolve bem-estar e qualidade de vida, abrangendo aspectos físicos, mentais, emocionais e sociais.

b) Você conhece campanhas que promovem cuidados com a saúde? Quais?

c) Os ícones da ilustração representam diferentes aspectos relacionados à saúde. Considerando esses aspectos, indique práticas que podem contribuir com a promoção da saúde e do bem-estar.

Em ação

Professor, professora: Ao desenvolver este projeto com os estudantes, é possível estabelecer uma relação entre **Matemática**, **Biologia** e **Língua Portuguesa**. Com relação à **Biologia**, a relação ocorre por meio de conceitos e noções referentes ao cuidado com a saúde individual e coletiva, além de alguns desdobramentos relacionados a esse assunto. Já com relação à **Língua Portuguesa**, a relação acontece por meio da leitura e da interpretação dos textos apresentados na seção, bem como da produção e da divulgação do perfil proposto.

Os cuidados com a saúde são importantes durante toda a vida. Para sentir-se bem nas diferentes áreas da vida, é preciso manter uma alimentação saudável, evitando alimentos ricos em açúcares e gordura, dormir o suficiente, é preciso manter de horas por dia para o corpo descansar, praticar uma atividade física, evitando o sedentarismo, entre outras ações. Professor, professora: Para a execução deste projeto, será necessário prever no mínimo 8 aulas.

Neste projeto, você e seus colegas deverão um **perfil** em rede social sobre cuidados com a saúde para divulgar informações que podem favorecer a manutenção da saúde individual e coletiva em diversas áreas da vida. Professor, professora: Verifique o que os estudantes entendem por saúde coletiva. Em seguida, explique a eles que saúde coletiva está relacionada à saúde ao bem-estar e à qualidade de vida de toda uma população. Para que ela seja promovida, são essenciais algumas iniciativas individuais para evitar a disseminação de algumas doenças, como vacinar-se, manter limpos os espaços privados pelos quais se é responsável, isolar-se enquanto está com uma doença contagiosa, entre outras ações. No âmbito do poder público, várias ações são importantes, como oferecer condições adequadas de saneamento básico, buscar a eficiência dos serviços públicos, promover campanhas relacionadas à saúde física e mental, executar políticas públicas que contribuam para que a população possa viver em condições dignas.

Perfil: representação digital de uma pessoa, grupo de pessoas, empresa ou entidade, apresentada por meio de uma página da rede que visa divulgar publicações de interesse, fomentar discussões e criar oportunidades.

Existem plataformas que permitem a criação gratuita de perfis.

KEITHY MOSTACHI/ARQUIVO DA EDITORA

A primeira etapa para criação de um perfil é escolher uma rede social para publicar o conteúdo que será produzido por vocês. Definam o público que pretendem atingir e escolham para ele um nome criativo.

b) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes respondam que sim. Eles podem citar campanhas em favor da saúde mental, vacinações e de doação de sangue; de prevenção a diversos tipos de câncer e Infecções Sexualmente Transmissíveis (IST); combate ao mosquito da dengue; entre muitas outras.

Pesquisando mais sobre o tema

Os aspectos físicos, mentais, emocionais e sociais da saúde abrangem áreas diferentes da nossa vida. Porém, muitas vezes eles estão interligados. Um problema físico, por exemplo, pode afetar a saúde mental, emocional e social de alguém. Mas, para analisá-los e saber os cuidados necessários a cada um, é importante entender como cada um deles se relaciona com a nossa vida.

A **saúde física** está relacionada ao bom funcionamento do organismo humano. De acordo com dados de 2019 do Ministério da Saúde, as doenças crônicas com mais óbitos no país são **neoplasias**, doenças cardiovasculares, doenças respiratórias crônicas e diabetes. Isso mostra a importância de passar por um acompanhamento médico periódico e realizar exames regulares. Algumas práticas ajudam a prevenir essas e outras doenças, como a alimentação saudável, a prática de atividades físicas, o antitabagismo e o consumo moderado de açúcares.

Fonte de pesquisa: BRASIL. Ministério da Saúde. *Doenças crônicas*: Saúde apresenta atual cenário das doenças não transmissíveis no Brasil. Disponível em: https://www.gov.br/saude/pt-br/assuntos/noticias/2021/setembro/saude-apresenta-atual-cenario-das-doencas-nao-transmissiveis-no-brasil. Acesso em: 4 out. 2024.


NDAB CREATIVITY/SHUTTERSTOCK

Pessoas praticando atividade física.

Neoplasias: são massas de células que crescem de modo anormal em diferentes partes do corpo e podem ser benignas ou malignas; em alguns casos, podem ser associadas a diferentes tipos de câncer.

Segundo a Organização Mundial da Saúde (OMS), a **saúde mental** está relacionada a habilidades pessoais para responder aos desafios da vida e contribuir com a comunidade. Em 2023, dados da OMS indicavam que o Brasil era o país com mais pessoas ansiosas no mundo, com 26,8% da população afetada por esse distúrbio. Foi apontado também que somos o país mais depressivo da América Latina, com 5,8% da população afetada por esse problema. Entre os diversos fatores que podem despertar esses tipos de distúrbio estão o isolamento e as preocupações cotidianas. A pandemia de covid-19, por exemplo, ajudou a ampliar os casos de ansiedade e de depressão em todo o mundo.

Independente do transtorno, é importante procurar um médico para ter acesso ao tratamento adequado, que pode incluir ou não a necessidade de remédios. A manutenção de atividades físicas e de terapia psicológica também podem contribuir com esses quadros.

Fonte de pesquisa: BRASIL. Ministério da Saúde. *Saúde mental*. Disponível em: https://www.gov.br/saude/pt-br/assuntos/saude-de-a-a-z/s/saude-mental. Acesso em: 4 out. 2024.

O acompanhamento terapêutico com um psicólogo auxilia no autoconhecimento e no trato com as próprias emoções.


ANTONIO DIAZ/SHUTTERSTOCK

Pessoa fazendo acompanhamento terapêutico com um psicólogo.

A **saúde emocional** está relacionada ao autoconhecimento e ao equilíbrio emocional, garantindo controle na lida com estresses e conflitos da vida. Ela é importante para manter o equilíbrio em situações de conflito ou estresse, como uma irritação no trânsito, impedindo reações agressivas ou perigosas. Algumas atividades que contribuem no cuidado com a saúde emocional são prática de esportes, meditação ou outras técnicas de concentração, além da terapia psicológica.

Fonte de pesquisa: PROGEP. *Saúde emocional*. Disponível em: https://www.gov.br/saude/pt-br/assuntos/saude-de-a-a-z/s/saude-mental. Acesso em: 4 out. 2024.

Professor, professora: Verifique a possibilidade de preparar uma aula em conjunto com o professor de **Biologia** com o objetivo de orientar os estudantes na realização das pesquisas sobre problemas de saúde que podem ser evitados com atitudes preventivas e esclarecimento da população, bem como na escolha das estratégias e dos instrumentos que serão usados para a roteirização e elaboração do perfil.

Saúde social corresponde à necessidade humana de convívio social. O ser humano necessita se socializar e manter relações saudáveis, podendo ser em âmbito familiar, de trabalho, de amizade, amoroso ou de grupos sociais, como escola, academia e religiões. Por mais que apreciemos ficar sozinhos em alguns momentos, necessitamos de uma vivência coletiva. O isolamento completo e imposto pode nos adoecer de diferentes maneiras. Algumas medidas importantes para manter a saúde social são manter relações saudáveis, tentar compreender o outro e condenar práticas como *bullying* e preconceitos, que isolam outras pessoas.

Fonte de pesquisa: PFERL, Matheus. *Entenda os sinais da sua saúde física, mental, social e espiritual*. Centro de notícias Uninter, 28 de setembro de 2021. Disponível em: https://www.uninter.com/noticias/entenda-os-sinais-da-sua-saude-fisica-mental-social-e-espiritual. Acesso em: 4 out. 2024.


RAWPIXEL.COM/SHUTTERSTOCK

Pessoas em momento de convívio social, em local público.

Professor, professora: Durante a etapa de pesquisas sobre o tema, instigue os estudantes a estabelecer relação entre esse assunto e a **ODS 3 – Saúde e bem-estar**, cujo objetivo é assegurar uma vida saudável e promover o bem-estar para todos, em todas as idades.

A OMS classifica como **determinantes sociais da saúde** as condições sociais que podem influenciar a saúde de um indivíduo. Isso engloba fatores econômicos, culturais, étnico-raciais, ambientais, entre outros. Se uma pessoa passa por uma situação de desemprego e fica sem renda para pagar suas despesas, por exemplo, isso pode gerar uma preocupação que afetará sua saúde mental, emocional e social. Do mesmo modo, se alguém não tem roupas de frio para se proteger do inverno, a exposição a temperaturas baixas pode afetar sua saúde física e mental.

Comente que existem outras ações que podem contribuir para que esse objetivo seja alcançado, como o acesso à vacinação gratuita, adequada e acessível e o acesso aos serviços básicos de prevenção de doenças transmissíveis.

Uma maneira de conscientizar a população sobre a importância do autocuidado, do diagnóstico rápido e da prevenção de algumas doenças é por meio de **campanhas**. No Brasil, há um calendário não oficial que agrega campanhas anuais de diferentes entidades e organizações ligadas à saúde. Associar práticas de saúde ou combate a doenças a meses e cores auxilia na comunicação com a população e a lembrar as pessoas da importância de se cuidar. Talvez você já tenha ouvido falar do Outubro Rosa, em combate ao câncer de mama, ou do Novembro Azul, em combate ao câncer de próstata. Conheça a seguir mais algumas campanhas como essas e seus respectivos meses e cores.

Calendário anual das cores

Janeiro	Fevereiro	Março	Abril
Roxo Hanseníase	Laranja Leucemia Roxo Lúpus, Alzheimer e fibromialgia	Azul escuro Câncer colorretal	

Maio	Junho	Julho	Agosto
Vermelho Hepatite Roxo Doenças inflamatórias intestinais (DII)	Laranja Anemia	Amarelo Hepatites virais	

Setembro	Outubro	Novembro	Dezembro
Dourado Câncer infanto-juvenil	Rosa Câncer de mama	Azul Câncer de próstata Azul Diabetes	Vermelho AIDS Laranja Câncer de pele

HELOÍSA PINTARELLI/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte de pesquisa: SILVA, Fernando. As cores dos meses e seus significados. *Espaço do conhecimento UFMG*. 25 jan. 2022. Disponível em: https://www.ufmg.br/espacodoconhecimento/as-cores-dos-meses-e-seus-significados/. Acesso em: 7 out. 2024.

Planejamento

Chegou o momento de planejar as publicações e colocar a mão na massa. Para isso, organizem a turma em quatro grupos. Cada grupo deve ficar responsável por produzir conteúdo sobre um dos aspectos da saúde estudados: físico, mental, emocional e social.

Os grupos deverão produzir três conteúdos diversificados sobre cada tema. Os integrantes dos grupos deverão pesquisar mais sobre o aspecto da saúde do seu grupo e definirem juntos as três pautas. Os formatos podem ser variados, em texto, vídeo ou áudio. Em caso de publicações em texto ou áudio, é importante pensarem em imagens para ilustrar cada publicação. Caso a produção seja em áudio ou vídeo, produzam um texto de apresentação do que será visto pelo seguidor do perfil.

A turma deve combinar a frequência de postagens no perfil. Uma sugestão são duas ou três publicações por semana. Elas devem ser alternadas entre os conteúdos produzidos pelos grupos. Definam juntos o cronograma das atividades e os responsáveis pela publicação dos conteúdos.

Produzam registros de bastidores, como fotos e vídeos dos encontros dos grupos e das tarefas executadas para ajudar na divulgação.

Professor, professora: Combine com o professor de **Língua Portuguesa** a orientação dos estudantes na produção dos textos que serão postados no perfil. Verifique se ele pode revisar os textos antes da publicação ou se a turma pode se organizar em grupos para essa revisão com a supervisão dele. É importante que sejam abordadas as características, os elementos de texto e as imagens que contemplem o assunto, tornando-o atrativo e destacando seu papel de informar e de provocar reflexões.

Desenvolvimento

Se forem realizar entrevistas com profissionais de saúde ou outras pessoas, lembrem-se de agendar com antecedência, preparar um roteiro de perguntas e serem pontuais. Para as imagens ou as gravações envolvendo pessoas ou instituições de saúde públicas ou privadas, lembrem-se de solicitar autorização e informar que o trabalho será publicado em um perfil de rede social feito pela turma. Caso sintam necessidade, peçam o auxílio do professor de **Língua Portuguesa** na produção dos conteúdos.

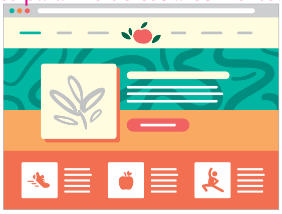
Cada grupo deverá compartilhar com a turma as publicações pelas quais ficaram responsáveis nas datas estabelecidas. O cronograma e a programação de conteúdos devem ficar disponíveis a todos para que acompanhem e não percam os prazos, em um compromisso coletivo.

As decisões a respeito do nome e da arte que vão compor o perfil devem ser tomadas de maneira democrática pela turma. Façam uma votação na qual devem prevalecer as opções com maioria de votos, porém a opinião de todos deve ser respeitada. Vocês podem usar aplicativos de celular para auxiliar a votação.

Professor, professora: O intuito da produção do perfil é usá-lo para é sensibilizar a população sobre a importância de conhecer medidas preventivas básicas que promovam saúde e bem-estar e divulgar ações que possam beneficiar toda a comunidade local. Caso seja possível, os estudantes podem explicar o passo a passo da realização da atividade e apresentar algumas informações que não constam no perfil, mas que eles julguem importantes para fins de esclarecimento.

Divulgação

A divulgação do perfil e dos trabalhos dos grupos pode ser feita nas mídias sociais da escola. Divulguem para as outras turmas, para colaboradores da escola, familiares, amigos e a comunidade local. Façam as publicações nas datas determinadas no cronograma e não esqueçam que as entregas dos materiais prontos pelos produtores dos conteúdos devem ser feitas com antecedência à data de publicação.



HELOÍSA PINTARELLI/ ARQUIVO DA EDITORA

Divulguem também o trabalho desenvolvido nos bastidores, mostrando as fotos que foram feitas pela turma acompanhando as etapas desse trabalho.

Avaliação e reflexão

Com os colegas, reflitam sobre o processo e a execução da atividade, avaliando os pontos positivos e negativos, o que foi aprendido em cada etapa e o que pode ser melhorado. A conversa pode ser direcionada pelos tópicos a seguir.

- Dedicação na realização de cada etapa da atividade.
- Participação no planejamento e na execução de tarefas individuais e coletivas.
- Cumprimento de tarefas e prazos.
- Pontos positivos e negativos do processo.
- O que pode ser melhorado para futuras atividades semelhantes.
- Análise dos resultados obtidos para verificar se foram satisfatórios.

Professor, professora: Reforce aos estudantes a importância de aproveitar esse momento para verificar: se os objetivos propostos foram alcançados; se as estratégias adotadas e as decisões tomadas pelo grupo foram as mais adequadas; e quais mudanças podem ser feitas para obter melhor resultado em novos projetos.

AMPLIANDO SEUS CONHECIMENTOS

Nesta seção, apresentamos as referências complementares com sugestões de livros, *sites*, filmes e *podcasts* que propiciam a melhor compreensão dos conceitos trabalhados em sala de aula, envolvendo conteúdos que, de maneira geral, abordam a Matemática e suas Tecnologias de forma lúdica, curiosa e interessante.

21 teoremas matemáticos que revolucionaram o mundo

SOUZA, Maria Helena. *21 teoremas matemáticos que revolucionaram o mundo*. São Paulo: Planeta, 2018.

O livro explora a importância de diversos teoremas matemáticos ao longo da história, destacando seu impacto na ciência, tecnologia e sociedade e evidenciando a Matemática como ferramenta fundamental para entender o mundo ao nosso redor.

50 ideias de matemática que você precisa conhecer

CRILLY, Tony. *50 ideias de matemática que você precisa conhecer*. 2. ed. São Paulo: Planeta, 2022.

No livro, cada ideia é explicada de maneira clara e acompanhada de exemplos práticos, mostrando como a Matemática está presente em diversos aspectos da vida cotidiana.

A matemática no divã

A MATEMÁTICA no divã. *Rádio UFSCar*, 2 jul. 2023. Disponível em: http://radio.ufscar.br/vPodcast/a-matematica-no-diva. Acesso em: 29 fev. 2024.

O *podcast* visa transformar a maneira como o público enxerga a Matemática, tornando seus conceitos mais acessíveis e relacionando-os com situações do dia a dia com o intuito de despertar mais interesse pelo assunto.

Artes da matemática: pensamento computacional e mídias

ROCHA, Luiz Felipe. *Artes da matemática*: pensamento computacional e mídias. Belo Horizonte: Editora da UFMG, 2021.

Esse livro explora as conexões entre Matemática, pensamento computacional e mídias digitais, propondo uma abordagem integrada para o ensino dessas disciplinas. Por meio de exemplos práticos e teóricos, o autor discute como a Matemática pode ser aplicada de maneira criativa na era digital, incentivando o desenvolvimento de habilidades analíticas e computacionais nos estudantes.

A Enciclopédia *On-line* de Sequências de Inteiros (The On-line Encyclopedia of Integer Sequences® – OEIS®)

OEIS. Disponível em: https://oeis.org/?language=portuguese. Acesso em: 12 ago. 2024.

Esse *site* oferece uma extensa base de dados de sequências de inteiros, sendo uma ferramenta inestimável para pesquisadores, educadores e entusiastas da Matemática. Permite aos usuários pesquisar, comparar e estudar milhares de sequências, contribuindo com novas sequências ou atualizações para sequências já existentes, o que o torna um recurso dinâmico e colaborativo para o estudo de padrões numéricos.

Biblioteca do Impa

BIBLIOTECA Impa. Disponível em: https://koha.impa.br/. Acesso em: 12 ago. 2024.

A Biblioteca do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (Impa) oferece um vasto acervo de recursos em Matemática. O *site*, atualizado regularmente com novas edições, permite acessar o catálogo Koha, em que usuários podem buscar livros, periódicos, teses e outros materiais digitais essenciais para pesquisadores, estudantes e profissionais da área de Matemática.

Desbravadores da matemática: da alavanca de Arquimedes aos fractais de Mandelbrot

STEWART, Ian. *Desbravadores da matemática*: da alavanca de Arquimedes aos fractais de Mandelbrot. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2012.

O livro destaca as descobertas e inovações que moldaram a Matemática como a conhecemos hoje, desde os princípios básicos até conceitos mais complexos.

Domínio Público

DOMÍNIO Público. Disponível em: http://www.dominiopublico.gov.br/pesquisa/PesquisaObraForm.jsp. Acesso em: 29 fev. 2024.

Esse *site* consiste em uma biblioteca digital, na qual é possível pesquisar textos, imagens, sons e vídeos de domínio público (acesso livre e gratuito) referentes a diversas áreas.

Edumatec

EDUCAÇÃO Matemática e Tecnologia Informática. Disponível em: http://www.mat.ufrgs.br/~edumatec/. Acesso em: 29 fev. 2024.

Esse *site* apresenta e disponibiliza materiais que relacionam Matemática e informática. Na seção de *softwares*, são disponibilizados diferentes programas computacionais que permitem, por exemplo, a construção de gráficos ou de figuras geométricas.

Enem

INSTITUTO Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Disponível em: https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem. Acesso em: 7 out. 2024.

Nesse *site*, é possível fazer a inscrição para o Enem e acessar os resultados, os simulados e as provas aplicadas em anos anteriores, assim como a matriz de referência dos conhecimentos avaliados no exame.

#EsquentaEnem

#ESQUENTAENEM: Dicas de conteúdo e estratégia para o Enem | EP 01. *Canal Educação*. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=Zv7ss93VQ7Q. Acesso em: 15 out. 2024.

Esse episódio é o primeiro de uma sequência de entrevistas com professores e estudantes, trazendo dicas de estudo e informações relevantes para prestar o Exame Nacional do Ensino Médio.

História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas

ROQUE, Tatiana. *História da matemática*: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2012.

O livro destaca a importância de examinar a história da Matemática de forma mais ampla e contextualizada, desmitificando concepções errôneas e revelando a riqueza e complexidade dessa ciência.

Histórias da matemática: da contagem nos dedos à inteligência artificial

VIANA, Marcelo. *Histórias da matemática*: da contagem nos dedos à inteligência artificial. São Paulo: Tinta-da-China, 2022.

O livro oferece uma jornada pela história da Matemática, desde Pitágoras até a inteligência artificial, abordando temas como a bola de futebol da Copa do Mundo e a brincadeira de amigo-secreto. Com clareza e humor, Viana apresenta a Matemática como uma disciplina encantadora e essencial para compreender o mundo moderno.

IBGE

IBGE. Disponível em: https://www.ibge.gov.br/pt/inicio.html. Acesso em: 29 fev. 2024.

Nesse *site*, é possível obter informações estatísticas sobre o Brasil, como contagem da população e índices da economia, além de dados referentes a estados e municípios.

Manual de sequências e séries: volume I

LOPES, Luís. *Manual de sequências e séries*. São Paulo: Interciência, 2005. v. 1.

Esse livro oferece uma exploração de 175 sequências e séries importantes, apresentando exercícios com soluções completas e detalhadas que permitem ao leitor aprofundar seus conhecimentos matemáticos.

Matemática Essencial

MATEMÁTICA Essencial. Disponível em: https://www.uel.br/projetos/matessencial/. Acesso em: 7 out. 2024.

Esse *site* apresenta definições e conceitos matemáticos de diversos níveis de ensino, exemplos resolvidos e exercícios com respostas. Em alguns casos, as respostas estão justificadas e as resoluções, detalhadas.

Matematicast

MATEMATICAST. Disponível em: https://www.matematicaacessivel.com.br/. Acesso em: 12 ago. 2024.

Esse *podcast* é dedicado a tornar a Matemática compreensível a todos, com destaque para a inclusão de pessoas com deficiência. Ele aborda diversos temas matemáticos de maneira didática, utilizando recursos que facilitam a aprendizagem e destacam a aplicabilidade da Matemática no cotidiano. Ideal para estudantes, educadores e qualquer pessoa interessada em acessar conteúdos matemáticos de maneira mais inclusiva e engajadora.

Número Imaginário

NÚMERO Imaginário. Disponível em: https://numeroimaginario.wordpress.com/2017/06/14/podcasts/. Acesso em: 7 out. 2024.

Uma série de *podcasts* que abordam diversos tópicos relacionados à área de Matemática está disponível nesse *site*, tratando de assuntos que vão desde a discussão sobre 0 pertencer ou não ao conjunto dos números naturais até o infinito de Cantor.

O fantástico mundo dos números

STEWART, Ian. *O fantástico mundo dos números*. São Paulo: Companhia das Letras, 2014.

Esse livro explora a evolução dos números, sua importância e as diversas maneiras como eles impactam nossa vida. Desde o simples contar até os mais complexos algoritmos usados em inteligência artificial, Ian Stewart, com uma prosa clara e bem-humorada, desmistifica conceitos Matemáticos, tornando-os acessíveis a todos.

O homem que calculava

TAHAN, Malba. *O homem que calculava*. Rio de Janeiro: Record, 2018.

Esse livro, escrito pelo professor de Matemática Júlio César de Mello e Souza sob o pseudônimo de Malba Tahan, utiliza a Matemática como uma ferramenta narrativa para contar uma história ficcional. A obra torna os conceitos matemáticos mais acessíveis e interessantes, misturando-os com humor e aventura. Ideal para leitores que buscam aprender Matemática de maneira lúdica.

O homem que viu o infinito

O HOMEM que viu o infinito, de Matt Brown. Estados Unidos/Reino Unido: Pressman Film/Animus Films/Cayenne Pepper Productions, 2016 (108 min).

Esse filme, baseado em uma história real, mostra a vida de um gênio indiano, Srinivasa Ramanujan (1887-1920), de origem humilde e sem formação acadêmica, que fez contribuições substanciais para a área de Matemática com diversos trabalhos. Esse longa-metragem evidencia a relação de amizade entre Srinivasa e o matemático inglês Godfrey Harold Hardy (1877-1947), que em 1913 recebeu seus trabalhos. Impressionado com a inteligência do indiano, Hardy o convidou para ficar na Universidade de Cambridge.

O livro da matemática

O LIVRO da matemática. Tradução: Maria da Anunciação Rodrigues. Rio de Janeiro: Globo Livros, 2020.

O livro explora a história, os conceitos e as aplicações da Matemática. Organizado cronologicamente, apresenta teoremas, descobertas e personalidades importantes. Com ilustrações e explicações detalhadas, é recomendado para estudantes e entusiastas da Matemática.

O poder do pensamento matemático: a ciência de como não estar errado

ELLENBERG, Jordan. *O poder do pensamento matemático*: a ciência de como não estar errado. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2015.

O autor destaca a importância da Matemática como uma maneira de pensar que pode beneficiar diversos aspectos da vida e nos ajudar a compreender o mundo ao nosso redor.

O que é e para que serve a matemática

SILVA, Jairo José da. *O que é e para que serve a matemática*. São Paulo: Unesp, 2022.

O autor destaca a importância da Matemática como uma ferramenta essencial para compreender e solucionar problemas do mundo real, tornando-a relevante e interessante para todos os leitores.

O que é matemática?

COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert. *O que é matemática?* São Paulo: Ciência Moderna, 2000.

Esse livro clássico oferece uma profunda exploração dos fundamentos matemáticos e suas aplicações práticas, desde os conceitos mais básicos até os mais complexos, em diversas áreas do conhecimento. Escrita por dois renomados matemáticos, essa obra é essencial para quem busca compreender como a Matemática molda o mundo. Acessível e detalhado, é um recurso valioso para estudantes e profissionais da área.

Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

OBMEP. Disponível em: http://www.obmep.org.br. Acesso em: 29 fev. 2024.

Nesse *site*, é possível obter diversas informações relacionadas à Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, como efetuar a inscrição, verificar as datas das provas e acessar as provas aplicadas em anos anteriores.

Progressões e matemática financeira

LIMA, Laércio Fonseca de. *Progressões e matemática financeira*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2020.

Esse livro aborda as progressões aritméticas e geométricas com foco em suas aplicações na Matemática financeira. Apresenta também teorias e exemplos práticos que facilitam o entendimento e a aplicação dos conceitos em cálculos reais de juros e investimentos, sendo uma referência valiosa tanto para estudantes quanto para profissionais da área financeira.

Revista Brasileira de História da Matemática

REVISTA Brasileira de História da Matemática. Disponível em: https://web.archive.org/web/20240416115421/https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/index. Acesso em: 12 ago. 2024.

A Revista Brasileira de História da Matemática é um recurso valioso para aqueles interessados na evolução do pensamento matemático ao longo do tempo. Esse periódico acadêmico publica artigos que exploram diversos aspectos históricos da Matemática, contribuindo para a compreensão e apreciação das raízes e dos desenvolvimentos dessa ciência fundamental. É ideal para pesquisadores, educadores e estudantes que desejam aprofundar seus conhecimentos sobre a história da Matemática.

Scicast

DEVIANTE. Disponível em: https://www.deviante.com.br/podcasts/scicast/. Acesso em: 7 out. 2024.

Esse *podcast* é voltado para aqueles que precisam se aprofundar nos estudos da área de Ciências Exatas e Naturais. Nele, o apresentador toma como base situações do dia a dia para explicar Matemática, Química e Física de uma maneira mais didática.

Teoria dos conjuntos e os fundamentos da matemática

FAJARDO, Rogério Augusto dos Santos. *Teoria dos conjuntos e os fundamentos da matemática*. São Paulo: Edusp, 2024.

Esse livro oferece uma exploração detalhada da teoria dos conjuntos e sua aplicação nos fundamentos da Matemática. Abordando o sistema de Zermelo-Fraenkel com o axioma da escolha, discute também outras abordagens filosóficas e técnicas avançadas como o *forcing* de Cohen. A obra é complementada com apêndices sobre as teorias de conjuntos de Neumann-Bernays-Gödel e Kelley-Morse, fornecendo uma base sólida para se aprofundar no essencial e rico campo da teoria dos conjuntos.

Turing

LASSÈGUE, Jean. *Turing*. São Paulo: Estação Liberdade, 2018. v. 29. (Coleção Figuras do Saber).

A obra explora com detalhes a vida e o legado de Alan Turing, o matemático britânico cujo trabalho fundou a ciência da computação moderna. Desde seus estudos pioneiros em lógica matemática até suas contribuições cruciais na Segunda Guerra Mundial e a invenção da máquina de Turing, esse livro analisa profundamente não apenas as conquistas do matemático, mas também o impacto duradouro de suas ideias nos campos da Matemática e da Tecnologia. Ideal para quem busca compreender as intersecções entre Matemática, História e inovação tecnológica.

Um convite à matemática: com técnicas de demonstração e notas históricas

MORAIS FILHO, Daniel Cordeiro de. *Um convite à matemática*: com técnicas de demonstração e notas históricas. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2020.

Esse livro mergulha nos métodos de demonstração matemática, complementados por valiosas notas históricas que ilustram a evolução do pensamento matemático. É perfeito para estudantes e professores que buscam compreender, além de como realizar demonstrações, o contexto histórico das técnicas matemáticas.

RESPOSTAS

Professor, professora: Esta seção apresenta respostas esperadas às atividades de cálculo constantes nos capítulos do volume, incluindo questões das páginas de abertura e de teoria, atividades de seções especiais e tarefas da seção **Exercícios e problemas**. Além disso, constam nesta seção as respostas indicadas para o final do **Livro do Estudante** nas notas ao professor. Não constam aqui respostas pessoais nem respostas abertas, como elaboração de problemas e resultado de pesquisas.

CAPÍTULO 1 GRANDEZAS E MEDIDAS

Abertura do capítulo

1. Sugestão de resposta: Os tecidos sintéticos, o velcro e as micro-ondas.

Questões

A. Algumas possíveis respostas: Medir o tempo de duração de uma partida de futebol e o comprimento da sala de aula.

B. Algumas possíveis respostas: Hora, quilômetro e grama.

D. 60 min

E. $\frac{1}{60}$ min

F. $1 \cdot 10^6$ g; $1 \cdot 10^9$ mg

G. a) Como 1 hm = 100 m, então $1\ m^2 = (0{,}01\ hm)^2$. Logo:

$$(0{,}01)^2 = 0{,}0001 = 1 \cdot 10^{-4}$$
$$1\ m^2 = 1 \cdot 10^{-4}\ hm^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1 \cdot 10^4\ m^2 = 1 \cdot 10^{-4} \cdot 10^4\ hm^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1 \cdot 10^4\ m^2 = 1\ hm^2$$

Portanto, $1\ hm^2 = 1 \cdot 10^4\ m^2$.

b) Como 1 dam = 10 m, então $1\ m^2 = (0{,}1\ dam)^2$. Logo:

$$(0{,}1)^2 = 0{,}01 = 1 \cdot 10^{-2}$$
$$1\ m^2 = 1 \cdot 10^{-2}\ dam^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1 \cdot 10^2\ m^2 = 1 \cdot 10^{-2} \cdot 10^2\ dam^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1 \cdot 10^2\ m^2 = 1\ dam^2$$

Portanto, $1\ dam^2 = 1 \cdot 10^2\ m^2$.

c) Como 1 m = 10 dm, então $1\ m^2 = (10\ dm)^2$. Logo:

$$10^2 = 100 = 1 \cdot 10^2$$
$$1\ m^2 = 1 \cdot 10^2\ dm \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1 \cdot 10^{-2}\ m^2 = 1 \cdot 10^2 \cdot 10^{-2}\ dm^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1 \cdot 10^{-2}\ m^2 = 1\ dm^2$$

Portanto, $1\ dm^2 = 1 \cdot 10^{-2}\ m^2$.

d) Como 1 m = 100 cm, então $1\ m^2 = (100\ cm)^2$. Logo:

$$100^2 = 10\,000 = 1 \cdot 10^4$$
$$1\ m^2 = 1 \cdot 10^4\ cm \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1 \cdot 10^{-4}\ m^2 = 1 \cdot 10^4 \cdot 10^{-4}\ cm^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1 \cdot 10^{-4}\ m^2 = 1\ cm^2$$

Portanto, $1\ cm^2 = 1 \cdot 10^{-4}\ m^2$.

e) Como 1 m = 1000 mm, então $1\ m^2 = (1000\ mm)^2$. Logo:

$$1\,000^2 = 1\,000\,000 = 1 \cdot 10^6$$
$$1\ m^2 = 1 \cdot 10^6\ mm \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1 \cdot 10^{-6}\ m^2 = 1 \cdot 10^6 \cdot 10^{-6}\ mm^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1 \cdot 10^{-6}\ m^2 = 1\ mm^2$$

Portanto, $1\ mm^2 = 1 \cdot 10^{-6}\ m^2$.

H. a) Como 1 hm = 100 m, então $1\ m^3 = (0{,}01\ hm)^3$. Logo:

$$(0{,}01)^3 = 0{,}000001 = 1 \cdot 10^{-6}$$
$$1\ m^3 = 1 \cdot 10^{-6}\ hm^3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1 \cdot 10^6\ m^3 = 1 \cdot 10^{-6} \cdot 10^6\ hm^3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1 \cdot 10^6\ m^3 = 1\ hm^3$$

Portanto, $1\ hm^3 = 1 \cdot 10^6\ m^3$.

b) Como 1 dam = 10 m, então $1\ m^3 = (0{,}1\ dam)^3$. Logo:

$$(0{,}1)^3 = 0{,}001 = 1 \cdot 10^{-3}$$
$$1\ m^3 = 1 \cdot 10^{-3}\ dam^3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1 \cdot 10^3\ m^3 = 1 \cdot 10^{-3} \cdot 10^3\ dam^3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1 \cdot 10^3\ m^3 = 1\ dam^3$$

Portanto, $1\ dam^3 = 1 \cdot 10^3\ m^3$.

c) Como 1 m = 10 dm, então $1\ m^3 = (10\ dm)^3$. Logo:

$$10^3 = 1000 = 1 \cdot 10^3$$
$$1\ m^3 = 1 \cdot 10^3\ dm^3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1 \cdot 10^{-3}\ m^3 = 1 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3}\ dm^3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1 \cdot 10^{-3}\ m^3 = 1\ dm^3$$

Portanto, $1\ dm^3 = 1 \cdot 10^{-3}\ m^3$.

d) Como 1 m = 100 cm, então $1\ m^3 = (100\ cm)^3$. Logo:

$$100^3 = 1\,000\,000 = 1 \cdot 10^6$$
$$1\ m^3 = 1 \cdot 10^6\ cm^3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1 \cdot 10^{-6}\ m^3 = 1 \cdot 10^6 \cdot 10^{-6}\ cm^3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1 \cdot 10^{-6}\ m^3 = 1\ cm^3$$

Portanto, $1\ cm^3 = 1 \cdot 10^{-6}\ m^3$.

e) Como 1 m = 1000 mm, então $1\ m^3 = (1000\ mm)^3$. Logo:

$$1000^3 = 1\,000\,000\,000 = 1 \cdot 10^9$$
$$1\ m^3 = 1 \cdot 10^9\ mm^3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1 \cdot 10^{-9}\ m^3 = 1 \cdot 10^9 \cdot 10^{-9}\ mm^3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1 \cdot 10^{-9}\ m^3 = 1\ mm^3$$

Portanto, $1\ mm^3 = 1 \cdot 10^{-9}\ m^3$.

J. a) Como 1 m = 10 dm, então $1\ m^3 = (10\ dm)^3$. Logo:

$$10^3 = 1000 \Rightarrow 1\ m^3 = 1000\ dm^3$$
$$1\ dm^3 = 1\ L$$
$$1\ m^3 = 1000\ dm^3 = 1000\ L$$

Portanto, $1\ m^3 = 1000$ L

b) Como verificado no item **a**, sabemos que $1\ m^3 = 1000$ L. Como $1\ m^3 = 1\,000\,000\ cm^3$, e sabendo que 1 L = 1000 mL, temos:

$$1\ m^3 = 1\,000\,000\ cm^3$$
$$1000\ L = 1\,000\,000\ cm^3$$
$$1\,000\,000\ mL = 1\,000\,000\ cm^3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1\ mL = 1\ cm^3$$

Portanto, $1\ cm^3 = 1$ mL.

K.

Início
1. Leia a medida em metros cúbicos.
2. Multiplique o número que expressa a medida em metros cúbicos por 1000.

Fim

L. $75{,}06 \cdot 10^3$ kg

M.

Início
1. Leia a medida em terabaites.
2. Multiplique o número que expressa a medida em terabaites por 1024.

Fim

Exercícios e problemas

1. a) $1{,}25 \cdot 10^2$ anos
b) $4{,}25 \cdot 10^8$ s
c) $1{,}487 \cdot 10^{12}$ min
d) $1{,}232 \cdot 10^5$ s
e) $3{,}2 \cdot 10^{-10}$ h
f) $5{,}3 \cdot 10^{-9}$ μs

2. $5{,}205 \cdot 10^1$ s, $5{,}328 \cdot 10^1$ s e $5{,}635 \cdot 10^1$ s.

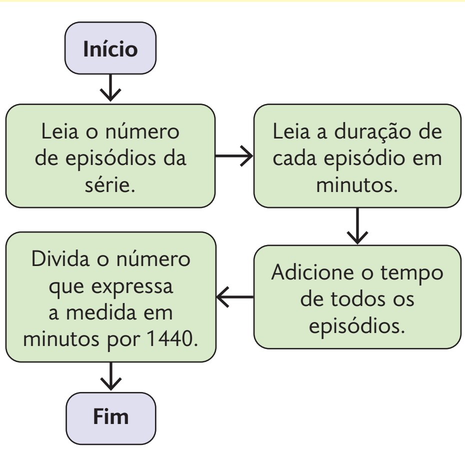
3. a) 5,3 h = 318 min
b) 9,4 s = $9{,}4 \cdot 10^6$ μs
c) 0,45 min = 27 s
d) 1344 min = $8{,}064 \cdot 10^{10}$ μs
e) 1620 min = 27 h
f) 2 h = $7{,}2 \cdot 10^9$ μs
g) 4 500 000 μs = 4,5 s
h) $2 \cdot 10^9$ μs = 2 000 s
i) $4{,}32 \cdot 10^4$ s = 12 h

4. a) 1 dia, 19 horas e 23 minutos.
b) 19 dias, 3 horas e 30 minutos.
c) 13 dias, 15 horas e 18 minutos.
d) 4 dias, 6 horas e 45 minutos.
e) 7 dias, 23 horas e 10 minutos.
f) 25 dias, 4 horas e 2 minutos.

5.

Início
1. Leia o número de episódios da série.
2. Leia a duração de cada episódio em minutos.
3. Adicione o tempo de todos os episódios.
4. Divida o número que expressa a medida em minutos por 1440.

Fim



LAÍS GARBELINI/ARQUIVO DA EDITORA

6. a) Pilha, fralda descartável, sacolas e sacos plásticos e alumínio.

7. No dia 6, às 8 h.

8. Alternativa **b**.

9. a) 365,25 kWh
b) R$ 18,72

10. Alternativa **b**.

11. $7{,}44 \cdot 10^{-8}$%

12. a) 41,4 kWh

13. a) Serão economizados R$ 14,52.
b) Sugestões de respostas: Diminuir o tempo de uso do chuveiro elétrico, retirar os aparelhos da tomada quando não estiverem ligados, não deixar lâmpadas acesas sem necessidade e evitar abrir muitas vezes a geladeira.

14. a) 93,4 dm = 0,0934 hm
b) 7,3 dam = 0,073 km
c) 0,576 km = 5 760 dm
d) $1{,}5 \cdot 10^{-4}$ m = 0,015 cm
e) $6{,}521 \cdot 10^2$ cm = 0,6521 dam

15. Aproximadamente 443 pés.

16. a) Região Sudeste brasileira: altitudes do relevo.
b) Rios permanentes.
c) Minas Gerais; São Paulo.
d) Os pontos mais elevados foram representados usando o ícone que indica pico.
e) Não, pois não há regiões coloridas em vermelho na Serra da Canastra.
f) Pico das Agulhas negras; Pico da Bandeira.
g) Pico Pedra da Mina; Pico da Bandeira.

17. a) 316,992 m
b) 950,976 m

18. a) 3 m

19. a) Aproximadamente 4 220 000 dam.

20. a) Piauí.
b) Agricultura, pecuária, fruticultura e coleta de mel.
c) 7,4 km

21. Alternativa **d**.

22. a) $2{,}992 \cdot 10^{11}$ m = 2 UA
b) $2{,}3188 \cdot 10^{10}$ km = 155 UA
c) 5 UA = $7{,}48 \cdot 10^8$ km
d) 13 UA = $1{,}9448 \cdot 10^{12}$ m
e) $3{,}2912 \cdot 10^{12}$ m = 22 UA
f) 100 UA = $1{,}496 \cdot 10^{10}$ km
g) 7,5 UA = $1{,}122 \cdot 10^{12}$ m
h) $7{,}48 \cdot 10^{18}$ m = $5 \cdot 10^7$ UA
i) 3,2 UA = $4{,}7872 \cdot 10^8$ km
j) 0,9 UA = $1{,}3464 \cdot 10^{11}$ m

23. a) Aproximadamente $1{,}6082 \cdot 10^{14}$ km.
b) Aproximadamente $2{,}365 \cdot 10^{16}$ m.
c) Aproximadamente 5,6 al.
d) Aproximadamente 13 al.
e) Aproximadamente $9{,}46 \cdot 10^{13}$ km.
f) Aproximadamente $1{,}581 \cdot 10^{-5}$ al.
g) Aproximadamente $3{,}14 \cdot 10^2$ UA.
h) Aproximadamente $3{,}4529 \cdot 10^{13}$ km.
i) Aproximadamente $4{,}032 \cdot 10^{-4}$ al.
j) Aproximadamente $1{,}565 \cdot 10^2$ UA.

24. a) Aproximadamente $2{,}57 \cdot 10^{-3}$ UA.
b) $3{,}844 \cdot 10^{8}$

25. a) $2{,}3 \cdot 10^{9}$ km
b) Aproximadamente $3{,}3 \cdot 10^{8}$ UA.

26. a) 3 UA b) 2 al c) 1,5 UA d) 2,3 al

27. a) 7.7792E11 b) 1.3E23

28. 121,6 UA: aproximadamente 454 743 voltas; 119 UA: aproximadamente 445 020 voltas.

29. Aproximadamente 120 al.

30. Aproximadamente $1{,}27 \cdot 10^{23}$ km.

31. Alternativa **b**.

32. a) • 160 000 al $\simeq 1{,}5136 \cdot 10^{21}$ m;
200 000 al $\simeq 1{,}892 \cdot 10^{21}$ m.
• 160 000 al $\simeq 1{,}5136 \cdot 10^{18}$ km;
200 000 al $\simeq 1{,}892 \cdot 10^{18}$ km.
• 160 000 al $\simeq 1{,}012 \cdot 10^{10}$ UA;
200 000 al $\simeq 1{,}2647 \cdot 10^{10}$ UA.

33. a) $1{,}49 \cdot 10^{-4}$ m = 149 μm
b) $5{,}2 \cdot 10^{-9}$ m = 5,2 nm
c) $2{,}3 \cdot 10^{-6}$ cm = 23 nm
d) $1{,}713 \cdot 10^{-3}$ mm = 1,713 μm
e) 7,1 μm = $7{,}1 \cdot 10^{-4}$ cm
f) 28 μm = $2{,}8 \cdot 10^{-5}$ m
g) 8 nm = $8 \cdot 10^{-6}$ mm
h) 64 nm = $6{,}4 \cdot 10^{-8}$ m

34. a) Aproximadamente $4{,}00036 \cdot 10^{13}$ μm.

35. a) 748 500 nm

36. a) Cerca de 1 429 vezes.
b) 15 625 vezes.
c) 100 800 vezes.
d) 2 000 vezes.
e) Cerca de 191 vezes.
f) Cerca de 685 871 vezes.

37. Alternativa **c**.

38. a) Aproximadamente 84,78 mm.
b) Sim, pois 2 745 μm = 2,745 mm e 2,745 mm < 84,78 mm.

39. a) 0,1 mm = 100 μm; 0,03 mm = 30 μm; 0,002 mm = 2 μm.

41. a) $1{,}2 \cdot 10^{5}$ mg = 120 g
b) $5{,}3 \cdot 10^{7}$ mg = 53 kg
c) $3{,}7 \cdot 10^{-5}$ kg = 37 mg
d) $1{,}73 \cdot 10^{-5}$ t = 17,3 g
e) $6{,}2 \cdot 10^{6}$ g = 6,2 t
f) 5 764 kg = 5,764 t
g) 0,08 g = 80 mg
h) 640 t = $6{,}4 \cdot 10^{5}$ kg
i) 91 450 mg = 0,09145 kg

42. Cerca de 1 048 vezes.

43. Obesidade; sobrepeso.

44. a) Verdadeira. c) Falsa.
b) Falsa. d) Verdadeira.

45. Aproximadamente 1 404 quilates.

46. Aproximadamente $1{,}12 \cdot 10^{-9}$.

47. a) 40%
b) 3,6 g

48. a) Aproximadamente $1{,}5 \cdot 10^{7}$ t.

49. Aproximadamente R$ 89,29 por arroba; aproximadamente R$ 5 952,38 por tonelada.

50. a) 40,5%
b) 100 milhões de toneladas.
c) 15 milhões de toneladas; 500 mil toneladas.

51. a) Ração para o cão: R$ 10,00 por quilograma; ração para o gato: R$ 12,00 por quilograma.
b) 25 dias.

53. a) 7 mm² = $7 \cdot 10^{-6}$ m²
b) 44 cm² = $4{,}4 \cdot 10^{-7}$ hm²
c) 8,5 dm² = $8{,}5 \cdot 10^{-8}$ km²
d) 8 745 m² = $8{,}745 \cdot 10^{-3}$ km²
e) 526 m² = $5{,}26 \cdot 10^{8}$ mm²
f) 0,35 dam² = $3{,}5 \cdot 10^{3}$ dm²
g) 3,7 hm² = $3{,}7 \cdot 10^{8}$ cm²
h) 63 km² = $6{,}3 \cdot 10^{13}$ mm²
i) 142 dm² = $1{,}42 \cdot 10^{6}$ mm²
j) 248 hm² = $2{,}48 \cdot 10^{6}$ m²

54. a) 4 200 km² b) 2,5 MW/km²

55. a) Aproximadamente 3 km².
b) Aproximadamente 7,5 km².
c) Aproximadamente 6,2 km².
d) 4,8 km²

56. Alternativa **b**.

57. a) Cerca de 60,07 km².

58. a) Sudeste; Norte.
b) Região Norte: aproximadamente 3,86 milhões de quilômetros quadrados. Região Nordeste: aproximadamente 1,55 milhões de quilômetros quadrados. Região Sudeste: aproximadamente 0,92 milhões de quilômetros quadrados. Região Sul: aproximadamente 0,58 milhões de quilômetros quadrados; região Centro-Oeste: aproximadamente 1,61 milhões de quilômetros quadrados.
c) A população brasileira está desigualmente distribuída pelo território nacional.

59. a) 25 mm³ = $2{,}5 \cdot 10^{-8}$ m³
b) 657 cm³ = $6{,}57 \cdot 10^{-10}$ hm³
c) 83,3 L = $8{,}33 \cdot 10^{-11}$ km³
d) 4 156 m³ = $4{,}156 \cdot 10^{-6}$ km³
e) 577 m³ = $5{,}77 \cdot 10^{8}$ mL
f) 0,41 dam³ = $4{,}1 \cdot 10^{5}$ dm³

60. a) Aproximadamente 17 284 m³/s.
b) Aproximadamente $1{,}66 \cdot 10^{10}$ m³.

61. a) 668 835 000 km³; 18 690 000 km³
b) Maior, pois o Oceano Pacífico tem volume de água correspondente a 50,1% do volume total de água dos oceanos da Terra.

62. Não, pois a capacidade desse aquário é de 121,5 L e 120 L < 121,5 L.

63. Junho: aproximadamente 9,15 L; julho: aproximadamente 7,3 L; agosto: aproximadamente 3,75 L; setembro: aproximadamente 0,68 L; outubro: aproximadamente 0,74 L; novembro: aproximadamente 3,42 L.

64. Alternativa **c**.

66. a) 20 m/s = 72 km/h
b) 65 m/s = 234 km/h
c) 110 km/h = $30,\overline{5}$ m/s
d) 60 km/h = $16,\overline{6}$ m/s

67. 60 km/h

68. 10,2 km/h

69. 39,6 km/h

70. $2,\overline{77}$ m/s

71. 1 hora e 30 minutos.

72. 188,5 km

73. Aproximadamente 68,6 km/h.

75. b) 6 e 2.

76. a) 4 algarismos significativos.
b) 5
c) $2,925 \cdot 10^4$ µm

77. a) 3 algarismos significativos.
b) 4 algarismos significativos.
c) 5 algarismos significativos.
d) 1 algarismo significativo.
e) 4 algarismos significativos.
f) 4 algarismos significativos.

78. a) 238 cm
b) 5,88 s ou 5,87 s
c) 18,2 cm^2
d) 0,155 g
e) 1,89 dm^3
f) 260 m

79. a) $1,00 \cdot 10^{-3}$ km
b) $2,56 \cdot 10^{11}$ cm^2
c) $5,014 \cdot 10^1$ m/s
d) $8,2 \cdot 10^3$ g
e) $1,005 \cdot 10^{17}$ mm^3
f) $5,98 \cdot 10^3$ kg

80. a) 60,1 cm
b) 150,1 t
c) 17,36 s
d) 5,19 km/h
e) 147,6 km
f) 33 g
g) 232,3 cm
h) 65,148 t

81. a) 241,5
b) 13,7
c) 416
d) 6,814
e) 6,426
f) 2,9

82. a) 3 algarismos significativos.
b) 5
c) Não, pois nesse caso o 5 seria um algarismo correto, o que não é verdade.

83. $3,15 \cdot 10^2$ km

85. a) 45 GB = 46 080 MB
b) 1 TB = 1 073 741 824 kB
c) 88 268,8 MB = 86,2 GB
d) 385 GB = 3 307 124 817 920 bites
e) 901 775,36 kB = 0,86 GB
f) 839,68 GB = 0,82 TB

86. a) Aproximadamente 26,388 bilhões de bites.
b) Aproximadamente 36,94 bilhões de bites.
c) Aproximadamente 4,398 bilhões de bites.

87. a) 4 172 arquivos
b) 18 203 279,36 kB

88. a) A 1ª opção.
b) Uma possível resposta: A 1ª opção, pois é a única que atende à necessidade de espaço para armazenamento destinado a cada um dos funcionários.

89. 18,75%

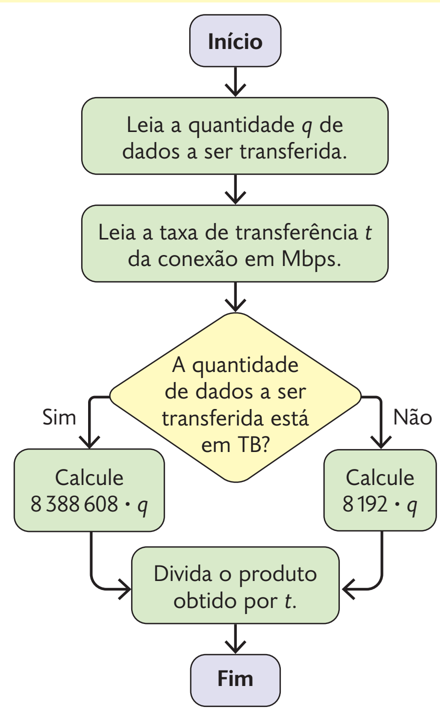
90. a) 225 fotos.

91. a) 1 088 fotos.
b) 1 856 fotos.
c) 3 392 fotos.

92. a) Não, pois, para que seja possível obter o tempo necessário para fazer o *download*, a quantidade de dados deve ser expressa em terabaite, gigabaite, megabaite, quilobaite ou baite.
b) É preciso efetuar essa multiplicação para obter a quantidade de dados em bites, ou seja:
1 TB = 1024^3 quilobaites = 1 073 741 824 quilobaites
1 073 741 824 quilobaites = 8 · 1 073 741 824 quilobites =
= 8 589 934 592 quilobites
c) 272 s
d)

Início
1. Leia a quantidade q de dados a ser transferida.
2. Leia a taxa de transferência t da conexão em Mbps.
3. Se a quantidade de dados a ser transferida estiver em TB, calcule 8 388 608 · q, senão calcule 8 192 · q.
4. Divida o produto obtido por t.

Fim



LAÍS GARBELINI/ARQUIVO DA EDITORA

93. 1,5 min

94. a) • Aproximadamente 1 h 19 min 44 s.
• Aproximadamente 1 h 9 min 29 s.
b) Aproximadamente 13,2 s.

95. a) 3 h 24 min 48 s
b) Algumas possíveis respostas: A taxa de transferência do HD antigo era menor; as conexões e os cabos não suportaram a taxa de transferência anunciada; o computador estava realizando outras tarefas e, por isso, a taxa de transferência foi reduzida.
c) 0 h 34 min 8 s

96. a) Aproximadamente 2,49 GB.
b) Aproximadamente 32 Mbps.

97. a) Aproximadamente 635 TB.
b) 98 877,44 Mb; aproximadamente 2 h 45 min.

98. a) 3 200 000 000 ciclos por segundo.
b) 770 000 000 ciclos por segundo.
c) 2 400 000 000 ciclos por segundo.
d) 4 000 000 000 ciclos por segundo.
e) 450 000 000 ciclos por segundo.
f) 1 800 000 000 ciclos por segundo.
g) 3 400 000 000 ciclos por segundo.
h) 25 000 000 ciclos por segundo.

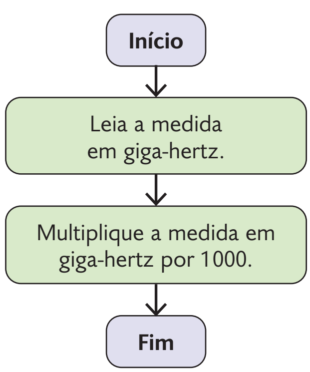
99. a) 3 GHz
b) 4,2 GHz
c) 0,0075 GHz
d) 0,0115 GHz
e) 3,6 GHz
f) 2,4 GHz
g) 1,08 GHz
h) 1,8 GHz

100. a) 3 200 MHz = 3,2 GHz
b) 4,2 GHz = 4 200 MHz
c) 440 Hz = 0,00044 MHz
d) 52 MHz = 0,052 GHz
e) 64 GHz = 64 000 000 000 Hz
f) 518 MHz = 518 000 000 Hz
g) 35 700 Hz = 0,0000357 GHz
h) 683 GHz = 683 000 MHz

101.

Início
1. Leia a medida em giga-hertz.
2. Multiplique a medida em giga-hertz por 1 000.
Fim

102.



LAÍS GARBELINI/ARQUIVO DA EDITORA

103. 3 199 200 000 ciclos por segundo.

104. 1,08 GHz

105. 2,8 GHz

106. a) Aproximadamente 57,1%.
b) 98 304 MB

Educação midiática (páginas 26 e 27)

1. É um tipo de inteligência artificial que pode gerar novos conteúdos, como textos, imagens e vídeos.

Trabalho e juventudes (página 38)

2. Algumas possíveis respostas: Açougueiros, para medir a massa das carnes; médicos, quando precisam saber as massas de seus pacientes; nutricionistas, para saber a quantidade exata de alimentos de uma refeição.

Desenvolvimento sustentável (páginas 46 e 47)

1. Aproximadamente 36 040 garrafas.

Síntese do capítulo (página 65)

3. Apresentamos duas possíveis respostas para cada item.
a) tempo de duração de uma aula; tempo de duração de um filme.
b) comprimento de um inseto; distância entre duas cidades.
c) massa de um animal; massa de uma pessoa.
d) área de uma parede; área de uma sala.
e) volume de pedra comprada em um deposito de construção; volume de água de um oceano.
f) capacidade de um recipiente; capacidade do tanque de combustível de um automóvel.
g) velocidade média de um automóvel em uma corrida; velocidade média de um atleta em uma maratona.
h) capacidade de armazenamento de um HD; capacidade de armazenamento em nuvem.
i) velocidade de *download* de um arquivo; velocidade de *upload* de um arquivo.
j) capacidade de processamento de um *smartwatch*; capacidade de processamento de uma CPU.

4. Não, pois 12,6 > 10.

5.

Início
1. Leia a quantidade de x segundos a serem convertidos.
2. Multiplique a quantidade de x segundo por 1 000 000, $x \cdot 1\,000\,000$.
Fim

6. Alternativa **b**.

7. Ano-luz.

8. Sim, pois $1\text{ nm} = 1 \cdot 10^{-9}\text{ m}$ e $1965 \cdot 10^{-9}\text{ m} = 19{,}65 \cdot 10^{-7}$.

9. km^2, hm^2, dam^2, m^2, dm^2, cm^2, mm^2, alqueire do Norte, alqueire mineiro, alqueire paulista e hectare.

10. Sugestão de resposta: Multiplicaria o número que expressa a medida em metros cúbicos por 1 000.

11. Alternativa **b**.

12. Sugestão de resposta: Multiplicaria o número que expressa a capacidade de processamento da CPU por 1 000 000 000.

13. a)

Início
1. Leia a medida da carga total em toneladas.
2. Multiplique a medida da carga total por 1 000.
3. Leia a medida da carga carregada.
4. Calcule a diferença entre a carga total e a medida da carga carregada.
Fim

b)

Início
1. Leia a medida da distância em quilômetros.
2. Leia a medida do tempo gasto em minutos.
3. Divida a medida do tempo em minutos por 60.
4. Divida a medida da distância em quilômetros pelo tempo em horas.
Fim

c) **Início**

1. Leia a medida do arquivo em gigabaites.
2. Leia a medida da taxa da transferência média em megabites por segundo.
3. Multiplique a medida do arquivo em gigabaites por 8 192.
4. Divida a medida do arquivo em megabites pela taxa da transferência média em megabites por segundo.

Fim

CAPÍTULO 2 CONJUNTOS

Abertura do capítulo

2. Classe dos mamíferos, pois agrupa, além dos felídeos, outras famílias.

Questões

A. Sugestão de resposta: Tucano, rã, crocodilo, pirarucu e cascavel.

Exercícios e problemas

1. Alternativa **b**.

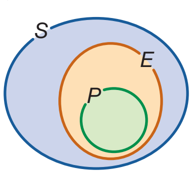
2. a) Verdadeira.
b) Falsa.
c) Verdadeira.
d) Falsa.
e) Verdadeira.
f) Verdadeira.

3. Alternativa **c**.

4. Alternativa **b**; propriedade transitiva.

5. $\{1, 2, 5\}$, $\{1, 2, 10\}$, $\{1, 5, 10\}$, $\{2, 5, 10\}$

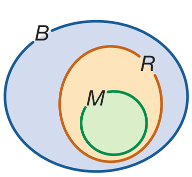
7. a)



S: conjunto das atividades saudáveis
E: conjunto dos esportes
P: conjunto de prática de atletismo

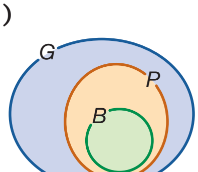
RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

b)



B: conjunto de brasileiros
R: conjunto de nascidos no Rio Grande do Norte
M: conjunto cujo único elemento é Marcos

c)



P: conjunto dos poliedros
B: conjunto das pirâmides
G: conjunto das figuras geométricas espaciais

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

8. a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
b) $A \cap C = \varnothing$
c) $(A \cup B) \cap C = \{5\}$
d) $(A \cap C) \cup B = \{1, 3, 4, 5\}$

9. 8 elementos.

10. 5 elementos; 3 elementos.

11. a) $\complement_U^A = \{x \mid x \text{ é um número par}\}$
b) $\complement_U^B = \{x \mid x \text{ é um número negativo ou } x = 0\}$

13. a) 19 funcionários.
b) 12 funcionários.
c) 5 funcionários.
d) 14 funcionários.
e) 7 funcionários.

14. 6 estudantes.

15. a) 200 pacientes. b) 88 pacientes.

16. Alternativa **d**.

17. 34 clientes.

18. a) 63 estudantes.
b) 77 estudantes.
c) 35 estudantes.

19. a) 49 estudantes. b) 103 estudantes.

20. 13 500 habitantes.

22. a) 0; 2; 6
b) -1; -3; -7; -11
c) $-10{,}25$; $-\frac{4}{3}$; $0{,}\overline{27}$; 0,5; 8,012

23. $-\frac{3}{7}$. Uma possível resposta: Forma fracionária $-\frac{1}{2}$; forma decimal $-0{,}55$.

24. a) $\frac{2}{3}$
b) $\frac{9}{11}$
c) $\frac{134}{99}$
d) $\frac{25}{3}$
e) $\frac{125}{999}$
f) $\frac{114}{11}$

25. A. $\frac{5\sqrt{5}}{2}$ cm; irracional. B. 6 cm; racional.

26. Não. Contraexemplo: o produto entre os números irracionais $\sqrt{2}$ e $2\sqrt{2}$ é igual a 4, ou seja, um número racional.

27. a) $\mathbb{Q}$

Resolvendo por etapas (página 77 e 78)

2. Sim; 31 estudantes.

CAPÍTULO 3 FUNÇÃO

Questões

A. Variável dependente: quantidade de biodiesel (q); variável independente: quantidade de sementes de mamona (x).

Exercícios e problemas

1. a) Ano e população.
b) 146,9 milhões de habitantes.

3. a) Variável independente: quantidade de quilômetros rodados (q). Variável dependente: quantia a ser paga (P).
b) R$ 0,46
c) R$ 190,80
d) 550 km

4. a) Variável dependente: quantia depositada (*D*); variável independente: comissão de vendas mensal recebida por Joana (*x*).

b) R$ 950,00

c) R$ 1600,00

5. a) $P = 6 \cdot \frac{x}{2}$ ou $P = 3x$

b) • 6 m
• 36 m

c) • 7 m
• 3,4 m

6. Alternativa **b**.

7. a) **II**

b) **I**

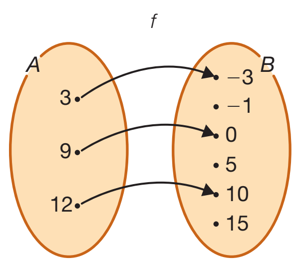
c) • 4,92 kg
• 3,536 kg

d) 5 pessoas.

8. Alternativa **B**.

9. Alternativa **d**.

10.



HELOÍSA PINTARELLI/ARQUIVO DA EDITORA

11. a) $Im(h) = \{24, 30, 40, 60, 120\}$

b) $Im(h) = \{20, 24, 30, 40, 60\}$

c) $Im(h) = \{25, 31, 41, 61, 121\}$

d) $Im(h) = \{23, 29, 39, 59, 119\}$

12. a) $p(t) = 5{,}5t$

b) R$ 16,50

13. a) $p(t) = 900t$

b) $p(24) = 21\,600$. O número 21 600 representa a quantidade de pessoas mortas por doenças relacionadas ao tabagismo em um período de 24 horas.

c) Algumas possíveis respostas: Vício, pois o cérebro do fumante se adapta e precisa de doses cada vez maiores para manter o nível de satisfação que tinha no início; causa direta de aproximadamente 50 doenças, como câncer, doenças cardiovasculares e respiratórias.

14. a) 2013: 129 900 habitantes; 2019: 143 700 habitantes.

15. Alternativa **d**.

16. a) $D(f) = \mathbb{R}$

b) $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$ ou $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq -1\}$

c) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 7\}$

d) $D(f) =]-\infty, 12]$ ou $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 12\}$

e) $D(f) =]-\infty, 4[$ ou $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x < 4\}$

f) $D(f) =]2, +\infty[$ ou $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x > 2\}$

17. Alternativa **b**.

18. a) O domínio não está correto.

b) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x < -2 \text{ ou } x \geq 6\}$

19. A. Não, pois há retas paralelas ao eixo *y* cortando o gráfico em pelo menos dois pontos distintos.

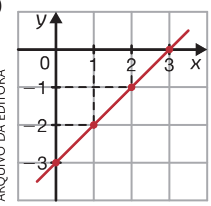
B. Sim, pois qualquer que seja a reta traçada paralelamente ao eixo *y*, ela cortará o gráfico em um único ponto.

C. Sim, pois qualquer que seja a reta traçada paralelamente ao eixo y, ela cortará o gráfico em um único ponto.

D. Não, pois há retas paralelas ao eixo y cortando o gráfico em dois pontos distintos.

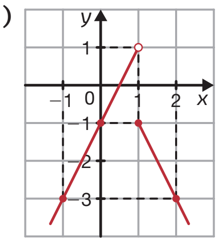
20. Alternativa **B**.

21. a)



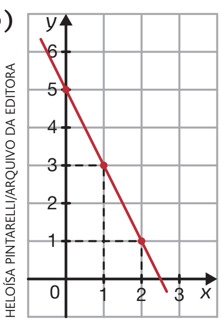
HELOÍSA PINTARELLI/ARQUIVO DA EDITORA

d)



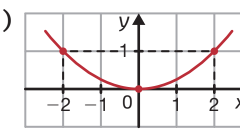
HELOÍSA PINTARELLI/ARQUIVO DA EDITORA

b)



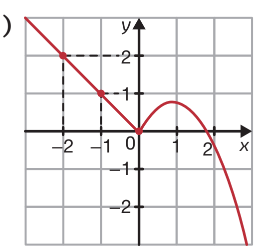
HELOÍSA PINTARELLI/ARQUIVO DA EDITORA

e)



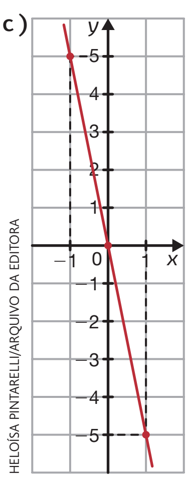
HELOÍSA PINTARELLI/ARQUIVO DA EDITORA

f)



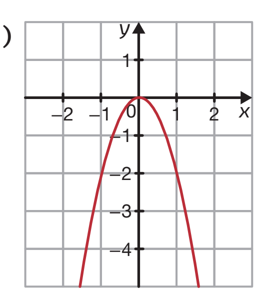
OHANNA SCHMITT/ARQUIVO DA EDITORA

c)



HELOÍSA PINTARELLI/ARQUIVO DA EDITORA

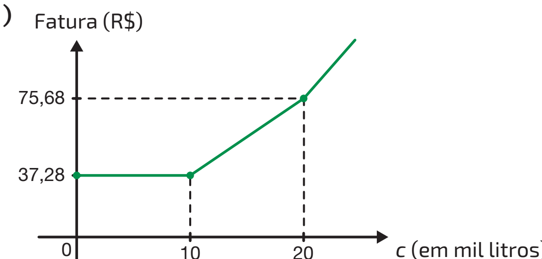
g)



OHANNA SCHMITT/ARQUIVO DA EDITORA

22. a) • R$ 44,96
• R$ 116,56

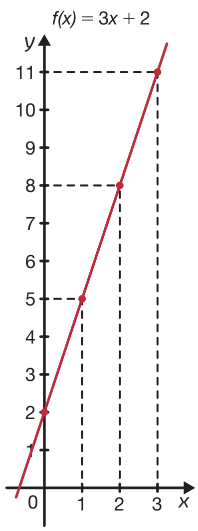
b)

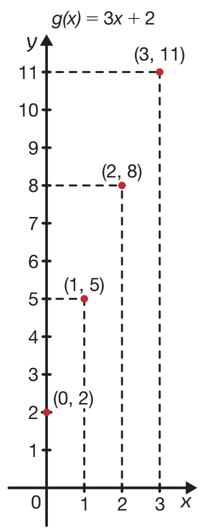


SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

23. Alternativas **A** e **B**.

24.





ILUSTRAÇÕES: HELOÍSA PINTARELLI/ARQUIVO DA EDITORA

Por apresentarem domínios diferentes, f e g têm seus gráficos diferentes entre si. No caso de f, podem ser escolhidos dois ou mais pontos e traçada uma reta por eles. Já a função g deve ser representada apenas pelos pontos cuja abscissa seja um número natural.

25. a) $f(4) = 2$

b) $x = -4$, $x = -2$ e $x = 1$

c) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | -6 \leq x \leq 6\}$; $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} | -2 \leq y \leq 4\}$

26. a) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | -4 \leq x \leq 12\}$; $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} | -4 \leq y \leq 5\}$

b) • $[3, 5]$ e $[8, 10]$ • $[-2, 3]$, $[5, 8]$ e $[10, 12]$

• $[-4, -2]$

c) $-\frac{28}{9}$ e 9

27. a) 46 h; 48 h

b) Crescente, pois, quanto maior a quantidade de peças encomendadas, maior será o tempo para a entrega.

28. a) Verde, pois, como a tartaruga não parou, sua distância em relação à largada foi crescente durante todo o tempo da corrida.

b) Não, pois em certo intervalo, que corresponde ao período em que a lebre permaneceu dormindo, a função é constante.

c) A tartaruga. Algumas possíveis respostas: Quem segue devagar e com constância pode chegar à frente; paciência pode valer mais do que a pressa; nem sempre os mais velozes chegam em primeiro lugar.

29. a) $\frac{1}{4}$ b) $-\frac{1}{2}$

30. a) 7 semanas.

b) 1,6 cm por semana; 1,52 cm por semana.

31. a) $f(x) = 3{,}70x$ b) R$ 555,00 c) 3,7

32. a) Alternativa **II**.

b) $D(f) = [0, 16]$; $Im(f) = [0, 12]$

c) De 0 a 4 meses.

Síntese do capítulo (página 105)

4. São representadas por uma função: **a**, **b**, **d**, **g**, **h**.
Sugestão de justificativa para os itens **c**, **e** e **f**:

c) Não, pois uma pessoa pode ter diferentes cores favoritas e várias pessoas podem ter a mesma cor favorita.

e) Não, pois determinada temperatura pode ser associada a mais de um dia do mês.

f) Não, pois a quantidade de vogais de uma palavra não tem relação com sua quantidade de caracteres.

5. Resposta na página **302**.

6. Diagramas **B** e **D**. Possível resposta: Dos diagramas apresentados, **B** e **D** são os únicos em que cada elemento de A (domínio) está relacionado a um único elemento de B (contradomínio).

8. Possível resposta: Não, pois, quando $x = 0$, a função não está definida. Portanto, f pode assumir todos os números reais, exceto zero.

9. A. Sugestão de resposta: Há retas paralelas ao eixo y cortando o gráfico em mais de um ponto distinto.

B. Sugestão de resposta: Qualquer que seja a reta traçada paralelamente ao eixo y, ela cortará o gráfico em pelo menos dois pontos distintos.

CAPÍTULO 4 FUNÇÃO AFIM E FUNÇÃO QUADRÁTICA

Abertura do capítulo

1. Sugestão de resposta: Incandescente, pois, se comparada às fluorescentes e às de LED equivalentes, ela consome mais energia elétrica, além de ter menor durabilidade.

2. Incandescente de 60 W: 14 400 W; fluorescente de 15 W: 3 600 W; LED de 9 W: 2 160 W. Não. Sim.

Questões

A. • $i(t) = 60t$, em que $i(t)$ indica o consumo da lâmpada em watts.

• $f(t) = 15t$, em que $f(t)$ indica o consumo da lâmpada em watts.

• $l(t) = 9t$, em que $l(t)$ indica o consumo da lâmpada em watts.

B. 24 unidades; 26 unidades.

D. 6 pacotes.

E. Não são funções quadráticas, pois a lei de formação das funções f, g e h não são da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c reais e $a \neq 0$.

F. $B(1, 0)$ e $B'(5, 0)$; $C(0, -5)$ e $C'(6, -5)$

Exercícios e problemas

1. a) Função afim.

b) Função afim, linear e identidade.

c) Função afim e linear.

d) Função afim e constante.

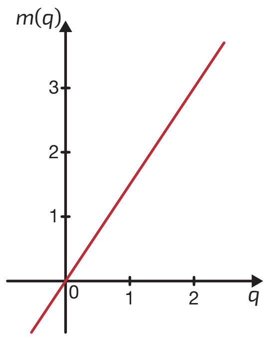
e) Função afim.

f) Função afim e linear.

2. a) 65 cm b) $p(c) = 5c$

3. a) $m(q) = 1{,}5q$ b) 75 t

4.



VINÍCIUS COSTA/ARQUIVO DA EDITORA

5. a) $f(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$

b) $f(x) = 2x + 5$

c) $f(x) = x + 2$

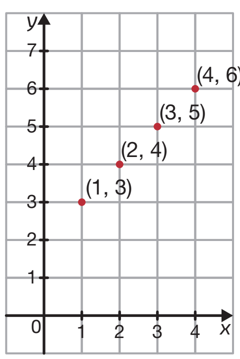
6. a) $s(n) = 180n - 360$

b) 720°

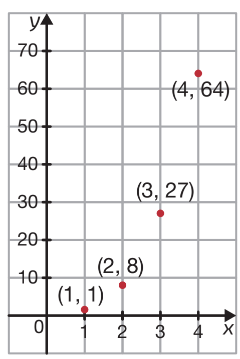
c) 15 lados.

7. a)

Quadro **A**



Quadro **B**

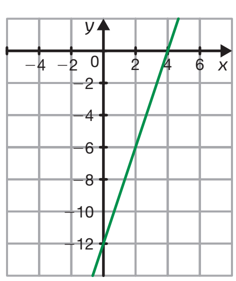


ILUSTRAÇÕES: VINÍCIUS COSTA/ARQUIVO DA EDITORA

Os pontos do quadro **A**.

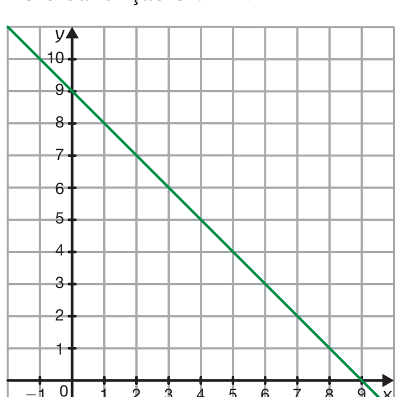
b) Quadro **A**: $y = x + 2$; quadro **B**: $y = x^3$.

8. a)



O zero da função é $x = 4$.

b)

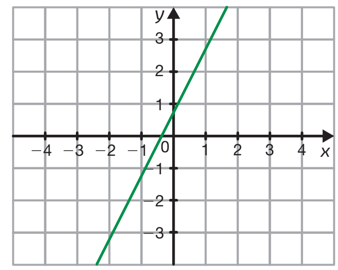


O zero da função é $x = 9$.

HELOÍSA PINTARELLI/ARQUIVO DA EDITORA

HELOÍSA PINTARELLI/ARQUIVO DA EDITORA

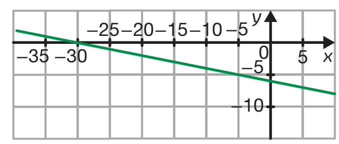
c)



HELOÍSA PINTARELLI/ARQUIVO DA EDITORA

O zero da função é $x = -\frac{3}{8}$.

d)



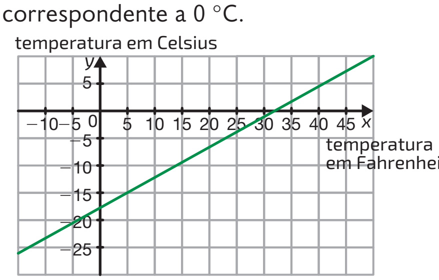
VINÍCIUS COSTA/ARQUIVO DA EDITORA

O zero da função é −30.

9. a) 10 °C

b) F = 32; A medida, em graus Fahrenheit, correspondente a 0 °C.

c)



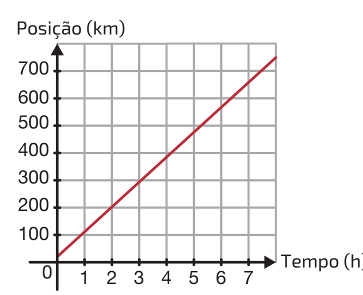
HELOÍSA PINTARELLI/ARQUIVO DA EDITORA

10. a) $p_A(t) = 84t + 24$ e $p_B(t) = 92t$

b) Depois de 3 h de jogo.

11. a) 90 km/h

b)



HELOÍSA PINTARELLI/ARQUIVO DA EDITORA

Sim. O gráfico dessa função pertence a uma reta e, consequentemente, corresponde a uma função afim.

c) $S(t) = 20 + 90t$; $D(S) = \mathbb{R}_+$; $Im(S) = [20, +\infty[$

d) Quilômetro 920.

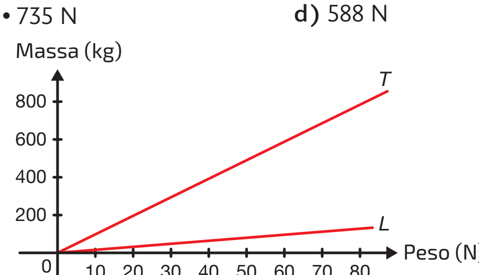
12. a) $T(m) = 9{,}8m$; $L(n) = 1{,}6n$

b) • 120 N
• 735 N

c) 57 kg

d) 588 N

e)



HELOÍSA PINTARELLI/ARQUIVO DA EDITORA

13. Alternativa **c**.

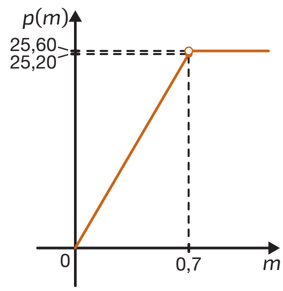
14. a) Crescente. b) Decrescente. c) Decrescente. d) Crescente.

15. Decrescente.

16. a) R$ 25,60; R$ 10,80.

b) $p(m) = \begin{cases} 36m, \text{ se } m \leq 0{,}7 \\ 25{,}60, \text{ se } m > 0{,}7 \end{cases}$

c)



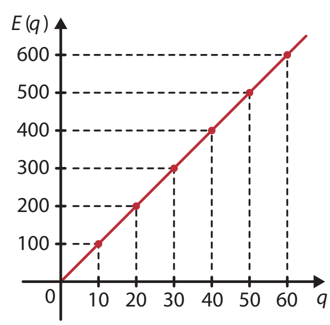
A função será crescente para $0 < m \leq 0{,}7$ e constante para $m > 0{,}7$.

17. a) 27 mil litros. b) $Q(t) = 150\,000 - 9\,000t$ c) Decrescente.

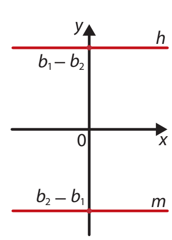
18. a) $h(x) = 2\,000$ b) Constante.

19. a) $E(q) = 10q$ b) Crescente.

c)



20.



As funções h e m são constantes.

21. a) • $f(x) = 0$ para $x = -2$.
• $f(x) > 0$ para $x > -2$.
• $f(x) < 0$ para $x < -2$.

b) • $f(x) = 0$ para $x = -5$.
• $f(x) > 0$ para $x < -5$.
• $f(x) < 0$ para $x > -5$.

c) • $f(x) = 0$ para $x = 6$.
• $f(x) > 0$ para $x > 6$.
• $f(x) < 0$ para $x < 6$.

d) • $f(x) = 0$ para $x = \frac{7}{3}$.
• $f(x) > 0$ para $x < \frac{7}{3}$.
• $f(x) < 0$ para $x > \frac{7}{3}$.

22. $x \in \,]2, 5[$

23. A. $f(x) = 0$ para $x = -10$; $f(x) > 0$ para $x > -10$ e $f(x) < 0$ para $x < -10$.
B. $f(x) > 0$ para todo x real.
C. $f(x) = 0$ para $x = 2$; $f(x) > 0$ para $x < 2$ e $f(x) < 0$ para $x > 2$.

24. a) $A(t) = 4{,}5t + 6$ b) $B(t) = 6{,}5t$
c) A opção **B** é mais vantajosa para um período menor do que 3 h; a opção **A**, para um período maior do que 3 h. As opções **A** e **B** têm o mesmo preço para 3 h.

25. Alternativa **c**.

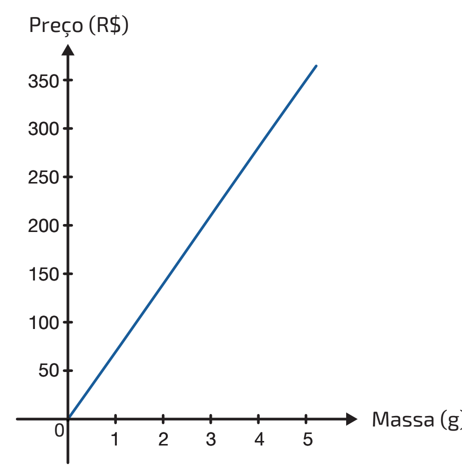
26. a) 1ª proposta: $S_1(v) = 1600 + 0{,}05v$;
2ª proposta: $S_2(v) = 1100 + 0{,}075v$.
b) Para vendas menores do que R$ 20 000,00, a 1ª proposta é mais vantajosa; para vendas maiores do que R$ 20 000,00, a 2ª proposta é mais vantajosa.

27. a) Locadora **A**: $V_A(x) = 82 + 0{,}52x$;
locadora **B**: $V_B(x) = 76 + 0{,}55x$.
b) Locadora **B**.
c) Para rodar menos de 200 km, a locadora **B** oferece o menor preço; para rodar mais de 200 km, a locadora **A** oferece o menor preço; para rodar 200 km, as locadoras oferecem o mesmo preço.

28. a) R$ 750,00
b) $L(v) = 75v - 1500$
c) R$ 21,00

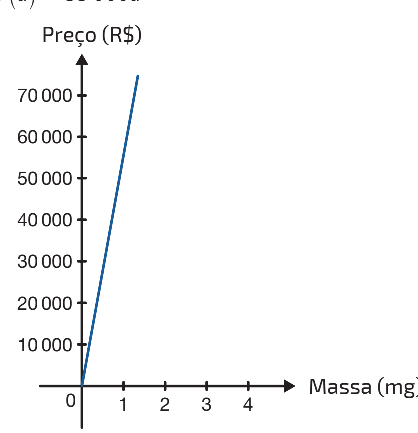
29. a) $V(x) = 0{,}43x$; R$ 1397,50

30. a) $P(m) = 69{,}90m$



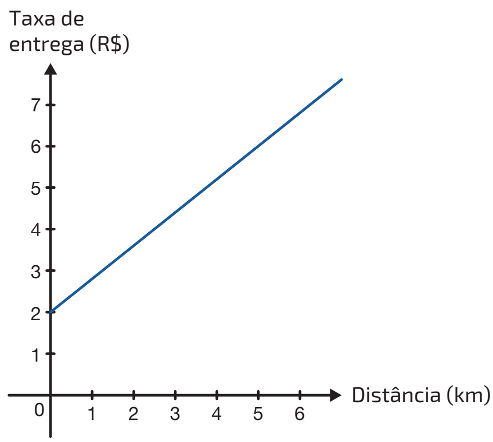
Grandezas diretamente proporcionais. Constante de proporcionalidade: 69,9.

b) $V(a) = 55\,000a$



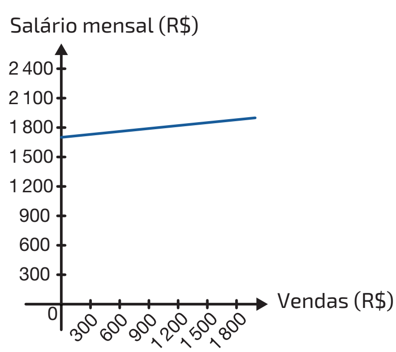
Grandezas diretamente proporcionais. Constante de proporcionalidade: 55 000.

c) $T(d) = 0{,}8d + 2$



As grandezas envolvidas não são diretamente proporcionais.

d) $S(v) = 0{,}10v + 1700$



ILUSTRAÇÕES: SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

As grandezas envolvidas não são diretamente proporcionais.

31. a) $A(b) = 4b$. Sim, pois a função que expressa a relação entre a área e o comprimento da base é uma função linear.

b) 60 cm²

c) 8 cm

32. a) Mato Grosso do Sul; Mato Grosso.

b) $R(d) = 100d$ c) 563 km

33. a) 4 m de comprimento por 4 m de largura.

b) 1 : 125 c) $m(x) = 1{,}25x$ d) 1,25

34. a) • R$ 5,10 • R$ 25,55 • R$ 178,50

b) $f(x) = 5{,}1x$

c) 5,1

35. a) Empresa **A**.

b) Empresa **A**: $V_A(x) = 600\,000 + 150\,000x$; empresa **B**: $V_B(x) = 200\,000 + 250\,000x$.

36. Sugestão de resposta: $Y = 0{,}9X + 79{,}6$

37. A. $y = 0{,}5136x + 3{,}9655$

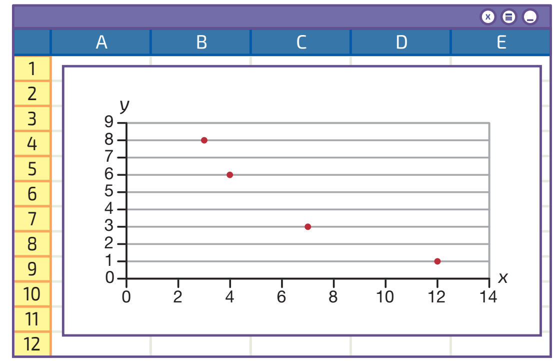
B. $y = 2{,}0122x + 18{,}415$

C. $y = -0{,}358x + 36{,}778$

38. a) A reta em vermelho.

b) $y = -0{,}925x + 60$

39. a)



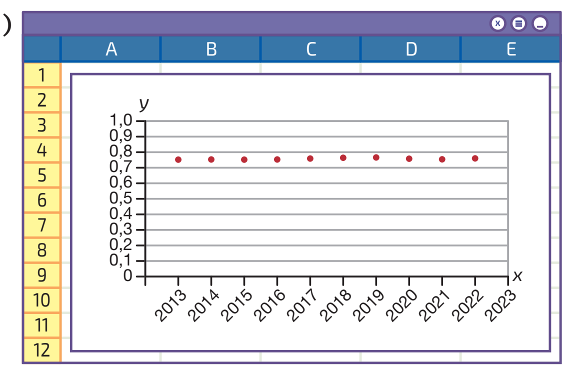
SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

b) $y = -0{,}73x + 9{,}28$

c) • Aproximadamente 5 h 38 min.

• Aproximadamente 12 h 43 min.

40. a)

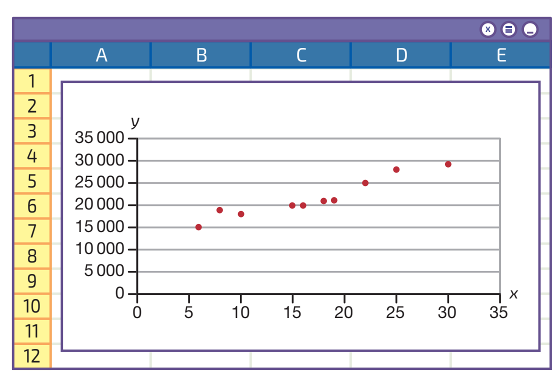


SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

b) $y = 0{,}001x - 1{,}33$, em que x e y indicam, respectivamente, o ano e o IDH.

c) Aproximadamente em 2130.

41. a)



SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

b) $y = 559{,}61x + 12\,225$

c) • Aproximadamente 25 096 acessos.

• Aproximadamente 37 influenciadores.

42. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -4\}$ c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$ d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$

43. a) 470 kcal b) $q(n) = 47n$ c) 8 unidades.

44. 7 000 pessoas.

45. a) $L: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definida por $L(q) = 40q - 6\,000$.

b) $L(q) > 0 \Rightarrow 40q - 6\,000 > 0 \Rightarrow q > 150$.

Como $L(q) > 0$ para $q > 150$, concluímos que a confeitaria terá lucro quando forem vendidos mais de 150 bolos.

46. 15 min

47. Alternativas **b**, **c** e **e**.

48. a) $a = 1$, $b = 1$ e $c = 2$
b) $a = -4$, $b = 0$ e $c = 2{,}5$
c) $a = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{2}{7}$ e $c = 0$
d) $a = -9$, $b = 3$ e $c = -1$
e) $a = 7{,}6$, $b = 0$ e $c = 0$
f) $a = -2$, $b = 12$ e $c = -10$

49. a) -4
b) 16
c) -4
d) $-2{,}72$
e) -7
f) -27
g) 1
h) $-\frac{9}{4}$

50. a) $S(x) = 2x^2 + 5x - 3,\ x > \frac{1}{2}$
b) 30 cm^2; 165 cm^2

51. *B*, *C* e *D*.

52. a) $p(n) = n^2 - n$, com n sendo um número natural maior ou igual a 2.
b) 380 partidas; 38 partidas.
c) 600 partidas.

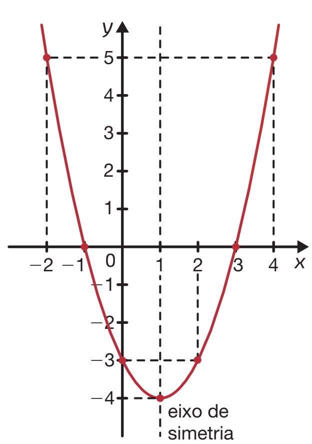
53. A. $A(x) = 4x^2 + 20x$, com $x > 0$
B. $A(x) = 10x^2 + 8x - 2$, com $x > \frac{1}{5}$

54. Alternativa **d**.

55. a) Sugestão de resposta: Todos os resultados são iguais a 4,9 m/s. Isso ocorre por causa da lei dos corpos em queda, pois a razão corresponde à constante de proporcionalidade.
b) $d(t) = 4{,}9 \cdot t^2$
c) Função quadrática. Podem ser obtidas informações a respeito das distâncias percorridas em função do tempo de queda, e vice-versa.

56. a) Concavidade voltada para cima.
b) Concavidade voltada para cima.
c) Concavidade voltada para baixo.
d) Concavidade voltada para baixo.
e) Concavidade voltada para cima.
f) Concavidade voltada para baixo.

57.



O eixo de simetria intersecta a parábola no ponto de coordenadas $(1, -4)$.

58. a) O módulo do coeficiente *a*.
b) Função *m*; função *f*.

59. O gráfico **A**, pois $b > 0$, logo o ramo é crescente.

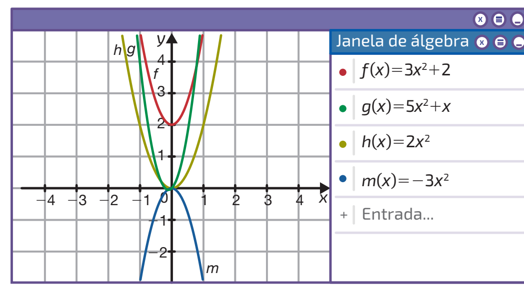
60. a) $(0, 3)$
b) $(0, -1)$
c) $(0, 7)$
d) $(0, 0)$
e) $(0, 1)$
f) $(0, 0)$

61. Alternativa **b**.

62. $g(x) = 2x^2 + 2$; $h(x) = -x^2 + 4x - 3$

63. Alternativa **e**.

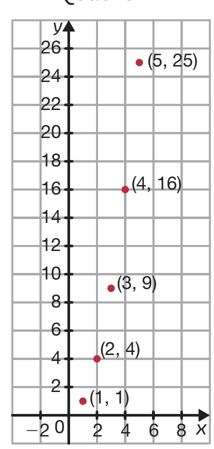
64. a)



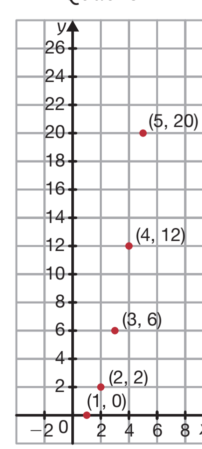
b) Nas funções *h* e *m*, pois: $\frac{h(x)}{x^2} = \frac{2x^2}{x^2} = 2$ e $\frac{m(x)}{x^2} = \frac{-3x^2}{x^2} = -3$ para todo $x \in \mathbb{R}^*$.

65. a)

Quadro **A**



Quadro **B**



O quadro **A** apresenta pontos que pertencem ao gráfico da função quadrática do tipo $f(x) = ax^2$.
b) Quadro **A**: $y = x^2$; Quadro **B**: $y = x^2 - x$.

66. a) $t(h) = \frac{32}{5}h^2 - 112h + 500$; $D(t) = \{h \in \mathbb{R} | 0 \leq h \leq 7{,}5\}$

67. a) $x_1 = 2$ e $x_2 = 5$
b) $x_1 = x_2 = 3$
c) Não há zeros reais.
d) $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$
e) $x_1 = 0$ e $x_2 = -12$
f) Não há zeros reais.
g) $x_1 = \frac{2}{3}$ e $x_2 = -1$
h) $x_1 = x_2 = 4$

68. $k = -1$

69. a) Como o gráfico da função intersecta o eixo x em um ponto de abscissa 0 e em um ponto de abscissa positiva, a soma dos zeros é positiva, e o produto, nulo.
b) Positivo, pois a função tem dois zeros distintos.

70. Alternativa **c**.

71. Gráfico **B**. A função tem dois zeros distintos, pois $\Delta > 0$. Como $S = 0$, os zeros da função são números opostos; sabendo que $a > 0$, a concavidade da parábola é voltada para cima.

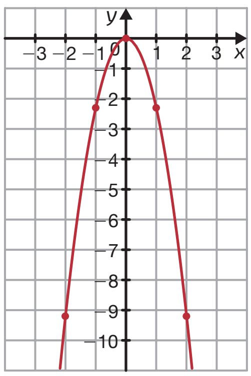
72. Alternativas **d** e **f**.

73. a) $x = 0$

b) Sim, pois o eixo de simetria da parábola coincide com o eixo y e $f(0) = 0$; consequentemente, $b = c = 0$.

c) $f(x) = -2{,}3x^2$

d)



74. -38 **75.** Alternativa **c**. **76.** 60 m

77. a) $S(x) = \dfrac{2x^2 + 6x}{2}$ b) $x = 2$ m

78. a) $f(x) = x^2 + 5x + 6$ b) 1 m

79. a) 1,71 m b) 6,75 m c) 57 m

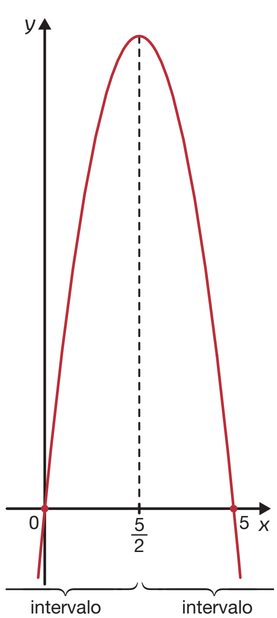
80. a) $V(1, 2)$ b) $V\left(5, -\dfrac{10}{3}\right)$ c) $V\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{3}{4}\right)$

81. Alternativa **a**. **82.** $V\left(-1, -\dfrac{9}{2}\right)$

83. a) $V(1, 0)$ b) $V(-3, 0)$ c) $V\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$ d) $V\left(-\sqrt{5}, 0\right)$

Sugestão de resposta: A abscissa sempre será $-p$ e a ordenada, 0.

84.



85. 0 **86.** Alternativa **d**. **87.** Alternativa **e**.

88. a) Aproximadamente 133 m.

b) 503 m

89. a) $Im(f) = [0, +\infty[$ ou $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} | y \geq 0\}$

b) $Im(f) = \left]-\infty, \dfrac{1}{14}\right]$ ou $Im(f) = \left\{y \in \mathbb{R} | y \leq \dfrac{1}{14}\right\}$

c) $Im(f) =]-\infty, 1]$ ou $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} | y \leq 1\}$

d) $Im(f) = [-3, +\infty[$ ou $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} | y \geq -3\}$

e) $Im(f) = [0, +\infty[$ ou $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} | y \geq 0\}$

Possível resposta: Para $a > 0$, $Im(f) = [c, +\infty[$ ou $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} | y \geq c\}$ para $a < 0$, $Im(f) =]-\infty, c]$ ou $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} | y \leq c\}$.

90. a) $y = x^2 + 4x$ b) $V(-2, -4)$ c) -4

91. a) $p > 4$ c) $p = -3$

b) $p = -7$ ou $p = 7$

92. 50 peças; R$ 10,00.

93. a) $L(x) = -x^2 + 150x - 1200$

b) • 75 itens. • R$ 4 425,00

94. Os lados devem ter 20 m de comprimento e a área máxima deve ter 400 m^2.

95. Alternativa **d**.

96. R$ 45,00; R$ 4 050,00

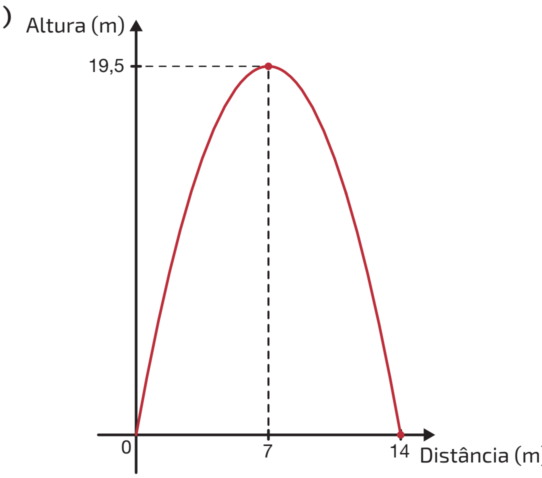
97. Alternativa **e**.

98. $a = 15$ m e $c = 30$ m

99. a) 14 m

b) Aproximadamente 19,5 m.

c)



100. a) Flaviane; 20 m. b) Carol; 2 m.

101. Alternativa **b**. **102.** 1,125 m^2 **103.** Alternativa **c**.

104. a) • $f(x) = 0$ para $x = 2$ ou $x = 4$

• $f(x) > 0$ para $x < 2$ ou $x > 4$

• $f(x) < 0$ para $2 < x < 4$

b) • $f(x) = 0$ para $x = -3$ ou $x = 3$

• $f(x) > 0$ para $-3 < x < 3$

• $f(x) < 0$ para $x < -3$ ou $x > 3$

c) • $\nexists x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$

• $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$

• $\nexists x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) < 0$

d) • $f(x) = 0$ para $x = 0$ ou $x = 4$

• $f(x) > 0$ para $0 < x < 4$

• $f(x) < 0$ para $x < 0$ ou $x > 4$

105. $f(x) = 2x^2 + 6x - 20$

106. $k < -3$

107. $-3 \leq x \leq 4$

108. $x \leq 0$ ou $x \geq 1$

109. A partir de 41 peças.

110. Alternativa **c**.

111. a) 25,11 °C; 23,36 °C

b) Entre as 7 h 12 min e as 18 h.

c) 12 h 36 min; 26,05 °C

112. a) $S = \{x \in \mathbb{R} | -5 < x < -1\}$

b) $S = \mathbb{R}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} | -3 \leq x \leq 1\}$

d) $S = \mathbb{R}$

113. Alternativa **a**.

114. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \leq -4 \text{ ou } x \geq -\frac{5}{3}\right\}$

115. -4, -3, -2 e -1

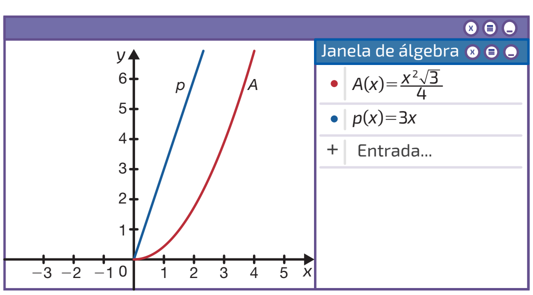
116. $D(h) = \{x \in \mathbb{R} | -2 \leq x \leq 5\}$

117. $p > 4$

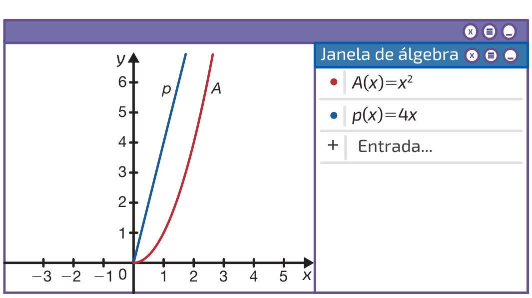
118. Para grupos entre 5 e 25 passageiros, o plano **1** é mais vantajoso financeiramente que o plano **2**.

119. a) Segue a representação gráfica da área (A) e do perímetro (p) das figuras, considerando $A\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ e $p\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$.

Triângulo equilátero de lado x.

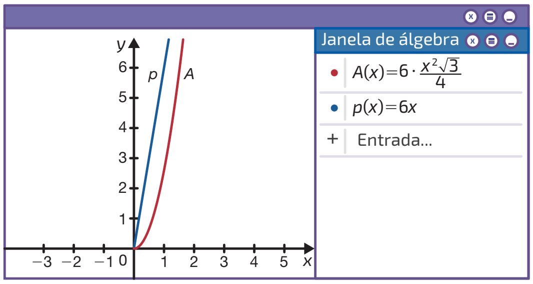


Quadrado de lado x.



ILUSTRAÇÕES: SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

Hexágono regular de lado x.



SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

b) Perímetros: funções afins; áreas: funções quadráticas.

c) • $x > 5$

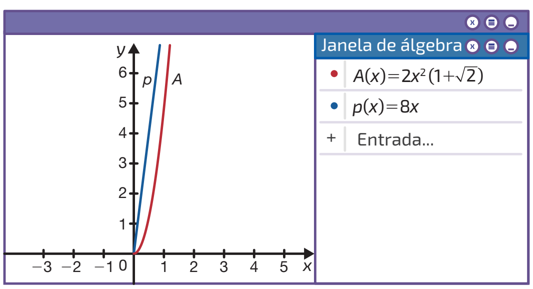
• $x > \frac{10\sqrt{3}}{9}$

• $x = \frac{20\sqrt{3}}{3}$

120. a) • $P = 8x$

• $A = 2x^2\left(1 + \sqrt{2}\right)$

b)



SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

c) Perímetro: função afim; área: função quadrática.

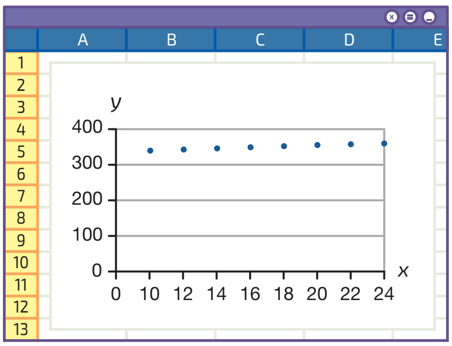
d) $x > \sqrt{\frac{15\left(\sqrt{2} - 1\right)}{2}}$

Resolvendo por etapas (páginas 114 e 115)

2. Se a estrutura de cálculo da alíquota se mantiver conforme apresentado, ou seja, se puder ser descrita por uma função definida por partes, então o plano apresentado é válido para resolver o problema, desde que consideradas as adequações necessárias. A resposta desse problema depende do ano vigente.

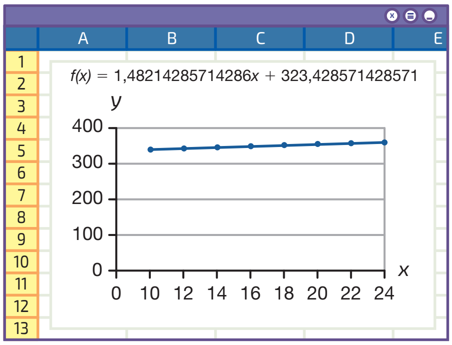
Acessando tecnologias (páginas 124 e 125)

1.



SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

2.



SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

O modelo de regressão linear, com aproximação de duas casas decimais, é dado por $y = 1{,}48x + 323{,}43$.

Acessando tecnologias (página 151)

1. **a)** Valor mínimo: $-0{,}33$.
b) Valor mínimo: 1,75.
c) Valor máximo: 48.

2. O retângulo deve ser um quadrado com lados medindo 12 cm de comprimento.

Síntese do capítulo (página 159)

3. Sugestão de resposta: Função afim: velocidade média de um automóvel; valor pago em reais em um *self-service* em função da massa, em quilogramas, de alimentos. Função quadrática: trajetória de uma bola chutada por um jogador em uma partida de futebol, até tocar o solo; em epidemias, como a dengue, de modo a evitar a proliferação do mosquito *Aedes aegypti*.

4. Quando $b = 0$.

5. Graficamente, os zeros de uma função afim correspondem às abscissas dos pontos em que o gráfico intersecta o eixo x.

6. Uma função afim é crescente à medida que aumentamos os valores de x, e os valores correspondentes de y também aumentam.

8. Por meio da análise do coeficiente a, podemos verificar se seu gráfico tem concavidade voltada para cima ou para baixo e obter informações a respeito da abertura da parábola. Já o coeficiente b indica se o gráfico intersecta o eixo y no ramo crescente ou no ramo decrescente, e o coeficiente c corresponde à ordenada do ponto em que o gráfico intersecta o eixo y.

9. Podemos determinar a imagem da função quadrática relacionada a ela e também o valor máximo ou o valor mínimo dessa função.

CAPÍTULO 5 FUNÇÃO EXPONENCIAL E FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Abertura do capítulo

1. Ele previu que a quantidade de transistores por centímetro quadrado em *microchips* e microprocessadores dobraria a cada dois anos pelo mesmo custo.

2. Essa lei incentivou o desenvolvimento e a fabricação de circuitos eletrônicos mais eficientes, permitindo a criação de dispositivos cada vez menores e com maior capacidade de processamento.

3. 4 600 transistores; 9 200 transistores; 18 400 transistores.

Questões

A. $\mathbb{R}_+^*$

B. $\mathbb{R}$

Exercícios e problemas

1. **a)** 1
b) 3
c) $\frac{1}{81}$
d) $\frac{1}{16}$
e) $\frac{1}{2}$
f) 64

2. **a)** $M = 1500 \cdot 1{,}06^n$
b) R\$ 2 225,45; R\$ 2 686,27

3. **a)** • 8 células-filhas.
• 16 células-filhas.
• 128 células-filhas.
b) $y = 2^x$

4. Sugestão de resposta: Considerando que $t = 0$ representa o ano de 1971, temos $f(t) = 2\,300 \cdot 2^{\frac{t}{2}}$.

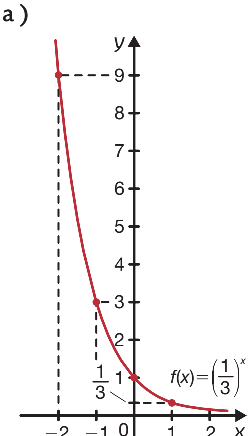
5. **a)** Não, porque a meia-vida do carbono-14 é relativamente curta, cerca de 5 730 anos. Para essa afirmação, é necessário recorrer a outro elemento radioativo de meia-vida mais longa.
b) $f(t) = m \cdot 2^{\left(-\frac{t}{5730}\right)}$
c) 17 190 anos.

7. Crescentes: alternativas **a** e **c**; decrescentes: alternativas **b** e **d**.

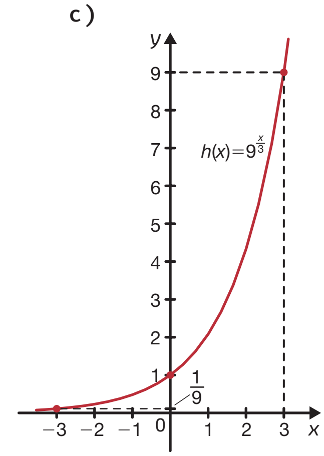
8. Alternativa **c**.

9. $k > 5$

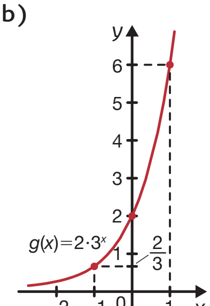
10. **a)**



c)



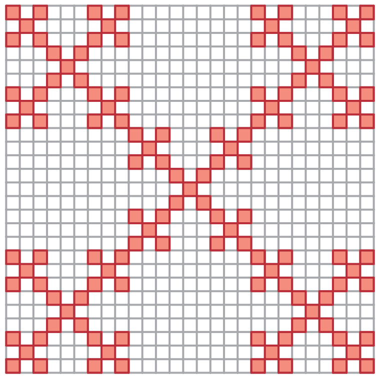
b)



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

12. Alternativa **d**.

13. **a)** $S = \{2\}$
b) $S = \left\{-\frac{2}{3}\right\}$
c) $S = \{6\}$
d) $S = \{8\}$
e) $S = \left\{-\frac{7}{2}\right\}$
f) $S = \{5\}$

14. a) 

b) $y = 5^{x-1}$

c) • Nível 6.

• Nível 8.

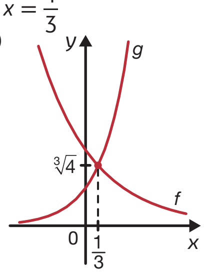
RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

15. a) 1 177 600 transistores; 6 821 387 842 transistores.

b) 2017

16. $x = 8$ **17.** 0,2 s **18.** Alternativa **b**.

19. a) $x = \frac{1}{3}$

b) 

RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

20. Alternativa **d**.

21. a) $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

b) $S = \{5\}$

c) $S = \{4\}$

d) $S = \{3\}$

e) $S = \{0, 1\}$

f) $S = \{1\}$

23. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \geq \frac{1}{3}\right\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} | x > 4\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \leq \frac{3}{2}\right\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} | x < 2\}$

e) $S = \{x \in \mathbb{R} | x \geq -1\}$

f) $S = \{x \in \mathbb{R} | x > 1\}$

24. Alternativa **b**.

25. $x \leq 5$

26. a) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 2\}$

b) $D(g) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 2\}$

c) $D(h) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 4\}$

d) $D(m) = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \geq -\frac{3}{2}\right\}$

27. $x > -3$ **28.** $x > 1$

29. Alternativa **D**. **30.** Alternativa **a**. **31.** Alternativa **a**.

33. a) 0 b) 4 c) 19 d) -1

34. a) $x \simeq 0{,}8$ b) $x \simeq 8{,}0$ c) $x \simeq 1{,}1$ d) $x \simeq 21{,}0$ e) $x \simeq 0{,}1$ f) $x = 25\,000$

35. a) $-\frac{9}{2}$ b) 9 c) 252 d) 4 e) 34 f) 380

36. 81 **37.** 3 h 49 min

38. a) $x > 9$

b) $x > -4$ e $x \neq -\frac{7}{2}$

c) $-0{,}3 < x < 1$ e $x \neq 0{,}7$

d) $\frac{1}{2} < x < 2$

e) $x > 10$

39. $y = 17$

40. Sugestões de resposta: O número 10, que é a base do logaritmo, elevado ao número real que obtemos é igual ao número inserido inicialmente. O número obtido é igual ao logaritmo decimal do número inserido inicialmente.

41. $n = 10$

42. a) $\log b + \frac{1}{2}\log c$

b) $2\log a + \log b - \log c$

c) $\frac{1}{5}\log_2 a - \log_2 b - 2\log_2 c$

43. a) $\log_4 45$ b) $\log 7$

44. $-\frac{29}{2}$

45. a) $S = \{-1{,}535\}$ b) $S = \{1{,}465\}$ c) $S = \{13{,}86\}$

46. $x = b\sqrt{a}$ **47.** a) 10% b) 13 anos.

48. 10 meses.

49. a) $\frac{\log 8}{\log 12}$ b) $\frac{\log\left(\frac{3}{7}\right)}{\log 2}$ c) $\frac{\log 2}{\log 17}$

50. a) 1 b) $\frac{6x}{y}$, com $y \neq 0$

51. 4 **52.** 24 algarismos. **53.** Alternativa **b**.

54. Aproximadamente 1 h 53 min.

55. 9º, 10º e 11º quadrados.

56. a) Aproximadamente 4,537.

b) Aproximadamente $-2{,}231$.

c) Aproximadamente 2,264.

57. a) 4 b) 0 c) 4 d) 32 e) -3 f) $\frac{1}{27}$ g) 2 h) 4

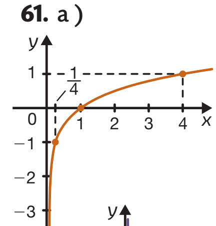
58. a) 8 graus na escala Richter. b) Gráfico **II**.

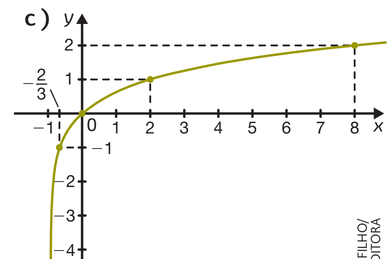
59. a) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x > -3\}$; $Im(f) = \mathbb{R}$

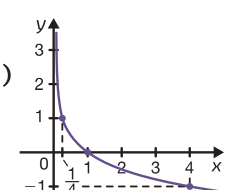
b) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x < 6\}$; $Im(f) = \mathbb{R}$

c) $D(f) = \mathbb{R}^*_+$; $Im(f) = \mathbb{R}$

60. 10 dB

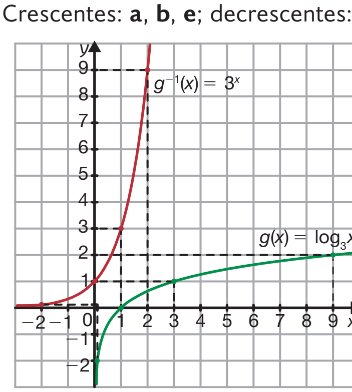
61. a) 

c) 

b) 

ILUSTRAÇÕES: SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

62. Crescentes: **a**, **b**, **e**; decrescentes: **c**, **d**, **f**.

63. 

SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

As funções g e g^{-1} são crescentes.

64. a) $a = 2$; $b = 1$; $c = \frac{1}{8}$ e $d = 8$

b) $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \mathbb{R}^*_+$; $D(g) = \mathbb{R}^*_+$; $Im(g) = \mathbb{R}$

c) Crescentes, pois $a > 1$.

65. a) Sugestão de resposta: $(1, 0)$, $(2, -1)$ e $(8, -3)$.

b) $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \mathbb{R}^*_+$; $D(g) = \mathbb{R}^*_+$; $Im(g) = \mathbb{R}$

c) Decrescentes.

66. a) $D(g) = \{x \in \mathbb{R} | x > 4 \text{ e } x \neq 5\}$
b) $D(g) = \{x \in \mathbb{R} | -1 < x < 0\}$
c) $D(g) = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x > \frac{1}{2} \text{ e } x \neq 1 \text{ e } x \neq 3\right\}$

67. a) $S = \{11\}$ b) $S = \{16\}$ c) $S = \varnothing$ d) $S = \{1\}$ e) $S = \{4\}$ f) $S = \{30\}$

68. a) $x \simeq 2{,}465$ b) $x \simeq -1{,}158$ c) $x \simeq -2{,}585$

69. $x = 3$

70. a) $S = \{1\}$ b) $S = \{-7, 2\}$ c) $S = \{-4, 4\}$

71. $\left\{x \in \mathbb{R} \middle| 9 \leq x < \frac{19}{2}\right\}$

72. a) $S = \{x \in \mathbb{R} | 17 < x < 26\}$ b) $S = \{x \in \mathbb{R} | -2 \leq x < 2\}$ c) $S = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 14\}$

73. a) $f(t) = 50(1{,}35)^t$ b) Aproximadamente 13 anos.

74. 10

75. 3 números.

76. a) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | 3 < x < 4\}$
b) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | -2 < x < -1\}$

77. 7 anos.

78. 8 meses.

79. a) 3,125% b) 107 anos.

80. a) Aproximadamente 78, pois a unidade Haugh é superior a 72.
b) 5,48 mm

81. a) 0,0625 g b) 80 dias.

Desenvolvimento sustentável (páginas 182 e 183)

2. 9,7 bilhões de habitantes.
3. Sugestão de resposta: 8 bilhões de habitantes.

Síntese do capítulo (página 187)

3. a) Sugestão de resposta: Ao estudar o crescimento populacional de uma bactéria e o decaimento radioativo de uma substância radioativa.
b) Sugestão de resposta: Ao medir intensidades em escalas de pH e a magnitude de terremotos na escala Richter.

4. Uma função exponencial é crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$.

5. Item **B**.

7. Sugestão de resposta: 1. Digite a tecla log da calculadora; 2. Registre o número 23. Para isso, pressione as teclas 2 e 3, nessa ordem; 3. Digite a tecla =.

8. Mostremos inicialmente que $\log_a b = \log_a c \Rightarrow b = c$. De fato, fazendo $\log_a b = x$ e $\log_a c = x$, vemos: $a^x = b$ e $a^x = c$. Consequentemente, $b = c$. Agora, mostraremos que $b = c \Rightarrow \log_a b = \log_a c$. Fazendo $\log_a b = x$, pela definição de logaritmo, segue que $b = a^x$. Como $b = c$, $c = a^x$. Sendo assim, $x = \log_a c$. Portanto, $\log_a b = \log_a c$.

9. Considerando $\log_a b = c$ e $\log_a b^n = d$, temos pela definição: $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$ e $\log_a b^n = d \Leftrightarrow a^d = b^n$. Substituindo $b = a^c$ em $a^d = b^n$, obtemos: $a^d = (a^c)^n \Rightarrow a^d = a^{c \cdot n} \Rightarrow d = n \cdot c \Rightarrow \log_a b^n = n \cdot \log_a b$, como queríamos mostrar.

CAPÍTULO 6 SEQUÊNCIAS

Abertura do capítulo

1. Nessa técnica, é criada uma sequência com desenhos muito parecidos, com pequenas diferenças. Ao passar rapidamente as imagens em sequência, tem-se a ilusão do movimento.

2. 21600 fotos.

3. 24, 48, 72, 96, 120, 144, 168, 192, 216 e 240.

Questões

A. A razão dessa PA é 4.

B. Decrescente.

C.
Início
1. Leia a ordem n do termo.
2. Leia o primeiro termo a_1.
3. Multiplique pela razão r.
4. Calcule $a_n = a_1 + (n-1)r$.

Fim

E. Uma PA é uma função definida por $a(n) = a_1 + (n-1)r$. Sendo assim:
$a(1) + a(n) = a_1 + a_1 + (n-1)r = 2a_1 + (n-1)r$
$a(x) + a(y) = a_1 + (x-1)r + a_1 + (y-1)r = 2a_1 + [x + y - 2]r$
Como a_x e a_y são termos equidistantes dos extremos, segue que $x + y = n + 1$. Logo:
$$a(x) + a(y) = 2a_1 + [n-1]r$$
Portanto, $a(1) + a(n) = a(x) + a(y)$, ou seja, $a_1 + a_n = a_x + a_y$.

F.
Início
1. Leia a quantidade de termos n.
2. Leia o primeiro termo a_1.
3. Leia a razão r.
4. Calcule $S_n = \frac{n(2a_1 + (n-r)}{2}$.

Fim

G. 2

H.
Início
1. Leia o primeiro termo (a_1).
2. Leia a ordem n do termo.
3. Leia a razão q.
4. Calcule $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

Fim

Exercícios e problemas

1. a) 7 b) −3 c) 4 d) −8 e) $\frac{1}{4}$ f) −0,9

2. a) (4, 13, 22, 31, 40, 49) b) (23, 18, 13, 8, 3, −2) c) (9, 11, 13, 15, 17, 19) d) $\left(-\frac{9}{2}, -2, \frac{1}{2}, 3, \frac{11}{2}, 8\right)$ e) (20, 14, 8, 2, −4, −10) f) (−5, −5, −5, −5, −5, −5)

3. a) 97 b) −2

4. 95, 87, 79

5. a) 65 min b) 375 min

6. a) $a_n = n - 1$; crescente.
b) $a_n = \frac{5}{2} + (n-1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$; decrescente.
c) $a_n = 1 + (n-1) \cdot 1{,}2$; crescente.

7. a) As lâmpadas vermelha e azul piscaram juntas às 13 h 3 min 24 s. Seis segundos depois, piscaram juntas as lâmpadas azul e branca.
b) 514 vezes.
c) Os horários exatos das três últimas piscadas antes das 14 h foram: 13 h 59 min 58 s; 13 h 59 min 51 s; 13 h 59 min 44 s.

d) Sim, às 13 h 59 min 51 s.
e) Sim, às 13 h 59 min 44 s.

8. $a_n = 2400 + (n-1) \cdot (-25)$; R$ 2 300,00

9. Essas progressões têm 32 termos em comum.

10. a) Seja C o capital aplicado e i a taxa de juro. Sendo assim:
$$M_n - M_{n-1} = M_{n-1} + i \cdot C - M_{n-1}$$
Logo, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, $M_n - M_{n-1} = i \cdot C$. Portanto, $(M_1, M_2, \dots, M_n, \dots)$ é uma PA.
b) $(M_1, M_2, \dots, M_n, \dots)$ é uma PA de razão $r = i \cdot C$.
Assim: $M(n) = a_1 + (n-1)r \Rightarrow M(n) = M_1 + (n-1)i \cdot C$
Como $M_1 = C + i \cdot C$, segue que:
$$M(n) = C + i \cdot C + n \cdot i \cdot C - i \cdot C \Rightarrow M(n) = C(1 + ni)$$
Portanto, $M = C(1 + it)$.

11. 180 km **12.** 4 **13.** 0

14. a) $\frac{1}{3}$ b) 13 termos. c) 5 termos: 1, 2, 3, 4 e 5.

15. $a = -2$

16. a) 2 veículos a mais. b) (3, 5, 7, 9, 11) c) (21, 37, 53, 69, 85)

17. Partícula **A**: $p(t) = 5t + 5$; Partícula **B**: $p(t) = \frac{13}{2}t$.

18. $(-12, -6, 0, 6, 12, 18, 24, 30)$; 6

19. $f(x) = -3x + 4$

20. Funções f, h e m. **21.** 4 ou -4.

22. Máximo, pois $a = -1 < 0$.

23. Possível resposta: Considere a função $f(x) = x^2 - 5x + 6$ e a PA $(-1, 2, 5, 8)$ de razão $r = 3$. Nesse caso, temos: $f(-1) = 12$, $f(2) = 0$, $f(5) = 6$ e $f(8) = 30$. Assim, as diferenças $f(2) - f(-1)$, $f(5) - f(2)$, $f(8) - f(5)$ formam a PA $(-12, 6, 24)$ cuja razão é $18 = 2ar^2 = 2 \cdot 1 \cdot 3^2$.

24. b) 500 500

25. a) 495 b) -3168 c) 1260 d) 2 015 e) -480 f) -900

26. a) 885 b) 1089 c) 77 d) 30 e) 384 f) 1296

27. 29 **28.** 21 **29.** Alternativa **a**.

30. a) $x = 24$ b) $x = \frac{1}{3}$ **31.** $a^n \cdot b^{\frac{n(n-1)}{2}}$

32. a) Não. Não. A diferença entre dois termos consecutivos não é constante.
b) $n(n+1)$; n^2
c) O 20º termo da sequência $(2, 6, 12, 20, 30, \dots)$ é 420 e ele representa a soma dos 20 primeiros números pares. Já o 20º termo da sequência $(1, 4, 9, 16, 25, \dots)$ é 400 e ele representa a soma dos 20 primeiros números ímpares.

33. -100 **34.** 17

35. a) $q = 2$; crescente.
b) $q = 1$; constante.
c) $q = \frac{2}{3}$; decrescente.
d) $q = -\frac{2}{3}$; alternante.
e) $q = \frac{1}{2}$; crescente.
f) $q = -\sqrt{2}$; alternante.

36. a) Sim; $q = -1$. b) Não. c) Sim, $q = 4$.

37. • raios: $\left(r, \frac{r}{2}, \frac{r}{4}, \frac{r}{8}, \frac{r}{16}\right)$
• comprimentos: $\left(2\pi r, \pi r, \frac{\pi r}{2}, \frac{\pi r}{4}, \frac{\pi r}{8}\right)$
• áreas: $\left(\pi r^2, \frac{\pi r^2}{4}, \frac{\pi r^2}{16}, \frac{\pi r^2}{64}, \frac{\pi r^2}{256}\right)$
As sequências são progressões geométricas e suas razões são dadas, respectivamente, por:
• $q = \frac{1}{2}$ • $q = \frac{1}{2}$ • $q = \frac{1}{4}$

39. 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729.

40. $b = -1$, PG constante; $b = -2$, PG decrescente.

41. $(2, -6, 18)$ e $q = -3$ ou $(18, -6, 2)$ e $q = -\frac{1}{3}$

42. a) Aproximadamente 214 874 858 habitantes.
b) Em 2026.

43. a) $a_n = 2 \cdot 4^{n-1}$; $a_6 = 2048$
b) $a_n = -48 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$; $a_6 = -1{,}5$
c) $a_n = -7 \cdot (-2)^{n-1}$; $a_6 = 224$
d) $a_n = \frac{64}{25} \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}$; $a_6 = \frac{125}{512}$

44. a_7 **45.** $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $a_5 : a_7 = 2$ **46.** $n = 8$

47. a) $(32, 48, 72, 108, 162, 243)$
b) Representa a quantidade de medicamento ingerida por Júlio na quarta semana de tratamento.
c) $a_n = 32 \cdot (1{,}5)^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$ e $n \leq 6$.

48. a) PG
b) $v_{10} = 50$ mm³
c) 25 600 mm³
d) $v_n = 25\,600 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$

49. a) 30 ou -30 b) 4 c) -3

50. 12

51. a) • verde: $x^2, \frac{3x^2}{4}, \frac{9x^2}{16}, \frac{27x^2}{64}$ e $\frac{81x^2}{256}$.
• amarelo: $0, \frac{x^2}{4}, \frac{7x^2}{16}, \frac{37x^2}{64}$ e $\frac{175x^2}{256}$.
b) Aquela que representa os valores das áreas em verde, pois a partir do 2º termo, o quociente entre um termo e seu antecessor é constante. No caso da outra sequência, esse quociente não é constante.
c) Verde: $\left(\frac{3}{4}\right)^9 \cdot x^2$; amarelo: $\left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^9\right] \cdot x^2$.

52. Alternativa **b**.

53. a) Na 2ª aplicação.
b) A 2ª aplicação. O montante obtido ao final de dois anos e na 1ª e na 2ª aplicação são, respectivamente, R$ 12 080,00 e R$ 12 194,23.
c) 1ª aplicação: $M = 10\,260 + (n-1) \cdot 260$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, em que M e n indicam, respectivamente, o montante, em reais, e o tempo, em trimestre;
2ª aplicação: $M = 10\,083 \cdot (1{,}0083)^{n-1}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, em que M e n indicam, respectivamente, o montante, em reais, e o tempo, em meses.

54. a) 118 048 folhas. b) 1180,48 cm

55. a) • 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 e 20.
• 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 e 1 024.
b) PG
d) O gráfico **II**.

56. a) • 2ª geração: 30 fêmeas infectadas;
3ª geração: 900 fêmeas infectadas.
• $(1, 30, 900, 27\,000, 810\,000)$; PG
• $I_n = 30^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 1$; $2{,}178 \cdot 10^{10}$ fêmeas infectadas.

d) Sugestão de resposta: Armazene o lixo em sacos pláticos e descarte-o em lixeiras tampadas adequadamente; caso haja plantas em sua residência, encha de areia os pratinhos que ficam embaixo dos vasos; não deixe acumular água nas calhas, limpando-as; tampe bem a caixa-d'água; deixe os vasilhames armazenados de cabeça para baixo, em um local onde estejam abrigados da chuva.

57. $(3, 6, 12, 24, 48, 96)$ **58.** $\sqrt{2}$

59. a) Cada termo da sequência, do segundo em diante, é obtido pela multiplicação do termo anterior por uma constante, nesse caso $1 + i$. Então, a sequência dos montantes é uma PG de razão $q = 1 + i$.

b) $(M_1, M_2, \cdots, M_n, \cdots)$ é uma PG de razão $r = (1 + i)$.

Assim: $M(n) = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow M(n) = M_1 \cdot (1 + i)^{n-1}$

Como $M_1 = C + i \cdot C = C(1 + i)$, segue que:

$M(n) = M_1 \cdot (1 + i)^{n-1}$

$M(n) = C(1 + i) \cdot (1 + i)^{n-1}$

$M(n) = C(1 + i)^n$

Portanto, $M = C(1 + i)^t$.

60. Alternativa **C**.

61. a) $a_7 = 64$ e $a_8 = 128$; 8192

b) Uma PG é uma função definida por $a(n) = a_1 \cdot q^{n-1}$. Sendo assim:

$a(1) \cdot a(n) = a_1 \cdot a_1 \cdot q^{n-1} = a_1^2 \cdot q^{n-1}$

$a(x) \cdot a(y) = a_1 \cdot q^{x-1} \cdot a_1 \cdot q^{y-1} = a_1^2 \cdot q^{x+y-2}$

Como a_x e a_y são termos equidistantes dos extremos, segue que $x + y = n + 1$. Logo:

$a(x) \cdot a(y) = a_1^2 \cdot q^{x+y-2} = a_1^2 \cdot q^{n+1-2} = a_1^2 \cdot q^{n-1}$

Portanto, $a(1) \cdot a(n) = a(x) \cdot a(y)$, ou seja, $a_1 \cdot a_n = a_x \cdot a_y$.

62. a) $(-10, -1, 8, 17, 26)$. É uma PA de razão 9.

b) $\left(\frac{3}{16}, \frac{3}{2}, 12, 96, 768\right)$. É uma PG de razão 8.

63. a) $a = 2$ b) $(x, 2x, 4x, 8x)$ c) $512x$

64. 729 **65.** $a = \frac{1}{2}$

66. Aproximadamente R$ 317 221,50.

67. a) 65 535 b) 340 c) 5 555,5555

68. a) 625 pontos. b) 781 pontos.

69. $n = 7$ **70.** $x = -2$; $n = 5$ **71.** 12

72. a) $\frac{781}{256}u^2$ b) $\frac{499}{256}u^2$

73. a) 1,152 m b) 38,16 m; 40,464 m

74. a) 121 baratas. b) 6 min

75. a) • $a_1 = 1$ • $q = 2$ • $n = 10$

b) $S_{10} = \dfrac{1 \cdot (1 - 2^{10})}{1 - 2} = \dfrac{1 - 2^{10}}{-1} = 2^{10} - 1 = 2 \cdot 2^9 - 1 =$

$= 2^9 + 2^9 - 1$

76. a) R$ 6 300,00 b) 10 perguntas. c) R$ 102 300,00

Síntese do capítulo (página 215)

3. Sugestão de resposta: Uma sequência de números reais é uma função $a : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ que associa a cada número natural não nulo n um número real a_n.

4. Alternativas **b** e **d**.

5. a) A razão de uma PG.

b) O primeiro termo de uma PG.

6.

Início
1. Leia o valor de n.
2. Leia o n-ésimo termo a_n.
3. Leia o valor de r.
4. Calcule $a_1 = a_n - (n - 1)r$.

Fim

7. a) Sugestão de resposta: Uma progressão aritmética é uma função de domínio $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, n, \dots\}$, definida por $a(n) = a_1 + (n - 1)r$, em que a_1 é o primeiro termo da progressão, n é a ordem do termo e r é a razão.

b) Sugestão de resposta: Uma progressão geométrica é uma função de domínio $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, n, \dots\}$, definida por $a(n) = a_1 \cdot q^{n-1}$, em que a_1 é o primeiro termo da progressão, n é a ordem do termo e q é a razão.

8. Resposta na página **302**.

9. Não, pois o 25º termo dessa PG é 33 554 432; como todos os seus termos são positivos, a soma é maior do que 33 554 432.

CAPÍTULO 7 MATEMÁTICA FINANCEIRA

Abertura do capítulo

3. Antes da lei, o valor pago após um ano seria R$ 5 500,00; depois da lei, deve ser R$ 2 000,00.

Questões

A. Não se aproximou do índice oficial, pois o índice pessoal de preços dessa família ficou em torno de 7,8%, enquanto o índice oficial foi 4,62%, representando uma diferença de, aproximadamente, 3,18%.

C. A resposta depende do ano vigente. Em 2022, o IDH do Brasil era 0,760. Nesse ano, o país era classificado com alto desenvolvimento humano.

D. R$ 1 569,85

F. Caso a aplicação fosse em um período de sete meses, o investimento **A** traria, ao investidor, um montante de R$ 34 270,00, enquanto o investimento **B** traria um montante de R$ 32 363,31. Portanto, em sete meses, o investimento **A** seria mais vantajoso. Caso a aplicação fosse em um período de dois anos, o investimento **A** traria, ao investidor, um montante de R$ 61 640,00 enquanto o investimento **B** traria um montante de R$ 74 177,30. Portanto, em dois anos, o investimento **B** seria mais vantajoso.

H. Opção **1**.

Exercícios e problemas

1. a) 30% b) 68% c) 14% d) 32% e) 12,5%

2. a) 0,07 b) 0,48 c) 0,9 d) 0,045 e) 0,6138

3. 5% **4.** a) R$ 1 029,71 **5.** R$ 43,68

6. a) 540 são calçados. b) 324 calçados.

7. Alternativa **c**. **8.** R$ 68,00 **9.** 40%

10. Alternativa **e**. **11.** Na loja **B**; R$ 1 997,50. **12.** R$ 21 000,00

13. a) 60%

b) Conhecimentos gerais; informática.

c) Informática. Sugestão de resposta: Nesse tema, ele obteve o pior desempenho.

d) Sugestão de resposta: Focar os estudos nos conteúdos que tiver menos conhecimento.

14. 815 pontos.

15. a) R$ 15 000,00 b) 20%

c) Não, pois R$ 3 000,00 correspondem a uma taxa de 25% referente a R$ 12 000,00 e a uma taxa de 20% referente a R$ 15 000,00.

16. 927 votos. **17.** 110 e 70. **18.** a) 12,5%; 25% b) 50%

19. Alternativa **c**.

20. Frango: 280 empadas; creme de milho: 112 empadas; palmito: 190 empadas.

21. 1,8% **22.** R$ 2 124,40 **23.** Alternativa **e**.

24. Aproximadamente 463,30 liras de Módena.

25. Aproximadamente 3,3%.

26. a) Investir em melhorias na indústria.

27. a) Aproximadamente 38,59%.

29. Aproximadamente 4,22 milhões de pessoas.

30. a) Aproximadamente 0,892.

b) 0,791. Alto desenvolvimento humano.

31. a) Afirmação falsa. Sugestão de resposta: Entre dois países diferentes; aquele com índice de saúde maior não necessariamente terá o IDH maior.

b) Afirmação falsa. Sugestão de resposta: Se um país apresenta IDH de 0,765, nada podemos afirmar sobre sua distribuição de renda analisando apenas esse indicador.

33. a) Acréscimo de 12,32%.

b) Desconto de 18,22%.

c) Acréscimo de aproximadamente 15,76%.

d) Acréscimo de aproximadamente 0,68%.

34. Aproximadamente R$ 4,89.

35. R$ 66,10 **39.** Alternativa **e**. **43.** a) 9,2%; 14,66%

36. R$ 354,46 **40.** Março; 0,3%. b) R$ 4,06

37. a) R$ 66,00 **41.** Um único desconto de 60%. **44.** 10%

b) 10% **45.** 10%

38. R$ 62,50 **42.** 25% **46.** b) R$ 3 102,72

47. a) 14,5%

b) Maior, pois, se indicarmos por x o preço do *smartphone* antes do aumento de 20%, teríamos que, após os descontos, seu preço seria $1{,}026x$.

48. Aproximadamente 78,8%.

49. 5% a.m. **53.** a) 10% a.m. **56.** 2%

50. R$ 5 500,00 b) R$ 268,00 **57.** R$ 594,50

51. R$ 757,20 **54.** R$ 4 271,88

52. 3,5% a.m. **55.** R$ 1 177,39

58. a) Aproximadamente R$ 568,00.

b) Aproximadamente 28,37%.

59. 8% **61.** a) R$ 695,87

60. 4% b) R$ 999,98

62. a) R$ 3 075,29 b) R$ 3 587,02

63. a) R$ 8,697,70 b) R$ 8 436,77

64. a) R$ 12 259,50 b) O investimento **B**.

65. a) R$ 893,09 **66.** Alternativa **d**. **67.** Alternativa **c**.

68. a) Após 1 ano. b) R$ 50,70

69. a) No investimento **B**; nos investimentos **A** e **C**.

b) Investimento **A**: 10% a.m.; investimento **B**: 7,5% a.m.; investimento **C**: 7,5% a.m.

c) R$ 15 689,28

70. a) Investimento **A**: 2% a.m.; investimento **B**: 1,9% a.m.

b) No investimento **B**.

d) Investimento **A**: R$ 1 140,00; investimento **B**: R$ 1 140,83.

71. Opção **3**.

72. O pagamento em dez prestações de R$ 30,00 no cartão de crédito.

73. Sim, pois o valor da prestação (R$ 366,52) é menor do que 25% do salário líquido (R$ 550,00) dessa pessoa.

74. R$ 7 800,02 **75.** a) R$ 1 316,69 b) R$ 13 201,21

76. a) R$ 965,15 b) R$ 9 458,52 c) R$ 19 878,32

77. R$ 1 460,77

78. a) Valor da parcela: R$ 224,89; total pago: R$ 2 698,68.

b) Sim. Ao aumentar o número de parcelas há um aumento no juro, pois este é mensal.

79. a) Alimentação.

b) Moradia: aproximadamente 17,9%; alimentação: aproximadamente 23,8%; transporte: aproximadamente 7,14%; saúde: aproximadamente 2,38%; lazer: aproximadamente 3,57%; outros: aproximadamente 5,95%.

80. R$ 8 972,13

81. Sugestão de resposta: Ângelo deve escolher o pagamento em 36 parcelas, pois a opção em 24 parcelas não cabe em seu orçamento mensal e o pagamento em 48 parcelas tem maior juro.

Trabalho e juventudes (página 225)

2. De acordo com o texto, o contador é o profissional que pode orientar o processo de abertura de uma empresa, fornecendo informações sobre a tributação de impostos municipais, estaduais e federais. Além disso, ele oferece assessoria trabalhista e apresenta resultados financeiros por meio de balanços, contribuindo para a tomada de decisões dos gestores da empresa.

Desenvolvimento sustentável (páginas 226 e 227)

3. a) Sugestão de resposta: Além de agravar o problema do aquecimento global, a liberação de gases poluentes na atmosfera por meio da queima de combustíveis fósseis causa problemas como o aumento do efeito estufa e as diversas alterações climáticas. O processo de geração de energia nas usinas termonucleares apresenta riscos ao ambiente e aos seres humanos, pois, além de produzir resíduos radioativos, pode ocasionar acidentes. Essas fontes também se originam de reservas naturais finitas e o seu uso indiscriminado pode levar ao esgotamento no decorrer do tempo.

Acessando tecnologias (página 247 e 248)

1. Célula **C2**; célula **C12**.
2. R\$ 6,00
3. R\$ 135,61
4. a) Aproximadamente 1,43 vez maior.
   b) Aproximadamente 1,82 vez maior.
   c) Aproximadamente 3,3 vezes maior.
   d) Aproximadamente 10,9 vezes maior.
5. R\$ 555 157,36

Resolvendo por etapas (páginas 256 e 257)

1. Sim. Opção **3**.

Acessando tecnologias (página 258)

1. R\$ 2 960,73
2. A. Preenchemos as células da linha **1** destinando uma coluna para cada entrada, sendo elas “Período (mês)”, “Prestação (R\$)”, “Valor atual (R\$)” e “Resultado (R\$)”.
   B. Preenchemos o intervalo **A2:A9** com a sequência dos números naturais de 0 a 7.
   C. Digitamos = B2/(1 + 0,015)^A2 na célula **C2** e pressionamos **Enter** para calcular o valor atual da quantia paga no ato da compra no período 0.
   D. Selecionamos a célula **B2** e clicamos sobre a **Guia de autopreenchimento**, arrastando até a linha **9** para preencher a planilha com a quantia paga em cada prestação. Repetimos o procedimento para o valor atual de cada prestação, mas dessa vez selecionando a célula **C2**.
   E. Digitamos = SOMA(C2 **:** C9) na célula **D2** para obter a soma dos valores atuais das prestações no período 0.

	A	B	C	D
1	Período (mês)	Prestação (R\$)	Valor atual (R\$)	Resultado (R\$)
2	0	116,25	116,25	883,29
3	1	116,25	114,53	
4	2	116,25	112,84	
5	3	116,25	111,17	
6	4	116,25	109,53	
7	5	116,25	107,91	
8	6	116,25	106,32	
9	7	116,25	104,74	

SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

Soma dos valores atuais das prestações no período 0: R\$ 883,29.

Acessando tecnologias (página 265)

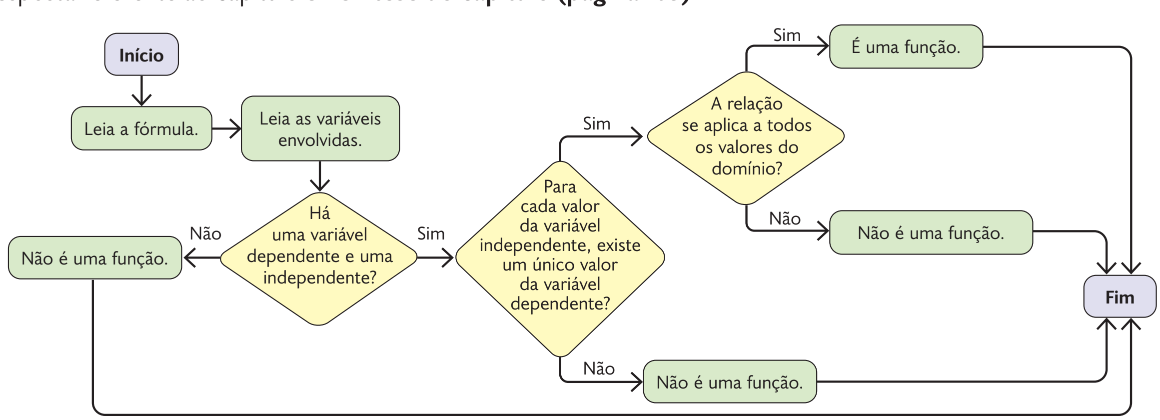
1. Basta digitar = SOMA(D7 **:** D8) na célula **D9** e, em seguida, selecionar a célula **D9**, clicar sobre a **Guia de autopreenchimento** e arrastar até a coluna desejada.

Síntese do capítulo (página 267)

3. Sugestão de resposta: Calcularia o preço desse item após os 20% de desconto e, a partir desse resultado, calcularia o aumento de 15%.
4. Sugestão de resposta: Multiplicaria os fatores de atualização para obter a porcentagem do valor final do produto e, depois, subtrairia de 100% a porcentagem obtida anteriormente.
5. Alternativa **c**.
6. A proposta **A**, pois oferece o maior retorno.

Resposta referente ao capítulo **3** - **Síntese do capítulo (página 105)**

5.



LAÍS GARBELINI/ARQUIVO DA EDITORA

Resposta referente ao capítulo **6** - **Síntese do capítulo (página 215)**

8. Vamos indicar a soma dos n primeiros termos de uma PA por S_n. Escrevendo essa soma de duas maneiras, temos:

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$ (I) $\qquad S_n = a_n + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1$ (II)

Adicionando **I** e **II** membro a membro, temos:

$$\begin{array}{rcccccccccccc} & S_n = & a_1 & + & a_2 & + & a_3 & + \ldots + & a_{n-2} & + & a_{n-1} & + & a_n \\ + & S_n = & a_n & + & a_{n-1} & + & a_{n-2} & + \ldots + & a_3 & + & a_2 & + & a_1 \\ \hline \end{array}$$

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + \underbrace{(a_2 + a_{n-1})}_{a_1 + a_n} + \underbrace{(a_3 + a_{n-2})}_{a_1 + a_n} + \ldots + \underbrace{(a_{n-2} + a_3)}_{a_1 + a_n} + \underbrace{(a_{n-1} + a_2)}_{a_1 + a_n} + (a_n + a_1)}_{n \text{ vezes}}$$

Como há n parcelas $(a_1 + a_n)$, podemos escrever essa igualdade da seguinte maneira: $2S_n = n(a_1 + a_n) \Rightarrow S_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2}$

ALISSON, Elton. Novo recorde de transmissão de dados pela internet entre hemisférios é estabelecido. *Agência Fapesp*, 20 jan. 2017. Disponível em: https://agencia.fapesp.br/novo-recorde-de-transmissao-de-dados-pela-internet-entre-hemisferios-e-estabelecido/24650. Acesso em: 30 set. 2024.

Nessa reportagem, são apresentadas informações a respeito de um recorde de transmissão de dados, alcançado em 2017, entre centros de pesquisa de São Paulo e Miami, evidenciando as altas velocidades alcançadas em transmissões de dados via fibra óptica.

ASSIS, Odilio B. G. A asa da borboleta e a nanotecnologia: cor estrutural. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, São Paulo, v. 35, n. 2, 2013. p. 1-9. Disponível em: https://www.scielo.br/j/rbef/a/cW79c36QdVJJknVrgVMHNYg/abstract/?lang=pt. Acesso em: 7 out. 2024.

O autor do artigo discute as diferenças entre cores químicas e cores estruturais com base em conceitos básicos de óptica, relacionando-as principalmente à geração de cores nas asas das borboletas.

BOYER, Carl B; MERZBACH, Uta C. *História da matemática*. 3. ed. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.

A história da Matemática é abordada nesse livro desde as origens primitivas até o século XX, passando por informações relacionadas ao último Teorema de Fermat e à conjectura de Poincaré, chegando, enfim, aos avanços recentes na teoria dos grupos finitos e às demonstrações que contam com o auxílio do computador. Também são descritos fatos sobre a vida e as obras de alguns matemáticos famosos, como Euler, Newton e Bernoulli.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular*. Versão final. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf. Acesso em: 12 set. 2024.

A BNCC é o documento que norteia os currículos de sistemas e redes de ensino das Unidades Federativas e as propostas pedagógicas das escolas públicas e privadas, estabelecendo as competências e habilidades que os estudantes devem desenvolver em cada etapa da Educação Básica.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Orientações curriculares para o Ensino Médio*. Brasília, 2006. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf. Acesso em: 4 mar. 2024.

O objetivo das Orientações Curriculares para o Ensino Médio é contribuir para o diálogo entre professor e escola sobre a prática docente, tendo em vista que uma educação básica de qualidade, democrática e inclusiva é condição essencial para a democratização das oportunidades no Brasil e deve ser o propósito de toda a sociedade.

CARVALHO, Leonardo Mello de; SANTOS, Claudio Hamilton Matos dos. Desempenho do PIB no primeiro trimestre de 2024. *Carta de Conjuntura*, 6 jun. 2024. Disponível em: https://www.ipea.gov.br/cartadeconjuntura/index.php/2024/06/desempenho-do-pib-no-primeiro-trimestre-de-2024/. Acesso em: 10 jul. 2024.

O texto traz dados publicados no relatório produzido pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) sobre o produto interno bruto (PIB) no primeiro trimestre de 2024, pontuando que houve uma queda do PIB, sucedendo dois trimestres consecutivos.

EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2007.

O livro é dividido em duas partes: antes do século XVII e depois do século XVII. Além de contar a história da Matemática, o livro apresenta, no decorrer do texto, tarefas de cunho matemático, com respostas e sugestões para suas resoluções.

INCRA estabelece diálogo sobre regularização fundiária de quilombolas. *Agência Brasil de Notícias*, 1º nov. 2023. Disponível em: https://agenciabrasil.ebc.com.br/direitos-humanos/noticia/2023-11/incra-estabelece-dialogo-sobre-regularizacao-fundiaria-de-quilombolas. Acesso em: 5 mar. 2024.

A notícia aborda a criação da Mesa Nacional de Acompanhamento da Política de Regularização Fundiária Quilombola, que tem como objetivo central a regularização fundiária de terras quilombolas, reivindicação antiga dessa população.

LIMA, Diana Maia de; GONZALEZ, Luis Eduardo Fernandes. *Matemática aplicada à informática*. Porto Alegre: Bookman, 2015.

Voltado para estudantes e professores de cursos técnicos, o livro propõe, de maneira simples e objetiva, analisar os principais fundamentos da área. Com linguagem acessível, mostra como diversos conceitos matemáticos são aplicados na resolução de problemas e otimização de processos em informática, desenvolvendo competências essenciais no currículo técnico.

LIMA, Elon Lages. *Logaritmos*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2019.

O livro aborda, de maneira elementar, a questão dos logaritmos, trazendo seus principais conceitos e aplicações. Com uma linguagem clara e acessível, a obra é ideal para Ensino Médio e Ensino Superior, sugerindo temas para sala de aula e incluindo tabelas ilustrativas de cálculos numéricos com logaritmos e funções exponenciais.

LIMA, Elon Lages. *Números e funções reais*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013. (Coleção Profmat).

O foco dessa obra é trabalhar as funções de uma variável, estudadas sem usar cálculo infinitesimal. Essa abordagem elementar traz noções sobre conjuntos, a ideia geral de função e as diferentes categorias de números. Também são apresentadas funções afins, quadráticas, polinomiais, trigonométricas, exponenciais e logarítmicas.

LIMA, Freudson Dantas de. *Etnomatemática no garimpo*: uma proposta de ação pedagógica para o ensino e aprendizagem de matemática na perspectiva da resolução de problemas. 2018. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) — Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal. Disponível em: https://repositorio.ufrn.br/jspui/handle/123456789/25793. Acesso em: 30 set. 2024.

Essa dissertação apresenta os resultados de uma investigação a respeito da produção de conhecimentos matemáticos por um grupo de garimpeiros que trabalha na zona rural de Parelhas, no Rio Grande do Norte, tomando como base os pressupostos da Etnomatemática na concepção de Ubiratan D'Ambrosio.

NAÇÕES UNIDAS. *IDH: relatório indica recuo no desenvolvimento humano em 90% dos países*. 8 set. 2022. Disponível em: https://brasil.un.org/pt-br/198320-idh-relat%C3%B3rio-indica-recuo-no-desenvolvimento-humano-em-90-dos-pa%C3%ADses. Acesso em: 30 set. 2024.

O texto trata dos dados publicados no relatório produzido pelo Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento (Pnud), destacando que houve uma queda do Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) pelo segundo ano consecutivo em 90% dos países do mundo.

NAÇÕES UNIDAS. *Relatório de desenvolvimento humano do PNUD destaca altos índices de desigualdade no Brasil*. 9 dez. 2019. Disponível em: https://brasil.un.org/pt-br/84733-relat%C3%B3rio-de-desenvolvimento-humano-do-pnud-destaca-altos-%C3%ADndices-de-desigualdade-no-brasil. Acesso em: 12 set. 2024.

Analisando as informações divulgadas pelo Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento (Pnud), o texto destaca os resultados referentes ao Brasil com relação ao Índice de Desenvolvimento Humano (IDH), comparando-os aos de outras nações e relacionando a queda da posição ocupada pelo país no *ranking* internacional com os altos níveis de desigualdade em nossa nação.

NOVAES, Gilmar Pires. *Introdução à teoria dos conjuntos*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2018.

Esse livro aborda de maneira elementar e simples a teoria dos conjuntos, destacando seus principais conceitos e suas aplicações. Além disso, o autor explora como a teoria dos conjuntos pode ser aplicada em diferentes contextos matemáticos e suas implicações teóricas e práticas.

OLIVEIRA, Krerley Irraciel Martins; FERNÁNDEZ, Adán José Corcho. *Iniciação à matemática*: um curso com problemas e soluções. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

O livro propõe diversos problemas matemáticos e suas possíveis soluções, baseadas em diferentes métodos matemáticos elementares, com o objetivo de desenvolver o raciocínio lógico e a capacidade de resolução de problemas por meio de uma abordagem prática e acessível.

OLIVETO, Paloma. Voyager 2 dá seu primeiro sinal. *Correio Braziliense*, Brasília, Ciência e Saúde, 5 nov. 2019. p. 14.

Apesar de ter sido lançada há 43 anos, a nave espacial Voyager 2 continua enviando informações importantes para os cientistas. Essa reportagem cita algumas das contribuições desse tipo de pesquisa para o desenvolvimento das ciências e de novas tecnologias.

PNAD Contínua Trimestral: em 2023, taxa anual de desocupação cai em 26 UFs. *Agência IBGE Notícias*, 16 fev. 2024. Disponível em: https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-sala-de-imprensa/2013-agencia-de-noticias/releases/39206-pnad-continua-trimestral-em-2023-taxa-anual-de-desocupacao-cai-em-26-ufs. Acesso em: 10 jul. 2024.

Analisando as informações divulgadas pela Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios (Pnad), o texto destaca os resultados do Brasil referentes ao índice de desenvolvimento socioeconômico, comparando a taxa anual de desocupação em relação ao ano de 2023.

ROQUE, Tatiana Marins. *História da matemática*: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2012.

Por meio de uma linguagem simples e uso de ilustrações, o livro retrata a história da Matemática com uma visão crítica e acessível da evolução dos conceitos matemáticos, desmistificando crenças comuns e destacando a contribuição de diversas culturas ao longo da história.

STEWART, Ian. *Em busca do infinito*: uma história da matemática dos primeiros números à teoria do caos. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2014.

O livro propõe um passeio pela história da Matemática, abordando desde a Antiguidade até os dias atuais e explorando as principais descobertas e temas matemáticos ao longo dos séculos de maneira lúdica e elementar.

Lista de siglas

Enem: Exame Nacional do Ensino Médio
FGV-SP: Fundação Getulio Vargas
OBM: Olimpíada Brasileira de Matemática
OBMEP: Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
UFJF-MG: Universidade Federal de Juiz de Fora
UFPB: Universidade Federal da Paraíba
UPE-SSA: Universidade de Pernambuco

SUPLEMENTO PARA O PROFESSOR

APRESENTAÇÃO

Um meio de inclusão e democratização de oportunidades é a educação. O Ensino Médio representa um momento decisivo na vida de qualquer indivíduo. Assim, cabe ao livro didático auxiliar professores e estudantes nessa fase, oferecendo-lhes ferramentas úteis no processo de ensino e aprendizagem. Pensando nisso, esta coleção procurou tratar a Matemática e suas Tecnologias como parte integrante do cotidiano dos estudantes, além de estabelecer associação com outros componentes curriculares e com outras áreas do conhecimento.

Tomando diversos documentos oficiais como diretrizes e levando em conta as particularidades das diferentes culturas juvenis, esta coleção contempla os conteúdos essenciais para esse nível de ensino, apresentando-os de maneira contextualizada e empregando uma linguagem clara e objetiva, em uma sequência que favorece a aprendizagem.

O objetivo dessa proposta é possibilitar aos estudantes o desenvolvimento das competências gerais, competências específicas e habilidades listadas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), referentes ao Ensino Médio. Porém, é importante que o professor tenha autonomia e consciência de que pode selecionar os conteúdos a serem abordados em sala de aula adotando uma ordem diferente da sugerida no **Livro do Estudante**, de acordo com a proposta didático-pedagógica da escola.

Este **Suplemento para o professor** busca oferecer aos docentes subsídios teórico-metodológicos de maneira a auxiliar seu trabalho no uso desta coleção em sala de aula e em suas demais atribuições.

SUMÁRIO

ESTRUTURA DA COLEÇÃO

Esta coleção de Matemática e suas Tecnologias, destinada ao Ensino Médio, é composta de três volumes impressos do **Livro do Estudante**, cada um deles com seu respectivo **Suplemento para o professor**. Além do livro impresso, é disponibilizado o livro digital de cada volume, tanto para o estudante quanto para o professor, que tem como objetivo atender, de forma acessível, todos os estudantes e apresentar recursos digitais, como *podcasts*, vídeos, carrosséis de imagens, infográficos clicáveis e mapas clicáveis.

O Livro do Estudante

Cada volume desta coleção está dividido em sete capítulos, organizados em tópicos, subtópicos e seções. Essa estrutura auxilia o professor em seu planejamento diário e permite ao estudante tornar-se protagonista de seu processo de aprendizagem. Os tópicos e os conteúdos são adequados à essa etapa de ensino e foram selecionados de acordo com as habilidades, as competências gerais e as competências específicas, elencadas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), assim como os temas contemporâneos transversais.

A seguir, são apresentados os elementos que compõem a organização do **Livro do Estudante** desta coleção.

Abertura do capítulo

As páginas de abertura apresentam uma temática cujas características permitem estabelecer relações com os conteúdos que serão trabalhados no capítulo. Nessas páginas, há uma imagem representativa, que faz uma conexão do cotidiano com o conteúdo que será abordado; algumas questões, que servem como estratégias de estudos para explorar o conhecimento prévio dos estudantes e promover uma reflexão inicial sobre o conteúdo; e a indicação dos conteúdos que serão desenvolvidos no capítulo.

Desenvolvimento da teoria

A parte teórica, relacionada ao ensinamento de conteúdos e conceitos, é apresentada por meio de tópicos e subtópicos. No desenvolvimento do conteúdo, sempre que possível, são apresentadas situações relacionadas ao cotidiano. Em alguns momentos também é possível notar informações referentes à história da Matemática.

Questão de intervenção

Essas questões, que podem apresentar cunho matemático ou caráter pessoal, estão localizadas na parte teórica e têm o objetivo de levar os estudantes a refletir a respeito das aplicações práticas que envolvem o conteúdo apresentado.

Exercícios e problemas resolvidos

Essa seção tem como objetivo complementar a teoria abordada e os exemplos apresentados no decorrer do capítulo. Ela contribui para o desenvolvimento de tarefas, apresentando resoluções de maneira detalhada, que facilitam a compreensão da aplicação prática do conteúdo em questão. Além disso, ela auxilia os estudantes a exercitar suas habilidades e estratégias na resolução de tarefas que são propostas em outras seções, aperfeiçoando, assim, sua autonomia.

Resolvendo por etapas

Essa seção apresenta aos estudantes diferentes maneiras de organizar o pensamento para solucionar um problema.

Exercícios e problemas

Nessa seção, são apresentadas tarefas relacionadas ao conteúdo estudado no capítulo, organizadas em nível gradual de complexidade, que podem ser exploradas, em sua maioria, em sala de aula. Ela tem como objetivo contribuir para a consolidação do aprendizado e para a recuperação de defasagens dos estudantes.

Acessando tecnologias

Essa seção apresenta propostas de tarefas cujos contextos permitem desenvolver os conceitos estudados com o auxílio de recursos tecnológicos, complementando as estratégias apresentadas. O principal objetivo dessa seção é motivar o uso de ferramentas tecnológicas computacionais, como *softwares* de geometria dinâmica, planilhas eletrônicas e linguagem de programação, as quais permitem aprofundar diversos conteúdos matemáticos. Os recursos sugeridos são disponibilizados gratuitamente na internet, contribuindo, portanto, para a execução das tarefas realizadas por todos.

Educação midiática

Essa seção tem como principal objetivo desenvolver a educação midiática de maneira transversal. Nela, são propostas reflexões a respeito dos conceitos de mídia e informação, promovendo o uso responsável, democrático, ético e crítico dos meios digitais, seja na interpretação, no compartilhamento ou na produção de conteúdo.

Desenvolvimento sustentável

Essa seção desenvolve um trabalho com os **Objetivos de Desenvolvimento Sustentável** (ODS). Ela tem como principal objetivo explicitar o alinhamento deles com a **Agenda 2030** e ajudar os jovens a reconhecê-los como parte de uma ação global, com desdobramentos práticos em diferentes contextos.

Trabalho e juventudes

Essa seção aborda assuntos do mundo do trabalho que permitem aos estudantes compreender e valorizar diferentes profissões, mapeando possibilidades de inserção profissional. O contexto desenvolvido pode abordar a cultura jovem e apresentar perspectivas profissionais, tanto aquelas relacionadas ao ensino superior, quanto as de caráter técnico, levando os estudantes a refletir sobre a importância de cada profissão.

Síntese do capítulo

Essa seção, proposta como uma estratégia de estudo, apresenta questões analíticas e críticas, com o objetivo de avaliar o conhecimento, o desempenho e as habilidades relacionadas ao conteúdo abordado no capítulo, levando o estudante a aprimorar a compreensão do que foi estudado.

Ação e participação

Essa seção desenvolve um trabalho interdisciplinar que pode integrar conteúdos de diferentes componentes curriculares e de outras áreas do conhecimento, visando desenvolver nos estudantes habilidades como pensamento crítico, autonomia, criatividade, argumentação, cooperação, cidadania, entre outras.

Para fixar

Esse boxe, proposto como uma estratégia de estudo, apresenta informações complementares sobre o conteúdo matemático trabalhado.

Para expandir

Esse boxe, proposto como uma estratégia de estudo, apresenta sugestões de livros, textos ou vídeos com informações complementares ao contexto relacionado. Em diversas situações, os recursos sugeridos podem ser usados como fomentadores de discussão.

Vocabulário

Informa o significado de algumas palavras que estão indicadas em destaque no texto e são geralmente pouco utilizadas ou desconhecidas por parte dos estudantes, a fim de auxiliar na compreensão do contexto ou teoria apresentado.

Dica

Boxe que traz informações para auxiliar na resolução de exercícios e problemas propostos aos estudantes.

Observação

Nesse boxe, estão apresentadas informações complementares àquelas presentes na parte teórica, nas tarefas ou em seções.

Ser consciente

Ícone utilizado para destacar as tarefas que desenvolvem a formação cidadã, propondo reflexões a respeito de diferentes assuntos, como ética, educação financeira, saúde e cidadania.

Desafio

Ícone utilizado para destacar as tarefas com caráter desafiador, possibilitando o desenvolvimento de estratégias próprias de resolução.

Objetivos de Desenvolvimento Sustentável

Ícones que identificam que o assunto trabalhado tem relação com os **Objetivos de Desenvolvimento Sustentável** (ODS). Cada ícone é composto pela sigla ODS, o número e o símbolo correspondente ao ODS.

Objeto digital

Ícone que identifica o momento em que é possível acessar um objeto digital relacionado à tarefa ou ao conteúdo.

Ampliando seus conhecimentos

Essa seção apresenta para os estudantes sugestões de livros, filmes, *sites* e *podcasts* para complementar o estudo dos conteúdos trabalhados no volume.

Respostas

Essa seção apresenta respostas de tarefas, atividades e questões presentes no volume.

Referências bibliográficas comentadas

Nessa seção são apresentadas as principais referências teóricas que foram utilizadas como base para a elaboração do livro, com um breve comentário sobre cada uma delas.

Lista de siglas

Essa seção esclarece o significado das siglas de vestibulares e exames de larga escala usadas no volume.

Suplemento para o professor

O **Suplemento para o professor** é constituído de uma parte com orientações gerais, uma parte com orientações específicas para o desenvolvimento dos capítulos e uma seção de resoluções dos exercícios e problemas, finalizando com referências bibliográficas comentadas e referências bibliográficas complementares comentadas. A parte com orientações gerais é composta por: pressupostos teórico-metodológicos que fundamentam a coleção; orientações didático-pedagógicas; relações feitas com a BNCC; quadro de distribuição dos conteúdos do volume; propostas de cronogramas. Já a específica, desenvolvida no tópico **Orientações, comentários e sugestões**, apresenta as principais orientações para o desenvolvimento dos conteúdos, das tarefas e das seções, com comentários sobre o uso de diferentes estratégias de aprendizagem, o desenvolvimento do pensamento computacional, da argumentação e da inferência no decorrer do ano letivo.

A seguir, são apresentados os elementos que compõem a organização do **Suplemento para o professor** desta coleção.

Objetivos

Apresenta os principais objetivos que se almeja atingir no trabalho com os conteúdos do capítulo.

Justificativas

Apresenta as justificativas dos objetivos e dos conteúdos trabalhados em cada capítulo.

BNCC

Destaca e comenta as principais relações entre o que está sendo abordado no Livro do Estudante e o que é proposto na Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Sugestão de avaliação

Apresenta sugestões de avaliação para que o professor acompanhe a aprendizagem dos estudantes em momentos oportunos.

Tarefa extra

Apresenta sugestões de tarefas extras com o objetivo de complementar o trabalho com o conteúdo e auxiliar na consolidação da aprendizagem.

Educação midiática

Apresenta orientações para o desenvolvimento do trabalho com a seção **Educação midiática** do **Livro do Estudante**.

Desenvolvimento sustentável

Apresenta orientações para o desenvolvimento do trabalho com a seção **Desenvolvimento sustentável** do **Livro do Estudante**.

Trabalho e juventudes

Apresenta orientações para o desenvolvimento do trabalho com a seção **Trabalho e juventudes** do **Livro do Estudante**.

Informação

Apresenta informações que auxiliam ou complementam as orientações apresentadas.

Resoluções

Nessa seção são apresentadas as resoluções de questões, atividades e tarefas propostas no **Livro do Estudante**.

Referências bibliográficas comentadas

Nessa seção são apresentadas as referências teóricas que foram utilizadas como base para a elaboração do **Suplemento para o professor**, com um breve comentário sobre cada uma delas.

Referências bibliográficas complementares comentadas

Nessa seção são apresentadas sugestões de livros, revistas, artigos, *podcasts*, filmes e *sites* para pesquisas e consultas que podem ser complementares aos assuntos tratados no volume e ser usadas como subsídios teórico-metodológicos para o trabalho em sala de aula.

O ENSINO MÉDIO

O Ensino Médio, última etapa da Educação Básica, deve ser compreendido como uma etapa de grande importância política e social, aspecto que supera o conceito de apenas ser uma fase passageira na vida dos jovens. Na verdade, constitui-se como um momento fundamental de protagonismo e de desenvolvimento pessoal. É nessa fase que os estudantes ampliam suas perspectivas culturais, convivendo em um espaço de ampla diversidade de ideias e de opiniões. Também desenvolvem suas capacidades de tomada de decisão, cujo maior desafio é aprender a fazer escolhas coerentes e alinhadas com seu projeto de vida.

Assim, é fundamental que a escola do Ensino Médio desenvolva uma atitude acolhedora das juventudes, estando preparada para os desafios que essa fase exige, principalmente no que se refere à formação profissional e à construção da cidadania. Isso requer condutas que priorizem a construção da autonomia dos estudantes, que em breve atuarão na vida pública sem o acompanhamento de adultos. Desse modo, como podemos preparar os jovens para participar da sociedade de modo responsável?

> [...]
>
> A experiência participativa representa uma das formas de os jovens vivenciarem processos de construção de pautas, projetos e ações coletivas. Além disso, a experiência participativa também é importante por permitir a vivência de valores, como os da solidariedade e da democracia, e o aprendizado da alteridade. O que significa, em última instância, aprender a respeitar, perceber e reconhecer o outro e suas diferenças. [...]

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Formação de professores do ensino médio, etapa I – caderno II*: o jovem como sujeito do ensino médio. Organização: Paulo Carrano, Juarez Dayrell. Curitiba: UFPR/Setor de Educação, 2013. p. 46.

É no Ensino Médio também que ocorre a preparação mais intensa e aprofundada dos estudantes para os vestibulares e os exames de larga escala, como o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem). Esses exames têm como objetivo verificar o desempenho e avaliar o preparo dos jovens para os desafios da vida adulta, seja no âmbito profissional, seja no social. Além disso, as avaliações em larga escala contribuem para monitorar as redes de ensino de modo a oferecer soluções educacionais viáveis por meio de políticas públicas.

Esta coleção apresenta diversos subsídios para auxiliar os estudantes na preparação para esses exames, entre eles o Enem. Nas seções **Exercícios e problemas resolvidos** e **Exercícios e problemas**, por exemplo, sempre que possível, apresentamos questões extraídas diretamente do Enem e de vestibulares para que os estudantes possam se familiarizar com o formato das provas fornecidas por essas instituições. Além disso, há propostas de elaboração de problemas e articulações interdisciplinares e transdisciplinares, com abordagens que podem contribuir para o desempenho dos estudantes em futuras avaliações.

Organização do espaço e recepção dos estudantes

Muitas vezes, o Ensino Médio representa um momento decisivo na vida dos estudantes, que convivem com uma diversidade de sentimentos, expectativas e incertezas. É nessa etapa que eles começam a definir suas trajetórias acadêmicas e profissionais, enfrentando desafios pessoais e explorando novas oportunidades de construção de conhecimento.

Nesse sentido, o acolhimento no ambiente escolar é fundamental para o desenvolvimento emocional e acadêmico e para a formação integral desses estudantes. Cabe ao professor legitimar as diferenças, escutar ativamente e criar um ambiente seguro, buscando que todos se sintam confortáveis para expressar seus sentimentos e suas necessidades. Perguntar aos estudantes a maneira como eles podem se sentir mais à vontade e como acreditam que podem aprender melhor e incentivá-los a compartilhar experiências de aprendizagem prévias e marcantes são práticas que ajudam nesse processo, promovendo uma relação de confiança e colaboração que favorece o desenvolvimento de habilidades e competências e o crescimento pessoal.

Para acolher os estudantes do Ensino Médio, é importante criar momentos em que eles possam se conhecer e compartilhar práticas e vivências. Atividades como rodas de conversa, produções em que falem sobre si mesmos, sobre o que gostam e o que sabem fazer e a elaboração de um contrato de convivência, mesmo que informal, são estratégias que podem ser mobilizadas. Propor que escrevam uma carta para si mesmos expressando as expectativas para o futuro pode ser uma maneira de autorreflexão. Além disso, abrir espaço para a comunicação, a cooperação e a empatia dentro e fora da sala de aula é determinante para construir um ambiente seguro, de respeito e apoio mútuo.

A forma como o professor age desempenha um papel crucial para ajustar distâncias culturais, sociais e de aprendizagem e para legitimar diferenças, valorizando a diversidade dentro da sala de aula com base no desenvolvimento de atitudes e valores. Ao assumir esse papel, o professor torna-se um facilitador na promoção de um ambiente inclusivo e acolhedor. Isso envolve não apenas reconhecer as múltiplas identidades e experiências de estudantes de diferentes perfis, mas também refletir sobre como esses elementos influenciam o cotidiano educacional. Ao adaptar suas práticas pedagógicas e pensar modos de organização do espaço escolar para melhor atender às necessidades individuais e coletivas dos estudantes, o professor enriquece o ambiente de aprendizagem, fortalece os laços comunitários e promove um senso de pertencimento entre todos os envolvidos na educação escolar.

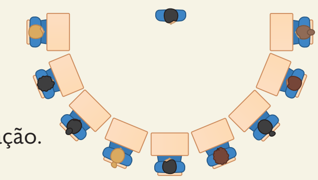
Nesse sentido, a sala de aula deve ser vista como um espaço de encontro e inclusão entre estudantes e professor, no qual a organização é um elemento crucial para potencializá-lo. A formação de um grupo por meio do diálogo, da produção em equipe e do direito à voz deve ser priorizada. É importante considerar o que a sala de aula comunica, criando e organizando um ambiente que promova a interação e o aprendizado. Essa organização passa, segundo Reis, Daros e Tomelin (2023), pelas dimensões física (objetos, materiais e recursos do ambiente), funcional (forma como o ambiente é utilizado), temporal (modo como o tempo é organizado e distribuído) e relacional (relações estabelecidas durante o desenvolvimento das atividades).

> [...]
>
> A sala de aula organizada em fileiras, voltadas para frente, pode ser adequada para as explicações do professor sobre determinado assunto ou para o trabalho individual silencioso, mas é, sem dúvida, pouco interessante para o trabalho colaborativo e comunicativo entre os estudantes.
>
> É importante ter em mente que precisamos mudar a configuração das salas de aula não somente para atender alguma atividade específica, a intencionalidade do trabalho pedagógico, mas também para provocar a aproximação dos estudantes, mudar o seu ponto de vista, promover o contato visual, trazer respiro e vida para a sala de aula, mantendo aceso o interesse e a motivação por aprender.
>
> [...]

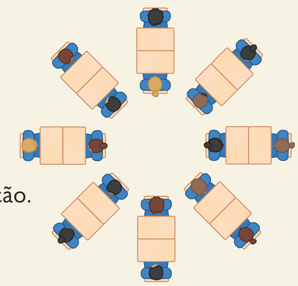
REIS, Ana Valéria Sampaio de Almeida; DAROS, Thuinie; TOMELIN, Karina Nones. Layouts *criativos para aulas inovadoras*. Maringá, PR: B42, 2023. p. 22.

As imagens apresentadas a seguir são exemplos de *layouts* para organização da sala de aula.

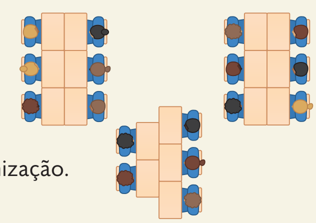
ILUSTRAÇÕES: HELOÍSA PINTARELLI/ARQUIVO DA EDITORA



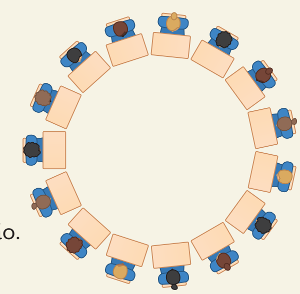
Primeira organização.



Segunda organização.



Terceira organização.



Quarta organização.

Na primeira organização, as carteiras estão dispostas em semicírculo e um estudante encontra-se à frente e ao centro. Ela pode ser utilizada para promover a compreensão profunda de conteúdos, incentivando os estudantes a assumir diferentes papéis e perspectivas. A segunda, chamada Mandala da Amizade, pode ser utilizada para promover integração e também ser feita de pé. Na terceira, o trabalho em grupo é favorecido, o que contribui para movimentos colaborativos, enquanto a quarta pode ser utilizada em rodas de conversa, por exemplo (REIS; DAROS; TOMELIN, 2023).

Cada disposição pode favorecer a ocorrência de experiências diversas: há *layouts* que promovem criação de vínculos, colaboração, imersão, investigação, consolidação, avaliação, e o professor deve analisar a viabilidade de utilizar determinada disposição com base nos objetivos que tem e na proposta pedagógica a ser desenvolvida.

> [...]
>
> Neste contexto, pode-se afirmar que, mais do que um espaço físico, é o local que precisa ser dinamizado pela constituição das relações psicopedagógicas e, por isso, deve ser planejado para atender as finalidades educativas. [...]

REIS, Ana Valéria Sampaio de Almeida; DAROS, Thuinie; TOMELIN, Karina Nones. Layouts *criativos para aulas inovadoras*. Maringá, PR: B42, 2023. p. 19.

Para enriquecer o ambiente, é possível, ainda, que as paredes e os espaços visíveis sejam preenchidos com produções, registros e memórias dos estudantes. Esses elementos personalizam o ambiente, tornando-o acolhedor e familiar, e valorizam as conquistas e os aprendizados individuais e coletivos. Ao expor trabalhos, textos significativos e reflexões, os estudantes podem se sentir reconhecidos e motivados a contribuir com o ambiente educacional de forma ativa e contínua e fortalecer o sentimento de pertencimento àquele local e ao grupo que o frequenta.

É interessante que exista flexibilidade na configuração do espaço ao longo do ano letivo. A mudança na disposição física das carteiras e dos demais móveis e objetos pode acompanhar o desenvolvimento das atividades pedagógicas e das necessidades de aprendizagem dos estudantes. Essas variações devem ser acompanhadas de movimentos reflexivos por parte do professor em relação ao alinhamento entre cada disposição, as atividades propostas e a perspectiva que o estudante tem em cada uma delas.

Além da sala de aula, é essencial que o professor explore outros espaços disponíveis na escola, como laboratórios científicos e espaços ao ar livre, como o pátio e a quadra, bibliotecas, áreas de convivência e até mesmo a cozinha. Cada um desses ambientes oferece oportunidades para experiências educativas por meio de experimentos práticos, pesquisas em grupo, leitura e exploração de diferentes mídias, interação social, entre outras. Ao utilizar esses espaços de maneira integrada ao currículo, o professor amplia os horizontes e proporciona a construção de conhecimentos de modo significativo e qualificado.

O estudante do Ensino Médio

Por muito tempo, a juventude foi compreendida como um período de passagem, uma etapa prévia da vida adulta, marcada por uma faixa etária delimitada. Porém, de acordo com o estudioso Juarez Dayrell (2016), as pesquisas têm demonstrado que a juventude deve ser compreendida como uma categoria socialmente construída na qual os jovens se assumem como verdadeiros sujeitos, ou seja, têm determinada origem familiar, estão inseridos em relações sociais, apresentam uma historicidade específica, movem-se por desejos e se constituem como seres ativos e produtores de conhecimento.

> [...]
>
> A juventude constitui um momento determinado, mas que não se reduz a uma passagem. Ela assume uma importância em si mesma como um momento de exercício de inserção social, no qual o indivíduo vai se descobrindo e descortinando as possibilidades em todas as instâncias de sua vida, desde a dimensão afetiva até a profissional. Essa realidade ganha contornos próprios em contextos históricos, sociais e culturais distintos. As distintas condições sociais (origem de classe, por exemplo), a diversidade cultural (a cor da pele, as identidades culturais e religiosas, os diferentes valores familiares etc.), a diversidade de gênero e de orientação afetiva e até mesmo as diferenças territoriais se articulam para a constituição das diferentes modalidades de se vivenciar a juventude.
>
> [...]

DAYRELL, Juarez (org.). *Por uma pedagogia das juventudes*: experiências educativas do Observatório da Juventude da UFMG. Belo Horizonte: Mazza Edições, 2016. p. 27.

Para que as relações possam ser fecundas e mutuamente respeitosas no ambiente escolar, uma opção interessante é investir no trabalho com as diversas manifestações culturais juvenis, ou seja, fazer da escola um território de produção cultural da juventude, e não apenas um local de aprendizado de uma cultura externa ou “adulta”. Nesse contexto, o jovem deve se identificar com as produções culturais com as quais convive, deve se sentir incluído e, principalmente, valorizado.

Para realizar esse trabalho de aproximação e de valorização das culturas juvenis, a primeira etapa é compreender o jovem como um sujeito de interlocução, com o qual se pode aprender e expandir os horizontes culturais. Essa aproximação requer uma flexibilidade por parte dos professores, que muitas vezes terão de superar visões estereotipadas e superficiais sobre a juventude atual. Assim, deve-se considerar que os jovens não estão inseridos em uma cultura única. A juventude se constitui como categoria socialmente construída, que deve ser analisada com base no contexto de cada comunidade. Existem jovens, por exemplo, que já estão inseridos no mercado de trabalho e que vivenciam a juventude de um modo muito diferente daqueles que têm mais tempo de lazer ou de estudo.

Compreender as múltiplas culturas juvenis que permeiam o contexto escolar faz parte do processo de inovação que tem marcado o curso educativo nos últimos anos. Em vez de “transmitirmos os saberes” aos jovens, por que não trocarmos e compartilharmos conhecimento, abrindo espaços e criando condições para que as culturas juvenis se expressem no ambiente escolar? Essas novas práticas compõem um caminho de construção coletiva do conhecimento. Sob esse ponto de vista, a aprendizagem passa a ser encarada como uma via de mão dupla, como uma troca e, assim, tende a criar um clima mais saudável e menos impositivo, sendo menos propício ao desenvolvimento de problemas indisciplinares e de relações conflituosas.

O professor

Diante desses novos desafios educacionais, que envolvem, inclusive, a interdisciplinaridade e o trabalho com metodologias ativas e tecnologias, o professor assume cada vez mais o papel de mediador das relações entre os estudantes e o conhecimento, orientando o caminho a ser adotado no processo de ensino e aprendizagem. Essa mediação ocorre de acordo com um planejamento bem definido das aulas, no qual são explicitadas as estratégias de engajamento e protagonismo dos estudantes. Supera-se a postura de um profissional meramente transmissor de informações e almeja-se uma conduta mais interativa, que toma como base a colaboração.

Sabe-se que no Brasil as turmas de Ensino Médio são diversificadas e formadas por grupos de estudantes que têm diferenças nos modos de aprender. O processo de ensino e aprendizagem é complexo e envolve diversas dimensões da vida dos sujeitos. Knud Illeris (2013), por exemplo, descreve a aprendizagem em três dimensões: a de conteúdo, a de incentivo e a de interação. A dimensão de **conteúdo** envolve a aprendizagem cognitiva, relacionada aos conhecimentos que são internalizados. Já a dimensão de **incentivo** se relaciona às sensibilidades, ao equilíbrio mental e às motivações que instigam as pessoas no aprendizado. Por fim, a dimensão de **interação** é aquela que está ligada à sociabilidade e à comunicação do indivíduo.

Desse modo, uma maneira de o professor lidar com a diversidade em sala de aula é identificar em qual dimensão de aprendizagem estão as defasagens dos estudantes. Com esse diagnóstico, pode-se, então, desenvolver estratégias adequadas ao tipo de dificuldade específica apresentada por eles. Por exemplo, em casos de defasagem na dimensão de interação, o professor poderá desenvolver estratégias de trabalho em grupo e dinâmicas que exijam a troca de ideias. Quando o problema for em relação à dimensão de incentivo, o professor poderá repensar as maneiras pelas quais aquele conteúdo instiga os estudantes e se relaciona com o cotidiano deles.

A fim de contribuir para o processo de adequação dos professores aos novos parâmetros que têm sido delimitados na educação no século XXI, sugerimos a seguir algumas condutas que podem ser utilizadas durante o planejamento e as aulas com turmas do Ensino Médio.

- Analisar os estudantes de modo personalizado, adequando os desafios e as propostas às características de cada um e procurando colocar a diferença como um agregador e um ponto positivo em relação ao coletivo.
- Organizar planejamentos coletivos e individuais para lidar com as turmas como um todo e também de modo personalizado.
- Relacionar os temas e conteúdos à realidade próxima dos estudantes, problematizando as experiências vivenciadas e alinhando os conteúdos aos interesses da turma.
- Dar importância à significação dos conteúdos que serão trabalhados em sala de aula.
- Propor constantemente diferentes maneiras de autoavaliação, permitindo aos estudantes um momento de reflexão a respeito de suas atividades e seu aprendizado e também permitindo ao professor avaliar suas práticas em sala de aula.
- Desenvolver flexibilidade para improvisar, quando necessário, e para adequar as propostas metodológicas à realidade de cada turma.
- Acompanhar a evolução de cada grupo ou estudante, avaliando-a sob uma perspectiva processual.
- Evitar propostas que abordem capacidades meramente interpretativas e que não desafiem os estudantes a desenvolver sua criatividade e seu pensamento crítico.
- Inserir opiniões e sugestões dos estudantes no planejamento das tarefas, considerando suas dificuldades e preferências.
- Capacitar os estudantes em determinadas atividades com as quais eles possam não estar acostumados, como a realização de uma pesquisa bem fundamentada ou a produção de um texto-síntese.
- Gerir o tempo de modo personalizado, observando os ritmos de aprendizagem específicos das turmas.
- Aderir a dinâmicas que alterem o posicionamento tradicional das carteiras em sala de aula, promovendo atividades em grupo e explorando os diversos ambientes da escola.
- Propor trabalhos em grupos, para que os estudantes desenvolvam as capacidades de expressão e de socialização.

Planejamento

A complexidade do trabalho docente está ancorada em diversos fatores, uma vez que ele não se restringe à sala de aula por estar diretamente ligado a exigências sociais e à experiência de vida dos estudantes. Nesse sentido, o planejamento torna-se uma etapa fundamental, pois nele são estabelecidos as diretrizes e os meios de realização do trabalho docente (LIBÂNEO, 2013).

> [...]
>
> O planejamento é um processo de racionalização, organização e coordenação da ação docente, articulando a atividade escolar e a problemática do contexto social. A escola, os professores e os alunos são integrantes da dinâmica das relações sociais; tudo o que acontece no meio escolar está atravessado por influências econômicas, políticas e culturais. [...] A ação de planejar, portanto, não se reduz ao simples preenchimento de formulários para controle administrativo; é, antes, a atividade consciente de previsão das ações docentes, fundamentadas em opções político-pedagógicas, e tendo como referência permanente as situações didáticas concretas [...]

LIBÂNEO, José Carlos. *Didática*. São Paulo: Cortez, 2013. p. 246.

Um bom planejamento ajuda a antecipar possíveis dificuldades dos estudantes e elaborar estratégias para superá-las, contribuindo, dessa forma, para uma construção de conhecimento sólida e contextualizada. Além disso, ao planejar as aulas, o professor pode alinhar seus objetivos pedagógicos com as necessidades e os interesses dos estudantes. O planejamento acaba se configurando como um guia de orientação. Para tanto, deve haver uma ordem sequencial e progressiva que alinhe o que se planeja com a realidade com a qual se vai trabalhar. É importante, ainda, buscar coerência entre os objetivos delineados, os conteúdos a serem trabalhados, os métodos a serem mobilizados e a avaliação que será conduzida no processo.

O planejamento individual permite que o professor organize as aulas de acordo com o ritmo e as características da turma, enquanto o planejamento coletivo, realizado em colaboração com outros professores de Matemática ou de diferentes componentes curriculares, enriquece o processo educativo por meio da troca de experiências e ideias. Essa abordagem interdisciplinar favorece a articulação entre os componentes curriculares e a contextualização dos conteúdos, promovendo o desenvolvimento de habilidades e competências de forma integrada e diversificada.

Nesse sentido, considera-se principalmente três níveis de planejamento: o plano da escola, com orientações mais gerais, o plano de ensino, com a previsão do trabalho docente para um ano ou semestre, e o plano de aula, de caráter mais específico, com a previsão do desenvolvimento do conteúdo para uma aula ou conjunto de aulas (LIBÂNEO, 2013). Ao planejar as aulas, o professor deve sempre considerar o Projeto Político Pedagógico (PPP) da escola e os currículos municipal e estadual. Esses documentos orientam as práticas pedagógicas e garantem que o ensino esteja alinhado com as diretrizes educacionais estabelecidas. É essencial que o planejamento didático seja flexível e adaptável, permitindo que o professor faça ajustes conforme necessário para atender às especificidades do contexto escolar e das culturas juvenis em sua comunidade educativa.

Em algumas situações, pode ser necessário elaborar um Planejamento Educacional Individual (PEI) para atender às necessidades específicas de estudantes com deficiências ou transtornos. O PEI deve ser cuidadosamente elaborado para garantir que esses jovens tenham acesso a uma educação de qualidade e equitativa, com conteúdos e atividades adaptados às suas capacidades e potencialidades. Essa prática promove a inclusão e o respeito às diferenças, contribuindo para a formação integral de todos, independentemente do perfil.

Um dos primeiros passos no planejamento é realizar um diagnóstico dos conhecimentos, das habilidades, das atitudes e dos valores prévios dos estudantes. Esse levantamento pode ser feito por meio de avaliações diagnósticas, observações e atividades diversificadas que permitam ao professor compreender o nível de desenvolvimento de cada um. Com base nesses dados, o professor pode planejar as aulas de forma mais assertiva, criando oportunidades para que eles ampliem e aprofundem os conhecimentos.

Por fim, o planejamento deve contemplar práticas e vivências diversificadas, que dinamizem a aprendizagem e contribuam para o pluralismo de ideias e para o desenvolvimento do pensamento crítico e científico. Atividades práticas, projetos interdisciplinares, debates e estudos de caso são exemplos de abordagens que podem enriquecer o ensino de Matemática, tornando-o mais relevante e interessante para os estudantes. Por meio dessas experiências, eles não apenas aprendem os conteúdos curriculares, mas também desenvolvem competências essenciais para a vida em sociedade, como a argumentação, a inferência e a autonomia de pensamento.

O combate à violência e a promoção da saúde mental dos estudantes

De acordo com a Organização Mundial da Saúde (OMS), a adolescência é o período de 10 a 19 anos de idade (BRASIL, 2018c). Nessa etapa da vida, o indivíduo ainda está em desenvolvimento e vários fatores podem interferir em seu comportamento e em sua saúde mental. Trata-se de um período de mudanças e descobertas, no qual o jovem constrói e reconstrói sua identidade. Fatores emocionais associados à realidade social, econômica, histórica e cultural tornam essa parcela da população muito vulnerável mental e emocionalmente.

Entre os problemas relacionados à saúde mental que mais afetam os jovens estão a violência familiar, o *bullying*, o *cyberbullying*, a depressão, a ansiedade e a dependência química.

Os casos de *bullying*, por exemplo, envolvem relações de poder e dominação que provocam violência psicológica e, muitas vezes, física, sem motivos aparentes. Já o *cyberbullying* envolve relações de insultos, intimidação e violência psicológica que são potencializadas, principalmente, por meio das redes sociais.

Tanto o *bullying* quanto o *cyberbullying* podem causar sofrimento às vítimas e ter consequências extremas. Em alguns casos, os indivíduos agressores recebem punição, mas é necessário promover um trabalho de conscientização para que esses jovens possam refletir sobre as próprias ações e analisar os impactos emocionais que elas acarretam nas vítimas. Os jovens que praticam *bullying* geralmente são atraídos por um imaginário preestabelecido de padrões de beleza, comportamento, consumo e configurações sociais. Por isso, as ações de combate a essa prática devem contribuir para a desconstrução desses padrões e para o respeito à diversidade.

Além disso, é preciso analisar o contexto familiar desses jovens, que, muitas vezes, vivem em ambientes onde há violência e/ou negligência. Por essas razões, é imprescindível o papel da escola no cuidado com a saúde mental dos estudantes, combatendo ativamente todos as formas de discriminação e de violência.

Para isso, são necessários programas para prevenir o *bullying* e qualquer outro tipo de violência, além do abuso de substâncias nocivas. Esses programas devem ter a participação da escola, dos familiares, da comunidade e de profissionais, como psicólogos e psicopedagogos. Tal união pode contribuir para detectar os sinais de problemas envolvendo a saúde mental dos estudantes e para tomar as medidas necessárias antes que esse tipo de comportamento resulte em alguma consequência grave.

Como a escola pode contribuir para a promoção da saúde mental dos estudantes?

A escola deve ser um espaço de disseminação do respeito e da proteção social dos jovens, atuando com a participação ativa das famílias. No ambiente escolar, os estudantes podem ser organizados em grupos a fim de possibilitar a troca de experiências em debates mediados por um psicólogo. Assim, os jovens tendem a se sentir mais à vontade para discutir e relatar a própria realidade, compartilhando emoções e descobrindo os gatilhos que os fazem reagir com violência, ansiedade ou tristeza, por exemplo. Trata-se de uma oportunidade para trabalhar o autoconceito, a autoimagem e a autoestima dos jovens.

Averigue a possibilidade de a escola oferecer espaços em horários alternativos para que os estudantes desenvolvam práticas extracurriculares, como esportes, oficinas de teatro, atividades de cuidado com a escola e com os colegas, oficinas de dança, gincanas, competições e simulados. Nesses momentos, é importante incluir estudantes de diferentes perfis. A convivência é essencial para o desenvolvimento do respeito mútuo e da empatia, colaborando com a saúde mental deles.

Atividades envolvendo atitudes solidárias podem contribuir para que os estudantes se coloquem no lugar de outras pessoas, desenvolvendo a empatia. Uma sugestão é promover campanhas de coleta de produtos com o intuito de disponibilizá-los às pessoas vulneráveis e em situação de necessidade assistidas por instituições sociais do município.

Outras atividades podem envolver o futuro dos estudantes, identificando os potenciais de cada um a fim de construir um projeto de vida. Mostrar que as atitudes de hoje influenciam o futuro incentiva-os a refletir sobre suas escolhas e opções. A escola, então, tem o papel de ajudá-los a ultrapassar as barreiras com atividades que envolvam a autoestima, o autoconhecimento e o autocuidado.

O professor deve ficar atento aos sinais que denotem mudança de comportamento dos estudantes e que demandem o encaminhamento para avaliação pela equipe de profissionais que cuidam da saúde mental, ações que contribuem para prevenir transtornos. Para isso, é muito importante que o professor converse com a administração da escola sobre a possibilidade de promover eventos de formação continuada relacionada à saúde mental.

O convívio social em sala de aula

Vivemos constantemente em interação com outras pessoas e dependemos delas em muitas atividades do dia a dia. Por isso, é necessário ter harmonia no convívio social, com proveito mútuo e respeito constante. Não ter preconceitos, compreender as necessidades do outro, aprender a lidar com as próprias limitações e contribuir para criar um ambiente propício para o crescimento em conjunto exige, além de boa vontade, ações de inclusão e integração comunitária.

Na socialização humana, em especial no ambiente escolar, lidamos com indivíduos de diferentes perfis, com diversas crenças e opiniões. Respeitar essas diferenças é dever de cada um e a palavra-chave, em todos os casos, é empatia.

Comumente, a escola é um dos primeiros lugares onde boa parte dos jovens tem contato com outras pessoas. Assim, entre as tarefas do professor está a necessidade de orientar e instruir os estudantes a ser empáticos, desenvolvendo a tolerância, a sensibilidade e, principalmente, o respeito para com os demais. Por meio de práticas saudáveis e bons exemplos, é possível que o professor consiga influenciar os estudantes em um sentido positivo de comportamento socialmente responsável, o qual poderá ter impactos benéficos na sociedade como um todo.

Ações que podem facilitar a construção de um ambiente com essas características incluem, por exemplo, conversas amistosas nas quais, um a um, os estudantes possam expressar suas opiniões e compartilhar suas emoções sobre os mais variados assuntos. Tal prática pode ser incrementada com atividades complementares, como a solicitação de pesquisas extraclasse, para posterior debate construtivo, a respeito de temas como as relações familiares, a importância dos vínculos de amizade, a aceitação de ideias contrárias às nossas e o respectivo respeito, o pluralismo cultural na escola e no ambiente de trabalho, o combate ao racismo, o combate à homofobia, a promoção da paz na comunidade escolar, entre outros.

A Matemática, nesse contexto, pode ser uma ferramenta para analisar dados acerca da distribuição de renda ou das discriminações em razão de etnia, sexualidade, identidade de gênero ou crença, investigando e interpretando as porcentagens de cada grupo sociocultural em diferentes estudos estatísticos. Com base em análises quantitativas, é possível discutir os desafios que a sociedade enfrenta rumo à efetividade da justiça social, que pode ser um ponto de partida para a troca de ideias e o autoconhecimento por parte dos estudantes, inclusive com o envolvimento do professor. Para isso, noções de proporcionalidade, de causas e consequências lógicas e até mesmo da objetividade dos números na descrição dos fenômenos naturais, incluindo os socioeconômicos, são fatores importantes para a compreensão da realidade e também para aumentar a consciência dos jovens de modo a auxiliá-los no embasamento de argumentos.

Ademais, sempre que julgar conveniente, o professor pode conversar com os estudantes, dispondo-se a ouvi-los e incentivando-os a expressar suas ideias. Atitudes desse tipo favorecem o respeito e a admiração mútuos, contribuindo para o engajamento saudável e natural em sala de aula.

Além disso, é importante conversar com os estudantes sobre traçar planos em busca de sonhos e alcançar os meios necessários para consolidá-los pelo próprio esforço. Justamente por essa razão, o planejamento do futuro também está entre os desafios da prática docente.

Nesse processo dinâmico, muitas vezes sem fim, a educação assume um papel importantíssimo, em especial nas peculiares etapas de transição entre a infância e a vida adulta. Ao lado da família, da sociedade e da autodeterminação do próprio sujeito, a escola é o fator mais importante na produção desse despertar de consciência e de responsabilidade no jovem, instruindo-o, tanto quanto possível, na estruturação gradativa e na viabilização sensata de um projeto de vida tão necessário. Tal projeto, constituindo o alicerce em que o futuro do jovem será edificado, deve levar em consideração os múltiplos âmbitos interconectados em que a vida se manifesta: pessoal, educacional, profissional, social, político, moral, intelectual e emocional.

O anseio por objetivos de vida maiores e mais realistas do que aqueles dos primeiros sonhos da infância costuma despontar com ímpeto durante a juventude, e, em geral, os estudantes o desenvolvem de maneira desordenada, cheia de agitação, ingenuidades, inseguranças e receios. Assim, a escola deve se preocupar com a formação integral dos jovens e assumir o compromisso de lidar adequadamente com essas questões, elegendo a construção da autonomia como o eixo central em torno do qual organizar suas atividades.

Como última etapa da Educação Básica, no Ensino Médio tais questões devem ser trabalhadas pelo professor com maior atenção e de maneira mais explícita, ora no contexto das tarefas do componente curricular, ora em conversas com a turma, mas sempre por meio de exemplos e de aconselhamentos que fomentem o delineamento de planos de vida e o recrudescimento do caráter.

Nesse sentido, a trajetória escolar deve ser capaz de dialogar com os jovens, desenvolvendo neles habilidades e conhecimentos que incentivem atitudes efetivas para lidar com os desafios da sociedade, promovendo a maturação de valores que incidirão sobre seus processos de tomada de decisão ao longo da vida. Além disso, ela os prepara para o mercado de trabalho, fornece orientação vocacional e os capacita para eventuais estudos mais complexos no ensino superior ou para aperfeiçoamento técnico em cursos profissionalizantes, conforme as circunstâncias de cada caso.

O estabelecimento do projeto de vida, como já frisado, é um processo dinâmico que conta com diálogos entre jovens, família, amigos, escola e sociedade. Contudo, a liberdade e o protagonismo são exclusivos do indivíduo: é ele que escolherá a própria profissão, decidirá constituir família ou não e direcionará atenção e esforços para a área de seu interesse. Desse modo, o projeto de vida que os estudantes almejam, projetam e redefinem para si ao longo de suas trajetórias, praticamente coincidindo com o desenvolvimento da própria identidade, é apenas motivado e instruído pela escola, nunca imposto por ela. As escolhas devem ocorrer naturalmente em uma multiplicidade de influências, experiências e aprendizagens que enriquecem à medida que se tornam plurais, de tal modo que os estudantes de diferentes perfis aprendem uns com os outros por interação mútua e convívio constante, mediados – e não determinados – pela família, pelo professor, pela escola como um todo e, ainda mais amplamente, pelas conjunturas socioculturais nas quais estão inseridos.

É, enfim, no ambiente escolar que os jovens podem experimentar, de modo controlado, as interações com o outro e com o mundo, vislumbrando, na valorização da diversidade, oportunidades de crescimento para seu presente e seu futuro. É nessa riqueza de motivação que ele deve traçar o próprio caminho, explorando seus talentos e suas potencialidades, assumindo deveres e responsabilidades, aprendendo a fruir e a conter desejos, a dosar razão com emoção, a harmonizar lazer com labor, a mesclar estudos com diversão, e disciplina com curiosidade. Com isso, ele estará apto a constituir-se um ser humano íntegro, seguro de si, cônscio de quem é, dos próprios méritos e das próprias limitações, atento ao seu papel no mundo e ativo quanto às necessidades de seu tempo e de sua comunidade.

A BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR NA ETAPA DO ENSINO MÉDIO

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é o documento que estabelece os principais conhecimentos, competências e habilidades que os estudantes devem desenvolver em cada etapa da Educação Básica (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio).

Com o intuito de substituir o currículo do Ensino Médio isolado em componentes curriculares, a BNCC apresenta, para essa etapa, as aprendizagens essenciais distribuídas por áreas do conhecimento. Assim, para cada área são definidas competências específicas que se relacionam diretamente com as habilidades da área. Essa estrutura constitui a formação geral básica que, segundo as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (DCNEM):

> [...] é composta por competências e habilidades previstas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e articuladas como um todo indissociável, enriquecidas pelo contexto histórico, econômico, social, ambiental, cultural local, do mundo do trabalho e da prática social [...]

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Câmara de Educação Básica. Resolução nº 3, de 21 de novembro de 2018. Atualiza as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. *Diário Oficial da União*, Brasília, DF, 22 nov. 2018. p. 5. Disponível em: https://web.archive.org/web/20231025202209/http://portal.mec.gov.br/docman/novembro-2018-pdf/102481-rceb003-18/file. Acesso em: 5 out. 2024.

Além de estabelecer que os conteúdos sejam apresentados por área (formação geral básica), a BNCC prevê, com base nas DCNEM como documento orientador, os itinerários formativos, em que os estudantes poderão escolher, por exemplo, a formação técnica como maneira de complementar a formação escolar.

Com essa estruturação, a BNCC do Ensino Médio articula-se às habilidades e competências do Ensino Fundamental, com o objetivo de consolidar, aprofundar e ampliar a formação integral dos estudantes, possibilitando, assim, a construção de uma sociedade mais justa e igualitária.

As áreas do conhecimento

A etapa do Ensino Médio requer a elaboração de um currículo que integre não só os conteúdos dos componentes de determinada área (interdisciplinaridade), mas também os componentes de outras áreas, estabelecendo relações transdisciplinares.

Áreas do conhecimento e seus respectivos componentes curriculares na BNCC

Áreas do conhecimento	Componentes curriculares
Linguagens e suas Tecnologias	Arte Educação Física Língua Inglesa Língua Portuguesa
Matemática e suas Tecnologias	Matemática
Ciências da Natureza e suas Tecnologias	Biologia Física Química
Ciências Humanas e Sociais Aplicadas	Filosofia Geografia História Sociologia

Competências gerais, competências específicas e habilidades

As dez competências gerais da Educação Básica, previstas na BNCC, têm como principal objetivo formar cidadãos conscientes de seu papel na sociedade e que saibam agir de maneira justa. Essas competências se desdobram na construção de conhecimentos e no desenvolvimento de habilidades, valores e atitudes.

Competências gerais da Educação Básica previstas na BNCC

1 – Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

2 – Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

3 – Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.

4 – Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

5 – Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações,

produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

6 – Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.

7 – Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

8 – Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.

9 – Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.

10 – Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

Fonte de pesquisa: BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Versão final. Brasília: MEC, 2018. p. 9-10. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf. Acesso em: 24 set. 2024.

Além das competências gerais, a BNCC estabelece as competências específicas para cada componente curricular. Essas competências determinam o trabalho com habilidades, conceitos e noções que orientam a prática docente e que estão relacionados às unidades temáticas e aos objetos de conhecimento, promovendo também o desenvolvimento cognitivo dos estudantes.

Competências específicas de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio

1 – Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

2 – Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

3 – Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

4 – Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

5 – Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Fonte de pesquisa: BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Versão final. Brasília: MEC, 2018. p. 531. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf. Acesso em: 24 set. 2024.

Habilidades de Matemática e suas Tecnologias desenvolvidas neste volume

(EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT103) Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.

(EM13MAT104) Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.

(EM13MAT201) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.

(EM13MAT203) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.

(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT303) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.

(EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.

(EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.

(EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT313) Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro.

(EM13MAT314) Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.).

(EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

(EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.

(EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.

(EM13MAT403) Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.

(EM13MAT404) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.

(EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de de 2º grau do tipo $y = ax^2$.

(EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT506) Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.

(EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

(EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

(EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.

Fonte de pesquisa: BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Versão final. Brasília: MEC, 2018. p. 543-546. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf. Acesso em: 24 set. 2024.

Cabe destacar que as competências específicas e as habilidades estabelecidas para o Ensino Médio, articuladas às aprendizagens essenciais definidas para o Ensino Fundamental, contribuem para o desenvolvimento das competências gerais da Educação Básica. Dessa forma, para que os estudantes desenvolvam as competências gerais, é preciso, primeiro, que adquiram as aprendizagens essenciais de cada área, por meio das habilidades correspondentes, desenvolvendo também os princípios das competências específicas. Ao fazer o planejamento das práticas pedagógicas, o professor deve estar atento aos diferentes graus de amplitude e complexidade das competências (gerais e específicas) e ter autonomia para fazer as adaptações necessárias no que foi proposto no Projeto Político Pedagógico da escola de acordo com a realidade da turma.

Esta coleção foi organizada de maneira a contemplar as habilidades e as competências específicas relacionadas à área do conhecimento **Matemática e suas Tecnologias**, bem como a contemplar as competências gerais propostas na BNCC. Essas relações estão presentes nas abordagens dos conteúdos, nas teorias, nas seções e nas tarefas apresentadas. O **Livro do Estudante** aborda as relações entre as habilidades e/ou competências, de maneira que os conteúdos de Matemática estão destacados, permitindo que tanto os estudantes quanto o professor confiram como esses elementos são desenvolvidos. Já o **Suplemento para o professor** aborda as relações entre as habilidades e/ou competências e os conteúdos da área de **Matemática e suas Tecnologias**, assim como as competências específicas da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, auxiliando o professor a verificar como esses itens podem ser desenvolvidos, a fim de contribuir para a formação integral dos estudantes.

A fim de auxiliar o professor no planejamento do trabalho em sala de aula, são apresentadas a seguir as competências específicas da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias para o Ensino Médio**.

> 1 – Analisar fenômenos naturais e processos tecnológicos, com base nas interações e relações entre matéria e energia, para propor ações individuais e coletivas que aperfeiçoem processos produtivos, minimizem impactos socioambientais e melhorem as condições de vida em âmbito local, regional e global.
>
> 2 – Analisar e utilizar interpretações sobre a dinâmica da Vida, da Terra e do Cosmos para elaborar argumentos, realizar previsões sobre o funcionamento e a evolução dos seres vivos e do Universo, e fundamentar e defender decisões éticas e responsáveis.
>
> 3 – Investigar situações-problema e avaliar aplicações do conhecimento científico e tecnológico e suas implicações no mundo, utilizando procedimentos e linguagens próprios das Ciências da Natureza, para propor soluções que considerem demandas locais, regionais e/ou globais, e comunicar suas descobertas e conclusões a públicos variados, em diversos contextos e por meio de diferentes mídias e tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC).

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Versão final. Brasília: MEC, 2018. p. 553. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf. Acesso em: 26 jul. 2024.

Temas contemporâneos transversais

Os temas contemporâneos transversais não são novidade nos documentos oficiais para a Educação Básica. Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) de 1997, eram chamados **temas transversais** e pressupunha-se que fossem incluídos nos currículos das escolas. Contudo, como os PCNs não tinham caráter obrigatório e os seis temas listados não eram pautados em nenhuma legislação ou norma específica, nem sempre essa inclusão acontecia no contexto escolar.

Com as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCNs) de 2013, os Temas transversais receberam o nome de **eixos temáticos** ou **eixos norteadores** e pressupunham que os professores e os estudantes escolhessem temas/assuntos vinculados ao componente curricular que desejassem estudar, contextualizando-os com outros. O trabalho interdisciplinar e transdisciplinar, por meio de eixos temáticos, tornou-se obrigatório a fim de conduzir os estudantes na reflexão sobre a vida em sociedade.

Com a homologação da BNCC em 2018, eles passaram a ser chamados **temas contemporâneos** e tornaram-se referência obrigatória para a elaboração dos currículos. Em 2019, com a publicação do documento *Temas contemporâneos transversais na BNCC*, passaram a ser chamados **temas contemporâneos transversais** (TCTs). Essa mudança de nomenclatura é pautada na BNCC, que afirma:

> [...] cabe aos sistemas e redes de ensino, assim como às escolas, em suas respectivas esferas de autonomia e competência, incorporar aos currículos e às propostas pedagógicas a abordagem de temas contemporâneos que afetam a vida humana em escala local, regional e global, preferencialmente de forma **transversal** e integradora. [...]

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular*. Versão final. Brasília: MEC, 2018. p. 19. (Grifo nosso). Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf. Acesso em: 3 set. 2024.

Na BNCC, os TCTs foram distribuídos em seis áreas temáticas, conforme apresentado a seguir.

Temas contemporâneos transversais

Macroáreas temáticas	Temas
Ciência e tecnologia	Ciência e tecnologia
Meio ambiente	Educação ambiental e Educação para o consumo
Economia	Trabalho, Educação financeira e Educação fiscal
Multiculturalismo	Diversidade cultural e Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras
Cidadania e civismo	Diversidade cultural e Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras
Saúde	Saúde e Educação alimentar e nutricional

Os TCTs não pertencem a nenhuma área específica do conhecimento e devem ser abordados por todas elas de maneira integrada e complementar, possibilitando aos estudantes a melhor compreensão da sociedade em que vivem. Seguindo essa premissa, e com o objetivo de orientar o trabalho com os TCTs, esta coleção aborda esses temas por meio de recursos e tarefas, tanto no **Livro do Estudante** quanto neste **Suplemento para o professor**. Essas abordagens são feitas de maneira interdisciplinar e percorrem as áreas do conhecimento, proporcionando aos estudantes a reflexão sobre seu papel na sociedade e contribuindo para sua formação cidadã.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS E METODOLÓGICAS

Esta coleção propõe a contextualização sociocultural do estudante, tornando-o protagonista de seu processo de aprendizagem. Embora a Matemática seja, “[...] por excelência, uma ciência hipotético-dedutiva, porque suas demonstrações se apoiam sobre um sistema de axiomas e postulados [...]” (BRASIL, 2018a, p. 265), o papel heurístico das experimentações na aprendizagem da Matemática tem importância considerável e deve fazer parte, sempre que possível, das tarefas discentes, a fim de produzir questionamentos saudáveis, levantar conjecturas e buscar contraexemplos, entre outras situações. Nesse sentido, em diversos momentos desta coleção a condução dos conceitos busca ferramentas da tendência socioetnocultural, amparada na Etnomatemática, que propõe troca de conhecimento entre professor e estudante, incentivando sua autonomia crítica, criativa e transformadora na aprendizagem de um saber prático e dinâmico. Além disso, a realidade do estudante é, muitas vezes, problematizada e tomada como contexto para explorar novos conceitos e ampliar os conhecimentos prévios deles.

O ponto de partida da tendência socioetnocultural está pautado nos:

> [...] problemas oriundos do meio cultural, das práticas cotidianas. Professor e alunos trocariam seus conhecimentos [...]. Isso se evidencia pelo trabalho pedagógico a partir da abordagem de temas envolvendo o conhecimento cotidiano dos alunos.
>
> [...]

ZIMER, Tania Teresinha Bruns. *Aprendendo a ensinar matemática nas séries iniciais do ensino fundamental*. 2008. 299 f. Tese (Doutorado em Educação) — Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008. p. 86-87. Disponível em: https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-24062008-162627/publico/TeseTaniaBrunsZimer.pdf. Acesso em: 30 set. 2024.

A Matemática é uma ciência prática e dinâmica, produzida histórica e culturalmente em diversos contextos sociais, em que sua história desmitifica a realidade e estabelece estratégias que incentivam e facilitam as ações dos estudantes, contribuindo para a construção de uma consciência cidadã e democrática. Além disso, as trocas de conhecimentos entre o professor e os estudantes por meio de metodologias ativas objetivam a formação crítica, pessoal e social.

Ademais, os recursos tecnológicos são ferramentas potenciais de ensino ao apoiar a autoprodução de conhecimentos por parte dos estudantes.

Tendências no ensino de Matemática nesta coleção

Sabe-se que os resultados matemáticos são obtidos por meio de deduções pautadas em axiomas, teoremas, corolários, lemas, postulados ou proposições. Grande parte do ensino atual está relacionada à mera reprodução de algoritmos. No entanto, não podemos reduzir a Matemática à simples aplicação de fórmulas e à resolução de exercícios, pois são procedimentos mecânicos, que não possibilitam o desenvolvimento do pensamento crítico do estudante. Com o objetivo de mudar essa abordagem em sala de aula, algumas concepções no ensino de Matemática podem ser adotadas, visando tornar o estudante protagonista do próprio processo de aprendizagem. Entre elas, temos a Etnomatemática, a História da Matemática, a Investigação matemática, a Resolução de problemas e a Modelagem matemática.

No Brasil, o precursor da Etnomatemática é o professor doutor Ubiratan D’Ambrosio. Etimologicamente, Etnomatemática significa a maneira, a técnica ou a arte (*tica*) de explicar, conhecer e entender (*mathema*) a realidade natural e sociocultural em que o indivíduo está inserido (*etno*). Para D’Ambrosio, a Matemática é espontânea e individual, motivada e desenvolvida de acordo com o ambiente social e cultural em que o indivíduo se encontra. Ao sugerir um vínculo entre a Etnomatemática e a sala de aula, D’Ambrosio argumenta que:

> [...]
>
> A proposta pedagógica da etnomatemática é fazer da matemática algo vivo, lidando com situações reais no tempo [agora] e no espaço [aqui]. E, através da crítica, questionar o aqui e agora. Ao fazer isso, mergulhamos nas raízes culturais e praticamos dinâmica cultural. [...]

D’AMBROSIO, Ubiratan. *Etnomatemática*: elo entre as tradições e a modernidade. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2007. p. 46.

Nesta coleção, a Etnomatemática é trabalhada em alguns contextos e tarefas que apresentam o conhecimento matemático atrelado a diversas culturas, oportunizando momentos de reflexão quanto ao papel social que a Matemática representa nas relações humanas. Por meio dessa abordagem, é esperado que os estudantes descubram métodos úteis para resolver, de maneira eficaz, problemas em contextos não tão comuns à própria realidade. No tópico **Orientações, comentários e sugestões** deste **Suplemento para o professor**, são apresentadas diversas situações que permitem ao professor promover, com os estudantes, um debate acerca da importância da Etnomatemática.

A História da Matemática, como uma tendência de ensino, excede a descrição de fatos históricos ou a apresentação de biografias de matemáticos famosos. Esse ramo envolve a recuperação do processo histórico de construção do conhecimento matemático, favorecendo a contextualização dos objetos de conhecimento. Segundo Lopes e Ferreira (2013), uma dinâmica interessante para introduzir um novo conteúdo em sala de aula é proporcionar aos estudantes o contato com o desenvolvimento histórico desse conceito, apontando, sempre que possível, quais eram as condições sociais, econômicas e políticas que, possivelmente, levaram ao surgimento daquela ideia. Para Miguel e Miorim (2008), o professor pode buscar na História da Matemática o apoio de que necessita para atingir os objetivos pedagógicos que levem os estudantes a perceber:

> [...] (1) a matemática como uma criação humana; (2) as razões pelas quais as pessoas fazem matemática; (3) as necessidades práticas, sociais, econômicas e físicas que servem de estímulo ao desenvolvimento das ideias matemáticas; (4) as conexões existentes entre matemática e filosofia, matemática e religião, matemática e lógica etc.; (5) a curiosidade estritamente intelectual que pode levar à generalização e extensão de ideias e teorias; (6) as percepções que os matemáticos têm do próprio objeto da matemática, as quais mudam e se desenvolvem ao longo do tempo; (7) a natureza de uma estrutura, de uma axiomatização e de uma prova.
>
> [...]

MIGUEL, Antonio; MIORIN, Maria Ângela. *História na educação matemática*: propostas e desafios. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2008. p. 53.

Nesta coleção, a História da Matemática é abordada, sempre que oportuno, por meio de situações motivadoras, que propiciam o trabalho com os aspectos históricos dos conceitos envolvidos. Essas situações podem ser encontradas tanto no decorrer das teorias quanto nos enunciados das tarefas propostas.

A Investigação matemática, por sua vez, consiste no trabalho com situações abertas, isto é, situações em que a questão principal não está bem definida. Visto que os estudantes podem tomar diferentes pontos de partida, é provável que os resultados obtidos também sejam diferentes ao final do processo de investigação. O desenvolvimento de atividades de investigação envolve quatro momentos distintos: exploração e formulação de questões; conjecturas; testes e reformulação; justificação e avaliação (PONTE; BROCADO; OLIVEIRA, 2016). Em um primeiro momento, os estudantes devem reconhecer e explorar a situação-problema proposta, além de formular questões que serão investigadas no decorrer desse processo. Em um segundo momento, eles são levados a organizar os dados coletados e propor conjecturas com base nas informações obtidas até então. Depois, eles devem testar tais conjecturas, verificando sua validade e reformulando-as, caso necessário. Por fim, devem justificar essas conjecturas, avaliando o raciocínio desenvolvido e os resultados obtidos.

Nesta coleção, a Investigação matemática é trabalhada em contextos nos quais os estudantes são levados a: investigar algoritmos e representá-los por meio de um fluxograma; elaborar enunciados de problemas, nos quais eles devem investigar questões parecidas que envolvam os conceitos estudados, tomando-os como base para criar uma nova situação; investigar propriedades matemáticas e estabelecer relações entre diferentes conceitos, de modo a formular conjecturas e validá-las sempre que necessário; entre outros casos.

Outra tendência no ensino de Matemática é a Resolução de problemas, que consiste em trabalhar com situações cujos procedimentos que permitem sua resolução não estão predefinidos. Em primeiro lugar, é preciso definir o conceito de problema. Para Onuchic e Allevato (2011), problemas são situações nas quais não se sabe o que fazer, mas há interesse em solucioná-las. Em outras palavras, são situações que levam o estudante a pensar em algum procedimento de resolução que ainda não está bem definido. Polya (1995), ao tratar da Resolução de problemas no ensino de Matemática, propõe uma heurística de resolução, isto é, resolver um problema consiste em seguir determinadas etapas. O primeiro passo é compreender o problema interpretando o enunciado. Em seguida, elabora-se um plano de resolução, no qual é possível identificar procedimentos matemáticos que podem ser úteis. Definido o plano, deve-se colocá-lo em execução, encontrando uma solução para o problema. Por fim, a última etapa consiste na comparação dos resultados obtidos com o enunciado do problema, verificando todos os procedimentos utilizados e analisando se a solução é consistente com o que foi solicitado.

Nesta coleção, a Resolução de problemas é abordada na seção **Resolvendo por etapas**, em que são apresentadas situações que complementam os conteúdos trabalhados no **Livro do Estudante**. Por meio de orientações específicas detalhadas em algumas etapas, os estudantes são levados a determinar a resposta do problema proposto. Dependendo do que o professor julgar conveniente, o trabalho com essa seção poderá ser desenvolvido individualmente ou em grupos.

As atividades de cunho predominantemente investigativo, que não têm procedimentos de resolução já determinados, não se restringem apenas à Resolução de problemas ou à Investigação matemática. A Modelagem matemática, como tendência de ensino, também tem como base as atividades investigativas. Porém, o que a diferencia das outras tendências é o fato de que as atividades abordam situações do mundo real, em contextos próximos à realidade dos estudantes. Nesse sentido, ao trabalhar com uma tarefa na perspectiva da Modelagem matemática, os estudantes têm como ponto de partida uma situação-problema cujo contexto está relacionado ao mundo real e cujos dados só serão conhecidos por meio da coleta de informações. Essa etapa leva os estudantes a elaborar problemas que serão investigados por meio da Matemática, resultando em um modelo formado por um sistema conceitual expresso em linguagem matemática. A construção desse modelo matemático requer que os estudantes criem estratégias que os auxiliem na resolução do problema, mesmo que tais estratégias não sejam determinadas *a priori*. Por fim, é necessário que eles determinem a resolução do problema por meio do modelo matemático elaborado, cuja resposta será confrontada com o enunciado, buscando possíveis divergências de valores. Essa interpretação do resultado pode resultar em uma solução que satisfaça o problema ou, então, em uma solução que não seja condizente com as informações previamente apresentadas. Neste último caso, é necessário orientar o estudante a retomar os procedimentos a fim de encontrar o erro cometido e, assim, executá-los novamente com o intuito de encontrar a solução correta. Esse tipo de atividade, além de proporcionar uma aprendizagem significativa, pode causar motivação nos estudantes, visto que são estudadas situações do cotidiano deles. O desenvolvimento de atividades sob a luz da Modelagem matemática exige que o professor desempenhe o papel de orientador, tornando o estudante o próprio protagonista de seu processo de aprendizagem.

Apesar das diferentes características entre as tendências citadas, todas elas destacam o papel do professor distinto do modelo usual de ensino. Quando inserido em atividades com as características descritas, ele deve se tornar um mediador do ensino, na intenção de fazer com que os estudantes utilizem suas habilidades e técnicas na resolução dos problemas e/ou situações que surgirem. Nesse sentido, há dois caminhos que podem ser percorridos: primeiro, o professor encaminha os estudantes na resolução do problema por meio de dicas e orientações que, na verdade, não os auxiliam no desenvolvimento do raciocínio crítico; segundo, o professor, por meio de questionamentos, auxilia os estudantes na resolução da situação proposta sem revelar a solução do problema inicial. Em qualquer caso, cabe ao professor utilizar todo o conhecimento relacionado à sua prática pedagógica para refletir acerca do caminho mais adequado para aquela situação, de acordo com o trabalho que estiver sendo desenvolvido.

O computador e o ensino da Matemática

Os computadores, celulares, *tablets* e outros dispositivos eletrônicos estão presentes em qualquer ambiente, inclusive na sala de aula. Assim, é de se esperar que tais equipamentos passem a fazer parte do cotidiano escolar dos estudantes, contrariando grande parte da população que considera instrumentos escolares apenas a lousa, o giz e o livro didático.

Enquanto alguns professores encaram os equipamentos tecnológicos como eficazes transmissores de conhecimento (informática na educação), outros ainda acreditam que deveria ser criado um componente curricular específico no currículo escolar dos estudantes com o intuito de auxiliá-los a manipular tais equipamentos (educação informática). Mas qual seria a diferença entre esses dois conceitos?

De maneira geral, o objetivo da educação informática é preparar o indivíduo para o mercado de trabalho, ensinando-lhe alguns conceitos computacionais, os fundamentos sobre como um computador funciona e o uso de alguns *softwares* para trabalhos específicos. Já em relação à informática na educação, o computador assume outro papel: sua inserção na rotina escolar tem participação no processo de ensino e aprendizagem. Nesse caso, é possível obter e trocar informações, desenvolver conceitos, entre outras possibilidades.

Focando no segundo conceito, informática na educação, podem surgir algumas perguntas que merecem reflexão.

- De quais maneiras é possível inserir o computador no ambiente escolar?
- Que tipo de contribuição esse instrumento pode trazer para o processo de ensino e aprendizagem?
- Quais são os *softwares* mais adequados para o trabalho em sala de aula?
- Que cuidados devemos ter para que o computador seja uma ferramenta efetiva utilizada para fins educativos?

As respostas para essas e outras perguntas devem surgir de acordo com o planejamento do projeto pedagógico da escola, tendo em vista os objetivos a serem alcançados.

O uso de um computador como recurso didático requer muito mais do que a simples instalação desse equipamento e de como os professores farão uso dele. É necessário que eles sejam capazes de extrair todo o potencial desse equipamento no ambiente escolar. Com o objetivo de alcançar resultados cada vez mais satisfatórios, ao trabalhar com o auxílio da tecnologia, o professor deve explorá-la como uma ferramenta pedagógica capaz de auxiliar no processo de ensino e aprendizagem. É importante enfatizar que, diante de todas essas transformações, o professor em sala de aula deixa de ser apenas um transmissor de informações para ser mediador do processo de ensino e aprendizagem.

Em certos momentos, especificamente nas aulas de Matemática, a utilização de alguns *softwares* pode facilitar algumas dinâmicas em sala de aula ou propiciar a exploração de algo que seria inviável sem esses recursos. Os *softwares* contribuem de maneira significativa no processo de ensino e aprendizagem, pois são interativos, promovem maior abertura para o desenvolvimento da criatividade dos estudantes, estimulam a pesquisa e auxiliam na construção de um saber coletivo. Portanto, quanto maior a gama de *softwares* distintos conhecidos pelo professor, mais rica, dinâmica e produtiva será a aula ministrada.

Nesta coleção, alguns temas relacionados ao uso do computador em sala de aula são abordados em diversos momentos. Por exemplo, na seção **Acessando tecnologias** são apresentados *softwares* e outros recursos tecnológicos que complementam o ensino dos conteúdos abordados no **Livro do Estudante**. O trabalho com essa seção poderá ser realizado no laboratório de informática da escola ou, ainda, proposto como tarefa extraclasse.

Interdisciplinaridade

A interdisciplinaridade "é o conjunto de relações, interações, diálogos estabelecidos no espaço escolar por diferentes disciplinas" (STECANELA, 2013, p. 27). Ela surgiu pela necessidade de enfrentar a fragmentação disciplinar em que as ciências se dividiram, procurando favorecer a construção de um conhecimento integrador. Nesse sentido, entende-se que o trabalho interdisciplinar é uma abordagem pedagógica que integra conhecimentos de diferentes disciplinas, promovendo a articulação entre os componentes curriculares, permitindo que os estudantes percebam as relações entre diferentes áreas do saber.

> [...]
>
> As vivências interdisciplinares preveem ações articuladas entre os vários campos do conhecimento sistematizado ao integrarem a realidade vivida pelos alunos e ao promoverem a interação entre os educadores que devem estar comprometidos com a ética, com a profissão e, especialmente, com a realidade sociopolítica, construindo uma atitude integrada no desenvolvimento da prática pedagógica, prevendo superar a produção do conhecimento fragmentado na formação do cidadão.
>
> [...]

STECANELA, Nilda. Ler e escrever na EJA: práticas interdisciplinares. *Caderno de EJA*. Caxias do Sul: Educs, 2013. p. 25.

Sendo assim, é salutar destacar que, além de integrar conteúdos, o trabalho interdisciplinar envolve atitude e postura interdisciplinares e se associa a processos de investigação, envolvimento, responsabilidade e troca. A importância desse trabalho no Ensino Médio reside no desenvolvimento de relações múltiplas sobre um saber com base em vivências significativas. Ao conectar diferentes áreas do conhecimento, os estudantes desenvolvem habilidades críticas e analíticas, necessárias para enfrentar os desafios do mundo contemporâneo. A interdisciplinaridade também favorece a formação integral, preparando os jovens para a vida acadêmica e profissional, em que a capacidade de integrar conhecimentos de diversas fontes é cada vez mais valorizada. Além disso, essa abordagem favorece a colaboração e o trabalho em equipe, fundamentais para o desenvolvimento de competências socioemocionais.

Para que a interdisciplinaridade seja efetiva, é fundamental que ela considere as diversas culturas juvenis e as vivências dos estudantes do Ensino Médio, utilizando nas situações de ensino contextos vinculados à realidade próxima deles. A aprendizagem se torna mais relevante quando os estudantes podem relacionar os conteúdos escolares com as próprias experiências e os próprios interesses. Projetos que envolvam questões locais, culturais ou sociais, por exemplo, permitem que eles vejam a aplicação prática do que aprendem e se sintam mais motivados.

A articulação da Matemática com os componentes curriculares da área do conhecimento de Ciências da Natureza e suas Tecnologias pode ser implementada por meio de projetos que integram conhecimentos para solucionar problemas complexos. Por exemplo, um projeto sobre sustentabilidade ambiental pode envolver cálculos matemáticos para medir a eficiência energética, princípios físicos para entender os processos de produção de energia, conceitos químicos para analisar a poluição e fundamentos biológicos para avaliar os impactos nos ecossistemas. Essa abordagem não só fortalece as competências específicas das áreas, mas também promove uma compreensão integrada dos fenômenos naturais e tecnológicos, contribuindo para a formação integral dos estudantes.

Apesar dos benefícios, a implementação da interdisciplinaridade enfrenta vários desafios. Uma dificuldade importante reside na estrutura tradicional das escolas, que muitas vezes segmenta as disciplinas e limita a colaboração entre os professores. Além disso, a falta de formação específica para docentes e a resistência a mudanças metodológicas podem dificultar a mobilização dessa abordagem. Para superar esses desafios, é essencial promover uma cultura escolar que valorize a inovação pedagógica, oferecendo formação continuada e incentivando a colaboração entre os educadores.

O papel do professor é determinante na implementação da perspectiva interdisciplinar. Como mediador, o professor deve reconhecer a aula como um momento com cultura própria, incentivar a curiosidade e a autonomia de pensamento dos estudantes, estar aberto a novas metodologias e buscar constantemente refletir sobre suas práticas pedagógicas. A colaboração entre os professores de diferentes componentes curriculares é vital para o sucesso da interdisciplinaridade, pois permite a troca de experiências e a cocriação de projetos integrados que enriqueçam os processos de ensino e de aprendizagem.

A BNCC enfatiza a importância da interdisciplinaridade para o desenvolvimento das competências gerais dos estudantes. Segundo ela, a integração entre as áreas do conhecimento é essencial para a construção de uma educação mais contextualizada, diversa e significativa. A BNCC orienta que as escolas adotem práticas pedagógicas que favoreçam a conexão entre os saberes, incentivando uma abordagem integrada e colaborativa do currículo.

Nesta coleção, a interdisciplinaridade é promovida por meio de tarefas e projetos que conectam os conteúdos matemáticos com outras áreas do conhecimento. Os conteúdos são abordados, sempre que possível, com base em contextos reais e próximos à realidade dos estudantes. A abordagem interdisciplinar visa fortalecer as competências matemáticas, desenvolver habilidades críticas e analíticas e preparar os estudantes para enfrentar os desafios acadêmicos e profissionais de maneira ética, consciente, inclusiva e responsável.

Pensamento computacional

Vivemos em uma sociedade na qual a presença das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) provoca importantes transformações em diversos setores, como na economia, na cultura e na educação. Nesse caso, é importante trabalharmos com programação e conceitos oriundos da ciência da computação, pois, assim, desenvolve-se, por exemplo, capacidades relacionadas ao pensamento computacional.

Mas o que é o pensamento computacional?

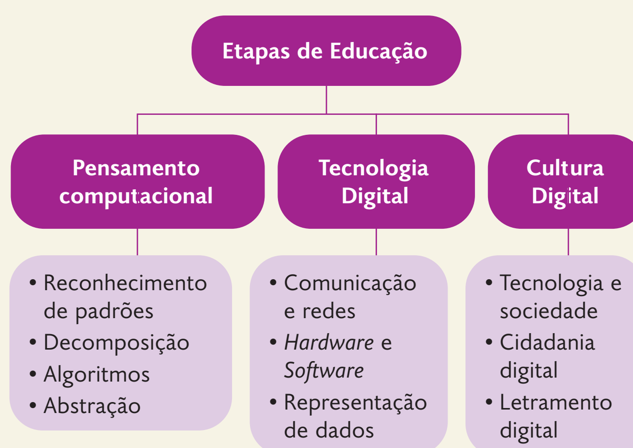
> [...] Pensamento computacional é uma forma para seres humanos resolverem problemas; não é tentar fazer com que seres humanos pensem como computadores. Computadores são tediosos e enfadonhos; humanos são espertos e imaginativos. Nós humanos tornamos a computação empolgante. Equipados com aparelhos computacionais, usamos nossa inteligência para resolver problemas que não ousaríamos sequer tentar antes da era da computação e construir sistemas com funcionalidades limitadas apenas pela nossa imaginação;
>
> [...]

WING, Jeannette. Computational Thinking. Tradução: Cleverson Sebastião dos Anjos. *Communications of the ACM*, n. 3, 2006. p. 4. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/4711. Acesso em: 5 out. 2024.

Um dos eixos do currículo de referência em tecnologia e computação, do Centro de Inovação para a Educação Brasileira (Cieb), é o pensamento computacional, o qual disserta sobre a resolução de problemas que envolvem tecnologias digitais considerando quatro pilares: decomposição, reconhecimento de padrões, abstração e algoritmo (CIEB, 2018; BRACKMANN, 2017).

- **Decomposição:** decompor o problema em problemas menores, conhecidos como subproblemas, mais fáceis de serem resolvidos.
- **Reconhecimento de padrões:** analisar os subproblemas individualmente, com o objetivo de reconhecer padrões e identificar características comuns que ajudam na sua resolução.
- **Abstração:** filtrar, classificar e organizar as informações relevantes ao considerar apenas os dados essenciais para a resolução do problema e ignorar as informações irrelevantes, atingindo uma generalização dos padrões identificados.
- **Algoritmo:** construção de estratégias ou instruções claras e ordenadas que auxiliam a resolução dos subproblemas e, consequentemente, a obter a solução do problema principal.

Para mais informações a respeito do currículo de referência em tecnologia e computação, acesse o *site* do Cieb. Disponível em: https://curriculo.cieb.net.br/assets/docs/Curriculo_de_Referencia_em_Tecnologia_e_Computacao.pdf. Acesso em: 5 out.2024.



Fonte de pesquisa: CENTRO DE INOVAÇÃO PARA A EDUCAÇÃO BRASILEIRA (CIEB). *Currículo de referência em tecnologia e computação*. Disponível em: https://curriculo.cieb.net.br/. Acesso em: 5 out.2024.

Como estratégia didática para o desenvolvimento do pensamento computacional, os conceitos relacionados à linguagem de programação, quando o contexto assim solicitar, podem ser utilizados de modo contextualizado a fim de que os estudantes exercitem sua aprendizagem e autonomia para estabelecer relações com situações do cotidiano. O uso de simulações, *softwares* ou equipamentos específicos, por exemplo, pode levar os estudantes a estudar determinados fenômenos reais que dificilmente seriam possíveis sem o auxílio desses recursos.

No Ensino Médio, ao trabalhar com abordagens que desenvolvem o pensamento computacional, deve-se planejar a maneira como as atividades propostas serão efetuadas, considerando diferentes perfis de estudantes, bem como as características de cada turma, além de fazer uso dos recursos disponíveis no ambiente escolar e de perseguir os objetivos a serem alcançados.

Sabe-se que as escolas públicas brasileiras, muitas vezes, não possuem o aparato tecnológico e computacional necessário para o desenvolvimento de atividades com essas tecnologias. Nesses casos, o professor deve recorrer ao trabalho com o pensamento computacional sem o auxílio de recursos tecnológicos, conhecido como pensamento computacional desplugado, ou *unplugged*. Segundo Brackmann (2017), essa alternativa, por ser de fácil aplicação em diferentes realidades, foi pensada justamente com o intuito de atender às escolas públicas que não possuem condições socioeconômicas de ter acesso a computadores ou outras tecnologias. Desse modo, o professor pode aplicar abordagens lúdicas, como truques de mágica e competições entre os estudantes ou, ainda, usar objetos manipuláveis, como jogos (de tabuleiro, de cartas, de peças), livros, fichas, figuras e, até mesmo, o próprio material escolar dos estudantes.

Além disso, de acordo com a BNCC, o pensamento computacional:

> [...] envolve as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos; [...]
>
> [...]

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular*. Versão final. Brasília: MEC, 2018. p. 474. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf. Acesso em: 5 out. 2024.

Assim, nesta coleção, o pensamento computacional é incentivado eventualmente: em tarefas que envolvem a organização do pensamento; no registro e na análise de resultados e dados por meio de planilhas e gráficos; no uso de *softwares* de geometria dinâmica; nas construções de algoritmos e fluxogramas; por meio de linguagem de programação usando o *software* Scratch.

O estudante no centro do processo de aprendizagem

Nas últimas décadas, o advento da tecnologia e as discussões envolvendo novos métodos de ensino têm gerado grandes desafios aos professores e às escolas. Estruturas de ensino tradicionais, nas quais professores transmitem conhecimentos aos estudantes, têm sido cada vez mais questionadas quanto ao seu papel efetivo no processo de ensino e aprendizagem.

Nesse sentido, as metodologias ativas são uma maneira de transformar essa realidade, engajando o estudante e tornando o processo de ensino e aprendizagem mais significativo.

As metodologias ativas

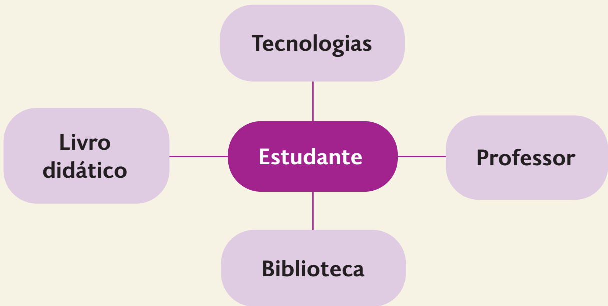
As estratégias de metodologias ativas são um processo de ensino e aprendizagem em que o estudante é o protagonista da construção do conhecimento, tendo o professor como mediador para atingir um objetivo de aprendizagem de modo interativo, dinâmico, reflexivo e colaborativo.

Nesse tipo de abordagem, o professor deixa de ser o transmissor do conhecimento, passando a ser um mediador ao planejar as aulas com foco em orientar e incentivar os estudantes.

> [...] As metodologias ativas dão ênfase ao papel protagonista do estudante, ao seu envolvimento direto, participativo e reflexivo em todas as etapas do processo, experimentando, desenhando, criando, com orientação do professor [...]

MORAN, J. Metodologias ativas para uma aprendizagem mais profunda. *In*: BACICH, L; MORAN, J. (org.). *Metodologias ativas para uma educação inovadora*: uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso, 2018. p. 4.

Ao empregar estratégias de metodologias ativas no processo de ensino e aprendizagem, os estudantes são incentivados a construir o conhecimento de modo integrado às necessidades do cotidiano. Nesse processo, é possível agregar o uso de recursos diversos, como o livro didático usado em sala de aula, os livros disponíveis na biblioteca e os recursos provenientes da tecnologia, como o computador, o celular, a internet e as plataformas digitais.



Considerando esse contexto, esta coleção busca explorar diferentes estratégias de metodologias ativas por meio de tarefas que incentivam o protagonismo dos estudantes. No tópico **Orientações, comentários e sugestões** deste **Suplemento para o professor**, sempre que conveniente, sugere-se o trabalho com a estratégia de metodologia ativa mais adequada para ser adotada naquele contexto específico.

Estratégias

Gallery walk (Caminhada na galeria)

Gallery walk é uma estratégia que desenvolve a habilidade de síntese e estimula a interação, o trabalho em equipe e a socialização do conhecimento. Nela, os estudantes exibem seus trabalhos em cartazes que devem ser afixados em paredes, como obras de arte em uma galeria. Em seguida, a turma circula pela sala, observando os cartazes afixados, debatendo e refletindo sobre o tema proposto.

Há diversas possibilidades de condução dessa estratégia: trabalhos individuais apresentados enquanto a turma percorre a "galeria" em conjunto; circulação livre dos estudantes pela "galeria", colando notas adesivas nos cartazes com dúvidas ou sugestões; entre outras.

Essa dinâmica pode ser aplicada na apresentação, revisão ou mesmo na avaliação de conteúdos. Cabe ao professor definir os objetivos e o tema a serem trabalhados, orientando a turma em relação à tarefa. Durante o processo, o docente assume o papel de observador, permitindo que os estudantes se organizem e intervindo somente se for necessário. Ao final, é importante promover um debate geral com a turma ou fazer uma breve explanação sobre os trabalhos e o processo da *Gallery walk*.

Think-pair-share (Pensar-conversar-compartilhar)

Think-pair-share é uma estratégia de aprendizagem cooperativa que consiste em pensar, individualmente, sobre uma questão ou um problema levantado pelo professor, compartilhar o raciocínio individual com um colega e, em seguida, socializar com um grupo maior os pensamentos e as conclusões aos quais a dupla chegou.

Essa estratégia favorece os estudantes que não se sentem à vontade em compartilhar suas opiniões ou seus conhecimentos com a turma ou com um grupo, mas são capazes de conversar com um colega sobre determinada situação antes de se posicionar diante de um grupo maior.

- *Think*: o professor expõe o problema e o estudante reflete individualmente sobre a situação.
- *Pair*: o estudante reúne-se com um colega para trocar percepções sobre a situação. É interessante que as duplas sejam definidas antes de a questão ser exposta, a fim de que as reflexões dos estudantes não sejam interrompidas para que eles encontrem um par.
- *Share*: as duplas se unem em grupos maiores para compartilhar as conclusões a que chegaram após a discussão conjunta. O grupo discute todas as percepções e chega a uma nova síntese das ideias com base na discussão coletiva. Em outro modelo de socialização, o professor pode pedir a algumas duplas que compartilhem suas conclusões com toda a turma.

Essa estratégia desenvolve habilidades de oralidade e argumentação, além de incentivar os estudantes a ouvir e respeitar diferentes opiniões.

Quick writing (Escrita rápida)

Quick writing é uma estratégia que consiste em escrever uma resposta relacionada a um conteúdo em, no máximo, cinco minutos.

Essa dinâmica desenvolve a fluência na escrita e a capacidade de síntese. A pergunta é feita pelo professor e pode se relacionar tanto aos assuntos estudados quanto à vivência dos estudantes. É possível aplicar essa estratégia baseando-se em abordagens como: explicação de conceitos ou vocabulários de um texto; formulação de hipóteses; ou inferências e explanação de conhecimentos prévios.

Argumentação e inferência

A argumentação e a inferência são pilares importantes para o desenvolvimento do pensamento crítico e do pensamento científico dos estudantes. Essas habilidades favorecem a compreensão dos conteúdos e desempenham um papel significativo na formação cidadã. A argumentação permite que os estudantes construam e expressem opiniões com base em dados científicos e princípios éticos, promovendo um entendimento profundo e crítico da realidade. A inferência, por sua vez, facilita a análise e a avaliação de informações, ajudando os estudantes a desenvolver uma visão ampla e fundamentada sobre os temas discutidos. Juntas, essas habilidades contribuem para uma aprendizagem significativa e para a formação de cidadãos informados e participativos.

Fiorin (2015) considera que um argumento são proposições destinadas a fazer admitir-se uma dada tese. Argumentar é construir um discurso que tem a finalidade de convencer. A argumentação, portanto, pode ser vista como um processo de construção de discurso. Promover práticas fundamentadas em dados científicos e princípios éticos é essencial para garantir que os estudantes desenvolvam uma capacidade argumentativa sólida e responsável. Por meio da argumentação bem fundamentada, eles podem aprender a analisar situações de forma coerente e ética.

Inferência é a capacidade intelectual de se afirmar a verdade de uma proposição com base em informações disponíveis ou outras proposições já consideradas verdadeiras. O desenvolvimento da capacidade inferencial permite aos estudantes analisar e avaliar informações de maneira crítica, favorecendo um entendimento abrangente e profundo dos conteúdos estudados. Ao aprender a fazer inferências, os estudantes desenvolvem habilidades de análise e síntese, essenciais para a construção de argumentos robustos e para a resolução de problemas complexos.

Diversas atividades e estratégias podem ser empregadas para desenvolver as habilidades argumentativas e inferenciais dos estudantes. Debates estruturados, estudos de caso, simulações e produções de vídeos, por exemplo, permitem que os estudantes pratiquem a construção e a defesa de argumentos ao mesmo tempo que aprendem a ouvir e considerar diferentes pontos de vista. É importante que o professor incentive essas interações em um ambiente respeitoso e que acolhe os diferentes pontos de vista.

A análise crítica de textos também é uma estratégia profícua, pois ajuda os estudantes a identificar e avaliar argumentos, além de detectar falácias e fragilidades argumentativas. Outras práticas, como a pesquisa, a elaboração de relatórios e a apresentação de seminários, promovem a mobilização prática das habilidades argumentativas e inferenciais, contribuindo com a aprendizagem.

Nessa perspectiva, trabalhar com textos, reportagens e postagens em redes sociais pode ser uma opção interessante para ajudar os estudantes a identificar digressões, generalizações indevidas e incoerências. Essa análise crítica permite que os estudantes desenvolvam uma compreensão sobre como construir e avaliar argumentos de forma coerente e fundamentada. A prática contínua dessa habilidade contribui para o aprimoramento da capacidade argumentativa dos estudantes e para a construção de um pensamento crítico e analítico.

Para apoiar o desenvolvimento das habilidades argumentativas e inferenciais, é fundamental utilizar uma variedade de abordagens e práticas diversificadas. Além disso, é importante considerar os diferentes perfis e necessidades dos estudantes, ajustando as práticas pedagógicas para garantir que todos possam participar e se beneficiar das atividades propostas. Nesse sentido, a contextualização das atividades de argumentação e inferência é central para atender às necessidades e aos perfis diversos.

É importante, ainda, que o professor estabeleça uma reflexão contínua sobre a adequação das práticas utilizadas, para garantir que todos os estudantes desenvolvam suas habilidades argumentativas e inferenciais de maneira apropriada. O professor deve, também, avaliar regularmente as estratégias e as atividades implementadas, ajustando-as conforme necessário para melhorar os resultados da aprendizagem. Essa abordagem reflexiva e adaptativa permite que o ensino seja consistente e acolhedor. A prática da reflexão crítica é um componente importante para assegurar que a formação integral dos estudantes seja alcançada.

A avaliação

A etapa escolar do Ensino Médio busca o desenvolvimento **integral** dos estudantes. Os objetivos pedagógicos, portanto, de acordo com as orientações da BNCC, devem propiciar o desenvolvimento de **competências** não apenas no sentido de **saber**, mas principalmente de **saber fazer**. Desse modo, nesta coleção, os estudantes são envolvidos em situações de estudo que perpassam suas necessidades e seus interesses, ampliam seus conhecimentos e permitem a mobilização desses conhecimentos visando atender às demandas do mundo onde vivem.

Portanto, a **avaliação das aprendizagens** desses estudantes, como parte indissociável do processo de ensino e aprendizagem, deve estar alinhada a esses objetivos na atividade escolar.

A prática avaliativa tem sido cada vez mais reconhecida por sua importância, pois auxilia o trabalho do professor, e por seu caráter legítimo na validação da condução didático-pedagógica. Desse modo, faz-se necessário compreender a essência de algumas modalidades de avaliação e implementá-las de acordo com os objetivos definidos para cada momento do processo de ensino e aprendizagem.

Avaliação diagnóstica

Toda avaliação tem caráter diagnóstico, pois tende a obter informações sobre a aprendizagem dos estudantes. Essa é uma prática muito importante ao iniciar um conteúdo, pois, por meio dela, é possível identificar os conhecimentos prévios de cada um. Desse modo, é possível tomar decisões sobre seu planejamento de ensino, caso seja necessário complementá-lo ou resumi-lo.

Avaliação somativa

Em geral, é aplicada ao final do estudo de um conteúdo e pode valer-se de diferentes tipos de instrumentos. Fornece dados ou informações que sintetizam os avanços das aprendizagens dos estudantes em relação a tal conteúdo. Busca, de maneira pontual e conclusiva, sintetizar e registrar os resultados verificados, com finalidade informativa ou classificatória.

Avaliação formativa

É parte integrante de todo o processo de ensino e aprendizagem, pois busca melhorias na atividade em curso. Oferece subsídios que respaldam a interferência no processo de atuação do professor e de aprendizagem dos estudantes, com vistas ao seu aprimoramento. Desse modo, permite a retomada e a revisão de conceitos e temas, além do ajuste da prática pedagógica.

Avaliação comparativa

Consiste em comparar o desempenho dos estudantes tendo como referência um padrão externo, um critério estabelecido, uma norma ou outros grupos de estudantes. Permite analisar o que os estudantes aprenderam em relação ao que deveria ter sido ensinado, e seus resultados podem auxiliar o professor na tomada de decisões a respeito de sua prática pedagógica. Pode ser feita por meio de provas padronizadas, simulados, relatórios e exames de larga escala.

Avaliação ipsativa

O progresso do estudante é analisado tendo como referência o próprio estudante. Em vez de compará-lo com os outros, observa-se como ele evoluiu em relação a si mesmo, levando em conta suas próprias metas e seus objetivos de aprendizagem. O foco, portanto, está no desenvolvimento individual, na evolução e no crescimento pessoal do estudante.

Avaliação em larga escala

Tendo como responsável o Ministério da Educação, as avaliações em larga escala são elaboradas por instituições vinculadas ao governo. Seu principal objetivo é avaliar e monitorar a situação da educação no país. Por meio dos diagnósticos obtidos, é possível orientar reformas e apoiar políticas públicas que visem a melhoria do sistema educacional brasileiro. O Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), o Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb) e a Prova Brasil são exemplos de avaliações em larga escala nacionais.

A avaliação e o trabalho do professor

Alguns fatores são fundamentais para que a prática avaliativa possa contribuir de modo efetivo com o professor em seu trabalho diário.

A avaliação e a prática pedagógica

É possível observar casos de práticas avaliativas que se limitam, na maioria das vezes, a uma verificação resumida de notas, seguida de progressão e certificação. Essas práticas, em geral, estão relacionadas a encaminhamentos pedagógicos em que o professor é um transmissor de conhecimento e os estudantes, meros receptores. Por outro lado, em algumas metodologias, nas quais o estudante assume parte importante no processo de construção e ampliação de seu conhecimento, a avaliação preocupa-se mais com "como" o estudante aprende e menos com "o que" ele aprende. Portanto, o acompanhamento das aprendizagens dos estudantes está intrinsecamente relacionado à **opção teórico-metodológica** escolhida, ou seja, o modo como se avalia diz muito sobre o modo como se ensina, e vice-versa.

Uma prática constante

A avaliação não deve ser estanque ou limitada a determinados momentos. Uma prova ao final do estudo de um conteúdo não é suficiente para obter todas as informações necessárias sobre a aprendizagem de cada estudante. Desse modo, a **diversificação** de dinâmicas e instrumentos de avaliação, assim como o registro das informações que ela fornece sobre o processo de aprendizagem, devem ser analisados e confrontados constantemente, a fim de embasar o prosseguimento do trabalho do professor.

Há diferentes maneiras de **registrar** a trajetória dos estudantes em relação à sua aprendizagem. Muitos professores fazem relatórios de observação diária, constroem um portfólio ou anotam comentários em um diário de aulas. Esses registros podem conter descrições ou conceitos que indiquem o progresso ou as dificuldades dos estudantes de maneira individual, em pequenos grupos ou de toda a turma. Com base neles, é possível decidir sobre a retomada de explicações, sugestões de leituras ou atividades paralelas, que auxiliem o acompanhamento dos estudantes em relação aos objetivos de aprendizagem estabelecidos. Esse **aspecto qualitativo** da prática avaliativa exige do professor uma postura ativa, reflexiva e reguladora em relação ao processo de ensino e aprendizagem. E, portanto, é inevitável que a avaliação seja **constante** e esteja inserida em diversos momentos desse processo.

A seguir, apresentamos um modelo de **relatório** que pode auxiliar no acompanhamento da aprendizagem dos estudantes. Lembramos que esse relatório figura como modelo que pode (e deve) ser adaptado de acordo com as necessidades e a realidade de trabalho de cada turma ou escola.

Modelo de relatório de acompanhamento da aprendizagem

Nome do estudante ____

Componente curricular ______________________________ **Ano** __________

Período letivo do registro ____________________________ **Turma** __________

Objetivos, habilidades da BNCC e atividades propostas avaliadas

Objetivos/habilidades ou atividades propostas	NÃO consegue executar	Executa com DIFICULDADE	Executa com FACILIDADE	Apresentou progressos	NÃO apresentou progressos
Reconhecer algumas unidades de medida de base do Sistema Internacional de Unidades (SI).					
EM13MAT103					
Síntese conclusiva da utilização de diferentes unidades de medida de base pertencentes ou não ao SI.					

Observações: ____

Instrumentos de avaliação diversificados

Independentemente do instrumento de avaliação que o professor decida utilizar, é fundamental que os objetivos a serem atingidos estejam bem definidos. Obter **indicadores** da aprendizagem dos estudantes deve ser a essência de cada instrumento de avaliação elaborado pelo professor. Portanto, provas objetivas ou discursivas, seminários, produções de textos, sínteses de pesquisas, debates, dramatizações, produção de esquemas ou desenhos e trabalhos em grupo ou individuais estão entre as variações possíveis.

Quanto ao professor, é preciso esclarecer os **objetivos** de ensino a serem investigados em relação à aprendizagem dos estudantes. Já os estudantes devem receber, por parte do professor, toda e qualquer **orientação** possível sobre a dinâmica proposta, de modo que estejam conscientes a respeito de como e quando serão avaliados.

Mas por que a avaliação deve ter essa **diversificação**? Porque os estudantes são diferentes, aprendem de maneiras distintas e expressam-se também de modos diversos. Alguns têm mais facilidade em aprender ouvindo explicações, enquanto outros precisam ler textos, resumos ou esquemas. Há aqueles que demonstram o que sabem por meio de conversas ou debates, mas apresentam dificuldade para se expressar por meio da escrita. Enquanto alguns têm facilidade em compreender raciocínios lógico-matemáticos, outros têm destreza na produção de textos.

A variedade de estratégias, como dinâmicas em grupo ou individuais, ou de participação anônima, por exemplo, também é um recurso que auxilia no trabalho com grupos de **diferentes perfis**. O incentivo à socialização e à junção de grupos heterogêneos, a relevância dos temas de estudos e o envolvimento dos jovens também são fatores que podem tornar eficaz o trabalho de professores e estudantes no processo de ensinar, aprender e avaliar.

A avaliação nesta coleção

Nesta coleção, a opção por um trabalho que destaque o protagonismo dos estudantes do Ensino Médio apresenta **oportunidades constantes** de avaliação do processo de ensino e aprendizagem, privilegiando **dinâmicas diversificadas**, em especial aquelas fundamentadas em **metodologias ativas**. Para tanto, no trabalho com as diferentes unidades temáticas, são propostas dinâmicas e tarefas variadas, com a exploração de diversos recursos (textuais e imagéticos), ocasiões que permitem o acompanhamento do professor em relação à aprendizagem dos estudantes.

Também são disponibilizadas, no tópico **Orientações, comentários e sugestões** deste **Suplemento para o professor**, diversas orientações com dicas pontuais, alinhadas aos objetivos de ensino e a uma avaliação formativa. Destacamos o boxe **Sugestão de avaliação**, que apresenta, em geral, orientações específicas para os momentos de avaliação, com sugestões de como obter informações a respeito da aprendizagem dos estudantes, e possibilidades de escolher o melhor procedimento a ser tomado.

Em alguns momentos, como no desenvolvimento da seção **Síntese do capítulo**, é possível propor aos estudantes que façam uma **autoavaliação**, ferramenta que colabora com o propósito de que eles assumam o protagonismo no processo de formação do conhecimento. Essa proposta de reflexão a respeito de sua aprendizagem, participação, limitações e potencialidades deve ser mediada pelo professor como um processo construtivo e positivo, para que não se encaminhe de modo depreciativo e interfira na autoestima dos estudantes. Ao contrário, deve ser encarada e assimilada como um procedimento de verificação dos caminhos possíveis para superar os diferentes desafios que a vida lhes colocará.

Em se tratando de desafios, esta coleção também se preocupa em preparar os estudantes para os **exames de larga escala**. Para isso, a condução dos estudos é norteada pelo objetivo de desenvolver **habilidades** e **competências** que permitam o embasamento em conhecimentos científicos, o exercício da criatividade, a resolução de problemas com base em saberes interdisciplinares e transdisciplinares, a valorização da cultura em suas diversas expressões, e expressar-se e argumentar por meio de diferentes linguagens, inclusive a tecnológica e a digital, agindo com respeito a si mesmo e aos outros, sempre com responsabilidade.

A BNCC E A COLEÇÃO

Cada volume desta coleção foi organizado e desenvolvido de maneira a contemplar as competências gerais, as competências específicas, as habilidades e os temas contemporâneos transversais elencados na BNCC, estabelecendo, sempre que possível, conexões com outras áreas do conhecimento. É possível perceber tais relações na maneira como os capítulos foram estruturados e abordados, nas questões de intervenção ao longo do desenvolvimento dos conteúdos, nas seções especiais e nas tarefas propostas no decorrer do **Livro do Estudante**. No tópico **Orientações, comentários e sugestões** deste **Suplemento para o professor** há o aporte para o desenvolvimento desse trabalho.

Sugestão de cronograma

Apresentamos, a seguir, três propostas de cronograma para elaborar o planejamento deste volume: uma bimestral, uma trimestral e outra semestral. No entanto, cabe ao professor a decisão de como utilizar o livro didático como apoio pedagógico, seguindo critérios de seleção dos capítulos e levando em consideração diversos fatores, como o projeto pedagógico da escola, as condições da turma, a carga horária e a grade curricular.

Sugestão de cronograma bimestral

1º bimestre	2º bimestre	3º bimestre	4º bimestre
Capítulo 1 (p. 14 a 65) Capítulo 2 (p. 66 a 85)	Capítulo 3 (p. 86 a 105) Capítulo 4 (p. 106 a 148)	Capítulo 4 (p. 149 a 159) Capítulo 5 (p. 160 a 187) Capítulo 6 (p. 188 a 215)	Capítulo 7 (p. 216 a 267)

Sugestão de cronograma trimestral

1º trimestre	2º trimestre	3º trimestre
Capítulo 1 (p. 14 a 65) Capítulo 2 (p. 66 a 85) Capítulo 3 (p. 86 a 105)	Capítulo 4 (p. 106 a 159) Capítulo 5 (p. 160 a 187)	Capítulo 6 (p. 188 a 215) Capítulo 7 (p. 216 a 267)

Sugestão de cronograma semestral

1º semestre	2º semestre
Capítulo 1 (p. 14 a 65) Capítulo 2 (p. 66 a 85) Capítulo 3 (p. 86 a 105) Capítulo 4 (p. 106 a 159)	Capítulo 5 (p. 160 a 187) Capítulo 6 (p. 188 a 215) Capítulo 7 (p. 216 a 267)

PANORAMA DO VOLUME

Quadro de conteúdos

O quadro a seguir apresenta os principais conceitos, as competências gerais, as competências específicas, as habilidades e os temas contemporâneos transversais trabalhados neste volume, organizados de acordo com cada capítulo, especificando também as competências específicas da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, quando forem abordadas. Com base nesse quadro, o professor poderá organizar as suas aulas de acordo com as necessidades e a realidade escolar em que trabalha e com os seus planejamentos.

Neste quadro, por exemplo:
CG1 indica a **Competência geral 1**.
CE2MAT indica a **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 2**.
CE3CNT indica a **Competência específica de Ciências da Natureza e suas Tecnologias 3**.

Quadro de conteúdos

Capítulo	Principais conceitos	Habilidades da BNCC	Competências gerais; Competências específicas de Matemática e suas Tecnologias; Competências específicas de Ciências da Natureza e suas Tecnologias	Temas contemporâneos transversais
1	Sistema Internacional de Unidades Tempo Comprimento Massa Área Volume Capacidade Velocidade média Algarismos significativos Capacidade de armazenamento Velocidade de transferência de dados Velocidade de processamento de dados	EM13MAT103 EM13MAT201 EM13MAT309 EM13MAT313 EM13MAT314 EM13MAT315	CG5 CG7 CE1MAT CE2MAT CE3MAT CE4MAT CE1CNT CE3CNT	Educação para o consumo Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras Educação em direitos humanos
2	Conjuntos Subconjuntos Operações com conjuntos Conjuntos numéricos Intervalos	EM13MAT315	CG1 CG4 CG10 CE3MAT	Educação em direitos humanos
3	Noção intuitiva de função O conceito de função Estudo do domínio de uma função Gráfico de uma função Zero de uma função Funções crescente, decrescente e constante Taxa de variação média	EM13MAT101 EM13MAT404	CG4 CG7 CG10 CE1MAT CE4MAT	Educação ambiental Educação para o consumo

4	Função afim Gráfico de uma função afim Zero de uma função afim Função afim crescente e função afim decrescente Estudo do sinal de uma função afim Proporcionalidade e função linear Modelo linear Função quadrática Gráfico de uma função quadrática Coeficientes de uma função quadrática Zeros de uma função quadrática Vértice de uma parábola Valor máximo ou valor mínimo de uma função quadrática Estudo do sinal de uma função quadrática Inequações do 1º e do 2º grau	EM13MAT101 EM13MAT302 EM13MAT401 EM13MAT402 EM13MAT404 EM13MAT501 EM13MAT502 EM13MAT503 EM13MAT506 EM13MAT510	CG2 CG4 CG5 CG7 CE1MAT CE3MAT CE4MAT CE5MAT CE3CNT	Educação financeira Educação fiscal Educação em direitos humanos
5	Potenciação Função exponencial Gráfico de uma função exponencial Equação e inequação exponenciais Função inversa e função logarítmica Gráfico de uma função logarítmica Equação e inequação logarítmica	EM13MAT304 EM13MAT305 EM13MAT403	CG2 CE1MAT CE3MAT CE4MAT CE1CNT CE3CNT	Saúde Educação ambiental
6	Sequências numéricas Progressão aritmética Fórmula do termo geral de uma PA PA e função afim PA e função quadrática Soma dos *n* primeiros termos de uma PA Progressão geométrica Fórmula do termo geral de uma PG PG e função Soma dos *n* primeiros termos de uma PG	EM13MAT507 EM13MAT508	CG1 CE5MAT	Saúde Vida familiar e social
7	Matemática financeira Porcentagem Indicadores econômicos Indicadores sociais Acréscimos e descontos sucessivos Juro simples e juro composto Equivalência de capitais Sistema Price Controle do orçamento familiar Decisões financeiras	EM13MAT104 EM13MAT203 EM13MAT303	CG2 CG7 CG10 CE1MAT CE2MAT CE3MAT CE1CNT	Saúde Educação financeira Educação fiscal Educação para o consumo Trabalho

ORIENTAÇÕES, COMENTÁRIOS E SUGESTÕES

Nesta seção do **Suplemento para o professor**, são oferecidos subsídios para o trabalho docente em sala de aula, além de orientações e comentários que podem enriquecer o processo de ensino e aprendizagem por meio de propostas de condução de momentos da aula, informações complementares e algumas sugestões de avaliação formativa.

CAPÍTULO 1

Grandezas e medidas

Nesse capítulo, são desenvolvidas, em diferentes situações, as seguintes unidades temáticas de Matemática: **Geometria e Medidas**, **Números e Álgebra**, **Probabilidade e Estatística**. Essas situações ocorrem, por exemplo, na interpretação e compreensão de textos científicos, nas possíveis conversões entre as unidades de medida e no uso de notação científica. Além disso, há ocorrências da inter-relação entre essas unidades temáticas, como no uso de algoritmos para descrever o tempo necessário do *download* de um arquivo; na organização de fluxogramas; na análise de tabelas e gráficos que apresentam medidas de informática.

Objetivos específicos

- Reconhecer algumas unidades de medida de base do Sistema Internacional de Unidades (SI).
- Revisar e aprofundar o conhecimento sobre algumas grandezas.
- Reconhecer e empregar unidades de medida de informática.

Justificativa

Diversas grandezas estão presentes em nosso cotidiano. Assim, faz-se necessário reconhecer e utilizar de maneira adequada as unidades de medida associadas a elas. Dada a importância desse conteúdo na vida do estudante, e com o intuito de atingir os objetivos citados, o presente capítulo traz o conceito de grandeza, já estudado no Ensino Fundamental, revisando o conteúdo sobre as principais unidades de medida de tempo, comprimento, massa, área, volume e capacidade. Além disso, apresenta o Sistema Internacional de Unidades, que formaliza as unidades de medida padronizadas para cada tipo de grandeza, e medidas em informática. Ao longo do capítulo, são discorridos conceitos, exemplos e tarefas que levam os estudantes a lidar, de maneira adequada, com as diferentes unidades de medida, interpretando-as e empregando-as em diversos contextos e situações do dia a dia.

Com relação ao conteúdo, ao propiciar uma abordagem mais madura e rigorosa quando comparada às primeiras noções estudadas no Ensino Fundamental, o estudo das unidades de medida no Ensino Médio busca levar os estudantes a perceber suas aplicações em inúmeras circunstâncias, tanto na vida cotidiana quanto nas ciências em geral. Desse modo, é esperado que eles sejam capacitados a interpretar e compreender textos científicos e até mesmo informações divulgadas pelas diferentes mídias, sob um olhar cada vez mais crítico quanto às informações apresentadas.

Página 15

A questão **2** tem como objetivo investigar os conhecimentos prévios dos estudantes acerca do conteúdo proposto no capítulo. Durante o trabalho com essa questão, faça perguntas, como: "Quais grandezas você estudou no Ensino Fundamental?"; "Quais unidades de medida de comprimento você conhece?"; "Já mediu sua massa em uma balança?"; "Como você faria para medir sua altura?"; "Qual unidade de medida utilizaria para expressar o resultado dessa medição?". Se julgar conveniente, peça a eles que façam uma síntese de seus conhecimentos relacionados a grandezas e medidas. Para isso, podem listar conceitos e construir mapas conceituais. Instigue-os a usar a criatividade.

Página 16

Diga aos estudantes que no SI as unidades são divididas em duas classes: unidades de base (consideradas independentes sob o ponto de vista dimensional: o metro, o quilograma, o segundo, o ampère, o kelvin, o mol e a candela) e unidades derivadas (unidades que, segundo relações algébricas, podem ser formadas combinando unidades de base).

O trabalho com essa página, em especial com a questão **C**, desenvolve aspectos da **Competência específica de Ciências da Natureza e suas Tecnologias 1** da BNCC, uma vez que questiona os estudantes sobre a importância da criação do Sistema Internacional de Unidades, ou seja, da padronização de unidades. A evolução dos conceitos e a necessidade de tornar as grandezas cada vez mais precisas ajuda a mostrar a valorização do conhecimento construído ao longo do tempo.

Páginas 19 e 20

Na tarefa **5**, ao escrever um algoritmo e organizá-lo em um fluxograma, é desenvolvida a habilidade **EM13MAT315**. Aproveite esse momento e oriente os estudantes a utilizar esse recurso como uma estratégia de estudo para aprimorar seus conhecimentos acerca da equivalência entre minuto e hora e hora e dia. Verifique se todos se recordam de que 1 h = 60 min e 1 dia = 24 h.

Após o trabalho com a tarefa **6**, estabeleça um tempo para que os estudantes possam refletir sobre os problemas do descarte incorreto de resíduos. Oriente-os a realizar a leitura dos **Objetivos da Agenda 2030** no início do **Livro do Estudante** e, em seguida, retomem o **Objetivo 12** trabalhado nessas páginas.

Com o objetivo de auxiliar os estudantes na pesquisa proposta no item **c** da tarefa **9**, informe que há *sites* que disponibilizam simuladores de consumo de energia elétrica, nos quais é possível calcular, de maneira aproximada, o valor da fatura mensal de acordo com alguns dados informados. Um exemplo de simulador pode ser acessado em: https://www.copel.com/scnweb/simulador/inicio.jsf#no-back. Acesso em: 9 ago. 2024.

Ao trabalhar com as tarefas **9**, **12** e **13**, explique aos estudantes que o valor da tarifa da fatura de energia elétrica pode variar de acordo com a localidade.

As tarefas **9**, **12** e **13** desenvolvem o trabalho matemático com as **Competências específicas de Ciências da Natureza e suas Tecnologias 1** e **3** da BNCC, ao realizar cálculos que possibilitam a análise de processos tecnológicos e a pesquisa de ações individuais que minimizam impactos socioambientais e melhoram condições de vida em âmbito local e regional. Além disso, permite a análise e a avaliação de tecnologias e soluções de demandas que envolvem o consumo de energia elétrica. Nessas tarefas, ao resolver problemas que envolvem grandezas determinadas pelo produto de outras, é desenvolvida a habilidade **EM13MAT314**.

Após o trabalho com a tarefa **13**, estabeleça um tempo para que os estudantes possam refletir sobre a economia de energia elétrica no dia a dia. Peça-lhes que citem as metas e o conteúdo principal do **Objetivo 12** da **Agenda 2030**. Depois, promova uma roda de conversa com a turma e solicite a cada estudante que apresente atitudes que podem contribuir para que esse objetivo seja alcançado. Partindo das reflexões sobre o impacto das ações humanas no consumo de recursos naturais e na importância do consumo sustentável para a saúde humana e o meio ambiente, os estudantes podem se conscientizar e desenvolver o pensamento crítico acerca desses temas.

Páginas 22 e 23

A tarefa **18** tem como objetivo proporcionar um momento enriquecedor de aprendizado, levando os estudantes a perceber que, embora a Matemática seja uma ciência exata, as técnicas matemáticas que os grupos de pessoas utilizam para suas atividades podem variar dependendo do contexto, da necessidade do momento e dos instrumentos de medição disponíveis. Esse tipo de reflexão é importante, pois permite a compreensão de que certos conceitos matemáticos também podem ser encarados como resultado da inventividade humana na resolução de problemas práticos, constituindo-se, assim, como verdadeiras ferramentas abstratas, mas nem por isso de menor importância.

O conhecimento matemático atrelado a diferentes contextos e culturas é estudado com mais afinco pela Etnomatemática. Para se inteirar mais quanto a esse assunto, leia o excerto a seguir.

> O programa etnomatemática é um programa de pesquisa que tem como foco entender como a espécie humana desenvolveu seus meios para sobreviver na sua realidade natural, sociocultural e imaginária, e para transcender, indo além da sobrevivência. Recorre à análise da história das ideias e à origem e evolução do comportamento e do conhecimento da espécie humana, em distintos ambientes naturais e socioculturais. A ideia central é a Etnomatemática, que surge do reconhecimento de que diferentes culturas têm maneiras diferentes de lidar com situações e problemas do cotidiano e de dar explicações sobre fatos e fenômenos naturais e sociais. [...]

D'AMBROSIO, Ubiratan. Etnomatemática, justiça social e sustentabilidade. *Estudos Avançados*, São Paulo, v. 32, n. 94, set./dez. 2018. p. 189. Disponível em: https://www.scielo.br/j/ea/a/FTmggx54SrNPL4FW9Mw8wqy/?lang=pt. Acesso em: 14 fev. 2024.

A Etnomatemática permite momentos de reflexão quanto a questões relacionadas ao papel social que as ciências exatas representam nas relações humanas e no progresso de suas tecnologias, bem como na compreensão da própria realidade.

A tarefa **20** apresenta um mapa com a Região Nordeste brasileira, tendo no destaque a região do quilombo Sumidouro, em Queimada Nova (PI), possibilitando realizar um trabalho com a área de **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**, preferencialmente com o professor do componente curricular de **Geografia**, por meio da interpretação das informações contidas no mapa. Nesse caso, é possível explorar as características desse mapa e a importância da Etnocartografia como ferramenta de mapeamento que une o conhecimento técnico com o conhecimento local, envolvendo diretamente os sujeitos da comunidade. Diga aos estudantes que a comunidade Sumidouro foi reconhecida e declarada em 2023 como terra remanescente de quilombo, tendo seus direitos de limites de área devidamente regularizados. Porém, essa não é a realidade de todas as comunidades quilombolas do Brasil, cuja luta pelo reconhecimento de suas terras impacta diretamente o acesso a direitos fundamentais, como saúde e educação, essenciais para a preservação de suas culturas e modos de vida.

Comente com os estudantes que o Projeto Nova Cartografia Social da Amazônia (PNCSA) exemplifica a cartografia social, valorizando os saberes e experiências das comunidades tradicionais. Esses mapas não apenas registram a geografia física, mas também refletem a percepção das comunidades sobre seu território e práticas cotidianas, em contraste com a cartografia tradicional, que historicamente foi dominada por europeus e que muitas vezes refletiu as visões e interesses dos colonizadores. Ao analisá-los, os estudantes podem reconhecer como a cartografia social desafia narrativas dominantes e promove a autonomia dos povos quilombolas, alinhando-se ao pensamento decolonial, que busca reconhecer e valorizar as vozes, experiências e saberes dessas comunidades.

Páginas 26 e 27

Educação Midiática

A seção **Inteligência humana na utilização da inteligência artificial** aborda a importância da inteligência artificial atualmente e explora de modo crítico a sua utilização na criação de conteúdos falsos.

Ao trabalhar as tarefas **2** e **3**, destaque aos estudantes que há diversos tipos de inteligência artificial não generativos que contribuem com o processo de ensino e aprendizagem. Em plataformas de aprendizagem adaptativa ou gamificação, por exemplo, a Inteligência Artificial (IA) identifica as principais dificuldades dos estudantes, guiando-os ao desenvolvimento de atividades personalizadas de acordo os reforços necessários para cada um.

Página 29

A tarefa **28** desenvolve a habilidade **EM13MAT103** e a **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 1** da BNCC, ao trabalhar com a interpretação e a compreensão de um texto divulgado pela mídia, empregando uma unidade de medida adotada pelo SI, o quilômetro, e uma unidade de medida não adotada pelo SI, a unidade astronômica, demandando a realização de conversões entre elas.

Página 30

Trabalho e juventudes

Inicie o trabalho com a seção **A profissão de astrofísico** explorando os conhecimentos prévios dos estudantes a respeito do trabalho do astrofísico, perguntando o que sabem da profissão e o(s) objeto(s) de estudo desses profissionais. É possível que eles tenham assistido a filmes com a temática, como *A teoria de tudo*, do diretor James Marsh. Nesses casos, peça-lhes que comentem do que trata o filme e pergunte-lhes de que maneira o assunto se aproxima da profissão de astrofísico. Se possível, exiba o filme em sala de aula ou peça aos estudantes que o assistam em casa para fomentar ainda mais o debate.

Explique aos estudantes que, em uma graduação de astrofísica, as disciplinas envolvem o estudo de Física básica e avançada, Matemática aplicada, programação de computadores, Astrofísica estelar, História das Ciências, entre outros campos do conhecimento.

Para realizar as visitas sugeridas nesse capítulo, providencie a autorização dos responsáveis dos estudantes menores de idade e verifique a necessidade de equipamentos de segurança. Nos casos em que não seja possível visitar o local, convide o profissional para ir até a escola ou realize uma videochamada para que ele possa ser entrevistado pelos estudantes e apresentar seu ambiente de trabalho e os recursos que utiliza no dia a dia.

No trabalho com a atividade **2**, indique alguns *sites* aos estudantes, nos quais é possível encontrar notícias relacionadas à pesquisa solicitada, como o *Jornal da USP* e o *Jornal da Unicamp*. Disponíveis em: https://jornal.usp.br/ciencias/astrofisica-brasileira-lidera-primeira-simulacao-de-um-buraco-negro-com-uso-de-inteligencia-artificial/ e https://unicamp.br/unicamp/ju/noticias/2019/11/27/brasileira-integra-equipe-que-pretende-desvendar-energia-escura/. Acessos em: 9 ago. 2024.

Páginas 36 e 37

A tarefa **44** permite uma articulação com a área de **Linguagens e suas Tecnologias**, preferencialmente com o professor do componente curricular de **Língua Portuguesa**. Ao trabalhar a natureza polissêmica da palavra **onça**, cujos diferentes sentidos são abordados no recurso, o professor desse componente poderá auxiliar os estudantes na análise da tirinha, levando-os a compreender com maior profundidade o motivo pelo qual a fala de um dos personagens gera espanto no outro, resultando no tom cômico. Além disso, é possível contextualizar as características do gênero analisado, enriquecendo o momento da aprendizagem.

Após o trabalho com a tarefa **48**, estabeleça um tempo para que os estudantes possam refletir sobre os problemas do consumo excessivo e do descarte incorreto de sacolas plásticas. Em seguida, promova uma conversa com a turma acerca da relação entre essa temática e o **Objetivo 12** da **Agenda 2030**.

Complemente o assunto da tarefa **50** informando aos estudantes que os alimentos podem ser de origem vegetal, animal ou mineral. Convide a turma a pesquisar exemplos de alimentos oriundos dessas fontes e promova uma conversa a respeito da qualidade dos alimentos ingeridos por eles. Enfatize a importância de sempre evitar o desperdício e incentive-os a pesquisar boas práticas de reaproveitamento integral de alimentos, como caules e folhas comestíveis que comumente são descartados no preparo de alguns vegetais. Se necessário, oriente-os a consultar o *Guia Alimentar para a População Brasileira*, que aborda as recomendações para uma alimentação adequada e saudável. Disponível em: https://www.gov.br/saude/pt-br/assuntos/saude-brasil/publicacoes-para-promocao-a-saude/guia_alimentar_populacao_brasileira_2ed.pdf/view. Acesso em: 9 ago. 2024.

Página 38

Trabalho e juventudes

Antes de iniciar o trabalho com a seção **A confeitaria como profissão**, explore os conhecimentos prévios dos estudantes a respeito da profissão de confeiteiro, perguntando-lhes se sabem o que desenvolvem, lugares em que podem trabalhar e como podem se tornar esse profissional.

Explique aos estudantes que o curso de Gastronomia na modalidade de graduação envolve conhecimentos de diversas áreas, com disciplinas voltadas à história da gastronomia, à bioquímica e à microbiologia, além de noções de administração de empresas. Na modalidade tecnólogo, as aulas costumam ser mais práticas, voltadas ao preparo dos pratos e manuseio de alimentos e ao gerenciamento de cozinhas. Em ambos os casos, as aulas práticas costumam acontecer em cozinhas industriais e envolvem conhecimentos sobre confeitaria e panificação, que vão desde o preparo dos doces até sua apresentação.

A atividade **3** tem como objetivo dar visibilidade à profissão de confeiteiro, valorizando esses profissionais de modo a desconstruir estereótipos, sobretudo os de gênero. Espera-se que os estudantes percebam que tanto homens quanto mulheres podem optar por seguir essa profissão, a depender de sua vocação, habilidades e oportunidades.

Página 39

Antes de iniciar o trabalho com o tópico **Área**, proponha a sugestão de avaliação apresentada a seguir. Com ela, é possível identificar as dificuldades dos estudantes sobre o uso de unidades de medida de área, volume e capacidade, que serão estudadas nesse capítulo.

Sugestão de avaliação

Organize a turma em grupos com estudantes de diferentes perfis, leve-os à biblioteca ou ao laboratório de informática da escola e solicite que pesquisem imagens de objetos relacionados às grandezas área, volume e capacidade. Na sequência, para cada imagem, solicite-lhes que elaborem situações envolvendo a medida da grandeza correspondente. Por exemplo, supondo um terreno como imagem, uma possível situação é: João comprou um terreno cuja área mede 100 metros quadrados.

Caso não seja possível levá-los a um dos espaços da escola sugeridos, escreva na lousa o nome de alguns objetos e solicite aos estudantes que, em grupos, elaborem situações envolvendo o objeto, uma grandeza e sua respectiva medida.

Páginas 40 e 41

Aproveite o assunto abordado na tarefa **54** e converse com os estudantes sobre o “trajeto” da energia elétrica de uma usina hidrelétrica até as residências. Explique a eles que as energias não renováveis são consideradas poluentes, visto que seu uso causa danos à natureza, e as energias renováveis são denominadas limpas por serem menos danosas ao meio ambiente. Verifique a possibilidade de explicar o funcionamento das hidrelétricas e as unidades de medida de energia, além dos processos de produção em usinas eólicas e do funcionamento dos aerogeradores, com auxílio do professor de **Física**. Comente que o Brasil tem um dos maiores parques hidrelétricos do mundo e que, entre as principais usinas hidrelétricas do Brasil, quatro estão localizadas na região Norte (Belo Monte, Tucuruí, Jirau e Santo Antônio) e uma na região Sul (Itaipu Binacional).

A tarefa **57** possibilita uma integração entre os componentes curriculares de **Matemática** e **História**. Proponha aos estudantes um momento de diálogo para refletir sobre os temas contemporâneos transversais **Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras** e **Educação em direitos humanos**. Converse com eles sobre a identidade étnica (ancestralidade comum, formas de organização política e social, elementos linguísticos, religiosos e culturais) dos quilombolas. Aproveite ainda o resultado obtido na pesquisa realizada no item **b**, a fim de explorar os direitos dos grupos quilombolas. Para mais informações sobre essas comunidades e seus direitos, acesse a página Direitos quilombolas, no *site* da Biblioteca Blanche Knopf, da Fundação Joaquim Nabuco. Disponível em: https://cpisp.org.br/direitosquilombolas/. Acesso em: 9 ago. 2024.

Após o trabalho com a tarefa **57**, verifique a necessidade de realizar a leitura dos **Objetivos da Agenda 2030** no início do **Livro do Estudante** ou de recapitulá-la caso os estudantes já tenham feito essa leitura, e assim retomem o **Objetivo 16** trabalhado nessas páginas. Peça aos estudantes que identifiquem o conteúdo principal dele, de modo que percebam que se trata de um objetivo social, cujas metas abordam questões como a redução significativa de todas as formas de violências, a promoção do Estado de Direito, a garantia da igualdade de acesso à justiça para todos, o desenvolvimento de instituições eficazes, responsáveis e transparentes em todos os níveis e a promoção e o cumprimento de leis e políticas não discriminatórias para o desenvolvimento sustentável. Com base nisso, eles devem estabelecer relações entre as metas e o conteúdo da tarefa. Para auxiliá-los, retome a conversa sobre a identidade étnica dos quilombolas, enfatizando que sua população enfrenta inúmeros desafios decorrentes da discriminação racial e do risco de não demarcação de suas terras. Explique que o não reconhecimento de terras aos povos quilombolas configura uma violência, tendo em vista a relação ancestral e de subsistência que esses povos mantêm com ela. Se julgar conveniente, proponha uma pesquisa sobre o conceito de necropolítica e seu vínculo com o assunto abordado neste momento. Durante a conversa, explore o manejo sustentável que essas comunidades fazem dos recursos naturais, levando os estudantes a perceber que a relação nutrida com a terra vincula os quilombolas ao desenvolvimento sustentável e não predatório. Verifique se a turma reconhece a importância do cumprimento da Constituição no que diz respeito aos direitos dessas comunidades, considerando que seus membros são vulnerabilizados por inúmeros fatores. Em seguida, promova uma análise com a turma e solicite a cada estudante que apresente sua percepção sobre o assunto abordado.

Na seção **Exercícios e problemas**, os estudantes são desafiados a resolver e elaborar problemas envolvendo as grandezas área e densidade demográfica, contemplando, assim, parte do que é solicitado na habilidade **EM13MAT314** e na **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 3** da BNCC.

Ao argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis para defender a garantia dos direitos dos quilombolas na tarefa **57**, os estudantes desenvolvem a **Competência geral 7** da BNCC.

Páginas 46 e 47

Desenvolvimento sustentável

Inicie o trabalho com a seção **Moradia para todos!** aprofundando com os estudantes o conceito de moradia adequada. Explique-lhes que essa discussão está presente em um documento brasileiro, produzido pela Secretaria de Direitos Humanos no ano de 2013, e diz respeito a condições básicas que qualquer forma de abrigo deve ter. Se julgar conveniente, indique aos estudantes a leitura desse documento. Disponível em: https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000225430. Acesso em: 9 ago. 2024.

No trabalho da atividade **2**, oriente os estudantes a iniciar pela elaboração do texto relacionando o assunto da moradia adequada ao **ODS 10 – Redução das desigualdades**. Para a pesquisa, indique-lhes *sites* mostrando exemplos de projetos brasileiros que desenvolvem moradias utilizando materiais recicláveis, como o *Recicla Sampa* e o *Ciclo Vivo*.

Caso os resultados dos trabalhos dos estudantes sejam prioritariamente apresentados por meio de cartazes, utilize a estratégia ***Gallery Walk***. Promova um momento de interação entre os grupos, de modo que todos possam conhecer os trabalhos dos demais colegas, e incentive-os a apreciá-los e a trocar ideias entre eles sobre o assunto abordado.

As questões propostas nessa seção favorecem o trabalho com a habilidade **EM13MAT201** e a **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 2** da BNCC ao incentivar a aplicação de conhecimentos matemáticos para realizar ações condizentes com as demandas da comunidade em que estão inseridos. Pesquisando e conhecendo projetos de voluntariado, os estudantes perceberão aplicabilidades práticas, de utilidade para a população em seu entorno, para os conceitos estudados envolvendo grandezas e medições, incluindo as ideias de área, perímetro, volume, capacidade e massa.

Página 48

Na seção **Exercícios e problemas**, os estudantes são desafiados a resolver e elaborar problemas envolvendo as grandezas volume e capacidade, contemplando, assim, parte do que é solicitado na habilidade **EM13MAT309** e na **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 3** da BNCC.

Página 49

Na seção **Exercícios e problemas**, os estudantes são desafiados a resolver e elaborar problemas envolvendo a grandeza velocidade média, contemplando, assim, parte do que é solicitado na habilidade **EM13MAT314** e na **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 3** da BNCC.

Na tarefa **74**, antes de os estudantes elaborarem o problema, peça que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tópico e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

Página 50

O tópico **Algarismos significativos** tem por objetivo levar os estudantes a compreender as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos e a utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, além de reconhecer que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro, como sugere a habilidade **EM13MAT313** da BNCC. Desse modo, são abordados aspectos da **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 3** da BNCC.

Páginas 52 e 53

Ao trabalhar com a tarefa **76**, se possível, leve um paquímetro para a sala de aula e apresente-o aos estudantes, destacando seus elementos e explicando como utilizar esse instrumento. Se julgar conveniente, amplie a temática apresentando o micrômetro e seu funcionamento aos estudantes. Essas informações podem ser encontradas na apostila **Paquímetro e micrômetro – aspectos elementares: uso em um laboratório de física básica**, de Jorge Ricardo de Araújo Kaschny. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/7700516/mod_resource/content/1/PaquimetroMicrometro.pdf. Acesso em: 9 ago. 2024.

Ao desenvolver o trabalho com a tarefa **83**, os estudantes são expostos a uma situação em que se faz necessário expressar uma medida em notação científica, como sugere a habilidade **EM13MAT313** da BNCC.

Página 54

A criação de algoritmos favorece a apreensão dos primeiros rudimentos de princípios computacionais, de grande utilidade nos tempos atuais. Conforme sugerido pela BNCC, a aprendizagem de Matemática, acrescida desse tipo de abordagem, contribui para o desenvolvimento do **pensamento computacional** dos estudantes, levando-os a traduzir uma situação em outra linguagem (como, no caso em questão, um problema apresentado em língua materna para cálculos aritméticos e procedimentos algorítmicos). Desse modo, caso julgue oportuno, solicite aos estudantes que escrevam outros algoritmos relacionados com as medidas apresentadas (converter terabaites em megabaites ou quilobaites em gigabaites, por exemplo).

As situações e tarefas propostas visam mobilizar a compreensão e a utilização de ferramentas digitais de informação, para que, por meio delas, os estudantes possam comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismos na vida pessoal e coletiva, conforme solicita a **Competência geral 5** da BNCC.

A questão **M** desenvolve, entre outras habilidades, a **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 4** da BNCC, pois exercita nos estudantes a capacidade de se valerem de diferentes registros matemáticos para a resolução de problemas práticos e para a comunicação adequada dessas resoluções.

Página 55

Novamente é apresentada, no problema resolvido **R17**, uma situação em que é solicitada a construção de algoritmos e fluxogramas, reforçando o que foi comentado anteriormente quanto à relevância desse tipo de abordagem, sobretudo para o desenvolvimento do **pensamento computacional**. Nesse caso, contudo, o algoritmo e o fluxograma são mais sofisticados, pois envolvem tomadas de decisões. Para que os estudantes desenvolvam a habilidade de construir algoritmos e fluxogramas, proponha outras tarefas semelhantes ao problema resolvido **R17**.

Página 57

Ao realizar a tarefa **88**, explique aos estudantes que o armazenamento em nuvem é um serviço que permite um usuário qualquer enviar seus documentos eletrônicos (textos, imagens, vídeos, áudios, jogos, aplicativos etc.) para um provedor, responsável pelo armazenamento dos dados, com segurança e sigilo garantidos por processos de criptografia. Os dados, então, podem ser acessados remotamente pelo usuário ou por qualquer pessoa com acesso, sem necessidade de gravar esses dados no dispositivo pelo qual se esteja acessando. O usuário é responsável por determinar quem poderá ou não realizar alterações no arquivo, como edição, atualizações ou exclusões, o que favorece o trabalho em grupo, permitindo dinamicidade e agilidade. Entre as principais vantagens dessa tecnologia estão a segurança e a praticidade.

Ao desenvolver o trabalho com a tarefa **89**, converse com a turma a respeito dos *videogames*, tecnologia presente no cotidiano de muitos estudantes. Deixe que expressem suas opiniões sobre esse dispositivo e relatem suas vivências. Mais informações sobre as culturas juvenis podem ser encontradas no tópico **O estudante do Ensino Médio**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Página 58

Ao iniciar o trabalho com essa página, os estudantes são levados a interpretar e compreender propagandas referentes a planos de internet, as quais empregam unidades de medida de velocidade de transferência de dados. Desse modo, desenvolve-se o que foi proposto na habilidade **EM13MAT103** da BNCC. Nesse momento, é de suma importância que os estudantes compreendam o que significa, por exemplo, “100 Mega”.

Página 60

Na tarefa **92**, os estudantes são desafiados a decompor problemas, reconhecer padrões, filtrar, classificar e organizar informações relevantes e construir algoritmos, desenvolvendo, assim, o **pensamento computacional**.

Quando os estudantes, no item **d** da tarefa **92**, são desafiados a escrever um algoritmo e organizá-lo em um fluxograma, são abordadas a habilidade **EM13MAT315** e a **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 3** da BNCC.

Páginas 62 e 63

A tarefa **97** possibilita o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT103**, assim como aspectos relativos à **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 1** da BNCC. Adquirir instrução matemática quanto à taxa de transferência de dados faz com que os estudantes se tornem capazes de compreender textos científicos e divulgados pela mídia que envolvam unidades de medida ligadas aos avanços tecnológicos, inclusive para interpretar criticamente propagandas. Nesse sentido, desenvolvem-se estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos aptos a ser empregados tanto em atividades cotidianas quanto em contextos mais técnicos, contribuindo para a formação geral do estudante.

O tópico **Velocidade de processamento de dados** propicia o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT103**, assim como aspectos relativos à **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 1** da BNCC. Adquirir instrução matemática quanto à velocidade de processamento faz com que os estudantes se tornem capazes de compreender textos científicos e divulgados pela mídia que envolvam unidades de medida ligadas aos avanços tecnológicos, inclusive para interpretar de maneira crítica propagandas de aparelhos eletrônicos que tenham processadores (tangenciando, ainda, o tema contemporâneo transversal **Educação para o consumo**). Nesse sentido, desenvolvem-se estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos aptos a ser empregados tanto em atividades cotidianas quanto em contextos mais técnicos envolvendo **Ciências da Natureza** e **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**, contribuindo para a formação geral dos estudantes.

Página 65

Na questão **1**, se necessário, oriente os estudantes a formar duplas e retomar os conteúdos abordados no capítulo, mencionando os que já conheciam e verificando a dificuldade em algum deles.

O trabalho com a questão **2** pode ser desenvolvido de diferentes maneiras, como desenhos, textos e dinâmicas em grupos. Nesse momento, se necessário, proponha aos estudantes que elaborem questionamentos em função dos erros mais comuns que eles identificaram durante o trabalho com os tópicos propostos. Alguns exemplos são: "Consigo resolver problemas envolvendo diferentes unidades de medida?"; "Tenho segurança para trabalhar com diferentes grandezas?"; "Consigo escrever números muito grandes ou muito pequenos usando notação científica?". Com base nas respostas, é esperado que eles identifiquem suas dificuldades e reflitam acerca da necessidade de retomar o que foi estudado.

As questões de **3** a **14** são de direta aplicação dos conteúdos estudados. Com elas, é esperado que os estudantes validem a reflexão proposta na questão **2**. Durante o desenvolvimento dessas questões, oriente-os a não consultar o material e a registrar suas dúvidas, pois esses registros auxiliarão no desenvolvimento da questão **15**.

Na síntese proposta na questão **15**, os estudantes podem usar diversas estratégias, como listas de conceitos, mapas conceituais e resumos textuais. Instigue-os a dar exemplos e, caso julguem conveniente, usar imagens. Incentive-os a utilizar a criatividade nesse momento.

CAPÍTULO 2 Conjuntos

Nesse capítulo, são desenvolvidas as unidades temáticas de Matemática **Números e Álgebra**, em situações relacionadas à Teoria dos Conjuntos, como a relação de inclusão e as operações de união e interseção, bem como viabilizar a utilização de notações, como os símbolos de pertinência $(\in)$ e de união $(\cup)$. Adotando esses conhecimentos como pré-requisitos, passamos ao estudo dos conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais, reconhecendo suas propriedades. Além disso, há o uso de algoritmo e, posteriormente, a organização de fluxograma.

Objetivos específicos

- Compreender e consolidar o conceito de conjuntos.
- Identificar e representar conjuntos utilizando diferentes maneiras, como chaves, diagramas e lei de formação.
- Estabelecer relações de pertinência e continência envolvendo conjuntos e seus elementos.
- Realizar as operações de união, interseção, diferença de conjuntos e complementar de um conjunto.

Justificativa

A compreensão da ideia de conjuntos desempenha um papel fundamental na Matemática e serve de alicerce para generalizações e aplicabilidades em nosso cotidiano. Com o intuito de atingir os objetivos citados, esse capítulo aborda o conceito de conjuntos, subconjuntos e operações com conjuntos, apresentando problemas contextualizados e as características dos principais conjuntos numéricos, partindo de exemplos matemáticos e não matemáticos, o que permite a identificação de aplicações para a teoria dos conjuntos tanto na área da Matemática quanto em outras áreas.

Páginas 66 e 67

Aproveite o artigo sugerido no boxe **Para expandir**, que traz mais informações sobre a classificação de animais, como texto fomentador para os estudantes debaterem sobre a importância da classificação das espécies de animais e também sobre as espécies em extinção atualmente. Se necessário, organize a turma em duplas ou em grupos mesclando estudantes de diferentes perfis, para que possam compartilhar conhecimentos e habilidades.

Na questão **3**, verifique se os estudantes percebem como é possível interpretar o subconjunto das famílias dos felídeos em relação ao conjunto dos mamíferos, destacando a relação de continência entre eles.

Página 71

No ensino de Matemática, trabalha-se o uso de diferentes tipos de linguagem, como a linguagem visual e a própria linguagem matemática, auxiliando os estudantes na aprendizagem de determinados conteúdos. Isso pode ser verificado nos esquemas que caracterizam os diagramas de Venn na abordagem de conjuntos (linguagem visual) e na representação de conjuntos por sua lei de formação (linguagem matemática). Esse recurso obedece ao que dita a **Competência geral 4** da BNCC.

Ao trabalhar com as tarefas propostas na seção **Exercícios e problemas**, verifique a possibilidade de aplicar algum problema sob a perspectiva da estratégia ***Think-pair-share*** antes de apresentá-la aos estudantes conforme indicado no livro. Após eles resolverem esse problema, peça que apresentem suas soluções aos colegas. Em seguida, solicite que comparem as resoluções apresentadas com a resolução presente no livro, discutindo as diferentes possibilidades de encaminhamento para um mesmo problema.

Sugestão de avaliação

Após trabalhar com as tarefas da seção **Exercícios e problemas**, a fim de avaliar a compreensão dos estudantes quanto à relação de pertinência entre um objeto e um conjunto e a relação de continência entre conjuntos, proponha-lhes a seguinte tarefa.

Considerando os conjuntos A, B e C, responda às questões.

$$A = \left\{a \middle| a \text{ é primo}\right\}$$

$$B = \left\{b \middle| b \text{ é um número ímpar}\right\}$$

$$C = \left\{c \middle| c \text{ é um múltiplo de } 3\right\}$$

a) O conjunto A está contido no conjunto B? Justifique sua resposta.

b) O número 15 pertence a quais conjuntos?

c) O conjunto C está contido no conjunto B? Justifique sua resposta.

d) Se $b_1 \in B$ e $b_2 \in B$, é correto afirmar que $(b_1 + b_2) \in B$? Justifique sua resposta.

Resoluções e comentários

a) O conjunto A não está contido no conjunto B, pois o número 2 é primo e não é ímpar, ou seja, $2 \in A$, mas $2 \notin B$.

b) Vamos analisar a pertinência do número 15 em cada um dos conjuntos.

Conjunto A: o número 15 é divisível por 1, 3, 5 e 15. Logo, 15 não é primo e, consequentemente, $15 \notin A$.

Conjunto B: o número 15 pode ser escrito na forma $2n + 1$, em que n é um número natural.

$$15 = 2 \cdot 7 + 1$$

Logo, 15 é ímpar e, consequentemente, $15 \in B$.

Conjunto C: note que $15 = 3 \cdot 5$. Assim, 15 é múltiplo de 3 e, consequentemente, $15 \in C$.

Portanto, o número 15 pertence aos conjuntos B e C.

c) Não, pois, por exemplo, $6 \in C$ e $6 \notin B$.

d) Se $b_1 \in B$ e $b_2 \in B$, então podemos escrever $b_1 = 2n_1 + 1$ e $b_2 = 2n_2 + 1$, sendo n_1 e n_2 números naturais. Desse modo:

$$b_1 + b_2 = 2n_1 + 1 + 2n_2 + 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow b_1 + b_2 = 2n_1 + 2n_2 + 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow b_1 + b_2 = 2 \cdot (n_1 + n_2) + 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow b_1 + b_2 = 2 \cdot (n_1 + n_2 + 1)$$

Ou seja, a soma de dois números ímpares é um número par. Portanto, se $b_1 \in B$ e $b_2 \in B$, não é correto afirmar que $(b_1 + b_2) \in B$, pois, neste caso, temos $(b_1 + b_2) \notin B$.

Página 72

Uma sugestão para resolver a tarefa **6** seria propor que os estudantes aplicassem os conhecimentos prévios a respeito de conjuntos numéricos. Por exemplo, todo número natural é racional porque o conjunto dos números racionais contém o conjunto dos números inteiros e todo número natural é inteiro. Após definirem os conjuntos A, B e C e apresentarem suas deduções, incentive-os a compartilhar com os colegas suas produções.

Página 76

O problema **R1**, da seção **Exercícios e problemas resolvidos**, favorece o desenvolvimento do **pensamento computacional** ao propor a construção de um algoritmo e de um fluxograma associado à identificação da quantidade de elementos de um conjunto resultante da interseção de conjuntos finitos, pois permite aos estudantes refletir a respeito do funcionamento de um algoritmo e de sua representação em fluxograma, considerando o tema em discussão. Além disso, aborda a **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 3** da BNCC e a habilidade **EM13MAT315** ao trabalhar a construção de um algoritmo e de seu respectivo fluxograma, associados à interseção de conjuntos finitos, exigindo dos estudantes a compreensão da estrutura de um algoritmo e dos procedimentos necessários para organizá-lo como um fluxograma. Ao desenvolver aspectos do **pensamento computacional** no trabalho com a linguagem algorítmica e, posteriormente, solicitar a organização de informações em um fluxograma, esse problema também mobiliza aspectos da **Competência geral 4** da BNCC.

Ao fim do trabalho com o tópico **Operações com conjuntos**, verifique a possibilidade de utilizar a estratégia ***Quick writing*** para avaliar o aprendizado dos estudantes, incentivando-os a refletir sobre os conteúdos estudados. Em debate posterior, solicite a eles que expliquem a importância de conhecer as operações com conjuntos.

Página 83

Durante o trabalho com o tópico **Conjunto dos números irracionais**, utilize a calculadora como um recurso de apoio para a verificação e a comparação de quantidades numéricas. Uma sugestão é a utilização do aplicativo Calculadora presente nos *smartphones*, complementando com a comparação entre os recursos presentes nas calculadoras comuns e nas calculadoras científicas, as quais podem ser acessadas tanto nos *smartphones* quanto nos computadores, além das versões físicas, que podem ser levadas para a sala de aula.

A abordagem histórica apresentada na introdução de um novo conceito matemático, como a contextualização dos principais fatos que levaram ao surgimento dos conjuntos numéricos, mostra-se eficaz no sentido de despertar a curiosidade dos estudantes quanto aos acontecimentos que resultaram em determinada teoria, conforme sugere a **Competência geral 1** da BNCC.

Página 85

Ao realizar a tarefa **27**, verifique a possibilidade de desenvolver um trabalho associado à área de **Linguagens e suas Tecnologias**, preferencialmente com o professor do componente curricular de **Língua Portuguesa**, visando enriquecer as opiniões a respeito das diferentes linguagens usadas para a comunicação, como oral, visual e escrita. Explique aos estudantes que o braile é um sistema de escrita inventado no século XIX pelo professor francês Louis Braille. Esse sistema tem sido utilizado há muito tempo na educação de pessoas com deficiência visual no Brasil, mas só em 2002 foi implementada no país a Grafia Braile para Língua Portuguesa, que estabelece normas voltadas para uso e ensino desse sistema em nosso idioma. Com base nesse contexto, promova uma roda de conversa com o intuito de destacar a importância de uma comunicação eficaz e inclusiva, que seja compreendida pelo receptor. Nesse sentido, é possível abordar outras linguagens inclusivas, como a Língua Brasileira de Sinais (Libras), e situações de variações linguísticas, que são variações da língua-padrão determinadas por questões históricas, regionais, sociais, culturais e estilísticas. Pergunte aos estudantes se eles fazem uso da mesma linguagem ao redigir um texto formal, ao se comunicar com um amigo via internet e ao falar com um familiar mais velho. Leve-os a perceber as diferenças empregadas nessas vias de comunicação e conduza-os a uma reflexão sobre as diferentes maneiras de se expressar em língua portuguesa. Incentive uma discussão respeitosa e aberta ao pluralismo de ideias.

Se possível, leve para a sala de aula alguns instrumentos matemáticos usados por pessoas com deficiência visual, como o ábaco ou as réguas especiais, e proponha uma comparação entre tais instrumentos e os já conhecidos pelos estudantes, no sentido de evidenciar o fato de que as pessoas com deficiência visual dispõem de instrumentos que permitem a realização de todas as atividades.

No desenvolvimento do item **c**, considere a viabilidade de convidar uma pessoa com deficiência visual para compartilhar com os estudantes suas experiências e impressões sobre medidas de inclusão e acessibilidade na região onde vivem.

Durante esses trabalhos, que envolvem reflexões a respeito da importância da inclusão de pessoas com deficiência visual, aproveite a oportunidade para conversar com os estudantes sobre a importância de ter harmonia e empatia no convívio social, compreender as necessidades dos outros, aprender a lidar com as próprias limitações e contribuir para a criação de um ambiente propício ao crescimento coletivo, promovendo, sempre que possível, a paz na comunidade escolar e na sociedade.

O trabalho com a tarefa **27** permite o desenvolvimento do tema contemporâneo transversal **Educação em direitos humanos**, uma vez que leva os estudantes a refletir a respeito da inclusão de pessoas com deficiência nas mais variadas esferas da sociedade, observando a importância do método braile para o acesso delas à comunicação escrita.

Além disso, ao tratar do sistema braile, é possível abordar os diferentes tipos de linguagem, de modo que os estudantes compreendam a vasta gama de possibilidades utilizadas na comunicação e na expressão, abordando as **Competências gerais 4** e **10** da BNCC.

Na questão **1**, se necessário, oriente os estudantes a formar duplas e retomar os conteúdos abordados no capítulo, mencionando aqueles que já conheciam e verificando se tiveram dificuldade em algum deles.

Na questão **2**, proponha a eles que elaborem questionamentos em relação aos erros mais comuns que identificaram durante o trabalho com os tópicos propostos. Alguns exemplos são: "Consigo identificar e representar conjuntos utilizando diferentes formas, como diagramas, chaves e lei de formação?"; "Tenho segurança para estabelecer relações de pertinência e continência envolvendo elementos e conjuntos?"; "Consigo realizar as operações de união, interseção, diferença de conjuntos e complementar de um conjunto?"; "Consigo resolver problemas envolvendo conjuntos?". Com base nas respostas, é esperado que eles identifiquem suas dificuldades e reflitam acerca da necessidade de retomar o que foi estudado.

As questões **3** a **5** são de direta aplicação dos conteúdos trabalhados. Durante o desenvolvimento dessas questões, oriente os estudantes a não consultar o material e a registrar suas dúvidas, pois esses registros vão auxiliar no desenvolvimento da questão **6**.

Na síntese proposta na questão **6**, os estudantes podem usar, além de desenhos, estratégias como listas de conceitos, mapas conceituais e resumos textuais. Instigue-os a apresentar exemplos e, se julgar conveniente, a usar imagens. Incentive-os a utilizar a criatividade nesse momento.

CAPÍTULO 3

Função

Nesse capítulo, são desenvolvidas as unidades temáticas de Matemática **Números e Álgebra**, relacionadas à ideia de função, bem como sua representação algébrica e gráfica. Assim, são apresentadas situações para o estudo de domínio, contradomínio, conjunto imagem, crescimento, constância e decrescimento de uma função, além da taxa de variação média de funções.

Objetivos específicos

- Compreender o conceito de função, utilizando corretamente as notações associadas.
- Reconhecer o domínio, o contradomínio e o conjunto imagem de uma função.
- Interpretar diferentes representações das funções, como os diagramas de flechas e as leis de formação.
- Interpretar gráficos de funções.

Justificativa

As funções estão presentes em diversos aspectos de nosso cotidiano. Por isso, faz-se necessário reconhecer e utilizar de maneira adequada os conceitos relacionados a esse conteúdo. Com o intuito de atingir os objetivos citados, esse capítulo aborda a introdução ao estudo das funções, apresentando, inicialmente, a noção intuitiva e estabelecendo uma base consistente para a definição formal do conceito.

Por meio da interpretação de diagramas de flechas, os estudantes são levados a identificar, entre as situações apresentadas, aquelas que caracterizam uma função, realizando, posteriormente, o estudo de suas características para a identificação do seu domínio, seu contradomínio e seu conjunto imagem. Para esse estudo, são essenciais os conceitos relacionados à Teoria dos Conjuntos, já vistos pelos estudantes no capítulo **2** deste volume e que compõem a definição de função.

Além disso, esse capítulo trabalha o estudo da representação gráfica de funções partindo de conceitos iniciais, como a definição e a identificação de domínio, contradomínio e imagem. Portanto, a proposta é estudar as características apresentadas pelos gráficos de funções e como essas representações podem contribuir para a identificação de intervalos de crescimento e decrescimento em seu domínio, possibilitando aplicar esse recurso à resolução de problemas provenientes de contextos diversos. Também é discutida a taxa de variação média, aplicada a situações que envolvem, por exemplo, o estudo da velocidade.

Página 88

Aproveite o texto sugerido no boxe **Para expandir** para fomentar um debate sobre a importância dos biocombustíveis na transformação da matriz energética atual, como alternativa para substituir o *diesel* fóssil por fontes sustentáveis e menos poluentes.

Páginas 91 e 92

O trabalho com a tarefa **7** favorece o desenvolvimento dos temas contemporâneos transversais **Educação ambiental** e **Educação para o consumo** ao fornecer dados sobre a quantidade de resíduos sólidos produzidos em 2022. Auxilie os estudantes a refletir sobre os impactos ambientais causados pelo excesso de resíduos sólidos e a relacionar o tema ao consumo em excesso.

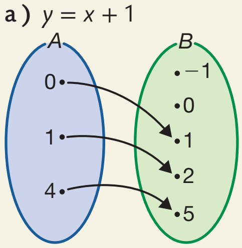
Aproveite para conversar com os estudantes sobre quais medidas podem ser tomadas pelos estados e pela população para melhorar o panorama da coleta e do descarte adequado dos resíduos sólidos no Brasil. Se necessário, peça a eles que façam uma pesquisa sobre o assunto. Ao solicitar que os estudantes argumentem em favor de uma maior consciência socioambiental com base em informações confiáveis, trabalham-se as **Competências gerais 7** e **10** da BNCC.

Avalie a possibilidade de propor um trabalho em parceria com os professores dos componentes curriculares **Geografia** e **Química**, solicitando aos estudantes que pesquisem como são feitos o descarte e a coleta de resíduos sólidos no município onde moram. Peça-lhes que verifiquem se os resíduos são descartados em lugares adequados, se há programas de coleta seletiva, como funciona a coleta em ambientes públicos, se são disponibilizadas lixeiras em espaços públicos como ruas ou parques, se há campanhas de conscientização sobre a redução da produção de resíduos sólidos e se ocorre o descarte correto por parte da população, entre outros aspectos. Visando desenvolver o pluralismo de ideias, o pensamento crítico e a argumentação dos estudantes, incentive-os a posicionarem-se criticamente em um ambiente de debate aberto e respeitoso, com base nas informações coletadas, emitindo suas opiniões sobre como esse tema é desenvolvido no município. Algumas questões que podem ser levantadas nessas argumentações são: “Vocês se consideram satisfeitos com as medidas adotadas pelo município?”; “Quais são os pontos mais sensíveis?”; “Quais medidas poderiam ser implementadas para melhorar a insatisfação nos pontos mencionados?”.

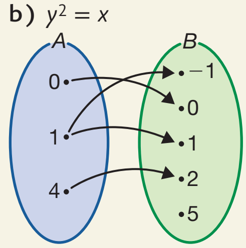
Durante as conversas a respeito do conceito de função, apresente aos estudantes alguns exemplos de associações entre conjuntos que não podem ser classificadas como funções, de modo que eles compreendam e reconheçam os critérios necessários para essa definição.

Como sugestão para essa roda de conversa, considere os conjuntos $A = \{0, 1, 4\}$ e $B = \{-1, 0, 1, 2, 5\}$. Com base nesses conjuntos, temos as regras de associação e os diagramas correspondentes apresentados a seguir.

a) $y = x + 1$



b) $y^2 = x$



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Nesses exemplos, x pertence ao conjunto A e y pertence a B. Analisando os dois exemplos, é possível verificar que a associação presente no item **a** pode ser classificada como função, pois todos os elementos do conjunto A estão associados a elementos do conjunto B e cada um dos elementos de A está associado a um único elemento de B.

Por outro lado, as associações apresentadas no item **b** não correspondem a uma função, porque temos um elemento do conjunto A que está associado a dois elementos de B. É importante efetuar comparações entre exemplos que representam uma função e exemplos que não representam uma função, de modo que os estudantes possam identificar as semelhanças e diferenças entre esses dois casos, partindo, principalmente, das representações em diagramas e construindo as associações entre os elementos dos dois conjuntos envolvidos com base nas regras estabelecidas em cada situação.

O uso de diferentes tipos de linguagens, como a linguagem visual e a própria linguagem matemática, auxilia os estudantes na aprendizagem de determinados conteúdos, como os esquemas que caracterizam os diagramas de flechas (diagramas de Venn) no ensino de funções (linguagem visual) e a representação dessas mesmas funções por meio de sua lei de formação (linguagem matemática). Esse recurso trabalha a **Competência geral 4** da BNCC.

Página 94

Ao fim do trabalho com esse tópico, verifique a possibilidade de utilizar a estratégia ***Quick writing*** para avaliar o aprendizado dos estudantes, fazendo-os refletir a respeito dos conteúdos abordados. Em debate, solicite que eles comentem quais são as vantagens dos estudos matemáticos sobre os conceitos intuitivos de função, refletindo a respeito de sua aplicabilidade na resolução de problemas provenientes de diferentes áreas e contextos.

Página 97

O trabalho com os conteúdos propostos nesse tópico permite o desenvolvimento da **Competência geral 4**, em razão do uso da linguagem visual por meio de gráficos, possibilitando que os estudantes estabeleçam uma relação entre as linguagens matemática e visual, contribuindo para a compreensão do conceito de função. Além disso, o desenvolvimento dessa competência é incentivado por meio dos exercícios e problemas propostos, que exigem a compreensão das diversas representações adotadas no estudo de funções, principalmente no que se refere às representações algébricas e gráficas correspondentes.

Páginas 99 e 100

As tarefas propostas na seção **Exercícios e problemas** contribuem para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT404**, permitindo que os estudantes analisem funções definidas por uma ou mais sentenças, em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínio, imagem, crescimento e decrescimento, convertendo essas representações uma para a outra, com e sem o auxílio de *softwares* de Geometria dinâmica. Além disso, essa seção envolve a **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 4** da BNCC, por compreender e utilizar diferentes registros de representação matemática na busca de soluções de problemas.

Página 102

Trabalho e juventudes

Inicie o trabalho com a seção **Administrador de empresas** explorando os conhecimentos prévios dos estudantes a respeito dessa profissão, perguntando-lhes o que sabem a respeito dela, lugares em que podem trabalhar e como se tornar esse profissional.

Para realizar a visita sugerida nessa seção, providencie a autorização dos responsáveis dos estudantes menores de idade e verifique a necessidade de equipamentos de segurança. Oriente os estudantes a elaborar antecipadamente algumas questões e deixe-os à vontade para fazer outros questionamentos durante a visita, ressaltando a importância do diálogo respeitoso. Nos casos em que não seja possível ir até o local, convide o profissional para ir até a escola ou realize uma videochamada para que ele possa ser entrevistado pelos estudantes e apresentar seu ambiente de trabalho e os recursos que utiliza no dia a dia.

Na atividade **2**, incentive os estudantes a pensar sobre profissões que exijam relacionar grandezas diferentes. Se necessário, solicite que façam uma pesquisa sobre o tema. Além das profissões, já mencionadas na resposta, eles podem citar diversas outras, como biólogos, astrônomos e profissionais da saúde, pois as funções são fundamentais para a análise de dados e para prever padrões em diversas áreas do conhecimento.

Página 104

O trabalho com a seção **Exercícios e problemas** permite o desenvolvimento da **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 1** da BNCC, além da habilidade **EM13MAT101**, por exigir dos estudantes a interpretação de situações provenientes de contextos diversos e ligadas à realidade, relacionando a linguagem matemática com a representação gráfica, contribuindo para a compreensão de relações que podem ser estabelecidas entre grandezas, com base no conceito de função e das taxas de variação.

Página 105

Na questão **1**, se necessário, oriente os estudantes a formar duplas, a fim de relembrar os conteúdos trabalhados no capítulo.

O trabalho com a questão **2** pode ser desenvolvido de diferentes maneiras: por meio de textos, desenhos e dinâmicas em grupos com estudantes de diferentes perfis. Nesse momento, se necessário, proponha a elaboração de questionamentos em relação aos erros mais comuns identificados durante o trabalho com os tópicos propostos. Alguns exemplos são: "Consigo definir o que é uma função?"; "Consigo resolver problemas envolvendo funções?"; "Tenho segurança para trabalhar com o gráfico de funções?"; "Consigo identificar o domínio e o contradomínio?"; "Consigo identificar se um gráfico corresponde ou não ao de uma função?"; "Consigo calcular a taxa de variação média de uma função em um intervalo dado?". Considerando as respostas, é esperado que eles identifiquem suas dificuldades e reflitam acerca da necessidade de retomar o que foi estudado.

As questões **3** a **10** são de aplicação direta dos conteúdos estudados. Com elas, é esperado que os estudantes validem a reflexão proposta na questão **2**. Durante o desenvolvimento dessas questões, oriente-os a não consultar o material e a registrar suas dúvidas, pois esses registros auxiliarão no desenvolvimento da questão **11**.

Na síntese proposta na questão **11**, os estudantes podem usar, além de desenhos, estratégias como listas de conceitos, mapas conceituais e resumos textuais. Instigue-os a apresentar exemplos e, se julgar conveniente, usar imagens. Incentive-os a utilizar a criatividade nesse momento.

CAPÍTULO 4 Função afim e função quadrática

Nesse capítulo, são desenvolvidas as unidades temáticas de Matemática **Números e Álgebra**, relacionadas à função afim e à função quadrática, bem como suas representações algébricas e gráficas. Dessa forma, são apresentadas as relações de dependência entre variáveis e a distinção entre variáveis dependentes e independentes. Além disso, algumas situações exploram o uso de planilhas e de *softwares* de Geometria dinâmica para desenvolver potencialidades desses conteúdos.

Objetivos específicos

- Estabelecer relações entre grandezas por meio de uma função afim.
- Interpretar e esboçar o gráfico de uma função afim.
- Analisar uma função afim quanto ao seu crescimento ou decrescimento.
- Estudar o sinal de uma função afim.
- Identificar e resolver inequações do 1º grau.
- Empregar as inequações do 1º grau na interpretação e na resolução de problemas.
- Esboçar o gráfico de uma função quadrática.
- Empregar as funções quadráticas na interpretação e resolução de problemas.
- Determinar o valor máximo ou o valor mínimo de funções quadráticas.
- Identificar e resolver inequações do 2º grau.

Justificativa

O estudo da função afim e quadrática no Ensino Médio tem o objetivo de levar os estudantes a perceber suas aplicações em inúmeras circunstâncias, tanto na vida cotidiana quanto nas ciências em geral. Desse modo, espera-se que eles sejam capacitados a interpretar e compreender textos científicos e até mesmo informações divulgadas pelas diferentes mídias, sob um olhar cada vez mais crítico quanto aos assuntos explorados.

Nesse capítulo, são trabalhadas as representações tanto algébricas quanto gráficas no plano cartesiano da função afim e da função quadrática, identificando suas características em ambos os casos e incentivando a conversão de um registro em outro. Além disso, são discutidas as relações entre o conceito de proporção e as funções lineares, evidenciando a possibilidade de relacionar grandezas diretamente proporcionais utilizando tais funções, as quais podem ser entendidas como caso particular de função afim. Nesse sentido, os estudantes devem tomar como base seus conhecimentos a respeito das funções afins e dos tipos de grandeza para compreender as relações estabelecidas.

No que se refere aos modelos de aproximação linear, em especial ao método de regressão linear, estudam-se maneiras de avaliar a tendência de dados e de expressá-la por meio de uma função linear que a sintetize do modo mais preciso possível. Para isso, são usadas planilhas eletrônicas que auxiliam na construção de regressões lineares e incentivam, mais do que a simples realização de cálculos, a correta interpretação do significado de uma regressão linear na análise de dados. Os modelos lineares são de grande importância para promover previsões e estimativas com base em conjuntos de dados que se comportem de modo aproximadamente linear, facilitando planejamentos para o futuro. Modelos de aproximação linear, embora relativamente simples, são aplicáveis em contextos diversificados, variando desde o planejamento financeiro de uma empresa até a verificação experimental de leis da Física, passando por análises de índices sociais e econômicos, controle de qualidade de produtos eletrônicos e estudo da eficácia de estratégias de *marketing*, entre muitas outras áreas. O conteúdo abordado em inequações do 1º grau e do 2º grau consiste nas observações de sua aplicabilidade na resolução de problemas provenientes de contextos diversos, exigindo dos estudantes a interpretação dos resultados obtidos e a verificação de sua plausibilidade nas situações em estudo.

São trabalhados também os coeficientes das funções quadráticas com o intuito de identificar suas influências sobre o comportamento do gráfico desse tipo de função. Outros conceitos importantes discutidos ao longo do capítulo são o zero de uma função quadrática, o vértice de uma parábola e os valores máximo ou mínimo de uma função quadrática. Essas propriedades são essenciais na descrição de fenômenos e na resolução de problemas. Ademais, estuda-se o sinal de uma função quadrática.

Páginas 106 e 107

As páginas de abertura associam, de maneira intuitiva, o conceito de função afim ao consumo de energia elétrica, propondo uma análise da relação estabelecida entre as grandezas "tempo" e "consumo de energia elétrica" em diferentes modelos de lâmpada.

A potência de cada modelo de lâmpada apresentado é uma medida que indica a quantidade de energia que essa lâmpada consome. Entretanto, a potência está diretamente relacionada ao seu consumo, e não necessariamente à luminosidade que ela incide. Desse modo, quanto maior a potência de uma lâmpada, maior será o seu consumo.

Sugestão de avaliação

A fim de verificar o conhecimento prévio dos estudantes acerca de conceitos de funções afins, proponha-lhes o seguinte problema.

Um taxista cobra R$ 5,00 de bandeira (taxa fixa) mais R$ 1,25 por quilômetro rodado. Caso um passageiro deseje saber quanto terá de pagar pela viagem após x quilômetros, que função matemática ele pode utilizar para obter o valor exato? Representando essa função em um gráfico, qual será o seu formato?

Resolução e comentários

Sendo f a função que indica o preço da viagem em reais, em relação à variável x, que indica a quantidade de quilômetros rodados, segue que $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, definida por $f(x) = 1{,}25x + 5$. O gráfico da função é uma reta que corta o eixo y no ponto $(0, 5)$.

Página 108

O conteúdo do tópico **Função afim** contempla a habilidade **EM13MAT302** da BNCC ao trabalhar com a resolução de problemas que envolvem funções afins e equações lineares, as quais são representadas tanto em seus registros algébricos quanto em sua forma gráfica no plano cartesiano, incentivando a compreensão, a interpretação e a identificação, por parte dos estudantes, de certas propriedades presentes em ambos os tipos de registro, realizando as conversões entre eles.

Ao utilizar procedimentos específicos para resolver problemas relacionados a funções afins, os estudantes exploram conceitos e estratégias matemáticas na interpretação e na construção de modelos, analisando os resultados obtidos de maneira crítica para chegar a um resultado plausível, conforme orienta a **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 3** da BNCC.

Além disso, ao incentivar os estudantes a argumentar quais medidas podem ser tomadas em casa para reduzir o consumo mensal de energia elétrica, aborda-se a **Competência geral 7 da BNCC**.

Páginas 110 e 111

O problema resolvido **R2** favorece o desenvolvimento do **pensamento computacional** ao propor a construção de um algoritmo para determinar os zeros de uma função afim (caso haja), considerando sua lei de formação, pois leva os estudantes a refletir a respeito do funcionamento de um algoritmo, considerando o tema em discussão.

Na tarefa **7**, os estudantes são levados a representar, no plano cartesiano, alguns pontos cujas coordenadas estão indicadas em um quadro. Posteriormente, eles devem identificar um padrão entre essas coordenadas e determinar a expressão algébrica que as relacione, conforme orientam a habilidade **EM13MAT501** e a **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 5** da BNCC.

Página 113 a 116

Os conceitos trabalhados nessa página e no tópico **Função afim crescente e função afim decrescente** complementam as reflexões anteriores destacando o crescimento e o decrescimento de funções afins e o estudo de seu sinal. Essas propriedades são essenciais para a descrição de fenômenos de natureza linear, como é o caso da relação estabelecida entre o valor a ser pago e a quantidade adquirida de unidades de um mesmo produto.

Na seção **Resolvendo por etapas**, os estudantes são levados a interpretar o sistema de tributação aplicado no Regime Geral de Previdência Social (RGPS) por meio da análise das representações algébricas e gráficas da função que define esse regime, contemplando aspectos das habilidades **EM13MAT101** e **EM13MAT404**. Desse modo, eles aplicam os conhecimentos adquiridos em ambiente escolar na interpretação de situações que integram o cotidiano de grande parte da população, despertando a curiosidade intelectual e chamando a atenção para a aplicabilidade de conceitos teóricos de diferentes áreas em situações comuns, contribuindo para uma formação generalizada, conforme orientam a **Competência geral 2** da BNCC e as **Competências específicas de Matemática e suas Tecnologias 1** e **4** da BNCC.

As tarefas propostas na seção **Exercícios e problemas** desse tópico possibilitam o desenvolvimento de aspectos das habilidades **EM13MAT302** e **EM13MAT404** e das **Competências específicas de Matemática e suas Tecnologias 3** e **4** da BNCC, uma vez que sugerem a construção de modelos empregando funções afins para resolver problemas e a análise de funções definidas por uma ou mais sentenças em suas representações gráfica e algébrica, identificando domínio, imagem, crescimento e decrescimento, bem como convertendo representações algébricas em representações gráficas. O uso de diferentes tipos de linguagem e a própria linguagem matemática são úteis para auxiliar os estudantes na aprendizagem de determinados conteúdos.

A tarefa **19** discute o emprego do bagaço da cana-de-açúcar na geração de energia elétrica. Aproveite o tema para explorar a geração de energia elétrica com base em fontes renováveis, com destaque para a biomassa, viabilizando o desenvolvimento do pluralismo de ideias, da argumentação e do pensamento crítico. Comente que, além de ser renovável, as vantagens desse tipo de fonte de energia envolvem o baixo custo, o uso de tecnologia nacional, entre outras possibilidades. Incentive-os também a refletir sobre a relação entre essa temática e o **Objetivo 7** da **Agenda 2030**.

Sugestão de avaliação

A fim de analisar a compreensão dos estudantes em relação aos conteúdos trabalhados até o momento, sugira a resolução na lousa de algumas das tarefas propostas na página **116**. Além disso, é importante auxiliá-los a desenvolver a capacidade de avaliar os próprios processos de aprendizagem. Para isso, proponha algumas questões, como as indicadas a seguir.

- Estudei os conteúdos trabalhados na aula de função afim crescente e função afim decrescente?
- Participei das discussões propostas?
- Relacionei os conteúdos propostos nesse tema aos já trabalhados?

Com base nessas questões, eles podem refletir sobre os conhecimentos adquiridos.

Página 119

Antes de iniciar a exploração dos conteúdos do tópico **Proporcionalidade e função linear** proponha um debate sobre as grandezas diretamente e inversamente proporcionais, buscando investigar os conhecimentos prévios dos estudantes a respeito desses conceitos. Durante essa conversa, incentive-os a apresentar exemplos de grandezas proporcionais e não proporcionais. Além disso, ao citar exemplos, peça-lhes que classifiquem as grandezas proporcionais como direta ou inversamente proporcionais.

Páginas 120 e 121

O trabalho com a seção **Exercícios e problemas** contribui para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT302** e da **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 3** da BNCC ao incentivar a construção de modelos matemáticos que empregam funções afins, mais especificamente as funções lineares, considerando contextos provenientes das mais variadas situações. Desse modo, os estudantes são levados a interpretar as situações e as representações algébricas ou geométricas desses modelos, tornando-se capazes de solucionar os problemas em estudo.

A tarefa **30** possibilita o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT401** e da **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 4** da BNCC ao solicitar aos estudantes que convertam representações algébricas de funções afins em representações geométricas no plano cartesiano e identifiquem os casos nos quais o comportamento é proporcional.

Após resolver a tarefa **32**, leve para a sala de aula um mapa do Brasil e mostre-o aos estudantes. Peça que, utilizando a escala do mapa, escrevam a lei de formação de uma função que permita calcular a distância real entre dois pontos do mapa. Em seguida, instrua-os a medir a distância em linha reta entre algumas capitais e a determinar a distância real entre elas, utilizando a função escrita. Depois, oriente-os a pesquisar as distâncias reais entre essas capitais para que possam compará-las aos valores obtidos com a função e identificar se os valores ficaram próximos. Caso a diferença tenha sido muito grande, leve-os a refletir sobre suas possíveis causas.

Verifique a possibilidade de realizar um trabalho com o professor do componente curricular de **Geografia** voltado ao processo de construção de mapas e à importância da identificação das escalas. Pode ser feito um estudo a respeito dos diferentes tipos de mapa construídos ao longo da história, destacando os tipos de projeção adotados e suas principais características. Em seguida, podem ser explorados os mapas do Brasil, de estados, de regiões metropolitanas e de municípios brasileiros, destacando as escalas adotadas em cada um deles para que os estudantes possam compreender as diferenças entre elas.

Considerando que o assunto em discussão na tarefa **34** está relacionado aos tributos, essa seção contribui para o desenvolvimento dos temas contemporâneos transversais **Educação financeira** e **Educação fiscal**, pois leva os estudantes a perceber a importância do hábito de controlar os gastos, considerando as diversas obrigações relacionadas à vida em sociedade, e da fiscalização dos investimentos públicos, principalmente dos relacionados à saúde e à educação, conscientizando-os a respeito dos tipos de investimentos que devem ser feitos com os tributos pagos pela sociedade.

Além disso, a seção favorece o desenvolvimento do tema contemporâneo transversal **Educação em direitos humanos** ao incentivar os estudantes a conhecer os próprios direitos, como o acesso à educação e à saúde de qualidade, considerando sua participação nas arrecadações do município, do estado e do país onde residem. Essas ações podem conduzi-los a assumir uma postura ativa no sentido de exigir dos governantes os direitos estabelecidos na Constituição Federal e nos demais documentos que orientam a sociedade e o desenvolvimento do país.

Ao fim do trabalho com esse tópico, verifique a conveniência de utilizar a estratégia ***Quick writing*** para avaliar o aprendizado dos estudantes, levando-os a refletir sobre os conteúdos estudados. Em debate, se possível, solicite a eles que comentem quais são as vantagens dos estudos matemáticos dos conceitos envolvendo proporcionalidade e função linear, analisando sua aplicabilidade na resolução de problemas provenientes de diferentes áreas e contextos.

Página 122

Nessa página, é apresentado um esquema de organização de dados relativos à quantidade de vendas por mês de uma empresa hipotética para ilustrar o conceito e a importância de modelos lineares. No exemplo, a organização dos dados em um gráfico sugere visualmente que eles seguem, com poucas variações, uma linha reta. Explique aos estudantes que, caso haja motivos para crer, com relativa segurança, que a tendência observada se manterá pelos próximos meses, então é possível aproximar os dados "dispersos" por uma reta que sintetize o comportamento médio deles. Com base nessa reta, os donos da empresa poderão estimar as vendas futuras, planejando com mais segurança em relação à realidade.

É importante notar, contudo, que a pertinência e a eficácia de modelos lineares demandam que haja forte relação de linearidade entre os dados, bem como que ocorra suficiente quantidade de dados para promover a suposição dessa relação de linearidade. Os estudantes também devem perceber que, na análise de dados do mundo real, existe uma multiplicidade de fatores influenciando os fenômenos, de modo que aproximações lineares podem ser eficazes para estimativas apenas até certo ponto. No caso da empresa do exemplo, não é sensato pressupor que a relação entre a quantidade de meses e a quantidade de produtos vendidos se mantenha linear para sempre. Se fosse esse o caso, em algum momento a quantidade de produtos vendidos seria tão grande que ultrapassaria a capacidade de compra dos clientes, o que, naturalmente, é impossível. Além disso, a qualidade dos produtos fornecidos, o investimento em *marketing*, a quantidade de funcionários da empresa e a situação econômica dos clientes são fatores decisivos no sucesso das vendas. Dessa maneira, modelos lineares são aplicáveis em previsões de curto prazo e, embora tenham essa limitação, são capazes de fornecer parâmetros de grande praticidade para estimativas, fundamentando a tomada de decisões.

Os conteúdos propostos nesse tópico contemplam as **Competências específicas de Matemática e suas Tecnologias 3** e **5** da BNCC, desenvolvendo sobretudo as habilidades **EM13MAT302** e **EM13MAT510**. Ao longo do tópico, os estudantes são desafiados a analisar o comportamento de duas variáveis numéricas, utilizar uma reta para descrever a relação identificada e resolver problemas com base no modelo construído.

Página 123

Para que os estudantes percebam que inúmeras retas podem aproximar um conjunto de dados, mas que algumas são mais convenientes do que outras por estarem mais próximo da maior parte dos dados, sugira-lhes que, usando uma régua, verifiquem outras possibilidades de retas para aproximar os dados do exemplo, buscando aquela que lhes pareça a mais adequada.

Página 124

Para o desenvolvimento da seção **Acessando tecnologias**, pode-se usar o programa Calc, uma planilha eletrônica do pacote LibreOffice. A versão gratuita do aplicativo inclui também editores de texto, de apresentação, de desenhos e de banco de dados. Para fazer o *download* e instalar o programa, basta acessar o *site*. Disponível em: https://pt-br.libreoffice.org/baixe-ja/libreoffice-novo/. Acesso em: 12 ago. 2024.

Uma sugestão para o trabalho com essa seção é utilizar, se possível, o laboratório de informática da escola. Para isso, verifique antecipadamente se em todos os computadores há o *software* necessário para o desenvolvimento do contexto. Durante a tarefa, caso os estudantes tenham dificuldade, auxilie-os na execução das etapas propostas.

Além de ser outra maneira de explorar o conteúdo, ao usar a planilha eletrônica (nesse caso, o *software* Calc) para manusear técnicas de regressão linear, os estudantes são levados a compreender e a se familiarizar com o uso de tecnologias digitais de informação e comunicação para partilhar informações e divulgar conhecimentos, lidando com diferentes linguagens, contemplando as **Competências gerais 4** e **5** da BNCC.

Página 127

Ao trabalhar com a tarefa **40**, leve os estudantes a questionar se as respostas dadas garantem ou não que as previsões vão se efetivar na prática. Com base nesse questionamento, conduza-os a perceber que modelos lineares traduzem tendências abstratas baseadas unicamente em dados numéricos, indicando, com base nas informações coletadas, o comportamento mais provável dos dados em vez de uma garantia. Isso ocorre porque esses modelos não se baseiam em parâmetros que expliquem a exata natureza dos dados (o que é inviável ou mesmo impossível, na maioria das situações práticas). No caso do IDH de um país, muitos fatores imprevisíveis podem fazer com que seu valor mude drasticamente, contrariando as previsões mais razoáveis. Alguns exemplos são: crises econômicas, guerras, catástrofes ambientais (que tendem a diminuir o IDH), além de avanços em ciência e educação, investimentos bem aplicados em saneamento básico e políticas públicas focadas em reduzir desigualdades (que tendem a aumentar o IDH). O que a regressão linear traduz é o comportamento do crescimento do IDH em situações convencionais, pressupondo que não haja mudanças bruscas em nenhum fator determinante para o desenvolvimento humano da população. Aproveite essa temática e incentive os estudantes a refletir sobre a relação com o **Objetivo 8** da **Agenda 2030**.

No trabalho com a tarefa **41**, saliente a importância de ter uma quantidade suficiente de dados para fazer especulações seguras. Incentive os estudantes a perceber que a "quantidade suficiente" de dados depende da natureza de cada problema, exigindo discernimento e certa experiência de quem quer que se encarregue de realizar a análise dos dados.

Páginas 128 e 129

Após as discussões a respeito do plano de telefonia no exemplo e da apresentação da definição de inequação do 1º grau, converse com os estudantes sobre os planos de telefonia comercializados na região onde residem. Para isso, pode ser proposta uma pesquisa considerando as operadoras de telefonia disponíveis no local e um estudo análogo ao que foi feito nessa página, considerando os diferentes planos oferecidos pelas operadoras, favorecendo uma discussão voltada à importância de pesquisar preços e comparar diferentes ofertas antes de adquirir um plano de telefonia ou outro tipo de serviço ou produto.

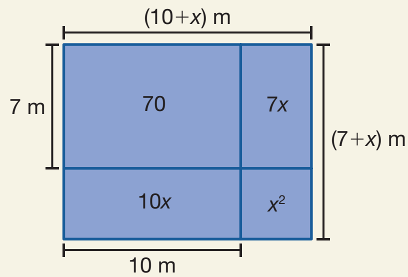
Aproveite a oportunidade para falar da importância de o consumidor estar atento aos seus direitos, principalmente no que se refere aos serviços prestados a ele, como é o caso dos planos de telefonia móvel. Comente que a Agência Nacional de Telecomunicações (Anatel) é o órgão responsável por regular o setor das telecomunicações no Brasil, inclusive as operadoras de telefonia móvel, fiscalizando-as para que sejam prestados serviços de qualidade aos brasileiros. Para mais informações quanto às atividades desenvolvidas por essa agência, oriente os estudantes a acessar o *site* da Anatel. Disponível em: https://www.gov.br/anatel/pt-br. Acesso em: 28 set. 2024.

No trabalho com a tarefa **44**, converse com os estudantes a respeito das culturas juvenis envolvendo filmes, questionando, por exemplo, se já foram ou costumam ir ao cinema e seus tipos de filmes preferidos. Caso eles frequentem cinemas com regularidade, pergunte como escolhem os dias e horários e se essa opção é feita considerando os preços cobrados ou se há outros fatores mais relevantes do que o valor das entradas.

A temática abordada sobre telefonia móvel possibilita o trabalho com o tema contemporâneo transversal **Educação financeira** ao solicitar a tomada de decisões diante da oferta de diferentes planos, conduzindo os estudantes a avaliar quais são os mais adequados financeiramente.

Página 130

A situação proposta nessa página, em que se deseja aumentar a área retangular para a plantação de verduras, pode ser explorada associando representações algébricas e geométricas. Antes de apresentar a fórmula $f(x) = x^2 + 17x + 70$, que representa a área da região reservada para o plantio de verduras, mostre aos estudantes que essa área pode ser calculada multiplicando o comprimento da região por sua largura. Para isso, construa com eles na lousa o seguinte esquema.



HELOÍSA PINTARELLI/ ARQUIVO DA EDITORA

$$10 \cdot 7 + 10x + 7x + x^2 = (10 + x)(7 + x)$$

Verifique se todos concordam que a expressão $(10 + x)(7 + x)$ representa a área da região retangular proposta quando ocorre um acréscimo de x metros nas duas dimensões.

Ao realizar o desenvolvimento de $(10 + x)(7 + x)$, expressão apresentada no **Livro do Estudante**, procure identificar se eles compreenderam todas as etapas.

Páginas 132 e 133

Algumas das tarefas da seção **Exercícios e problemas** favorecem o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT302** e da **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 3** da BNCC ao solicitar a construção de modelos matemáticos envolvendo funções quadráticas para resolver problemas em contextos diversos.

No item **d** da tarefa **55**, verifique a possibilidade de desenvolver um trabalho interdisciplinar com a área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, principalmente com o componente curricular de **Física**, no qual sejam exploradas as características do movimento de objetos em queda livre, relacionando os conceitos físicos envolvidos com as propriedades das funções quadráticas, visando ao desenvolvimento da **Competência específica de Ciências da Natureza e suas Tecnologias 3** da BNCC.

Para o desenvolvimento dessa questão, sugira aos estudantes que utilizem o Tracker, aplicativo gratuito de análise de vídeo e ferramenta de modelagem desenvolvida para aplicações em aulas de **Física**. Disponível em: https://physlets.org/tracker/. Acesso em: 12 ago. 2024. Para que eles criem uma apresentação demonstrando o passo a passo da análise, sugira que utilizem o Scratch, ferramenta gratuita desenvolvida no Massachusetts Institute of Technology (MIT) voltada à criação de histórias animadas e jogos interativos. Disponível em: https://scratch.mit.edu/. Acesso em: 12 ago. 2024.

A fim de complementar o trabalho com a tarefa **55**, realize com os estudantes uma experiência para contrapor a afirmativa de Aristóteles (384-322 a.C.) de que objetos com maior massa encontram primeiro o solo, quando soltos de uma mesma altura, do que os de menor massa. Nessa proposta, peça aos estudantes que soltem, simultaneamente e de uma mesma altura, uma folha de papel (menor massa) e um caderno (maior massa). Nesse caso, o caderno chegará ao solo primeiro. Depois, solicite que amassem a folha de papel obtendo uma bola e repitam a experiência. Nesse caso, espera-se que o caderno e a folha amassada encontrem o solo quase ao mesmo tempo, evidenciando a influência da resistência do ar no experimento.

Páginas 137 e 138

As tarefas **63** e **66** da seção **Exercícios e problemas** favorecem o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT302** ao solicitar a interpretação de situações, bem como a construção e o estudo de modelos matemáticos envolvendo funções quadráticas.

Na tarefa **64**, os estudantes são desafiados a esboçar o gráfico de funções quadráticas dada a lei de formação de cada uma delas. Além disso, é solicitada a identificação dos casos em que uma variável é diretamente proporcional ao quadrado da outra, contemplando a habilidade **EM13MAT402**.

Já a tarefa **65** propõe aos estudantes que investiguem relações entre números expressos em quadros, criem conjecturas e as generalizem por meio de expressões, identificando padrões e reconhecendo quando as representações algébricas são de funções do tipo $f(x) = ax^2$, conforme solicita a habilidade **EM13MAT502**. Desse modo, abordam-se aspectos das **Competências específicas de Matemática e suas Tecnologias 3**, **4** e **5** da BNCC.

Páginas 142 e 143

Educação Midiática

A seção **Virou *meme*?** explora com os estudantes as principais características dos *memes* e os apresenta como um gênero comunicativo atual.

Ao abordar as características de um gênero textual, essa seção possibilita uma integração com o componente curricular de **Língua Portuguesa**. Se julgar interessante, convide o professor desse componente para auxiliar na promoção de uma abordagem conjunta da seção.

Se possível, providencie alguns *memes*, além dos que são abordados na seção, para apresentar em sala de aula. Preferencialmente, leve conteúdos mais antigos e explique aos estudantes que a compreensão de alguns *memes* está relacionada ao conhecimento ou à afinidade que o receptor tem com o assunto tratado.

Ao abordar com os estudantes a questão **1**, verifique se conhecem esses *memes*. Se necessário, apresente a eles a origem de cada um: o *meme* “Senta lá, Cláudia!” foi originado nos anos de 1980, em uma fala de uma apresentadora com uma criança em seu programa de TV voltado para o público infantil; “Ai, que loucura” é um bordão conhecido de uma *socialite* carioca; “Receba!” é uma fala que se popularizou com um *influencer* ao produzir vídeos fazendo gols; “Reage e bota um *cropped*!” partiu de uma publicação, que viralizou em rede social, de uma moça que teria entendido a frase da irmã como um conselho motivacional.

Ao trabalhar a questão **3**, é possível sugerir aos estudantes que visitem o *site* do Museu de *memes*. Disponível em: https://museudememes.com.br/. Acesso em: 12 ago. 2024. Organizado pelo Departamento de Comunicação da Universidade Federal Fluminense (UFF), apresenta um acervo virtual com diversos *memes* contextualizando origem, repercussão e desdobramentos.

Página 147

Ao resolver a questão **G**, verifique se os estudantes percebem que as coordenadas do vértice são dadas por x_v e y_v, e para calcular esses valores é necessário conhecer os coeficientes envolvidos e obter o discriminante da equação correspondente. Sendo assim, os comandos do algoritmo devem apresentar indicação para efetuar esses cálculos. Com a ajuda da turma, faça a validação dos algoritmos escritos por eles.

Página 148

Na tarefa **88** é apresentada a lei de formação de uma função que descreve matematicamente a estrutura de uma ponte. Sugira aos estudantes outra tarefa interessante baseada na situação inversa, ou seja, dada a altura e o comprimento entre os extremos de um arco, peça que determinem a lei de formação da função quadrática que descreve matematicamente a curva. Pode-se utilizar, por exemplo, dados referentes à ponte Juscelino Kubitschek (conhecida como ponte JK), em Brasília, inaugurada no ano de 2002.

Sobre essa ponte existe uma estrutura com três arcos, cada qual medindo 240 m de vão, com altura máxima de 62,7 m. Com esses dados, é possível determinar a lei de uma função cuja representação gráfica é uma parábola que lembra esses arcos. Posicionando, no plano cartesiano, essa curva com uma das extremidades na origem do sistema, podemos afirmar que os zeros dessa função são 0 e 240, e as coordenadas do vértice da parábola são $(120; 62{,}7)$. Como $c = 0$, temos $a = -\dfrac{1{,}045}{240}$ e $b = 1{,}045$. Portanto, a lei da função que representa cada arco é $f(x) = -\dfrac{1{,}045}{240}\ x^2 + 1{,}045x$.

Página 151

Para o desenvolvimento da seção **Acessando tecnologias**, pode-se utilizar a versão *on-line* do *software* de Geometria dinâmica ou fazer o *download* dele. Disponível em: https://www.geogebra.org/. Acesso em: 30 mar. 2024.

Explique aos estudantes que, em alguns casos, o programa aproxima os resultados obtidos de acordo com suas configurações. No item **a** da questão **1**, por exemplo, são apresentadas as coordenadas aproximadas do ponto de mínimo.

Ao trabalhar com um *software* de Geometria dinâmica, ou com outros recursos tecnológicos, para a determinação do valor máximo ou do valor mínimo de funções quadráticas, os estudantes são levados a compreender e a utilizar tecnologias digitais de informação e comunicação, além de diferentes tipos de linguagem, como a digital e a matemática, para partilhar informações e divulgar conhecimentos, conforme preveem as **Competências gerais 4** e **5** da BNCC.

A questão **2** possibilita o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT503**, pois os estudantes são desafiados a investigar a abscissa do ponto de máximo do gráfico de uma função quadrática utilizando tecnologia digital.

Páginas 152 e 153

As tarefas propostas na seção **Exercícios e problemas** possibilitam o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT302** e **EM13MAT503** e de aspectos das **Competências específicas de Matemática e suas Tecnologias 3** e **5** da BNCC, uma vez que sugerem a construção de modelos empregando funções quadráticas para resolver problemas e a investigação de valores máximos ou mínimos de funções quadráticas em contextos diversos com o apoio de tecnologia digital.

Página 156

Ao resolver com os estudantes o item **d** da tarefa **111**, conduza a conversa de maneira organizada e produtiva. Permita e incentive a participação de todos na contribuição das opiniões e, depois que as duplas registrarem suas conclusões, oriente-os a trocar essas informações com o restante da turma, favorecendo assim o diálogo, a comunicação e a prática da argumentação.

Página 157

Ao longo do tópico **Inequação do 2º grau**, são propostos estudos e tarefas que envolvem a construção de modelos matemáticos caracterizados por funções polinomiais de 2º grau, viabilizando avaliar as inequações correspondentes, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT302** e da **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 3** da BNCC. Além de construir os modelos e resolver os problemas, é essencial que os estudantes interpretem os resultados, considerando as características das situações em estudo.

Página 158

Nas tarefas **119** e **120**, é solicitado aos estudantes que representem graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas, conforme indica a habilidade **EM13MAT506** da BNCC. Assim, são abordados aspectos da **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 5** da BNCC.

Página 159

Na questão **1**, se necessário, oriente os estudantes a formar duplas e retomar os conteúdos abordados no capítulo, mencionando aqueles que já conheciam e se tiveram dificuldades em algum deles.

O trabalho com a questão **2** pode ser desenvolvido por meio de textos ou dinâmicas em grupos. Nesse momento, proponha aos estudantes que elaborem questionamentos voltados aos erros mais comuns que eles identificaram durante o trabalho com os tópicos propostos. Alguns exemplos são: “Consigo estabelecer relações entre grandezas por meio de uma função afim?”; “Tenho segurança para interpretar e esboçar gráficos de uma função afim e de uma função quadrática?”; “Consigo analisar uma função afim em relação ao seu crescimento e decrescimento?”; “Consigo determinar as coordenadas do vértice do gráfico de uma função quadrática?”; “Consigo resolver inequações do 1º grau e do 2º grau?”. Com base nas respostas, espera-se que eles identifiquem suas dificuldades e ponderem a necessidade de retomar o que foi estudado.

As questões de **3** a **10** envolvem a aplicação direta dos conteúdos estudados. Por meio delas, espera-se que os estudantes validem a reflexão proposta na questão **2**. Durante o desenvolvimento dessas tarefas, oriente-os a não consultar o material e a registrar suas dúvidas. Essas anotações os auxiliarão no desenvolvimento da questão **11**.

Na síntese proposta na questão **11**, os estudantes podem usar diversas estratégias, como listas de conceitos, mapas conceituais e resumos textuais. Instigue-os a apresentar exemplos e, se julgarem conveniente, usar imagens. Incentive a criatividade nesse momento.

CAPÍTULO 5

Função exponencial e função logarítmica

Nesse capítulo, são desenvolvidas as unidades temáticas de Matemática **Números e Álgebra**, favorecendo a capacidade de compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas em funções exponenciais e funções logarítmicas em contextos diversos. Além disso, são estabelecidas relações entre os diferentes tipos de representações matemáticas, que contribuem na elaboração de estratégias para a resolução de problemas em variados contextos.

Objetivos específicos

- Conhecer o conceito de função exponencial e estudar suas características.
- Resolver e elaborar problemas envolvendo função exponencial.
- Analisar e esboçar o gráfico de uma função exponencial, identificando quando ela é crescente e quando é decrescente.
- Compreender o conceito de logaritmo.
- Interpretar e esboçar o gráfico de uma função logarítmica.
- Resolver e elaborar problemas envolvendo funções logarítmicas.
- Relacionar funções exponenciais e logarítmicas baseando-se no conceito de função inversa.
- Resolver e elaborar problemas cujos contextos envolvem equações e inequações logarítmicas.

Justificativa

Esse capítulo trata de funções exponenciais e logarítmicas. Nele, apresenta-se o conceito de função exponencial e trabalha-se com suas propriedades mais notórias. Além disso, explora-se a visualização gráfica do comportamento dessa classe de funções, bem como são examinados os casos em que uma função exponencial é crescente ou decrescente.

A abordagem do capítulo privilegia a associação de funções exponenciais a fenômenos da natureza e das ciências em geral, demonstrando a vasta abrangência e a grande importância desse tipo de função na descrição de processos físicos, químicos, biológicos, financeiros e tecnológicos. Discute-se, também, o conceito de logaritmo e suas propriedades, possibilitando realizar estudos envolvendo, entre outros aspectos, a obtenção de solução para equações exponenciais.

Páginas 160 e 161

Após trabalhar com a questão **3**, se julgar oportuno, leve os estudantes ao laboratório de informática da escola e oriente-os na construção de um gráfico em um *software* de Geometria dinâmica, ou esboce o gráfico na lousa, para mostrar o crescimento estimado da quantidade de transistores (tomando por base o primeiro microprocessador de 1971), mesmo que seja de maneira empírica.

Ao exercitar a curiosidade intelectual, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade com base nos conhecimentos das diferentes áreas, como a Lei de Moore, abordam-se aspectos da **Competência geral 2** da BNCC.

Páginas 163 e 164

Para complementar a tarefa **3**, verifique a possibilidade de realizar trabalhos com o professor da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, preferencialmente do componente curricular de **Biologia**, a fim de apresentar mais informações aos estudantes acerca do processo de divisão celular. Uma possibilidade é explicar as divisões mitóticas do zigoto (nome dado à célula formada pela união do espermatozoide com o óvulo), indicando que ele se desenvolve em divisões e subdivisões que seguem o padrão relatado no enunciado da tarefa, em uma fase de divisão e multiplicação celular denominada clivagem. Peça aos estudantes que pesquisem e levem para a sala de aula esquemas ou ilustrações que representem alguns ciclos de divisões mitóticas. Verifique se eles conseguem interpretar corretamente a relação entre esse fenômeno e o conceito de crescimento exponencial, percebendo que o aumento da quantidade de células, nesse caso, não é linear.

O boxe **Para expandir** permite fomentar a aplicação das funções exponenciais no estudo da radioatividade, bem como de fenômenos correlatos. A proposta é que os estudantes utilizem seus conhecimentos a respeito das funções exponenciais e suas propriedades, aplicando-os na interpretação de diferentes situações envolvendo a radioatividade.

Verifique a possibilidade de realizar um trabalho com os professores dos componentes curriculares de **Física** e **Química** a respeito da radioatividade, propondo um estudo mais aprofundado sobre esse assunto. Também é possível tratar de algumas das suas aplicações, como é o caso do funcionamento das usinas nucleares, destacando suas vantagens e desvantagens, além de desenvolver a capacidade da inferência, a argumentação e o pluralismo de ideias. Nesse sentido, podem ser considerados os aspectos econômicos e ambientais, como o processo de descarte de materiais radioativos. Também podem ser organizados grupos com estudantes de diferentes perfis, para que possam compartilhar conhecimentos e habilidades, visando, por exemplo, ao estudo dos grandes problemas e catástrofes que envolveram o uso da radioatividade, como a ativação da bomba atômica, desastres em usinas nucleares, entre outros.

As discussões motivadas pelo tópico abordado nessa página contribuem para o trabalho com a **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 1** da BNCC, pois propõem a interpretação de situações envolvendo questões tecnológicas, como os avanços nas ciências motivados pelo uso de elementos radioativos, além de questões socioeconômicas e históricas, tomando por base os conhecimentos a respeito das funções exponenciais e suas aplicações no cotidiano. Além disso, favorecem o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT304** e de aspectos da **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 3** da BNCC, por exigir dos estudantes a interpretação de problemas, situados no contexto da radioatividade, empregando as funções exponenciais e suas propriedades.

O trabalho com esse assunto também contribui para a abordagem dos temas contemporâneos transversais **Saúde** e **Educação ambiental**, permitindo, por um lado, a conscientização dos estudantes sobre as contribuições da radioatividade para o diagnóstico de doenças, para os avanços na Medicina e para os estudos relacionados à história da humanidade. Por outro lado, permite reflexões a respeito dos malefícios, para os indivíduos e para o meio ambiente, do uso inadequado dos elementos radioativos, que podem causar grandes desastres, como o lançamento das bombas atômicas durante a Segunda Guerra Mundial ou o acidente radiológico de Goiânia, no Brasil, em 1987.

Páginas 165 e 166

Após trabalhar com os exemplos de gráficos de função exponencial apresentados nessas páginas, sugira aos estudantes que esbocem o gráfico da função do tipo exponencial definida por $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2$ para que percebam, nesse caso, que o gráfico cruza os eixos x e y. Essa proposta também pode ser realizada com o auxílio de um *software* de Geometria dinâmica, em que os estudantes poderão explorar a construção de gráficos de outras funções exponenciais, analisando o que acontece quando, na função dada por $f(x) = b \cdot a^x + c$, são alterados os valores de b e c.

Ao trabalhar com o item **b** da tarefa **7**, verifique se os estudantes percebem que, apesar de o número 6 ser maior do que 1, o fato de o expoente ser negativo faz com que a função exponencial dada por $f(x) = 6^{-x}$ possa ser convenientemente reescrita como $f(x) = \left(\frac{1}{6}\right)^x$, ou seja, uma função decrescente.

Página 167

Trabalho e juventudes

O contexto apresentado na seção **O que faz um biólogo?** fomenta o debate sobre a atuação de um biólogo em diferentes áreas. Inicie o trabalho explorando os conhecimentos prévios dos estudantes a respeito do trabalho do biólogo, perguntando o que sabem da profissão e dos objetos de estudo desse profissional.

Na resolução da atividade **2**, organize as duplas ou os grupos com estudantes de diferentes perfis, para que possam realizar a pesquisa. Se necessário, indique aos estudantes o *site* do Conselho Federal de Biologia. Disponível em: https://cfbio.gov.br/areas-de-atuacao/. Acesso em: 13 ago. 2024. Explique-lhes que, ao clicar em cada uma das três áreas de atuação disponíveis, é possível visualizar um desdobramento das áreas de atuação do biólogo, escolhendo uma delas para fazer a pesquisa.

Para realizar a visita sugerida nessa seção, providencie, com antecedência, a autorização dos responsáveis dos estudantes menores de idade e verifique a necessidade de equipamentos de segurança. Oriente os estudantes a elaborar antecipadamente algumas questões e deixe-os à vontade para fazer outros questionamentos durante a visita, ressaltando a importância do diálogo respeitoso. Incentive-os também a fazer uma pesquisa para avaliar as representatividades nessa profissão. Essa é uma boa oportunidade para conversar com eles sobre as barreiras e os preconceitos que ainda impedem o nosso país de ter mais biólogos e cientistas que sejam brasileiros, negros, indígenas, mulheres ou LGBTQIA+, por exemplo.

Páginas 168 e 169

A fim de verificar o conhecimento prévio dos estudantes acerca do tópico **Equação exponencial**, proponha-lhes o problema a seguir.

Sugestão de avaliação

Suponha que a população de uma bactéria do tipo *A* duplique a cada hora e que a população de uma bactéria do tipo *B* quadriplique nesse mesmo intervalo de tempo. Se, em dado momento, houver 240 bactérias do tipo *A* e 30 bactérias do tipo *B*, depois de quantas horas a quantidade de bactérias de ambos os tipos será a mesma?

Resolução e comentários

Uma maneira de resolver esse problema é construindo um quadro.

Quantidade de bactérias em função das horas

Tipo	Após 1 h	Após 2 h	Após 3 h
A	480	960	1920
B	120	480	1920

Portanto, após 3 horas, haverá a mesma quantidade de bactérias do tipo *A* e do tipo *B*.

Na resolução desse problema, verifique quais procedimentos os estudantes empregam para buscar a solução: eles tentam comparar as quantidades com o auxílio de quadros ou descrevem a quantidade de bactérias em função do tempo e tentam resolver a equação resultante? Se optarem pela via algébrica, quais estratégias eles utilizam para resolver a equação?

Na seção **Exercícios e problemas** desse tópico, os estudantes são desafiados a elaborar e resolver problemas envolvendo funções exponenciais em contextos variados, compreendendo a variação das grandezas, abordando a habilidade **EM13MAT304** e aspectos da **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 3** da BNCC.

Página 172

A tarefa **31** apresenta um problema relacionado ao crescimento populacional de duas espécies. Verifique se os estudantes percebem que, como a inequação $\frac{P(n)}{Q(n)} \geq 1024$ indica que a espécie *Q* está em risco de extinção, é possível interpretar que a espécie *P* é composta de predadores da espécie *Q*. Deduz-se isso do fato de que, se a quantidade de predadores é muito maior do que a quantidade de presas, então a tendência é a de que as presas sejam completamente eliminadas pelos predadores, entrando em extinção.

Ao fim do trabalho com esse tópico, verifique a conveniência de utilizar a estratégia ***Quick writing*** para avaliar o aprendizado dos estudantes, fazendo-os refletir sobre os conteúdos abordados. Recapitule de modo sucinto as distinções entre equações e inequações. Na sequência, peça a eles que comentem quais estratégias de resolução de equações e inequações exponenciais lhes chamaram a atenção, orientando-os a sintetizar a abordagem adotada na tentativa de determinar o valor da incógnita de uma equação exponencial ou encontrar o conjunto solução de uma inequação exponencial.

Página 173

Ao trabalhar com o tópico **Logaritmo**, diga aos estudantes que os logaritmos foram desenvolvidos pelo escocês John Napier (1550-1617), no início do século XVII. Antes de seu desenvolvimento, efetuar cálculos como 1,45786 · 2,38761 ou 5,78204 **:** 3,89367 era, em geral, trabalhoso e demorado. Contudo, após a descoberta de Napier, operações desse tipo puderam ser transformadas em adições e subtrações, o que, na maioria dos casos, era mais simples e rápido.

Em sua obra *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos), de 1614, Napier explica a natureza dos logaritmos, cujo objetivo principal era minimizar os cálculos realizados pelos navegadores e astrônomos da época.

Fonte de pesquisa: BOYER, Carl Benjamin. *História da matemática*. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Blücher, 1974.

Página 177

Ao trabalhar com as tarefas da seção **Exercícios e problemas**, verifique a conveniência de aplicar algum dos problemas sob a perspectiva da estratégia ***Think-pair-share***. Nesse sentido, depois de resolvido os problemas, pode ser realizada uma apresentação das soluções obtidas para toda a turma e a discussão a respeito das soluções apresentadas.

Páginas 180 e 181

O estudo da tarefa **58** contribui para o desenvolvimento de aspectos da habilidade **EM13MAT305**, por relacionar o conceito de função logarítmica ao estudo de terremotos, propiciando a interpretação desse assunto com base em conceitos matemáticos correspondentes.

O estudo apresentado sobre os terremotos aborda a **Competência específica de Ciências da Natureza e suas Tecnologias 1** da BNCC, pois trata de um fenômeno natural, possibilitando aos estudantes a compreensão dos impactos causados por esse tipo de acontecimento sobre a sociedade.

Esse contexto também permite aos estudantes que utilizem ferramentas matemáticas para o desenvolvimento do seu estudo, contribuindo para a abordagem da **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 1** da BNCC, visto que os conhecimentos matemáticos são empregados na interpretação e no estudo desse fenômeno natural.

A tarefa **60** discute o nível sonoro de um ambiente. Aproveite essa oportunidade para trabalhar com o tema contemporâneo transversal **Saúde**, no que se refere aos cuidados que devemos ter ao utilizar, por exemplo, fones de ouvido. Esclareça que, segundo pesquisas realizadas por médicos otorrinolaringologistas, a orientação é que o limite seguro para o ouvido é cerca de 80 dB, o que corresponde a utilizar os fones de ouvidos com volume, no máximo, até a metade da capacidade do equipamento, além de não dormir usando esses fones, para que não haja prejuízos à saúde auditiva.

A tarefa **64** contribui para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT403** ao propor o estudo de uma função logarítmica e de uma função exponencial considerando os respectivos valores apresentados em um quadro, de modo que seja necessário interpretar esses dados para obter informações a respeito de suas principais características, como domínio e imagem. Esse contexto resume o que é solicitado nas **Competências específicas de Matemática e suas Tecnologias 3** e **4** da BNCC ao levar os estudantes a utilizar diferentes tipos de representações matemáticas, como a algébrica (lei de formação da função) ou a geométrica (gráfico da função), na elaboração de estratégias para a resolução de problemas em diversos contextos.

Páginas 182 e 183

Desenvolvimento sustentável

Para iniciar o estudo com a seção **Em busca do crecimento mundial sustentável**, verifique o conhecimento prévio dos estudantes com relação ao tema. Pergunte-lhes o que supõem que está ocorrendo para a redução no ritmo do crescimento da população mundial. Espera-se que os estudantes compreendam que, no decorrer das décadas, a população mundial passou por muitas mudanças, entre elas mudanças comportamentais e culturais por parte da população de diversos países, maior tempo de ocupação das pessoas em estudos e trabalho, novas posturas políticas que foram adotadas por governos para controlar a natalidade, além de outros fatores que foram determinantes para a queda do crescimento populacional, como o acesso a serviços de saúde sexual e reprodutiva, de acordo com o **Objetivo 3** da **Agenda 2030**, elaborado pela Organização das Nações Unidas (ONU).

Esclareça aos estudantes que, em favor da igualdade de gênero, para contemplar o **Objetivo 5** da **Agenda 2030**, encontram-se a eliminação de práticas nocivas, como os casamentos prematuros, forçados e de crianças, e o acesso de todas as mulheres à saúde sexual e reprodutiva, garantindo autonomia de seus direitos reprodutivos. Ambas as metas têm importante relação com o crescimento populacional, mas não são as únicas.

Avalie a conveniência de preparar uma aula com um professor da área de **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**. Com o auxílio do componente curricular de **História**, é possível comparar as características das formações familiares atuais com as do início do século XX, destacando as mudanças e permanências, principalmente com relação aos papéis do homem e da mulher no núcleo familiar. Já com **Geografia**, é possível explorar as influências das taxas populacionais na formulação de políticas públicas de um país, além de refletir sobre outros fatores que contribuem com a variação demográfica, como instabilidades referentes ao futuro, aumento das desigualdades e preocupações com as mudanças climáticas.

Páginas 186 e 187

A tarefa **79** contribui para o desenvolvimento da **Competência específica de Ciências da Natureza e suas Tecnologias 3** da BNCC, por abordar as consequências do acidente nuclear de Chernobyl, incentivando a reflexão dos estudantes sobre a situação-problema à luz dos conhecimentos a respeito de funções logarítmicas, avaliando seus impactos para a sociedade.

As discussões propiciadas pelo trabalho com a tarefa **81** incentivam a abordagem do tema contemporâneo transversal **Saúde**, por falar a respeito das funções da tireoide para o corpo humano, bem como os efeitos de possíveis problemas nessa glândula, permitindo enfatizar a importância de se realizar, periodicamente, exames de saúde preventivos, visando detectar possíveis problemas e auxiliando na manutenção da saúde e da qualidade de vida.

No trabalho com a tarefa **83**, explique aos estudantes que a utilização do pH na indústria permitiu que diversos processos, como a produção de vacinas, as fermentações e a produção de leite e seus derivados, fossem realizados por meio de procedimentos mais adequados.

Na questão **1**, se necessário, oriente os estudantes a formar duplas e retomar os conteúdos abordados no capítulo, mencionando os que já conheciam e se houve algum em que tiveram dificuldade.

O trabalho com a questão **2** pode ser desenvolvido de diferentes maneiras: por meio de desenhos, textos, dinâmicas em grupos, entre outras. Nesse momento, se necessário, proponha aos estudantes que elaborem questionamentos em função dos erros mais comuns que eles identificaram durante o trabalho com os tópicos propostos. Alguns exemplos são: "Consigo relacionar grandezas por meio de funções exponenciais?"; "Consigo resolver problemas envolvendo função exponencial?"; "Reconheço as propriedades operatórias dos logaritmos?"; "Consigo resolver problemas envolvendo função logarítmica?", entre outros. Com base nas respostas, é esperado que eles identifiquem suas dificuldades e reflitam acerca da necessidade de retomar o que foi estudado.

As questões de **3** a **10** são de direta aplicação dos conteúdos estudados. Com elas, é esperado que os estudantes validem a reflexão proposta na questão **2**. Durante o desenvolvimento dessas questões, oriente-os a não consultar o material e a registrar suas dúvidas, pois esses registros auxiliarão o desenvolvimento da questão **11**.

Na síntese proposta na questão **11**, os estudantes podem usar diversas estratégias, como listas de conceitos, mapas conceituais, resumos textuais, entre outros. Instigue-os a apresentar exemplos e, caso julguem conveniente, usar imagens. Incentive-os a utilizar a criatividade nesse momento.

CAPÍTULO 6 Sequências

Nesse capítulo, são desenvolvidas as unidades temáticas de Matemática **Números e Álgebra**, relacionadas a progressões aritméticas associadas a funções afins, e a progressões geométricas associadas a funções exponenciais. Dessa forma, são apresentadas as deduções de algumas fórmulas, para determinar os termos dessas sequências, além de problemas envolvendo esses conceitos.

Objetivos específicos

- Reconhecer sequências numéricas.
- Calcular a soma dos termos de uma progressão aritmética.
- Relacionar progressões aritméticas com funções afins e funções quadráticas.
- Resolver problemas utilizando o conceito de progressão aritmética.
- Identificar uma progressão geométrica e determinar seus termos utilizando a lei de formação correspondente.
- Calcular a soma dos *n* primeiros termos de uma progressão geométrica.
- Resolver situações-problema utilizando os conceitos de progressão geométrica.

Justificativa

Esse capítulo trata das progressões aritméticas (PA), iniciando com uma apresentação sobre o conceito de sequências numéricas, das quais as progressões aritméticas são casos especiais. Também são apresentadas as definições e notações usadas para o estudo do assunto e são feitas observações para ajudar os estudantes a distinguir cada conceito com objetividade, evitando, assim, que haja confusão entre as noções de sequências numéricas e conjuntos numéricos, entre sequências finitas e sequências infinitas, ou mesmo entre as classificações das sequências (crescentes, decrescentes e constantes).

Aborda também as progressões geométricas (PG), bem como suas principais características e definição, apresentando a fórmula para o termo geral e a soma dos *n* primeiros termos de uma sequência dessa natureza.

Sugestão de avaliação

A fim de verificar o conhecimento prévio dos estudantes acerca dos conceitos relacionados a esse conteúdo, sugira o problema a seguir.

Numa escola com 100 estudantes, há um corredor onde estão enfileirados 100 armários, inicialmente todos fechados, enumerados em ordem crescente de 1 a 100. Em uma das extremidades do corredor, próximo ao armário número 1, encontram-se os 100 estudantes da escola, cada um com o número do respectivo armário estampado na camiseta. Inicia-se uma gincana cuja regra é: sendo P e n inteiros, o estudante com o número n na camiseta inverte a situação dos armários de número P quando P for múltiplo de n, ou seja, abre os armários fechados e fecha os armários abertos. Assim, o estudante com o número 1 na camiseta passa pelo corredor e abre todos os armários. Depois, o estudante com o número 2 passa pelo corredor e fecha os armários pares. Em seguida, o estudante com o número 3 passa pelo corredor e inverte a situação dos armários cujo número seja múltiplo de 3, e assim sucessivamente.

Considerando que todos os estudantes tenham passado pelo corredor, responda às seguintes questões.

a) Quantos armários ficaram abertos? Quais são esses armários?

b) Existe uma regra matemática que determina a sequência numérica obtida com os números dos armários que ficaram abertos? Qual é essa regra?

Resoluções e comentários

a) 10 armários; 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 e 100.

b) Sim; $a_n = n^2$.

Incentive os estudantes a realizar uma investigação matemática a respeito da situação abordada, promovendo o desenvolvimento do pensamento matemático. Para isso, pode ser sugerida a construção de um quadro, como o que segue. Nele, cada letra **A** indica um armário aberto e cada letra **F**, um armário fechado.

Indicação das portas dos armários abertas e fechadas

Armários / Estudantes	1	2	3	4	5	6	7	...
1	A	A	A	A	A	A	A	...
2	A	F	A	F	A	F	A	...
3	A	F	F	F	A	A	A	...
4	A	F	F	A	A	A	A	...
5	A	F	F	A	F	A	A	...
6	A	F	F	A	F	F	A	...
7	A	F	F	A	F	F	F	...
8	A	F	F	A	F	F	F	...
9	A	F	F	A	F	F	F	...
10	A	F	F	A	F	F	F	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

Podemos verificar no quadro que, quando um estudante passa pelo corredor, nenhum armário com número menor do que o da sua camiseta é alterado. Por exemplo, quando o estudante número 2 passar, já sabemos que o armário 1 não será mais fechado; quando o estudante número 3 passar, o armário 1 não será fechado e o 2 não será mais aberto, e assim por diante. Se possível, com a ajuda dos estudantes, faça na lousa um quadro como o apresentado até o número 26. Peça a eles que analisem a última linha do quadro, levando-os a perceber que os armários que ficarão com as portas abertas são os de número: 1, 4, 9, 16, 25, ..., 100; ou seja, os números quadrados perfeitos menores ou iguais a 100. Isso ocorre porque esses números têm uma quantidade ímpar de divisores, enquanto os demais números têm uma quantidade par de divisores.

Assim, no procedimento de abrir e fechar os armários, como inicialmente todos os armários estão fechados, ficarão abertos os que passarem por um número ímpar de alterações. É importante que os estudantes percebam que a sequência obtida tem um comportamento padrão.

Ao longo desse capítulo, durante os exercícios e problemas propostos, é incentivado o reconhecimento das progressões aritméticas e geométricas e sua aplicação no estudo de problemas, bem como a compreensão das propriedades correspondentes e das deduções de fórmulas, além da identificação de relações entre esse tipo de sequência e as funções afins e exponenciais com domínio discreto. Desse modo, são contempladas as habilidades **EM13MAT507** e **EM13MAT508** da BNCC e são abordados aspectos da **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 5**, com base na investigação de certos padrões e no estabelecimento de conjecturas, que permitem aos estudantes empregar recursos e procedimentos cada vez mais formais na validação de propriedades matemáticas.

Página 194

Após o trabalho com a tarefa **5**, estabeleça um tempo para que os estudantes possam refletir sobre os problemas acerca do desperdício de água. Em seguida, inicie uma conversa com a turma acerca da relação entre essa temática e o **Objetivo 12** da **Agenda 2030**, desenvolvendo a argumentação, o pensamento crítico e o pluralismo de ideias.

Página 200

Ao apresentar o método de Gauss na determinação da soma dos números de 1 a 100, a tarefa **24** aborda aspectos da **Competência geral 1** da BNCC, mobilizando a valorização e o uso de conhecimentos historicamente construídos.

Páginas 207 e 208

Na tarefa **55**, proponha aos estudantes uma pesquisa a respeito de outros modelos que foram construídos historicamente para comparar o crescimento da população mundial com a produção de alimentos. Peça que, durante a pesquisa, identifiquem aspectos característicos de um texto de divulgação científica, como introdução, apresentação da metodologia da coleta de dados, citações de embasamento teórico, discussões, resultados, conclusão e bibliografia consultada.

Para complementar a tarefa **56**, verifique a possibilidade de realizar um trabalho com um professor da área de **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**, preferencialmente dos componentes curriculares de **Sociologia** e **Geografia**. Para isso, proponha aos estudantes a realização de um estudo a respeito dos casos de dengue verificados, no ano anterior ao vigente, no município em que residem, identificando em quais épocas do ano ocorreram a maior quantidade de casos e a de mortes em razão dessa doença. Com base nesse estudo, leve-os a refletir sobre as relações entre dengue e desigualdade social. Apesar de a disseminação do vírus atingir diferentes bairros e classes sociais em momentos de epidemia, as regiões mais precarizadas tendem a ser mais prejudicadas pela doença, o que pode configurar uma questão necropolítica, pelo descaso geográfico. Por mais que os moradores se esforcem para manter cuidados individuais, bairros que não oferecem condições mínimas de saneamento básico, por exemplo, são um ambiente mais propício para proliferação do mosquito *Aedes aegypti*, deixando a população dessas regiões mais vulnerável.

Além do papel do poder público, proponha uma reflexão a respeito do papel dos cidadãos no combate à dengue, bem como a respeito de estratégias que poderiam ser adotadas, em sociedade, para reduzir a quantidade de casos dessa doença. Aproveite para propor uma roda de conversa acerca da relação entre essa temática e o **Objetivo 3** da **Agenda 2030**. Além disso, o texto apresentado no boxe **Para expandir** pode ajudar a fomentar esse assunto. Para finalizar, sugira que elaborem cartazes e panfletos visando conscientizar os demais estudantes da escola a cuidar de suas casas e de seus bairros, com o objetivo de reduzir a quantidade de casos de dengue no município.

Na tarefa **56**, abordam-se os temas contemporâneos transversais **Saúde** e **Vida familiar e social**, pois, por um lado, incentiva o cuidado com a saúde por meio da tomada de medidas que podem evitar a contaminação pela dengue, e, por outro, conscientiza os estudantes da importância dessas medidas para contribuir com a redução na disseminação dessa doença em sociedade e nos impactos, por exemplo, no sistema de saúde, serviço essencial para todos.

Página 210

Trabalho e juventudes

Na atividade **1** da seção **O que faz um geneticista?**, pergunte aos estudantes que atuariam como geneticista se há outras profissões que eles também gostariam de exercer. Comente que é natural ter dúvidas sobre a escolha de uma profissão nessa fase da vida e, por isso, é importante se inteirar sobre ela, buscando obter o máximo de informações possível.

Para realizar a visita sugerida nessa seção, providencie, com antecedência, a autorização dos responsáveis dos estudantes menores de idade e verifique a necessidade de equipamentos de segurança. Oriente os estudantes a elaborar antecipadamente algumas questões e deixe-os à vontade para fazer outros questionamentos durante a visita, ressaltando a importância do diálogo respeitoso. Nos casos em que não seja possível visitar o local, convide o profissional para ir até a escola ou, ainda, realize uma videochamada para que ele possa ser entrevistado pelos estudantes e apresentar seu ambiente de trabalho e os recursos que utiliza no dia a dia.

Página 215

Na questão **1**, se necessário, oriente os estudantes a formar duplas e retomar os conteúdos abordados no capítulo, mencionando os que já conheciam e se houve algum em que tiveram dificuldades.

O trabalho com a questão **2** pode ser desenvolvido por meio de textos ou dinâmicas em grupos. Nesse momento, proponha aos estudantes que elaborem questionamentos em função dos erros mais comuns que eles identificaram durante o trabalho com os tópicos propostos. Alguns exemplos são: "Reconheço uma sequência numérica?"; "Compreendo e consigo resolver problemas envolvendo PA e PG?"; "Tenho segurança para utilizar a fórmula do termo geral de uma PA e a fórmula do termo geral de uma PG?"; "Consigo determinar soma dos *n* primeiros termos de uma PA e a soma dos *n* primeiros termos de uma PG?", entre outros. Com base nas respostas, é esperado que eles identifiquem suas dificuldades e reflitam acerca da necessidade de retomar o que foi estudado.

As questões de **3** a **10** são de direta aplicação dos conteúdos estudados. Com elas, é esperado que os estudantes validem a reflexão proposta na questão **2**. Durante o desenvolvimento dessas questões, oriente-os a não consultar o material e a registrar suas dúvidas, pois esses registros auxiliarão o desenvolvimento da questão **11**.

Na síntese proposta na questão **11**, os estudantes podem usar diversas estratégias, como listas de conceitos, mapas conceituais, resumos textuais, entre outros. Instigue-os a apresentar exemplos e, caso julguem conveniente, usar imagens. Incentive-os a utilizar a criatividade nesse momento.

CAPÍTULO 7 Matemática financeira

Nesse capítulo, são desenvolvidas as unidades temáticas de Matemática **Números e Álgebra**, em diferentes situações, como na interpretação de taxas e índices de natureza socioeconômica, utilização de conceitos matemáticos na construção de simuladores de juro simples e juro composto, possibilitando aos estudantes interpretar esses índices por meio de uma análise crítica sobre questões econômicas e sociais.

Objetivos específicos

- Compreender o conceito de porcentagem.
- Efetuar cálculo de porcentagens em contextos de Matemática financeira.
- Investigar processos de cálculos de alguns indicadores socioeconômicos.
- Conhecer o conceito de acréscimos e descontos sucessivos.
- Diferenciar acréscimos e descontos sucessivos de acréscimos e descontos simples.
- Aplicar conhecimentos envolvendo acréscimos e descontos sucessivos em contextos do dia a dia, de modo a adquirir consciência como consumidor para tomar as melhores decisões de compra.
- Compreender o conceito de juro.
- Identificar a diferença entre os regimes de juro simples e de juro composto.
- Calcular juro simples e juro composto.
- Conhecer o conceito de amortização.
- Entender como uma dívida é amortizada utilizando o sistema Price.
- Resolver problemas envolvendo planejamento orçamentário.
- Organizar e analisar o orçamento familiar com o auxílio da planilha eletrônica.

Justificativa

A abordagem dada ao capítulo, além de englobar o devido rigor matemático, destina-se a enfatizar a relevância desse tipo de aprendizagem na vida diária dos estudantes. Por essa razão, há um foco perceptível nas aplicações dos conceitos e cálculos matemáticos em práticas do dia a dia, sobretudo naquelas decorrentes de relações de compra e venda. Com essa proposta pragmática que busca se aproximar da realidade dos estudantes, espera-se que, além de adquirir instrução teórica, eles sejam capazes de construir razoável consciência financeira, tornando-se consumidores cientes de suas escolhas e aptos a tomar decisões sensatas, pautadas mais na objetividade mensurável dos números do que em meros instintos imediatos ou desejos consumistas. Também são apresentadas ferramentas que podem auxiliar nas tarefas de controle orçamentário, além de recursos tecnológicos que hoje se fazem disponíveis para dar maior praticidade a questões envolvendo juro e amortização, em especial àquelas mais complexas ou que envolvem uma quantidade muito elevada de dados. Em complemento, o capítulo também é fundamental para a futura vida profissional dos estudantes, tendo em vista que raras são as atividades profissionais que não exigem contato com valores monetários.

Espera-se que ao final desse estudo os estudantes estejam aptos a interpretar cada um desses indicadores em situações reais, desenvolvendo o pensamento crítico e social, tão necessário em nossos dias atuais e futuros.

Páginas 216 e 217

Ao trabalhar com as páginas de abertura, explique aos estudantes que, hoje em dia, grande parte das instituições financeiras que fornecem cartões de crédito aos consumidores disponibiliza aplicativos para *smartphones* que podem ser utilizados, dentre outras funções, para o acompanhamento da fatura em aberto. Esse recurso facilita a gestão do controle econômico pessoal, permitindo ao consumidor se policiar no sentido de não gastar além de suas possibilidades financeiras. Comente que algumas empresas utilizam a tecnologia *contactless payment*, por meio da qual o pagamento pode ser efetuado não apenas com o uso do cartão de crédito, mas também de outros equipamentos, por exemplo, o *smartphone* e o *smartwatch*, apenas pela aproximação entre esses objetos e a máquina de cartão.

A questão **3** tem por objetivo instigar os estudantes acerca da importância de se usar o cartão de crédito com cautela e de forma consciente, evitando complicações financeiras e o endividamento, caso o consumidor faça a opção pelo pagamento mínimo da fatura por vários meses consecutivos, além de avaliar seu conhecimento prévio em relação aos cálculos de porcentagens.

Páginas 222 a 224

A fim de complementar o trabalho com a tarefa **4**, reúna os estudantes em grupos e proponha o seguinte problema.

Tarefa extra

O aluguel do *flat* em que Eloá mora será reajustado de acordo com o IGP-M, que, no período considerado, foi de 0,76%. Sabendo que Eloá paga R$ 925,00 de aluguel, responda às seguintes questões.

a) Qual deverá ser o novo aluguel após o reajuste?

b) De quantos reais foi o aumento do aluguel?

Resoluções e comentários

a) O valor do aluguel de Eloá sofrerá um aumento de 0,76%. Nesse caso, calculamos 100,76% de R$ 925,00. Assim:

$$1{,}0076 \cdot 925 = 932{,}03$$

Portanto, o novo aluguel de Eloá será de R$ 932,03.

b) Para responder a essa questão, calculamos a diferença entre o novo e o antigo aluguel, ou seja:

$$932{,}03 - 925 = 7{,}03$$

Portanto, o aumento foi de R$ 7,03.

Ao trabalhar com a tarefa **11**, comente com os estudantes a importância de consumir de modo consciente, avaliando e refletindo sobre o que é necessário e o que é supérfluo. O consumo consciente não se restringe a pesquisas de preços e compras mais vantajosas, mas inclui a verificação da procedência dos produtos, a avaliação de seus impactos sociais e ambientais, a recusa de produtos piratas, a avaliação do crédito com responsabilidade, entre outras atitudes. Para mais informações sobre esse assunto, acesse o *site* do Instituto Akatu. Disponível em: https://akatu.org.br/. Acesso em: 13 ago. 2024.

Após desenvolver o trabalho com a tarefa **16**, converse com os estudantes sobre a importância do voto consciente. Explique-lhes que o Brasil é um Estado Democrático de Direito, cujo conceito está explicitado no Artigo 1º da Constituição Federal de 1988: “Todo o poder emana do povo, que o exerce por meio de representantes eleitos ou diretamente, nos termos desta Constituição”. Além disso, ressalte a importância de os estudantes estarem informados a respeito das ideias dos partidos políticos a que seus possíveis candidatos estão afiliados. Outro fator importante é analisar o histórico dos candidatos para verificar se não estão envolvidos em crimes de corrupção ou outros desvios de finalidade. Mais informações a respeito do voto consciente podem ser encontradas no *site* do Tribunal Superior Eleitoral (TSE), disponível em: https://www.tse.jus.br/#/. Acesso em: 13 ago. 2024.

Se julgar oportuno, aproveite o contexto da tarefa **16** e elabore um seminário para os estudantes em conjunto com um professor de **Ciências Humanas e Sociais**, de preferência do componente curricular de **Sociologia**, para que eles possam desenvolver o pensamento crítico e a argumentação no trabalho com o estudo dessa tarefa. Alguns temas que podem ser abordados nesse seminário são: a conquista do voto feminino como resultado de lutas sociais e a importância da participação das mulheres no processo eleitoral. É pertinente os estudantes compreenderem que a participação feminina na política contribui para a construção de um Estado Democrático de fato.

Se julgar conveniente, a fim de introduzir o seminário, apresente aos estudantes o vídeo disponibilizado pelo Tribunal Superior Eleitoral (TSE) em uma de suas redes sociais, disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=3vg-hnaqzeA&ab_channel=justicaeleitoral. Acesso em: 13 ago. 2024.

Aproveite o contexto proposto na tarefa **23** para desenvolver o trabalho com o tema contemporâneo transversal **Saúde**. Verifique a possibilidade de levar folhetos informativos do tabagismo, que podem ser adquiridos em uma unidade de saúde, ou então informe aos estudantes do poder de destruição do tabaco, que no século passado matou cerca de 100 milhões de pessoas em todo o mundo. Além disso, ressalte que a cada ano 8 milhões de pessoas morrem no mundo em decorrência do uso do cigarro.

Na tarefa **24**, solicite aos estudantes que pesquisem a cotação de algumas moedas utilizadas nos países da América Latina, por exemplo. Depois, oriente-os a formular atividades, como a apresentada por Tartaglia, para trocá-las com um colega, fazendo, em seguida, as correções necessárias.

Página 225

Trabalho e juventudes

Ao abordar o conteúdo da seção **A profissão de contador** com os estudantes, pergunte se algum deles tem interesse em seguir a carreira de contador e, em caso positivo, peça-lhe que explique o motivo do interesse. Após a discussão, comente que é muito importante para os profissionais dessa área conhecer a legislação brasileira e se atualizar sobre as novas tecnologias.

Para a proposta de entrevista da atividade **3**, verifique a possibilidade de levar os estudantes até o local de trabalho de um contador. Para isso, providencie, com antecedência, a autorização dos responsáveis dos estudantes menores de idade. Instrua os estudantes a elaborar antecipadamente algumas questões e deixe-os à vontade para fazer outros questionamentos durante a visita, ressaltando a importância do diálogo respeitoso. Nos casos em que não seja possível visitar o local, convide o profissional para ir até a escola ou, ainda, realize uma videochamada para que ele possa ser entrevistado pelos estudantes e apresentar seu ambiente de trabalho e os recursos que utiliza no dia a dia.

Páginas 226 e 227

Desenvolvimento sustentável

No trabalho com a seção **Gerando energia elétrica renovável**, informe os estudantes de que o Brasil, graças a suas características geográficas, tem um dos maiores parques hidrelétricos do mundo e que, entre as principais usinas hidrelétricas do Brasil, quatro estão localizadas na região Norte (Belo Monte, Tucuruí, Jirau e Santo Antônio) e uma na região Sul (Itaipu Binacional). Se julgar conveniente, incentive-os a acessar o *site* da usina de Itaipu Binacional, que traz informações sobre a maior geradora de energia limpa e renovável do planeta. Disponível em: https://www.itaipu.gov.br. Acesso em: 13 ago. 2024.

O texto e as questões propostas nessas páginas permitem fomentar o trabalho com energia elétrica renovável. Na questão **3**, oriente-os a realizar a leitura dos **Objetivos da Agenda 2030** no início do **Livro do Estudante**, antes de explorar o **Objetivo 7** trabalhado nessas páginas. Peça-lhes que identifiquem as metas e o conteúdo principal desse **ODS**, de modo que percebam que se trata de um objetivo voltado para assuntos ambientais, abordando questões como o uso de energias renováveis e limpas. Com base nisso, eles devem estabelecer relações com o conteúdo da seção. Em seguida, promova um debate com a turma e solicite a cada estudante que apresente sua compreensão sobre o tema abordado, para que eles possam trabalhar o pluralismo de ideias e a argumentação no trabalho com o estudo dessas páginas.

O trabalho a respeito dos processos de geração de energia elétrica aborda aspectos da **Competência específica de Ciências da Natureza e suas Tecnologias 1** da BNCC.

Após realizar o trabalho com essas páginas, proponha um bate-papo sobre o consumo consciente de energia elétrica. Desse modo, espera-se que os estudantes desenvolvam autonomia, responsabilidade e flexibilidade e tomem decisões com base em princípios éticos, democráticos e sustentáveis, conforme orienta a **Competência geral 10** da BNCC.

Página 228

Antes de iniciar o trabalho com o conteúdo proposto, é de suma importância avaliar o conhecimento prévio dos estudantes sobre porcentagem. A seguir, é apresentada uma sugestão de problema que possibilitará esse diagnóstico. Se julgar necessário, antes de propor o problema, explique aos estudantes que se a variação do salário de um trabalhador de um ano para o outro for:

- menor do que o índice de inflação, o trabalhador perde poder de compra.
- igual ao índice de inflação, o trabalhador mantém seu poder de compra.
- maior do que o índice de inflação, o poder de compra do trabalhador aumentará.

Sugestão de avaliação

(UERJ, 2016) Um índice de inflação de 25% em um determinado período de tempo indica que, em média, os preços aumentaram 25% nesse período. Um trabalhador que antes podia comprar uma quantidade X de produtos, com a inflação e sem aumento salarial só poderá comprar agora uma quantidade Y dos mesmos produtos, sendo $Y < X$.

Com a inflação de 25%, a perda do poder de compra desse trabalhador é de:

a) 20% **b)** 30% **c)** 50% **d)** 80%

Resolução e comentários

Indicando por S o salário e por P o preço dos produtos, obtemos:

$$\frac{S}{P} = X$$

Considerando o aumento de 25% nos preços, segue que:

$$\frac{S}{1{,}25 \cdot P} = Y$$

Para determinar o poder de compra desse trabalhador

após o reajuste de preços, calculamos a razão entre Y e X.

$$\frac{Y}{X} = \frac{\frac{S}{1{,}25 \cdot P}}{\frac{S}{P}} = \frac{1}{1{,}25} = 80\%$$

Portanto, a perda do poder de compra desse trabalhador é de 20%, pois 100% − 80% = 20%.

Caso os estudantes mostrem dificuldades na resolução da tarefa, reúna-os em duplas para resolverem-na, sanando suas possíveis dúvidas.

Após o trabalho com o problema proposto, organize um debate com a turma, a fim de que exponham suas opiniões acerca das taxas de inflação e as possíveis causas de sua variação. Aproveite a ligação com o tema e introduza o trabalho com a página **228**, cuja temática é inflação.

Durante o desenvolvimento desse tópico, além de investigar o processo de cálculo de índices de natureza socioeconômica, como taxas de inflação, PIB, taxa de desemprego, IDH e o coeficiente de Gini, os estudantes são desafiados a interpretar esses índices, possibilitando uma análise crítica sobre questões econômicas e sociais, mobilizando a habilidade **EM13MAT104** da BNCC e aspectos da **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 1** da BNCC.

Solicite aos estudantes que façam uma pesquisa sobre a hiperinflação que ocorreu entre os anos 1980 e 1990. Caso seja necessário, instrua-os a pedir auxílio ao professor do componente curricular de **História** para compreender o contexto daquela época.

Para avaliar os estudantes quanto ao conteúdo estudado nessas páginas, proponha-lhes que coletem os dados do INPC do último ano vigente. Na sequência, peça-lhes que respondam às seguintes questões: “Qual mês apresentou a menor variação do INPC? E a maior?”; “De acordo com as informações obtidas, qual é a variação do INPC acumulada no Brasil de janeiro a maio do ano vigente?”.

Avalie a conveniência de elaborar uma aula em conjunto com um professor da área de **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**, preferencialmente do componente curricular de **Sociologia**. Aproveite a oportunidade e promova um debate, para fomentar a discussão sobre os efeitos do aumento ou da redução da inflação em nossa sociedade. É importante os estudantes compreenderem como esses impactos influenciam as diferentes classes sociais do país. Aproveite a oportunidade para conversar sobre a demanda por produtos com mais capacidade de produção e o aumento nos custos de produção, que são algumas das causas da inflação.

Página 234

Antes de trabalhar com a tarefa **27**, explique aos estudantes que o trabalho formal é aquele exercido com carteira assinada e que o trabalho informal é aquele sem vínculos registrados na carteira de trabalho ou documentação equivalente. Se julgar conveniente, organize um debate para que os estudantes exponham suas opiniões sobre as vantagens e as desvantagens de cada um desses tipos de trabalho. Para fomentar a discussão, oriente-os a acessar, antecipadamente, o *site* da Biblioteca Digital da Justiça do Trabalho. Nele, podem-se obter mais informações sobre o assunto. Disponível em: https://juslaboris.tst.jus.br. Acesso em: 13 ago. 2024.

Caso os estudantes tenham alguma dificuldade para responder à questão da tarefa **28**, sugira uma pesquisa que indique fatores que possam ter contribuído para o aumento da desigualdade de renda no país, como o desemprego e a dificuldade de acesso à educação.

Complemente o assunto da tarefa **29**, propondo aos estudantes que pesquisem mais informações sobre o perfil da população de desalentados e o impacto nas estatísticas de comunidades em situação de vulnerabilidade. Depois, usem as informações coletadas para refletir sobre propostas de mitigação desse panorama.

Caso julgue necessário, ao abordar a tarefa **30**, solicite aos estudantes que voltem à página **231** e relembrem como é calculado o IDH. Além disso, sugira-lhes que efetuem os cálculos com auxílio de uma calculadora ou do aplicativo Calculadora de seus *smartphones*. Caso não haja calculadoras (físicas ou em aplicativos) suficientes para todos os estudantes, organize-os em grupos.

Na tarefa **32** é apresentado um texto sobre o IDH ajustado à desigualdade e é solicitado aos estudantes que apontem as possíveis características que devem ser melhoradas no país para que o IDH brasileiro aumente. Diante disso, os estudantes são levados a utilizar estratégias e procedimentos matemáticos para interpretar situações socioeconômicas, conforme solicita a **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 1** da BNCC.

Nessa tarefa, se considerar oportuno, peça aos estudantes que, em grupos, pesquisem o assunto do texto em outras fontes e comparem as informações, analisando criticamente o trecho do relatório.

Página 235

Trabalho e juventudes

Ao abordar a seção **O que faz um assistente social?**, comente com a turma que esse profissional atua, dentro de seu contexto, para cooperar no combate a problemas sociais. Dessa forma, esse profissional é um dos que utiliza indicadores sociais como ferramentas norteadoras de seu trabalho.

Para a proposta da conversa na atividade **2**, verifique a possibilidade de levar os estudantes até o local de trabalho de um assistente social. Para isso, providencie, com antecedência, a autorização dos responsáveis dos estudantes menores de idade. Oriente os estudantes a elaborar antecipadamente algumas questões e deixe-os à vontade para fazer outros questionamentos durante a visita, ressaltando a importância do diálogo respeitoso. Nos casos em que não seja possível visitar o local, convide o profissional para ir até a escola ou, ainda, realize uma videochamada para que ele possa ser entrevistado pelos estudantes e apresentar seu ambiente de trabalho e os recursos que utiliza no dia a dia.

Página 236

As páginas do tópico **Acréscimos e descontos sucessivos** são propícias para tratar dos temas contemporâneos transversais **Educação financeira**, **Educação fiscal** e **Educação para o consumo**. Ao viabilizar uma compreensão mais aprofundada quanto ao cálculo de acréscimos e descontos, que são práticas extremamente comuns no comércio, é fornecida aos estudantes a possibilidade de crescimento em sua consciência financeira, tornando-os menos suscetíveis a golpes e mesmo a autoenganos. Aproveite o assunto e desperte a percepção de que a Matemática pode ser utilizada para fornecer um controle mais racional, organizado e previsível das finanças, conferindo maior segurança em gastos e despesas, em lucros e prejuízos. No mundo contemporâneo, regido por números, preços e valores, toda essa percepção é fundamental para que se possa tomar decisões lúcidas, tanto no sentido de escolher formas de pagamento mais benéficas quanto no de saber controlar os próprios impulsos a fim de ter um orçamento doméstico relativamente confortável, ou pelo menos sustentável. Além disso, reciprocamente, o fato de notar tais benefícios práticos pode representar um incentivo extra no próprio interesse dedicado aos estudos.

Também é pertinente, nesse tópico, que se trabalhe com a **Competência geral 7** da BNCC. O estudo aqui desenvolvido possibilita ao estudante saber se amparar em informações e dados objetivos para formular, argumentar, negociar e defender ideias que promovam o consumo responsável nos âmbitos local, regional e global. Manter um controle atento de como e para que se utiliza o próprio dinheiro é a base individual que, em larga escala, possibilita uma economia estável em nível social.

Páginas 238 e 239

Ao trabalhar com o exercício resolvido **R7**, comente com os estudantes que, embora no caso da fatura analisada o valor pago em atraso seja parecido com o original, nem sempre é isso que acontece. É importante alertá-los para o fato de que pagamentos atrasados aumentam consideravelmente o valor das faturas, principalmente quando os atrasos são longos e recorrentes.

Com base no problema resolvido **R8**, é possível trabalhar com o tema contemporâneo transversal **Saúde**. O problema envolve a relação das taxas de glicose com os estados de saúde de um indivíduo. Baixa taxa de glicose ocasiona hipoglicemia, que acarreta sintomas de tontura, palidez, dor de cabeça, confusão mental, baixa concentração e desmaio. Para evitar os efeitos da hipoglicemia, recomenda-se a ingestão de alimentos ricos em carboidratos, como frutas, doces, arroz e batata. No caso oposto, quando há taxas muito elevadas de glicose, ocorre a hiperglicemia, caracterizada por boca seca, muita sede, fome excessiva, fadiga extrema, visão embaçada, sonolência e dificuldade para respirar. A hiperglicemia ocorre, em geral, por má alimentação e sedentarismo, e sua prevenção se dá com uma dieta mais equilibrada, ingestão de água com frequência e prática de atividades físicas.

Fonte de pesquisa: BRASIL. Ministério da Saúde. Secretaria de Atenção à Saúde. Departamento de Atenção Básica. *Diabetes mellitus*. Brasília, 2006. (Cadernos de Atenção Básica, n. 16).

Página 241

Ao trabalhar com a tarefa **46**, comente a importância de participar de cursos de planejamento financeiro ou se inteirar sobre o assunto por outros meios (vídeos, textos, palestras, *podcasts* etc.). No mundo contemporâneo, manter controle lúcido do dinheiro é essencial para o bem-estar das pessoas, mas nem sempre os indivíduos têm instrução sobre como fazer isso. Desse modo, é crucial a existência de uma educação financeira que apresente maneiras inteligentes de se poupar dinheiro. Ainda que em curto prazo isso exija certa disciplina por vezes dolorosa, em médio e longo prazos os benefícios são compensadores. Uma economia bem planejada pode dar conforto financeiro posterior e garantir a realização de sonhos. A compra de um carro ou de uma casa, a realização de uma viagem de férias e o compromisso de um casamento, por exemplo, são planos de vida que exigem consciência financeira com anos de preparo.

Ao abordar a tarefa **48**, comente com os estudantes que os dados indicam que as mulheres têm jornada de trabalho menor (desconsiderando as horas dedicadas a afazeres domésticos, cuidados de pessoas, entre outras tarefas) e têm uma remuneração menor por hora trabalhada. Aproveite o momento e promova um debate, para fomentar a discussão acerca do *status* da mulher no mercado de trabalho. Questione os estudantes sobre o que pensam ser medidas adequadas para promover a igualdade entre os gêneros, atentando à igualdade formal (aquela que fica apenas “no papel”) e à igualdade material (aquela que envolve ações concretas e equilíbrio de condições e oportunidades). Para isso, coloque em pauta observações sobre diferenças salariais mesmo em cargos equivalentes, abusos e assédios, dificuldade de contratação em certos setores, entre outros obstáculos enfrentados pelas mulheres em contextos profissionais. Incentive a aplicação de conhecimentos de outras áreas para fundamentar seus pontos de vista, pensando inclusive nos preconceitos historicamente construídos contra as mulheres e na luta constante empreendida para que elas conquistassem direitos básicos, como o direito ao voto e o direito de frequentar universidades, a fim de que eles possam trabalhar o pluralismo de ideias e a argumentação no estudo dessa tarefa.

Aproveite também o contexto proposto na tarefa **48** para tratar do tema contemporâneo transversal **Trabalho**. Ao pensar sobre a mulher no mercado de trabalho, problemáticas atuais ganham evidência, preparando os estudantes para os desafios do mundo laboral.

Acrescente, se possível, comentários abordando a importância de políticas públicas que incentivem a igualdade de oportunidades entre os cidadãos e de leis robustas que protejam o empregado (considerado como parte “hipossuficiente”) de possíveis abusos da parte contratante, em especial quando o empregado faz parte de grupos de minoria ou de classes culturalmente marcadas por discriminação sistêmica.

Páginas 242 e 243

O contexto abordado nas páginas **242** e **243** possibilita o desenvolvimento do tema contemporâneo transversal **Educação para o consumo**. Com o objetivo de formar cidadãos capazes de planejar sua vida pessoal e familiar, converse com os estudantes sobre a importância de poupar dinheiro para alcançar seus objetivos. Enfatize para eles que um bom planejamento financeiro auxilia na tomada de boas decisões.

Páginas 247 e 248

Ao desenvolver o trabalho com as seções **Acessando tecnologias** propostas nesse capítulo, é possível utilizar o programa Calc, que é uma planilha eletrônica do pacote LibreOffice, versão gratuita de aplicativos que inclui, além da planilha eletrônica, editores de textos, de apresentações, de desenhos e banco de dados. Para fazer o *download* e instalar o programa, basta acessar o *site* disponível em: https://pt-br.libreoffice.org/baixe-ja/libreoffice-novo/. Acesso em: 13 ago. 2024.

Uma sugestão para o trabalho com essas seções é utilizar, se possível, o laboratório de informática da escola. Para isso, verifique antecipadamente se todos os computadores possuem o *software* necessário para o desenvolvimento do contexto. Durante a tarefa, caso os estudantes apresentem dificuldades, auxilie-os na execução das etapas propostas. Caso não haja computadores suficientes para todos os estudantes, organize-os em grupos e atente para que, no decorrer da tarefa, todos eles tenham a oportunidade de manipular o *software* em questão.

Esse tipo de abordagem possibilita aos estudantes entrar em contato com o conhecimento científico por meio de ferramentas que fazem parte das culturas juvenis. Além disso, eles são desafiados a decompor problemas e a reconhecer padrões, assim como filtrar, classificar e organizar informações relevantes, desenvolvendo, assim, aspectos do **pensamento computacional**.

Nessa seção, o estudante é instigado a utilizar conceitos matemáticos na construção de simuladores de juro simples e de juro composto em planilhas eletrônicas, conforme orienta a habilidade **EM13MAT203** da BNCC.

Página 251

Os contextos e tarefas propostos no tópico **Situações envolvendo juro simples e juro composto** visam ao desenvolvimento da habilidade **EM13MAT303** da BNCC, uma vez que desafiam os estudantes a interpretar e comparar situações que envolvem juro simples e juro composto, por meio de análise de planilhas eletrônicas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso. Além disso, em algumas situações, o estudante precisará tomar decisões por meio de análises e criação de simuladores de juro simples e juro composto, contemplando assim a habilidade **EM13MAT203** e mobilizando as **Competências específicas de Matemática e suas Tecnologias 2** e **3** da BNCC.

Ao fim do trabalho com esse tópico, verifique a conveniência de utilizar a estratégia ***Quick writing*** para avaliar o aprendizado dos estudantes, fazendo-os refletir sobre os conteúdos estudados. Em debate, solicite a eles que expliquem qual é a importância do estudo de juro simples e juro composto em situações da vida cotidiana.

Página 254

Explique aos estudantes que a fórmula fundamental da equivalência de capitais apresentada na página **254** está associada ao regime de juro composto. Nos casos em que o regime é o de juro simples, o valor futuro (VF) e o valor atual (VA) de um capital são dados pelas fórmulas a seguir.

$$VF = VA\left(1 + i \cdot t\right)$$

$$VA = \frac{VF}{\left(1 + i \cdot t\right)}$$

Do mesmo modo que no juro composto, nessas fórmulas:

- a taxa de juro deve ser escrita na forma decimal.
- a taxa de juro e o período devem estar na mesma unidade de medida de tempo.
- i e t indicam, respectivamente, a taxa de juro e o tempo.

Se julgar conveniente, solicite aos estudantes que refaçam os cálculos apresentados no exemplo **1** da página **254**, considerando, agora, as capitalizações em regime de juro simples.

Página 256

O contexto trabalhado na seção **Resolvendo por etapas** permite abordar aspectos da **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 3** da BNCC ao solicitar aos estudantes que utilizem conceitos e procedimentos matemáticos para resolver problemas em diversos contextos, analisando os resultados obtidos e, com base neles, construindo argumentos convincentes.

Página 260

Os contextos abordados no tópico **Sistema Price** contemplam aspectos da **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 3** da BNCC. Os conhecimentos matemáticos construídos ao longo do tópico fornecem conceitos e estratégias numéricas que auxiliam na correta interpretação de fenômenos financeiros e viabilizam a resolução de problemas práticos que surgem em financiamentos com juro. Além disso, o trabalho com o tema permite aos estudantes adquirir segurança numérica que os capacitem a construir uma argumentação consistente em contextos de quitação de dívidas com amortização e, quando necessário, analisar a plausibilidade dos valores apresentados.

O assunto abordado nessa página permite o trabalho com os temas contemporâneos transversais **Educação financeira**, **Educação fiscal** e **Educação para o consumo**. Ter conhecimento acerca de formas de financiamento, com seus benefícios e seus riscos, pensando de modo bem fundamentado sobre quais são as circunstâncias em que essa modalidade de compra é vantajosa e quando não é, por causar perigo de endividamento, é algo fundamental no amadurecimento da visão de mundo dos estudantes no que diz respeito à consciência financeira. Para tanto, as ferramentas matemáticas que auxiliam na interpretação e na descrição dessas questões são indispensáveis na boa estruturação de suas economias para alcançar os objetivos de médio e de longo prazo.

Página 263

A tarefa **78** propicia aos estudantes uma reflexão sobre as mais diversas propagandas presentes nos meios de comunicação, principalmente aquelas que oferecem prestações "a perder de vista" e juros que muitas pessoas nem sabem que existem. Uma maneira de trabalhar essa tarefa é pedindo aos estudantes que levem para a sala de aula folhetos de promoções de lojas ou pesquisem promoções na internet, para realizar cálculos e comparações entre os valores pagos à vista e a prazo. Podem também ser feitas várias simulações de compra, com diferentes quantidades de prestações, para que os estudantes tenham esse senso crítico no momento de decidir pela compra de um produto.

Enfatize que, ainda que o pagamento à vista pareça mais vantajoso, a melhor solução pode ser diferente para diferentes casos, situações e perfis de consumidores. Para muitas pessoas, consumir à vista é impraticável e impossibilita a compra de itens de alto valor e muitas vezes indispensáveis.

Ao trabalhar o item **c** da tarefa **78**, se achar conveniente, organize os estudantes em grupos e leve-os ao laboratório de informática para que possam realizar a pesquisa.

Página 265

Durante o trabalho com a seção **Acessando tecnologias**, explique aos estudantes que a planilha apresentada é pessoal. Nesse caso, cada um, de acordo com suas necessidades, deve adicionar receitas, despesas fixas, despesas variadas e despesas extras. As sugeridas na imagem são apenas alguns exemplos. Além disso, diga a eles que, para incluir receitas ou despesas em uma planilha devemos acrescentar linhas acima ou abaixo de uma linha selecionada. Para isso, eles devem clicar com o botão direito do *mouse* sobre a linha e selecionar a opção **Inserir**. Em seguida, selecionar a opção **Linha inteira**.

Comente com os estudantes que no *site* Escola de Educação Previdenciária, por exemplo, podemos fazer o *download* gratuito de uma planilha de orçamento pessoal. Disponível em: https://www.rioprevidencia.rj.gov.br/EscolaPrevidenciaria/Downloads/index.htm. Acesso em: 13 ago. 2024.

Nessa seção, os estudantes são desafiados a aplicar os conceitos matemáticos estudados no Ensino Fundamental e também em tópicos anteriores na criação de uma planilha para auxiliar no orçamento familiar e na tomada de decisões, contemplando assim a habilidade **EM13MAT203** da BNCC. Além disso, ao compreender, utilizar e criar planilhas eletrônicas para o orçamento familiar, os estudantes são levados a se comunicar de forma crítica, significativa e reflexiva e a exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva, assim como sugere a **Competência geral 2** da BNCC.

Página 266

Ao trabalhar com a questão **J** da página **266**, oriente os estudantes a avaliar as despesas e receitas dessa família, de modo a analisar quais despesas mais comprometem as receitas e distinguir se elas são fixas, variáveis ou extras. Além disso, se achar conveniente, promova uma conversa em sala de aula pedindo aos estudantes que citem exemplos de despesas que eles consideram supérfluas e que poderiam ser evitadas a fim de economizar dinheiro. Explique a eles que essa economia pode ser útil em alguma situação imprevista, como problemas de saúde, e pode ser investida ou usada na realização de algum plano, como em uma viagem ou na compra de um bem.

Para complementar esse tópico, de acordo com dados do Departamento Intersindical de Estatística e Estudos Socioeconômicos (Dieese), o salário mínimo ideal para uma família de quatro pessoas em 2023 seria de R$ 6 389,72. Essa pesquisa considera o preço dos alimentos nas capitais brasileiras. Comente com os estudantes que esse valor é quatro vezes o salário mínimo (de 2024) e peça a eles que reflitam sobre essa situação.

Página 267

Na questão **1**, se necessário, instrua os estudantes a formar duplas e retomar os conteúdos abordados no capítulo, mencionando aqueles que já conheciam e se houve algum em que tiveram dificuldades.

O trabalho com a questão **2** pode ser desenvolvido de diferentes maneiras: por meio de textos, dinâmicas em grupos etc. Nesse momento, se necessário, proponha aos estudantes que elaborem questionamentos relativos aos erros mais comuns que eles identificaram durante o trabalho com os tópicos propostos. Alguns exemplos são: "Consigo resolver problemas envolvendo porcentagens?", "Tenho segurança para interpretar alguns indicadores sociais?", "Consigo diferenciar acréscimos e descontos sucessivos de acréscimos e descontos simples?", "Consigo resolver problemas envolvendo juro simples e juro composto?", "Consigo resolver problemas envolvendo conceito de sistema Price?", entre outras questões. Com base nas respostas, é esperado que eles identifiquem suas dificuldades e reflitam acerca da necessidade de retomar o que foi estudado.

As questões de **3** a **7** são de direta aplicação dos conteúdos estudados. Com elas, é esperado que os estudantes validem a reflexão proposta na questão **2**. Durante o trabalho com essas questões, oriente-os a não consultar o material e a registrar suas dúvidas, pois esses registros auxiliarão o desenvolvimento da questão **8**.

Na síntese proposta na questão **8**, os estudantes podem usar diversas estratégias, como listas de conceitos, mapas conceituais, resumos textuais, entre outros métodos. Instigue-os a dar exemplos e, se julgarem conveniente, usar imagens. Incentive-os a utilizar a criatividade nesse momento.

RESOLUÇÕES

Esta seção apresenta a resolução simplificada de problemas, atividades e questões da teoria e de seções do **Livro do Estudante**, contendo o raciocínio central deles. Respostas pessoais e atividades de elaboração de problemas não foram incluídas nesta seção. Para esses casos, há notas de orientações na reprodução do **Livro do estudante** neste **Suplemento para o professor**, sempre que necessário.

CAPÍTULO 1 GRANDEZAS E MEDIDAS

Abertura do capítulo

1. Sugestões de resposta: Os tecidos sintéticos, o velcro e as micro-ondas.

Questões

A. Sugestões de resposta: Medir o tempo de duração de uma partida de futebol e o comprimento da sala de aula.

B. Sugestões de resposta: Hora, quilômetro e grama.

D. 60 min

E. $\frac{1}{60}$ min

F. Como $1\ t = 1000$ kg e $1\ kg = 1000$ g, então:

$1\ t = 1000\ kg = 1000 \cdot 1000\ g = 1\,000\,000\ g = 1 \cdot 10^6\ g$

Como $1\ g = 1000\ mg = 1 \cdot 10^3\ mg$, então:

$1\ t = 1 \cdot 10^6\ g = 1 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 10^3\ mg = 1 \cdot 10^9\ mg$

G. A veracidade de cada igualdade dessa questão está mostrada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

H. A veracidade de cada igualdade dessa questão está mostrada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

J. A veracidade de cada igualdade dessa questão está mostrada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

K. O algoritmo referente a essa questão está apresentado na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

L. Como $1\ t = 1000$ kg, temos: $75{,}06 \cdot 1000\ kg = 75{,}06 \cdot 10^3$ kg.

Portanto, $75{,}06\ t = 75{,}06 \cdot 10^3$ kg.

M. De acordo com o problema, o dado de entrada é "medida em terabaites", o dado de saída é "gigabaite" e o procedimento é "multiplicar o número que expressa a medida em terabaites por 1024".

O algoritmo referente a essa questão está apresentado na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

Exercícios e problemas

1. a) 125 anos $= 1{,}25 \cdot 100$ anos $= 1{,}25 \cdot 10^2$ anos
   b) $425\,000\,000\ s = 425 \cdot 10^6\ s = 4{,}25 \cdot 10^8\ s$
   c) $1\,487\,000\,000\,000\ min = 1\,487 \cdot 10^9\ min = 1{,}487 \cdot 10^{12}\ min$
   d) $12{,}32 \cdot 10^4\ s = 1{,}232 \cdot 10^5\ s$
   e) $0{,}32 \cdot 10^{-9}\ h = 3{,}2 \cdot 10^{-10}\ h$
   f) $53 \cdot 10^{-10}\ \mu s = 5{,}3 \cdot 10^{-9}\ \mu s$

2. $52{,}05\ s = 5{,}205 \cdot 10^1\ s$; $53{,}28\ s = 5{,}328 \cdot 10^1\ s$; $56{,}35\ s = 5{,}635 \cdot 10^1\ s$.

3. a) $5{,}3\ h = 5{,}3 \cdot 60\ min = 318\ min$
   b) $9{,}4\ s = 9{,}4 \cdot 10^6\ \mu s$
   c) $0{,}45\ min = 0{,}45 \cdot 60\ s = 27\ s$
   d) $1344\ min = 1344 \cdot 60\ s = 80\,640\ s =$
   $= 8{,}064 \cdot 10^4 \cdot 10^6\ \mu s = 8{,}064 \cdot 10^{10}\ \mu s$
   e) $1620\ min = 1620 \cdot \frac{1}{60}\ h = 27\ h$
   f) $2\ h = 2 \cdot 3{,}6 \cdot 10^9\ \mu s = 7{,}2 \cdot 10^9\ \mu s$
   g) $4\,500\,000\ \mu s = 4\,500\,000 \cdot 10^{-6}\ s = 4{,}5 \cdot 10^6 \cdot 10^{-6}\ s = 4{,}5\ s$
   h) $2 \cdot 10^9\ \mu s = 2 \cdot 10^9 \cdot 10^{-6}\ s = 2 \cdot 10^3 = 2\,000\ s$
   i) $4{,}32 \cdot 10^4\ s = 4{,}32 \cdot 10^4 \cdot \frac{1}{3\,600}\ h = 12\ h$

4. Como 1 dia tem 24 horas ou 1440 min ou 86 400 s, 1 hora tem 60 min ou 3 600 s e 1 minuto tem 60 s, segue que:
   a) 156 180 s correspondem a 1 dia, 19 horas e 23 minutos.
   b) 27 570 min correspondem a 19 dias, 3 horas e 30 minutos.
   c) 1 178 280 s correspondem a 13 dias, 15 horas e 18 minutos.
   d) 369 900 s correspondem a 4 dias, 6 horas e 45 minutos.
   e) 11 470 min correspondem a 7 dias, 23 horas e 10 minutos.
   f) 2 174 520 s correspondem a 25 dias, 4 horas e 2 minutos.

5. O algoritmo e o fluxograma dessa tarefa estão apresentados na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

6. a) $3{,}942 \cdot 10^7\ min = 39\,420\,000 \cdot \frac{1}{60}\ h = 657\,000\ h$

   $657\,000\ h = 657\,000 \cdot \frac{1}{24}$ dias $= 27\,375$ dias

   $27\,375$ dias $= 27\,375 \cdot \frac{1}{365}$ anos $= 75$ anos

   Assim, $3{,}942 \cdot 10^7$ min equivale a 75 anos.

   Portanto, pilha, fralda descartável, sacolas e sacos plásticos e alumínio levam mais de $3{,}942 \cdot 10^7$ min para se decompor.

7. $\text{mmc}(8, 6) = 2^3 \cdot 3 = 24$. Como 24 h equivale a 1 dia, os dois medicamentos serão ingeridos juntos novamente no dia 6 às 8 h.

8. Para determinar a idade aproximada desse planeta, fazemos $4\,560 - 50 = 4\,510$, ou seja, $4{,}51 \times 10^9$ anos.

   Portanto, esse planeta tem, aproximadamente, $4{,}51 \times 10^9$ anos. Logo, a alternativa **b** é a correta.

9. a) Calculamos a potência gasta por hora em cada equipamento.

   Ar-condicionado: $1400 \cdot 6 = 8\,400\ Wh = 8{,}4\ kWh$.

   Computador: $300 \cdot 8 = 2\,400\ Wh = 2{,}4\ kWh$.

   Chuveiro: Como $15\ min = \frac{1}{4}\ h$, então $5\,500 \cdot \frac{1}{4} =$

   $= 1\,375\ Wh = 1{,}375\ kWh$.

   Quantidade de watts-hora gastos por dia:

   $$8{,}4\ kWh + 2{,}4\ kWh + 1{,}375\ kWh = 12{,}175\ kWh$$

   Em 30 dias, temos:

   $$12{,}175\ kWh \cdot 30 = 365{,}25\ kWh$$

   Portanto, serão gastos 365,25 kWh.

   b) $390\ min = \frac{390}{60}\ h = 6{,}5\ h$

   $$6{,}5\ h \cdot 300\ W = 1950\ Wh = 1{,}950\ kWh$$

   Assim, em 15 dias, teremos $1{,}950\ kWh \cdot 15 = 29{,}250\ kWh$.

   Calculando os gastos, em reais, temos: $29{,}25 \cdot 0{,}64 = 18{,}72$.

   Portanto, nessas condições, foram gastos R$ 18,72.

10. $\text{mmc}(45, 60, 27) = 540$ s e $540\ s = 540 \cdot \frac{1}{60}\ min = 9\ min$.

    Logo, as lâmpadas vermelhas acendem a cada 9 minutos. Portanto, a alternativa **b** é a correta.

11. $2{,}68\ \mu s = 2{,}68 \cdot \frac{1}{1\,000\,000}\ s = 2{,}68 \cdot 10^{-6}\ s$

    Como $1\ h = 3\,600\ s$, temos $\frac{2{,}68 \cdot 10^{-6}\ s}{3\,600\ s} \simeq 7{,}44 \cdot 10^{-10}$.

Calculando $7{,}44 \cdot 10^{-10}$ na forma percentual, obtemos:

$$7{,}44 \cdot 10^{-10} = \frac{7{,}44 \cdot 10^{-8}}{100} = 7{,}44 \cdot 10^{-8}\%$$

Portanto, a redução na duração de um dia causada por esse terremoto equivale a aproximadamente $7{,}44 \cdot 10^{-8}\%$ de uma hora.

12. a) Tempo de consumo por dia:

$18 \text{ h } 45 \text{ min} - 7 \text{ h } 15 \text{ min} = 11 \text{ h } 30 \text{ min} = 11{,}5 \text{ h}$

Em 5 dias por semana, por 4 semanas, obtemos $11{,}5 \cdot 5 \cdot 4 = 230$, ou seja, 230 h. Como essa televisão tem 180 W de potência, são consumidos 41,4 kWh, pois $230 \text{ h} \cdot 180 \text{ W} = 41\,400 \text{ Wh}$ e $41\,400 \text{ Wh} = 41{,}4 \cdot 10^3 \text{ Wh} = 41{,}4 \text{ kWh}$.

Portanto, em 4 semanas, serão consumidos 41,4 kWh por essa televisão.

13. a) Quantia antes da substituição das lâmpadas:

$$8 \cdot 0{,}035 \cdot 10 \cdot 30 \cdot 0{,}55 = 46{,}2$$

Quantia após a substituição das lâmpadas:

$$8 \cdot 0{,}024 \cdot 10 \cdot 30 \cdot 0{,}55 = 31{,}68$$

Diferença entre essas quantias: $46{,}2 - 31{,}68 = 14{,}52$

Portanto, no uso diário de 10 h, serão economizados R$ 14,52.

b) Possíveis respostas: Diminuir o tempo de uso do chuveiro elétrico; retirar os aparelhos da tomada quando não estiverem ligados; não deixar lâmpadas acesas sem necessidade; evitar abrir muitas vezes a geladeira.

14. a) $93{,}4 \text{ dm} = 93{,}4 \cdot 10^{-3} \text{ hm} = 0{,}0934 \text{ hm}$

b) $7{,}3 \text{ dam} = 7{,}3 \cdot 10^{-2} \text{ km} = 0{,}073 \text{ km}$

c) $0{,}576 \text{ km} = 0{,}576 \cdot 10^4 \text{ dm} = 5\,760 \text{ dm}$

d) $1{,}5 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 1{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot 10^2 \text{ cm} = 1{,}5 \cdot 10^{-2} \text{ cm} = 0{,}015 \text{ cm}$

e) $6{,}521 \cdot 10^2 \text{ cm} = 6{,}521 \cdot 10^2 \cdot 10^{-3} \text{ dam} = 6{,}521 \cdot 10^{-1} \text{ dam} = 0{,}6521 \text{ dam}$

15. $135 \text{ m} = 135 \cdot 10^2 \text{ cm} = 13\,500 \text{ cm}$

Como uma polegada equivale a 2,54 cm e um pé equivale a 12 polegadas, temos:

$$\frac{13\,500}{2{,}54} \simeq 5\,315 \qquad \frac{5\,315}{12} \simeq 443$$

Portanto, essa roda-gigante tem, aproximadamente, 443 pés de altura total.

16. a) Região Sudeste brasileira: altitudes do relevo.

b) Rios permanentes.

c) Minas Gerais; São Paulo.

d) Os pontos mais elevados foram representados usando o ícone que indica pico.

e) Não, pois não há regiões coloridas em vermelho na Serra da Canastra.

f) Menor altitude: Pico das Agulhas Negras; maior altitude: Pico da Bandeira.

g) Pico Pedra da Mina (2 798 m) e Pico da Bandeira (2 891 m).

17. a) Como 1 jarda equivale a 0,9144 m, temos:

Comprimento: $120 \cdot 0{,}9144 \text{ m} = 109{,}728 \text{ m}$.

Largura: $53\frac{1}{3} \cdot 0{,}9144 \text{ m} = \left(53 + \frac{1}{3}\right) \cdot 0{,}9144 \text{ m} = \frac{160}{3} \cdot 0{,}9144 \text{ m} = 48{,}768 \text{ m}$

Assim, as dimensões do campo são 109,728 m e 48,768 m.

Perímetro do campo: $2 \cdot 109{,}728 + 2 \cdot 48{,}768 = 219{,}456 + 97{,}536 = 316{,}992$

Portanto, o perímetro do campo de futebol mede 316,992 m.

b) $3 \cdot 316{,}992 \text{ m} = 950{,}976 \text{ m}$

Portanto, se um jogador der 3 voltas completas ao redor desse campo, percorrerá 950,976 m.

18. a) $\frac{13{,}5}{4{,}5} = 3$ m. Portanto, o garimpeiro vai obter 3 m de corda.

19. a) $405\,500 \text{ km} - 363\,300 \text{ km} = 42\,200 \text{ km}$

$42\,200 \text{ km} = 42\,200 \cdot 10^2 \text{ dam} = 4\,220\,000 \text{ dam}$

Portanto, a diferença entre a distância da Terra à Lua no perigeu e no apogeu é aproximadamente 4 220 000 dam.

20. a) Piauí.

b) Agricultura, pecuária, fruticultura e coleta de mel.

c) 7,4 km

21. Calculando as dimensões da representação do campo na escala 1 **:** 60, temos:

$$\frac{1}{60} \cdot 120 \text{ m} = 2 \text{ m} \qquad \frac{1}{60} \cdot 90 \text{ m} = 1{,}5 \text{ m}$$

Como a maquete precisa ter uma margem de 10 cm em cada um dos lados, é necessário adicionar 20 cm em cada uma das dimensões da maquete. Assim:

$$2 \text{ m} + 20 \text{ cm} = 2 \text{ m} + 0{,}2 \text{ m} = 2{,}2 \text{ m}$$
$$1{,}5 \text{ m} + 20 \text{ cm} = 1{,}5 \text{ m} + 0{,}2 \text{ m} = 1{,}7 \text{ m}$$

Logo, deve ser comprado um compensado de madeira com dimensões mínimas de $2{,}2 \text{ m} \times 1{,}7 \text{ m}$. Portanto, a alternativa **d** é a correta.

22. $1 \text{ UA} = 1{,}496 \cdot 10^{11} \text{ m}$ e $1{,}496 \cdot 10^{11} \text{ m} = 1{,}496 \cdot 10^8 \text{ km}$.

a) Indicando a medida em UA por x, temos:

$$\frac{1}{x} = \frac{1{,}496 \cdot 10^{11}}{2{,}992 \cdot 10^{11}} \Rightarrow x = \frac{2{,}992}{1{,}496} \Rightarrow x = 2$$

Portanto, $2{,}992 \cdot 10^{11} \text{ m} = 2 \text{ UA}$.

b) Indicando a medida em UA por x, temos: $\frac{1}{x} = \frac{1{,}496 \cdot 10^{11}}{2{,}3188 \cdot 10^{13}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x \cdot 1{,}496 \cdot 10^{11} = 2{,}3188 \cdot 10^{13} \Rightarrow x = \frac{2{,}3188 \cdot 10^2}{1{,}496} \Rightarrow x = 155$$

Portanto, $2{,}3188 \cdot 10^{10} \text{ km} = 155 \text{ UA}$.

c) Indicando por x a medida em km, temos:

$$\frac{1}{5} = \frac{1{,}496 \cdot 10^8}{x} \Rightarrow x = 7{,}48 \cdot 10^8$$

Logo, $5 \text{ UA} = 7{,}48 \cdot 10^8 \text{ km}$.

d) Indicando por x a medida em m, temos: $\frac{1}{13} = \frac{1{,}496 \cdot 10^{11}}{x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = 13 \cdot 1{,}496 \cdot 10^{11} \Rightarrow x = 1{,}9448 \cdot 10^{12}$$

Portanto, $13 \text{ UA} = 1{,}9448 \cdot 10^{12} \text{ m}$.

e) Indicando a medida em UA por x, temos: $\frac{1}{x} = \frac{1{,}496 \cdot 10^{11}}{3{,}2912 \cdot 10^{12}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x \cdot 1{,}496 \cdot 10^{11} = 3{,}2912 \cdot 10^{12} \Rightarrow x = \frac{3{,}2912 \cdot 10^{12}}{1{,}496 \cdot 10^{11}} \Rightarrow x = 22$$

Logo, $3{,}2912 \cdot 10^{12} \text{ m} = 22 \text{ UA}$.

f) Indicando por x a medida em km, temos: $\frac{1}{100} = \frac{1{,}496 \cdot 10^8}{x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = 100 \cdot 1{,}496 \cdot 10^8 \Rightarrow x = 1{,}496 \cdot 10^{10}$$

Logo, $100 \text{ UA} = 1{,}496 \cdot 10^{10} \text{ km}$.

g) Indicando por x a medida em m, temos: $\frac{1}{7{,}5} = \frac{1{,}496 \cdot 10^{11}}{x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = 7{,}5 \cdot 1{,}496 \cdot 10^{11} \Rightarrow x = 1{,}122 \cdot 10^{12}$$

Portanto, $7{,}5 \text{ UA} = 1{,}122 \cdot 10^{12} \text{ m}$.

h) Indicando a distância em UA por x: $\frac{1}{x} = \frac{1{,}496 \cdot 10^{11}}{7{,}48 \cdot 10^{18}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{7{,}48 \cdot 10^{18}}{1{,}496 \cdot 10^{11}} \Rightarrow x = 5 \cdot 10^7$$

Logo, $7{,}48 \cdot 10^{18} \text{ m} = 5 \cdot 10^7 \text{ UA}$.

i) Indicando por x a medida em km: $\frac{1}{3{,}2} = \frac{1{,}496 \cdot 10^8}{x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = 3{,}2 \cdot 1{,}496 \cdot 10^8 \Rightarrow x = 4{,}7872 \cdot 10^8$$

Logo, $3{,}2 \text{ UA} = 4{,}7872 \cdot 10^8 \text{ km}$.

j) Indicando por x a medida em m, temos:

$$x = 0{,}9 \cdot 1{,}496 \cdot 10^{11} \Rightarrow x = 1{,}3464 \cdot 10^{11}$$

Logo, $0{,}9 \text{ UA} = 1{,}3464 \cdot 10^{11} \text{ m}$.

23. a) $1 \text{ al} \simeq 9{,}46 \cdot 10^{15} \text{ m} = 9{,}46 \cdot 10^{12} \text{ km}$

Indicando por x a medida em km, temos:

$$\frac{1}{17} = \frac{9{,}46 \cdot 10^{12}}{x} \Rightarrow x = 1{,}6082 \cdot 10^{14}$$

Portanto, $17 \text{ al} \simeq 1{,}6082 \cdot 10^{14} \text{ km}$.

b) $1\ \text{al} \simeq 9{,}46 \cdot 10^{15}$ m

Indicando por x a medida em m, temos:

$$\frac{1}{2{,}5} = \frac{9{,}46 \cdot 10^{15}}{x} \Rightarrow x = 2{,}365 \cdot 10^{16}$$

Logo, $2{,}5\ \text{al} \simeq 2{,}365 \cdot 10^{16}$ m.

c) $1\ \text{al} \simeq 9{,}46 \cdot 10^{15}$ m

Indicando por x a medida em anos-luz, temos:

$$\frac{1}{x} = \frac{9{,}46 \cdot 10^{15}}{5{,}2976 \cdot 10^{16}} \Rightarrow x = \frac{5{,}2976 \cdot 10^{16}}{9{,}46 \cdot 10^{15}} \Rightarrow x = 5{,}6$$

Logo, $5{,}2976 \cdot 10^{16}\ \text{m} \simeq 5{,}6$ al.

d) $1\ \text{al} \simeq 9{,}46 \cdot 10^{15}\ \text{m} = 9{,}46 \cdot 10^{12}$ km

Indicando por x a medida em anos-luz, temos:

$$\frac{1}{x} = \frac{9{,}46 \cdot 10^{12}}{1{,}2298 \cdot 10^{14}} \Rightarrow x = \frac{1{,}2298 \cdot 10^{14}}{9{,}46 \cdot 10^{12}} \Rightarrow x = 13$$

Portanto, $1{,}2298 \cdot 10^{14}\ \text{km} \simeq 13$ al.

e) $1\ \text{al} \simeq 9{,}46 \cdot 10^{15}\ \text{m} = 9{,}46 \cdot 10^{12}$ km

Indicando por x a medida em km, temos:

$$\frac{1}{10} = \frac{9{,}46 \cdot 10^{12}}{x} \Rightarrow x = 9{,}46 \cdot 10^{13}$$

Logo, $10\ \text{al} \simeq 9{,}46 \cdot 10^{13}$ km.

f) $1\ \text{UA} = 1{,}496 \cdot 10^{11}$ m

Indicando por x a medida em UA, temos:

$$\frac{1}{x} = \frac{9{,}46 \cdot 10^{15}}{1{,}496 \cdot 10^{11}} \Rightarrow x = \frac{1{,}496 \cdot 10^{11}}{9{,}46 \cdot 10^{15}} \Rightarrow x = 1{,}581 \cdot 10^{-5}$$

Logo, $1\ \text{UA} \simeq 1{,}581 \cdot 10^{-5}$ al.

g) $1\ \text{UA} = 1{,}496 \cdot 10^{11}\ \text{m} = 1{,}496 \cdot 10^{8}$ km

Indicando por x a medida em UA, temos:

$$\frac{1}{x} = \frac{1{,}496 \cdot 10^{8}}{4{,}7 \cdot 10^{10}} \Rightarrow x = \frac{4{,}7 \cdot 10^{10}}{1{,}496 \cdot 10^{8}} \Rightarrow x = 3{,}14 \cdot 10^{2}$$

Portanto, $4{,}7 \cdot 10^{10}\ \text{km} \simeq 3{,}14 \cdot 10^{2}$ UA.

h) $1\ \text{al} \simeq 9{,}46 \cdot 10^{15}\ \text{m} = 9{,}46 \cdot 10^{12}$ km

Indicando por x a medida em km, temos:

$$\frac{1}{3{,}65} = \frac{9{,}46 \cdot 10^{12}}{x} \Rightarrow x = 3{,}4529 \cdot 10^{13}$$

Logo, $3{,}65\ \text{al} \simeq 3{,}4529 \cdot 10^{13}$ km.

i) $1\ \text{UA} = 1{,}496 \cdot 10^{11}\ \text{m} = 1{,}496 \cdot 10^{11}\ \text{m} \cdot 25{,}5 = 3{,}8148 \cdot 10^{12}$ m

Indicando por x a medida em m, temos:

$$\frac{1}{x} = \frac{9{,}46 \cdot 10^{15}}{3{,}8148 \cdot 10^{12}} \Rightarrow x = \frac{3{,}8148 \cdot 10^{12}}{9{,}46 \cdot 10^{15}} \Rightarrow x = 4{,}032 \cdot 10^{-4}$$

Portanto, $25{,}5\ \text{UA} \simeq 4{,}032 \cdot 10^{-4}$ al.

j) $1\ \text{UA} = 1{,}496 \cdot 10^{11}$ m

Indicando por x a medida em UA, temos:

$$\frac{1}{x} = \frac{1{,}496 \cdot 10^{11}}{2{,}34124 \cdot 10^{13}} \Rightarrow x = \frac{2{,}34124 \cdot 10^{13}}{1{,}496 \cdot 10^{11}} \Rightarrow x = 1{,}565 \cdot 10^{2}$$

Portanto, $2{,}34124 \cdot 10^{13}\ \text{m} \simeq 1{,}565 \cdot 10^{2}$ UA.

24. a) $384\,400\,000\ \text{m} = \dfrac{3{,}844 \cdot 10^{8}}{1{,}496 \cdot 10^{11}}\ \text{UA} \simeq 2{,}569 \cdot 10^{-3}$ UA

Logo, a distância média entre a Terra e a Lua é aproximadamente $2{,}57 \cdot 10^{-3}$ UA.

b) $384\,400\,000\ \text{m} = 3{,}844 \cdot 10^{8}$ m

25. a) $2\,300\,000\,000\ \text{km} = 2{,}3 \cdot 10^{9}$ km

b) $5\,219\ \text{al} = 5\,219 \cdot 9{,}46 \cdot 10^{15}\ \text{m} =$

$= 49\,371 \cdot 10^{15}\ \text{m} = 4{,}9371 \cdot 10^{19}$ m

Como $1\ \text{UA} = 1{,}496 \cdot 10^{11}$ m, temos:

$4{,}9371 \cdot 10^{19}\ \text{m} = \dfrac{1}{1{,}496 \cdot 10^{11}}\ \text{UA} = 3{,}3 \cdot 10^{8}$ UA

Portanto, a distância entre a estrela UY Scuti e a Terra é aproximadamente $3{,}3 \cdot 10^{8}$ UA.

26. a) Como $1\ \text{UA} = 1{,}496 \cdot 10^{11}$ m e $158\,452\,000\ \text{km} = 1{,}58452 \cdot 10^{11}$ m, temos: $\dfrac{1{,}58452 \cdot 10^{11}\ \text{m}}{1{,}496 \cdot 10^{11}\ \text{m}} \simeq 1{,}06$ UA.

Como $1{,}06\ \text{UA} < 3$ UA, a medida maior é 3 UA.

b) Como $1\ \text{UA} = 0{,}0000158$ al, então:

$$67\,348\ \text{UA} = 67\,348 \cdot 0{,}0000158\ \text{al} = 1{,}06\ \text{al}$$

Como $1{,}06\ \text{al} < 2$ al, a medida maior é 2 al.

c) $1\ \text{UA} = 1{,}496 \cdot 10^{11}$ m e $50\,478\,000\,000\ \text{m} = 5{,}0478 \cdot 10^{10}$ m, então: $\dfrac{5{,}0478 \cdot 10^{10}\ \text{m}}{1{,}496 \cdot 10^{11}\ \text{m}} = 3{,}4 \cdot 10^{-1}\ \text{UA} = 0{,}34$ UA.

Como $0{,}34\ \text{UA} < 1{,}5$ UA, a medida maior é 1,5 UA.

d) $1\,433\,500\,000\ \text{km} = 1{,}4335 \cdot 10^{9}\ \text{km} = 1{,}4335 \cdot 10^{12}$ m

Convertendo $1{,}4335 \cdot 10^{12}$ m em anos-luz, temos:

$$\frac{1{,}4335 \cdot 10^{12}}{9{,}46 \cdot 10^{15}}\ \text{al} = 0{,}15 \cdot 10^{-3}\ \text{al} = 0.00015\ \text{al}$$

Como $0{,}00015\ \text{al} < 2{,}3$ al, a medida maior é 2,3 al.

27. a) $5{,}2 \times 149\,600\,000\,000 = 777\,920\,000\,000 = 7.7792\text{E}11$

b) $13 \cdot 10^{22} = 1{,}3 \cdot 10^{23} = 1.3\text{E}23$

28. Considerando $\pi = 3{,}14$, temos:

$$C = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 6\,370 = 40\,003{,}6$$

Logo, a circunferência da Terra mede aproximadamente 40 003,6 km de comprimento.

Com isso, calculamos quantas voltas completas em torno da Terra foram realizadas pelas duas sondas espaciais.

- Voyager 1: $121{,}6\ \text{UA} = 1{,}216 \cdot 1{,}496 \cdot 10^{13}\ \text{m} \simeq 1{,}819136 \cdot 10^{10}$ km
  $\dfrac{1{,}819136 \cdot 10^{10}\ \text{km}}{40\,003{,}6\ \text{km}} \simeq 454\,743$, ou seja, aproximadamente 454 743 voltas.
- Voyager 2: $119\ \text{UA} = 1{,}19 \cdot 1{,}496 \cdot 10^{13}\ \text{m} \simeq 1{,}78024 \cdot 10^{10}$ km
  $\dfrac{1{,}78024 \cdot 10^{10}\ \text{km}}{40\,003{,}6\ \text{km}} \simeq 445\,020$, ou seja, aproximadamente 445 020 voltas.

29. $7\,594\,936{,}7\ \text{UA} = 7\,594\,936{,}7 \cdot 1{,}496 \cdot 10^{11}\ \text{m} \simeq 1{,}14 \cdot 10^{18}$ m

$$\frac{1{,}14 \cdot 10^{18}}{9{,}46 \cdot 10^{15}}\text{al} \simeq 0{,}1205 \cdot 10^{3}\ \text{al} \simeq 120\ \text{al}$$

Portanto, essa distância é, aproximadamente, 120 anos-luz.

30. Como $1\ \text{al} \simeq 9{,}46 \cdot 10^{15}\ \text{m} = 9{,}46 \cdot 10^{12}$ km, temos:

$$13{,}4 \cdot 10^{9}\ \text{al} = 13{,}4 \cdot 10^{9} \cdot 9{,}46 \cdot 10^{12}\ \text{m} \simeq 1{,}27 \cdot 10^{23}\ \text{km}$$

Portanto, essa distância é, aproximadamente, $1{,}27 \cdot 10^{23}$ km.

31. $\dfrac{4{,}94 \cdot 10^{6}\ \text{km}}{3{,}844 \cdot 10^{5}\ \text{km}} \simeq 12{,}85$

Logo, o cometa passou a uma distância entre 12 a 13 vezes maior do que a distância entre a Terra e a Lua. Portanto, a alternativa **b** é a correta.

32. a) Metros

Distância entre a Grande Nuvem de Magalhães e a Terra: $160\,000\ \text{al} = 1{,}6 \cdot 10^{5} \cdot 9{,}46 \cdot 10^{15}\ \text{m} \simeq 1{,}5136 \cdot 10^{21}$ m

Distância entre a Pequena Nuvem de Magalhães e a Terra: $200\,000\ \text{al} = 2 \cdot 10^{5} \cdot 9{,}46 \cdot 10^{15}\ \text{m} \simeq 1{,}892 \cdot 10^{21}$ m

Quilômetros ($1\ \text{km} = 1\,000\ \text{m} = 1 \cdot 10^{3}$ m)

Distância entre a Grande Nuvem de Magalhães e a Terra: $1{,}5136 \cdot 10^{21}\ \text{m} = 1{,}5136 \cdot 10^{18}$ km

Distância entre a Pequena Nuvem de Magalhães e a Terra: $1{,}892 \cdot 10^{21}\ \text{m} = 1{,}892 \cdot 10^{18}$ km

Unidades astronômicas

Distância entre a Grande Nuvem de Magalhães e a Terra: Como $160\,000\ \text{al} \simeq 1{,}5136 \cdot 10^{21}$ m, então: $1{,}5136 \cdot 10^{21}\ \text{m} =$

$= 1{,}5136 \cdot 10^{21} \cdot \dfrac{1}{1{,}496 \cdot 10^{11}}\ \text{UA} \simeq 1{,}012 \cdot 10^{10}$ UA

Distância entre a Pequena Nuvem de Magalhães e a Terra: Como $200\,000\ \text{al} \simeq 1{,}892 \cdot 10^{21}$ m, então: $1{,}892 \cdot 10^{21}\ \text{m} =$

$= 1{,}892 \cdot 10^{21} \cdot \dfrac{1}{1{,}496 \cdot 10^{11}}\ \text{UA} \simeq 1{,}2647 \cdot 10^{10}$ UA

33. a) $1{,}49 \cdot 10^{-4}\ \text{m} = 1{,}49 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{6}\ \mu\text{m} = 1{,}49 \cdot 10^{2}\ \mu\text{m} = 149\ \mu\text{m}$

b) $5{,}2 \cdot 10^{-9}\ \text{m} = 5{,}2 \cdot 10^{-9} \cdot 10^{9}\ \text{nm} = 5{,}2$ nm

c) $2{,}3 \cdot 10^{-6}\ \text{cm} = 2{,}3 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-2} \cdot 10^{9}\ \text{nm} = 23$ nm

d) $1{,}713 \cdot 10^{-3}\ \text{mm} = 1{,}713 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3} \cdot 10^{6}\ \mu\text{m} = 1{,}713\ \mu\text{m}$

e) $7{,}1\ \mu m = 7{,}1 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{2}\ cm = 7{,}1 \cdot 10^{-4}\ cm$
f) $28\ \mu m = 28 \cdot 10^{-6}\ m = 2{,}8 \cdot 10^{-5}\ m$
g) $8\ nm = 8 \cdot 10^{-9} \cdot 10^{3}\ mm = 8 \cdot 10^{-6}\ mm$
h) $64\ nm = 64 \cdot 10^{-9}\ m = 6{,}4 \cdot 10^{-8}\ m$

34. a) $C = 2 \cdot \pi \cdot r \Rightarrow C = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 6\,370 = 40\,003{,}6$
Logo, a circunferência da Terra mede aproximadamente 40 003,6 km de comprimento.
Convertendo 40 003,6 km em micrômetros, temos:
$40\,003{,}6\ km = 4{,}00036 \cdot 10^{4} \cdot 10^{9}\ \mu m = 4{,}00036 \cdot 10^{13}\ \mu m$
Portanto, a circunferência da Terra mede aproximadamente $4{,}00036 \cdot 10^{13}\ \mu m$ de comprimento.

35. a) $1{,}5\ \mu m = 1{,}5 \cdot 10^{3}\ nm = 1\,500\ nm$
$0{,}75\ mm = 7{,}5 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-3} \cdot 10^{9}\ nm = 7{,}5 \cdot 10^{5}\ nm = 750\,000\ nm$
$750\,000 - 1\,500 = 748\,500$
Portanto, a diferença entre o diâmetro máximo das bactérias *Thiomargarita namibiensis* e *Staphylococcus* é 748 500 nm.

36. a) $10\ \mu m = 10 \cdot 10^{3}\ nm = 10\,000\ nm$. Como $\frac{10\,000}{7} \simeq 1\,429$, concluímos que 10 µm é cerca de 1 429 vezes maior do que 7 nm.
b) $25\ \mu m = 25 \cdot 10^{3}\ nm = 25\,000\ nm$. Como $\frac{25\,000}{1{,}6} = 15\,625$, concluímos que 25 µm é 15 625 vezes maior do que 1,6 nm.
c) $125\ nm = 125 \cdot 10^{-9} \cdot 10^{3}\ nm = 125 \cdot 10^{-6}\ mm = 0{,}000125\ mm$
Como $\frac{12{,}6}{0{,}000125} = 100\,800$, concluímos que 12,6 mm é 100 800 vezes menor do que 125 nm.
d) $45\ \mu m = 45 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{2}\ cm = 45 \cdot 10^{-4}\ cm = 0{,}0045\ cm$
Como $\frac{9}{0{,}0045} = 2\,000$, concluímos que 9 cm é 2 000 vezes maior do que 45 µm.
e) $26\ m = 26\,000\ mm$
Como $\frac{26\,000}{136} \simeq 191$, concluímos que 26 m é cerca de 191 vezes menor do que 136 mm.
f) $1\ km = 1\,000\ m = 1 \cdot 10^{3} \cdot 10^{6}\ \mu m = 1 \cdot 10^{9}\ \mu m =$
$= 1\,000\,000\,000\ \mu m$. Como $\frac{1\,000\,000\,000}{1\,458} \simeq 685\,871$, concluímos que 1 km é cerca de 685 871 vezes maior do que 1 458 µm.

37. $0{,}2\ \mu m = 2 \cdot 10^{-1}\ \mu m$
$$2 \cdot 10^{-1}\ \mu m = 2 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-3}\ mm = 2 \cdot 10^{-4}\ mm$$
Logo, a *Chlamydia* mede $2 \cdot 10^{-4}$ mm. Portanto, a alternativa **c** é a correta.

38. a) Como o diâmetro mede o dobro do raio, então $27\ mm = 2 \cdot 13{,}5\ mm$
Assim, temos: $C = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 13{,}5 = 84{,}78$. Logo, o comprimento da circunferência dessa moeda é, aproximadamente, 84,78 mm.
b) Convertendo $1\ mm = 1 \cdot 10^{3}\ \mu m$, temos: $\frac{2\,745}{1 \cdot 10^{3}} = 2{,}745$.
Logo, o comprimento da circunferência da moeda é maior do que 2 745 µm, pois 2 745 µm = 2,745 mm e 2,745 mm < 84,78 mm.

39. a) comprimento: $0{,}1\ mm = 1 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{3}\ \mu m = 100\ \mu m$
largura: $0{,}03\ mm = 3 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{3}\ \mu m = 30\ \mu m$
altura: $0{,}002\ mm = 2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{3}\ \mu m = 2\ \mu m$

41. a) $1{,}2 \cdot 10^{5}\ mg = 1{,}2 \cdot 10^{5} \cdot 10^{-3}\ g = 1{,}2 \cdot 10^{2}\ g = 120\ g$
b) $5{,}3 \cdot 10^{7}\ mg = 5{,}3 \cdot 10^{7} \cdot 10^{-6}\ kg = 5{,}3 \cdot 10\ kg = 53\ kg$
c) $3{,}7 \cdot 10^{-5}\ kg = 3{,}7 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{6}\ mg = 3{,}7 \cdot 10\ mg = 37\ mg$
d) $1{,}73 \cdot 10^{-5}\ t = 1{,}73 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{6}\ g = 1{,}73 \cdot 10\ g = 17{,}3\ g$
e) $6{,}2 \cdot 10^{6}\ g = 6{,}2 \cdot 10^{6} \cdot 10^{-6}\ t = 6{,}2\ t$
f) $5\,764\ kg = 5{,}764 \cdot 10^{3} \cdot 10^{-3}\ t = 5{,}764\ t$
g) $0{,}08\ g = 8 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{3}\ mg = 8 \cdot 10\ mg = 80\ mg$
h) $640\ t = 6{,}4 \cdot 10^{2} \cdot 10^{3}\ kg = 6{,}4 \cdot 10^{5}\ kg$
i) $91\,450\ mg = 91\,450 \cdot 10^{-6}\ kg = 0{,}09145\ kg$

42. $1{,}898 \cdot 10^{30}\ g = 1{,}898 \cdot 10^{27} \cdot 10^{3}\ g = 1{,}898 \cdot 10^{27}\ kg$.
$$\frac{1{,}989 \cdot 10^{30}\ kg}{1{,}898 \cdot 10^{27}\ kg} \simeq 1\,048$$
Portanto, a massa do Sol é aproximadamente 1 048 vezes maior do que a massa de Júpiter.

43. $IMC = \frac{\text{massa em quilogramas}}{(\text{altura em metros})^{2}} \Rightarrow IMC = \frac{110}{(1{,}83)^{2}} = \frac{110}{3{,}3489} = 32{,}85$.
Portanto, IMC = 32,85 kg/m² e a classificação será obesidade.
Ao "perder" 9 600 g, ou seja, 9,6 kg, o IMC será:
$IMC = \frac{110 - 9{,}6}{(1{,}83)^{2}} = \frac{100{,}4}{3{,}3489} = 29{,}98$. Logo, IMC = 29,98 kg/m² e a classificação será sobrepeso.

44. a) Verdadeira.
b) Como 53 kg = 53 000 g, temos: $\frac{53\,000}{453{,}6} = 116$, ou seja, 116 libras.
$0{,}843 \cdot 16 = 13{,}488$, ou seja, 13,488 onças.
Portanto, a sentença é falsa. Sugestão de correção: A massa de uma pessoa com 53 kg expressa em libras e onças é igual a, aproximadamente, 116 libras e 13,488 onças.
c) Como uma libra é igual a, aproximadamente, 453,6 g, temos:
$68 \cdot 453{,}6 = 30\,844{,}8$, ou seja, aproximadamente 30,85 kg.
Portanto, a sentença é falsa. Sugestão de correção: Uma mala de 68 libras de massa está acima do limite de 30 kg de certa empresa de ônibus.
d) Verdadeira.

45. Como 280,8 g = 0,2808 kg, então:
$$0{,}2808\ kg = \frac{0{,}2808}{2 \cdot 10^{-4}}\ \text{quilates} = 1\,404\ \text{quilates}$$
Portanto, a massa, em quilates, de uma safira azul é, aproximadamente, 1 404 quilates.

46. $\frac{6{,}69 \cdot 10^{15}}{5{,}9722 \cdot 10^{24}} \simeq 1{,}12 \cdot 10^{-9}$. Portanto, a razão entre a massa de Eros e a da Terra é aproximadamente $1{,}12 \cdot 10^{-9}$.

47. a) 400 mg = 0,4 g. Portanto, em 1 g de sal há 40% de sódio.
b) De acordo com o item **a**, em um grama de sal há 40% de sódio. Logo: $9\ g \cdot 0{,}4 = 3{,}6\ g$. Portanto, ao ingerir 9 g de sal em um dia, uma pessoa terá ingerido 3,6 g de sódio.

48. a) Como uma sacola plástica tem cerca de 3 g, e 5 trilhões $= 5 \cdot 10^{12}$, temos: $5 \cdot 10^{12} \cdot 3\ g = 1{,}5 \cdot 10^{13}\ g = 1{,}5 \cdot 10^{7}\ t$.
Portanto, são consumidas, aproximadamente, $1{,}5 \cdot 10^{7}$ t de sacolas plásticas anualmente em todo o planeta.

49. Como 1 arroba equivale a 15 000 g, sendo x o valor oferecido ao produtor, calculamos: $\frac{2{,}7}{x} = \frac{453{,}6}{15\,000} \Rightarrow x = \frac{40\,500}{453{,}6} \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 89{,}29$. Portanto, o valor oferecido ao produtor foi, aproximadamente, R$ 89,29 por arroba.
Como 1 t equivale a 1 000 000 g, sendo x o valor oferecido ao produtor, calculamos: $\frac{2{,}7}{x} = \frac{453{,}6}{1\,000\,000} \Rightarrow x = \frac{2\,700\,000}{453{,}6} \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 5\,952{,}38$. Portanto, o valor oferecido ao produtor foi, aproximadamente, R$ 5 952,38 por tonelada.

50. a) $15\% + 3\% + 10\% + 0{,}5\% + 12\% = 40{,}5\%$
Portanto, 40,5% do que se planta é perdido nesse país.
b) $\frac{1}{2} \cdot 200\,000\,000\ t = 100\,000\,000\ t$
Logo, a massa é de 100 milhões de toneladas.
c) Perda na colheita: $0{,}15 \cdot 100\,000\,000\ t = 15\,000\,000\ t$
Perda no varejo: $0{,}15 \cdot 100\,000\,000\ t = 500\,000\ t$
Portanto, 15 milhões de toneladas de alimento foram perdidas durante a colheita e 500 mil toneladas de alimento foram perdidas durante o varejo.

51. a) Indicando por c e g, respectivamente, o preço, em reais, por quilograma da ração do cão e da ração do gato, temos o seguinte sistema de equações.

$$\begin{cases} 10 \cdot c + 5 \cdot g = 160 \\ c + g = 22 \Rightarrow c = 22 - g \end{cases}$$

Substituindo $c = 22 - g$ na 1ª equação, temos:

$10(22 - g) + 5g = 160 \Rightarrow 220 - 10g + 5g = 160 \Rightarrow g = 12$

E, para obter o valor de g, fazemos: $c = 22 - 12 = 10$. Portanto, o preço por quilograma da ração para o cão é R$ 10,00 e da ração para o gato é R$ 12,00.

b) Consumindo 500 g de ração por dia, durante 30 dias, temos: $30 \cdot 0{,}5\ \text{kg} = 15\ \text{kg}$. Logo, Pedro vai gastar R$ 150,00 para comprar essa quantidade de ração.

Como Pedro tem R$ 210,00 reais, sobrarão R$ 60,00 para a compra da ração para o gato. Pelo item **a**, sabemos que 1 kg de ração para gato custa R$ 12,00. Logo, Pedro poderá comprar 5 kg de ração para o gato, pois $60 : 12 = 5$.

Dividindo essa quantidade de ração pelo consumo diário, que é 200 g, temos: $\frac{5\ \text{kg}}{200\ \text{g}} = \frac{5\,000\ \text{g}}{200\ \text{g}} = 25$. Portanto, essa quantidade de ração será suficiente por 25 dias.

53. a) $7\ \text{mm}^2 = 7 \cdot 10^{-6}\ \text{m}^2$

b) $44\ \text{cm}^2 = 4{,}4 \cdot 10^1 \cdot 10^{-8}\ \text{hm}^2 = 4{,}4 \cdot 10^{-7}\ \text{hm}^2$

c) $8{,}5\ \text{dm}^2 = 8{,}5 \cdot 10^{-8}\ \text{km}^2$

d) $8\,745\ \text{m}^2 = 8{,}745 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6}\ \text{km}^2 = 8{,}745 \cdot 10^{-3}\ \text{km}^2$

e) $526\ \text{m}^2 = 5{,}26 \cdot 10^2 \cdot 10^6\ \text{mm}^2 = 5{,}26 \cdot 10^8\ \text{mm}^2$

f) $0{,}35\ \text{dam}^2 = 3{,}5 \cdot 10^{-1} \cdot 10^4\ \text{dm}^2 = 3{,}5 \cdot 10^3\ \text{dm}^2$

g) $3{,}7\ \text{hm}^2 = 3{,}7 \cdot 10^8\ \text{cm}^2$

h) $63\ \text{km}^2 = 6{,}3 \cdot 10^1 \cdot 10^{12}\ \text{mm}^2 = 6{,}3 \cdot 10^{13}\ \text{mm}^2$

i) $142\ \text{dm}^2 = 1{,}42 \cdot 10^2 \cdot 10^4\ \text{mm}^2 = 1{,}42 \cdot 10^6\ \text{mm}^2$

j) $248\ \text{hm}^2 = 2{,}48 \cdot 10^2 \cdot 10^2 \cdot 10^2\ \text{m}^2 = 2{,}48 \cdot 10^6\ \text{m}^2$

54. a) $\frac{1050\ \text{MW}}{0{,}25\ \text{MW/km}^2} = 4\,200\ \text{km}^2$. Portanto, a usina hidrelétrica de Sobradinho tem $4\,200\ \text{km}^2$ de área alagada.

b) $\frac{6\,000\ \text{MW}}{2\,400\ \text{km}^2} = 2{,}5\ \text{MW/km}^2$. Portanto, o índice de produção será $2{,}5\ \text{MW/km}^2$.

55. a) 110,2 alqueires do Norte $= 110{,}2 \cdot 27\,225\ \text{m}^2 = 3\,000\,195\ \text{m}^2 = 3\,000\,195 \cdot 10^{-6}\ \text{km}^2 \simeq 3\ \text{km}^2$

b) 155 alqueires mineiros $= 155 \cdot 48\,400\ \text{m}^2 = 7\,502\,000\ \text{m}^2 = 7\,502\,000 \cdot 10^{-6}\ \text{km}^2 \simeq 7{,}5\ \text{km}^2$

c) 256 alqueires paulistas $= 256 \cdot 24\,200\ \text{m}^2 = 6\,195\,200\ \text{m}^2 = 6\,195\,200 \cdot 10^{-6}\ \text{km}^2 \simeq 6{,}2\ \text{km}^2$

d) 480 hectares $= 480 \cdot 10\,000\ \text{m}^2 = 4\,800\,000\ \text{m}^2 = 4\,800\,000 \cdot 10^{-6}\ \text{km}^2 = 4{,}8\ \text{km}^2$

56. Indicando por P e P_1, respectivamente, a produção total e a produção inicial, temos:

$P_1 = 120 \cdot P + 40 \cdot 2{,}5 \cdot P \Rightarrow P_1 = 120 \cdot P + 100 \cdot P \Rightarrow P_1 = 220 \cdot P$

Calculando 15% de $220P$, temos $\frac{15}{100} \cdot 220 \cdot P = 33 \cdot P$.

Logo, o produtor deverá comprar uma área mínima de 33 hectares. Portanto, a alternativa **b** é a correta.

57. a) $355{,}7169 + 1\,414{,}1632 + 1\,779{,}80890 + 2\,355{,}4831 + 101{,}880 = 6\,006{,}9721$ hectares $= 6\,006{,}9721 \cdot 10^{-2}\ \text{km}^2 \simeq 60{,}07\ \text{km}^2$

Portanto, a área das cinco terras declaradas e reconhecidas, juntas, medem cerca de $60{,}07\ \text{km}^2$ de extensão.

58. a) Maior densidade demográfica: Região Sudeste. Menor densidade demográfica: Região Norte.

b) Região Norte: $\frac{17{,}4}{4{,}51} \simeq 3{,}86$, ou seja, aproximadamente, 3,86 milhões de km^2. Região Nordeste: $\frac{54{,}7}{35{,}21} \simeq 1{,}55$, ou seja, aproximadamente 1,55 milhões de km^2. Região Sudeste: $\frac{84{,}8}{91{,}76} \simeq 0{,}92$, ou seja, aproximadamente 0,92 milhões de km^2. Região Sul: $\frac{29{,}9}{51{,}91} \simeq 0{,}58$, ou seja, aproximadamente 0,58 milhões de km^2. Região Centro-Oeste: $\frac{16{,}3}{10{,}14} \simeq 1{,}61$, ou seja, aproximadamente 1,61 milhões de km^2.

c) A população brasileira está desigualmente distribuída pelo território nacional.

59. a) $25\ \text{mm}^3 = 2{,}5 \cdot 10^1 \cdot 10^{-9}\ \text{m}^3 = 2{,}5 \cdot 10^{-8}\ \text{m}^3$

b) $657\ \text{cm}^3 = 6{,}57 \cdot 10^2 \cdot 10^{-12}\ \text{hm}^3 = 6{,}57 \cdot 10^{-10}\ \text{hm}^3$

c) $83{,}3\ \text{L} = 8{,}33 \cdot 10^1\ \text{dm}^3 = 8{,}33 \cdot 10^1 \cdot 10^{-12}\ \text{km}^3 = 8{,}33 \cdot 10^{-11}\ \text{km}^3$

d) $4\,156\ \text{m}^3 = 4{,}156 \cdot 10^3 \cdot 10^{-9}\ \text{km}^3 = 4{,}156 \cdot 10^{-6}\ \text{km}^3$

e) $577\ \text{m}^3 = 5{,}77 \cdot 10^2 \cdot 10^6\ \text{cm}^3 = 5{,}77 \cdot 10^8\ \text{mL}$

f) $0{,}41\ \text{dam}^3 = 4{,}1 \cdot 10^{-1} \cdot 10^6\ \text{dm}^3 = 4{,}1 \cdot 10^5\ \text{dm}^3$

60. a) Como $8{,}27\% = \frac{8{,}27}{100}$, temos:

$\frac{8{,}27}{100} \cdot 209\,000\ \text{m}^3/\text{s} \simeq 17\,284\ \text{m}^3/\text{s}$. Portanto, o rio Paraná tem vazão de aproximadamente $17\,284\ \text{m}^3/\text{s}$.

b) Como 24 h = 86 400 s, então podemos calcular:

Rio Amazonas: $209\,000 \cdot 86\,400 = 18\,057\,600\,000$

Rio Paraná: $17\,284 \cdot 86\,400 = 1\,493\,337\,600$

$18\,057\,600\,000 - 1\,493\,337\,600 \simeq 1{,}66 \cdot 10^{10}$

Portanto, em um dia, o rio Amazonas despeja aproximadamente $1{,}66 \cdot 10^{10}\ \text{m}^3$ de volume de água a mais do que o rio Paraná no oceano.

61. a) Volume de água do Oceano Pacífico: 50,1% de $1{,}335 \cdot 10^9\ \text{km}^3$, ou seja, $0{,}501 \cdot 1{,}335 \cdot 10^9\ \text{km}^3 = 668\,835\,000\ \text{km}^3$. Portanto, o volume de água do Oceano Pacífico é $668\,835\,000\ \text{km}^3$.

Volume de água do Oceano Ártico: 1,4% de $1{,}335 \cdot 10^9\ \text{km}^3$, ou seja, $0{,}014 \cdot 1{,}335 \cdot 10^9\ \text{km}^3 = 18\,690\,000\ \text{km}^3$. Assim, o volume de água do Oceano Ártico é $18\,690\,000\ \text{km}^3$.

b) Maior, pois o Oceano Pacífico tem volume de água correspondente a 50,1% do volume total dos oceanos da Terra.

62. Volume interno do aquário em dm^3: $90 \cdot 30 \cdot 45 = 121\,500\ \text{cm}^3 = 121{,}5\ \text{dm}^3$. Como $1\ \text{dm}^3 = 1\ \text{L}$, a capacidade do aquário é de 121,5 L. Logo, se Márcia despejar 120 L de água nesse aquário, o líquido não vai transbordar, pois $120\ \text{L} < 121{,}5\ \text{L}$.

63. Calculando a área da base (A_b) do pluviômetro cilíndrico em m^2 e considerando $\pi = 3{,}14$, temos: $A_b = \pi \cdot r^2 \cdot (0{,}08)^2 = 0{,}020096$. Assim, a área aproximada da base do pluviômetro é $0{,}020096\ \text{m}^2$.

Seja x a quantidade de água captada (L) pelo pluviômetro. Efetuando os cálculos em cada um dos meses, temos:

Junho: $x = 455{,}5 \cdot 0{,}020096 = 9{,}153728$, ou seja, aproximadamente 9,15 L.

Julho: $x = 363{,}5 \cdot 0{,}020096 = 7{,}304896$, ou seja, aproximadamente 7,3 L.

Agosto: $x = 186{,}5 \cdot 0{,}020096 = 3{,}747904$, ou seja, aproximadamente 3,75 L.

Setembro: $x = 34{,}0 \cdot 0{,}020096 = 0{,}683264$, ou seja, aproximadamente 0,68 L.

Outubro: $x = 37{,}0 \cdot 0{,}020096 = 0{,}743552$, ou seja, aproximadamente 0,74 L.

Novembro: $x = 170{,}0 \cdot 0{,}020096 = 3{,}41632$, ou seja, aproximadamente 3,42 L.

64. Na escala de 1 : 200, 1 cm da maquete corresponde a 200 cm ou 20 dm na realidade. Calculando o volume real do reservatório, temos: $V = 20^3 \cdot 45 = 360\,000 = 3{,}6 \cdot 10^5$. Assim, o volume real do reservatório é $3{,}6 \cdot 10^5\ \text{dm}^3$ ou $3{,}6 \cdot 10^5\ \text{L}$.

Dividindo essa medida por 30 000 L, obtemos:

$$\frac{3{,}6 \cdot 10^5\ \text{L}}{30\,000\ \text{L}} = \frac{360\,000\ \text{L}}{30\,000\ \text{L}} = 12$$

Logo, o reservatório cheio será suficiente para abastecer o condomínio por 12 dias. Portanto, alternativa **c** é a correta.

66. a) $20\ \text{m/s} = \frac{20\ \text{m}}{1\ \text{s}} = \frac{20 \cdot 0{,}001\ \text{km}}{\frac{1}{3\,600}\ \text{h}} = \frac{3\,600 \cdot 0{,}02\ \text{km}}{1\ \text{h}} = 72\ \text{km/h}$

b) $65\ m/s = \frac{65\ m}{1\ s} = \frac{65 \cdot 0{,}001\ km}{\frac{1}{3\,600}\ h} = \frac{3\,600 \cdot 0{,}065\ km}{1\ h} = 234\ km/h$

c) $110\ km/h = \frac{110 \cdot 1\,000\ m}{3\,600\ s} = \frac{110\,000\ m}{3\,600\ s} = 30{,}\overline{5}\ m/s$

d) $60\ km/h = \frac{60 \cdot 1\,000\ m}{3\,600\ s} = \frac{60\,000\ m}{3\,600\ s} = 16{,}\overline{6}\ m/s$

67. $V_m = \frac{d}{t} = \frac{120\ km}{2\ h} = 60\ km/h$

Portanto, a velocidade média desse automóvel foi 60 km/h.

68. Como 1 m/s = 3,6 km/h e 55 min = 3 300 s, temos:

9 350 m/s = 9 350 m/s · 3,6 = 33 660 km/h

55 · 60 s = 3 300 s $\qquad \frac{33\,600}{3\,300} = 10{,}\overline{18}$

Assim, a velocidade média de Armando nesse trajeto, em quilômetros por hora, foi cerca de 10,2 km/h.

69. $11\ m/s = \frac{11\ m}{1\ s} = \frac{11 \cdot 0{,}001\ km}{\frac{1}{3\,600}\ h} = \frac{3\,600 \cdot 0{,}11\ km}{1\ h} = 39{,}6\ km/h$

Portanto, a velocidade média de Marcos nesse passeio é de 39,6 km/h.

70. Como 5 km = 5 000 m e 30 min = 1 800 s, temos:

$\frac{5\,000\ m}{1\,800\ s} = 2{,}\overline{77}\ m/s$. Portanto, a velocidade média desse corpo é $2{,}\overline{77}$ m/s.

71. Se Juliana corre com uma velocidade média de 8 km/h, então em meia hora ela corre cerca de 4 km. Assim, 8 km + 4 km = = 12 km. Portanto, o treino de Juliana durou 1 h e 30 min.

72. 2 h 25 min = 2 · 60 min + 25 min = 145 min

Sendo x a quantidade de quilômetros percorrida por esse corpo, temos: $x = \frac{78 \cdot 145}{60} = 188{,}5$. Portanto, esse corpo percorre 188,5 km.

73. Como 8 h 30 min = 8,5 h, o tempo gasto foi 18 h − 8,5 h = = 9,5 h. Assim, $V_m = \frac{d}{t} = \frac{652}{9{,}5} \simeq 68{,}6$. Portanto, a velocidade média da viagem foi, aproximadamente, 68,6 km/h.

75. b) Os algarismos corretos são 6 e 2. Para identificar o algarismo duvidoso, a resposta depende da aproximação realizada pelos estudantes.

76. a) 4 algarismos significativos: 2, 9, 2 e 5.

b) O algarismo 5.

c) $29{,}25\ mm = 2{,}925 \cdot 10^1 \cdot 10^3\ \mu m = 2{,}925 \cdot 10^4\ \mu m$

77. Para resolver essa tarefa, devemos identificar os casos em que o algarismo zero estiver à esquerda do primeiro algarismo correto, antes ou depois da vírgula. Nesse caso, ele não será significativo.

a) 263 t: 3 algarismos significativos: 2, 6 e 3.

b) 0,1005 m: 4 algarismos significativos: 1, 0, 0 e 5.

c) 5,0003 s: 5 algarismos significativos: 5, 0, 0, 0 e 3.

d) 0,0005 m: 1 algarismo significativo: 5.

e) 5,986 g: 4 algarismos significativos: 5, 9, 8 e 6.

f) 0,005069 cm: 4 algarismos significativos: 5, 0, 6 e 9.

78. a) 238,34 cm ≃ 238 cm

b) 5,875 s ≃ 5,88 s ou 5,87 s

c) $18{,}175\ cm^2 \simeq 18{,}2\ cm^2$

d) 0,15478 g ≃ 0,155 g

e) $1{,}888\ dm^3 \simeq 1{,}89\ dm^3$

f) 259,91 m ≃ 260 m

79. a) $100\ cm = 1{,}00 \cdot 10^2 \cdot 10^{-5}\ km = 1{,}00 \cdot 10^{-3}\ km$

b) $25{,}60\ km^2 = 25{,}60 \cdot 10^{10}\ cm^2 = 2{,}56 \cdot 10^{11}\ cm^2$

c) $180{,}5\ km/h = 180{,}5 \cdot \frac{1}{3{,}6}\ m/s \simeq 5{,}014 \cdot 10^1\ m/s$

d) $8{,}2\ kg = 8{,}2 \cdot 10^3\ g$

e) $0{,}1005\ km^3 = 0{,}1005 \cdot 10^{18}\ mm^3 = 1{,}005 \cdot 10^{17}\ mm^3$

f) $5{,}98\ t = 5{,}98 \cdot 10^3\ kg$

80. Para identificar a quantidade de algarismos significativos da adição, o resultado obtido deve ter a mesma quantidade de casas decimais da medida com menor precisão.

a) 9,36 cm + 50,7 cm = 60,06 cm ≃ 60,1 cm

b) 100,3 t + 49,83 t = 150,13 t ≃ 150,1 t

c) 8,179 s + 9,18 s = 17,359 s ≃ 17,36 s

d) 8,15 km/h − 2,957 km/h = 5,193 km/h ≃ 5,19 km/h

e) 198,28 km − 50,7 km = 147,58 km ≃ 147,6 km

f) 135 g − 101,85 g = 33,15 g ≃ 33 g

g) 25,3 cm + 17,89 cm + 189,145 cm = 232,335 cm ≃ 232,3 cm

h) 0,005 t + 39,159 t + 25,9841 t = 65,1481 t ≃ 65,148 t

81. O resultado deve ter a mesma quantidade de algarismos do termo com a menor quantidade de algarismos significativos.

a) 78,41 · 3,08 = 241,5028 ≃ 241,5

b) 1,255 · 10,9 = 13,6795 ≃ 13,7

c) 100,138 · 4,15 = 415,5727 ≃ 416

d) 89,675 : 13,16 = 6,81421 ≃ 6,814

e) 158,4 : 24,65 = 6,425963 ≃ 6,426

f) 9,8888 : 3,4 = 2,908 ≃ 2,9

82. a) Nessa medida, há 3 algarismos significativos: 1, 3 e 5.

b) O algarismo 5 é o algarismo duvidoso.

c) Não, pois nesse caso o 5 seria um algarismo correto, o que não é verdade.

83. Distância entre as cidades **B** e **C**: $81{,}0\ km = 0{,}81 \cdot 10^2\ km$

$$1{,}25 \cdot 10^2 + 0{,}81 \cdot 10^2 + 1{,}0893 \cdot 10^2 = 3{,}1493 \cdot 10^2$$

Portanto, Mariana percorreu $3{,}15 \cdot 10^2$ km nessa viagem.

85. a) 45 GB = 45 · 1024 MB = 46 080 MB

b) 1 TB = 1 · 1024 GB = 1024 · 1024 MB = = 1 048 576 · 1024 kB = 1 073 741 824 kB

c) $88\,268{,}8\ MB = 88\,268{,}8 \cdot \frac{1}{1024}\ GB = 86{,}2\ GB$

d) 385 GB = 385 · 1024 MB = 394 240 · 1024 kB = = 403 701 760 · 1024 B = 3 307 124 817 920 bites

e) $901\,775{,}36\ kB = 901\,775{,}36 \cdot \frac{1}{1024}\ MB = 880{,}64 \cdot \frac{1}{1024}\ GB = 0{,}86\ GB$

f) $839{,}68\ GB = 839{,}68 \cdot \frac{1}{1024}\ TB = 0{,}82\ TB$

86. 1 TB = 1 · 1024 GB = 1024 · 1024 MB 0 = 1 048 576 · 1024 kB = = 1 073 741 824 · 1024 B = 1 099 511 627 776 B

Como 1 B = 8 bites, então:

1 073 741 824 · 8 bites ≃ 8,796 bilhões de bites

Assim, 1 TB ≃ 8,796 bilhões de bites.

a) 3 TB = 3 · 8,796 bilhões de bites ≃ 26,388 bilhões de bites

b) 4,2 TB = 4,2 · 8,796 bilhões de bites ≃ 36,94 bilhões de bites

c) 0,5 TB = 0,5 · 8,796 bilhões de bites ≃ 4,398 bilhões de bites

87. a) 868 GB = 868 · 1024 MB = 888 832 MB

888 832 : 213 ≃ 4 172,92

Portanto, João poderá armazenar, no máximo, 4 172 arquivos.

b) 868 GB = 888 832 MB = 888 832 · 1024 kB = 910 163 968 kB. Calculando 2% de 910 163 968 kB, temos:

$\frac{2}{100} \cdot 910\,163\,968\ kB = 18\,203\,279{,}36\ kB$. Portanto, o tamanho desse arquivo é 18 203 279,36 kB.

88. a) A opção mais vantajosa é a 1ª, pois a empresa terá um gasto de R$ 2 000,00.

b) Possível resposta: A 1ª opção, pois é a única que atende à necessidade de espaço para armazenamento destinado a cada um dos funcionários.

89. Quantidade de armazenamento "ocupado":

$$75\%\ de\ 512\ GB = \frac{75}{100} \cdot 512\ GB = 384\ GB$$

Como 2 TB = 2 048 GB, temos: $\frac{384}{2\,048} = 0{,}1875$.

Portanto, os jogos armazenados vão "ocupar" 18,75% da capacidade de armazenamento do HD externo.

90. a) $1{,}1\ \text{GB} = 1{,}1 \cdot 1024\ \text{MB} = 1126{,}4\ \text{MB}$

Dividindo por 5 MB, obtemos: $\frac{1126{,}4}{5} = 225{,}28$.

Logo, Ana pode armazenar, em média, 225 fotos em seu *smartphone*.

91. Para cada um dos itens, calculamos a capacidade de memória livre do cartão, em MB, para, em seguida, determinar a quantidade de fotos que será possível armazenar.

a) $17\ \text{GB} = 17 \cdot 1024\ \text{MB} = 17\,408\ \text{MB}$. Como $\frac{17\,408}{16} = 1088$, nesse cartão é possível armazenar 1088 fotos.

b) $29\ \text{GB} = 29 \cdot 1024\ \text{MB} = 29\,696\ \text{MB}$. Como $\frac{29\,696}{16} = 1856$, nesse cartão é possível armazenar 1856 fotos.

c) $53\ \text{GB} = 53 \cdot 1024\ \text{MB} = 54\,272\ \text{MB}$. Como $\frac{54\,272}{16} = 3\,392$, nesse cartão é possível armazenar 3 392 fotos.

92. a) Não, pois, para que seja possível obter o tempo necessário de *download*, a quantidade de dados deve ser expressa em terabaite, gigabaite, megabaite, quilobaite ou baite.

b) É preciso efetuar essa multiplicação para obter a quantidade de dados em bites, ou seja:

$1\ \text{TB} = 1\,024^3$ quilobaites $= 1\,073\,741\,824$ quilobaites

$1\,073\,741\,824$ quilobaites $= 8 \cdot 1\,073\,741\,824$ quilobites $=$

$= 8\,589\,934\,592$ quilobites

c) $17\ \text{MB} = 17 \cdot 1024\ \text{KB} = 17\,408 \cdot 8\ \text{Kb} = 139\,264\ \text{Kb}$

Indicando por t o tempo em segundos, temos:

$$t \cdot 512 = 139\,264 \cdot 1 \Rightarrow t = \frac{139\,264}{512} \Rightarrow t = 272$$

Portanto, seriam necessários 272 s para realizar o *download* de um vídeo de 17 MB.

d) O algoritmo e o fluxograma desse item estão apresentados na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

93. A velocidade mínima de *download* para a tecnologia 5G é 100 MBps e é 10 vezes a velocidade da tecnologia 4G. Assim, a velocidade de *download* para a tecnologia 4G é 10 MBps.

Como o *download* na rede 4G leva 15 min, temos:

$$\text{tempo na rede 5G} = \frac{\text{tempo na rede 4G}}{10} = \frac{15\ \text{min}}{10} = 1{,}5\ \text{min}$$

Portanto, é necessário aproximadamente 1,5 min para completar o mesmo *download* na rede 5G.

94. a) $40\ \text{GB} = 40 \cdot 1024\ \text{MB} = 40\,960 \cdot 8\ \text{Mb} = 327\,680\ \text{Mb}$

Calculando o tempo de *download* na terça-feira (t), temos:

$$t \cdot 68{,}5 = 327\,680 \cdot 1 \Rightarrow t = \frac{327\,680}{68{,}5} \Rightarrow t \simeq 4\,784$$

Fazendo a conversão do tempo:

$$4\,784\ \text{s} = 79\ \text{min}\ 44\ \text{s} = 1\ \text{h}\ 19\ \text{min}\ 44\ \text{s}$$

Portanto, o tempo de *download* na terça-feira foi aproximadamente 1 h 19 min 44 s.

Calculando o tempo de *download* na quarta-feira (q), temos:

$$q \cdot 78{,}6 = 327\,680 \cdot 1 \Rightarrow q = \frac{327\,680}{78{,}6} \Rightarrow q \simeq 4\,169$$

Fazendo a conversão do tempo: $4\,169\ \text{s} = 69\ \text{min}\ 29\ \text{s} = 1\ \text{h}\ 9\ \text{min}\ 29\ \text{s}$.

Portanto, o tempo de *download* na quarta-feira foi aproximadamente 1 h 9 min 29 s.

b) $12\ \text{MB} \cdot 8 = 96\ \text{Mb}$

Seja x o tempo necessário para fazer o *upload*. Então:

$$x \cdot 7{,}3 = 96 \cdot 1 \Rightarrow x = \frac{96}{7{,}3} \Rightarrow x \simeq 13{,}2$$

Portanto, foram gastos 13,2 s para fazer o *upload* desse vídeo.

95. a) $360\ \text{GB} = 360 \cdot 1024\ \text{MB} = 368\,640 \cdot 8\ \text{Mb} = 2\,949\,120\ \text{Mb}$

Como $30\ \text{MB} \cdot 8 = 240$ Mbps e considerando t o tempo necessário para concluir a transferência, em segundos, temos:

$$t \cdot 240 = 2\,949\,120 \cdot 1 \Rightarrow t = \frac{2\,949\,120}{240} \Rightarrow t = 12\,288$$

$12\,288\ \text{s} = 204\ \text{min}\ 48\ \text{s} = 3\ \text{h}\ 24\ \text{min}\ 48\ \text{s}$

Portanto, para concluir a transferência, foram necessárias 3 h 24 min 48 s.

b) Possíveis motivos: A taxa de transferência do HD antigo era menor; as conexões e os cabos não suportaram a taxa de transferência anunciada; o computador estava realizando outras tarefas e, por isso, a taxa de transferência foi reduzida.

c) $180\ \text{MB} = 180 \cdot 8\ \text{Mb} = 1440\ \text{Mb}$

Seja t o tempo necessário para concluir a transferência, em segundos. Então:

$$t \cdot 1440 = 2\,949\,120 \cdot 1 \Rightarrow t = \frac{2\,949\,120}{1440} \Rightarrow t = 2\,048$$

$2\,048\ \text{s} = 34\ \text{min}\ 8\ \text{s}$

Portanto, se a transferência fosse realizada na taxa anunciada, seriam necessários 0 h 34 min 8 s.

96. a) $q = 510 \cdot 40 \Rightarrow q = 20\,400$

Portanto, o arquivo transferido tem 20 400 Mb.

Como $1\ \text{Gb} = 1024 \cdot 8\ \text{Mb} = 8\,192\ \text{Mb}$, temos: $\frac{20\,400}{8\,192} \simeq 2{,}49$.

Portanto, o arquivo tem, aproximadamente, 2,49 GB.

b) $2{,}49\ \text{GB} = 2{,}49 \cdot 1024\ \text{MB} = 2\,549{,}76 \cdot 8\ \text{Mb} = 20\,398{,}08\ \text{Mb}$

Convertendo o tempo de transferência de 10 min 37 s em segundos, temos: $10\ \text{min}\ 37\ \text{s} = (10 \cdot 60 + 37)\text{s} = 637\ \text{s}$.

A taxa de transferência (t) é dada por: $t = \frac{20\,398{,}08}{637} \Rightarrow$

$\Rightarrow t \simeq 32$.

Portanto, a taxa de transferência entre o SSD e o HD foi, aproximadamente, 32 Mbps.

97. a) $Q = 85 \cdot 61\,200 = 5\,202\,000$, ou seja, $Q = 5\,202\,000$ Gb.

Como $1\ \text{Tb} = 1024 \cdot 8\ \text{Gb} = 8\,192\ \text{Gb}$, temos:

$$\frac{5\,202\,000}{8\,192} \simeq 635.$$

Portanto, foram transferidos, aproximadamente, 635 TB.

b) $96{,}56\ \text{Gbps} = 96{,}56 \cdot 1024\ \text{Mbps} = 98\,877{,}44\ \text{Mbps}$

Assim, no segundo teste, foram transferidos em média 98 877,44 Mb por segundo.

Sendo 10 Mbps a taxa máxima de banda larga de uso doméstico no Brasil, temos: $x = \frac{98\,877{,}44}{10} = 9\,887{,}744$.

Desse modo, são necessários 9 887,744 s.

Convertendo em horas e minutos, obtemos:

$9\,887{,}744\ \text{s} \simeq 9\,888\ \text{s} = 9\,888 \cdot \frac{1}{3\,600}\ \text{h} \simeq 2{,}75\ \text{h} =$

$= 2\ \text{h} + 0{,}75\ \text{h} = 2\ \text{h} + 45\ \text{min} = 2\ \text{h}\ 45\ \text{min}$

Portanto, seriam necessárias, aproximadamente, 2 h 45 min.

98. a) $3{,}2\ \text{GHz} = 3{,}2 \cdot 1\,000\,000\,000 = 3\,200\,000\,000$

3 200 000 000 ciclos por segundo

b) $770\ \text{MHz} = 770 \cdot 1\,000\,000 = 770\,000\,000$

770 000 000 ciclos por segundo

c) $2{,}4\ \text{GHz} = 2{,}4 \cdot 1\,000\,000\,000 = 2\,400\,000\,000$

2 400 000 000 ciclos por segundo

d) $4\ \text{GHz} = 4 \cdot 1\,000\,000\,000 = 4\,000\,000\,000$

4 000 000 000 ciclos por segundo

e) $450\ \text{MHz} = 450 \cdot 1\,000\,000 = 450\,000\,000$

450 000 000 ciclos por segundo

f) $1{,}8\ \text{GHz} = 1{,}8 \cdot 1\,000\,000\,000 = 1\,800\,000\,000$

1 800 000 000 ciclos por segundo

g) $3{,}4\ \text{GHz} = 3{,}4 \cdot 1\,000\,000\,000 = 3\,400\,000\,000$

3 400 000 000 ciclos por segundo

h) $25\ \text{MHz} = 25 \cdot 1\,000\,000 = 25\,000\,000$

25 000 000 ciclos por segundo

99. a) 3 000 000 000 ciclos por segundo: $3 \cdot 1\,000\,000\,000 =$
$= 3$ GHz
b) 4 200 000 000 ciclos por segundo: $4{,}2 \cdot 1\,000\,000\,000 =$
$= 4{,}2$ GHz
c) 7 500 000 ciclos por segundo: $75 \cdot 10^{-3} = 0{,}0075$ GHz
d) 11 500 000 ciclos por segundo: $11{,}5 \cdot 10^{6} \cdot 10^{-3} = 0{,}0115$ GHz
e) 60 000 000 ciclos por minuto: $60 \cdot 60 \cdot 10^{6} \cdot 10^{-3} = 3{,}6$ GHz
f) 40 000 000 ciclos por minuto: $40 \cdot 60 \cdot 10^{6} \cdot 10^{-3} = 2{,}4$ GHz
g) 300 000 ciclos por hora: $3 \cdot 10^{5} \cdot 3{,}6 \cdot 10^{3} \cdot 10^{-3} = 1{,}08$ GHz
h) 500 000 ciclos por hora: $5 \cdot 10^{5} \cdot 3{,}6 \cdot 10^{3} \cdot 10^{-3} = 1{,}8$ GHz

100. a) 3 200 MHz = $3\,200 \cdot 10^{-3}$ GHz = 3,2 GHz
b) 4,2 GHz = $4{,}2 \cdot 1000$ MHz = 4 200 MHz
c) 440 Hz = $4{,}4 \cdot 10^{2} \cdot 10^{-6}$ MHz= 0,00044 MHz
d) 52 MHz = $5{,}2 \cdot 10^{1} \cdot 10^{-3}$ GHz = 0,052 GHz
e) 64 GHz = $6{,}4 \cdot 10^{1} \cdot 10^{9}$ Hz = 64 000 000 000 Hz
f) 518 MHz = $5{,}18 \cdot 10^{2} \cdot 10^{6}$ Hz = 518 000 000 Hz
g) 35 700 Hz = $3{,}57 \cdot 10^{4} \cdot 10^{-9}$ GHz = 0,0000357 GHz
h) 683 GHz = $6{,}83 \cdot 10^{2} \cdot 10^{3}$ MHz = 683 000 MHz

101. O algoritmo dessa tarefa está mostrado na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

102. O fluxograma dessa tarefa está mostrado na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

103. 3,2 GHz = $3{,}2 \cdot 1\,000\,000\,000 = 3\,200\,000\,000$
3 200 000 000 ciclos por segundo
0,8 MHZ = $0{,}8 \cdot 1\,000\,000 = 800\,000$
800 000 ciclos por segundo
$3\,200\,000\,000 - 800\,000 = 3\,199\,200\,000$
3 199 200 000 ciclos por segundo
Portanto, a diferença entre essas frequências é 3 199 200 000 ciclos por segundo.

104. Indicando por x a capacidade da versão anterior, calculamos:
$\frac{180}{x} = \frac{20}{100} \Rightarrow 20x = 18\,000 \Rightarrow x = \frac{18\,000}{20} \Rightarrow x = 900$
Logo, a versão anterior tinha 900 MHz de capacidade de processamento.
Assim, 900 MHz + 180 MHz = 1 080 MHz = 1,08 GHz.
Portanto, a nova capacidade de processamento é 1,08 GHz.

105. 1 400 000 000 ciclos por segundo =
= $1{,}4 \cdot 10^{9}$ ciclos por segundo = 1,4 GHz
Calculando o dobro da capacidade atual, obtemos:
$2 \cdot 1{,}4$ GHz = 2,8 GHz
Portanto, a CPU desse novo *smartphone* deve ser de 2,8 GHz.

106. a) $\frac{2{,}2 \text{ GHz}}{1{,}4 \text{ GHz}} \simeq 1{,}571.$
Portanto, a capacidade de processamento do modelo **1** é aproximadamente 57,1% maior do que a do modelo **2**.
b) 128 GB − 32 GB = 96 GB
96 GB = $96 \cdot 1024$ MB = 98 304 MB
Portanto, a diferença entre a capacidade de armazenamento do modelo **1** e a do modelo **2** é 98 304 MB.

Educação midiática (páginas 26 e 27)

1. É um tipo de inteligência artificial que pode gerar novos conteúdos, como textos, imagens, vídeos e áudios.

Trabalho e juventudes (página 38)

2. Sugestões de resposta: Os açougueiros, para medir a massa das carnes; os médicos, quando precisam saber a massa de seus pacientes; os nutricionistas, para saber a quantidade exata de alimentos de uma refeição.

Desenvolvimento sustentável (páginas 46 e 47)

1. 170 m² · 212 = 36 040
Portanto, ao todo, foram usadas aproximadamente 36 040 garrafas.

Síntese do capítulo (página 65)

3. Apresentamos duas possíveis respostas para cada item.
a) tempo de duração de uma aula; tempo de duração de um filme.
b) comprimento de um inseto; distância entre duas cidades.
c) massa de um animal; massa de uma pessoa.
d) área de uma parede; área de uma sala.
e) volume de pedra comprada em um deposito de construção; volume de água de um oceano.
f) capacidade de um recipiente; capacidade do tanque de combustível de um automóvel.
g) velocidade média de um automóvel em uma corrida; velocidade média de um atleta em uma maratona.
h) capacidade de armazenamento de um HD; capacidade de armazenamento em nuvem.
i) velocidade de *download* de um arquivo; velocidade de *upload* de um arquivo.
j) capacidade de processamento de um *smartwatch*; capacidade de processamento de uma CPU.

4. Não, pois 12,6 > 10.

5. O algoritmo dessa tarefa está apresentado na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

6. Alternativa **b**.

7. Ano-luz.

8. Sim, pois: 1 nm = $1 \cdot 10^{-9}$ m e $1965 \cdot 10^{-9} = 19{,}65 \cdot 10^{-7}$.

9. As unidades de medida estudadas foram: quilômetro quadrado, hectômetro quadrado, decâmetro quadrado, metro quadrado, decímetro quadrado, centímetro quadrado, milímetro quadrado, alqueire do Norte, alqueire mineiro, alqueire paulista e hectare.

10. Sugestão de resposta: Multiplicaria o número que expressa a medida em metros cúbicos por 1000.

11. Alternativa **b**.

12. Sugestão de resposta: Multiplicaria o número que expressa a capacidade de processamento da CPU por 1 000 000 000.

13. Os algoritmos referentes aos itens dessa questão estão apresentados na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

CAPÍTULO 2 OS CONJUNTOS

Abertura do capítulo

2. Classe dos mamíferos, pois agrupa, além dos felídeos, outras famílias.

Questões

A. Sugestão de resposta: Tucano, rã, crocodilo, pirarucu e cascavel.

Exercícios e problemas

1. O conjunto A contém os conjuntos B e C e o conjunto B não contém o conjunto C. Logo, a alternativa **b** é a correta.

2. a) Verdadeira, pois todo paralelogramo é um quadrilátero.
b) Falsa, pois o conjunto dos quadriláteros não é vazio.
c) Verdadeira, pois nem todo losango é um retângulo.
d) Falsa, pois nem todo paralelogramo é um retângulo.
e) Verdadeira, pois nem todo losango é um paralelogramo.
f) Verdadeira, pois nem todo paralelogramo é um losango.

3. O conjunto F está contido no conjunto I; logo todas as pessoas que falam francês também falam inglês. Como há interseção entre os conjuntos I e E, algumas pessoas que falam espanhol também falam inglês. Logo, a alternativa **c** é a correta.

4. Se A está contido em B e B está contido em C, então A está contido em C. Assim, a sentença **b** é a verdadeira. A propriedade transitiva garante essa afirmação.

5. Como $A = \{1, 2, 5, 10\}$, os subconjuntos de A com exatamente três elementos são: $\{1, 2, 5\}$, $\{1, 2, 10\}$, $\{1, 5, 10\}$ e $\{2, 5, 10\}$.

7. Os diagramas referentes aos itens dessa tarefa estão apresentados na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

8. a) $A \cup B = \{1, 2, 4\} \cup \{1, 3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

b) $A \cap C = \{1, 2, 4\} \cap \{5, 6, 7, 8\} = \varnothing$

c) $(A \cup B) \cap C = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{5, 6, 7, 8\} = \{5\}$

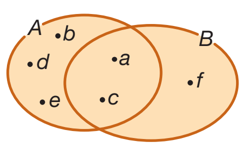
d) $(A \cap C) \cup B = \varnothing \cup \{1, 3, 4, 5\} = \{1, 3, 4, 5\}$

9. Temos $A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$. Logo:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow n(A \cup B) = 6 + 5 - 3 \Rightarrow n(A \cup B) = 8$$

Portanto, o conjunto $A \cup B$ tem 8 elementos.

10.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Assim, $A = \{a, b, c, d, e\}$ e $B = \{a, c, f\}$, então $n(A) = 5$ e $n(B) = 3$.

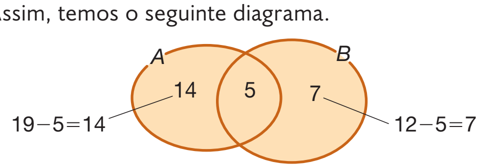
11. a) $\complement_U^A = U - A = \{x | x \text{ é um número par}\}$

b) $\complement_U^B = U - B = \{x | x \text{ é um número negativo ou } x = 0\}$

13. Indicando por A e B, respectivamente, os funcionários que têm habilitação na categoria A e os que têm habilitação na categoria B, obtemos:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 26 = 19 + 12 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 5$$

Assim, temos o seguinte diagrama.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

a) $n(A) = 19$. Assim, 19 funcionários têm habilitação na categoria A.

b) $n(B) = 12$. Assim, 12 funcionários têm habilitação na categoria B.

c) $n(A \cap B) = 5$. Assim, 5 funcionários têm habilitação nas categorias A e B.

d) Analisando o diagrama, concluímos que 14 funcionários têm habilitação somente na categoria A.

e) Analisando o diagrama, concluímos que 7 funcionários têm habilitação somente na categoria B.

14. Indicamos por F, M e U, respectivamente, as quantidades de estudantes que acessam a internet nos fins de semana, que acessam a internet de segunda-feira a sexta-feira e que participaram da pesquisa. Como 5 estudantes não acessam a internet, então:

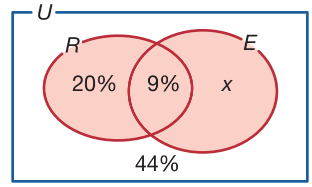
$$n(F \cup M) = n(U) - 5 = 36 - 5 = 31$$

Logo:

$$n(F \cup M) = n(F) + n(M) - n(F \cap M) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 31 = 25 + 12 - n(F \cap M) \Rightarrow n(F \cap M) = 6$$

Portanto, 6 estudantes acessam a internet todos os dias da semana.

15. a) Indicando por R, E e U, respectivamente, pacientes que fizeram cirurgia plástica reparadora, que fizeram cirurgia plástica estética e o total de pacientes entrevistados, temos o diagrama representado na imagem.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Como x representa a quantidade de pacientes que fizeram somente cirurgia plástica para fins estéticos, temos:

$$x + 20\% + 9\% + 44\% = 100\% \Rightarrow x = 27\%$$

Logo, 54 pacientes correspondem a 27% do total de pacientes entrevistados.

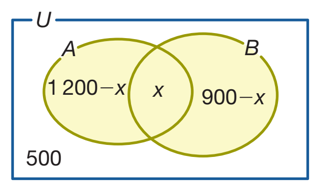
Assim, o total de pacientes entrevistados é dado por:

$$\frac{54}{0{,}27} = 200$$

Portanto, foram entrevistados 200 pacientes.

b) $200 \cdot 0{,}44 = 88$. Portanto, 88 pacientes nunca fizeram qualquer tipo de cirurgia plástica.

16. Para representar a situação, temos o seguinte diagrama.

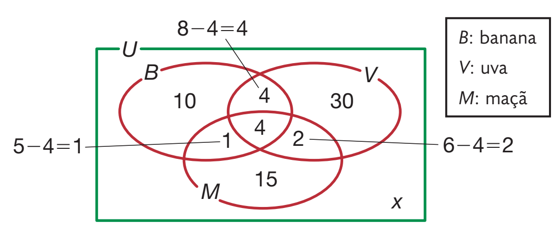


RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

$$2\,000 = 1\,200 - x + x + 900 - x + 500 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\,000 = 2\,600 - x \Rightarrow x = 600$$

Portanto, 600 pessoas rejeitavam as duas marcas. Logo, a alternativa **d** é a correta.

17. Indicando por x a quantidade de clientes que não preferem nenhuma das três frutas, temos:

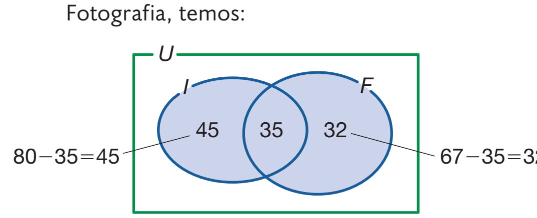


RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

$$x = 100 - (10 + 4 + 30 + 4 + 2 + 1 + 15) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = 100 - 66 = 34$$

Portanto, 34 clientes não preferem nenhuma das três frutas.

18. Indicando por I e F, respectivamente, os estudantes matriculados em Informática e os estudantes matriculados em Fotografia, temos:



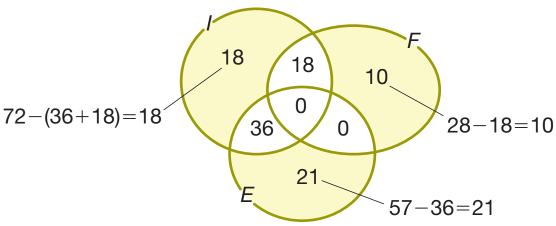
RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

a) De acordo com o diagrama, 112 $(45 + 35 + 32)$ estudantes fizeram pelo menos uma oficina no 1º bimestre. Como as oficinas são ofertadas para 175 estudantes, fazemos $175 - 112 = 63$. Portanto, 63 estudantes deverão participar de duas oficinas no 2º semestre.

b) De acordo com o diagrama, 77 $(45 + 32)$ estudantes fizeram exatamente uma oficina no 1º semestre, ou seja, estes precisarão participar de apenas uma oficina no 2º semestre.

c) Os 35 estudantes que fizeram ambas as oficinas no 1º semestre já completaram as duas oficinas e não precisam fazer mais nenhuma.

19. Indicando por I, F e E, respectivamente, os estudantes matriculados em inglês, francês e espanhol, temos o seguinte diagrama.



RONALDO INÁCIO/ ARQUIVO DA EDITORA

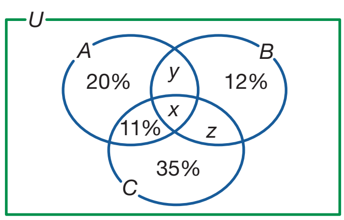
a) De acordo esse diagrama, calculamos o número de estudantes matriculados em apenas um idioma, ou seja, $18 + 10 + 21 = 49$. Portanto, 49 estudantes foram matriculados em apenas um idioma.

b) Calculando o total de estudantes matriculados, obtemos:

$$18 + 18 + 10 + 36 + 21 = 103$$

Portanto, 103 estudantes estão matriculados na escola de idiomas.

20.



RONALDO INÁCIO/ ARQUIVO DA EDITORA

Com base no diagrama, verificamos que $x + y + z + 11\%$ representam os habitantes que leem mais do que um jornal. Usando os dados dos habitantes que leem o jornal **B**, temos:

$$x + y + z + 12\% = 28\% \Rightarrow x + y + z = 16\%$$

Assim, temos: $x + y + z + 11\% = 16\% + 11\% = 27\%$. Nesse caso, 27% da população representa os habitantes que leem mais de um jornal.

$$50\,000 \cdot 0{,}27 = 13\,500$$

Portanto, 13 500 habitantes dessa cidade leem mais de um jornal.

22. a) Como a região vermelha representa os números naturais, os números que constarão nessa região são: 0; 2; 6.

b) A região azul representa os números inteiros que não são naturais. Assim, os números que constarão nessa região são: -1; -3; -7; -11.

c) A região verde representa os números racionais que não são inteiros. Assim, os números que constarão nessa região são: $-10{,}25$; $-\frac{4}{3}$; $0{,}\overline{27}$; $0{,}5$; $8{,}012$.

23. O número $-\frac{3}{7}$ é maior. Uma possível resposta: Forma fracionária $-\frac{1}{2}$; forma decimal $-0{,}55$.

24. a) Seja $x = 0{,}\overline{6}$. Assim: $10x = 10 \cdot 0{,}\overline{6} \Rightarrow 10x = 6{,}\overline{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow 10x = 6 + 0{,}\overline{6} \Rightarrow 10x = 6 + x \Rightarrow 9x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

Portanto, a forma fracionária do número $0{,}\overline{6}$ é $\frac{2}{3}$.

b) Seja $x = 0{,}\overline{81}$. Assim: $100x = 100 \cdot 0{,}\overline{81} \Rightarrow 100x = 81{,}\overline{81} \Rightarrow$

$\Rightarrow 100x = 81 + 0{,}\overline{81} \Rightarrow 100x = 81 + x \Rightarrow$

$\Rightarrow 99x = 81 \Rightarrow x = \frac{81}{99} = \frac{9}{11}$

Portanto, a forma fracionária do número $0{,}\overline{81}$ é $\frac{9}{11}$.

c) Sendo $x = 1{,}\overline{35}$, então:

$100x = 1{,}\overline{35} \cdot 100 \Rightarrow 100x = 135{,}\overline{35}$ (I)

$100 \cdot 100x = 135{,}\overline{35} \cdot 100 \Rightarrow 10\,000x = 13\,535{,}\overline{35}$ (II)

Subtraindo (I) de (II), obtemos:

$10\,000x - 100x = 13\,535{,}\overline{35} - 135{,}\overline{35} \Rightarrow$

$\Rightarrow 9\,900x = 13\,400 \Rightarrow x = \frac{13\,400}{9\,900} = \frac{134}{99}$

Portanto, a forma fracionária do número $1{,}\overline{35}$ é $\frac{134}{99}$.

d) Seja $x = 8{,}\overline{3}$ a equação (I). Assim:

$$10x = 10 \cdot 8{,}\overline{3} \Rightarrow 10x = 83{,}\overline{3} \quad \text{(II)}$$

Subtraindo (I) de (II), obtemos:

$10x - x = 83{,}\overline{3} - 8{,}\overline{3} \Rightarrow 9x = 75 \Rightarrow x = \frac{75}{9} = \frac{25}{3}$

Portanto, a forma fracionária do número $8{,}\overline{3}$ é $\frac{25}{3}$.

e) Seja $x = 0{,}\overline{125}$. Assim:

$1\,000x = 1\,000 \cdot 0{,}\overline{125} \Rightarrow 1\,000x = 125{,}\overline{125} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1\,000x = 125 + 0{,}\overline{125} \Rightarrow 1\,000x = 125 + x \Rightarrow$

$\Rightarrow 999x = 125 \Rightarrow x = \frac{125}{999}$

Logo, a forma fracionária do número $0{,}\overline{125}$ é $\frac{125}{999}$.

f) Sendo $x = 10{,}\overline{36}$, então:

$100x = 10{,}\overline{36} \cdot 100 \Rightarrow 100x = 1\,036{,}\overline{36}$ (I)

$100 \cdot 100x = 1\,036{,}\overline{36} \cdot 100 \Rightarrow 10\,000x = 103\,636{,}\overline{36}$ (II)

Subtraindo (I) de (II), temos:

$10\,000x - 100x = 103\,636{,}\overline{36} - 1\,036{,}\overline{36} \Rightarrow$

$\Rightarrow 9\,900x = 102\,600 \Rightarrow x = \frac{102\,600}{9\,900} = \frac{114}{11}$

Portanto, a forma fracionária do número $10{,}\overline{36}$ é $\frac{114}{11}$.

25. A. Indicando por d a medida da diagonal do retângulo, temos:

$$d^2 = 5^2 + 2{,}5^2 \Rightarrow d = \sqrt{31{,}25} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{3\,125}{100}} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$$

Portanto, a medida da diagonal é $\frac{5\sqrt{5}}{2}$ cm. Essa medida é expressa por um número irracional.

B. Indicando por d a medida da diagonal do retângulo, temos:

$$d^2 = \left(\sqrt{28}\right)^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow d^2 = 28 + 8 \Rightarrow d = \sqrt{36} = 6$$

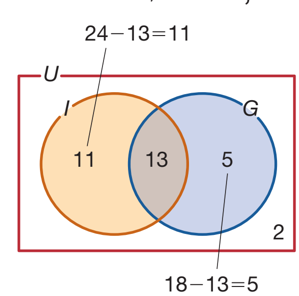
Portanto, a medida da diagonal é 6 cm. Essa medida é expressa por um número racional.

26. Não, pois, por exemplo, o produto entre os números irracionais $\sqrt{2}$ e $2\sqrt{2}$ é igual a 4, ou seja, um número racional.

27. a) Os símbolos em braile representam os números 5,28 e $\frac{1}{4}$, que pertencem ao conjunto dos racionais $(\mathbb{Q})$.

Resolvendo por etapas (páginas 77 e 78)

2. É possível resolver o problema da questão **1** usando o plano com algumas adequações. Inicialmente, chamamos I o conjunto dos estudantes que leram *Iracema*, G o conjunto dos estudantes que leram *O Guarani* e U o conjunto dos estudantes da turma. Depois, construímos o seguinte diagrama de Venn.



RONALDO INÁCIO/ ARQUIVO DA EDITORA

Por fim, calculamos o total de estudantes da turma.

$11 + 13 + 5 + 2 = 31$

Portanto, nessa turma há 31 estudantes.

CAPÍTULO 3 FUNÇÃO

Questões

A. Variável dependente: quantidade de biodiesel (q); variável independente: quantidade de sementes de mamona (x).

Exercícios e problemas

1. a) Ano e população.

b) A população era de 146,9 milhões de habitantes.

3. a) Variável independente: quantidade de quilômetros rodados (q). Variável dependente: quantia a ser paga (P).

b) O locatário pagará por R$ 0,46 pelo quilômetro rodado.

c) $P = 45{,}90 + 0{,}46 \cdot 315 \Rightarrow P = 45{,}90 + 144{,}9 \Rightarrow P = 190{,}8$

Portanto, ao percorrer 315 km, um locatário vai pagar R$ 190,80.

d) $P = 45{,}90 + 0{,}46 \cdot q \Rightarrow 298{,}90 = 45{,}90 + 0{,}46 \cdot q \Rightarrow q = 550$
Portanto, o cliente percorreu 550 km.

4. a) Variável dependente: quantia depositada (D); variável independente: comissão de vendas mensal recebida por Joana (x).
b) $D = 0{,}75 \cdot 1200 + 50 \Rightarrow D = 950$
Portanto, Joana depositou R$ 950,00 no mês de março.
c) Sendo $D =$ R$ 1 250,00, temos:
$D = 0{,}75x + 50 \Rightarrow 1250 = 0{,}75x + 50 = 1600$
Portanto, Joana deve receber R$ 1 600,00 de comissão.

5. a) Ao dividir o hexágono em seis partes iguais, obtemos seis triângulos equiláteros. Portanto, uma fórmula é $P = 6 \cdot \frac{x}{2}$ ou $P = 3x$.
b) • $P = 3 \cdot 2 \Rightarrow P = 6$, ou seja, 6 m de perímetro.
• $P = 3 \cdot 12 \Rightarrow P = 36$, ou seja, 36 m de perímetro.
c) • Para $P = 21$ m, temos: $21 = 3 \cdot x \Rightarrow x = 7$. Logo, $x = 7$ m.
• Para $P = 10{,}2$ m, temos: $10{,}2 = 3 \cdot x \Rightarrow x = 3{,}4$. Logo, $x = 3{,}4$ m.

6. • figura **I** (1 quadrado e 4 palitos): $P = 4 + 3 \cdot (1 - 1) = 4$.
• figura **II** (2 quadrados e 7 palitos): $P = 4 + 3 \cdot (2 - 1) = 7$.
• figura **III** (3 quadrados e 10 palitos): $P = 4 + 3 \cdot (3 - 1) = 10$.
Assim: $P = 4 + 3 \cdot (Q - 1) = 3Q + 1$. Portanto, a alternativa **b** é a correta.

7. a) Sendo s a quantidade de habitantes da Região Sudeste, temos $Q = 1{,}23s$, ou seja, a fórmula correta é **II**.
b) Sendo n a quantidade de habitantes da Região Norte, temos $U = 0{,}884n$, ou seja, a fórmula correta é **I**.
c) Aplicando $s = 4$ na fórmula do item **a**, temos:
$$Q = 1{,}23 \cdot 4 = 4{,}92$$
Aplicando $n = 4$ na fórmula do item **b**, temos:
$$U = 0{,}884 \cdot 4 = 3{,}536$$
Portanto, uma familia composta de quatro pessoas que mora na região:
• Sudeste produz, diariamente, em média, 4,92 kg de resíduos sólidos urbanos.
• Norte produz, diariamente, em média, 3,536 kg de resíduos sólidos urbanos.
d) Na fórmula $Q = 1{,}23s$, multiplicando por 7 (quantidade de dias em uma semana) e substituindo Q por 43, temos:
$$Q = 1{,}23 \cdot s \cdot 7 \Rightarrow 43 = 8{,}61 \cdot Q \Rightarrow Q = 4{,}99$$
Portanto, essa família tem aproximadamente 5 pessoas.

8. O diagrama da alternativa **A** não representa uma função, pois $-1 \in A$, mas não tem um correspondente em B, e o diagrama da alternativa **C** não é função porque os elementos 1 e 2 pertencentes a A têm, cada um, dois correspondentes em B. Logo, a alternativa **B** é a correta.

9. A alternativa **a** está incorreta, pois excluir o elemento e não é suficiente para que seja uma função. Nas alternativas **b** e **c**, não há necessidade de excluir o elemento j, pois ele está no contradomínio. Portanto, a alternativa **d** é a correta.

10. O diagrama referente a essa tarefa está apresentado na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

11. Sendo $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, temos:
a) $Im(h) = \{24, 30, 40, 60, 120\}$
b) $Im(h) = \{20, 24, 30, 40, 60\}$
c) $Im(h) = \{25, 31, 41, 61, 121\}$
d) $Im(h) = \{23, 29, 39, 59, 119\}$

12. a) $p(t) = 5{,}5t$
b) $p = 5{,}5 \cdot 3 \Rightarrow p = 16{,}5$. Portanto, Carlos vai pagar R$ 16,50.

13. a) $p(t) = 900t$
b) $p(24) = 900 \cdot 24 = 21600$
De acordo com a lei de formação do item **a**, o número 21 600 representa a quantidade de pessoas mortas por doenças relacionadas ao tabagismo em um período de 24 horas.
c) Sugestões de resposta: Vício, pois o cérebro do fumante se adapta e precisa de doses cada vez maiores para manter o nível de satisfação que tinha no início; causa direta de aproximadamente 50 doenças, como câncer, doenças cardiovasculares e respiratórias.

14. a) • $p(2013) = 2{,}3 \cdot 2013 - 4500 = 129{,}9$
• $p(2019) = 2{,}3 \cdot 2019 - 4500 = 143{,}7$.
Portanto, a população estimada em 2013 era 129 900 habitantes e em 2019 a estimativa era 143 700 habitantes.

15. Como o produtor plantou 10 hectares, seus gastos foram, em média, de R$ 70 200,00. De acordo com o problema, a expressão que determinou o lucro L do produtor naquele ano é $L(x) = 140x - 70200$. Portanto, a alternativa **d** é a correta.

16. a) $D(f) = \mathbb{R}$, pois não há restrições para o numerador.
b) $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$ ou $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq -1\}$, pois frações com denominador zero não estão definidas em $\mathbb{R}$.
c) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 7\}$, pois frações com denominador zero não estão definidas em $\mathbb{R}$.
d) $12 - x \leq 0 \Rightarrow x \leq 12$. Como não existe raiz quadrada de números negativos em $\mathbb{R}$, então: $D(f) =]-\infty, 12]$ ou $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 12\}$.
e) $4 - x > 0 \Rightarrow x < 4$. Como frações com denominador zero e raiz quadrada de números negativos não estão definidas em $\mathbb{R}$, então: $D(f) =]-\infty, 4[$ ou $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x < 4\}$.
f) $3x - 6 > 0 \Rightarrow x > 2$. Como frações com denominador zero e raiz quadrada de números negativos não estão definidas em $\mathbb{R}$, então: $D(f) =]2, +\infty[$ ou $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x > 2\}$.

17. Frações com denominador zero e raiz quadrada de números negativos não estão definidas em $\mathbb{R}$. Sendo assim, temos:
Numerador: $x + 8 \geq 0 \Rightarrow x \geq -8$.
Denominador: $-4x - 16 > 0 \Rightarrow x < -4$.
Portanto, $-8 \leq x < -4$, ou seja, $D(f) = [-8, -4[$. Logo, a alternativa **b** é a correta.

18. a) O domínio não está correto. Possível erro: Ronaldo considerou apenas um dos possíveis casos para que $\frac{x-6}{x+2} \geq 0$, nesse caso, quando $x - 6 \geq 0$ e $x + 2 > 0$.
b) Para a condição $\frac{x-6}{x+2} \geq 0$, temos duas possibilidades: $x - 6 \geq 0$ e $x + 2 > 0$ ou $x - 6 \leq 0$ e $x + 2 < 0$. A primeira possibilidade ocorre quando $x \geq 6$, já a segunda ocorre quando $x < -2$. Portanto, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x < -2 \text{ ou } x \geq 6\}$.

19. Os gráficos **A** e **D** não representam função, pois há retas paralelas ao eixo y cortando o gráfico em pelo menos dois pontos distintos. Já os gráficos **B** e **C** representam função, pois qualquer que seja a reta traçada paralelamente ao eixo y, ela cortará o gráfico em um único ponto.

20. Em todas as alternativas, a distância (d) inicia no zero, ou seja, na origem do gráfico, e logo em seguida aumenta linearmente. Quando a formiguinha chega até a extremidade do disco, a distância permanece constante, pois corresponde à distância do centro até a extremidade, representada pelo raio do círculo. Com isso, eliminamos as alternativas **C**, **D** e **E**. Como a formiguinha deve voltar à origem, a distância ao centro diminui, eliminando a alternativa **A**, que representa uma distância aumentando. Portanto, a alternativa **B** é a correta.

21. A representação gráfica de cada item dessa tarefa está apresentada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

22. a) Para $c = 12$, incidirá a Tarifa **2**. Logo:
$f(12) = 37{,}28 + 3{,}84(12 - 10) = 44{,}96$

Para $c = 27{,}3$, incidirá a Tarifa **3**. Logo:
$f(27{,}3) = 75{,}68 + 5{,}60(27{,}3 - 20) = 116{,}56$
Portanto, a pessoa deve pagar:
- R$ 44,96, caso consuma 12 mil litros de água.
- R$ 116,56, caso consuma 27,3 mil litros de água.

b) A representação gráfica desse item está apresentada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

23. Os gráficos **C** e **D** não representam função, pois existem valores de $x \in D(f)$ para os quais há mais de um elemento $y = f(x) \in CD(f)$. Já os gráficos **A** e **B** representam função, pois qualquer que seja $x \in D(f)$ existe um único elemento $y = f(x) \in CD(f)$.

24. A representação gráfica das funções f e g está apresentada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.
Por apresentarem domínios diferentes, f e g têm seus gráficos diferentes entre si. No caso de f, podem ser escolhidos dois ou mais pontos e traçada uma reta por eles. Já a função g deve ser representada apenas pelos pontos cuja abscissa seja um número natural.

25. a) Para $x = 4$, temos $f(4) = 2$.
b) Os zeros da função são os valores de x para os quais $y = 0$. Logo, $x = -4$, $x = -2$ e $x = 1$.
c) $-6 \leq x \leq 6$ e $-2 \leq y \leq 4$.
Portanto, temos:
$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -6 \leq x \leq 6\}$ e $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -2 \leq y \leq 4\}$.

26. a) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x \leq 12\}$ e $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -4 \leq y \leq 5\}$
b)
- f é decrescente em [3, 5] e [8, 10].
- f é crescente em [−4, −2].
- f é contínua em [−2, 3], [5, 8] e [10, 12].

c) $f(x) = 0$ se $x = -\dfrac{28}{9}$ e $x = 9$.

27. a) • $t(20) = 42 + 0{,}2 \cdot 20 = 46$ • $t(30) = 42 + 0{,}2 \cdot 30 = 48$
Portanto, os tempos de entrega de encomendas de 20 e 30 peças são, respectivamente, 46 h e 48 h.
b) A função é crescente, pois quanto mais peças encomendadas, maior será o tempo para a entrega.

28. a) O deslocamento da tartaruga está indicado em verde, pois sua distância em relação à largada foi crescente durante todo o tempo de corrida e ela não parou.
b) A função correspondente ao deslocamento da lebre não é crescente em todo o domínio, pois no intervalo em que a lebre permaneceu dormindo ela é constante.
c) A tartaruga. Possíveis respostas: Quem segue devagar e constante pode chegar à frente; a paciência pode valer mais do que a pressa; nem sempre os mais velozes chegam em primeiro lugar.

29. a) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(10) - f(2)}{10 - 2} = \dfrac{3 - 1}{8} = \dfrac{1}{4}$

b) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(8) - f(1)}{8 - 1} = \dfrac{\frac{1}{2} - 4}{7} = \dfrac{-\frac{7}{2}}{7} = -\dfrac{1}{2}$

30. a) Em 7 semanas.
b) Intervalo [2, 4]: $\dfrac{\Delta h}{\Delta t} = \dfrac{h(4) - h(2)}{4 - 2} = \dfrac{4{,}1 - 0{,}9}{2} = \dfrac{3{,}2}{2} = 1{,}6$
Portanto, a taxa de variação média do crescimento nesse intervalo é 1,6 cm por semana.
Intervalo [4, 9]: $\dfrac{\Delta h}{\Delta t} = \dfrac{h(9) - h(4)}{9 - 4} = \dfrac{11{,}7 - 4{,}1}{5} = \dfrac{7{,}6}{5} = 1{,}52$
Portanto, a taxa de variação média do crescimento nesse intervalo é 1,52 cm por semana.

31. a) $f(x) = 3{,}70x$
b) $f(150) = 3{,}7 \cdot 150 \Rightarrow f(150) = 555$
Portanto, o custo para produzir 150 bandejas é R$ 555,00.
c) Considerando o intervalo [50, 150] e sendo $f(50) = 3{,}7 \cdot 50 = 185$, temos: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(150) - h(50)}{150 - 50} = \dfrac{555 - 185}{100} = 3{,}7$.
Portanto, a taxa de variação média da função f é 3,7.

32. a) Alternativa **II**. **b)** $D(f) = [0, 16]$ e $Im(f) = [0, 12]$
c) Aumentou mais rápido de 0 a 4 meses. Possível resposta: A função aumenta mais rápido nesse intervalo porque a taxa de variação média da função f no intervalo [0, 4] é maior do que a taxa de variação média no intervalo [4, 16].

Síntese do capítulo (página 105)

4. a) Sim, pois cada instante de tempo pode ser associado a uma única velocidade.
b) Sim, pois para cada valor de aresta há um único valor correspondente de volume.
c) Não, pois uma pessoa pode ter diferentes cores favoritas e várias pessoas podem ter a mesma cor favorita. Portanto, não há uma correspondência única entre o nome de uma pessoa e sua cor favorita.
d) Sim, pois o preço do produto é uma função do lucro máximo obtido por sua venda. Cada valor de lucro máximo resulta em um único preço correspondente.
e) Não, pois determinada temperatura pode ser associada a mais de um dia do mês. Portanto, não há uma correspondência única entre medida da temperatura em determinado dia e os dias de um certo mês.
f) Não, pois a quantidade de vogais de uma palavra não tem relação com a sua quantidade de caracteres, ou seja, certa quantidade de vogais pode estar associada a diferentes quantidades de caracteres de uma palavra.
g) Sim, pois para cada hora do dia podemos associar uma única medida de temperatura correspondente.
h) Sim, pois para cada distância percorrida haverá um único consumo de combustível correspondente.

5. O fluxograma dessa questão está apresentado na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

6. Os diagramas **B** e **D** representam uma função de A em B, pois são os únicos em que cada elemento de A (domínio) está relacionado a um único elemento de B (contradomínio). O diagrama **A** não representa uma função de A em B, pois existem elementos em A que não têm imagem em B. O diagrama **C** não representa uma função de A em B, pois existe um elemento em A que tem duas imagens em B.

8. Possível resposta: Não, pois quando $x = 0$, a função não está definida. Portanto, f pode assumir todos os números reais, exceto zero.

9. A. Há retas paralelas ao eixo y cortando o gráfico em mais de um ponto distinto.
B. Qualquer que seja a reta traçada paralelamente ao eixo y, ela cortará o gráfico em pelo menos dois pontos distintos.

CAPÍTULO 4 FUNÇÃO AFIM E FUNÇÃO QUADRÁTICA

Abertura do capítulo

1. Sugestão de resposta: Incandescente, pois, se comparada às fluorescentes e às de LED equivalentes, ela consome mais energia elétrica, além de ter menor durabilidade.

2. Uma lâmpada acesa 8 horas, por 30 dias, corresponde a 240 horas $(8 \cdot 30 = 240)$. Analisando o consumo de cada tipo de lâmpada:
- incandescente 60 W: $60 \cdot 240 = 14\,400$, ou seja, 14 400 W.
- fluorescente 15 W: $15 \cdot 240 = 3\,600$, ou seja, 3 600 W.
- LED 9 W: $9 \cdot 240 = 2\,160$, ou seja, 2 160 W.

Uma lâmpada acesa por 8 horas, durante 365 dias, corresponde a 2 920 horas $(8 \cdot 365 = 2\,920)$; por 3 650 dias, 29 200 horas $(8 \cdot 3\,650 = 29\,200)$.
Portanto, a lâmpada incandescente não poderia durar mais de 1 ano. Já a de LED poderia durar mais de 10 anos.

Questões

A. •Incandescente: $i(t) = 60t$, sendo $i(t)$ o consumo da lâmpada em watts.

•Fluorescente: $f(t) = 15t$, sendo $f(t)$ o consumo da lâmpada em watts.

•LED: $l(t) = 9t$, sendo $l(t)$ o consumo da lâmpada em watts.

B. Considere a função $f(x) = 2x + 10$.

Se $x = 7$ temos: $f(7) = 2 \cdot 7 + 10 = 24$.

Se $x = 8$ temos: $f(8) = 2 \cdot 8 + 10 = 26$.

Portanto, para o 7º mês estima-se 24 unidades; para o 8º mês, 26 unidades.

D. Indicando por v o valor a ser pago e por t a quantidade de pacotes adicionais de "500 Mega", temos: $v = 84 + 15{,}90t$.

$$v \leq 185 \Rightarrow 84 + 15{,}90t \leq 185 \Rightarrow t = \frac{101}{15{,}90} \simeq 6{,}35$$

Portanto, um usuário pode contratar 6 pacotes.

E. Não são funções quadráticas, pois a lei de formação das funções f, g e h não são da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c reais e $a \neq 0$.

F. $B(1, 0)$ e $B'(5, 0)$; $C(0, -5)$ e $C'(6, -5)$

Exercícios e problemas

1. a) Função afim.
b) Função afim, linear e identidade.
c) Função afim e linear.
d) Função afim e constante.
e) Função afim.
f) Função afim e linear.

2. a) Como um pentágono regular tem 5 lados, temos:

$$p = 13 \cdot 5 = 65$$

Portanto, o perímetro do pentágono é 65 cm.

b) Indicando por c a medida de comprimento do pentágono, temos: $p = 5 \cdot c$.
Portanto, a fórmula é dada por $p(c) = 5c$.

3. a) Cada gafanhoto come cerca de 1,5 grama de folhas por dia. Indicando q e m, respectivamente, a quantidade de gafanhotos-do-deserto e a massa total, temos: $m(q) = 1{,}5q$

b) Substituindo os valores em $m(q) = 1{,}5q$, temos:

$$m(50\,000\,000) = 1{,}5 \cdot 50\,000\,000 = 75\,000\,000$$

Portanto, 50 milhões de gafanhotos-do-deserto podem comer 75 toneladas de folhas.

4. A representação gráfica da função m está apresentada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

5. a) $a = \frac{1}{4} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}x + b$. Como $f(2) = 1$, temos:

$$\frac{1}{4} \cdot 2 + b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

Portanto, $f(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$.

b) $b = 5 \Rightarrow f(x) = ax + 5$. Como $f(3) = 11$, temos:

$$3a + 5 = 11 \Rightarrow a = 2$$

Portanto, $f(x) = 2x + 5$.

c) De $f(1) = 3$, temos: $a + b = 3$ e de $f(3) = 5$, temos: $3a + b = 5$.

Com isso, montamos o sistema linear $\begin{cases} a + b = 3 \\ 3a + b = 5 \end{cases}$.

Logo, $a = 1$ e $b = 2$. Portanto, $f(x) = x + 2$.

6. a) Indicando por n o número de lados de um polígono convexo, temos:

$$s(n) = 180 \cdot (n - 2) = 180n - 360$$

Portanto, a fórmula é $s(n) = 180n - 360$.

b) Aplicando a fórmula do item **a**, temos:

$$s(6) = 180 \cdot 6 - 360 = 720$$

Portanto, a soma é 720°.

c) Como $s(n) = 2\,340$, temos $180n = 2\,700 \Rightarrow n = 15$.
Portanto, esse polígono tem 15 lados.

7. a) A representação gráfica dos pontos cujas coordenadas estão nos quadros **A** e **B** está apresentada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

Analisando esses quadros, verificamos que os pontos do quadro **A** pertencem a uma reta. Sendo assim, correspondem a uma função afim.

b) De acordo com os quadros **A** e **B**, temos:
• quadro **A**: $y = x + 2$
• quadro **B**: $y = x^3$

8. A representação gráfica de cada item dessa tarefa está apresentada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

a) $3x - 12 = 0 \Rightarrow x = 4$. Portanto, o zero da função é 4.

b) $-x = -9 \Rightarrow x = 9$. Portanto, o zero da função é 9.

c) $2x = -\frac{3}{4} \Rightarrow x = -\frac{3}{8}$. Portanto, o zero da função é $-\frac{3}{8}$.

d) $\frac{1}{5}x = -6 \Rightarrow x = -30$. Portanto, o zero da função é -30.

9. a) $C(50) = \frac{5}{9} \cdot (50 - 32) = 10$. Portanto, 50 °F correspondem a 10 °C.

b) $\frac{5}{9} \cdot (F - 32) = 0 \Rightarrow F = 32$. Portanto, o zero da função representa que o 0 °C corresponde a 32 °F.

c) A representação gráfica da função C está apresentada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

10. a) Estabelecimento A: $\begin{cases} p_A(0) = 24 \\ p_A(4) = 360 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 24 \\ 4a + b = 360 \end{cases}$

Logo, $a = 84$ e $b = 24$. Assim, $p_A(t) = 84t + 24$.

Estabelecimento B: $\begin{cases} p_B(0) = 0 \\ p_B(4) = 368 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ 4a + b = 368 \end{cases}$

Logo, $a = 92$ e $b = 0$. Assim, $p_B(t) = 92t$.

b) Para determinar $p_A(t) < p_B(t)$, fazemos: $84t + 24 < 92t \Rightarrow t > 3$.
Logo, o estabelecimento A é mais econômico depois de 3 h de jogo.

11. a) $V_m = \frac{650 - 20}{7 - 0} = 90$

Portanto, a velocidade média é 90 km/h.

b) A representação gráfica da função S está apresentada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.
O gráfico dessa função pertence a uma reta; assim, corresponde a uma função afim.

c) $S(t) = 20 + 90t$, em que t é o tempo em horas. Logo, $D(S) = \mathbb{R}_+$ e $Im(S) = [20, +\infty[$.

d) $S(10) = 20 + 90 \cdot 10 = 920$
Portanto, a posição desse automóvel é no quilômetro 920.

12. a) Terra: $T(m) = 9{,}8m$; Lua: $L(n) = 1{,}6n$.

b) Peso na Lua: $L(75) = 1{,}6 \cdot 75 = 120$.
Peso na Terra: $T(75) = 9{,}8 \cdot 75 = 735$.
Portanto, uma pessoa de 75 kg pesa 120 N na Lua e 735 N na Terra.

c) $1{,}6n = 91{,}2 \Rightarrow n = 57$. Portanto, essa pessoa tem 57 kg.

d) $n = \frac{96}{1{,}6} = 60$. Calculando o peso dessa pessoa na Terra em newtons, obtemos: $T(60) = 9{,}8 \cdot 60 = 588$.
Portanto, essa pessoa pesa na Terra 588 N.

e) A representação gráfica das funções T e L está apresentada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

13. Como a pessoa pretende gastar exatamente R$ 30,00, y deve ser no máximo 30. Logo, o plano **B** não é uma opção vantajosa, pois o gasto é de R$ 50,00 fixo por mês, independentemente do tempo de chamada.

Entre as opções **A**, **C**, **D** e **E**, é possível notar no gráfico que, para $y = 30$, o maior valor de x correspondente está na opção **C**, ou seja, o tempo de chamada será maior nesse plano telefônico. Portanto, a alternativa **c** é a correta.

14. a) Crescente, pois a taxa de variação é maior do que zero $(a > 0)$.

b) Decrescente, pois a taxa de variação é menor do que zero $(a < 0)$.

c) Decrescente, pois a taxa de variação é menor do que zero $(a < 0)$.

d) Crescente, pois a taxa de variação é maior do que zero $(a > 0)$.

15. A função é decrescente, pois, à medida que os valores de x (referentes aos meses de mensalidades pagas) aumentam, os valores correspondentes de y (referentes às quantias em dinheiro das economias) diminuem.

16. a) Para um prato com massa 730 g, o preço será fixo de R$ 25,60. Para o prato com 300 g ou 0,3 kg, o preço do quilo é R$ 36,00, assim temos: $0{,}3 \cdot 36 = 10{,}8$.

Portanto, um prato de 730 g custará R$ 25,60; o prato com 300 g, R$ 10,80.

b) $p(m) = \begin{cases} 36m, \text{ se } m \leq 0{,}7 \\ 25{,}60, \text{ se } m > 0{,}7 \end{cases}$

c) A representação gráfica da função p está apresentada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

Analisando o gráfico, verificamos que a função será crescente para $0 < m \leq 0{,}7$ e constante para $m > 0{,}7$.

17. a) $3 \cdot 3 \cdot 3\,000 = 27\,000$

Portanto, com as três bombas ligadas durante três horas, serão retirados 27 mil litros de água do reservatório.

b) Se $t = 1$, então $Q(1) = 150\,000 - 9\,000 \cdot 1$: se $t = 2$, então: $Q(2) = 150\,000 - (9\,000 + 9\,000) = 150\,000 - 9000 \cdot 2$; se $t = 3$, então: $Q(3) = 150\,000 - (9\,000 + 9\,000 + 9\,000) = 150\,000 - 9\,000 \cdot 3$; se $t = n$, então $Q(n) = 150\,000 - 9\,000 \cdot n$.

Portanto, $Q(t) = 150\,000 - 9\,000t$.

c) A função é decrescente, pois, à medida que o tempo aumenta, os valores correspondentes de y diminuem.

18. a) Se b_1 e b_2 são os custos fixos das fábricas **A** e **B**, respectivamente, e a é o custo para produzir a peça, então as funções $C_A(x) = ax + b_1$ e $C_B(x) = ax + b_2$ representam os custos totais das fábricas **A** e **B**, respectivamente, para x peças produzidas. Logo:

$$h(x) = C_B(x) - C_A(x) \Rightarrow h(x) = b_2 - b_1$$

Como h é constante, temos:

$h(5\,000) = C_B(5\,000) - C_A(5\,000) = 20\,000 - 18\,000 = 2\,000$

Portanto, $h(x) = 2\,000$.

b) A função é constante pois, à medida que aumentamos os valores de x (peças produzidas), os valores correspondentes de y (custos totais) permanecem.

19. a) Um resíduo gera de cerca de 30%, ou seja, 0,3 da massa em bagaço, logo a lei de formação da função é:

$E(q) = \frac{30}{100} \cdot \left(\frac{100}{3}q\right) = 10q$

b) A função é crescente, pois, à medida que aumentamos os valores de q (quantidade de cana-de-açúcar), os valores correspondentes de y aumentam.

c) A representação gráfica da função E está apresentada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

20. Sejam $f(x) = ax + b_1$ e $g(x) = ax + b_2$. Como $h(x) = f(x) - g(x)$, temos: $h(x) = (ax + b_1) - (ax + b_2) = b_1 - b_2$.

Como $m(x) = g(x) - f(x)$, temos:

$$m(x) = (ax + b_2) - (ax + b_1) = b_2 - b_1$$

A representação gráfica das funções h e m está apresentada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

Portanto, as funções h e m são constantes.

21. a) Como f é crescente, pois $a > 0$, e $3x + 6 = 0 \Rightarrow x = -2$, então:

- $f(x) = 0$ para $x = -2$.
- $f(x) < 0$ para $x < -2$.
- $f(x) > 0$ para $x > -2$.

b) Como f é decrescente, pois $a < 0$, e $-x - 5 = 0 \Rightarrow x = -5$, então:

- $f(x) = 0$ para $x = -5$.
- $f(x) < 0$ para $x > -5$.
- $f(x) > 0$ para $x < -5$.

c) Como f é crescente, pois $a > 0$, e $\frac{x}{2} - 3 = 0 \Rightarrow x = 6$, então:

- $f(x) = 0$, quando $x = 6$.
- $f(x) < 0$, quando $x < 6$.
- $f(x) > 0$, quando $x > 6$.

d) Como f é decrescente, pois $a < 0$, e $-3x + 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{3}$, então:

- $f(x) = 0$ para $x = \frac{7}{3}$.
- $f(x) < 0$ para $x > \frac{7}{3}$.
- $f(x) > 0$ para $x < \frac{7}{3}$.

22. $-3x + 15 > 0 \Rightarrow x < 5$ $\quad 4x - 8 > 0 \Rightarrow x > 2$

Portanto, para $x \in \,]2, 5[$ as funções f e g assumem valores positivos.

23. A. Sendo f uma função afim, temos:

$f(0) = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 5$

$f(2) = a \cdot 2 + 5 \Rightarrow 6 = 2a + 5 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

Logo, $f(x) = \frac{1}{2}x + 5$.

Assim, f é crescente, pois $a > 0$, e $\frac{1}{2}x + 5 = 0 \Rightarrow x = -10$. Então:

- $f(x) = 0$ para $x = -10$.
- $f(x) < 0$ para $x < -10$.
- $f(x) > 0$ para $x > -10$.

B. $f(x) > 0$ para todo x real.

C. Sendo f uma função afim, temos:

$f(0) = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 4$

$f(3) = 3a + 4 \Rightarrow -2 = 3a + 4 \Rightarrow a = -2$

Logo, $f(x) = -2x + 4$.

Assim, f é decrescente, pois $a < 0$, e $-2x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$. Então:

- $f(x) = 0$ para $x = 2$.
- $f(x) < 0$ para $x > 2$.
- $f(x) > 0$ para $x < 2$.

24. a) Se $t = 1$, então: $A(1) = 4{,}5 \cdot 1 + 6$; se $t = 2$, então: $A(2) = (4{,}5 + 4{,}5) + 6 = 4{,}5 \cdot 2 + 6$; ...; se $t = n$, então: $A(n) = 4{,}5 \cdot n + 6$. Logo, $A(t) = 4{,}5t + 6$.

b) Se $t = 1$, então: $B(1) = 6{,}5 \cdot 1$; se $t = 2$, então: $B(2) = 6{,}5 + 6{,}5 = 6{,}5 \cdot 2$; ...; se $t = n$, então: $B(n) = 6{,}5 \cdot n$. Logo, $B(t) = 6{,}5t$.

c) Considere a função $F(t) = A(t) - B(t)$.

$$F(t) = -2t + 6 \Rightarrow -2t + 6 = 0 \Rightarrow t = 3$$

Como $a < 0$, F é decrescente.

Logo, a opção **B** é mais vantajosa para um período menor do que 3 h e a opção **A**, para um período maior do que 3 h. As opções **A** e **B** têm o mesmo preço para 3 h.

25. $V_A(n) = 1500n + 1400$ e $V_B(n) = 1700n + 700$

Considere a função $h(n) = V_A(n) - V_B(n)$, ou seja, $h(n) = 700 - 200n$.

Obtendo o zero de h: $700 - 200n = 0 \Rightarrow n = 3{,}5$.

Como $a < 0$, h é decrescente.

Assim, $h(n) < 0$ para $n > 3{,}5$, ou seja, $V_A(n) < V_B(n)$ para $n > 3{,}5$.

Portanto, o valor de n é 4. Logo, a alternativa **c** é a correta.

26. a) 1ª proposta: $S_1(v) = 1600 + 0{,}05v$.

2ª proposta: $S_2(v) = 1100 + 0{,}075v$.

b) Determinando qual proposta é mais vantajosa, vamos considerar $S_1(v) = S_2(v)$:
$1600 + 0{,}05v = 1100 + 0{,}075v \Rightarrow v = 20\,000$
Portanto, para vendas menores do que R$ 20 000,00, a 1ª proposta é mais vantajosa. Em vendas maiores do que R$ 20 000,00, a 2ª proposta é mais vantajosa.

27. a) Locadora **A**: $V_A(x) = 82 + 0{,}52x$
Locadora **B**: $V_B(x) = 76 + 0{,}55x$

b) $V_A(75) = 82 + 0{,}52 \cdot 75 = 121$
$V_B(75) = 76 + 0{,}55 \cdot 75 = 117{,}25$
Portanto, para rodar 75 km, é mais vantajoso alugar o automóvel na locadora **B**.

c) Considere a função $h(x) = V_A(x) - V_B(x)$.
Então, $h(x) = 6 - 0{,}03x$. Logo, h é decrescente, pois $a < 0$ e $6 - 0{,}03x = 0 \Rightarrow x = 200$. Sendo assim, temos:
• $f(x) = 0$ para $x = 200$.
• $f(x) < 0$ para $x > 200$.
• $f(x) > 0$ para $x < 200$.
Logo, $V_A(x) = V_B(x)$ para $x = 200$, $V_A(x) > V_B(x)$ para $x < 200$ e $V_A(x) < V_B(x)$ para $x > 200$.
Portanto, para rodar menos de 200 km, a locadora **B** oferece o menor preço; para rodar mais de 200 km, a locadora **A** oferece o menor preço; para rodar 200 km, ambas oferecem o mesmo preço.

28. a) Determinando o lucro, temos: $75 \cdot 30 - 1500 = 750$. Portanto, o lucro será R$ 750,00.

b) A lei de formação é $L(v) = 75v - 1500$.

c) Inicialmente, obtemos o zero de L: $75v - 1500 = 0 \Rightarrow v = 20$.
Como $a > 0$, então L é crescente. Portanto, para que haja algum lucro, o preço mínimo de cada vale-*pizza* deve ser R$ 21,00.

29. a) Se $x = 1$, então: $V(1) = 0{,}43$; se $x = 2$, então: $V(2) = 0{,}43 + 0{,}43 = 0{,}43 \cdot 2$; ...; se $x = n$, então: $V(n) = 0{,}43 \cdot n$.
Logo, $V(x) = 0{,}43x$.
$V(3\,250) = 0{,}43 \cdot 3\,250 = 1\,397{,}50$
Portanto, o valor de tributos seria R$ 1 397,50.

30. As representações gráficas das funções referentes aos itens dessa tarefa estão apresentadas na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

a) Se $m = 1$, então: $P(1) = 69{,}90$; se $m = 2$, então: $P(2) = 69{,}90 + 69{,}90 = 69{,}90 \cdot 2$; ...; se $m = n$, então: $P(n) = 69{,}9 \cdot n$. Logo, $P(m) = 69{,}90m$. Nesse caso, as grandezas envolvidas são diretamente proporcionais e a constante de proporcionalidade é 69,90.

b) Se $a = 1$, então: $V(1) = 55\,000$; se $a = 2$, então: $V(2) = 55\,000 + 55\,000 = 55\,000 \cdot 2$; ...; se $a = n$, então: $V(n) = 55\,000 \cdot n$. Logo, $V(a) = 55\,000a$. Nesse caso, as grandezas envolvidas são diretamente proporcionais e a constante de proporcionalidade é 55 000.

c) Se $d = 1$, então: $T(1) = 2 + 0{,}8$; se $d = 2$, então: $T(2) = 2 + 0{,}8 + 0{,}8 = 2 + 0{,}8 \cdot 2$; ...; se $d = n$, então: $T(n) = 2 + 0{,}8 \cdot n$. Logo, $T(d) = 0{,}8d + 2$. Nesse caso, as grandezas envolvidas não são diretamente proporcionais.

d) Se $v = 1$, então: $S(1) = 1700 + 0{,}10$; se $v = 2$, então: $S(2) = 1700 + 0{,}10 + 0{,}10 = 1700 + 0{,}10 \cdot 2$; ...; se $v = n$, então: $S(v) = 1700 + 0{,}10 \cdot n$. Logo, $S(v) = 0{,}10v + 1700$. Nesse caso, as grandezas envolvidas não são diretamente proporcionais.

31. a) Considerando que a altura dos triângulos é sempre a mesma, temos: $A = \frac{b \cdot 8}{2} = 4b$, logo $A(b) = 4b$.
Sim, pois a função que expressa a relação entre a área e o comprimento da base é uma função linear.

b) $A(15) = 4 \cdot 15 = 60$. A área do triângulo é 60 cm^2.

c) Como $A(b) = 32$, temos: $4b = 32 \Rightarrow b = 8$.
Portanto, o comprimento da base é 8 cm.

32. a) O município de Campo Grande está localizado no estado do Mato Grosso do Sul. O município de Cuiabá está localizado no estado do Mato Grosso.

b) Se $d = 1$, então: $R(1) = 100$; se $d = 2$, então: $R(2) = 100 + 100 = 100 \cdot 2$; ...; se $d = n$, então: $R(n) = 100 \cdot n$.
Logo, $R(d) = 100d$.

c) $R(5{,}63) = 100 \cdot 5{,}63 = 563$
Portanto, a distância real aproximada é de 563 km.

33. a) Comprimento da planta: $2 + 2{,}4 + 1{,}2 + 2{,}4 = 8$.
Largura na planta: $3{,}2 + 2{,}8 = 6$.
Indicando por x e y, respectivamente, as medidas reais do comprimento e da largura da cozinha, temos:
$$\frac{x}{3{,}2} = \frac{10}{8} \Rightarrow x = 4 \qquad \frac{y}{3{,}2} = \frac{7{,}5}{6} \Rightarrow y = 4$$
Portanto, as medidas reais do comprimento e da largura da cozinha são de 4 m.

b) Cada 8 cm no esquema correspondem a 1 000, logo 1 cm corresponde a 125 cm. Portanto, a escala é 1 **:** 125.

c) Se $x = 1$, então: $m(1) = 125$; se $x = 2$, então: $m(2) = 125 + 125 = 125 \cdot 2$; ...; se $x = n$, então: $m(n) = 125 \cdot n$.
Logo, $m(x) = 1{,}25x$.

d) A constante de proporcionalidade é 1,25.

34. a) • $0{,}17 \cdot 30 = 5{,}10$. Logo, o tributo para 1 unidade é R$ 5,10.
• $5 \cdot 5{,}10 = 25{,}50$. Logo, o tributo para 5 unidades é R$ 25,50.
• $35 \cdot 5{,}10 = 178{,}50$. Logo, o tributo para 35 unidades é R$ 178,50.

b) $f(x) = 5{,}1x$

c) A constante de proporcionalidade da função é 5,1.

35. a) Empresa **A**: $600\,000 + 150\,000 \cdot 45 = 7\,350\,000$.
Empresa **B**: $200\,000 + 250\,000 \cdot 45 = 11\,450\,000$.
A empresa **A** cobra R$ 7 350 000,00 e a empresa **B** cobra R$ 11 450 000,00. Portanto, a melhor opção é a empresa **A**.

b) Empresa **A**: $V_A(x) = 600\,000 + 150\,000x$;
Empresa **B**: $V_B(x) = 200\,000 + 250\,000x$.

36. Considerando os pontos $(1; 80{,}5)$ e $(6; 85)$, temos:
$$a = \frac{85 - 80{,}5}{6 - 1} = 0{,}9$$
Assim, $Y = 0{,}9X + b$, onde $b \in \mathbb{R}$.
Determinando o valor de b, substituímos o ponto $(1; 80{,}5)$ em Y:
$$80 = 0{,}9 \cdot 1 + b \Rightarrow b = 79{,}6$$
Portanto, uma sugestão de modelo linear é $Y = 0{,}9X + 79{,}6$.

37. A. Organizamos as coordenadas dos pontos apresentados no diagrama de dispersão.

$\boldsymbol{y = f(x)}$

x	3	4	5	6	8	9	10	12
y	5	5	7	8	9	8	10	9

Na planilha eletrônica, digitamos os dados apresentados, depois projetamos o gráfico de dispersão. Em seguida, inserimos a linha de tendência; por fim, selecionamos a opção que apresenta a equação da reta, ou seja, $y = 0{,}5136x + 3{,}9655$.

B. Organizamos as coordenadas dos pontos apresentados no diagrama de dispersão.

$\boldsymbol{y = f(x)}$

x	2	4	5	6	7	10	10	12
y	20	35	15	40	30	30	50	40

Na planilha eletrônica, digitamos os dados, depois projetamos o gráfico de dispersão. Em seguida, inserimos a linha de tendência; por fim, selecionamos a opção com a equação da reta, nesse caso $y = 2{,}0122x + 18{,}415$.

C. Organizamos as coordenadas dos pontos no diagrama de dispersão.

$y = f(x)$

x	6	15	16	25	28	32
y	35	33	28	30	26	25

Na planilha eletrônica, digitamos os dados, depois projetamos o gráfico de dispersão. Em seguida, inserimos a linha de tendência; por fim, selecionamos a opção com a equação da reta, nesse caso $y = -0{,}358x + 36{,}778$.

38. **a)** A reta que melhor ajusta os pontos é a vermelha.

b) A reta corresponde a uma função afim decrescente, logo $y = 0{,}925x + 60$ não corresponde a ela. Tomando $x = 52$, ao substituí-lo nas fórmulas $y = -0{,}925x + 60$ e $y = -0{,}925x + 48$, temos:

- $y = -0{,}925 \cdot 52 + 60 = 11{,}9$
  Nesse caso, y corresponde ao gráfico da reta.
- $y = -0{,}925 \cdot 52 + 48 = -0{,}1$
  Nesse caso, y não corresponde ao gráfico da reta.

Portanto, $y = -0{,}925x + 60$ corresponde à reta em vermelho.

39. **a)** A imagem do diagrama de dispersão referente a esse item está apresentada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

b) Na planilha eletrônica, digitamos os dados, depois projetamos o gráfico de dispersão. Em seguida, inserimos a linha de tendência; por fim, selecionamos a opção com a equação da reta, nesse caso $y = -0{,}73x + 9{,}28$.

c) $y = -0{,}73 \cdot 5 + 9{,}28 = 5{,}63$

O tempo restante de carga de bateria é de aproximadamente 5 h 38 min.

Tempo de uso até a carga da bateria acabar (0 horas):

$$0 = -0{,}73 \cdot x + 9{,}28 \Rightarrow x = \frac{9{,}28}{0{,}73} \simeq 12{,}71$$

Portanto, o uso de tela ligada foi de aproximadamente 12 h 43 min.

40. **a)** A imagem do diagrama de dispersão referente a esse item está apresentada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

b) Na planilha eletrônica, digitamos os dados, depois projetamos o gráfico de dispersão. Em seguida, inserimos a linha de tendência; por fim, selecionamos a opção com a equação da reta, nesse caso $y = 0{,}001x - 1{,}33$, em que x e y indicam, respectivamente, o ano e o IDH.

c) $y \geq 0{,}800 \Rightarrow 0{,}001x - 1{,}33 \geq 0{,}800 \Rightarrow x \geq \dfrac{2{,}13}{0{,}001} \simeq 2130$

Portanto, o Brasil será classificado como “Muito alto desenvolvimento humano”, aproximadamente, em 2130.

41. **a)** A imagem do diagrama de dispersão referente a esse item está apresentada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

b) Na planilha eletrônica, digitamos os dados, depois projetamos o gráfico de dispersão. Em seguida, inserimos a linha de tendência e, por fim, selecionamos a opção com a equação da reta, nesse caso $y = 559{,}61x + 12\,225$.

c) Quantidade de acessos com a contratação de 23 influenciadores digitais:

$$y = 559{,}61 \cdot 23 + 12\,225 \simeq 25\,096$$

Aproximadamente 25 096 acessos.

Quantidade de influenciadores para 33 mil acessos mensais:

$$33\,000 = 559{,}61x + 12\,225 \Rightarrow x = \frac{33\,000 - 12\,225}{559{,}61} \simeq 37$$

Aproximadamente 37 influenciadores.

42. **a)** $5x + 8 > -12 \Rightarrow 5x > -12 - 8 \Rightarrow x > \dfrac{-20}{5} \Rightarrow x > -4$

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -4\}$.

b) $3 - 5x \leq 8 \Rightarrow -5x \leq 8 - 3 \Rightarrow x \geq -1$

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$.

c) $3x - 9 \leq 0 \Rightarrow 3x \leq 9 \Rightarrow x \leq 3$

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3\}$.

d) $5x - 7 > x + 9 \Rightarrow 5x - x > 9 + 7 \Rightarrow x > 4$

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$.

43. **a)** Se cada unidade do produto contém 47 kcal, então uma pessoa que comeu 10 unidades consumiu 470 kcal.

b) Conforme os dados do problema, temos: $q(n) = 47n$.

c) $q(n) \geq 350 \Rightarrow 47n \geq 350 \Rightarrow n \geq \dfrac{350}{47}$

Portanto, como $\dfrac{350}{47} \simeq 7{,}45$, o número mínimo de unidades do produto que devem ser consumidas é 8.

44. Indicando por x o número total de pessoas que vão ao cinema, determinamos a arrecadação por: $27 \cdot 3x + 21 \cdot x = 102x$.

Para que ela seja maior ou igual a R$ 178 500,00, temos:

$$102x \geq 178\,500 \Rightarrow x \geq 1750$$

Indicando por T o total de pessoas que vão ao cinema durante uma semana, temos:

$$T \geq 3x + x \Rightarrow T \geq 4x \Rightarrow T \geq 4 \cdot 1750 \Rightarrow T \geq 7\,000$$

Portanto, o número mínimo é 7 000 pessoas.

45. **a)** Cada bolo é vendido a R$ 40,00 e o investimento inicial foi R$ 6 000,00. Então, a função que descreve o lucro $L: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ pode ser definida por $L(q) = 40q - 6\,000$.

b) Para que $L(q) > 0$, temos: $40q - 6\,000 > 0 \Rightarrow q > 150$.

Assim, a função assume valores positivos para $q > 150$. Portanto, pode-se concluir que a confeitaria terá lucro quando forem vendidos mais de 150 bolos.

46. Indicando por q e t, respectivamente, a quantidade de água em litros e o tempo em minutos, temos: $q(t) = 1500t$.

Para que a bomba envie 22 500 litros ou mais para o reservatório, calculamos:

$$q(t) \geq 22\,500 \Rightarrow 1500t \geq 22\,500 \Rightarrow t \geq \frac{22\,500}{1500} \Rightarrow t \geq 15$$

Portanto, a bomba deverá funcionar no mínimo 15 minutos.

47. As funções quadráticas são da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c reais e $a \neq 0$.

a) f não é uma função quadrática.

b) g é uma função quadrática.

c) h é uma função quadrática.

d) m não é uma função quadrática.

e) n é uma função quadrática, pois $x(7 - x) = 7x - x^2$.

Portanto, as alternativas **b**, **c** e **e** são corretas.

48. **a)** $a = 1$, $b = 1$ e $c = 2$

b) $a = -4$, $b = 0$ e $c = 2{,}5$

c) $a = \dfrac{1}{3}$, $b = -\dfrac{2}{7}$ e $c = 0$

d) $a = -9$, $b = 3$ e $c = -1$

e) $a = 7{,}6$, $b = 0$ e $c = 0$

f) $a = -2$, $b = 12$ e $c = -10$

49. **a)** $f(3) = 2 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 - 4 = -4$

b) $f(-2) = 2 \cdot (-2)^2 - 6 \cdot (-2) - 4 = 16$

c) $f(0) = 2 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 - 4 = -4$

d) $f(-0{,}2) = 2 \cdot (-0{,}2)^2 - 6 \cdot (-0{,}2) - 4 = -2{,}72$

e) $g(1) = -3 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 1 = -7$

f) $g(-4) = -3 \cdot (-4)^2 - 5 \cdot (-4) + 1 = -27$

g) $g(0) = -3 \cdot 0^2 - 5 \cdot 0 + 1 = 1$

h) $g\left(\dfrac{1}{2}\right) = -3 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - 5 \cdot \dfrac{1}{2} + 1 = -\dfrac{9}{4}$

50. **a)** $S(x) = \dfrac{(2x - 1) \cdot (2x + 6)}{2} = 2x^2 + 5x - 3$.

Além disso, $x > \dfrac{1}{2}$, pois $2x - 1 > 0$. Portanto, a lei de formação da função é $S(x) = 2x^2 + 5x - 3$, com $x > \dfrac{1}{2}$.

b) Para $x = 3$: $S(3) = 2 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 - 3 = 30$

Para $x = 8$: $S(8) = 2 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8 - 3 = 165$

Portanto, a área para $x = 3$ cm é 30 cm² e a área para $x = 8$ cm é 165 cm².

51. Analisando os valores das abscissas na função g:

$$g(-4) = -2 \cdot (-4)^2 + 5 \cdot (-4) + 3 \Rightarrow g(-4) = -49 \neq 1$$

Assim, $A(-4, -1)$ não pertence ao gráfico de g.

$$g(1) = -2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + 3 = 6$$

Assim, $B(1, 6)$ pertence ao gráfico de g.

$$g(3) = -2 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 + 3 = 0$$

Assim, $C(3, 0)$ pertence ao gráfico de g.

$$g(0) = -2 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0 + 3 = 3$$

Assim, $D(0, 3)$ pertence ao gráfico de g.

Portanto, os pontos B, C e D pertencem à função g.

52. a) $p(n) = n \cdot (n - 1) \Rightarrow p(n) = n^2 - n$, com $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$.

b) $p(20) = 20^2 - 20 \Rightarrow p(20) = 380$

Determinando a quantidade de partidas de cada equipe, temos: $2 \cdot (20 - 1) = 38$. Portanto, foram disputadas 380 partidas e cada equipe disputou 38.

c) Se o campeonato fosse disputado por 25 equipes, teríamos:

$$p(25) = 25^2 - 25 \Rightarrow p(25) = 600$$

Portanto, se 25 equipes participassem do campeonato, 600 partidas seriam disputadas.

53. A. $A(x) = 4x \cdot (x + 5) = 4x^2 + 20x$, com $x > 0$.

B. $A(x) = \dfrac{(5x - 1) \cdot (4x + 4)}{2} = 10x^2 + 8x - 2$, com $x > \dfrac{1}{5}$.

54. Como o gráfico de f apresenta concavidade para cima $(a > 0)$, temos $c = -3$ e os zeros da função são -1 e 3, concluímos que a alternativa **d** é a correta.

55. a) Sugestão de resposta: Todos os resultados são iguais a 4,9 m/s. Isso ocorre por causa da lei dos corpos em queda, pois a razão corresponde à constante de proporcionalidade.

b) Temos: $k = \dfrac{9{,}8}{2} = 4{,}9$. Assim, $d(t) = 4{,}9t^2$.

c) Função quadrática. Podem ser obtidas informações a respeito das distâncias percorridas em função do tempo de queda, e vice-versa.

56. a) Concavidade voltada para cima, pois $a > 0$.

b) Concavidade voltada para cima, pois $a > 0$.

c) Concavidade voltada para baixo, pois $a < 0$.

d) Concavidade voltada para baixo, pois $a < 0$.

e) Concavidade voltada para cima, pois $a > 0$.

f) Concavidade voltada para baixo, pois $a < 0$.

57. A representação gráfica da função f está apresentada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

De acordo com a imagem e a lei de formação dada no enunciado, o eixo de simetria intersecta a parábola no ponto de coordenadas $(1, -4)$.

58. a) O módulo do coeficiente a.

b) Maior abertura da parábola: m. Menor abertura da parábola: f.

59. O gráfico **A**, pois $b > 0$. Logo, o ramo é crescente.

60. a) O coeficiente c de uma função quadrática corresponde à ordenada do ponto em que seu gráfico intersecta o eixo y no ponto $(0, c)$, logo intersecta o eixo y no ponto $(0, 3)$.

b) $(0, -1)$ c) $(0, 7)$ d) $(0, 0)$ e) $(0, 1)$ f) $(0, 0)$

61. A concavidade é voltada para cima, logo $a > 0$.

O coeficiente b intersecta o eixo y no ramo decrescente, logo $b < 0$.

O coeficiente c de uma função quadrática corresponde à ordenada do ponto em que seu gráfico intersecta o eixo y, nesse caso $c > 0$.

Como $a^2 > 0$ e $4bc < 0$, então $a^2 - 4bc > 0$.

Portanto, a alternativa **b** é a correta.

62. No gráfico de g, temos $b = 0$ e $c = 2$. Logo:

$$g(1) = 4 \Rightarrow a \cdot 1^2 + 0 \cdot 1 + 2 = 4 \Rightarrow a = 2$$

Portanto, $g(x) = 2x^2 + 2$.

No gráfico de h, temos $c = -3$. Logo:

$$\begin{cases} h(1) = 0 \\ h(2) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \cdot 1^2 + b \cdot 1 - 3 = 0 \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 - 3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ 4a + 2b = 4 \quad : (-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ -2a - b = -2 \end{cases}$$

$$-a = 1 \Rightarrow a = -1$$

$$a + b = 3 \Rightarrow b = 4$$

Portanto, $h(x) = -x^2 + 4x - 3$.

63. $R(x) = k \cdot x \cdot (P - x) \Rightarrow R(x) = Pkx - kx^2$

Sendo R a rapidez de propagação, P o público-alvo, x a quantidade de pessoas que conhecem o boato e se $k > 0$, o gráfico da função será uma parábola com a concavidade voltada para baixo. Com isso, excluímos as alternativas **a**, **b** e **d**, pois o gráfico delas não representa uma função quadrática. A alternativa **c** também está incorreta, pois a concavidade da parábola é voltada para cima. Portanto, a alternativa **e** é a correta.

64. a) Ao digitar cada uma das funções no campo **Entrada...** do *software* e clicar em **Enter**, o programa vai exibir os gráficos. A imagem com a representação gráfica das funções está apresentada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

b) Nas funções h e m, pois:

$$\frac{h(x)}{x^2} = \frac{2x^2}{x^2} = 2 \text{ e } \frac{m(x)}{x^2} = \frac{-3x^2}{x^2} = -3, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^*.$$

65. a) A representação no plano cartesiano dos pontos cujas coordenadas estão nos quadros **A** e **B** está apresentada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

Como $b = 0$ e $c = 0$, os pontos do quadro **A** pertencem ao gráfico da função quadrática do tipo $f(x) = ax^2$.

b) Quadro **A**: $y = x^2$; Quadro **B**: $y = x^2 - x$.

66. a) $t(h) = ah^2 + bh + 500$

De acordo com as informações do gráfico:

$$\begin{cases} t(5) = 100 \\ t\left(\dfrac{15}{2}\right) = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 25a + 5b = -400 \cdot \left(-\dfrac{3}{2}\right) \\ \dfrac{225}{4}a + \dfrac{15}{2}b = -480 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{75}{2}a - \dfrac{15}{2}b = 600 \\ \dfrac{225}{4}a + \dfrac{15}{2}b = -480 \end{cases}$$

$$\frac{75}{4}a = 120 \Rightarrow a = \frac{32}{5}$$

$$25 \cdot \left(\frac{32}{5}\right) + 5b = -400 \Rightarrow b = -112$$

Portanto, $t(h) = \dfrac{32}{5}h^2 - 112h + 500$ e $D(t) = \{h \in \mathbb{R} | 0 \leq h \leq 7{,}5\}$.

67. a) $f(x) = x^2 - 7x + 10$; $\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 \Rightarrow \Delta = 9$

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = \frac{7 \pm 3}{2}$$

Logo, $x_1 = 2$ e $x_2 = 5$.

b) $f(x) = x^2 - 6x + 9$; $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 \Rightarrow \Delta = 0$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = 3$$

Logo, $x_1 = x_2 = 3$.

c) $f(x) = -x^2 + x - 7$; $\Delta = 1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-7) \Rightarrow$
$\Rightarrow \Delta = -27 < 0$.
Logo, não há zeros reais.

d) $f(x) = -4x^2 + 4$; $-4x^2 + 4 = 0 \Rightarrow 4x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 1$
Logo, $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$.

e) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 6x$; $\frac{1}{2}x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x\left(\frac{1}{2}x + 6\right) = 0$
Logo, $x_1 = 0$ e $x_2 = -12$.

f) $f(x) = -2x^2 + 3x - 5$; $\Delta = 3^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-5) \Rightarrow$
$\Rightarrow \Delta = -31 < 0$.
Logo, não há zeros reais.

g) $f(x) = 3x^2 + x - 2$; $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) \Rightarrow \Delta = 25$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 3} \Rightarrow x = \frac{-1 \pm 5}{6}$$

Logo, $x_1 = \frac{2}{3}$ e $x_2 = -1$.

h) $f(x) = -x^2 + 8x - 16$; $\Delta = 8^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-16) \Rightarrow \Delta = 0$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot (-1)} = 4$$

Logo, $x_1 = x_2 = 4$.

68. Devemos ter $\Delta = 0$ com $k \neq -2$.
$\Delta = 0 \Rightarrow 2^2 - 4 \cdot (k + 2) \cdot (-k) = 0 \Rightarrow k^2 + 2k + 1 = 0$

$$k = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} \Rightarrow k = \frac{-2 \pm 0}{2} = -1.$$

69. a) Como o gráfico de f intersecta o eixo x em um ponto de abscissa 0 e em um ponto de abscissa positiva, a soma dos zeros é positiva, e o produto, nulo.

b) Positivo, pois a função tem dois zeros distintos.

70. I) Verdadeira, pois a função tem duas raízes distintas.

II) Verdadeira, pois $a < 0$ (concavidade voltada para baixo), $b < 0$ (gráfico corta o eixo y na parte decrescente) e $c < 0$ (gráfico corta o eixo y abaixo da origem), logo $b + c < 0$. Portanto, $a(b + c) > 0$.

III) Verdadeira, pois calculando $f\left(\frac{-b + 2a}{2a}\right)$ e $f\left(\frac{-b - 2a}{2a}\right)$ obtemos:

$$f\left(\frac{-b + 2a}{2a}\right) = a \cdot \left(\frac{-b + 2a}{2a}\right)^2 + b \cdot \left(\frac{-b + 2a}{2a}\right) + c =$$
$$= a \cdot \frac{b^2 - 4ab + 4a^2}{4a^2} + \frac{2ab - b^2}{2a} + c =$$
$$= \frac{b^2 - 4ab + 4a^2 + 4ab - 2b^2}{4a} + c = a - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$f\left(\frac{-b - 2a}{2a}\right) = a \cdot \left(\frac{-b - 2a}{2a}\right)^2 + b \cdot \left(\frac{-b - 2a}{2a}\right) + c =$$
$$= a \cdot \frac{b^2 + 4ab + 4a^2}{4a^2} + \left(\frac{-b - 2ab}{2a}\right) + c =$$
$$= \frac{b^2 + 4ab + 4a^2 - 2b^2 - 4ab}{4a} + c = a - \frac{b^2}{4a} + c$$

Logo, $f\left(\frac{-b + 2a}{2a}\right) = f\left(\frac{-b - 2a}{2a}\right)$.

IV) Falsa, pois $a < 0$ e $\sqrt{\Delta} > 0$, logo $a\sqrt{\Delta} < 0$.
Portanto, a alternativa **c** é a correta.

71. O gráfico **B**. A função tem dois zeros distintos, pois $\Delta > 0$. Como $S = 0$, os zeros da função são números opostos. Sabendo que $a > 0$, a concavidade da parábola é voltada para cima.

72. Para que a função tenha dois zeros iguais, analisamos cada um dos itens que seguem.

a) $\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18 = 49 - 72 = -23$
Como $\Delta < 0$, a equação não tem raízes reais, pois $\sqrt{\Delta} \notin \mathbb{R}$.

b) $a = 1$; $b = 10$; $c = 0$; $\Delta = (10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 100 - 0 = 100$
Como $\Delta > 0$, a equação tem duas raízes reais e distintas.

c) $a = 1$; $b = -4$; $c = -1$; $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -4 = 16 + 16 = 32$
Como $\Delta > 0$, a equação tem duas raízes reais e distintas.

d) $a = 1$; $b = 0$; $c = 0$; $\Delta = (0)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 0 - 0 = 0$
Como $\Delta = 0$, a equação tem duas raízes reais e iguais.

e) $a = 2$; $b = 3$; $c = 1$; $\Delta = (3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 - 8 = 1$
Como $\Delta > 0$, a equação tem duas raízes reais e distintas.

f) $a = 1$; $b = -2$; $c = 1$; $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$
Como $\Delta = 0$, a equação tem duas raízes reais e iguais.
Portanto, as alternativas **d** e **f** são as corretas.

73. a) O zero da função é $x = 0$.

b) Sim, pois o eixo de simetria da parábola coincide com o eixo y e $f(0) = 0$, consequentemente $b = c = 0$.

c) A lei de formação é $f(x) = -2{,}3 \cdot x^2$.

d) A representação gráfica da função f está apresentada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

74. $f(5) = 2(5)^2 - b(5) - c = 50 - 5b - c$
$f(-4) = 2(-4)^2 - b(-4) - c = 32 + 4b - c$

Temos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 50 - 5b - c = 0 \cdot (-1) \\ 32 + 4b - c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -50 + 5b + c = 0 \\ 32 + 4b - c = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -50 + 5b = 0 \\ 32 + 4b = 0 \end{cases}$$

Logo, $b = 2$ e $c = 40$.
Desse modo, $b - c = 2 - 40 = -38$.

75. $x_1 + x_2 = -\frac{15}{5} = -3$
A somas dos zeros da função é -3. Logo, a alternativa **c** é a correta.

76. $f(x) = 0 \Rightarrow \frac{4}{3}x - \frac{1}{45}x^2 = 0 \Rightarrow x \cdot \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{45}x\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ e $x_2 = 60$.
A bola tocou o solo pela primeira vez a 60 m do jogador.

77. a) $S(x) = \frac{(x + 2 + x + 4) \cdot x}{2} = \frac{2x^2 + 6x}{2}$

b) $10 = \frac{2x^2 + 6x}{2} \Rightarrow 2x^2 + 6x - 20 = 0$
$\Delta = (6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -20 = 196$; $x = \frac{-6 \pm 14}{4}$
$x_1 = 2$ e $x_2 = -5$.
Como não há medida negativa, $x = 2$ m.

78. a) $f(x) = (3 + x) \cdot (2 + x) = x^2 + 5x + 6$
Portanto, a lei de formação é $f(x) = x^2 + 5x + 6$.

b) $x^2 + 5x + 6 = 12 \Rightarrow x^2 + 5x - 6 = 0$
$\Delta = (5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -6 = 49$
$x_1 = \frac{-5 \pm 7}{2} \Rightarrow x_1 = 1$ e $x_2 = -6$.
O quarto deve ser ampliado em 1 m.

79. a) $f(0) = -0{,}01 \cdot (0)^2 + 0{,}54 \cdot 0 + 1{,}71 = 1{,}71$
O disco foi lançado a 1,71 m de altura em relação ao solo.

b) $f(12) = -0{,}01 \cdot (12)^2 + 0{,}54 \cdot 12 + 1{,}71 = 6{,}75$
O disco atingiu 6,75 m de altura.

c) $0 = -0{,}01x^2 + 0{,}54x + 1{,}71 \Rightarrow x_1 = -3$ e $x_2 = 57$.
Esse disco atingiu uma distância horizontal de 57 m.

80. a) $x_V = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1$ $\qquad y_V = -\frac{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}{4 \cdot 1} = 2$
Portanto, $V(1, 2)$.

b) $x_V = -\frac{\left(-\frac{10}{3}\right)}{2 \cdot \frac{1}{3}} = 5$ $\qquad y_V = -\frac{\left(-\frac{10}{3}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 5}{4 \cdot \frac{1}{3}} = -\frac{10}{3}$
Portanto, $V\left(5, -\frac{10}{3}\right)$.

c) $x_V = -\frac{\left(-\sqrt{3}\right)}{2 \cdot 1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad y_V = -\frac{\left(-\sqrt{3}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0}{4 \cdot 1} = -\frac{3}{4}$
Portanto, $V\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{4}\right)$.

81. $g(x) = 2x^2 - 4x + 1$; $x_V = -\dfrac{-4}{2 \cdot 2} = 1$

O eixo de simetria da parábola intersecta o eixo x em $x = 1$. Portanto, a alternativa **a** é a correta.

82. $f(x) = ax^2 + bx - 4$

$$\begin{cases} f(-4) = 0 \\ f(2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16a - 4b = 4 \\ 4a + 2b = 4 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2} \text{ e } b = 1$$

Assim, $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + x - 4$.

$$x_V = -\frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} = -1 \qquad y_V = -\frac{1^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-4)}{4 \cdot \frac{1}{2}} = -\frac{9}{2}$$

Portanto, $V\left(-1, -\dfrac{9}{2}\right)$.

83. a) $f(x) = x^2 - 2x + 1$

$$x_V = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_V = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1$$

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow y_V = -\frac{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}{4 \cdot 1} = 0$$

Portanto, $V(1, 0)$ é o vértice da parábola.

b) $f(x) = x^2 + 6x + 9$

$$x_V = -\frac{6}{2 \cdot 1} = -3 \qquad y_V = -\frac{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}{4 \cdot 1} = 0$$

Portanto, $V(-3, 0)$.

c) $f(x) = x^2 - x + \dfrac{1}{4}$

$$x_V = -\frac{(-1)}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2} \qquad y_V = -\frac{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4}}{4 \cdot 1} = 0$$

Portanto, $V\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$ é o vértice da parábola.

d) $f(x) = x^2 + 2\sqrt{5}x + 5$

$$x_V = -\frac{2\sqrt{5}}{2 \cdot 1} = -\sqrt{5} \qquad y_V = -\frac{\left(2\sqrt{5}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}{4 \cdot 1} = 0$$

Portanto, $V\left(-\sqrt{5}, 0\right)$.

Sugestão de resposta: A abscissa sempre será $-p$ e a ordenada, 0.

84. $-\dfrac{m}{5} \cdot 1 + m = 8 \Rightarrow m = 10$. Assim, $f(x) = -2x^2 + 10x$.

A representação gráfica da função f com a indicação dos intervalos crescente e decrescente está apresentada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

A função é crescente para $x < \dfrac{5}{2}$ e decrescente para $x > \dfrac{5}{2}$.

85. $-\dfrac{b^2 - 12a}{4a} = 2 \Rightarrow -b^2 + 12a = 8a \Rightarrow \dfrac{a}{b^2} = \dfrac{1}{4}$

O número natural mais próximo de $\dfrac{a}{b^2} = \dfrac{1}{4}$ é 0.

86. $\begin{cases} x_V = -2 \\ f(-2) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = -2 \\ 4a - 2b + 5 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a - b = 0 \\ 4a - 2b = -2 \end{cases}$

Logo, $a = \dfrac{1}{2}$ e $b = 2$

Portanto, $a < 1$, $b > 1$ e $c > 4$. Logo, a alternativa **d** é a correta.

87. Como o vértice da parábola está localizado sobre o eixo x, temos $y_V = 0$.

$$-\frac{(-6)^2 - 4\left(\frac{3}{2}\right)C}{4\left(\frac{3}{2}\right)} = 0 \Rightarrow \frac{36 - 6C}{6} = 0 \Rightarrow C = 6$$

A altura do líquido na taça é 6 cm. Portanto, a alternativa **e** é a correta.

88. a) A maior altura que pode ser atingida é em y_V, assim:

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow y_V = -\frac{(1{,}0563)^2}{4 \cdot (-0{,}0021)} \simeq 133$$

A maior altura que esse pássaro vai atingir é, aproximadamente, 133 m.

b) $-0{,}0021x^2 + 1{,}0563x = 0 \Rightarrow x(-0{,}0021x + 1{,}0563) = 0$

Logo, $x = 0$ ou $-0{,}0021x + 1{,}0563 = 0$. Sendo assim: $x = \dfrac{1{,}0563}{0{,}0021} = 503$. Portanto, a distância entre as extremidades do arco é 503 m.

89. a) $y_V = -\dfrac{(-8)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 4}{4 \cdot 4} = 0$. A parábola tem concavidade voltada para cima e $y_V = 0$ é o valor mínimo de f, logo: $Im(f) = [0, +\infty[$ ou $Im(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \middle| y \geq 0\right\}$.

b) $y_V = -\dfrac{\left(\sqrt{2}\right)^2 - 4 \cdot (-7) \cdot 0}{4 \cdot (-7)} = \dfrac{1}{14}$. A parábola tem concavidade voltada para baixo e $y_V = \dfrac{1}{14}$ é o valor máximo de f, logo: $Im(f) = \left]-\infty, \dfrac{1}{14}\right]$ ou $Im(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \middle| y \leq \dfrac{1}{14}\right\}$.

c) $y_V = -\dfrac{0^2 - 4 \cdot (-6) \cdot 1}{4 \cdot (-6)} = 1$. A parábola tem concavidade voltada para baixo e $y_V = 1$ é o valor máximo de f, logo: $Im(f) =]-\infty, 1]$ ou $Im(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \middle| y \leq 1\right\}$.

d) $y_V = -\dfrac{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}{4 \cdot 1} = -3$. A parábola tem concavidade voltada para cima e $y_V = -3$ é o valor mínimo de f, logo: $Im(f) = [-3, +\infty[$ ou $Im(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \middle| y \geq -3\right\}$.

e) $y_V = -\dfrac{(0)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 0}{4 \cdot 9} = 0$. A parábola tem concavidade voltada para cima e $y_V = 0$ é o valor mínimo de f, logo: $Im(f) = [0, +\infty[$ ou $Im(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \middle| y \geq 0\right\}$.

Possível resposta: Para $a > 0$, $Im(f) = [c, +\infty[= \left\{y \in \mathbb{R} \middle| y \geq c\right\}$; para $a < 0$, $Im(f) =]-\infty, c] = \left\{y \in \mathbb{R} \middle| y \leq c\right\}$.

90. a) De acordo com o gráfico, $c = 0$. Então, temos $f(x) = ax^2 + bx$. Substituindo os pontos $(-4, 0)$ e $(-1, -3)$ na função, obtemos:

$$\begin{cases} f(-4) = 0 \\ f(-1) = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16a - 4b = 0 \\ a - b = -3 \end{cases}$$

Logo, $a = 1$ e $b = 4$.

Portanto, a lei dessa função é $y = x^2 + 4x$.

b) $x_V = -\dfrac{b}{2a} \Rightarrow x_V = -\dfrac{4}{2 \cdot 1} = -2$

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow y_V = -\frac{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0}{4 \cdot 1} = -4$$

Portanto, o vértice da parábola é $V(-2, -4)$.

c) Como $y_V = -4$, o valor mínimo da função é igual a -4.

91. a) Para que f admita o valor mínimo, temos $a > 0$. Então:

$$2p - 8 > 0 \Rightarrow 2p > 8 \Rightarrow p > 4$$

Portanto, para que f tenha mínimo é necessário que $p > 4$.

b) Para que g admita valor máximo em $x_V = 6$, temos:

$$-\frac{p^2 - 1}{2 \cdot (-4)} = 6 \Rightarrow p^2 = 49$$

Portanto, $p = -7$ ou $p = 7$.

c) Para que h admita o valor mínimo, temos $y_V = -8$. Logo:

$$-\frac{6^2 - 4 \cdot 3 \cdot (p - 2)}{4 \cdot 3} = -8 \Rightarrow 60 - 12p = 96 \Rightarrow p = -3$$

Portanto, $p = -3$.

92. Ao digitar $c(n) = 0{,}04n$^2 $- 4n + 110$ no campo **Entrada...** do *software* e selecionar a opção **Pontos Especiais**, obtemos as coordenadas do ponto de mínimo $(50, 10)$. Portanto, o custo mínimo é de R$ 10,00 e ocorre para 50 peças.

93. **a)** A função lucro é dada por: $L(x) = R(x) - C(x)$.

$L(x) = 180x - x^2 - (30x + 1\,200) = -x^2 + 150x - 1\,200$

b) Ao digitar $L(x) = -x$^2 $+ 150x$–1200 no campo **Entrada...** do *software* e selecionar a opção **Pontos Especiais**, obtemos as coordenadas do ponto de máximo $(75, 4425)$. Portanto, o lucro máximo é de R$ 4 425,00 e ocorre na venda de 75 itens.

94. Sejam x e y os lados do terreno. Então: $2x + 2y = 80 \Rightarrow y = 40 - x$.

A área do galinheiro é dada por: $A = xy$. Assim:

$$A = x(40 - x) = -x^2 + 40x$$

Ao digitar $A = x(40 - x) = -x^2 + 40x$ no campo **Entrada...** do *software* e selecionar a opção **Pontos Especiais**, obtemos as coordenadas do ponto de máximo $(20, 400)$. Portanto, a área máxima do galinheiro deve ser 400 m² e os lados devem medir 20 m.

95. A receita por viagem é dada por: $R = x \cdot p$. Assim:

$$R = x(300 - 0{,}75x) = -0{,}75x^2 + 300x$$

O valor máximo de R ocorre em: $x_V = -\dfrac{300}{2 \cdot (-0{,}75)} = 200$.

Porém, como o avião tem apenas 180 lugares e a função R é crescente no intervalo [0, 180], verificamos que a receita máxima ocorre em $x = 180$, ou seja:

$$R = -0{,}75 \cdot 180^2 + 300 \cdot 180 = 29\,700$$

A receita máxima por viagem é R$ 29 700,00. Logo, a alternativa **d** é a correta.

96. A quantidade q de calças vendidas varia linearmente em função do preço p. Assim, $q(p) = ap + b$.

- Para o preço de R$ 80,00, o número de calças vendidas é 20, ou seja, $q(80) = 20$.
- Para o preço de R$ 78,00, por exemplo, o número de calças vendidas aumenta em 4 unidades, ou seja, $q(78) = 20 + 4$.

Com isso, temos o sistema de equações $\begin{cases} 80a + b = 20 \\ 78a + b = 24 \end{cases}$.

Logo, $a = -2$ e $b = 180$. Assim, $q(p) = -2p + 180$.

A receita r em função do preço p é dado por:

$r(p) = p \cdot q(p) \Rightarrow r(p) = p(-2p + 180) \Rightarrow r(p) = -2p^2 + 180p$

Ao digitar $r(p) = -2$ p^2 $+ 180p$ no campo **Entrada...** do *software* e selecionar a opção **Pontos Especiais**, obtemos as coordenadas do ponto de máximo $(45, 4050)$. Portanto, o preço de cada calça deve ser R$ 45,00 e, nesse caso, a receita será R$ 4 050,00.

97. A equação da parábola é definida por $y = ax^2 + bx + c$.

Na metade do percurso, ela atinge sua altura máxima, ou seja, $f(75) = 25$.

Assim, temos: $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(150) = 0 \\ f(75) = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 22\,500a + 150b = 0 \\ 5\,625a + 75b = 25 \end{cases}$.

Logo, $a = -\dfrac{1}{225}$; $b = \dfrac{150}{225}$; $c = 0$.

Substituindo na equação, temos: $y = -\dfrac{1}{225}x^2 + \dfrac{150}{225}x$

$$225y = -x^2 + 150x \Rightarrow 225y = 150x - x^2$$

Portanto, a alternativa **e** é a correta.

98. Como a cerca será composta de 4 fios, e um dos seus lados já está construído, então:

$$8a + 4c = 420 \Rightarrow c = 60 - 2a$$

Indicando por A a área do cercado, temos:

$$A = ac = a(60 - 2a) = -2a^2 + 60a$$

Ao digitar $A(a) = -2$ a^2 $+ 60a$ no campo **Entrada...** do *software* e selecionar a opção **Pontos Especiais**, obtemos as coordenadas do ponto de máximo $(15, 450)$. Portanto, a largura do terreno será 15 m.

Já o comprimento: $c = 60 - 2 \cdot 15 = 30$, ou seja, 30 m.

99. **a)** $h(d) = 0 \Rightarrow -0{,}398d^2 + 5{,}572d = 0$

$d \cdot (-0{,}398d + 5{,}572) = 0 \Rightarrow d_1 = 0$ ou $d_2 = 14$.

Portanto, a distância horizontal é 14 m.

b) $h(d) = 0 \Rightarrow -0{,}398d^2 + 5{,}572d = 0$

$$y_V = -\frac{(5{,}572)^2}{4 \cdot (-0{,}398)} \simeq 19{,}5$$

Portanto, a altura máxima é aproximadamente 19,5 m.

c) A representação gráfica da função h está apresentada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

100. Ao digitar $f(x) = -x$^2/100 $+ x/5$ e $g(x) = -x$^2/32 $+ x/2$ no campo **Entrada...** do *software* e selecionar a opção **Pontos Especiais**, obtemos as coordenadas do ponto de máximo de f (10, 1) e de suas raízes (0, 0) e (20, 2); e as coordenadas do ponto máximo de g (8, 2) e de seus zeros (0, 0) e (16, 0).

a) Para $f(x)$, temos $x_1 = 0$ ou $x_2 = 20$. Já em $g(x)$, temos $x_1 = 0$ ou $x_2 = 16$. Assim, Flaviane conseguiu fazer a bola alcançar distância de 20 m e Carol, de 16 m. Portanto, o lançamento de Flaviane alcançou a maior distância.

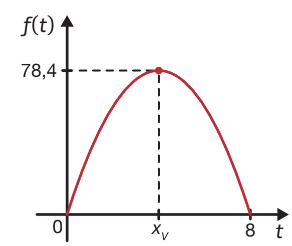
b) Ao analisar as ordenadas de f e de g, é possível verificar que a bola lançada por Carol atingiu a maior altura, ou seja, 2 m.

101. $f(t) = at^2 + bt$

Assim, temos o sistema:

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 4 \\ 16a + 4b = 78{,}4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8a + b = 0 \\ 4a + b = 19{,}6 \end{cases}$$

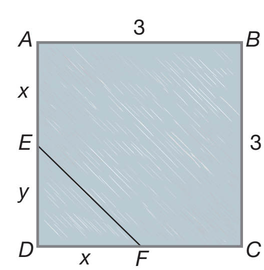


RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Logo, $a = -4{,}9$ e $b = 39{,}2$.

Portanto, $f(t) = -4{,}9t^2 + 39{,}2t$. Logo, a alternativa **b** é a correta.

102. Conforme os dados do problema, temos o seguinte esquema:



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

$x + y = 3 \Rightarrow y = 3 - x$

A área do pentágono $ABCFE$ é dada por:

$$A = 9 - \frac{xy}{2} = 9 - \frac{x(3 - x)}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 9$$

Ao digitar $A(x) = 1/2x$^2 $- 3/2x + 9$ no campo **Entrada...** do *software* e selecionar a opção **Pontos Especiais**, obtemos as coordenadas do ponto de mínimo $(1{,}5; 7{,}875)$.

Logo, a menor área do pentágono é 7,875 m². Portanto, a área do triângulo DEF deve ser $9 - 7{,}875 = 1{,}125$, ou seja, 1,125 m² para que o pentágono $ABCFE$ tenha a menor área possível.

103. $R(x) = -kx^2 + 66\,460kx$ $\qquad x_V = \dfrac{66\,460k}{2(-k)} = 33\,230$

Portanto, a máxima rapidez de propagação será atingida quando 33 230 pessoas conhecerem o boato. Logo, a alternativa **c** é a correta.

104. **a)** $a = 1 > 0$; $x^2 - 6x + 8 = 0$

Logo, $x_1 = 2$ ou $x_2 = 4$.

- $f(x) = 0$ para $x = 2$ ou $x = 4$
- $f(x) < 0$ para $2 < x < 4$
- $f(x) > 0$ para $x < 2$ ou $x > 4$

b) $a = -1 < 0$; $-x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9$

Logo, $x_1 = -3$ ou $x_2 = 3$.

- $f(x) = 0$ para $x = -3$ ou $x = 3$
- $f(x) > 0$ para $-3 < x < 3$
- $f(x) < 0$ para $x < -3$ ou $x > 3$

c) $a = 3 > 0$; $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = -8 < 0$

Logo, a função não tem zeros reais.

- $\nexists x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$
- $\nexists x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) < 0$
- $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$

d) $a = -2 < 0$; $-2x^2 + 8x = 0 \Rightarrow -2x(x - 4) = 0$

Logo, $x_1 = 0$ ou $x_2 = 4$.

- $f(x) = 0$ para $x = 0$ ou $x = 4$
- $f(x) > 0$ para $0 < x < 4$
- $f(x) < 0$ para $x < 0$ ou $x > 4$

105. Conforme os dados do problema, temos:

$$\begin{cases} f(-5) = 0 \\ f(2) = 0 \\ f(0) = -20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 25a - 5b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 0 \\ c = -20 \end{cases}$$

Logo, $a = 2$, $b = 6$ e $c = -20$.

Portanto, $f(x) = 2x^2 + 6x - 20$.

106. Como $a = -3 < 0$ e devemos ter $h(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, segue que:

$\Delta < 0 \Rightarrow (-6)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot k < 0 \Rightarrow 12k < -36 \Rightarrow k < -3$

Portanto, $k < -3$.

107. $-x^2 + x + 12 = 0 \Rightarrow x_1 = -3$ ou $x_2 = 4$.

Como $a = -1 < 0$, então devemos ter $f(x) \geq 0$ para $-3 \leq x \leq 4$.

108. Determinando os valores de x, temos:

$g(x) \cdot h(x) - h(x) \leq 6 \Rightarrow h(x) \cdot (g(x) - 1) \leq 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow (6 - 3x) \cdot (x + 1) \leq 6 \Rightarrow -3x^2 + 3x + 6 \leq 6 \Rightarrow -3x^2 + 3x \leq 0$

Como $a = -3 < 0$, temos:

$-3x^2 + 3x = 0 \Rightarrow -3x(x - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ ou $x_2 = 1$.

Portanto, $x \leq 0$ ou $x \geq 1$.

109. $L(n) = R(n) - C(n) = -\dfrac{3}{2}n^2 + 60n$

Como $a = -\dfrac{3}{2} < 0$, então:

$-\dfrac{3}{2}n^2 + 60n = 0 \Rightarrow -\dfrac{3}{2}n \cdot (n - 40) = 0 \Rightarrow n_1 = 0$ ou $n_2 = 40$

Portanto, como $n > 0$, a fábrica terá prejuízo a partir de 41 peças produzidas.

110. Como $2^x + 1 > 0$ para todo x real, logo:

$f(x) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 15 < 0$

Como $a = 1 > 0$, então: $x^2 - 2x - 15 = 0$.

Logo, $x_1 = -3$ ou $x_2 = 5$.

Assim, $f(x) < 0$ para $-3 < x < 5$. Logo, a alternativa **c** é a correta.

111. a) Determinando a temperatura às 10 h e às 17 h, temos:

- $f(10) = \dfrac{226}{9} \simeq 25{,}11$
- $f(17) = \dfrac{841}{36} \simeq 23{,}36$

A temperatura registrada às 10 h foi, aproximadamente, 25,11 °C; às 17 h, aproximadamente 23,36 °C.

b) Determinando o intervalo de tempo no qual a temperatura registrada foi superior a 22 °C:

$f(x) > 22 \Rightarrow -\dfrac{5}{36}x^2 + \dfrac{7}{2}x + 4 > 22 \Rightarrow -\dfrac{5}{36}x^2 + \dfrac{7}{2}x - 18 > 0$

Como $a = -\dfrac{5}{36} < 0$:

$-\dfrac{5}{36}x^2 + \dfrac{7}{2}x - 18 = 0 \Rightarrow x_1 = 7{,}2$ ou $x_2 = 18$.

A temperatura foi superior a 22 °C no intervalo de tempo indicado, entre 7 h 12 min e 18 h.

c) $x_V = -\dfrac{\frac{7}{2}}{2 \cdot \left(-\frac{5}{36}\right)} = \dfrac{63}{5} = 12{,}6$

$y_V = -\dfrac{\frac{521}{36}}{4 \cdot \left(-\frac{5}{36}\right)} = \dfrac{521}{20} = 26{,}05$

A maior temperatura foi de 26,05 °C, registrada às 12,6 h ou 12 h 36 min.

112. a) $a = 3 > 0$

$3x^2 + 18x + 15 = 0 \Rightarrow x_1 = -5$ ou $x_2 = -1$

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < -1\}$.

b) $(x - 6)^2 = (x - 6) \cdot (x - 6) = x^2 - 12x + 36$

$x^2 - 12x + 36 \geq 0$, logo $a = 1 > 0$

$x^2 - 12x + 36 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 6$

Portanto, $S = \mathbb{R}$.

c) $a = 2 > 0$

$2x^2 + 4x - 6 \leq 0$

Logo, $x_1 = -3$ e $x_2 = 1$.

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 1\}$.

d) $a = -1 < 0$

$-x^2 - 4x - 5 < 0$

Como $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (-4) \cdot (-5) = -79 < 0$, a função não tem zeros.

Portanto, $S = \mathbb{R}$.

113. Analisando as alternativas, temos:

a) $x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 1$. Logo, $x \geq 1$ ou $x \leq -1$.

b) $x^2 + 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq -1$. Logo, $x \notin \mathbb{R}$.

c) $x^2 - 4 < 0 \Rightarrow x^2 < 4$. Logo, $x < 2$ ou $x < -2$.

d) $x^2 - 1 \leq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1$. Logo, $-1 \leq x \leq 1$.

Comparando com o conjunto solução S, verificamos que a alternativa **a** é a correta.

114. $f(-1) = -3 \cdot (-1)^2 + (-1) + 7 = 3$

$f(x + 3) = -3 \cdot (x + 3)^2 + (x + 3) + 7 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x + 3) = -3 \cdot (x^2 + 6x + 9) + x + 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x + 3) = 3x^2 - 17x - 17$

Assim:

$f(-1) \geq f(x + 3) \Rightarrow 3 \geq -3x^2 - 17x - 17 \Rightarrow 3x^2 + 17x + 20 \geq 0$

Fazendo estudo do sinal, temos: $a = 3 > 0$.

$$3x^2 + 17x + 20 = 0 \Rightarrow x_1 = -4 \text{ ou } x_2 = -\frac{5}{3}$$

Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \leq -4 \text{ ou } x \geq -\dfrac{5}{3}\right\}$.

115. $\Delta < 0 \Rightarrow (2k)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-k) < 0 \Rightarrow 4k^2 + 20k < 0$

Fazendo o estudo do sinal, temos: $a = 4 > 0$.

$4k^2 + 20k = 0 \Rightarrow 4k(k + 5) = 0 \Rightarrow k_1 = -5$ ou $k_2 = 0$

Portanto, os valores inteiros de k são -4, -3, -2 e -1.

116. Seja a função $h(x) = \sqrt{-x^2 + 3x + 10}$, para $h(x)$ real se $-x^2 + 3x + 10 \geq 0$. Fazendo estudo do sinal, obtemos: $a = -1 < 0$.

$-x^2 + 3x + 10 = 0 \Rightarrow x_1 = -2$ ou $x_2 = 5$

Portanto, $D(h) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 5\}$.

117. $\dfrac{4p(p - 1)}{2} > p(p + 2) \Rightarrow p^2 - 4p > 0$

Fazendo o estudo do sinal, temos: $a = 1 > 0$.

$$p^2 - 4p = 0 \Rightarrow p(p - 4) = 0 \Rightarrow p_1 = 0 \text{ ou } p_2 = 4$$

A área do triângulo será maior do que a área do retângulo se $p > 4$.

118. Seja x a quantidade de passageiros. Assim, o preço pago no plano **1** é dado por $250 + 40x$, e no plano **2** é dado por: $x \cdot [20 + 2(40 - x)] = 100x - 2x^2$.

Para determinar quando o plano **1** é mais vantajoso, fazemos:

$$250 + 40x < 100x - 2x^2 \Rightarrow 2x^2 - 60x + 250 < 0$$

Agora, considere a função f dada por $f(x) = 2x^2 + 60x + 250$. Fazendo o estudo do sinal de f, segue que:

- $a = 3 > 0$
- $f(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 + 60x + 250 = 0 \Rightarrow x = 25$ ou $x = 5$.

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 5 < x < 25\}$. Portanto, para grupos entre 5 e 25 passageiros, o plano **1** é mais vantajoso financeiramente que o plano **2**.

119. a) A representação gráfica da área (A) e do perímetro (p) das figuras desse item, considerando $A : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ e $p : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, está apresentada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

Ao digitar $A(x) = \left[(x\char`^2)\sqrt{3}\right]/2$ e $p(x) = 3x$ no campo **Entrada...** do *software*, serão exibidos os gráficos da área e do perímetro do triângulo equilátero de lado x.

Ao digitar $A(x) = x\char`^2$ e $p(x) = 4x$ no campo **Entrada...** do *software*, serão exibidos os gráficos da área e do perímetro do quadrado de lado x.

Ao digitar $A(x) = 6\left[(x\char`^2)\sqrt{3}\right]/4$ e $p(x) = 6x$ no campo **Entrada...** do *software*, serão exibidos os gráficos da área e do perímetro do hexágono regular de lado x.

Observando os gráficos, é possível verificar que tanto o do perímetro quanto o da área são crescentes para os três polígonos.

b) Os perímetros são funções afins e as áreas, funções quadráticas.

c) Considerando o quadrado de lado x, então:

$$4x > 2x + 10 \Rightarrow 2x > 10 \Rightarrow x > \frac{10}{2} \Rightarrow x > 5$$

O perímetro do quadrado será maior do que o do retângulo se $x > 5$.

Considerando o hexágono de lado x, então:

$$6 \cdot \frac{x^2\sqrt{3}}{4} > 5x \Rightarrow x^2\sqrt{3} > \frac{20}{6}x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{x} > \frac{20}{6} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \Rightarrow x > \frac{20\sqrt{3}}{18} \Rightarrow x > \frac{10\sqrt{3}}{9}$$

A área do hexágono será maior do que a do retângulo se $x > \dfrac{10\sqrt{3}}{9}$.

Considerando o triângulo equilátero de lado x, então:

$$\frac{x^2\sqrt{3}}{4} = 5x \Rightarrow x^2\sqrt{3} = 20x \Rightarrow \frac{x^2}{x} = \frac{20}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \frac{20\sqrt{3}}{3}$$

Portanto, a área do triângulo será igual à do retângulo se $x = \dfrac{20\sqrt{3}}{3}$.

120. a) Perímetro: $P = 8x$.

$$\text{Área: } A = 8 \cdot \left(\frac{x \cdot \dfrac{r\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}{2}\right) \Rightarrow A = 2 \cdot x \cdot r\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

Sabendo que $x = r\sqrt{2-\sqrt{2}}$, então $r = \dfrac{x}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$. Assim, temos:

$$A = 2 \cdot x \cdot \frac{x}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}}$$

Racionalizando e efetuando os cálculos, temos:

$$A = 2 \cdot x^2 \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} \cdot \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} \Rightarrow A = 2 \cdot x^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = 2 \cdot x^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} \cdot \frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \Rightarrow A = 2 \cdot x^2 \cdot \frac{2\sqrt{2}+2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = x^2 \cdot (2\sqrt{2}+2) \Rightarrow A = 2x^2(\sqrt{2}+1) = 2x^2(1+\sqrt{2})$$

Portanto, a área do octógono em função de x é $2x^2(1+\sqrt{2})$.

b) Ao digitar $A(x) = 2x\char`^2(1+\sqrt{2})$ e $p(x) = 8x$ no campo **Entrada...** do *software*, serão exibidos os gráficos da área e do perímetro do octógono regular.

A representação gráfica da área (A) e do perímetro (p) do polígono, considerando $A : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ e $p : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, está apresentada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

c) O perímetro representa uma função afim e a área, uma função quadrática.

d) $2x^2(\sqrt{2}+1) > 5 \cdot 3 \Rightarrow 2x^2 > \dfrac{15}{(\sqrt{2}+1)} \Rightarrow x^2 = \dfrac{15}{2(\sqrt{2}+1)}$

Racionalizando, temos:

$$x^2 > \frac{15}{2 \cdot (\sqrt{2}+1)} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 > \frac{15 \cdot (\sqrt{2}-1)}{2} \Rightarrow x > \sqrt{\frac{15 \cdot (\sqrt{2}-1)}{2}}$$

A área da região determinada por esse octógono é maior do que a área da região determinada por esse retângulo quando $x > \sqrt{\dfrac{15(\sqrt{2}-1)}{2}}$.

Resolvendo por etapas (páginas 114 e 115)

2. É possível resolver o problema proposto no item **1**. Se a estrutura de cálculo da alíquota se mantiver conforme apresentado, ou seja, se puder ser descrita por uma função definida por partes, então o plano é válido para resolver o problema, desde que consideradas as adequações necessárias. A resposta depende do ano vigente.

Acessando tecnologias (páginas 124 e 125)

1. Preencha as células da planilha com as informações do quadro.

$y = f(x)$

x	10	12	14	16	18	20	22	24
$y = f(x)$	338	341	344	347	351	354	356	358

Na planilha eletrônica, digite e selecione os dados, depois insira o gráfico de dispersão.

A imagem do diagrama de dispersão referente a essa tarefa está apresentada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

2. Clique com o botão direito do *mouse* sobre um dos pontos do gráfico construído na questão **1** e selecione a opção **Inserir linha de tendência...**. Em seguida, na aba **Tipo**, clique em **Linear**, marque a opção **Mostrar equação** e clique em **OK**.

A imagem do modelo de regressão linear referente a essa tarefa está apresentada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

Portanto, o modelo de regressão, com aproximação de duas casas decimais, é $y = 1{,}48x + 323{,}43$.

Acessando tecnologias (página 151)

1. a) Ao digitar $f(x) = 3x\char`^2 - 4x + 1$ no campo **Entrada...** do *software* e selecionar a opção **Pontos Especiais**, obtemos as coordenadas do ponto de máximo $(0{,}67, -0{,}33)$. Portanto, o valor mínimo da função f é $-0{,}33$.

b) Ao digitar $f(x) = x\char`^2 - 3x + 4$ no campo **Entrada...** do *software* e selecionar a opção **Pontos Especiais**, obtemos as coordenadas do ponto de mínimo $(1{,}5;\ 1{,}75)$. Portanto, o valor mínimo da função f é 1,75.

c) Ao digitar $f(x) = -2x\char`^2 - 20x - 2$ no campo **Entrada...** do *software* e selecionar a opção **Pontos Especiais**, obtemos as coordenadas do ponto de máximo $(-5, 48)$. Portanto, o valor máximo da função f é 48.

2. Substituindo $y_v = 144$ na equação $y = -x^2 + 24x$, temos:

$-x^2 + 24x - 144 = 0$; $\Delta = 24^2 - 4 \cdot -1 \cdot (-144) = 0$

$x = \dfrac{-24}{-2} = 12$

Calculando o valor de z, obtemos: $z = 24 - x = 24 - 12 = 12$.

Portanto, para que a área seja máxima, as dimensões do retângulo devem ser iguais a 12 cm, ou seja, o retângulo é um quadrado com lados de 12 cm de comprimento.

Síntese do capítulo (página 159)

3. Sugestão de resposta: Função afim: velocidade média de um automóvel; valor pago em reais em um *self-service* em função da massa, em quilogramas, de alimento. Função quadrática: trajetória de uma bola chutada por um jogador em uma partida de futebol, até tocar o solo; em epidemias, como a dengue, de modo a evitar a proliferação do mosquito *Aedes aegypti*.

4. Quando $b = 0$.

5. Graficamente, os zeros de uma função afim correspondem às abscissas dos pontos em que o gráfico intersecta o eixo x.

6. Uma função afim é crescente à medida que aumentamos os valores de x e os valores correspondentes de y também aumentam.

8. Por meio da análise do coeficiente a, verificamos se seu gráfico tem concavidade voltada para cima ou para baixo e obtemos informações a respeito da abertura da parábola. Já o coeficiente b indica se o gráfico intersecta o eixo y no ramo crescente ou no ramo decrescente, e o coeficiente c corresponde à ordenada do ponto em que o gráfico intersecta o eixo y.

9. Podemos determinar a imagem da função quadrática relacionada a ela e o valor máximo ou o valor mínimo dessa função.

CAPÍTULO 5 FUNÇÃO EXPONENCIAL E FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Abertura do capítulo

1. Ele previu que a quantidade de transistores por centímetro quadrado em *microchips* e microprocessadores dobraria a cada 2 anos pelo mesmo custo.

2. Essa lei incentivou o desenvolvimento e a fabricação de circuitos eletrônicos mais eficientes, permitindo a criação de dispositivos cada vez menores e com maior capacidade de processamento.

3. **1973**: $2 \cdot 2\,300 = 4\,600$; **1975**: $2 \cdot 4\,600 = 9\,200$; **1977**: $2 \cdot 9\,200 = 18\,400$.

Portanto, em 1973, 1975 e 1977, a quantidade de transistores seria 4 600, 9 200 e 18 400 transistores, respectivamente.

Questões

A. Por definição, o domínio da função logarítmica é $\mathbb{R}_+^*$.

B. Por definição, o conjunto imagem da função logarítmica é $\mathbb{R}$.

Exercícios e problemas

1. a) $f(0) = 3^0 = 1$

b) $f(1) = 3^1 = 3$

c) $f(-4) = 3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$

d) $g(2) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$

e) $g\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

f) $g(-3) = \left(\frac{1}{4}\right)^{-3} = 4^3 = 64$

2. a) Se $n = 1$, então: $M = 1500 + 1500 \cdot 0{,}06 = 1500 \cdot (1 + 0{,}06) = 1500 \cdot (1{,}06)^1$

Se $n = 2$, então: $M = 1500 \cdot (1{,}06)^1 + 1500 \cdot (1{,}06)^1 \cdot 0{,}06 = 1500 \cdot (1{,}06)^1 \cdot (1 + 0{,}06) = 1500 \cdot (1{,}06)^2$

Se $n = 3$, então: $M = 1500 \cdot (1{,}06)^2 + 1500 \cdot (1{,}06)^2 \cdot 0{,}06 = 1500 \cdot (1{,}06)^2 \cdot (1 + 0{,}06) = 1500 \cdot (1{,}06)^3$

E assim por diante. Portanto, a expressão correta é $M = 1500 \cdot (1{,}06)^n$.

b) Se $n = 7$, então: $M = 1500 \cdot (1{,}06)^7 \simeq 2\,255{,}45$. Se $n = 10$, então $M = 1500 \cdot (1{,}06)^{10} \simeq 2\,686{,}27$. Portanto, ao final de 7 anos, o montante será R$ 2 255,45 e ao final de 10 anos, R$ 2 686,27.

3. a) Seja y a quantidade total de células-filhas, obtidas por uma única célula-mãe, após uma quantidade x de divisões.

Se $x = 1$, então $y = 2 = 2^1$.

Se $x = 2$, então $y = 2^1 \cdot 2 = 2^2 = 4$.

$\vdots$

Se $x = n$, então $y = 2^{n-1} \cdot 2 = 2^n$.

Sendo assim:

- se $x = 3$, então $y = 2^2 \cdot 2 = 2^3 = 8$.
- se $x = 4$, então $y = 2^4 = 16$.
- se $x = 7$, então $y = 2^7 = 128$.

Portanto, após 3 divisões, serão obtidas 8 células-filhas; após 4 divisões, 16 células-filhas; e após 7 divisões, 128 células-filhas.

b) A lei de formação é $y = 2^x$.

4. Suponha que $t = 0$ representa o ano de 1971. Nessa condição:

$t = 0 \Rightarrow f(0) = 2\,300 = 2\,300 \cdot 2^0 = 2\,300 \cdot 2^{\frac{0}{2}}$

$t = 2 \Rightarrow f(2) = 2\,300 \cdot 2 = 2\,300 \cdot 2^1 = 2\,300 \cdot 2^{\frac{2}{2}}$

$t = 4 \Rightarrow f(4) = 2\,300 \cdot 2 \cdot 2 = 2\,300 \cdot 2^2 = 2\,300 \cdot 2^{\frac{4}{2}}$

$\vdots$

$t = n \Rightarrow f(n) = 2\,300 \cdot 2^{\frac{n}{2}}$

Portanto, considerando que $t = 0$ representa o ano de 1971, temos $f(t) = 2\,300 \cdot 2^{\frac{t}{2}}$.

5. a) Não, porque a meia-vida do carbono-14 é relativamente curta, cerca de 5 730 anos. Para essa afirmação, é necessário recorrer a outro elemento radioativo de meia-vida mais longa.

b) Para 5 730 anos decorridos: $m \cdot \frac{1}{2} = m \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = m \cdot 2^{\left(-\frac{5\,730}{5\,730}\right)}$

Para 11 460 anos decorridos: $m \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = m \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = m \cdot 2^{\left(-\frac{11\,460}{5\,730}\right)}$

$\vdots$

Generalizando para t anos decorridos: $m \cdot 2^{\left(-\frac{t}{5\,730}\right)}$.

Portanto, $f(t) = m \cdot 2^{\left(-\frac{t}{5\,730}\right)}$.

c) 1 meia-vida de resíduo – 50%: 5 730 anos.

2 meia-vidas de resíduo – 25%: $2 \cdot 5\,730 = 11\,460$ anos.

3 meia-vidas de resíduo – 12,25%: $3 \cdot 5\,730 = 17\,190$ anos.

Portanto, a datação desse organismo é 17 190 anos.

7. a) Crescente, pois $a > 1$.

b) Decrescente, pois $6^{-x} = \left(\frac{1}{6}\right)^x$, ou seja, $0 < a < 1$.

c) Crescente, pois $4^{\frac{x}{2}} = \left(\sqrt{4}\right)^x = 2^x$, ou seja, $a > 1$.

d) Decrescente, pois $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x} = \left[\left(\frac{1}{5}\right)^2\right]^x = \left(\frac{1}{25}\right)^x$, ou seja, $0 < a < 1$.

8. Podemos notar que o gráfico de f representa uma função decrescente. Portanto, $0 < a < 1$, ou seja, a pertence ao intervalo $]0, 1[$. Logo, a alternativa **c** é a correta.

9. $0 < \frac{5}{k} < 1 \Rightarrow 5 < k$

Portanto, f é decrescente se $k > 5$.

10. A representação gráfica das funções f, g e h, referentes aos itens dessa tarefa, está apresentada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

12. A função que descreve a porcentagem em relação à sua meia-vida é dada por $f(x) = (0{,}5)^x$. Logo, para o período de uma hora e meia, temos:

$$f(1{,}5) = (0{,}5)^{1{,}5} \simeq 0{,}35$$

Portanto, restarão aproximadamente 35% da dose de amoxicilina no organismo do paciente. Assim, a alternativa **d** é a correta.

13. a) $3^{x+1} = 27 \Rightarrow 3^{x+1} = 3^3 \Rightarrow x + 1 = 3 \Rightarrow x = 2$. Portanto, $S = \{2\}$.

b) $(0{,}25)^{2x+3} = 4^{x-1} \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^{2x+3} = 4^{x-1} \Rightarrow 4^{-2x-3} = 4^{x-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow -2x - 3 = x - 1 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$. Portanto, $S = \left\{-\frac{2}{3}\right\}$.

c) $\sqrt{7^x} = 343 \Rightarrow 7^{\frac{1}{2}x} = 7^3 \Rightarrow \frac{1}{2}x = 3 \Rightarrow x = 6$. Portanto, $S = \{6\}$.

d) $5^{\frac{3}{2}x} = 125^4 \Rightarrow 5^{\frac{3}{2}x} = 5^{12} \Rightarrow \frac{3}{2}x = 12 \Rightarrow x = 8$. Portanto, $S = \{8\}$.

e) $\sqrt[6]{1000} \cdot 10^x = 0{,}001 \Rightarrow \left(10^3\right)^{\frac{1}{6}} \cdot 10^x = 10^{-3} \Rightarrow$

$\Rightarrow 10^{\frac{1}{2}+x} = 10^{-3} \Rightarrow \frac{1}{2} + x = -3 \Rightarrow x = -\frac{7}{2}$. Portanto, $S = \left\{-\frac{7}{2}\right\}$.

f) $\frac{8^x}{2^{x+2}} = 256 \Rightarrow 2^{3x-(x+2)} = 2^8 \Rightarrow 2^{2x-2} = 2^8 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x - 2 = 8 \Rightarrow x = 5$. Portanto, $S = \{5\}$.

14. a) A imagem referente a esse item está apresentada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

b) Sejam x o nível e y a quantidade de quadradinhos. Então:

Para $x = 1$, temos $5^0 = 5^{1-1} = 1$, ou seja, $y = 1$.

Para $x = 2$, temos $5^1 = 5^{2-1} = 5$, ou seja, $y = 5$.

Para $x = 3$, temos $5^2 = 5^{3-1} = 25$, ou seja, $y = 25$.

⋮

Generalizando para x qualquer, temos $y = 5^{x-1}$.

c) Se $y = 3125$, então:

$3125 = 5^{x-1} \Rightarrow 5^5 = 5^{x-1} \Rightarrow 5 = x - 1 \Rightarrow x = 6$

Portanto, o número de quadradinhos será 3 125 no nível 6.

Se $y = 78125$, então:

$78125 = 5^{x-1} \Rightarrow 5^7 = 5^{x-1} \Rightarrow 7 = x - 1 \Rightarrow x = 8$

Portanto, o número de quadradinhos será 78 125 no nível 8.

15. a) O ano de 1989 corresponde a $t = 18$. Assim:

$f(18) = 2300 \cdot 2^{\frac{18}{2}} = 1177600$

Portanto, em 1989, a estimativa é de 1 177 600 transistores.

Já o ano de 2014 corresponde a $t = 43$. Assim:

$f(43) = 2300 \cdot 2^{\frac{43}{2}} = 6821387842$

Portanto, em 2014, a estimativa é de 6 821 387 842 transistores.

b) $19293798400 = 2300 \cdot 2^{\frac{t}{2}} \Rightarrow 8388608 = 2^{\frac{t}{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^{23} = 2^{\frac{t}{2}} \Rightarrow 23 = \frac{t}{2} \Rightarrow t = 46$

Portanto, de acordo com a Lei de Moore, em 2017, a quantidade estimada de transistores de um microprocessador seria 19 293 798 400.

16. $3^{5x+1} \cdot \left(0{,}\overline{3}\right)^{x+8} = 243^{x-3} \Rightarrow 3^{5x+1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x+8} = \left(3^5\right)^{x-3} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3^{5x+1} \cdot 3^{-x-8} = 3^{5x-15} \Rightarrow 3^{4x-7} = 3^{5x-15} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x - 7 = 5x - 15 \Rightarrow x = 8$

Portanto, $x = 8$.

17. $\frac{S_0}{2} = S_0 \cdot 2^{-5t} \Rightarrow 2^{-1} = 2^{-5t} \Rightarrow t = \frac{1}{5} \Rightarrow t = 0{,}2$

Portanto, o tempo necessário é de 0,2 s.

18. Sejam x o tempo em minutos e y a quantidade de bactérias. Então:

Para $x = 20$, temos $y = 1000 \cdot 2 = 1000 \cdot 2^{\frac{20}{20}}$.

Para $x = 40$, temos $y = 1000 \cdot 2^{\frac{20}{20}} \cdot 2 = 1000 \cdot 2^{\frac{40}{20}}$.

Para $x = 60$, temos $y = 1000 \cdot 2^{\frac{40}{20}} \cdot 2 = 1000 \cdot 2^{\frac{60}{20}}$.

⋮

Generalizando para x qualquer, temos $y = 1000 \cdot 2^{\frac{x}{20}}$.

Sendo assim: $1000 \cdot 2^{\frac{x}{20}} = 256000 \Rightarrow 10^3 \cdot 2^{\frac{x}{20}} = 256 \cdot 1000 \Rightarrow$

$\Rightarrow 10^3 \cdot 2^{\frac{x}{20}} = 256 \cdot 10^3 \Rightarrow 2^{\frac{x}{20}} = 2^8 \Rightarrow \frac{x}{20} = 8 \Rightarrow x = 160$

Logo, o tempo do experimento foi de 160 minutos, ou seja, 2 horas e 40 minutos. Portanto, a alternativa **b** é a correta.

19. a) $f(x) = g(x) \Rightarrow 2 \cdot (0{,}5)^x = 4^x \Rightarrow 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(2^2\right)^x \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \cdot 2^{-x} = 2^{2x} \Rightarrow 2^{1-x} = 2^{2x} \Rightarrow 1 - x = 2x \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

Portanto, para $x = \frac{1}{3}$.

b) A representação gráfica das funções f e g referentes a esse item está apresentada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

As duas funções se intersectam em $\left(\frac{1}{3}, \sqrt[3]{4}\right)$.

20. $(0{,}5)^{x^2-6} = 8 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-6} = 2^3 \Rightarrow 2^{-x^2+6} = 2^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow -x^2 + 6 = 3 \Rightarrow -x^2 + 3 = 0$

Logo, $x_1 = -\sqrt{3}$ ou $x_2 = \sqrt{3}$. Portanto, a alternativa **d** é a correta.

21. a) $9^{2x-1} = 1 \Rightarrow 9^{2x-1} = 9^0 \Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$.

Portanto, $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

b) $6 \cdot 7^{x-3} = 294 \Rightarrow 7^{x-3} = 49 \Rightarrow 7^{x-3} = 7^2 \Rightarrow x - 3 = 2 \Rightarrow x = 5$.

Portanto, $S = \{5\}$.

c) $3^{1+x} = 324 - 3^x \Rightarrow 3^1 \cdot 3^x + 3^x = 324$

Fazendo $3^x = y$, obtemos: $3y + y = 324 \Rightarrow y = 81$.

Como $y = 3^x$ e $y = 81$, temos: $3^x = 3^4 \Rightarrow x = 4$.

Portanto, $S = \{4\}$.

d) $2^{x+2} + 2^{x-1} = 36 \Rightarrow 2^{x-1} \cdot 2^3 + 2^{x-1} = 36$

Fazendo $2^{x-1} = y$, temos: $8y + y = 36 \Rightarrow y = 4$.

Como $y = 2^{x-1}$ e $y = 4$, obtemos: $2^{x-1} = 2^2 \Rightarrow x = 3$.

Portanto, $S = \{3\}$.

e) $\frac{25^x + 5}{6} - 5^x = 0 \Rightarrow \left(5^x\right)^2 - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$

Fazendo $5^x = y$, obtemos: $y^2 - 6y + 5 = 0$. Logo, $y_1 = 5$ ou $y_2 = 1$.

Assim, para $y_1 = 5$, temos: $5^{x_1} = 5 \Rightarrow x_1 = 1$.

Já para $y_2 = 1$, obtemos: $5^{x_2} = 5^0 \Rightarrow x_2 = 0$.

Portanto, $S = \{0, 1\}$.

f) $\left(4^{x+1} - 4^x\right)^2 = 144 \Rightarrow \left(4^x \cdot 4^1 - 4^x\right)^2 = 144$

Fazendo $4^x = y$, temos: $(4y - y)^2 = 144 \Rightarrow (3y)^2 = 144 \Rightarrow$

$\Rightarrow 9y^2 = 144 \Rightarrow y^2 - 16 = 0$

Portanto, $y_1 = 4$ ou $y_2 = -4$.

Assim, para $y_1 = 4$, obtemos: $4^{x_1} = 4 \Rightarrow x_1 = 1$.

Já para $y_2 = -4$, temos: $4^{x_2} = -4$ (impossível). Portanto, $S = \{1\}$.

23. a) $27^x \geq 3 \Rightarrow 3^{3x} \geq 3 \Rightarrow 3x \geq 1 \Rightarrow x \geq \frac{1}{3}$

Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \geq \frac{1}{3}\right\}$.

b) $(0{,}8)^{2x-3} < (0{,}8)^5 \Rightarrow 2x - 3 > 5 \Rightarrow x > 4$

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} | x > 4\}$.

c) $3 \cdot 4^x \leq 72 - 6 \cdot 4^x$

Fazendo $4^x = y$, obtemos: $3y \leq 72 - 6y \Rightarrow y \leq 8$.

Sendo assim, temos: $4^x \leq 8 \Rightarrow 2^{2x} \leq 2^3 \Rightarrow x \leq \frac{3}{2}$.

Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \leq \frac{3}{2}\right\}$.

d) $4^{x+1} \cdot 2^{x-1} < 128 \Rightarrow \left(2^{x+1}\right)^2 \cdot 2^{x+1} \cdot 2^{-2} < 128$

Fazendo $2^{x+1} = y$, obtemos: $y^2 \cdot y \cdot \frac{1}{2^2} < 128 \Rightarrow$

$\Rightarrow y^3 < 512 \Rightarrow y < \sqrt[3]{512} \Rightarrow y < 8$

Sendo assim, temos: $2^{x+1} < 8 \Rightarrow 2^{x+1} < 2^3 \Rightarrow x < 2$.

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} | x < 2\}$.

e) $25 \geq \frac{5}{5^x} \Rightarrow 5^2 \geq 5^{1-x} \Rightarrow 2 \geq 1 - x \Rightarrow x \geq -1$

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} | x \geq -1\}$.

f) $3^{x(x+1)} > 3^{x^2+1} \Rightarrow x(x+1) > x^2 + 1 \Rightarrow x^2 + x > x^2 + 1 \Rightarrow x > 1$
Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} | x > 1\}$.

24. $3 \cdot 2^{x+2} - 2^{2x} > 32 \Rightarrow 3 \cdot 2^x \cdot 2^2 - (2^x)^2 > 32$
Fazendo $2^x = y$, obtemos: $-y^2 + 12y - 32 > 0$.
• A parábola tem concavidade voltada para baixo.
• $-y^2 + 12y - 32 = 0 \Rightarrow y_1 = 4$ ou $y_2 = 8$.
Assim, $4 < y < 8$ e, consequentemente:
$4 < 2^x < 8 \Rightarrow 2^2 < 2^x < 2^3 \Rightarrow 2 < x < 3$
Portanto, $S =]2, 3[$. Logo, a alternativa **b** é a correta.

25. $f(x) \leq 96 \Rightarrow 2^x + 2^{x+1} \leq 96 \Rightarrow 2^x + 2^x \cdot 2 \leq 96$
Fazendo $2^x = z$, temos: $z + 2z \leq 96 \Rightarrow 3z \leq 96 \Rightarrow z \leq 32$.
Sendo assim, obtemos: $2^x \leq 32 \Rightarrow x \leq 5$.

26. Como os índices das raízes são pares, segue que:
a) $3^{x-2} - 1 \geq 0 \Rightarrow 3^{x-2} \geq 3^0 \Rightarrow x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$
Portanto, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 2\}$.
b) $2^{2x-1} - 8 \geq 0 \Rightarrow 2^{2x-1} \geq 2^3 \Rightarrow 2x - 1 \geq 3 \Rightarrow x \geq 2$
Portanto, $D(g) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 2\}$.
c) $4^x - 2^{x+4} \geq 0 \Rightarrow (2^2)^x \geq 2^{x+4} \Rightarrow 2x \geq x + 4 \Rightarrow x \geq 4$
Portanto, $D(h) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 4\}$.
d) $9^x - \frac{1}{27} \geq 0 \Rightarrow 9^x \geq \frac{1}{27} \Rightarrow 3^{2x} \geq 3^{-3} \Rightarrow x \geq -\frac{3}{2}$
Portanto, $D(m) = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \geq -\frac{3}{2}\right\}$.

27. $0,4^x < (0,4)^{\frac{x-3}{2}} \Rightarrow x > \frac{x-3}{2} \Rightarrow 2x > x - 3 \Rightarrow x > -3$
Portanto, a desigualdade é verdadeira para $x > -3$.

28. $f(x) + g(x) > 0 \Rightarrow 8^x - 2^{x+1} - 4^x > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (2^x)^3 - 2^x \cdot 2 - (2^x)^2 > 0$
Fazendo $2^x = z$, obtemos: $z^3 - 2z - z^2 > 0 \Rightarrow z(z^2 - z - 2) > 0$
Como $z = 2^x > 0$, devemos ter $z^2 - z - 2 > 0$.
Agora, estudamos o sinal da função definida por:
$f(z) = z^2 - z - 2$.
• A parábola tem concavidade voltada para cima.
• $z^2 - z - 2 = 0 \Rightarrow z_1 = 2$ ou $z_2 = -1$ (impossível).
Logo, $z > 2$. Assim: $z > 2 \Rightarrow 2^x > 2 \Rightarrow x > 1$. Portanto, $x > 1$.

29. A alternativa **D** é a correta, pois:
$0,5 \leq 8^{2x} < 4 \Rightarrow 2^{-1} \leq 2^{6x} < 2^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow -1 \leq 6x < 2 \Rightarrow -\frac{1}{6} \leq x < \frac{1}{3}$

30. $\frac{27}{125} < f(x) \leq 1 \Rightarrow \frac{27}{125} < (0,6)^{2x+1} \leq 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^3 < \left(\frac{3}{5}\right)^{2x+1} \leq \left(\frac{3}{5}\right)^0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3 > 2x + 1 \geq 0 \Rightarrow 1 > x \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq x < 1$
Portanto, tem-se $\frac{27}{125} < f(x) \leq 1$ em $\left[-\frac{1}{2}, 1\right[$. Logo, a alternativa **a** é a correta.

31. $\frac{P(n)}{Q(n)} \geq 1024 \Rightarrow \frac{4^n}{2^n} \geq 1024 \Rightarrow 2^n \geq 2^{10} \Rightarrow n \geq 10$
Portanto, essa ameaça de extinção ocorrerá a partir da décima geração. Logo, a alternativa **a** é a correta.

33. **a)** $\log_{21} 1 = 0$
b) $\log 10\,000 = \log 10^4 = 4$
c) $8^{\log_8 19} = 19$
d) $\log 0,1 = \log 10^{-1} = -1$

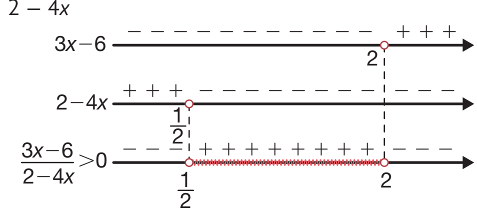
34. **a)** $x \simeq 0,8$
b) $x \simeq 8,0$
c) $x \simeq 1,1$
d) $x \simeq 21,0$
e) $x \simeq 0,1$
f) $x = 25\,000$

35. **a)** $\log_3 \sqrt[4]{9} - 4^{\log_4 5} = \log_3 9^{\frac{1}{4}} - 5 = \log_3 3^{\frac{2}{4}} - 5 = \frac{2}{4} - 5 = -\frac{9}{2}$
b) $2\log_9 1 + \left[\log_{0,5}\left(\frac{1}{8}\right)\right]^2 = 2 \cdot 0 + \left[\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^2 = 3^2 = 9$
c) $6^{2+\log_6 7} - \log(\log 10) = 6^2 \cdot 6^{\log_6 7} - \log 1 = 36 \cdot 7 - 0 = 252$
d) $4\log_8 2\sqrt{2} + \log_{\frac{1}{5}} 0,04 = 4\log_8 \sqrt{2^2 \cdot 2} + \log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{4}{100}\right) =$
$= 4\log_8 8^{\frac{1}{2}} + \log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{5}\right)^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} + 2 = 4$
e) $5^{\log_{25} 4} + 2^{3+\log_2 4} = 5^{\log_{25} 2^2} + 2^3 \cdot 2^{\log_2 4} = 5^{2 \cdot \log_{25} 2} + 2^3 \cdot 4 =$
$= 25^{\log_{25} 2} + 8 \cdot 4 = 2 + 8 \cdot 4 = 34$
f) $2^{\log_8 125} + 5^{3+\log_5 3} = 2^{\log_8 5^3} + 5^3 \cdot 5^{\log_5 3} = 2^{3 \cdot \log_8 5} + 5^3 \cdot 3 =$
$= 8^{\log_8 5} + 125 \cdot 3 = 5 + 375 = 380$

36. $\log_y x = 4 \Rightarrow y^4 = x$; $\log_{3y} x = 2 \Rightarrow (3y)^2 = x$
Sendo assim, temos: $y^4 = (3y)^2 \Rightarrow y^4 - 9y^2 = 0$.
Fazendo $y^2 = z$, obtemos: $z^2 - 9z = 0$.
Assim, $z_1 = 9$ ou $z_2 = 0$ (impossível).
Logo, $y = \pm 3$ e, consequentemente, $3^4 = x \Rightarrow x = 81$ ou $(-3)^4 = x \Rightarrow x = 81$. Portanto, o número é 81.

37. Sejam n o tempo em horas e P a população de bactérias. Então:
Para $n = 0$, temos $P(0) = P(1,2)^0$.
Para $n = 1$, temos $P(1) = P(1,2)^1$.
Para $n = 2$, temos $P(2) = P(1,2)^2$.
Para $n = 3$, temos $P(3) = P(1,2)^3$.
$\vdots$
Generalizando para n qualquer, temos $P(n) = P(1,2)^n$.
Para que a população dobre, devemos ter:
$P(1,2)^n = 2P \Rightarrow (1,2)^n = 2 \Rightarrow \log_{1,2} 2 = n \Rightarrow n = 3,81$
Portanto, serão necessárias aproximadamente 3 h 49 min.

38. **a)** $x - 9 > 0 \Rightarrow x > 9$
Portanto, $x > 9$.
b) $2x + 8 > 0 \Rightarrow 2x > -8 \Rightarrow x > -4$
$2x + 8 \neq 1 \Rightarrow 2x \neq -7 \Rightarrow x \neq -\frac{7}{2}$
Portanto, $x > -4$ e $x \neq -\frac{7}{2}$.
c) $1 - x > 0 \Rightarrow x < 1$
$x + 0,3 > 0 \Rightarrow x > -0,3$
$x + 0,3 \neq 1 \Rightarrow x \neq 0,7$
Portanto, $-0,3 < x < 1$ e $x \neq 0,7$.
d) $\frac{3x-6}{2-4x} > 0$



RONALDO INÁCIO/ ARQUIVO DA EDITORA

Portanto, $\frac{1}{2} < x < 2$.
e) $x - 10 > 0 \Rightarrow x > 10$
$x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$
$x + 1 \neq 1 \Rightarrow x \neq 0$
Portanto, $x > 10$.

39. $\log_b\left(8 - \frac{a}{2}\right) = 0 \Rightarrow 8 - \frac{a}{2} = 1 \Rightarrow a = 14$
Sendo assim:
$\log_{(2a-10)} 2 = \log_{(4+a)}\left(\frac{b}{3} - 1\right) \Rightarrow \log_{18} 2 = \log_{18}\left(\frac{b}{3} - 1\right) \Rightarrow$
$\Rightarrow 2 = \frac{b}{3} - 1 \Rightarrow b = 9$
Portanto: $y = 8^{\log_5 17 \cdot \log_8 (a-b)} = 8^{\log_5 17 \cdot \log_8 (14-9)} = 8^{\log_5 17 \cdot \log_8 5} =$
$= 8^{\log_8 5 \cdot \log_5 17} = 5^{\log_5 17} = 17$

40. Sugestões de resposta: O número 10, que é a base do logaritmo, elevado ao número real obtido é igual ao número inserido inicialmente. O número obtido é igual ao logaritmo decimal do número inserido inicialmente.

41. $\sqrt{\log(\log n)} = 0 \Rightarrow \log(\log n) = 0 \Rightarrow \log n = 1 \Rightarrow n = 10$
Portanto, $n = 10$.

42. a) $\log(b\sqrt{c}) = \log b + \log c^{\frac{1}{2}} = \log b + \frac{1}{2}\log c$

b) $\log\left(\frac{a^2 b}{c}\right) = \log a^2 + \log b - \log c = 2\log a + \log b - \log c$

c) $\log_2\left(\frac{\sqrt[5]{a}}{b \cdot c^2}\right) = \log_2 a^{\frac{1}{5}} - \left(\log_2 b + \log_2 c^2\right) =$

$= \frac{1}{5}\log_2 a - \log_2 b - 2\log_2 c$

43. a) $\log_4 5 + \log_4 9 = \log_4(5 \cdot 9) = \log_4 45$

b) $8\log 1 + \log 0{,}77 - \log 0{,}11 = 8 \cdot 0 + \log\left(\frac{0{,}77}{0{,}11}\right) = \log 7$

44. $x + y - z = \log(0{,}001)^6 + \log_3 243 - \log_3\sqrt{27} =$

$= \log\left(10^{-3}\right)^6 + \log_3\left(\frac{243}{\sqrt{27}}\right) = \log 10^{-18} + \log_3\left(\frac{3^5}{3^{\frac{3}{2}}}\right) =$

$= \log 10^{-18} + \log_3 3^{5-\frac{3}{2}} = -18 + \frac{7}{2} = -\frac{29}{2}$

45. a) $3^{x+4} = 15 \Rightarrow \log_3 15 = x + 4 \Rightarrow 2{,}465 = x + 4 \Rightarrow x = -1{,}535.$

Portanto, $S = \{-1{,}535\}$.

b) $27^x = 125 \Rightarrow x = \log_{27} 125 \Rightarrow x = 1{,}465$. Portanto, $S = \{1{,}465\}$.

c) $225 = 9^{\frac{x}{4}-1} \Rightarrow \log_9 225 = \frac{x}{4} - 1 \Rightarrow 2{,}465 + 1 = \frac{x}{4} \Rightarrow x = 13{,}86.$

Portanto, $S = \{13{,}86\}$.

46. $\log_c xb^3 = \frac{1}{2}\log_c a + 4\log_c b \Rightarrow \log_c xb^3 = \log_c a^{\frac{1}{2}} + \log_c b^4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_c xb^3 = \log_c\left(\sqrt{a} \cdot b^4\right) \Rightarrow xb^3 = \sqrt{a} \cdot b^4 \Rightarrow x = b\sqrt{a}$

47. a) $\dfrac{n\left(\frac{9}{10}\right)^0 - n\left(\frac{9}{10}\right)^1}{n\left(\frac{9}{10}\right)^0} = \dfrac{n - \frac{9n}{10}}{n} = \dfrac{\frac{n}{10}}{n} = \dfrac{1}{10} = 0{,}1$

Portanto, a taxa de desvalorização desse automóvel a cada dois anos é 10%.

b) $n\left(\frac{9}{10}\right)^t = \frac{n}{2} \Rightarrow \left(\frac{9}{10}\right)^t = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \log_{0,9} 0{,}5 \Rightarrow t = \log_{0,9}\left(\frac{0{,}45}{0{,}9}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \log_{0,9} 0{,}45 - \log_{0,9} 0{,}9 \Rightarrow t \simeq 7{,}6 - 1 \Rightarrow t \simeq 6{,}6$

Como t corresponde a um período de 2 anos, após 13 anos aproximadamente o valor do automóvel será reduzido à metade.

48. $550 = 500(1 + 0{,}01)^n \Rightarrow \frac{11}{10} = (1{,}01)^n \Rightarrow \log_{1,01}\left(\frac{11}{10}\right) = n \Rightarrow n \simeq 9{,}6$

Portanto, após 10 meses.

49. a) $\log_{12} 2 + \log_{12} 4 = \log_{12}(2 \cdot 4) = \frac{\log 8}{\log 12}$

b) $\log_2 3 + \log_2 1 - \log_2 7 = \log_2 3 + 0 - \log_2 7 =$

$= \log_2\frac{3}{7} = \frac{\log\left(\frac{3}{7}\right)}{\log 2}$

c) $\log_{17} 18 - \log_{17} 12 + \log_{17}\left(\frac{4}{3}\right) = \log_{17}\left(\frac{18 \cdot \frac{4}{3}}{12}\right) =$

$= \log_{17} 2 = \frac{\log 2}{\log 17}$

50. a) $\log_a b \cdot \log_b a = \frac{\log b}{\log a} \cdot \frac{\log a}{\log b} = 1$

b) $\log_{\sqrt{b}} a^3 = \frac{\log a^3}{\log b^{\frac{1}{2}}} = \frac{3\log a}{\frac{1}{2}\log b} = \frac{3x}{\frac{1}{2}y} = \frac{6x}{y}$, com $y \neq 0$.

51. $z = \log_6 27 \cdot \log_3 36 = \log_6 3^3 \cdot \log_3 6^2 = \frac{\log 3^3}{\log 6} \cdot \frac{\log 6^2}{\log 3} =$

$= \frac{3\cancel{\log 3}}{\cancel{\log 6}} \cdot \frac{2\cancel{\log 6}}{\cancel{\log 3}} = 6$

$w = \log_4 10 \cdot \log\sqrt[3]{16} = \frac{\log 10}{\log 4} \cdot \log\left(4^2\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\cancel{\log 4}} \cdot \frac{2}{3}\cancel{\log 4} = \frac{2}{3}$

Portanto $z \cdot w = 6 \cdot \frac{2}{3} = 4$.

52.

Quantidade de algarismos de uma potência de 10

Potência	Quantidade de algarismos
$10^1 = 10$	2
$10^2 = 100$	3
$10^3 = 1\,000$	4
⋮	⋮
10^n	$n + 1$

Assim: $10^n = 50^{14} \Rightarrow \log 50^{14} = n \Rightarrow 14\log\left(\frac{100}{2}\right) = n \Rightarrow$

$\Rightarrow 14\left(\log 10^2 - \log 2\right) = n \Rightarrow n = 14(2 - 0{,}301) \Rightarrow n = 23{,}786$

Logo, podemos escrever:

$$\underbrace{10^{23}}_{\text{24 algarismos}} < 10^{23,786} < \underbrace{10^{24}}_{\text{25 algarismos}}$$

Portanto, como 50^{14} é inteiro, ele tem 24 algarismos.

53. $\log_8\left[\frac{\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2}{(a \cdot b)^{\frac{1}{2}}}\right] = \log_8\left[\frac{a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b}{\sqrt{ab}}\right] =$

$= \log_8\left[\frac{a + b + 2\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}\right] = \log_8\left[\frac{30\sqrt{ab} + 2\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}\right] =$

$= \log_8(30 + 2) = \log_8 32 = \frac{\log_2 32}{\log_2 8} = \frac{\log_2 2^5}{\log_2 2^3} = \frac{5}{3} = 1{,}\overline{6}$

Portanto, a alternativa **b** é a correta.

54. Sejam n o ciclo e P_0 a população inicial do microrganismo. Então:

Para $n = 0$, temos $100 = P_0$.

Para $n = 1$, temos $2 \cdot 100 = 2 \cdot P_0$.

Para $n = 2$, temos $2 \cdot 2 \cdot 100 = 2^2 \cdot P_0$.

Para $n = 3$, temos $2 \cdot 2^2 \cdot 100 = 2^3 \cdot P_0$.

⋮

Generalizando para n qualquer, temos $2^n \cdot 100 = 2^n \cdot P_0$.

Assim:

$$5\,000 = 100 \cdot 2^n \Rightarrow 50 = 2^n \Rightarrow n = \log_2 50 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \frac{\log 50}{\log 2} \Rightarrow n = \frac{\log 5 + 1}{\log 2} \Rightarrow n = \frac{0{,}7 + 1}{0{,}3} \simeq 5{,}67$$

Ou seja, aproximadamente 5,67 ciclos. Como são ciclos de 20 min, temos: $5{,}67 \cdot 20 \simeq 113$ min. Portanto, o tempo necessário é de, aproximadamente, 1 h 53 min.

55. Para $m = \frac{\sqrt{2}}{50}$, temos: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} = \frac{\sqrt{2}}{50} \Rightarrow \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{50}\right) = n - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\log 2^{\frac{1}{2}} - \log 5 - \log 10}{\log 2^{\frac{1}{2}} - \log 2} = n - 1 \Rightarrow \dfrac{\frac{1}{2} \cdot 0{,}3 - 0{,}7 - 1}{\frac{1}{2} \cdot 0{,}3 - 0{,}3} = n - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{31}{3} = n - 1 \Rightarrow n = 11{,}\overline{3}$

Já para $m = \frac{2}{25}$, temos: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} = \frac{2}{25} \Rightarrow \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\frac{2}{25}\right) = n - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\log 2 - \log 5^2}{\log 2^{\frac{1}{2}} - \log 2} = n - 1 \Rightarrow \dfrac{0{,}3 - 2 \cdot 0{,}7}{\frac{1}{2} \cdot 0{,}3 - 0{,}3} = n - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{22}{3} = n - 1 \Rightarrow n = 8{,}\overline{3}$

Portanto, como n é inteiro, o 9º, o 10º e o 11º quadrado dessa sequência têm lado medindo entre $\frac{\sqrt{2}}{50}$ e $\frac{2}{25}$ unidades.

56. a) $\log_7 5^5 + \log\sqrt[3]{4^2} - \log_{0,1}1 \simeq 4{,}537$

b) $\log\left(\log_6 3^{\frac{1}{8}}\right)^2 \simeq -2{,}231$

c) $\dfrac{\log_{\sqrt{10}}15 + \log\sqrt{14}}{\log_5 8} \simeq 2{,}264$

57. a) $f(16) = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$

b) $g(1) = \log_3\left(\frac{1}{1}\right) = \log_3 1 = 0$

c) $g(9^{-2}) = \log_3\left(\frac{1}{9^{-2}}\right) = \log_3\left(3^2\right)^2 = 2 \cdot 2 = 4$

d) Como $f(x) = \log_2 x$, então $f^{-1}(x) = 2^y$. Assim:
$f^{-1}(5) = 2^5 = 32$

e) $f(8^{-1}) = \log_2 8^{-1} = \log_2\left(2^3\right)^{-1} = \log_2 2^{-3} = -3$

f) Como $g(x) = \log_3\left(\frac{1}{x}\right)$, então $g^{-1}(x) = 3^{-y}$. Assim:
$g^{-1}(3) = 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$

g) $g(3^{-2}) = \log_3\left(\frac{1}{3^{-2}}\right) = \log_3 3^2 = 2$

h) $f^{-1}(2) = 2^2 = 4$

58. a) $y = \frac{2}{3} \cdot \log\left(\frac{7 \cdot 10^9}{7 \cdot 10^{-3}}\right) = \frac{2}{3} \cdot \log 10^{12} = 8$

Portanto, a magnitude é de 8 graus na escala Richter.

b) Entre os gráficos apresentados, o gráfico **I** representa uma função exponencial crescente. Os gráficos **II** e **III** representam gráficos de uma função logarítmica. Porém, no gráfico **III**, a função é decrescente e, como a função do item **a** tem base 10, ou seja, maior do que 1, a função é crescente. Portanto, o gráfico que melhor representa a situação é o gráfico **II**.

59. a) $x + 3 > 0 \Rightarrow x > -3$. Sendo assim, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x > -3\}$.
A função é bijetiva, logo $f^{-1}(x) = 10^x - 3$.
Portanto, $Im(f) = D(f^{-1}) = \mathbb{R}$.

b) $6 - x > 0 \Rightarrow x < 6$. Sendo assim, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x < 6\}$.
A função é bijetiva, logo $f^{-1}(x) = -8^x + 6$.
Portanto, $Im(f) = D(f^{-1}) = \mathbb{R}$.

c) $2x > 0 \Rightarrow x > 0$. Sendo assim, $D(f) = \mathbb{R}_+^*$.
A função é bijetiva, logo $f^{-1}(x) = \frac{4^{x-5}}{2}$.
Portanto, $Im(f) = D(f^{-1}) = \mathbb{R}$.

60. $N(10^{-11}) = 10 \cdot \log\left(\frac{10^{-11}}{10^{-12}}\right) = 10 \cdot \log(10) = 10$

Portanto, o nível sonoro da respiração normal dessa pessoa é 10 dB.

61. A representação gráfica das funções referentes aos itens dessa tarefa está apresentada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

62. a) $a = 5$, $a > 1$; crescente.

b) $a = 10$, $a > 1$; crescente.

c) $a = \frac{1}{6}$, $0 < a < 1$; decrescente.

d) $a = \frac{2}{\sqrt{7}} \simeq 0{,}76$, $0 < a < 1$; decrescente.

e) $a = \frac{5}{2}$, $a > 1$; crescente.

f) $a = \frac{8}{9}$, $0 < a < 1$; decrescente.

63. A representação gráfica das funções g e g^{-1} está apresentada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.
A função g é crescente, pois $a = 3 > 1$. Como $g(x) = \log_3 x$, então $g^{-1}(x) = 3^x$. Logo, g^{-1} é crescente, pois $a = 3 > 1$.

64. a) Determinando os valores de a, b, c e d, temos:

- $0{,}25 = a^{-2} \Rightarrow \frac{1}{4} = a^{-2} \Rightarrow a = \pm 2$. Como, por definição, a é real positivo diferente de 1, segue que $a = 2$.
- $0 = \log_2 b \Rightarrow b = 1$
- $-3 = \log_2 c \Rightarrow c = 2^{-3} \Rightarrow c = \frac{1}{8}$
- $3 = \log_2 d \Rightarrow d = 2^3 \Rightarrow d = 8$

b) Para f, temos $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$. Já para g, temos $D(g) = \mathbb{R}_+^*$ e $Im(g) = \mathbb{R}$.

c) Crescentes, pois $a = 2 > 1$.

65. a) Inicialmente, determinamos o valor de a em $f(x) = a^x$. Se $x = -1$, então $f(x) = 2$. Sendo assim, $2 = a^{-1} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$.
Logo, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$. Note que as funções f e g são inversas. Portanto, sabemos, por exemplo, que os pontos $(1, 0)$, $(2, -1)$ e $(8, -3)$ pertencem ao gráfico de g.

b) Para f, temos $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$. Já para g, temos $D(g) = \mathbb{R}_+^*$ e $Im(g) = \mathbb{R}$.

c) Decrescentes, pois $a = \frac{1}{2}$ e $0 < a < 1$.

66. a) $x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2$
$x - 4 > 0 \Rightarrow x > 4$ e $x - 4 \neq 1 \Rightarrow x \neq 5$
Portanto, $D(g) = \{x \in \mathbb{R} | x > 4 \text{ e } x \neq 5\}$.

b) $1 + x > 0 \Rightarrow x > -1$
$-x > 0 \Rightarrow x < 0$ e $-x \neq 1 \Rightarrow x \neq -1$
Portanto, $D(g) = \{x \in \mathbb{R} | -1 < x < 0\}$.

c) $x^2 - 6x + 9 > 0 \Rightarrow x \neq 3$
$2x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$ e $2x - 1 \neq 1 \Rightarrow x \neq 1$
Portanto, $D(g) = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x > \frac{1}{2} \text{ e } x \neq 1 \text{ e } x \neq 3\right\}$.

67. a) Condição de existência: $x + 5 > 0 \Rightarrow x > -5$
$\log_4(x + 5) = 2 \Rightarrow 4^2 = x + 5 \Rightarrow x = 11$
Como $x = 11$ satisfaz a condição de existência, então $S = \{11\}$.

b) Condição de existência: $\frac{2 + x}{3} > 0 \Rightarrow x > -2$
$\log_6\sqrt{\frac{2 + x}{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{6} = \sqrt{\frac{2 + x}{3}} \Rightarrow \frac{2 + x}{3} = 6 \Rightarrow x = 16$
Como $x = 16$ satisfaz a condição de existência, então $S = \{16\}$.

c) Condições de existência:

- $2x - 6 > 0 \Rightarrow x > 3$ (I)
- $-x - 3 > 0 \Rightarrow x < -3$ e $-x - 3 \neq 1 \Rightarrow x \neq -4$ (II)

Note que $\text{I} \cap \text{II} = \varnothing$. Portanto, $S = \varnothing$.

d) Condições de existência:

- $x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$
- $x^2 + 3 > 0 \Rightarrow x^2 > -3$.

Como $x^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, segue que $x^2 > -3$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
Resolvendo a equação, temos: $\log_2(x + 1) = \log_4(x^2 + 3) \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_2(x + 1) = \frac{\log_2(x^2 + 3)}{\log_2 2^2} \Rightarrow 2\log_2(x + 1) = \log_2(x^2 + 3) \Rightarrow$
$\Rightarrow (x + 1)^2 = (x^2 + 3) \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 + 3 \Rightarrow x = 1$
Como $x = 1$ satisfaz a condição de existência, então $S = \{1\}$.

e) Condição de existência:

- $x > 0$
- $x \neq 1$

Resolvendo a equação, temos: $\log_x 4 - \log_x 16 = -1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_x \frac{4}{16} = -1 \Rightarrow x^{-1} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = 4$
Como $x = 4$ satisfaz a condição de existência, então $S = \{4\}$.

f) Condição de existência: $\frac{x^2 - 9}{x + 3} > 0 \Rightarrow x < -3$ ou $x > 3$.
Resolvendo a equação, temos: $\log_3 \frac{x^2 - 9}{x + 3} = 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{x^2 - 9}{x + 3} = 27 \Rightarrow x^2 - 9 = 27x + 81 \Rightarrow x^2 - 27x - 90 = 0$
Logo, $x_1 = 30$ ou $x_2 = -3$.
Como $x_1 = 30$ satisfaz a condição de existência, então $S = \{30\}$.

68. a) $3^{x-1} = 5 \Rightarrow \log_3 5 = x - 1 \Rightarrow \dfrac{\log 5}{\log 3} = x - 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{\log 5}{\log 3} + 1 = x \Rightarrow x \simeq 2{,}465$

b) $20^x = 3^{x-2} \Rightarrow \log 20^x = \log 3^{x-2} \Rightarrow$
$\Rightarrow x(\log 2 + \log 10) = (x-2)\log 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow x(\log 2 + \log 10) = x\log 3 - 2\log 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow x(\log 2 + \log 10) - x\log 3 = -2\log 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \dfrac{-2\log 3}{\log 2 + \log 10 - \log 3} \simeq -1{,}158$

c) $6^{x+1} = 9^{\frac{x}{2}} \Rightarrow \log 6^{x+1} = \log 9^{\frac{x}{2}} \Rightarrow (x+1)(\log 2 + \log 3) = x\log 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow x(\log 2 + \log 3) + (\log 2 + \log 3) = x\log 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow x(\log 2 + \log 3) - x\log 3 = -(\log 2 + \log 3) \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \dfrac{-(\log 2 + \log 3)}{\log 2} \simeq -2{,}585$

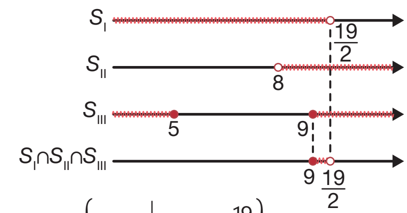
69. $\log_9 2x + \log_9 (x+2) = \log_9 30 \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_9 (2x^2 + 4x) = \log_9 30 \Rightarrow 2x^2 + 4x - 30 = 0$
Logo, $x_1 = 3$ ou $x_2 = -5$ (impossível).
Portanto, temos $f(x) + g(x) = k$, quando $x = 3$.

70. a) Condições de existência:
• $x > 0$ • $\log^2 10 + \log x > 0 \Rightarrow \log x > -1 \Rightarrow x > \dfrac{1}{10}$
Resolvendo a equação, temos: $\log_8(\log^2 10 + \log x) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \log^2 10 + \log x = 1 \Rightarrow \log x = 1 - 1 \Rightarrow x = 1$
Como $x = 1$ satisfaz as condições de existência, então $S = \{1\}$.

b) Condição de existência: $3 - x > 0 \Rightarrow x < 3$.
Resolvendo a equação, obtemos:
$\log^2(3-x) = \log(3-x) \Rightarrow \log^2(3-x) - \log(3-x) = 0$
Fazendo $\log(3-x) = y$, temos: $y^2 - y = 0$.
Logo, $y = 1$ ou $y_2 = 0$.
• $\log(3 - x_1) = 1 \Rightarrow 3 - x_1 = 10 \Rightarrow x_1 = -7$
• $\log(3 - x_2) = 0 \Rightarrow 3 - x_2 = 1 \Rightarrow x_2 = 2$
Como $x_1 = -7$ e $x_2 = 2$ satisfazem a condição de existência, então $S = \{-7, 2\}$.

c) Condições de existência:
• $x^2 - 11 > 0 \Rightarrow x < -\sqrt{11}$ ou $x > \sqrt{11}$
• $2 + \log_5(x^2 - 11) > 0 \Rightarrow x < -\dfrac{\sqrt{276}}{5}$ ou $x > \dfrac{\sqrt{276}}{5}$
Resolvendo a equação, temos:
$\log_{27}\left[2 + \log_5(x^2 - 11)\right] = \dfrac{1}{3} \Rightarrow 27^{\frac{1}{3}} = 2 + \log_5(x^2 - 11) \Rightarrow$
$\Rightarrow 3 = 2 + \log_5(x^2 - 11) \Rightarrow \log_5(x^2 - 11) = 1 \Rightarrow x^2 - 16 = 0$
Logo, $x_1 = -4$ e $x_2 = 4$.
Como $x_1 = -4$ e $x_2 = 4$ satisfazem as condições de existência, então $S = \{-4, 4\}$.

71. Condições de existência:
• $19 - 2x > 0 \Rightarrow x < \dfrac{19}{2}$ (I) • $x - 8 > 0 \Rightarrow x > 8$ (II)
Resolvendo a inequação, obtemos:
$\dfrac{1}{3}\log_9(19 - 2x) \le \log_{27}(x - 8) \Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{\log_3(19-2x)}{\log_3 9} \le \dfrac{\log_3(x-8)}{\log_3 27} \Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{\log_3(19-2x)}{2} \le \dfrac{\log_3(x-8)}{3} \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_3(19 - 2x) \le 2\log_3(x-8) \Rightarrow \log_3(19-2x) \le \log_3(x-8)^2$
Como $a = 3 > 1$, a desigualdade se mantém. Logo:
$19 - 2x \le (x-8)^2 \Rightarrow 19 - 2x \le x^2 - 16x + 64 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 14x + 45 \ge 0 \Rightarrow x \le 5$ ou $x \ge 9$ (III)



SERGIO L. FILHO/ ARQUIVO DA EDITORA

Portanto, $\left\{x \in \mathbb{R} \middle| 9 \le x < \dfrac{19}{2}\right\}$.

72. a) Condição de existência: $x - 17 > 0 \Rightarrow x > 17$.
Como $a = 3 > 1$, a desigualdade se mantém.
$\log_3(x - 17) < 2 \Rightarrow \log_3(x-17) < \log_3 3^2 \Rightarrow x - 17 < 9 \Rightarrow x < 26$
Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} | 17 < x < 26\}$.

b) Condições de existência:
• $2 - x > 0 \Rightarrow x < 2$ • $x + 6 > 0 \Rightarrow x > -6$
Como $a = 0{,}5$ e $0 < a < 1$, a desigualdade é invertida.
$\log_{0,5}(2 - x) \ge \log_{0,5}(x + 6) \Rightarrow 2 - x \le x + 6 \Rightarrow x \ge -2$
Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} | -2 \le x < 2\}$.

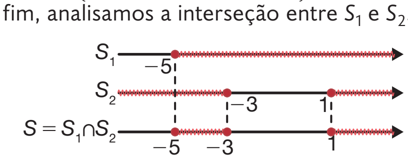
c) Condição de existência: $\dfrac{x}{2} + 1 > 0 \Rightarrow x > -2$.
Como $a = 8 > 1$, a desigualdade se mantém.
$1 \le \log_8\left(\dfrac{x}{2} + 1\right) \Rightarrow \log_8 8 \le \log_8\left(\dfrac{x}{2} + 1\right) \Rightarrow 8 \le \dfrac{x}{2} + 1 \Rightarrow x \ge 14$
Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} | x \ge 14\}$.

73. a) Se $t = 0$, então $f(t) = 50 \cdot (1{,}35)^0$.
Se $t = 1$, então $f(t) = 50 + 50 \cdot (0{,}35) = 50 \cdot (1{,}35)^1$.
Se $t = 2$, então:
$f(t) = 50 \cdot (1{,}35)^1 + 50 \cdot (1{,}35)^1 \cdot (0{,}35) = 50 \cdot (1{,}35)^2$.
...
Se $t = n$, então $f(t) = 50 \cdot (1{,}35)^n$.
Portanto, $f(t) = 50 \cdot (1{,}35)^t$.

b) $f(t) = 2\,500 \Rightarrow 50(1{,}35)^t = 2\,500 \Rightarrow (1{,}35)^t = 50 \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_{1,35} 50 = t \Rightarrow \dfrac{\log 5 + \log 10}{\log 1{,}35} = t \Rightarrow t \simeq 13$
Portanto, a vegetação tomará completamente a represa em, aproximadamente, 13 anos.

74. Condições de existência:
• $x^2 - 5x > 0 \Rightarrow x < 0$ ou $x > 5$
• $9^{\log_9(x^2 - 5x)} \le 14 \Rightarrow x^2 - 5x \le 14 \Rightarrow -2 \le x \le 7$
Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} | -2 \le x < 0 \text{ ou } 5 < x \le 7\}$.
Portanto, a soma dos números inteiros que pertencem a S é:
$$(-2) + (-1) + 6 + 7 = 10$$

75. Inicialmente, vamos analisar $\log_{\frac{7}{2}}(x + 6) \ge 0$.
Condição de existência: $x + 6 > 0 \Rightarrow x > -6$.
Como $a = \dfrac{7}{2} > 1$, a desigualdade se mantém.
$\log_{\frac{7}{2}}(x + 6) \ge 0 \Rightarrow \log_{\frac{7}{2}}(x+6) \ge \log_{\frac{7}{2}} 1 \Rightarrow x + 6 \ge 1 \Rightarrow x \ge -5$
Logo, $S_1 = \{x \in \mathbb{R} | x \ge -5\}$.
Agora, vamos analisar $\log_3(2x + x^2) \ge 1$.
Condição de existência: $2x + x^2 > 0 \Rightarrow x < -2$ ou $x > 0$ (III).
Como $a = 3 > 1$, a desigualdade se mantém.
$\log_3(2x + x^2) \ge 1 \Rightarrow \log_3(2x + x^2) \ge \log_3 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + 2x - 3 \ge 0 \Rightarrow x \le -3$ ou $x \ge 1$ (IV)
Logo, $S_2 = \{x \in \mathbb{R} | x \le -3 \text{ ou } x \ge 1\}$.
Por fim, analisamos a interseção entre S_1 e S_2.



SERGIO L. FILHO/ ARQUIVO DA EDITORA

Portanto, há 3 números inteiros negativos que satisfazem as inequações simultaneamente: −5, −4 e −3.

76. a) $x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$

$\log_{0,6}(x-3) > 0 \Rightarrow \log_{0,6}(x-3) > \log_{0,6}1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x - 3 < 1 \Rightarrow x < 4$

Portanto, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | 3 < x < 4\}$.

b) $x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2$

$\log_{0,7}(x+2) > 0 \Rightarrow \log_{0,7}(x+2) > \log_{0,7}1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x + 2 < 1 \Rightarrow x < -1$

Portanto, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | -2 < x < -1\}$.

77. A função que determina o valor do imóvel em função do tempo, em anos, é dada por $f(t) = V \cdot (1{,}04)^t$, em que V é o valor inicial. Sendo assim:

$f(t) \geq 1{,}3 \cdot V \Rightarrow V \cdot (1{,}04)^t \geq 1{,}3 \cdot V \Rightarrow$

$\Rightarrow (1{,}04)^t \geq 1{,}3 \Rightarrow t \cdot \log\frac{104}{100} \geq \log\frac{13}{10} \Rightarrow$

$\Rightarrow t \cdot \left[\log(2^3 \cdot 13) - \log 10^2\right] \geq \log 13 - \log 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow t \cdot (3 \cdot 0{,}301 + 1{,}114 - 2) \geq 1{,}114 - 1 \Rightarrow t \geq 6{,}7$

Como t é inteiro, então após 7 anos o imóvel terá valorizado mais do que 30%.

78. $M(t) = 1\,200 \Rightarrow 700 \cdot (1{,}08)^t = 1\,200 \Rightarrow (1{,}08)^t = \frac{12}{7} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_{1{,}08}\left(\frac{12}{7}\right) = t \Rightarrow \frac{\log\left(\frac{12}{7}\right)}{\log 1{,}08} = t \Rightarrow \frac{0{,}234}{0{,}033} = t \Rightarrow t \simeq 7{,}09$

Portanto, em aproximadamente 8 meses, a dívida será de R\$ 1 200,00.

79. a) Como 140 anos correspondem a 5 períodos de meia-vida do estrôncio-90, temos: $\frac{n_0 \cdot 2^{-5}}{n_0 \cdot 2^0} = 2^{-5} = 0{,}03125$.

Portanto, a porcentagem na atmosfera será de 3,125%.

b) $700 \cdot 2^{-t} = 50 \Rightarrow 2^{-t} = \frac{5}{70} \Rightarrow \log_2\left(\frac{5}{70}\right) = -t \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\log 10 - \log 2 - \log 7 - \log 10}{\log 2} = -t \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1 - 0{,}301 - 0{,}845 - 1}{0{,}301} = -t \Rightarrow t \simeq 3{,}81$

Como t corresponde a 28 anos, temos: $28 \cdot 3{,}81 \simeq 107$. Portanto, após um período aproximado de 107 anos, a massa de estrôncio-90 terá se reduzido a 50 g.

80. a) $UH = 100\log\left(6 - 1{,}7 \cdot 56^{0{,}37} + 7{,}6\right) \simeq 78$

Portanto, a unidade Haugh do ovo é, aproximadamente, 78, logo é de excelente qualidade, pois a unidade Haugh é superior a 72.

b) $UH > 72 \Rightarrow 100\log\left(H - 1{,}7 \cdot 62^{0{,}37} + 7{,}6\right) > 72 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log(H - 0{,}228) > \log 10^{\frac{72}{100}} \Rightarrow H - 0{,}228 > 10^{\frac{72}{100}} \Rightarrow H > 5{,}48$

Portanto, a altura mínima deve ser 5,48 mm.

81. a) $n(t) = 4 \cdot 2^{-6} \Rightarrow n(t) = \frac{4}{2^6} \Rightarrow n(t) = 0{,}0625$

Portanto, sobrou 0,0625 g de iodo-131.

b) $10 \cdot 2^{-t} < 10^{-2} \Rightarrow 2^{-t} < 10^{-3} \Rightarrow \log_2 10^{-3} < -t \Rightarrow$

$\Rightarrow -3 \cdot 3{,}3 > -t \Rightarrow t > 9{,}9$

Como t corresponde a 8 dias, então: $9{,}9 \cdot 8 = 79{,}2$. Portanto, serão necessários, no mínimo, 80 dias.

Desenvolvimento sustentável (páginas 182 e 183)

2. Analisando o gráfico, concluímos que, de acordo com as projeções, estima-se que a população mundial em 2050 será de 9,7 bilhões de habitantes.

3. Sugestão de resposta: Aproximadamente 8 bilhões de habitantes.

Síntese do capítulo (página 187)

3. a) Sugestão de resposta: Ao estudar o crescimento populacional de uma bactéria e o decaimento radioativo de uma substância radioativa.

b) Sugestão de resposta: Ao medir intensidades em escalas de pH e a magnitude de terremotos na escala Richter.

4. Uma função exponencial é crescente quando $a > 1$, e decrescente quando $0 < a < 1$.

5. A imagem da função exponencial é $\mathbb{R}_+^*$. Portanto, no item **B** é apresentado o gráfico de uma função exponencial.

7. Sugestão de resposta: 1. Digite a tecla log da calculadora; 2. Registre o número 23, pressionando as teclas 2 e 3, nessa ordem; 3. Digite a tecla =.

8. A veracidade da proposição está mostrada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

9. A veracidade da igualdade apresentada está mostrada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

CAPÍTULO 6 SEQUÊNCIAS

Abertura do capítulo

1. Nessa técnica, é criada uma sequência com desenhos parecidos, com pequenas diferenças. Passando rapidamente as imagens em sequência, tem-se ilusão de movimento.

2. $24 \cdot 60 \cdot 15 = 21\,600$. Foram usadas 21 600 fotos.

3. 1º segundo: 24; 2º segundo: $24 \cdot 2 = 48$; 3º segundo: $24 \cdot 3 = 72$; 4º segundo: $24 \cdot 4 = 96$; 5º segundo: $24 \cdot 5 = 120$; 6º segundo: $24 \cdot 6 = 144$; 7º segundo: $24 \cdot 7 = 168$; 8º segundo: $24 \cdot 8 = 192$; 9º segundo: $24 \cdot 9 = 216$; 10º segundo: $24 \cdot 10 = 240$.

Questões

A. $8 - 4 = 4$. Portanto, a razão da PA é 4.

B. Decrescente, pois a razão da PA é $-10 - (-5) = -5$ e $-5 < 0$.

C. O algoritmo referente a essa questão está apresentado na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

E. A veracidade da afirmação está mostrada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

F. O algoritmo referente a essa questão está apresentado na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

G. $\frac{8}{4} = 2$. Portanto, a razão da PG é 2.

H. O algoritmo referente a essa questão está apresentado na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

Exercícios e problemas

1. a) $r = 10 - 3 = 7$

b) $r = 39 - 42 = -3$

c) $r = -3 - (-7) = 4$

d) $r = -3 - 5 = -8$

e) $r = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

f) $r = 1{,}4 - 2{,}3 = -0{,}9$

2. a) $\left(4, \underbrace{13}_{4+9}, \underbrace{22}_{13+9}, \underbrace{31}_{22+9}, \underbrace{40}_{31+9}, \underbrace{49}_{40+9}\right)$

b) $r = 18 - 23 = -5$.

$\left(23, 18, \underbrace{13}_{18-5}, \underbrace{8}_{13-5}, \underbrace{3}_{8-5}, \underbrace{-2}_{3-5}\right)$

c) $\left(\underbrace{9}_{11-2}, \underbrace{11}_{13-2}, \underbrace{13}_{15-2}, \underbrace{15}_{17-2}, \underbrace{17}_{19-2}, 19\right)$

d) $\left(\underbrace{-\frac{9}{2}}_{-2-\frac{5}{2}}, \underbrace{-2}_{\frac{1}{2}-\frac{5}{2}}, \underbrace{\frac{1}{2}}_{3-\frac{5}{2}}, 3, \underbrace{\frac{11}{2}}_{3+\frac{5}{2}}, \underbrace{8}_{\frac{11}{2}+\frac{5}{2}}\right)$

e) $\left(\underbrace{20}_{14-(-6)}, \underbrace{14}_{8-(-6)}, \underbrace{8}_{2-(-6)}, \underbrace{2}_{-4-(-6)}, \underbrace{-4}_{-10-(-6)}, -10\right)$

f) Como $a_1 = -5$ e $r = 0$, temos a PA constante $(-5, -5, -5, -5, -5, -5)$.

3. **a)** $r = a_2 - a_1 = 7 - 2 = 5$

$a_{20} = a_1 + 19r = 2 + 19 \cdot 5 = 97$

b) $a_{32} = a_1 + 31r \Rightarrow -45 = 17 + 31r \Rightarrow r = -2$

4. $a_{14} = a_{12} + 2r \Rightarrow -9 = 7 + 2r \Rightarrow r = -8$

$a_1 = a_{12} - 11r \Rightarrow a_1 = 7 - 11 \cdot (-8) \Rightarrow a_1 = 95$

Portanto, os três primeiros termos são 95, $\underbrace{87}_{95-8}$ e $\underbrace{79}_{87-8}$.

5. A quantidade de água no recipiente forma uma PA em que $a_1 = 260$ e $r = 40$. Indicando por Q a quantidade de água que há no recipiente em função da medição t de Mônica, temos:

$Q(t) = a_1 + (t - 1)r \Rightarrow Q(t) = 260 + (t - 1)40$

a) $\frac{260}{40} = 6{,}5$; $10 \cdot 6{,}5 = 65$. Portanto, passaram-se 65 min.

b) $1\,500 = 260 + (t - 1)40 \Rightarrow t = 32$

Na 32ª medição, temos 31 ciclos completos de 10 minutos. Assim: $31 \cdot 10 + 65 = 310 + 65 = 375$. Portanto, foram necessários 375 min.

6. **a)** $a_n = 0 + (n - 1) \cdot \underbrace{(1 - 0)}_{r} \Rightarrow a_n = 0 + (n - 1) \cdot 1 \Rightarrow a_n = n - 1$

Como $r = 1 > 0$, a PA é crescente.

b) $a_n = \frac{5}{2} + (n - 1) \cdot \underbrace{\left(2 - \frac{5}{2}\right)}_{r} \Rightarrow a_n = \frac{5}{2} + (n - 1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$

Como $r = -\frac{1}{2} < 0$, a PA é decrescente.

c) $a_n = 1 + (n - 1) \cdot \underbrace{(2{,}2 - 1)}_{r} \Rightarrow a_n = 1 + (n - 1) \cdot 1{,}2$

Como $r = 1{,}2 > 0$, a PA é crescente.

7. **a)** Das 13 h às 13 h 3 min 24 s, passaram-se 204 s.

- Lâmpada vermelha: $204 = 4 + (n - 1)4 \Rightarrow n = 51$
- Lâmpada azul: $204 = 3 + (n - 1)3 \Rightarrow n = 68$
- Lâmpada branca: $204 = 7 + (n - 1)7 \Rightarrow n \simeq 29{,}14$

Portanto, as lâmpadas que piscaram juntas às 13 h 3 min 24 s foram a vermelha e a azul.

Adicionando 6 s a 204 s, obtemos 210 s. Então:

- Lâmpada vermelha: $210 = 4 + (n - 1)4 \Rightarrow n = 52{,}5$.
- Lâmpada azul: $210 = 3 + (n - 1)3 \Rightarrow n = 70$.
- Lâmpada branca: $210 = 7 + (n - 1)7 \Rightarrow n = 30$.

As lâmpadas que piscaram juntas nesse horário foram a azul e a branca.

b) Das 13 h às 14 h são 3 600 s. Como o último múltiplo de 7, antes de 3 600, é 3 598, temos: $3\,598 = 7 + (n - 1) \cdot 7 \Rightarrow$ $\Rightarrow n = 514$.

Portanto, a lâmpada branca terá piscado 514 vezes nesse período.

c) A última piscada da lâmpada branca foi 3 598 s após as 13 h, ou seja, às 13 h 59 min 58 s. Assim, as outras duas foram às 13 h 59 min 51 s e às 13 h 59 min 44 s.

d) A lâmpada azul piscou com a branca às 13 h 59 min 51 s, pois 59 min 51 s = 3 591 s e 3 591 é múltiplo de 3.

e) A lâmpada vermelha piscou com a branca às 13 h 59 min 44 s, pois 59 min 44 s = 3 584 s e 3 584 é múltiplo de 4.

8. O valor do computador forma uma PA, em que $r = -25$ e $a_{25} = 1800$. Assim: $a_1 = a_{25} - 24r \Rightarrow a_1 = 1800 - 24 \cdot (-25) = 2\,400$.

Logo, $a_n = 2\,400 + (n - 1) \cdot (-25)$.

Calculando o valor pago em 1º de julho de 2024, temos:

$$a_5 = 2\,400 + 4 \cdot (-25) = 2\,300$$

Portanto, em 1º de julho de 2024 esse computador custava R$ 2 300,00.

9. Determinando a razão para cada uma das PAs, temos:

- 1ª progressão: $r = 6$
- 2ª progressão: $r = 4$

Indicando por c_n a PA dos termos que se repetem nas duas sequências e por r_{c_n} a razão dessa sequência, temos: $c_1 = 14$ e $r_{c_n} = \text{mmc}(6, 4) = 12$. Assim: $c_n = 14 + (n - 1) \cdot 12$.

Para obter o número de termos de c_n, devemos obter o valor de n para $c_n \leq 386$, então:

$c_n \leq 386 \Rightarrow 14 + (n - 1) \cdot 12 \leq 386 \Rightarrow n \leq 32$. Portanto, as progressões $(2, 8, 14, \ldots, 458)$ e $(6, 10, 14, \ldots, 386)$ têm 32 termos em comum.

10. **a)** A veracidade da afirmação está mostrada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

b) A veracidade da igualdade apresentada está mostrada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

11. $a_8 = a_1 + 7r \Rightarrow 420 = 0 + 7r \Rightarrow r = 60$

$a_6 - a_3 = (a_1 + 5r) - (a_1 + 2r) = 5 \cdot 60 - 2 \cdot 60 = 180$

Portanto, a distância entre a 2ª e a 5ª praça de pedágio é 180 km.

12. Ao inserir 5 termos entre 3 e 27, a progressão terá 7 termos, em que $a_1 = 3$ e $a_7 = 27$. Assim: $a_7 = a_1 + 6r \Rightarrow 27 = 3 + 6r \Rightarrow$ $\Rightarrow r = 4$.

13. Ao interpolar 11 meios aritméticos entre −16 e 20, obtemos uma PA, tal que $a_1 = -16$ e $a_{13} = 20$. Assim: $a_{13} = a_1 + 12r \Rightarrow$ $\Rightarrow 20 = -16 + 12r \Rightarrow r = 3$.

Agora, calculamos a_5, a_6 e a_8.

$a_5 = a_1 + 4r \Rightarrow a_5 = -16 + 4 \cdot 3 \Rightarrow a_5 = -4$

$a_6 = a_1 + 5r \Rightarrow a_6 = -16 + 5 \cdot 3 \Rightarrow a_6 = -1$

$a_8 = a_1 + 7r \Rightarrow a_8 = -16 + 7 \cdot 3 \Rightarrow a_6 = 5$

Portanto, $a_5 + a_6 + a_8 = (-4) + (-1) + 5 = 0$.

14. $\underset{a_1}{1}, \underset{a_2}{\_\_}, \underset{a_3}{\_\_}, \underset{a_4}{\_\_}, \underset{a_5}{\_\_}, \underset{a_6}{\_\_}, \underset{a_7}{3}, \underset{a_8}{\_\_}, \underset{a_9}{\_\_}, \underset{a_{10}}{\_\_}, \underset{a_{11}}{\_\_}, \underset{a_{12}}{\_\_}, \underset{a_{13}}{5}$

a) $a_7 = a_1 + 6r \Rightarrow 3 = 1 + 6r \Rightarrow r = \frac{1}{3}$

b) 13 termos.

c) $a_2 = a_1 + r \Rightarrow a_2 = 1 + \frac{1}{3} \Rightarrow a_2 = \frac{4}{3}$

$a_3 = a_1 + 2r \Rightarrow a_3 = 1 + 2 \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow a_3 = \frac{5}{3}$

$a_4 = a_1 + 3r \Rightarrow a_4 = 1 + 3 \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow a_4 = 2$

$a_5 = a_1 + 4r \Rightarrow a_5 = 1 + 4 \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow a_5 = \frac{7}{3}$

$a_6 = a_1 + 5r \Rightarrow a_6 = 1 + 5 \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow a_6 = \frac{8}{3}$

$a_8 = a_1 + 7r \Rightarrow a_8 = 1 + 7 \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow a_8 = \frac{10}{3}$

$a_9 = a_1 + 8r \Rightarrow a_9 = 1 + 8 \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow a_9 = \frac{11}{3}$

$a_{10} = a_1 + 9r \Rightarrow a_{10} = 1 + 9 \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow a_{10} = 4$

$a_{11} = a_1 + 10r \Rightarrow a_{11} = 1 + 10 \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow a_{11} = \frac{13}{3}$

$a_{12} = a_1 + 11r \Rightarrow a_{12} = 1 + 11 \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow a_{12} = \frac{14}{3}$

Portanto, 5 termos da PA pertencem a $\mathbb{N}$. São eles: 1, 2, 3, 4 e 5.

15. $f(-3) - f(-8) = -10 \Rightarrow -3a + 7 - (-8a + 7) = -10 \Rightarrow$ $\Rightarrow 5a = -10 \Rightarrow a = -2$

16. Podemos escrever uma PA de 5 termos desconhecidos da seguinte maneira: $(x - 2r, x - r, x, x + r, x + 2r)$.

Como o total de veículos vendidos foi igual a 35, temos:

$(x - 2r) + (x - r) + (x) + (x + r) + (x + 2r) = 35 \Rightarrow x = 7$

a) Se no 1º domingo foram vendidos 3 veículos, temos:

$$x - 2r = 3 \Rightarrow 7 - 2r = 3 \Rightarrow r = 2$$

Portanto, no 2º domingo, foram vendidos 2 veículos a mais do que no 1º. Esse valor representa a razão da PA.

b) Como $a_1 = 3$ e a razão é 2, temos: $(3, 5, 7, 9, 11)$.

c)
- $f(3) = 8 \cdot 3 - 3 = 21$
- $f(9) = 8 \cdot 9 - 3 = 69$
- $f(5) = 8 \cdot 5 - 3 = 37$
- $f(11) = 8 \cdot 11 - 3 = 85$
- $f(7) = 8 \cdot 7 - 3 = 53$

Portanto, a sequência é $(21, 37, 53, 69, 85)$.

17. Para o movimento da partícula **A**, o tempo é dado pela PA $(0, 1, 2, 3)$ e a posição, em função do tempo, é dada pela PA $(5, 10, 15, 20)$. Assim, $p(t) = ax + b$ e:

$$\begin{cases} p(0) = 5 \\ p(1) = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \cdot 0 + b = 5 \\ a \cdot 1 + b = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 5 \\ a + b = 10 \end{cases} \Rightarrow a = b = 5$$

Portanto, a posição da partícula **A** é dada por $p(t) = 5t + 5$.

Para o movimento da partícula **B**, o tempo é dado pela PA $(0, 2, 4, 6)$ e a posição, em função do tempo, é dada pela PA $(0, 13, 26, 39)$. Assim, $p(t) = ax + b$ e:

- $p(0) = 0 \Rightarrow b = 0$
- $p(2) = 13 \Rightarrow a \cdot 2 + b = 13 \Rightarrow a = \frac{13}{2}$

Portanto, a posição da partícula **B** é dada por $p(t) = \frac{13}{2}t$.

18.
- $f(-4) = 2 \cdot (-4) - 4 = -12$
- $f(-1) = 2 \cdot (-1) - 4 = -6$
- $f(2) = 2 \cdot 2 - 4 = 0$
- $f(5) = 2 \cdot 5 - 4 = 6$
- $f(8) = 2 \cdot 8 - 4 = 12$
- $f(11) = 2 \cdot 11 - 4 = 18$
- $f(14) = 2 \cdot 14 - 4 = 24$
- $f(17) = 2 \cdot 17 - 4 = 30$

Portanto, a nova PA é $(-12, -6, 0, 6, 12, 18, 24, 30)$ e sua razão é 6, pois $2 \cdot 3 = 6$.

19. $\begin{cases} f(10) = -26 \\ f(3) = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10a + b = -26 \\ 3a + b = -5 \end{cases} \Rightarrow a = -3$ e $b = 4$

Portanto, $f(x) = -3x + 4$.

20. a) $f(x_2) - f(x_1) = 7 - 2 = 5$ $\quad f(x_4) - f(x_3) = 80 - 33 = 47$

$f(x_3) - f(x_2) = 33 - 7 = 26$

Assim, a sequência $(5, 26, 47)$ é uma PA.

b) $g(x_2) - g(x_1) = 7 - 6 = 1$ $\quad g(x_4) - g(x_3) = 15 - 12 = 3$

$g(x_3) - g(x_2) = 12 - 7 = 5$

Logo, a sequência $(1, 5, 3)$ não é uma PA.

c) $h(x_2) - h(x_1) = -4 - (-15) = 11$

$h(x_3) - h(x_2) = -15 - (-4) = -11$

$h(x_4) - h(x_3) = -48 - (-15) = -33$

Assim, a sequência $(11, -11, -33)$ é uma PA.

d) $m(x_2) - m(x_1) = 35 - 11 = 24$

$m(x_3) - m(x_2) = 75 - 35 = 40$

$m(x_4) - m(x_3) = 131 - 75 = 56$

Portanto, a sequência $(24, 40, 56)$ é uma PA.

Portanto, as funções f, h e m podem ser quadráticas.

21. $64 = 2 \cdot 2r^2 \Rightarrow r^2 = 16$

Assim, $r_1 = 4$ ou $r_2 = -4$.

Portanto, há dois possíveis valores para a razão da sequência, $r = 4$ ou $r = -4$.

22. $f(x_2) - f(x_1) = 3 - (-4) = 7$ $\quad f(x_3) - f(x_2) = -88 - 3 = -91$

A sequência $[f(x_2) - f(x_1), f(x_3) - f(x_2)]$ tem razão $2 \cdot a \cdot 7^2$, logo:

$$2 \cdot a \cdot 7^2 = -91 - 7 \Rightarrow a = -1$$

Portanto, a função apresenta valor de máximo, pois $a = -1 < 0$.

23. Possível resposta: Considere a função $f(x) = x^2 - 5x + 6$ e a PA $(-1, 2, 5, 8)$ de razão $r = 3$. Nesse caso, temos: $f(-1) = 12$, $f(2) = 0$, $f(5) = 6$ e $f(8) = 30$. Assim, as diferenças $f(2) - f(-1)$, $f(5) - f(2)$, $f(8) - f(5)$ formam a PA $(-12, 6, 24)$ cuja razão é: $18 = 2ar^2 = 2 \cdot 1 \cdot 3^2$.

24. b) O desenvolvimento depende da estratégia elaborada pelos estudantes. A soma dos números naturais de 1 a 1 000 é 500 500.

25. a) $r = 9 - 5 = 4$; $a_{15} = 5 + 14 \cdot 4 = 61$; $S_{15} = \frac{15 \cdot (5 + 61)}{2} = 495$.

Portanto, a soma dos 15 primeiros termos da PA é 495.

b) $r = 11 - 17 = -6$; $a_{36} = 17 + 35 \cdot (-6) = -193$;

$S_{36} = \frac{36 \cdot (17 - 193)}{2} = -3\,168$.

Portanto, a soma dos 36 primeiros termos da PA é $-3\,168$.

c) $r = 12 - 6 = 6$; $a_{20} = 6 + 19 \cdot 6 = 120$;

$S_{36} = \frac{20 \cdot (6 + 120)}{2} = 1\,260$.

Portanto, a soma dos 20 primeiros termos da PA é 1 260.

d) $r = 20 - 15 = 5$; $a_{26} = 15 + 25 \cdot 5 = 140$;

$S_{26} = \frac{26 \cdot (15 + 140)}{2} = 2\,015$.

Portanto, a soma dos 26 primeiros termos da PA é 2 015.

e) $r = 11 - 13 = -2$; $a_{30} = 13 + 29 \cdot (-2) = -45$;

$S_{30} = \frac{30 \cdot (13 - 45)}{2} = -480$.

Portanto, a soma dos 30 primeiros termos da PA é -480.

f) $r = 100 - 120 = -20$; $a_{18} = 120 + 17 \cdot (-20) = -220$;

$S_{18} = \frac{18 \cdot (120 - 220)}{2} = -900$.

Portanto, a soma dos 18 primeiros termos da PA é -900.

26. a) $r = 11 - 3 = 8$; $115 = 3 + (n - 1) \cdot 8 \Rightarrow n = 15$;

$S_{15} = \frac{15 \cdot (3 + 115)}{2} = 885$.

Portanto, a soma dos termos dessa PA é 885.

b) $r = 83 - 86 = -3$; $35 = 86 + (n - 1) \cdot (-3) \Rightarrow n = 18$;

$S_{18} = \frac{18 \cdot (86 + 35)}{2} = 1\,089$.

Portanto, a soma dos termos dessa PA é 1 089.

c) $r = -5 - (-8) = 3$; $22 = -8 + (n - 1) \cdot 3 \Rightarrow n = 11$;

$S_{11} = \frac{11 \cdot (-8 + 22)}{2} = 77$.

Portanto, a soma dos termos dessa PA é 77.

d) $r = -4 - (-6) = 2$; $12 = -6 + (n - 1) \cdot 2 \Rightarrow n = 10$;

$S_{10} = \frac{10 \cdot (-6 + 12)}{2} = 30$.

Portanto, a soma dos termos dessa PA é 30.

e) $r = 14 - 10 = 4$; $54 = 10 + (n - 1) \cdot 4 \Rightarrow n = 12$;

$S_{12} = \frac{12 \cdot (10 + 54)}{2} = 384$.

Portanto, a soma dos termos dessa PA é 384.

f) $r = 29 - 21 = 8$; $141 = 21 + (n - 1) \cdot 8 \Rightarrow n = 16$;

$S_{16} = \frac{16 \cdot (21 + 141)}{2} = 1\,296$.

Portanto, a soma dos termos dessa PA é 1 296.

27. $\frac{25 \cdot (a_1 + a_{25})}{2} = 225 \Rightarrow a_1 + a_{25} = 18 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{(a_{18} - 17r)}_{a_1} + \underbrace{(a_{18} + 7r)}_{a_{25}} = 18 \Rightarrow 2a_{18} = 18 + 40 \Rightarrow a_{18} = 29$

28. $0 = \frac{7 \cdot (a_1 + a_7)}{2} \Rightarrow a_1 + a_7 = 0 \Rightarrow a_1 + (a_1 + 6r) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2a_1 + 6 \cdot (-7) = 0 \Rightarrow a_1 = 21$

29. Inicialmente, calculamos o valor de a_1 e r:

- $r = \frac{5}{100}a_1 = 0{,}05a_1$
- $a_1 + 20r = 32 \Rightarrow a_1 + 20 \cdot (0{,}05a_1) = 32 \Rightarrow a_1 = 16$
- $r = \frac{5}{100}a_1 \Rightarrow r = \frac{5}{100} \cdot 16 \Rightarrow r = \frac{4}{5}$

Assim, $a_1 = 16$ e $r = \frac{4}{5}$.

a) Verdadeira, pois $a_1 = 16$ é um quadrado perfeito.

b) $a_{11} = 16 + 10 \cdot \frac{4}{5} = 24$ e $S_{11} = \frac{11 \cdot (16 + 24)}{2} = 220$. Como 220 não é um quadrado perfeito, a afirmação é falsa.

c) $a_{44} = 16 + 43 \cdot \frac{4}{5} = \frac{252}{5}$. Como $\frac{252}{5} < 550$, a afirmação é falsa.

Portanto, a alternativa **a** é a correta.

30. a) Considerando a PA $(x+1, x+2, \ldots, x+100)$, temos:

$$S_{100} = 7\,450 \Rightarrow \frac{100 \cdot (x+1+x+100)}{2} = 7\,450 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 100x + 5\,050 = 7\,450 \Rightarrow x = 24$$

b) Considerando a PA $(3x+2,\ 3x+5,\ \ldots,\ 3x+59)$, temos:

- $3x + 59 = 3x + 2 + (n-1) \cdot 3 \Rightarrow n = 20$
- $S_{20} = 630 \Rightarrow \dfrac{20 \cdot (3x+2+3x+59)}{2} = 630 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 60x + 610 = 630 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

31. Considerando a PA $(0, 1, 2, \ldots, n-1)$, temos:

$$S_n = \frac{n[0 + (n-1)]}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Portanto: $(a) \cdot (ab) \cdot (ab^2) \cdot \ldots \cdot (ab^{n-1}) =$

$$= a^n \cdot b^{0+1+2+\ldots+(n-1)} = a^n \cdot b^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

32. a) As sequências não são progressões aritméticas, pois nelas a diferença entre dois termos consecutivos não é constante.

b) Sequência $(2, 6, 12, 20, 30, \ldots)$: $a_1 = 2 = 1 \cdot 2$; $a_2 = 6 = 2 \cdot 3$; $a_3 = 12 = 3 \cdot 4$; $\cdots$, $a_n = n(n+1)$.

Sequência $(1, 4, 9, 16, 25, \ldots)$: $b_1 = 1 = 1^2$; $b_2 = 4 = 2^2$; $b_3 = 9 = 3^2$; $\cdots$, $b_n = n^2$

c) Sequência $(2, 6, 12, 20, 30, \ldots)$: $a_{20} = 20(20+1) = 420$.

Sequência $(1, 4, 9, 16, 25, \ldots)$: $b_{20} = 20^2 = 400$.

Portanto, na primeira sequência, o 20º termo, 420, representa a soma dos 20 primeiros números pares. E, na segunda sequência, o 20º termo, 400, representa a soma dos 20 primeiros números ímpares.

33. $$\begin{cases} \dfrac{18 \cdot (a_1 + a_{18})}{2} = 540 \\ \dfrac{30 \cdot (a_1 + a_{30})}{2} = 540 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_{18} = 60 \\ a_1 + a_{30} = 36 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + 17r = 60 \\ 2a_1 + 29r = 36 \end{cases} \Rightarrow a_1 = 47 \text{ e } r = -2$$

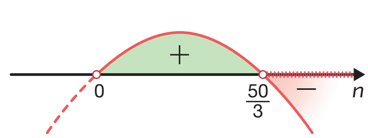
Assim: $a_{50} = 47 + 49 \cdot (-2) = -51$; $S_{50} = \dfrac{50 \cdot (47 - 51)}{2} = -100$.

Portanto, a soma dos 50 primeiros termos dessa PA é -100.

34. $a_n = 47 + (n-1) \cdot \underbrace{(41 - 47)}_{r} = 53 - 6n$

$$S_n = \frac{n[47 + (53 - 6n)]}{2} = \frac{100n - 6n^2}{2} = -3n^2 + 50n$$

Assim: $S_n < 0 \Rightarrow -3n^2 + 50n < 0$.



RONALDO INÁCIO/ ARQUIVO DA EDITORA

Como n é inteiro, o menor valor de n para que a soma seja negativa é 17.

35. a) $q = \dfrac{10}{5} = 2$. A PG é crescente, pois $q > 1$ e $a_1 > 0$.

b) $q = \dfrac{-\sqrt{3}}{-\sqrt{3}} = 1$. A PG é constante, pois $q = 1$.

c) $q = \dfrac{2}{3}$. A PG é decrescente, pois $0 < q < 1$ e $a_1 > 0$.

d) $q = \dfrac{-18}{27} = -\dfrac{2}{3}$. A PG é alternante, pois $q < 0$.

e) $q = \dfrac{-6}{-12} = \dfrac{1}{2}$. A PG é crescente, pois $0 < q < 1$ e $a_1 < 0$.

f) $q = \dfrac{2}{-\sqrt{2}} = \dfrac{2}{-\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$. A PG é alternante, pois $q < 0$.

36. a) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{5(-1)^{n+1}}{5(-1)^n} = (-1)^{n+1-n} = -1$

Portanto, a sequência é uma PG e $q = -1$.

b) • $a_1 = -3$ • $a_2 = -6$ • $a_3 = -9$

A sequência não é uma PG, pois $\dfrac{a_2}{a_1} = 2$ e $\dfrac{a_3}{a_2} = \dfrac{3}{2}$.

c) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{4^{n+1}}{4^n} = 4^{n+1-n} = 4$

Logo, a sequência é uma PG e $q = 4$.

37.
- $\left(r, \dfrac{r}{2}, \dfrac{r}{4}, \dfrac{r}{8}, \dfrac{r}{16}\right)$. Nessa sequência, a partir do segundo, cada termo é obtido multiplicando o anterior por $\dfrac{1}{2}$. Portanto, essa sequência é uma PG de razão $\dfrac{1}{2}$.
- $\left(2\pi r, \pi r, \dfrac{\pi r}{2}, \dfrac{\pi r}{4}, \dfrac{\pi r}{8}\right)$. Nessa sequência, a partir do segundo, cada termo é obtido multiplicando o anterior por $\dfrac{1}{2}$. Portanto, essa sequência é uma PG de razão $\dfrac{1}{2}$.
- $\left(\pi r^2, \dfrac{\pi r^2}{4}, \dfrac{\pi r^2}{16}, \dfrac{\pi r^2}{64}, \dfrac{\pi r^2}{256}\right)$. Nessa sequência, a partir do segundo, cada termo é obtido multiplicando o anterior por $\dfrac{1}{4}$. Portanto, essa sequência é uma PG de razão $\dfrac{1}{4}$.

39. $(x-1)^2 = (x-3)(x+5) \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = x^2 + 2x - 15 \Rightarrow x = 4$

Assim:

- $a_1 = x - 3 = 4 - 3 = 1$
- $a_2 = x - 1 = 4 - 1 = 3$
- $q = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{3}{1} = 3$

Portanto, os sete primeiros termos dessa progressão são 1, 3, 9, 27, 81, 243 e 729.

40. $(14 + b)^2 = (8 - 5b)(18 + 5b) \Rightarrow$

$\Rightarrow b^2 + 3b + 2 = 0 \Rightarrow b_1 = -1$ ou $b_1 = -2$

- Se $b = -1$, a PG é constante, pois:

$$q = \frac{14 + b}{8 - 5b} = \frac{14 + (-1)}{8 - 5 \cdot (-1)} = 1$$

- Se $b = -2$, a PG é decrescente, pois:

$$a_1 = 8 - 5b = 8 - 5 \cdot (-2) = 18 > 0$$
$$q = \frac{14 + b}{8 - 5b} = \frac{14 + (-2)}{8 - 5 \cdot (-2)} = \frac{2}{3} \Rightarrow 0 < q < 1$$

41. $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = -216 \Rightarrow \dfrac{a_2}{q} \cdot a_2 \cdot a_2 \cdot q = -216 \Rightarrow a_2 = -6$

$a_1 + a_2 + a_3 = 14 \Rightarrow \dfrac{a_2}{q} + a_2 + a_2 \cdot q = 14 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{-6}{q} + (-6) + (-6) \cdot q = 14 \Rightarrow 3q^2 + 10q + 3 = 0$

Logo, $q_1 = -3$ ou $q_2 = -\dfrac{1}{3}$. Portanto, para $q = -3$, a PG é $(2, -6, 18)$, e para $q = -\dfrac{1}{3}$, a PG é $(18, -6, 2)$.

42. a) Considerando $a_1 = 213\,317\,639$ e $q = 1{,}0073$, temos:

$$a_2 = a_1 \cdot q = 213\,317\,639 \cdot 1{,}0073 \simeq 214\,874\,858$$

Portanto, a quantidade de habitantes no Brasil em 2022 era, aproximadamente, 214 874 858.

b) De acordo com o item anterior, temos $a_2 \simeq 214\,874\,858$.

Assim:

- $a_3 = a_2 \cdot q = 214\,874\,858 \cdot 1{,}0073 \simeq 216\,443\,445$
- $a_4 = a_2 \cdot q^2 = 214\,874\,858 \cdot 1{,}0073^2 \simeq 218\,023\,482$
- $a_5 = a_2 \cdot q^3 = 214\,874\,858 \cdot 1{,}0073^3 = 219\,615\,053$
- $a_6 = a_2 \cdot q^4 = 214\,874\,858 \cdot 1{,}0073^4 \simeq 221\,218\,243$

Portanto, a população brasileira ultrapassará os 220 milhões de habitantes no ano correspondente ao termo 6, ou seja, em 2026.

43. a) $q = \frac{8}{2} = 4$; $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 2 \cdot 4^{n-1}$; $a_6 = 2 \cdot 4^{6-1} = 2\,048$.

b) $q = \frac{-24}{-48} = \frac{1}{2}$; $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = -48 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$;

$a_6 = -48 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{6-1} = -\frac{3}{2}$.

c) $q = \frac{14}{-7} = -2$; $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = -7 \cdot (-2)^{n-1}$;

$a_6 = -7 \cdot (-2)^{6-1} = 224$.

d) $q = \frac{\frac{8}{5}}{\frac{64}{25}} = \frac{5}{8}$; $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = \frac{64}{25} \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}$;

$a_6 = \frac{64}{25} \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^{6-1} = \frac{125}{512}$.

44. $q = \frac{2\,430}{729} = \frac{10}{3}$

$a_1 \cdot q^{n-1} = 1\,000\,000 \Rightarrow 729 \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^{n-1} = 10^6 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{10^{n-1}}{3^{n-7}} = 10^6 \Rightarrow \left(\frac{10}{3}\right)^{n-7} = 1 \Rightarrow n = 7$

Portanto, $a_7 = 1\,000\,000$.

45. $q = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{a_5}{a_7} = \frac{a_5}{a_5 \cdot q^2} = \frac{1}{q^2} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 2$.

46. $a_5 = a_1 \cdot q^4 \Rightarrow 648 = a_1 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4 \Rightarrow a_1 = 128$

$2\,187 = 128 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow \frac{2\,187}{128} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^7 = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow n = 8$

Portanto, essa PG tem 8 termos.

47. $a_2{}^2 = a_1 \cdot a_3 \Rightarrow a_2{}^2 = 32 \cdot 72 \Rightarrow a_2 = 48$; $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{48}{32} = \frac{3}{2} = 1{,}5$.

a) $\left(32, 48, 72, \underbrace{108}_{72 \cdot 1{,}5}, \underbrace{162}_{108 \cdot 1{,}5}, \underbrace{243}_{162 \cdot 1{,}5}\right)$

b) Representa a quantidade de medicamento ingerida por Júlio na quarta semana de tratamento.

c) $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_n = 32 \cdot (1{,}5)^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$ e $n \leq 6$.

48. a) $v_2 = v_1 - \frac{x}{100} \cdot v_1 = \frac{100 - x}{100} \cdot v_1$

$v_3 = v_2 - \frac{x}{100} \cdot v_2 = \frac{100 - x}{100} \cdot v_2$

Como cada termo é obtido pela multiplicação do seu antecedente por uma mesma constante, a sequência é uma PG.

b) $q = \frac{v_7}{v_6} = \frac{400}{800} = \frac{1}{2}$ $\qquad v_{10} = v_7 \cdot q^3 = 400 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 50$

Portanto, $v_{10} = 50\ mm^3$.

c) $v_1 = v_6 \cdot q^{-5} = 800 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = 800 \cdot 2^5 = 25\,600$

Portanto, o volume inicial dessa substância era $25\,600\ mm^3$.

d) $v_n = 25\,600 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

49. a) $b^2 = 45 \cdot 20 \Rightarrow b^2 = 900 \Rightarrow b = \pm 30$

Portanto, $b = 30$ ou $b = -30$.

b) $(b + 17)^2 = (b + 3) \cdot (b + 59) \Rightarrow$

$\Rightarrow b^2 + 34b + 289 = b^2 + 62b + 177 \Rightarrow 28b = 112 \Rightarrow b = 4$

Portanto, $b = 4$.

c) $(b - 3)^2 = (b + 1) \cdot (b - 15) \Rightarrow$

$\Rightarrow b^2 - 6b + 9 = b^2 - 14b - 15 \Rightarrow 8b = -24 \Rightarrow b = -3$

Portanto, $b = -3$.

50. Seja x o número que devemos adicionar. Assim:

$(18 + x)^2 = (3 + x) \cdot (48 + x) \Rightarrow$

$\Rightarrow 324 + 36x + x^2 = 144 + 51x + x^2 \Rightarrow 15x = 180 \Rightarrow x = 12$

51. a) Seja $(a_1, a_2, \ldots)$ a sequência que representa as áreas em verde e $(b_1, b_2, \ldots)$ a sequência que representa as áreas em amarelo. Assim:

- $a_1 = x^2$
- $a_2 = \left(\frac{3}{4}\right)x^2 = \frac{3x^2}{4}$
- $a_3 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 x^2 = \frac{9x^2}{16}$
- $a_4 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 x^2 = \frac{27x^2}{64}$
- $a_5 = \left(\frac{3}{4}\right)^4 x^2 = \frac{81x^2}{256}$

- $b_1 = 0$
- $b_2 = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)x^2 = \frac{x^2}{4}$
- $b_3 = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 x^2 = \frac{7x^2}{16}$
- $b_4 = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^3 x^2 = \frac{37x^2}{64}$
- $b_5 = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^4 x^2 = \frac{175x^2}{256}$

b) Aquela que representa os valores das áreas em verde, pois, a partir do 2º termo, o quociente entre um termo e seu antecessor é constante. No caso da outra sequência, esse quociente não é constante.

c) $a_n = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \cdot x^2 \Rightarrow a_{10} = \left(\frac{3}{4}\right)^9 \cdot x^2$

$b_n = \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right] \cdot x^2 \Rightarrow a_{10} = \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^9\right] \cdot x^2$

52. A alternativa **b** é a correta, pois:

$a_n = 100 + (n - 1) \cdot 25 = 25(3 + n)$

$b_n = a_1 q^{n-1} = 2^{n-1}$

a) Incorreto, pois $\frac{a_3}{b_3} = \frac{25 \cdot 6}{2^{3-1}} = \frac{150}{4} \neq 250$.

b) Correto, pois a_n é uma PA crescente ($r > 0$); b_n é uma PG crescente ($a_1 > 0$ e $q > 1$), com $325 < 512$. Portanto, como b_n cresce mais rápido do que a_n, temos $a_n < b_n$ para $n \geq 10$.

c) Incorreto, pois $a_{10} = 325 < 512 = b_{10}$.

53. a) 2ª aplicação, pois, ao final de cada período de 1 mês, o montante obtido será igual ao montante do mês anterior multiplicado por 1,0083.

b) • 1ª aplicação: $(10\,260, 10\,520, 10\,780, \ldots)$

A sequência é uma PA de razão $r = 260$. Logo:

$\overset{2\ anos}{\widehat{a_8}} = a_1 + 7r = 10\,260 + 7 \cdot 260 = 12\,080$

Assim, ao final de dois anos, a 1ª aplicação renderá R$ 12 080,00.

• 2ª aplicação: $\left(10\,000 \cdot (1{,}0083), 10\,000 \cdot (1{,}0083)^2, \ldots\right)$

A sequência é uma PG com razão $q = 1{,}0083$. Logo:

$a_{24} = a_1 \cdot q^{23} = 10\,083 \cdot (1{,}0083)^{23} \simeq 12\,194{,}23$

Assim, ao final de dois anos, a 2ª aplicação renderá R$ 12 194,23.

Portanto, a 2ª aplicação é mais rentável ao final de dois anos de investimento.

c) 1ª aplicação: $M = 10\,260 + (n - 1) \cdot 260$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, em que M e n indicam, respectivamente, o montante, em reais, e o tempo, em trimestre.

2ª aplicação: $M = 10\,083 \cdot (1{,}0083)^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, em que M e n indicam, respectivamente, o montante, em reais, e o tempo, em meses.

54. a) Folhas colocadas: PG $(6, 18, 54, \ldots)$.

$$q = \frac{18}{6} = 3$$

$$a_{10} = a_1 \cdot q^{10-1} = 6 \cdot 3^9 = 118\,098$$

Folhas retiradas: PA $(5, 10, 15, \ldots)$.

$$r = 10 - 5 = 5$$

$$b_{10} = b_1 + (10 - 1)r = 5 + (10 - 1) \cdot 5 = 50$$

Portanto, o total de folhas na 10ª pilha é:

$$a_{10} - b_{10} = 118\,098 - 50 = 118\,048$$

b) $118\,048 \cdot 0{,}01 = 1\,180{,}48$

Portanto, a 10ª pilha tem 1 180,48 cm de altura.

55. a) • 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 e 20.
• 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 e 1024.
b) Verifica-se crescimento maior na PG.
d) O gráfico **II**, pois nesse gráfico o crescimento da população está representado por um crescimento exponencial.

56. a) • 2ª geração: $\frac{200}{2} \cdot 0{,}3 = 30$. Portanto, 30 fêmeas infectadas; 3ª geração: $\frac{30 \cdot 200}{2} \cdot 0{,}3 = 900$. Portanto, 900 fêmeas infectadas.
• $\left(1;\ 30;\ 900;\ \frac{900 \cdot 200}{2} \cdot 0{,}3;\ \frac{27\,000 \cdot 200}{2} \cdot 0{,}3\right) =$ $= (1,\ 30,\ 900,\ 27\,000,\ 810\,000)$. Uma PG, pois, a partir do 2º termo, o quociente entre um termo e seu antecessor é constante.
• Indicando por I_n a quantidade de fêmeas infectadas na n-ésima geração, temos: $I_1 = 1 = 30^0 = 30^{1-1}$; $I_2 = 30 = 30^1 = 30^{2-1}$; $I_3 = 900 = 30^2 = 30^{3-1}$; $I_4 = 27\,000 = 30^3 = 30^{4-1}$, ..., $I_n = 30^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 1$.
Sendo assim: $I_8 = 30^{8-1} = 30^7 = 2{,}187 \cdot 10^{10}$. Portanto, são $2{,}178 \cdot 10^{10}$ fêmeas infectadas na 8ª geração.
d) Sugestão de resposta: Armazene o lixo em sacos plásticos e descarte-o em lixeiras tampadas adequadamente. Caso haja plantas em sua residência, encha de areia os pratinhos que ficam embaixo dos vasos; não deixe acumular água nas calhas, limpe-as com frequência; tampe bem a caixa-d'água; deixe os vasilhames armazenados de cabeça para baixo, em local protegido da chuva.

57. $a_6 = a_1 \cdot q^5 \Rightarrow 96 = 3 \cdot q^5 \Rightarrow q = 2$
Sendo assim:
• $a_2 = a_1 \cdot q = 3 \cdot 2 = 6$
• $a_3 = a_2 \cdot q = 6 \cdot 2 = 12$
• $a_4 = a_3 \cdot q = 12 \cdot 2 = 24$
• $a_5 = a_4 \cdot q = 24 \cdot 2 = 48$
Portanto, temos: $(3,\ 6,\ 12,\ 24,\ 48,\ 96)$.

58. $a_5 = a_1 \cdot q^4 \Rightarrow 8 = 2 \cdot q^4 \Rightarrow q = \sqrt{2}$ ou $q = -\sqrt{2}$
Como a PG é crescente, $q = \sqrt{2}$.

59. a) Seja C o capital aplicado e i a taxa de juro. Sendo assim:
$$\frac{M_n}{M_{n-1}} = \frac{M_{n-1} + M_{n-1} \cdot i}{M_{n-1}} = \frac{M_{n-1}(1+i)}{M_{n-1}} = (1+i)$$
Logo, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{M_n}{M_{n-1}} = (1+i)$.
Portanto, $(M_1,\ M_2,\ \ldots,\ M_n, \ldots)$ é uma PG.
b) A veracidade da igualdade apresentada está mostrada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

60. Construindo as primeiras 4 figuras da sequência de imagens, temos:

SERGIO L. FILHO/ ARQUIVO DA EDITORA

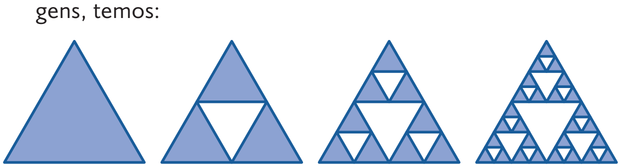


figura 1 figura 2 figura 3 figura 4

Portanto, a alternativa **C** é a correta.

61. a) $a_7 = 1 \cdot 2^{7-1} = 2^6 = 64$; $a_8 = 1 \cdot 2^{8-1} = 2^7 = 128$;
$a_7 \cdot a_8 = 64 \cdot 128 = 8\,192$
b) A veracidade da afirmação está mostrada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

62. a) • $f(-4) = 3 \cdot (-4) + 2 = -10$
• $f(-1) = 3 \cdot (-1) + 2 = -1$
• $f(2) = 3 \cdot 2 + 2 = 8$
• $f(5) = 3 \cdot 5 + 2 = 17$
• $f(8) = 3 \cdot 8 + 2 = 26$
Portanto, $(-10,\ -1,\ 8,\ 17,\ 26)$ é uma PA de razão 9.
b) • $g(-4) = 3 \cdot 2^{-4} = \frac{3}{16}$
• $g(-1) = 3 \cdot 2^{-1} = \frac{3}{2}$
• $g(2) = 3 \cdot 2^2 = 12$
• $g(5) = 3\ \ 2^5 = 96$
• $g(8) = 3 \cdot 2^8 = 768$
Portanto, $\left(\frac{3}{16},\ \frac{3}{2},\ 12,\ 96,\ 768\right)$ é uma PG de razão 8.

63. a) $f(1) = 2 \cdot f(0) \Rightarrow x \cdot a^1 = 2 \cdot x \cdot a^0 \Rightarrow a = 2$
b) $f(0) = x \cdot 2^0 = x$
$f(1) = x \cdot 2^1 = 2x$
$f(2) = x \cdot 2^2 = 4x$
$f(3) = x \cdot 2^3 = 8x$
Portanto, $(x,\ 2x, 4x, 8x)$.
c) $f(9) = x \cdot 2^9 = 512x$

64. $q = a^r = 9^3 = 729$.

65. $(f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4))$ é uma PG de razão $q = \frac{200}{800} = \frac{1}{4}$ e (x_1, x_2, x_3, x_4) é uma PA de razão $r = 2$. Então: $q = a^r \Rightarrow \frac{1}{4} = a^2$.
Logo, $a = -\frac{1}{2}$ ou $a = \frac{1}{2}$. Como f é decrescente, $a = \frac{1}{2}$.

66. Considerando $a_1 = 180\,000$ e $r = 1{,}12$, temos:
$$a_6 = 180\,000 \cdot 1{,}12^5 \Rightarrow a_6 \simeq 317\,221{,}50$$
Portanto, o valor aproximado do terreno de Daniel ao final de 5 anos é R$ 317 221,50.

67. a) $q = \frac{12}{3} = 4$; $S_8 = \frac{3 \cdot (1 - 4^8)}{1 - 4} = 65\,535$.
b) $q = \frac{8}{-4} = -2$; $S_8 = \frac{(-4) \cdot \left[1 - (-2)^8\right]}{1 - (-2)} = 340$.
c) $q = \frac{500}{5\,000} = \frac{1}{10}$; $S_8 = \frac{5\,000 \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{10}\right)^8\right]}{1 - \frac{1}{10}} = 5\,555{,}5555$.

68. a) A sequência $(1,\ 5,\ 25,\ 125,\ \ldots)$, que indica a quantidade de pontos em cada figura da sequência desenhada por Débora, é uma PG de razão $q = 5$. Assim:
$$a_5 = 1 \cdot 5^{5-1} = 5^4 = 625.$$
Portanto, a 5ª figura da sequência tem 625 pontos.
b) $S_5 = \frac{1 \cdot (1 - 5^5)}{1 - 5} = 781$.
Portanto, ao concluir a 5ª figura da sequência, Débora terá desenhado 781 pontos.

69. $q = \frac{-6}{3} = -2$
$$129 = \frac{3 \cdot \left[1 - (-2)^n\right]}{1 - (-2)} \Rightarrow -128 = (-2)^n \Rightarrow n = 7$$

70. $q = \frac{8x}{2x} = 4$
$$a_1 \cdot q^{n-1} = 512x \Rightarrow 2x \cdot 4^{n-1} = 512x \Rightarrow 2^{2n-1} = 2^9 \Rightarrow n = 5$$
$$\frac{2x \cdot (1 - 4^5)}{1 - 4} = -1\,364 \Rightarrow 2x \cdot (-1\,023) = 4\,092 \Rightarrow x = -2$$

71. $756 = \frac{a_1(1 - 2^6)}{1 - 2} \Rightarrow a_1 = 12$

72. a) As áreas em amarelo das figuras formam a PG $\left(u^2,\ \frac{12}{16}u^2,\ \left(\frac{12}{16}\right)^2 u^2,\ \ldots\right)$, tal que: $q = \frac{\frac{12}{16}u^2}{u^2} = \frac{3}{4}$. Sendo assim:
$$S_5 = \frac{u^2\left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^5\right]}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{781}{256}u^2$$

b) A soma das áreas em azul é dada pela subtração da área de cinco quadrados de lado u pela soma das áreas em amarelo, ou seja:

$$5u^2 - S_5 = 5u^2 - \frac{781}{256}u^2 = \frac{499}{256}u^2$$

73. a) $\left(\underbrace{7{,}2}_{18 \cdot 0{,}4};\ \underbrace{2{,}88}_{7{,}2 \cdot 0{,}4};\ldots\right)$. A razão dessa PG é 0,4. Sendo assim:

$$a_3 = a_1 \cdot q^2 = 7{,}2 \cdot 0{,}4^{3-1} = 1{,}152$$

Portanto, após o 3º choque, a altura máxima atingida pela bola é, aproximadamente, 1,152 m.

b) $18 + 2a_1 + 2a_2 = 18 + 2 \cdot 7{,}2 + 2 \cdot 2{,}88 = 38{,}16$

Portanto, a distância total mínima percorrida pela bola quando ela tiver se chocado com o solo pela 3ª vez será 38,16 m.

$$18 + 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 = 38{,}16 + 2a_3 =$$
$$= 38{,}16 + 2 \cdot 1{,}152 = 40{,}464$$

Portanto, a distância total mínima percorrida pela bola quando ela tiver se chocado com o solo pela 4ª vez será 40,464 m.

74. Sequência das quantidades de baratas contaminadas:

$$(1, 3, 3 \cdot 3, 9 \cdot 3, \ldots) = (3^0, 3^1, 3^2, 3^3, \ldots)$$

a) $q = \frac{3}{1} = 3$; $S_5 = \frac{1 \cdot (1 - 3^5)}{1 - 3} = 121.$

Logo, serão mortas, no mínimo, 121 baratas em 5 min.

b) $300 = \frac{1 \cdot (1 - 3^n)}{1 - 3} \Rightarrow 601 = 3^n \Rightarrow n \simeq 5{,}8$

Portanto, são necessários, no máximo, 6 min para que morram 300 baratas.

75. a) • $a_1 = 1$ • $q = 2$, pois $\frac{2}{1} = 2$ • $n = 10$

b) A validação da igualdade por meio de cálculos está mostrada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

76. $(100, 200, 400, \ldots)$ é uma PG de razão 2.

a) $S_6 = \frac{100 \cdot (1 - 2^6)}{1 - 2} = 6\,300.$

Portanto, a premiação será R$ 6 300,00.

b) $51\,200 = 100 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow 512 = 2^{n-1} \Rightarrow 2^9 = 2^{n-1} \Rightarrow n = 10$

Podem ser feitas, no máximo, 10 perguntas a um mesmo participante.

c) $S_{10} = \frac{100 \cdot (1 - 2^{10})}{1 - 2} = 102\,300.$

Portanto, a premiação será R$ 102 300,00.

Síntese do capítulo (página 215)

3. Sugestão de resposta: Uma sequência de números reais é uma função $a : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ que associa a cada número natural não nulo n um número real a_n.

4. a) A PG é crescente se $q > 1$ e $a_1 > 0$ ou $0 < q < 1$ e $a_1 < 0$. Logo, a afirmação é falsa.

b) A PA é crescente se $q > 0$. Logo, a afirmação é verdadeira.

c) A PA é constante se $q = 0$. Logo, a afirmação é falsa.

d) A PG é alternante se $q < 0$. Logo, a afirmação é verdadeira.

Portanto, as alternativas **b** e **d** são as corretas.

5. a) A razão de uma PG. b) O 1º termo de uma PG.

6. O algoritmo referente a essa questão está apresentado na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

7. a) Sugestão de resposta: Uma progressão aritmética é uma função de domínio $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n, \ldots\}$, definida por $a(n) = a_1 + (n - 1)r$, em que a_1 é o 1º termo da progressão, n é a ordem do termo e r é a razão.

b) Sugestão de resposta: Uma progressão geométrica é uma função de domínio $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n, \ldots\}$, definida por $a(n) = a_1 \cdot q^{n-1}$, em que a_1 é o 1º termo da progressão, n é a ordem do termo e q é a razão.

8. A veracidade da afirmação está mostrada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

9. $a_{25} = a_1 \cdot q^{25-1} \Rightarrow a_{25} = 2 \cdot 2^{24} = 33\,554\,432$

Como todos os termos da PG são positivos e $a_{25} = 33\,554\,432$, a soma dos 25 primeiros termos é maior do que 33 554 432.

CAPÍTULO 7 MATEMÁTICA FINANCEIRA

Abertura do capítulo

3. Antes da lei:

$\frac{4{,}5}{j} = \frac{1}{1000} \Rightarrow j = 4\,500$

$4\,500 + 1000 = 5\,500$

Depois da lei:

$\frac{1}{j} = \frac{1}{1000} \Rightarrow j = 1000$

$1000 + 1000 = 2\,000$

Antes da lei, o valor pago após um ano seria R$ 5 500,00. Depois da lei, deve ser R$ 2 000,00.

Questões

A. Não se aproximou do índice oficial, pois o índice pessoal de preços dessa família ficou em torno de 7,8%, enquanto o índice oficial foi 4,62%, representando uma diferença de, aproximadamente, 3,18%.

C. A resposta depende do ano vigente. Em 2022, o IDH do Brasil era 0,760. Nesse ano, o país era classificado com alto desenvolvimento humano.

D. $M = 1500 \cdot (1 + 0{,}0038)^{12} \simeq 1569{,}85$

João obteve um montante final de R$ 1 569,85.

F. Em 7 meses:

- Investimento **A**: $M_A = 23\,000 \cdot (1 + 0{,}07 \cdot 7) = 34\,270.$
- Investimento **B**: $M_B = 23\,000 \cdot (1 + 0{,}05)^7 = 32\,363{,}31.$

Nesse caso, o investimento **A** seria mais vantajoso.

Em 2 anos:

- Investimento **A**: $M_A = 23\,000 \cdot (1 + 0{,}07 \cdot 24) = 61\,640$
- Investimento **B**: $M_B = 23\,000 \cdot (1 + 0{,}05)^{24} = 74\,177{,}30$

Nesse caso, o investimento **B** seria mais vantajoso.

H. Considerando o período 0, temos:

- Opção **1**: R$ 70,00
- Opção **2**: $\frac{26}{(1 + 0{,}018)^1} + \frac{26}{(1 + 0{,}018)^2} + \frac{26}{(1 + 0{,}018)^3} =$

$$= \frac{26}{1{,}018} + \frac{26}{(1{,}018)^2} + \frac{26}{(1{,}018)^3} \simeq 25{,}54 + 25{,}09 + 24{,}65 = 75{,}28.$$

Portanto, Marta deve escolher a opção **1**, ou seja, o pagamento à vista de R$ 70,00.

Exercícios e problemas

1. a) $\frac{3}{10} = 0{,}3 = 30\%$

b) $\frac{17}{25} = 0{,}68 = 68\%$

c) $\frac{7}{50} = 0{,}14 = 14\%$

d) $\frac{24}{75} = 0{,}32 = 32\%$

e) $\frac{1}{8} = 0{,}125 = 12{,}5\%$

2. a) $7\% = \frac{7}{100} = 0{,}07$

b) $48\% = \frac{48}{100} = 0{,}48$

c) $90\% = \frac{90}{100} = 0{,}9$

d) $4{,}5\% = \frac{4{,}5}{100} = 0{,}045$

e) $61{,}38\% = \frac{61{,}38}{100} = 0{,}6138$

3. $\frac{3}{60} = 0{,}05 = 5\%$. Logo, a taxa de peças defeituosas é 5%.

4. a) Calculando 11,32% de 925, temos: $\frac{11,32}{100} \cdot 925 = 104,71$.

Assim, temos: $925 + 104,71 = 1029,71$.

Portanto, o valor do aluguel após o reajuste será R$ 1029,71.

5. $15,60 + 0,4 \cdot 15,60 = 21,84$

Para duas embalagens, teremos: $2 \cdot 21,84 = 43,68$. Portanto, a pessoa que comprar, nessa promoção, duas embalagens vai pagar R$ 43,68.

6. a) 45% de 1200, ou seja:

$$\frac{45}{100} \cdot 1200 = 540$$

Portanto, 540 dos produtos são calçados.

b) 60% de 540, ou seja:

$$\frac{60}{100} \cdot 540 = 324$$

Portanto, 324 dos calçados têm salto alto.

7. $\frac{332\,196\,699\,532,14}{332\,393\,398\,554,14} \simeq 0,9994$. Logo, houve uma redução no valor percentual. Para determinar o valor dessa porcentagem, fazemos: $1 - 0,9994 = 0,0006$. Portanto, houve uma redução entre 0% e 0,1%. Logo, a alternativa **c** é a correta.

8. Arrecadação por unidade:

$$\frac{5\,113,60}{47} = 108,8.$$

Com lucro de 60%, temos:

$$\frac{108,8}{1,6} = 68.$$

O preço de custo da unidade desse produto foi R$ 68,00.

9. Antes da contratação: $0,2 \cdot 240 = 48$

Logo, são 48 colaboradores com Ensino Superior.

Depois da contratação: $48 + 80 = 128$

Logo, são 128 colaboradores com Ensino Superior.

Total de colaboradores depois da contratação: $240 + 80 = 320$.

Com isso, calculamos $\frac{128}{320} = 0,4$, ou seja, 40%. Portanto, 40% do total de colaboradores dessa empresa têm Ensino Superior.

10. Indicando por x o salário de Bruno, logo o salário de Marcos é $1,08 \cdot x$.

$$(1,08 \cdot 1,25) \cdot x = 1,35 \cdot x$$

O salário de Marcos será 35% maior do que o de Bruno. Portanto, a alternativa **e** é a correta.

11. Loja **A**: $0,94 \cdot 2\,290 = 2\,152,60$.

Loja **B**: $0,85 \cdot 2\,350 = 1997,50$.

É mais vantajoso comprar à vista na loja **B**. Marisa vai pagar R$ 1997,50.

12. Indicando por P o preço do automóvel, temos:

$$\frac{2\,520}{P} = 0,12 \Rightarrow P = 21\,000$$

Esse automóvel foi vendido por R$ 21000,00.

13. a) $\frac{8+7+9+6}{12+13+15+10} = \frac{30}{50} = 0,6 = 60\%$

Ele acertou 60% das questões da prova.

b) • Conhecimentos gerais: $\frac{8}{12} = 0,\overline{6}$, isto é, 66,6%.

• Informática: $\frac{7}{13} \simeq 0,538$, isto é, 53,8%.

• Matemática: $\frac{9}{15} = 0,6$, isto é, 60%.

• Português: $\frac{6}{10} = 0,6$, isto é, 60%.

O melhor desempenho foi em Conhecimentos gerais e o pior, em Informática.

c) Informática. Sugestão de resposta: Nesse tema, ele obteve o pior desempenho.

d) Sugestão de resposta: Focar os estudos nos conteúdos que tiver menos conhecimento.

14. Seja P_M e P_A, respectivamente, os pontos de Mia e de André ao final da segunda fase, temos:

• $P_A = P_M + 15$ (I)

• $P_M + 0,05P_M = 25 + P_A$ (II)

Substituindo I em II, temos:

$$P_M + 0,05P_M = 25 + P_M + 15 \Rightarrow P_M = 800.$$

Ao final da segunda fase, Mia estava com 800 pontos.

$$P_A = P_M + 15 = 800 + 15 = 815$$

Portanto, a pontuação de André ao final da segunda fase era 815 pontos.

15. a) $100\% + 25\% = 125\%$

Sendo P o preço após o reajuste, temos:

$\frac{P}{125} = \frac{12\,000}{100} \Rightarrow P = 15\,000$. Portanto, o preço após o reajuste é R$ 15000,00.

b) $15\,000 - 12\,000 = 3\,000$. Assim, $\frac{3\,000}{15\,000} = 0,2 = 20\%$.

Portanto, foi aplicada taxa de 20%.

c) Não, pois R$ 3000,00 corresponde a uma taxa de 25% referente a R$ 12000,00 e a uma taxa de 20% referente a R$ 15000,00.

16. Candidato da situação:

$$\frac{32}{100} \cdot 10\,300 = 0,32 \cdot 10\,300 = 3\,296$$

Candidato da oposição:

$$\frac{41}{100} \cdot 10\,300 = 0,41 \cdot 10\,300 = 4\,223$$

$$4\,223 - 3\,296 = 927$$

Houve 927 votos de diferença.

17. Sendo m e n esses dois números, temos:

$$\begin{cases} m - n = 40 \\ 0,3\,m + 0,6\,n = 75 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m - n = 40 \\ 3m + 6n = 750 \end{cases}$$

$$m = 110 \text{ e } n = 70$$

Os números naturais são 110 e 70.

18. Denotando por A, B, C e D as áreas das partes em azul, amarelo, verde e vermelho, respectivamente, temos:

a) x^2 é área total do logotipo, ou seja, 100% da área, logo:

$$B = \frac{\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2}}{2} = \frac{1}{8} \cdot x^2 = 0,125 \cdot 1 = 0,125$$

$$C = \frac{x \cdot \frac{x}{2}}{2} = \frac{1}{4} \cdot x^2 = 0,25 \cdot 1 = 0,25$$

A parte amarela representa 12,5% do logotipo e a parte verde, 25%.

b) $A = \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} = \frac{x^2}{4} = \frac{1}{4} = 0,25$

$$D = \frac{x + \frac{x}{2}}{2} \cdot \frac{x}{2} = \frac{3x^2}{8} = 0,375$$

$\frac{D}{A} = \frac{0,375}{0,25} = 1,5$, ou seja, 150% em relação à parte azul do logotipo.

A parte vermelha corresponde a 50% a mais do que a parte azul.

19. Sendo P_1 o preço da mercadoria depois do desconto e P_2 o preço após o reajuste, temos:

$$P_1 = 0,9 \cdot 40 = 36$$

$$P_2 = 1,11 \cdot P_1 = 1,11 \cdot 36 = 39,96$$

Logo, $40{,}00 - 39{,}96 = 0{,}04$, ou seja, o preço da mercadoria diminuiu R\$ 0,04 em relação ao inicial. Portanto, a alternativa **c** é a correta.

20. Denotando por F, P e C, respectivamente, as quantidades de empada de frango, palmito e creme de milho.

$$F = P + 90$$
$$C = 0{,}4F \Rightarrow C = 0{,}4P + 36$$

Desse modo:

$$F + P + C = 582 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (P + 90) + P + (0{,}4P + 36) = 582 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2{,}4P + 126 = 582 \Rightarrow P = 190$$
$$F = P + 90 \Rightarrow F = 190 + 90 = 280$$
$$C = 0{,}4F \Rightarrow C = 0{,}4 \cdot 280 = 112$$

Foram vendidas 280 empadas de frango, 112 empadas de creme de milho e 190 empadas de palmito.

21. Denotando por P a quantidade total de parafusos e por P_A e P_B as quantidades produzidas pelas máquinas **A** e **B**, respectivamente.

máquina **A**:

$$0{,}01 \cdot P_A = 0{,}01 \cdot 0{,}6 \cdot P = 0{,}006 \cdot P$$

máquina **B**:

$$0{,}03 \cdot P_B = 0{,}03 \cdot 0{,}4 \cdot P = 0{,}012 \cdot P$$
$$0{,}006 \cdot P + 0{,}012 \cdot P = 0{,}018 \cdot P$$
$$0{,}018 \cdot 100\% = 1{,}8\%$$

A porcentagem de parafusos defeituosos é 1,8%.

22. Indicando por S_1 o piso salarial sem o aumento e por S_2 o piso com o aumento, temos:

$$\frac{2\,011{,}60}{S_1} = 1{,}07 \Rightarrow S_1 = 1880$$
$$S_2 = 1{,}13 \cdot 1880 = 2\,124{,}40$$

O piso salarial dessa categoria será R\$ 2 124,40.

23. Fumantes com câncer: $0{,}9 \cdot 1500 = 1350$.

Fumantes com enfisema pulmonar: $0{,}8 \cdot 500 = 400$.

$$1350 + 400 = 1750$$

Logo, 1750 pessoas desse grupo são fumantes. Portanto, a alternativa **e** é a correta.

24. Indicando por A o valor em liras de Módena, temos:

$$\frac{100}{A} = \frac{115}{180} \Rightarrow A \simeq 156{,}52$$

Aproximadamente 156,52 liras de Módena equivalem a 150 liras de Corfu. Como as liras de Corfu correspondem a 240, então:

$$\frac{156{,}52}{A} = \frac{150}{240} \Rightarrow A \simeq 250{,}43$$

Desse modo, 250,43 liras de Módena equivalem a 360 liras de Negroponte.

Como as liras de Negroponte correspondem a 666:

$$\frac{250{,}43}{A} = \frac{360}{666} \Rightarrow A \simeq 463{,}30$$

Aproximadamente 463,30 liras de Módena.

25. • Venda: $\frac{5{,}79}{100} \cdot 2{,}31 = 0{,}133749$.

• Gastos com a matéria-prima: $\frac{10}{100} \cdot 1{,}20 = 0{,}12$.

• Custos com produção e armazenagem: $\frac{5{,}79}{100} \cdot 0{,}50 = 0{,}02895$.

Indicando por x o lucro após o reajuste, temos:

$1{,}32 + 0{,}52895 + x = 2{,}443749 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1{,}84895 + x = 2{,}443749 \Rightarrow x \simeq 0{,}59 \Rightarrow \frac{0{,}59}{0{,}61} \simeq 0{,}967$

Calculando a redução desse lucro, obtemos: $1 - 0{,}967 = 0{,}033$.

A porcentagem da redução do lucro por unidade é aproximadamente 3,3%.

26. a) • Opção **A**: $\frac{12}{100} \cdot 260$ milhões $= 31{,}2$ milhões.

• Opção **B**: $\frac{6}{100} \cdot 620$ milhões $= 37{,}2$ milhões.

A opção **B**, ou seja, investir em melhorias na indústria.

27. a) $109{,}33 - 5{,}5 = 101{,}83$

$\frac{39{,}3}{101{,}83} \simeq 0{,}3859$

Aproximadamente 38,59% da população ocupada era informal.

29. $100\% - 12{,}4\% = 87{,}6\%$

Indicando por x a quantidade de pessoas desalentadas, temos:

$$\frac{3{,}7}{x} = \frac{87{,}6}{100} \Rightarrow x \cdot 87{,}6 = 3{,}7 \cdot 100 \Rightarrow x \simeq 4{,}22$$

Aproximadamente 4,22 milhões de pessoas.

30. a) $I_s = \frac{E - 25}{60} \Rightarrow I_s = \frac{78{,}5 - 25}{60} \Rightarrow I_s \simeq 0{,}892$

O índice de saúde para esse país é aproximadamente 0,892.

b) $\text{IDH} = \frac{1}{3} \cdot I_S + \frac{1}{3} \cdot I_E + \frac{1}{3} \cdot I_R = \frac{1}{3} \cdot 0{,}892 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}758 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}723$

$\text{IDH} = 0{,}791$

O IDH de 0,791. Classificação de alto desenvolvimento humano.

31. a) Afirmação falsa. Sugestão de resposta: Entre dois países diferentes, aquele com índice de saúde maior não necessariamente terá o IDH maior.

b) Afirmação falsa. Sugestão de resposta: Se um país tem IDH de 0,765, nada podemos afirmar sobre sua distribuição de renda analisando apenas esse indicador.

33. a) $(1 + 0{,}04) \cdot (1 + 0{,}08) = 1{,}04 \cdot 1{,}08 = 1{,}1232 = 112{,}32\%$

Acréscimo de 12,32%.

b) $(1 - 0{,}13) \cdot (1 - 0{,}06) = 0{,}87 \cdot 0{,}94 = 0{,}8178 = 81{,}78\%$

Desconto de 18,22%.

c) $(1 + 0{,}05) \cdot (1 + 0{,}05) \cdot (1 + 0{,}05) = 1{,}05^3 \simeq 1{,}1576 = 115{,}76\%$

Acréscimo de aproximadamente 15,76%.

d) $(1 - 0{,}03) \cdot (1 - 0{,}03) \cdot (1 + 0{,}07) =$

$= 0{,}97^2 \cdot 1{,}07 \simeq 1{,}0068 = 100{,}68\%$

Acréscimo de aproximadamente 0,68%.

34. Sendo P o preço pago pelo consumidor final, temos:

$P = 1{,}79 \cdot (1 + 0{,}3) \cdot (1 + 0{,}4) \cdot (1 + 0{,}5) =$

$= 1{,}79 \cdot 1{,}3 \cdot 1{,}4 \cdot 1{,}5 \Rightarrow P \simeq 4{,}89$

Aproximadamente R\$ 4,89.

35. Sendo P o valor a ser pago à vista, temos:

$$P = 72 \cdot (1 + 0{,}08) \cdot (1 - 0{,}15) = 72 \cdot 1{,}08 \cdot 0{,}85 = 66{,}1$$

O valor a ser pago pelo preço à vista é R\$ 66,10.

36. $3\,202{,}72 = S_0 \cdot (1 + 0{,}02) \cdot (1 + 0{,}06) \cdot (1 + 0{,}04) \simeq 2\,848{,}26$

$3\,202{,}72 - 2\,848{,}26 = 354{,}46$

O salário de Roberta aumentou R\$ 354,46.

37. a) Indicando por P o preço de venda à vista, temos:

$$P = 60 \cdot (1 + 0{,}25) \cdot (1 - 0{,}12) = 60 \cdot 1{,}25 \cdot 0{,}88 = 66$$

O consumidor terá de desembolsar R\$ 66,00.

b) $\frac{6}{60} = 0{,}1 = 10\%$. Portanto, Alex lucrará 10% com a venda à vista.

38. $65{,}78 = P \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}006 \cdot 1{,}006 \Rightarrow P = \frac{65{,}78}{1{,}0525} = 62{,}5$

O valor da mensalidade seria de R\$ 62,50.

39. Indicando por P_F e P_S o valor da compra utilizando o cartão fidelidade e o valor da compra sem utilizar o cartão fidelidade, respectivamente, temos:

$$P_F = 50 \cdot (1 - 0{,}2) \cdot (1 - 0{,}1) = 50 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 36$$
$$P_S = 50 \cdot (1 - 0{,}2) = 50 \cdot 0{,}8 = 40$$

A economia adicional seria R$ 4,00. Portanto, a alternativa **e** é a correta.

40. Indicando por x, y e z a porcentagem de chuva no mês de janeiro, fevereiro e março, respectivamente, temos:

$y = 1{,}18x$

$z = y - 0{,}15y = 1{,}18x - 0{,}15 \cdot (1{,}18x) = (1{,}18 - 0{,}177) \cdot x = 1{,}003x$

Portanto, em março, choveu 0,3% a mais do que em janeiro.

41. Indicamos por A o preço de um produto sem o desconto e por B o preço do mesmo produto com desconto.

• Descontos sucessivos:

$$B = A \cdot (1 - 0{,}35) \cdot (1 - 0{,}35) = A \cdot 0{,}65^2 = A \cdot \underbrace{0{,}4225}_{42{,}25\%}$$

• Único desconto: $B = A \cdot (1 - 0{,}6) = A \cdot \underbrace{0{,}4}_{40\%}$

Portanto, um único desconto de 60% é mais vantajoso.

42. Supondo que o aumento seja x%, temos:

$$1{,}5\left(\frac{b \cdot h}{2}\right) = \frac{1{,}2b \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right)h}{2} \Rightarrow 150h = 120h + 120xh \Rightarrow x = 25$$

Portanto, devemos aumentar a altura em 25%.

43. **a)** 2 primeiros reajustes: $(1 + 0{,}05) \cdot (1 + 0{,}04) = 1{,}092$

3 primeiros reajustes: $(1 + 0{,}05) \cdot (1 + 0{,}04) \cdot (1 + 0{,}05) =$
$= 1{,}1466$

Nos 2 primeiros reajustes, a taxa será 9,2%. Nos 3 primeiros reajustes, a taxa será 14,66%.

b) Indicando por v o valor da tarifa antes dos reajustes, temos:

$$v \cdot (1 + 0{,}05) \cdot (1 + 0{,}04) \cdot (1 + 0{,}05) = 4{,}65 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow v \cdot 1{,}1466 = 4{,}65 \Rightarrow v = 4{,}06$$

O valor da tarifa antes dos três reajustes era R$ 4,06.

44. $577{,}53 = 600 \cdot (1 - 0{,}07) \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right) \cdot (1 + 0{,}15)$

$577{,}53 = 600 \cdot 1{,}0695 \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right)$

$577{,}53 = 641{,}7 - 641{,}7 \cdot \frac{x}{100} \Rightarrow x = 10$

Portanto, haverá desconto de 10%.

45. $\left(1 + \frac{x}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right) = 1{,}21 \Rightarrow 1 + 2 \cdot \frac{x}{100} + \frac{x^2}{10\,000} = 1{,}21 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 200x + 10\,000 = 12\,100 \Rightarrow x^2 + 200x - 2\,100 = 0$

Logo, $x = 10$ ou $x = -210$. Como $x > 0$, então $x = 10$.

Portanto, cada um desses acréscimos será 10%.

46. **b)** Após o 1º mês: $1500 \cdot 1{,}03 = 1545$.

Após o 2º mês: $1545 + 700 = 2\,245$.

$$2\,245 \cdot 1{,}03 = 2\,312{,}35.$$

Após o 3º mês: $2\,312{,}35 + 700 = 3\,012{,}35$

$$3012{,}35 \cdot 1{,}03 = 3\,102{,}72$$

Portanto, Aroldo tinha R$ 3 102,72 ao final do 3º mês.

47. **a)** $(0{,}9) \cdot (0{,}95) = 0{,}855$

$$100\% - 85{,}5\% = 14{,}5\%$$

Portanto, é oferecido 14,5% de desconto.

b) Indicando por x o preço do *smartphone* antes do aumento, temos:

$$(1{,}2x) \cdot (0{,}9x).(0{,}95x) = 1{,}026x$$

Portando, o preço desse *smartphone* com os descontos é maior do que o preço antes do aumento de 20%.

48. $\frac{3319}{2630} = \frac{100\%}{x} \Rightarrow 3\,319x = 26\,300 \Rightarrow x \simeq 79{,}24\%$

$$7{,}924 \cdot (1 + 0{,}002) \cdot (1 - 0{,}007) = 7{,}884$$

Portanto, a diferença de rendimentos médios entre homens e mulheres é aproximadamente 78,8%.

49. Seja $j = \frac{1}{5} \cdot c$. Então: $\frac{1}{5} \cdot c = c \cdot i \cdot 4 \Rightarrow \frac{\frac{1}{5} \cdot c}{c} = i \cdot 4 \Rightarrow i = 0{,}05$.

Portanto, a taxa de juro é 5% a.m.

50. Indicando por C_1 e C_2 os capitais aplicados por um ano.

1ª situação: $C_1 \cdot 0{,}06 + C_2 \cdot 0{,}07 = 345$

2ª situação: $C_1 \cdot 0{,}07 + C_2 \cdot 0{,}06 = 370$

$$\begin{cases} C_1 \cdot 0{,}06 + C_2 \cdot 0{,}07 = 345 \\ C_1 \cdot 0{,}07 + C_2 \cdot 0{,}06 = 370 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 4\,000 \text{ e } C_2 = 1\,500$$
$$C_1 + C_2 = 4\,000 + 1\,500 = 5\,500$$

O valor total aplicado por essa pessoa foi R$ 5 500,00.

51. Taxa de juro ao dia: $2{,}4 : 30 = 0{,}08$.

Indicando por V, o valor pago por Luiz, temos:

$$V = 750 + 750 \cdot \frac{0{,}08}{100} \cdot 12 = 757{,}2$$

Portanto, o valor pago foi R$ 757,20.

52. $j = 298{,}35 - 270 = 28{,}35$

$$28{,}35 = 270 \cdot i \cdot 3 \Rightarrow i = 0{,}035$$

Portanto, a taxa de juro é 3,5% a.m.

53. **a)** $j = 2 \cdot (1100) - 2\,100 = 100$

$$\frac{100}{1000} = 0{,}1$$

Portanto, a taxa de juro é 10% a.m.

b) Preço à vista da geladeira: $(1 - 0{,}08) = 0{,}92 \cdot 2\,100 = 1932$.

$$2 \cdot (1100) - 1932 = 268$$

Portanto, pagando à vista, a economia é de R$ 268,00.

54. $M = 2\,600 \cdot (1 + 0{,}18)^3 = 2\,600 \cdot 1{,}643032 = 4\,271{,}88$

O montante será R$ 4 271,88.

55. Após o 1º mês, temos:

$$j_1 = 1100 \cdot 0{,}032 = 35{,}2$$
$$M_1 = 1100 + 35{,}2 = 1135{,}2$$

Após o 2º mês, temos:

$$j_2 = M_1 \cdot 0{,}032 \Rightarrow j_2 = 1135{,}2 \cdot 0{,}032 \simeq 36{,}33$$
$$M_2 = M_1 + j_2 \Rightarrow M_2 = 1135{,}2 + 36{,}33 = 1171{,}53$$

Após o 3º mês, temos:

$$j_3 = M_2 \cdot 0{,}005 \Rightarrow j_3 = 1171{,}53 \cdot 0{,}005 \simeq 5{,}86$$
$$M_3 = M_2 + j_3 \Rightarrow M_3 = 1171{,}53 + 5{,}86 = 1177{,}39$$

Portanto, o montante ao final do 3º mês foi R$ 1177,39.

56. $4 \cdot c = c \cdot (1 + i)^{70} \Rightarrow 4 = (1 + i)^{70} \Rightarrow \sqrt[70]{4} = \sqrt[70]{(1 + i)^{70}} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4^{\frac{1}{70}} = 1 + i \Rightarrow 1{,}02 = 1 + i \Rightarrow i = 0{,}02$

Portanto, a taxa anual de juro deve ser 2%.

57. $j = 3\,500 \cdot (1 + 0{,}04)^4 - 3\,500 = 594{,}5$

Portanto, Fabiana pagará R$ 594,50 de juro.

58. **a)** $729{,}15 = c \cdot (1 + 0{,}018)^{14} \Rightarrow c \simeq 568$

Portanto, o capital investido foi aproximadamente R$ 568,00.

b) $729{,}15 - 568 = 161{,}15$. Indicando por P o percentual, obtemos: $P = \frac{161{,}15}{568} \simeq 0{,}2837$. Portanto, o percentual de aumento dessa aplicação foi aproximadamente 28,37%.

59. $17\,496 = 15\,000 \cdot (1 + i)^2 \Rightarrow 1{,}1664 = (1 + i)^2 \Rightarrow i = 0{,}08$

Portanto, a taxa de juro anual dessa aplicação é 8%.

60. $54{,}08 = 50 \cdot (1 + i)^2 \Rightarrow 1{,}0816 = (1 + i)^2 \Rightarrow i = 0{,}04$

Portanto, a taxa mensal de juro cobrada nessa loja é 4%.

61. **a)** Ao final do 3º mês: $M_1 = 2\,300\,(1 + 0{,}017)^3 \simeq 2\,419{,}31$.

$$j_1 = 2\,419{,}31 - 2\,300{,}00 = 119{,}31$$

Ao final de um ano: $M_2 = (M_1 + 1100) \cdot (1 + 0{,}017)^9$.

$$M_2 = (3\,519{,}31) \cdot (1 + 0{,}017)^9 \simeq 4\,095{,}87$$
$$j_2 = 4\,095{,}87 - 3\,519{,}31 = 576{,}56$$
$$j_1 + j_2 = 119{,}31 + 576{,}56 = 695{,}87$$

Portanto, esses investimentos renderam R$ 695,87 de juro.

b) Ao final do 6º mês: $M_3 = (M_1 + 1100) \cdot (1 + 0{,}017)^3$

$$M_3 = (3\,519{,}31) \cdot (1 + 0{,}017)^3 \simeq 3\,701{,}86$$

Após a retirada, sobrou nesse investimento R$ 701,86.

Ao final de dois anos: $M_4 = 701{,}86(1 + 0{,}017)^{24-3} \simeq 999{,}98$.

Portanto, o montante obtido 2 anos após a 2ª aplicação seria R$ 999,98.

62. a) Após o empréstimo, houve um pagamento de R$ 3 700,00, logo:

$S = 8\,600(1 + 0{,}08)^2 - 3\,700 = 10\,031{,}04 - 3\,700 = 6\,331{,}04$

Três anos após o 1º pagamento, houve outro de R$ 4 900,00. Assim:

$S_1 = 6\,331{,}04(1 + 0{,}08)^3 - 4\,900$

$S_1 \simeq 7\,975{,}29 - 4\,900 \simeq 3\,075{,}29$

Portanto, o saldo devedor, após o segundo pagamento, era R$ 3 075,29.

b) A última parcela equivale à quantia paga de juro e ela foi paga após 2 anos.

Indicando por Q essa quantia, temos:

$$Q = S_2(1 + 0{,}08)^2 = 3\,075{,}29 \cdot (1 + 0{,}08)^2 \simeq 3\,587{,}02$$

Portanto, foram pagos R$ 3 587,02 de juro.

63. a) $M = 7\,500 \cdot (1 + 0{,}025)^6 = 8\,697{,}7$, ou seja, o montante foi R$ 8 697,70.

b) $0{,}97 \cdot 8\,697{,}70 = 8\,436{,}77$

Portanto, o valor líquido a ser retirado é R$ 8 436,77.

64. a) Investimento **A**: $M_A = 5\,000 \cdot (1 + 0{,}03)^8 = 6\,333{,}85$

Investimento **B**: $M_B = 4\,500 \cdot (1 + 0{,}035)^8 = 5\,925{,}65$

$$6\,333{,}85 + 5\,925{,}65 = 12\,259{,}5$$

Portanto, o montante foi R$ 12 259,50.

b) Rendimento **A**: $6\,333{,}85 - 5\,000 = 1\,333{,}85$.

Rendimento **B**: $5\,925{,}65 - 4\,500 = 1\,425{,}55$.

Portanto, o investimento **B** gerou maior rendimento.

65. a) $M = 12\,000 \cdot (1 + 0{,}006)^{12} = 12\,893{,}09$

$$12\,893{,}09 - 12\,000 = 893{,}09$$

Essa aplicação renderia R$ 893,09.

66. Em 3 meses: $M = 20\,000(1 + 0{,}02)^3 = 21\,224{,}16$.

Em 4 meses: $M = 20\,000(1 + 0{,}02)^4 = 21\,648{,}64$.

Logo, em 3 meses, sobrarão aproximadamente R$ 225,00, e, em 4 meses, aproximadamente R$ 649,00.

Portanto, a alternativa **d** é a correta.

67.
- Investimento **A**: $(1{,}03)^{12} = 1{,}426$.
- Investimento **B**: $(1{,}36)^1 = 1{,}36$.
- Investimento **C**: $(1{,}18)^2 = 1{,}3924$.

As rentabilidades anuais de **A**, **B** e **C** são, respectivamente, 42,6%, 36% e 39,24%. Logo, o investimento **A** tem maior rentabilidade anual. Portanto, a alternativa **c** é a correta.

68. a) Indicando por M_1 e M_2, respectivamente, o montante obtido na opção **1** e na opção **2**, temos:

$$M_1 = M_2$$
$$C \cdot (1 + 0{,}065)^t = C \cdot (1 + 0{,}065 \cdot t)$$
$$(1{,}065)^t = 1{,}065 \cdot t$$

Essa igualdade é verdadeira apenas para $t = 1$.

Após 1 ano, o investimento obtido em ambas as opções será o mesmo.

b) Opção **1**: $M_1 = 12\,000 \cdot (1 + 0{,}065)^2 = 13\,610{,}7$

Opção **2**: $M_2 = 12\,000 \cdot (1 + 0{,}065 \cdot 2) = 13\,560$

$13\,610{,}7 - 13\,560 = 50{,}7$

A diferença entre os montantes é R$ 50,70.

69. a) Crescimento exponencial: investimento **B**; crescimento linear: investimentos **A** e **C**. No caso dos investimentos **A** e **C**, verifique se os estudantes percebem que o aumento ocorre sempre na mesma razão, por isso tem crescimento linear.

b) Investimento **A**: $\dfrac{9\,861{,}83}{8\,965{,}30} = 1{,}1$ (ou seja, 10% a.m.)

Investimento **B**: $\dfrac{13\,533{,}18}{12\,589{,}00} = 1{,}075$ (ou seja, 7,5% a.m.)

Investimento **C**: $\dfrac{60\,200{,}00}{56\,000{,}00} = 1{,}075$ (ou seja, 7,5% a.m.)

c) $M = 8\,965{,}30 \cdot (1 + 0{,}075 \cdot 10) = 15\,689{,}28$

O montante ao final do 10º mês seria R$ 15 689,28.

70. a) Investimento **A**: $\dfrac{1\,020{,}00}{1\,000{,}00} = 1{,}02$ (ou seja, 2% a.m.)

Investimento **B**: $\dfrac{1\,019{,}00}{1\,000{,}00} = 1{,}019$ (ou seja, 1,9% a.m.)

b) O investimento **B**, pois o valor acrescido ao montante aumenta com o passar do tempo, enquanto no investimento **A** o valor acrescido se mantém constante com o passar do tempo.

d) Investimento **A**: $M_A = 1\,000 \cdot (1 + 0{,}02 \cdot 7) = 1\,140$.

Investimento **B**: $M_B = 1\,000 \cdot (1 + 0{,}019)^7 = 1\,140{,}83$.

Portanto, o montante obtido no investimento **A** será R$ 1 140,00; no **B**, R$ 1 140,83.

71. Considerando o período 0 e indicando por P_v o preço à vista na opção **1**, P_2 o valor do pagamento na opção **2** e por P_3 o valor do pagamento na opção **3**, temos:

$P_v = 270$

$$P_2 = 100 + \frac{170}{(1 + 0{,}005)^1} \simeq 100 + 169{,}15 \simeq 269{,}15$$

$$P_3 = \frac{90}{(1 + 0{,}005)^1} + \frac{90}{(1 + 0{,}005)^2} + \frac{90}{(1 + 0{,}005)^3} \simeq 267{,}32$$

A opção **3** é a mais vantajosa.

72. Preço à vista: $P_v = 0{,}97 \cdot 300 = 291$.

- 2ª opção: $P_2 = 150 + \dfrac{150}{(1 + 0{,}008)^1} \simeq 150 + 148{,}81 \simeq 298{,}81$
- 3ª opção: $P_3 = \dfrac{30}{(1 + 0{,}008)^1} + \dfrac{30}{(1 + 0{,}008)^2} + \dfrac{30}{(1 + 0{,}008)^3} +$

$$+ \frac{30}{(1 + 0{,}008)^4} + \frac{30}{(1 + 0{,}008)^5} + \frac{30}{(1 + 0{,}008)^6} + \frac{30}{(1 + 0{,}008)^7} +$$

$$+ \frac{30}{(1 + 0{,}008)^8} + \frac{30}{(1 + 0{,}008)^9} + \frac{1}{(1 + 0{,}008)^{10}} \simeq 287{,}21$$

Portanto, o pagamento em dez prestações de R$ 30,00 no cartão de crédito é a opção mais vantajosa.

73. Valor da prestação:

$$P = \frac{3\,900 \cdot 0{,}019}{1 - (1 + 0{,}019)^{-12}} = 366{,}52$$

25% de R$ 2 200,00: $0{,}25 \cdot 2\,200 = 550$

Logo, o valor da prestação (R$ 366,52) é menor do que 25% do salário líquido (R$ 550,00), possibilitando o empréstimo.

74. $928{,}46 = \dfrac{c \cdot 0{,}014}{1 - (1 + 0{,}014)^{-9}} \Rightarrow$

$\Rightarrow c \cdot 0{,}014 = 109{,}20026 = 7\,800{,}02$

Esse cliente emprestou R$ 7 800,02 do banco.

75. a) Valor a ser parcelado: $75\,000 - 25\,000 = 50\,000$

$$P = \frac{50\,000 \cdot 0{,}01}{1 - (1 + 0{,}01)^{-48}} \simeq 1\,316{,}69$$

O valor de cada parcela é R$ 1 316,69.

b) Valor pago nas parcelas: $48 \cdot 1\,316{,}69 = 63\,201{,}12$.

$63\,201{,}12 - 50\,000 = 13\,201{,}12$

Serão pagos R$ 13 201,12 de juros.

76. Resolução na página **MP093**.

77. Resolução na página **MP093**.

78. a) Valor de cada parcela: $P = \dfrac{2\,378{,}27 \cdot 0{,}02}{1-\left(1+0{,}02\right)^{-12}} = 224{,}89$

Total a ser pago: $12 \cdot 224{,}89 = 2\,698{,}68$.

O valor de cada parcela é R$ 224,89 e o total a ser pago, R$ 2 698,68.

b) Sim. Ao aumentar o número de parcelas, há um aumento no juro, pois ele é mensal.

79. a) A maior despesa é com alimentação.

b) Moradia: $\dfrac{750}{4\,200} \simeq 0{,}179 = 17{,}9\%$;

alimentação: $\dfrac{1000}{4\,200} \simeq 0{,}238 = 23{,}8\%$;

transporte: $\dfrac{300}{4\,200} \simeq 0{,}0714 = 7{,}14\%$;

saúde: $\dfrac{100}{4\,200} \simeq 0{,}0238 = 2{,}38\%$;

lazer: $\dfrac{150}{4\,200} \simeq 0{,}0357 = 3{,}57\%$;

outros: $\dfrac{250}{4\,200} \simeq 0{,}0595 = 5{,}95\%$.

80. Preenchendo os dados na Calculadora do Cidadão, Números de meses: 60; Taxa de juros mensal: 0,7; Valor do depósito regular: 120, ao clicar em Calcular, será exibido 8972,13 no campo Valor obtido ao final.

Logo, o montante obtido ao final desse período é R$ 8 972,13.

81. Prazo **1**: $CF_1 = \dfrac{0{,}02}{1-\left(1+0{,}02\right)^{-24}} \simeq 0{,}052871$.

Valor da prestação: $12\,000 \cdot 0{,}052871 = 634{,}45$.

Total pago: $24 \cdot 634{,}45 = 15\,226{,}80$, ou seja, R$ 15 226,80.

Prazo **2**: $CF_2 = \dfrac{0{,}02}{1-\left(1+0{,}02\right)^{-36}} \simeq 0{,}039233$.

Valor da prestação: $12\,000 \cdot 0{,}039233 = 470{,}80$.

Total pago: $36 \cdot 470{,}80 = 16\,948{,}80$, ou seja, R$ 16 948,44.

Prazo **3**: $CF_3 = \dfrac{0{,}02}{1-\left(1+0{,}02\right)^{-48}} \simeq 0{,}032602$.

Valor da prestação: $12\,000 \cdot 0{,}032602 \simeq 391{,}23$

Total pago: $48 \cdot 391{,}23 = 18\,779{,}04$, ou seja, R$ 18 779,04.

Sugestão de resposta: Ângelo deve escolher o pagamento em 36 parcelas, pois a opção em 24 parcelas não cabe em seu orçamento mensal e o pagamento em 48 parcelas tem maior juro.

Trabalho e juventudes (página 225)

2. O contador é o profissional que pode orientar o processo de abertura de uma empresa, fornecendo informações sobre a tributação de impostos municipais, estaduais e federais. Além disso, ele oferece assessoria trabalhista e apresenta resultados financeiros por meio de balanços, contribuindo para a tomada de decisões dos gestores da empresa.

Desenvolvimento sustentável (páginas 226 e 227)

3. a) Sugestões de resposta: Além de agravar o problema do aquecimento global, a liberação de gases poluentes na atmosfera por meio da queima de combustíveis fósseis causa problemas como o aumento do efeito estufa e as diversas alterações climáticas. O processo de geração de energia nas usinas termonucleares apresenta riscos ao ambiente e aos seres humanos, pois, além de produzir resíduos radioativos, pode ocasionar acidentes. Essas fontes também se originam de reservas naturais finitas e o seu uso indiscriminado pode levar ao esgotamento no decorrer do tempo.

Acessando tecnologias (páginas 247 e 248)

1. O valor inicial da dívida foi inserido na célula **C2**. Já o valor do montante correspondente ao dia do pagamento da dívida foi calculado na célula **C12**.

2. Nessa planilha, o juro obtido ao final de cada dia é indicado em cada uma das células do intervalo **B3:B12**. Sendo assim, ao final de cada dia, o juro obtido foi R$ 6,00.

3. Primeiro, as células devem ser preenchidas, conforme segue: **A1** Período (dia); **B1** Juro (R$); **C1** Montante (R$); **A2** 0; **B2** 0 e **C2** 135. Depois, preencha o intervalo **A2:A17** com a sequência dos números naturais de 0 a 15.

Calcule o juro ao final do 1º dia. Para isso, digite = 0,0003*C2 na célula **B3** e pressione **Enter**. Em seguida, calcule o montante ao final do 1º dia. Para isso, na célula **C3**, digite =C2+B3 e pressione **Enter**.

Preencha a planilha com o juro e o montante ao final de cada período. Para isso, selecione o intervalo **B3:C3**, clique sobre a **Guia de autopreenchimento** e arraste até a linha **17** (correspondente ao 15º dia). O valor da dívida, R$ 135,61, será exibido na célula **C17**.

4. Após construir a planilha de acordo com os passos apresentados na seção, dividimos o valor obtido na célula pelo capital aplicado.

a) **C38**: $\dfrac{21\,461{,}53}{15\,000} \simeq 1{,}4$, ou seja, cerca de 1,43 vez maior que o capital aplicado.

b) **C62**: $\dfrac{27\,250{,}45}{15\,000} \simeq 1{,}82$, ou seja, cerca de 1,82 vez mais que o capital aplicado.

c) **C122**: $\dfrac{49\,505{,}80}{15\,000} \simeq 3{,}3$, ou seja, cerca de 3,3 vezes mais que o capital aplicado.

d) **C242**: $\dfrac{163\,388{,}30}{15\,000} \simeq 10{,}9$, ou seja, cerca de 10,9 vezes mais que o capital aplicado.

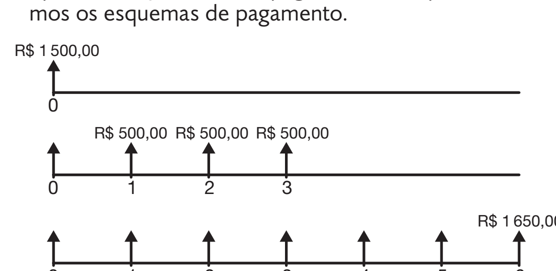
5. Primeiro, as células devem ser preenchidas, conforme segue: **A1** Período (ano); **A2** Juro (R$); **A3** Montante (R$); **A2** 0; **B2** 0 e **C2** 18530. Depois, preencha o intervalo **A2:A32** com a sequência dos números naturais de 0 a 30.

Calcule o juro ao final do 1º ano. Para isso, digite =0,12*C2 na célula **B3** e pressione **Enter**. Em seguida, calcule o montante ao final do 1º ano. Para isso, na célula **C3**, digite =C2+B3 e pressione **Enter**.

Preencha a planilha com o juro e o montante ao final de cada período. Para isso, selecione o intervalo **B3:C3**, clique sobre a **Guia de autopreenchimento** e arraste-o até a linha **32** (correspondente ao 30º ano). O valor do montante, R$ 555 157,36, será exibido na célula **C17**.

Resolvendo por etapas (páginas 256 e 257)

2. Sim, é possível resolver o problema usando o plano apresentado com algumas adequações. Considerando o período 0, indicamos por P_v o preço à vista, P_2 o valor do pagamento na opção **2** e P_3 o valor do pagamento na opção **3**, e construímos os esquemas de pagamento.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

$P_v = 1500$

$$P_2 = \frac{500}{(1+0{,}03)^1} + \frac{500}{(1+0{,}03)^2} + \frac{500}{(1+0{,}03)^3} \simeq 1414{,}31$$

$$P_3 = \frac{1650}{(1+0{,}03)^6} \simeq 1381{,}85$$

Portanto, a opção mais vantajosa para Denise é a **3**.

Acessando tecnologias (página 258)

1. As células da planilha devem ser preenchidas, conforme segue: **A1** Período (mês); **B1** VA (R$); **C1** Taxa mensal; **D1** VF (R$); **A2** 6; **B2** 1500 e **C2** 0,12. Depois, na célula **D2**, digite =B2*(1+C2)^A2 e pressione **Enter**. A célula **D2** exibirá o valor futuro, R$ 2 960,73.

2. As etapas de preenchimento e a imagem com um exemplo de preenchimento de informações da planilha estão na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.
A soma dos valores atuais das prestações no período zero é R$ 883,29.

Acessando tecnologias (página 265)

1. Basta digitar = SOMA(D7 **:** D8) na célula **D9** e, em seguida, selecionar a célula **D9**, clicar sobre a **Guia de autopreenchimento** e arrastar até a coluna desejada.

Síntese do capítulo (página 267)

3. Sugestão de resposta: Calcularia o preço desse item após os 20% de desconto e, com base nesse resultado, calcularia o aumento de 15%.

4. Sugestão de resposta: Multiplicaria os fatores de atualização para obter a porcentagem do valor final do produto e, depois, subtrairia de 100% a porcentagem obtida anteriormente.

5. A alternativa **a** define corretamente a taxa de inflação, mas não está associada diretamente ao indicador econômico em questão, que é o PIB *per capita*. E a alternativa **b** descreve o PIB, mas o conceito de PIB, nesse caso, *per capita*, está mais diretamente relacionado ao cálculo da renda média. Logo, a alternativa **c** é a correta.

6. Proposta **A**: $M_A = 10\,000 \cdot (1 + 0{,}02 \cdot 12) = 12\,400$.
Proposta **B**: $M_B = 10\,000 \cdot (1{,}013)^{12} \simeq 11\,676{,}52$.
A proposta **A**, pois oferece o maior retorno.

Resoluções referentes ao capítulo **7**.

76. Valor da parcela: $P = \dfrac{75\,000 \cdot 0{,}02}{1 - (1+0{,}02)^{-8}} = \dfrac{1500}{0{,}14651} = 10\,238{,}21$

Demonstrativo de amortização no empréstimo no sistema Price

n	Pagamento (R$)	Juro (R$)	Amortização (R$)	Saldo devedor (R$)
0	0	0	0	75 000,00
1	10 238,21	$\underbrace{0{,}02}_{2\%} \cdot 75\,000{,}00 = 1\,500{,}00$	10 238,21 − 1 500,00 = 8 738,21	$\underbrace{66\,261{,}79}_{75\,000{,}00 - 8\,738{,}21}$
2	10 238,21	$\underbrace{0{,}02}_{2\%} \cdot 66\,261{,}79 = 1\,325{,}24$	10 238,21 − 1 325,24 = 8 912,97	$\underbrace{57\,348{,}82}_{66\,261{,}79 - 8\,912{,}97}$
3	10 238,21	$\underbrace{0{,}02}_{2\%} \cdot 57\,348{,}82 = 1\,146{,}98$	10 238,21 − 1 146,98 = 9 091,23	$\underbrace{48\,257{,}59}_{57\,348{,}82 - 9\,091{,}23}$
4	10 238,21	$\underbrace{0{,}02}_{2\%} \cdot 48\,257{,}59 = 965{,}15$	10 238,21 − 965,15 = 9 273,06	$\underbrace{38\,984{,}53}_{48\,257{,}59 - 9\,273{,}06}$
5	10 238,21	$\underbrace{0{,}02}_{2\%} \cdot 38\,984{,}53 = 779{,}69$	10 238,21 − 779,69 = 9 458,52	$\underbrace{29\,526{,}01}_{38\,984{,}53 - 9\,458{,}52}$
6	10 238,21	$\underbrace{0{,}02}_{2\%} \cdot 29\,526{,}01 = 590{,}52$	10 238,21 − 590,52 = 9 647,69	$\underbrace{19\,878{,}32}_{29\,526{,}01 - 9\,647{,}69}$

a) O juro pago na 4ª parcela é R$ 965,15.
b) A amortização na 5ª parcela é R$ 9 458,52.
c) O saldo devedor após o pagamento da 6ª parcela é R$ 19 878,32.

77. Taxa fixa ao mês: $\dfrac{2\,000}{60} = \dfrac{100}{i} \Rightarrow i = 3$.

Parte do demonstrativo de amortização no sistema Price

n	Pagamento (R$)	Juro (R$)	Amortização (R$)	Saldo devedor (R$)
0	0	0	0	2 000,00
1	234,46	60	174,46	1 825,54
2	234,46	$\underbrace{0{,}03}_{3\%} \cdot 1\,825{,}54 = 54{,}77$	234,46 − 54,77 = 179,69	$\underbrace{1\,645{,}85}_{1\,825{,}54 - 179{,}69}$
3	234,46	$\underbrace{0{,}03}_{3\%} \cdot 1\,645{,}85 = 49{,}38$	234,46 − 49,38 = 185,08	$\underbrace{1\,460{,}77}_{1\,645{,}85 - 185{,}08}$

O saldo devedor após o pagamento da 3ª parcela é R$ 1 460,77.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS COMENTADAS

BRACKMANN, Christian Puhlmann. *Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na educação básica*. 2017. 226 f. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Centro de Estudos Interdisciplinares em Novas Tecnologias na Educação, Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação, Porto Alegre, 2017. Disponível em: https://lume.ufrgs.br/handle/10183/172208. Acesso em: 3 set. 2024.

Trabalho que busca verificar a possibilidade do desenvolvimento do pensamento computacional na Educação Básica por meio de atividades exclusivamente desplugadas, ou seja, sem o uso de aparatos eletrônicos.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular*. Versão final. Brasília: MEC, 2018a. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf. Acesso em: 3 set. 2024.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é o documento que norteia os currículos dos sistemas e das redes de ensino das Unidades Federativas e as propostas pedagógicas das escolas públicas e privadas, estabelecendo os principais conhecimentos, competências e habilidades que os estudantes devem desenvolver em cada etapa da Educação Básica.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Câmara de Educação Básica. Resolução nº 3, de 21 de novembro de 2018. Atualiza as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. *Diário Oficial da União*, Brasília, DF, 22 nov. 2018b. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/docman/novembro-2018-pdf/102481-rceb003-18/file. Acesso em: 3 set. 2024.

Essa resolução atualiza as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, publicadas em 2012.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Formação de professores do ensino médio, etapa I – caderno II*: o jovem como sujeito do ensino médio. Organização: Paulo Carrano, Juarez Dayrell. Curitiba: UFPR/Setor de Educação, 2013.

Nessa obra, voltada à formação de professores, são discutidos diversos temas relacionados ao Ensino Médio. Em um primeiro momento, discute-se o conceito de juventude com o objetivo de propor mudanças nas maneiras de conceber essa faixa etária. Esses textos buscam valorizar o papel do jovem como sujeito de sua história. Em seguida, os textos destacam temas como juventude e tecnologia, questão do mundo do trabalho e projeto de vida, além do papel da escola no processo de formação dos jovens.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Temas contemporâneos transversais na BNCC*: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília: MEC/SEB, 2019. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf. Acesso em: 10 set. 2024.

Esse documento apresenta o histórico dos temas contemporâneos transversais, sua divisão em seis grandes áreas e a importância desses temas para os currículos da Educação Básica.

BRASIL. Ministério da Saúde. Secretaria de Atenção à Saúde. Departamento de Ações Programáticas e Estratégicas. *Proteger e cuidar da saúde de adolescentes na atenção básica*. 2. ed. Brasília, 2018c. Disponível em: https://bvsms.saude.gov.br/bvs/publicacoes/proteger_cuidar_adolescentes_atencao_basica_2ed.pdf. Acesso em: 5 out. 2024.

Esse documento do Ministério da Saúde foi elaborado para auxiliar as Equipes de Atenção Básica/Saúde da Família no trabalho com adolescentes, propondo o cuidado com a saúde, a adoção de hábitos saudáveis e a atenção aos principais aspectos clínicos.

CENTRO DE INOVAÇÃO PARA A EDUCAÇÃO BRASILEIRA (CIEB). *Currículo de referência em tecnologia e computação*. out. 2018 Disponível em: https://curriculo.cieb.net.br/. Acesso em: 10 set. 2024.

O objetivo desse currículo é oferecer diretrizes e orientações que visam apoiar as escolas a incluir em suas propostas curriculares os temas tecnologia e computação, potencializando o uso da tecnologia na aprendizagem.

D'AMBROSIO, Ubiratan. *Etnomatemática*: elo entre as tradições e a modernidade. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

O autor propicia uma análise do papel da Matemática na cultura ocidental e da noção de que a Matemática é apenas uma forma de Etnomatemática.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Etnomatemática, justiça social e sustentabilidade. *Estudos Avançados*, São Paulo, v. 32, n. 94, set./dez. 2018. p. 189-204. Disponível em: https://www.scielo.br/j/ea/a/FTmggx54SrNPL4FW9Mw8wqy/?lang=pt. Acesso em: 3 set. 2024.

Esse trabalho mostra como a Etnomatemática pode contribuir para o enfrentamento de ameaças à sustentabilidade e para a prevenção de um possível colapso da civilização.

DAYRELL, Juarez (org.). *Por uma pedagogia das juventudes*: experiências educativas do Observatório da Juventude da UFMG. Belo Horizonte: Mazza Edições, 2016.

Juarez Dayrell é um pesquisador que investiga questões sobre a juventude e a educação, analisando a importância das culturas juvenis na construção de um cenário educativo mais democrático e significativo. Nessa obra, ele traz algumas experiências vivenciadas no projeto Observatório da Juventude, da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), que trabalha desde 2003 com a formação de professores e discussões envolvendo a juventude.

FIORIN, José Luiz. *Argumentação*. São Paulo: Contexto, 2015.

Esse livro é fundamental para quem busca compreender os mecanismos da argumentação e aprimorar suas habilidades de comunicação. O autor, um dos maiores especialistas em Linguística no Brasil, oferece uma análise profunda e abrangente do processo argumentativo, desde a construção de argumentos até a identificação de falácias.

ILLERIS, Knud (org.). *Teorias contemporâneas da aprendizagem*. Porto Alegre: Penso, 2013.

Nessa obra, o pesquisador Knud Illeris reúne diferentes autores e teorias da aprendizagem que têm sido desenvolvidas na contemporaneidade e apresenta um conjunto de textos que tratam sobre o tema. Cada pesquisador contribui com suas reflexões, buscando caminhos na compreensão sobre o conceito de educar e sobre como funciona o complexo processo de ensino e aprendizagem na atualidade.

LIBÂNEO, José Carlos. *Didática*. São Paulo: Cortez, 2013.

Esse livro aborda a prática educativa e o papel do professor nos processos de ensino e de aprendizagem. Libâneo enfatiza a necessidade de uma abordagem pedagógica crítica e reflexiva, que considera o contexto socioeconômico e cultural dos estudantes, promovendo uma educação transformadora. Ele discute métodos e estratégias de ensino que visam ao desenvolvimento integral do estudante, integrando teoria e prática de forma a preparar cidadãos críticos e participativos.

LOPES, Lidiane Schimitz; FERREIRA, André Luis Andrejew. Um olhar sobre a história nas aulas de matemática. *Abakós*, Belo Horizonte, v. 2, n. 1, p. 75-88, nov. 2013.

Nesse livro, os autores defendem o uso da História da Matemática como metodologia em sala de aula, realizando uma abordagem histórica dos conteúdos como meio de facilitar o entendimento da Matemática.

MIGUEL, Antônio; MIORIM, Maria Ângela. *História na Educação matemática*: propostas e desafios. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

Nesse livro, os autores abordam a História da Matemática e a História da Educação Matemática, estabelecendo uma relação entre essas duas áreas e o modo pelo qual elas podem se relacionar com a Educação Matemática.

MORAN, José. Metodologias ativas para uma aprendizagem mais profunda. *In*: BACICH, Lilian; MORAN, José (org.). *Metodologias ativas para uma educação inovadora*: uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso, 2018. p. 2-25.

Esse artigo apresenta práticas pedagógicas baseadas em metodologias ativas que valorizam o protagonismo dos estudantes.

ONUCHIC, Lourdes de La Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Pesquisa em resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. *Bolema*, Rio Claro, Unesp, ano 2011, v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011.

Esse trabalho apresenta o conhecimento acumulado sobre a Resolução de problemas na Educação Matemática, baseado nas pesquisas realizadas nos últimos anos pelo Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas, da Unesp de Rio Claro (SP).

POLYA, George. *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

Esse trabalho tece comentários a respeito das maneiras de resolver um problema, no qual o processo de solução é mais importante do que a própria solução em si. Para tanto, Polya estabelece as quatro fases da resolução de um problema: compreendendo o problema, elaborando um plano, executando o plano e fazendo o retrospecto.

PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2016.

Nessa obra, os autores apresentam os possíveis modos de introduzir em sala de aula as práticas de investigação desenvolvidas por matemáticos, apontando as vantagens e desvantagens no trabalho com essa perspectiva. Também são analisados os papéis dos estudantes e professores em sala de aula ao lidar com problemas relacionados às áreas de Geometria, Estatística e Aritmética.

REIS, Ana Valéria Sampaio de Almeida; DAROS, Thuinie; TOMELIN, Karina Nones. *Layouts criativos para aulas inovadoras*. Maringá: B42, 2023.

Esse livro orienta educadores que desejam transformar o ambiente da sala de aula e implementar estratégias de ensino dinâmicas. As autoras propõem uma série de *layouts* para favorecer abordagens pedagógicas diversas. O objetivo é promover práticas de inovação, inspiração e cocriação entre professores e estudantes, incentivando os educadores a se tornar designers do ambiente educacional. Esse livro é recomendado para quem busca repensar a organização do espaço escolar e criar experiências de aprendizagens marcantes.

STECANELA, Nilda. *Ler e escrever na EJA*: práticas interdisciplinares. Caderno de EJA. Caxias do Sul: Educs, 2013.

Esse livro oferece uma análise detalhada sobre a importância da interdisciplinaridade no processo de ensino e aprendizagem para a Educação de Jovens e Adultos (EJA). A autora explora como a integração entre diferentes disciplinas pode enriquecer as práticas pedagógicas, promovendo uma abordagem mais contextualizada e dinâmica. A obra destaca estratégias para articular diversas áreas do conhecimento e fomentar a construção do conhecimento de forma significativa, voltada para o desenvolvimento de habilidades e competências essenciais. Stecanela também enfatiza a necessidade de considerar as realidades e vivências dos estudantes, propondo discussões para uma educação que valorize a pluralidade de ideias e estimule o pensamento crítico e científico.

VIOLÊNCIA escolar e *bullying*: relatório sobre a situação mundial. Brasília: Unesco, 2019.

Relatório que busca fornecer dados atualizados sobre a violência escolar e o *bullying*, destacando sua natureza, sua abrangência e seus impactos, assim como apresentar iniciativas para enfrentar esses problemas.

WING, Jeannette. Pensamento computacional: um conjunto de atitudes e habilidades que todos, não só cientistas da computação, ficaram ansiosos para aprender e usar. Tradução: Cleverson Sebastião dos Anjos. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, Ponta Grossa, v. 9, n. 2, p. 1-10, maio/ago. 2016. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/download/4711/pdf. Acesso em: 3 set. 2024.

Esse artigo traz uma discussão a respeito do pensamento computacional, enfatizando sua importância como habilidade analítica que deve ser desenvolvida nos estudantes do Ensino Básico, auxiliando na resolução de quaisquer tipos de problemas.

ZIMER, Tania Teresinha Bruns. *Aprendendo a ensinar matemática nas séries iniciais do ensino fundamental*. 2008. 299 f. Tese (Doutorado em Educação) — Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008. Disponível em: https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-24062008-162627/publico/TeseTaniaBrunsZimer.pdf. Acesso em: 10 set. 2024.

Essa tese disserta, entre outros assuntos pedagógicos, a respeito da importância do professor como elemento mediador entre as concepções pessoais e a prática pedagógica.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS COMPLEMENTARES COMENTADAS

Nesta seção, apresentamos sugestões de livros, revistas, artigos, *podcasts*, filmes e *sites* que podem ser consultados com o objetivo de complementar os conteúdos tratados neste volume, bem como obter subsídio teórico-metodológico para o trabalho em sala de aula.

A Matemática no Divã #03

A MATEMÁTICA no Divã. Episódio 03: A educação matemática no divã: Yuriko Yamamoto Baldin. *Rádio UFSCar*, 2 jul. 2023. Disponível em: http://radio.ufscar.br/vPodcast/a-matematica-no-diva. Acesso em: 10 set. 2024.

Nesse episódio, o *podcast* A Matemática no Divã recebe a professora Yuriko Yamamoto Baldin para conversar sobre sua infância, sua carreira e a Educação Matemática.

Álgebra para a formação do professor: explorando os conceitos de equação e de função

RIBEIRO, Alessandro J.; CURY, Helena N. *Álgebra para a formação do professor*: explorando os conceitos de equação e de função. Belo Horizonte: Autêntica, 2015. (Tendências em Educação Matemática).

Nesse livro, os autores discutem a respeito do ensino e da aprendizagem da Álgebra, com enfoque especial nos assuntos relacionados a equações e funções, fazendo uma breve revisão histórica e apresentando pesquisas relacionadas ao tema.

Educação Matemática em Revista

EMR. Disponível em: https://www.sbembrasil.org.br/periodicos/index.php/emr. Acesso em: 9 set. 2024.

A Educação Matemática em Revista (EMR) é uma publicação trimestral da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), com foco na prática docente em Educação Matemática. A revista publica artigos completos e tem seções permanentes sobre temas específicos, passando por um rigoroso processo de avaliação por pares em duplo cego. Todo o conteúdo está disponível gratuitamente, promovendo o acesso livre ao conhecimento científico.

Ensino de funções e as metarregras do discurso: refletindo sobre a definição atual de função a partir de algumas definições históricas

BENEDITO, Leandro André Barrada; BERNARDES, Aline. Ensino de funções e as metarregras do discurso: refletindo sobre a definição atual de função a partir de algumas definições históricas. *Revista HISTEMAT*, v. 5, n. 2, 2019. Disponível em: https://histemat.com.br/index.php/HISTEMAT/article/view/272/211. Acesso em: 9 set. 2024.

Esse artigo propõe o uso da História da Matemática no ensino de funções, explorando o conceito de função com base em uma abordagem teórica fundamentada na *commognition* de Anna Sfard.

Matemática e educação: alegorias, tecnologias, jogo, poesia

MACHADO, Nilson José. *Matemática e educação*: alegorias, tecnologias, jogo, poesia. 6. ed. São Paulo: Cortez, 2012. v. 43. (Questões da Nossa Época).

São abordados, nesse livro, tópicos sobre o ensino de Matemática, a avaliação e a informática no currículo.

Mathema

MATHEMA. Disponível em: https://mathema.com.br. Acesso em: 9 set. 2024.

Nesse *site* o professor encontrará informações sobre o Ensino Médio, cursos de aperfeiçoamento profissional, sugestões de livros, revistas, *sites*, *softwares* e vídeos que visam melhorar a prática docente, bem como reflexões sobre temas relacionados à Educação Matemática.

Números e funções reais

LIMA, Elon Lages. *Números e funções reais*. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção Profmat).

O foco dessa obra é o trabalho com as funções de uma variável, estudadas sem o uso do cálculo infinitesimal. Essa abordagem elementar traz noções sobre conjuntos, a ideia geral de função e as diferentes categorias de números – naturais, inteiros, racionais e reais. Na segunda parte do livro são apresentadas funções variadas: afins, quadráticas, polinomiais, trigonométricas, exponenciais e logarítmicas.

O ensino de sequências numéricas por meio dos números triangulares utilizando a história da matemática

MASSENO, Thalya Cristiny de Sousa; PEREIRA, Ana Carolina Costa. O ensino de sequências numéricas por meio dos números triangulares utilizando a história da matemática. *Boletim Cearense de Educação e História da Matemática*, v. 7, n. 19, p. 103-115, 2020. Disponível em: https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/2979/2548. Acesso em: 9 set. 2024.

Esse artigo apresenta uma proposta didática para o ensino de sequências numéricas no Ensino Médio, utilizando os números triangulares e a história da Matemática como recurso pedagógico para facilitar o entendimento dos estudantes.

Revista do Professor de Matemática

RPM. Disponível em: https://rpm.org.br/. Acesso em: 9 set. 2024.

O *site* abrange informações sobre a publicação da Sociedade Brasileira de Matemática. A revista é destinada àqueles que ensinam Matemática nas séries finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. No *site*, estão disponíveis artigos, edições da revista e informações a respeito da publicação de artigos.

Uma mente brilhante (*A Beautiful Mind*)

UMA mente brilhante, de Ron Howard. Estados Unidos: Universal/Dreamworks/Imagine Entertainment, 2001 (135 min).

O filme retrata a vida do matemático John Nash, desde sua genialidade e contribuições para a Matemática até sua luta contra a esquizofrenia. A história inspira ao mostrar sua jornada de superação pessoal e reconhecimento com o prêmio Nobel de Ciências Econômicas (1994).

ISBN 978-85-16-13992-6