MANUAL DO PROFESSOR

SER PROTAGONISTA

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS 3

Área do conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias
Componente curricular:
Matemática

ENSINO MÉDIO

VOLUME III

FABRICIO EDUARDO FERREIRA
KATIA STOCCO SMOLE
MARIA IGNEZ DINIZ



sm

MANUAL DO PROFESSOR

SER PROTAGONISTA

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS 3

Área do conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias
Componente curricular:
Matemática

ENSINO MÉDIO

VOLUME III

FABRICIO EDUARDO FERREIRA

Licenciado em Matemática pelo Instituto Municipal de Ensino Superior de Catanduva (IMES-Catanduva), São Paulo.
Especialista em Ensino de Matemática para o Ensino Fundamental e Ensino Médio pela Universidade Estadual Paulista (Unesp) de São José do Rio Preto, São Paulo.
Mestre em Matemática pela Unesp de São José do Rio Preto, São Paulo.
Professor de Educação Básica e Ensino Superior nos cursos de Pedagogia e Licenciatura em Matemática.
Consultor de instituições e redes de ensino em projetos curriculares e de formação de professores de Matemática.
Autor de materiais para formação continuada de professores de Matemática.

KATIA STOCCO SMOLE

Licenciada em Matemática pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Moema.
Bacharela em Matemática pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Moema.
Especialista em Matemática pelo Instituto de Matemática e Estatística (IME) da Universidade de São Paulo (USP).
Mestra em Educação pela Faculdade de Educação (FE) da USP.
Doutora em Educação pela FE-USP.
Diretora de grupo de formação e pesquisa em ensino de Matemática.
Assessora de instituições e secretarias de educação em projetos curriculares e de formação de professores de Matemática.
Autora de livros didáticos e de formação de professores.

MARIA IGNEZ DINIZ

Bacharela em Matemática pelo IME-USP.
Mestra em Matemática pelo IME-USP.
Doutora em Matemática pelo IME-USP.
Diretora de grupo de formação e pesquisa em ensino de Matemática.
Assessora de instituições e secretarias de educação em projetos curriculares e de formação de professores de Matemática.
Autora de livros didáticos e de formação de professores.

São Paulo, 1ª edição, 2024

sm

Ser Protagonista Matemática
e suas Tecnologias 3 – Matemática

© SM Educação
Todos os direitos reservados

Direção editorial André Monteiro
Gerência editorial Lia Monguilhott Bezerra
Coordenação editorial André Zamboni
Edição executiva Thais Bueno de Moura
Edição Alessandra Cardozo, Amanda da Rocha Ribeiro, Carolina Maria Toledo, Cecília Tiemi Ikedo, Lindiana Justiniano de Oliveira, Luana Fernandes de Souza, Marcela de Marques Bagagini Cardoso, Tatiana Sousa Paim
Colaboração técnico-pedagógica Ana Paula Santos
Suporte editorial Camila Alves Batista, Fernanda de Araújo Fortunato
Coordenação de preparação e revisão Cláudia Rodrigues do Espírito Santo
Preparação: Ana Paula Migiyama, Eliane de Abreu Santoro, Helena Alves Costa, Maria Angélica Lau P. Soares, Vera Lúcia Rocha
Revisão: Alexander Barutti Azevedo, Ana Paula Migiyama, Beatriz Silva Pereira dos Santos, Márcio Medrado, Maria Angélica Lau P. Soares, Vera Lúcia Rocha, Waldeli Azevedo
Apoio de equipe: Camila Lamin Lessa, Luiza Emrich
Coordenação de *design* Gilciane Munhoz
***Design*:** Paula Maestro
Coordenação de arte Vitor Trevelin
Edição de arte: Clayton Renê Pires Soares
Assistência de arte: Bernard Rodrigues Fuzetti
Assistência de produção: Júlia Stacciarini Teixeira
Coordenação de iconografia Josiane Laurentino
Pesquisa iconográfica: Priscilla Liberato
Tratamento de imagem: Marcelo Casaro, Robson Mereu
Capa APIS Design
Ilustração de capa: Davi Augusto
Projeto gráfico APIS Design
Editoração eletrônica Setup Bureau Editoração Eletrônica
Pré-impressão Américo Jesus, Mauro Moreira
Fabricação Alexander Maeda
Impressão

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Ferreira, Fabricio Eduardo
Ser protagonista matemática e suas tecnologias 3 / Fabricio Eduardo Ferreira, Katia Stocco Smole, Maria Ignez Diniz. -- 1. ed. -- São Paulo : Edições SM, 2024.

Componente curricular: Matemática.
Área do conhecimento: Matemática e suas tecnologias.
ISBN 978-85-418-3233-5 (aluno)
ISBN 978-85-418-3232-8 (professor)

1. Matemática (Ensino médio) 2. Tecnologia educacional I. Smole, Katia Stocco. II. Diniz, Maria Ignez. III. Título.

24-228883 CDD-373.19

Índices para catálogo sistemático:
1. Ensino integrado : Livro-texto : Ensino médio 373.19

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

1ª edição, 2024



SM Educação
Avenida Paulista, 1842 – 18º andar, cj. 185, 186 e 187 – Condomínio Cetenco Plaza
Bela Vista 01310-945 São Paulo SP Brasil
Tel. 11 2111-7400
atendimento@grupo-sm.com
www.grupo-sm.com/br

APRESENTAÇÃO

OLÁ, JOVEM!

Este livro foi produzido para acompanhar seu percurso no aprendizado da Matemática. Ele foi elaborado para seguir com você ao longo do Ensino Médio no estudo de novos conceitos e novos procedimentos com o objetivo de ampliar e aprofundar o que você tem aprendido em Matemática desde os anos iniciais do Ensino Fundamental.

É possível que você se pergunte: Mas o que este livro traz de diferente e como ele pode contribuir para minha formação?

A resposta está no caminho que convidamos você a trilhar para ampliar seus horizontes em relação à presença da Matemática nos diversos campos do conhecimento e, assim, se tornar ainda mais competente como leitor e produtor de textos dessa área e como resolvedor de problemas.

Ao aprender a analisar um problema – observando os dados fornecidos, as questões levantadas e as relações que os textos trazem –, você será capaz de conectar ideias e conhecimentos para construir uma estratégia de resolução, executar essa estratégia e avaliar se chegou ou não a uma resposta adequada.

Nossa proposta maior, no entanto, é que, ao utilizar este livro como ferramenta de estudo, você não apenas exercite a resolução de problemas, mas também aprenda a avaliar e a solucionar situações práticas em sua vida e em seus eventuais estudos no futuro, empregando os recursos e as formas de pensar da Matemática.

Para que você desenvolva ainda mais suas competências e habilidades para refletir e agir de modo consistente e confiante, dentro ou fora do ambiente escolar, criamos seções para você exercitar cálculos mentalmente e resolver problemas valendo-se de seus conhecimentos e do emprego da lógica. Em vários momentos, o conteúdo abordado nesses problemas extrapola a relação direta com o tema estudado no capítulo, tornando assim mais abrangente a compreensão do universo abarcado pela Matemática.

Ao longo deste material, você também terá diversas oportunidades de recordar e reforçar o que aprendeu anteriormente e contará com uma seção, ao final de cada capítulo, que ajudará você a estudar.

Vamos começar essa jornada?

Os autores

CONHEÇA SEU LIVRO

ABERTURA



Uma imagem e um pequeno texto são apresentados no início de cada unidade para que você comece a refletir sobre os assuntos que serão estudados. Além disso, é uma oportunidade para que você possa resgatar os conhecimentos que já detém em relação aos temas indicados.

Indicação dos capítulos que compõem a unidade.

Após o texto inicial, há uma lista com os objetivos da unidade. A partir de cada objetivo, você saberá o que será estudado e poderá se preparar para as propostas que serão apresentadas.

DESENVOLVIMENTO DE CONTEÚDOS

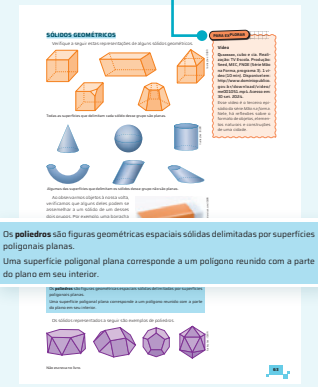
Ao longo deste volume, você encontrará textos, imagens, boxes e seções que vão ajudar você a compreender a importância da Matemática para sua formação cidadã e a continuidade de seus estudos.



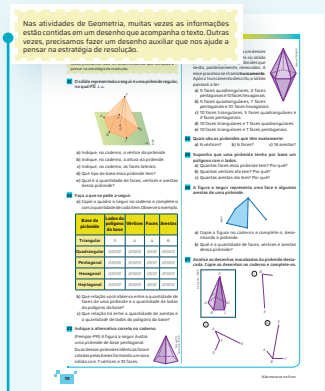
No início de cada capítulo, há uma lista com os principais assuntos que você vai estudar.

Objeto digital
O ícone indica um objeto digital presente no livro digital.

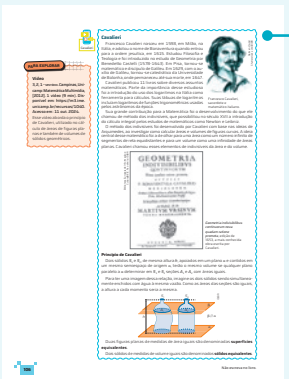
Para explorar
Esse boxe apresenta sugestões de visitas a museus, leituras complementares de livros, revistas e artigos, bem como indicações de filmes, *sites*, aplicativos e músicas.



As ideias e os conceitos mais importantes são apresentados em destaque.

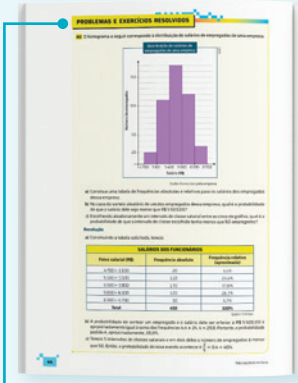


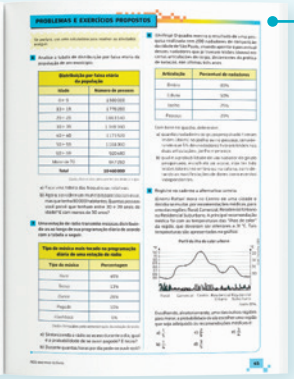
Fique de olho nas sugestões de estudo e nas reflexões para a resolução de alguns exercícios e do conteúdo apresentado.



Em diversos momentos, são sugeridos textos que permitem que você complemente seus estudos.

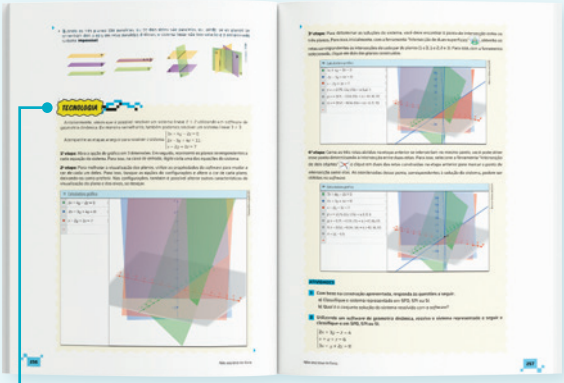
Não escreva no livro.



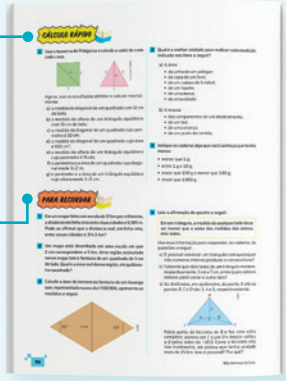


Problemas e exercícios resolvidos
Os exercícios resolvidos são boas oportunidades para você conhecer maneiras de resolver problemas e utilizar a escrita na linguagem matemática.

Problemas e exercícios propostos
Essa seção oferece atividades diversificadas para você resolver e avaliar seu aprendizado.

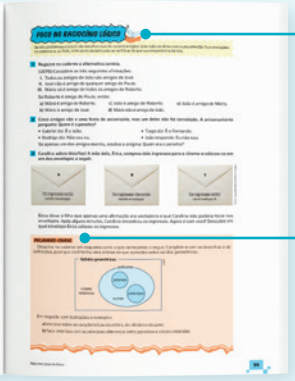


Tecnologia
Nessa seção, você vai conhecer e utilizar diversos recursos tecnológicos, como calculadora científica e alguns *softwares*, que ajudarão você a fazer gráficos, planilhas e simulações.



Cálculo rápido
Essa seção oferece exercícios para calcular mentalmente que podem ajudar você na resolução de problemas.

Para recordar
Nessa seção, são propostos exercícios para aprofundar o que você já estudou ou rever conhecimentos de anos anteriores que precisam estar sempre à sua disposição para você continuar aprendendo.

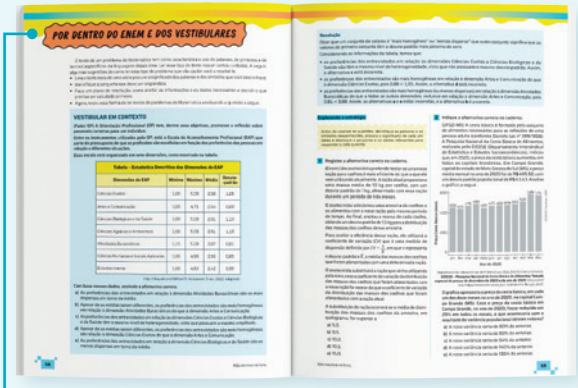


Foco no raciocínio lógico
Por meio dos problemas propostos nessa seção, você vai construir estratégias de resolução e usar o raciocínio dedutivo.

Palavras-chave
Esse boxe apresenta recursos importantes para quem estuda, com orientações de como organizar informações e fazer resumos e esquemas.



Matemática e...
Ao final de cada capítulo, você vai trabalhar com textos que mostram como a Matemática se associa a outras áreas do conhecimento.



Por dentro do Enem e dos vestibulares
Ao final de cada unidade, você vai mergulhar na resolução de um ou mais exercícios de uma prova oficial e, depois, aplicar o que aprendeu para resolver problemas de exames e de vestibulares de todo o Brasil.

SEÇÕES ESPECIAIS

SUMÁRIO

UNIDADE 1 — 8

PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

CAPÍTULO 1 **Estatística: medidas de dispersão** ... 10
Recordando Estatística ... 10
Dados organizados em classes ... 14
Representação gráfica de uma distribuição de frequências em classes ... 15
Medidas de tendência central: moda, média e mediana ... 16
Moda, média e mediana de dados agrupados em classes ... 17
Medidas de dispersão ... 18
Variância e desvio-padrão ... 18
Quartis ... 23
Representação gráfica ... 25
Um pouco mais sobre representação gráfica ... 26
Diagrama de ramos e folhas ... 26
Gráfico de radar ... 27
Matemática e vacinação ... 32

CAPÍTULO 2 **Probabilidade e Estatística** ... 34
Função ou distribuição de probabilidade ... 35
Probabilidade frequentista e lei dos grandes números ... 38
Lei dos grandes números ... 40
Objeto digital - *Podcast*
Família Bernoulli e suas contribuições para a Matemática ... 40
Média aritmética e desvio-padrão ... 46
Curva normal ... 47
Propriedades da distribuição normal ... 49
Matemática e eleição ... 56
Por dentro do Enem e dos vestibulares ... 58

UNIDADE 2 — 60

GEOMETRIA ESPACIAL

CAPÍTULO 3 **Sólidos geométricos: poliedros** ... 62
Sólidos geométricos ... 63
Poliedros ... 63
Prismas ... 66
Pirâmides ... 70
Objeto digital - Carrossel de imagens
Além das pirâmides do Egito ... 70
Planificação de prismas e de pirâmides ... 73
Um pouco mais sobre poliedros ... 77
Relação de Euler ... 78
Poliedro de Platão ... 80
Matemática e edificações ... 84

CAPÍTULO 4 **Sólidos geométricos: corpos redondos** ... 86
Cilindro ... 87
Elementos de um cilindro ... 87
Classificação de um cilindro ... 88
Planificação da superfície de um cilindro reto ... 88
Cone ... 91
Elementos de um cone ... 91
Classificação de um cone ... 91
Esfera ... 93
Posições relativas entre plano e esfera ... 94
Sólidos inscritos ou circunscritos ... 96
Matemática e reciclagem ... 100
Objeto digital - Infográfico clicável
Produção e ciclo de reciclagem do alumínio ... 101

CAPÍTULO 5 **Geometria métrica espacial** ... 102
Área da superfície dos prismas ... 103
Cálculo da medida da diagonal de um paralelepípedo reto-retângulo ... 103
Seções de um prisma ... 104
Volume de sólidos: princípio de Cavalieri ... 104
Objeto digital - *Podcast*
Cavalieri ... 106
Volume de prismas ... 107
Área da superfície e volume das pirâmides ... 114
Seção paralela à base de uma pirâmide triangular ... 114
Volume de pirâmides de base triangular ... 115
Volume de uma pirâmide de base qualquer ... 117
Área da superfície e volume dos tetraedros regulares ... 117
Tronco de pirâmide e pirâmides semelhantes ... 123
Volume de tronco de pirâmide ... 124
Área da superfície e volume dos corpos redondos ... 128
Comprimento da circunferência, área do círculo e de partes do círculo ... 128
Superfície de um cilindro e sua área ... 129
Volume de um cilindro ... 130
Superfícies de um cone e sua área ... 134
Volume de um cone ... 134
Objeto digital - Vídeo
Volumes de cilindros e cones e princípio de Cavalieri ... 134
Volume de uma esfera ... 138
Área da superfície de uma esfera ... 138
Matemática e meteorologia ... 146

Não escreva no livro.

CAPÍTULO 6 **Projeções cartográficas** 148
Geometria na esfera 151
Soma dos ângulos internos de um triângulo na esfera 151
Projeções cartográficas 155
Objeto digital - Mapa clicável
Fusos horários mundiais 156
Classificação e características das projeções cartográficas 157
Marcadores de Tissot 165
Matemática e tecnologia 170
Objeto digital - Vídeo
Geoprocessamento, localização e trabalho 171
Por dentro do Enem e dos vestibulares 172

UNIDADE 3 174
PROGRAMAÇÃO E PENSAMENTO COMPUTACIONAL

CAPÍTULO 7 **Pensamento computacional** 176
Linguagens de programação 178
Scratch 179
Pensamento computacional 185
Reconhecimento de padrões 185
Decomposição 185
Objeto digital - *Podcast*
Pensamento computacional: O superpoder que você não sabia que tinha! 185
Algoritmo 186
Abstração 186
Matemática e tecnologia 192

CAPÍTULO 8 **Algoritmos e fluxogramas** 196
Sistema binário 196
Relação entre o sistema de numeração binário e o decimal 197
Armazenamento de dados 200
Objeto digital - Infográfico clicável
Evolução dos dispositivos de armazenamento 201
Taxa de transferência 202
Outros exemplos de algoritmos 204
Código de barras 204
Fluxogramas 211
Elementos de um fluxograma 212
Matemática e tecnologia 226
Objeto digital - Carrossel de imagens
Inovações robóticas 226
Por dentro do Enem e dos vestibulares 230

UNIDADE 4 232
SISTEMAS LINEARES E MATRIZES

CAPÍTULO 9 **Sistemas lineares** 234
Objeto digital - Vídeo
Supercomputadores 234
Sistemas lineares 2×2 236
Resolução de sistemas lineares 2×2 236
Classificação de sistemas lineares 2×2 240
Sistemas lineares 3×3 245
Resolução de sistemas lineares 3×3 246
Classificação de sistemas lineares 3×3 251
Matemática e inteligência artificial (IA) 262

CAPÍTULO 10 **Matrizes** 264
Matrizes 265
Operações entre matrizes 268
Adição de matrizes 268
Multiplicação de matrizes 270
Matriz identidade 273
Matriz inversa 274
Matrizes e sistemas lineares 277
Matemática e tecnologia 284
Por dentro do Enem e dos vestibulares 286

Respostas das atividades de cálculo 288
Transcrição dos áudios 297
Lista de siglas 301
Bibliografia comentada 301

PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

Você sabe como funciona a classificação em alguns concursos e vestibulares?

O princípio básico é que os candidatos com a maior quantidade de acertos sejam os mais bem classificados. Porém, em concursos em que é realizada mais de uma prova, por exemplo, pode ser considerada, para classificação, a média aritmética entre as notas nessas provas. Caso ocorra empate entre os candidatos após o cálculo das médias, alguns concursos utilizam outras medidas estatísticas que consideram as menores e as maiores variações das notas em relação à média geral dos candidatos.

Nesta unidade, você vai conhecer e utilizar as medidas de dispersão para interpretar dados estatísticos e que podem ajudar a resolver situações como empates em concursos. Além disso, vai organizar contagens, aliar conceitos de Probabilidade com os da Estatística e, desse modo, resolver problemas inseridos em diferentes contextos.

OBJETIVOS

- Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas divulgados em vários meios de comunicação.
- Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências.
- Compreender e utilizar medidas estatísticas.
- Relacionar os conhecimentos de Probabilidade e de Estatística.
- Resolver problemas da vida cotidiana nos quais é necessário fazer escolhas que envolvem probabilidade.
- Elaborar argumentos e escrever conclusões.

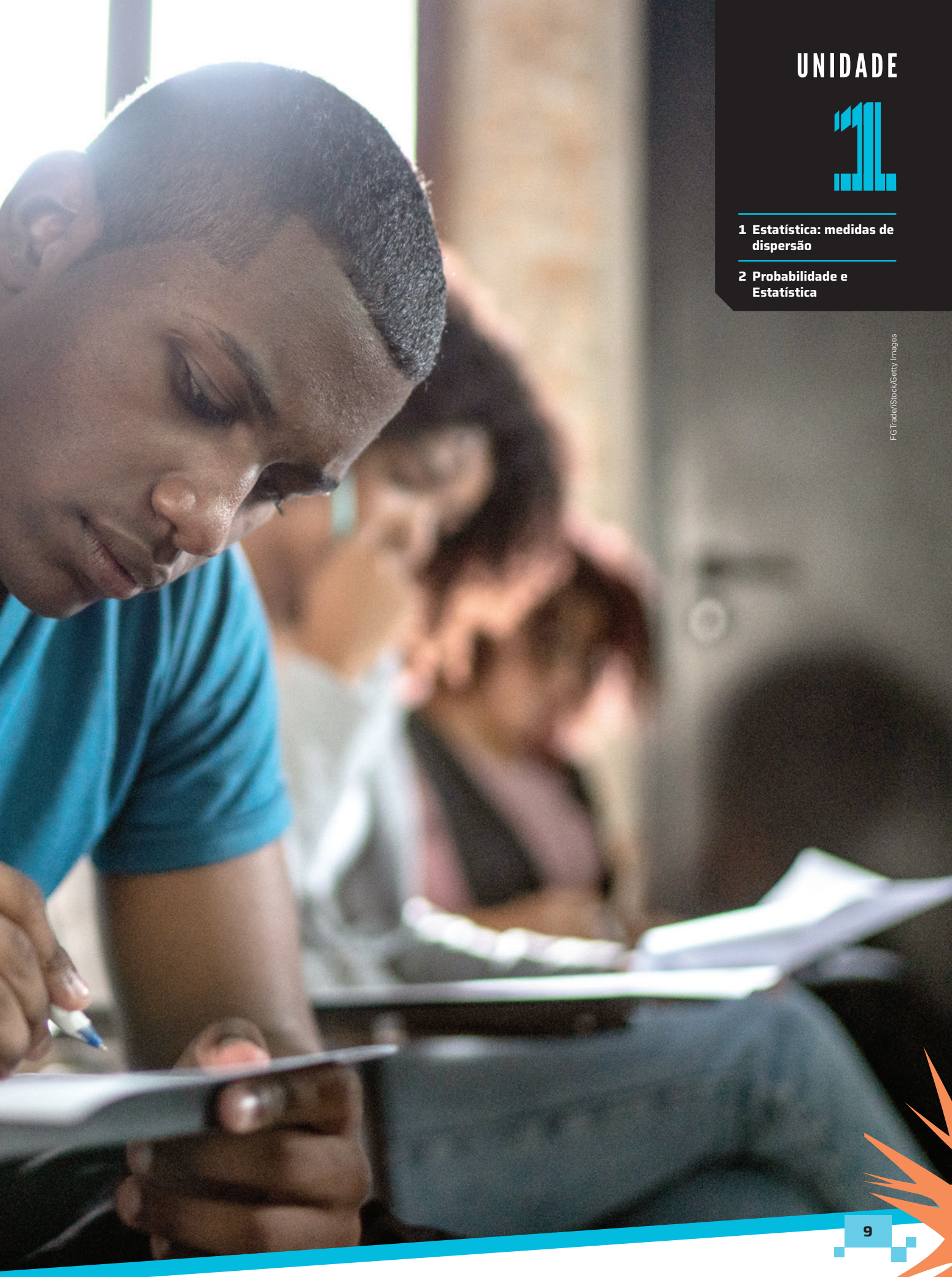


Estudante resolvendo uma prova. Foto de 2023.

UNIDADE 1

1 Estatística: medidas de dispersão

2 Probabilidade e Estatística



FG Trade/iStock/Getty Images

CAPÍTULO 1 CAPÍTULO 1 CAPÍTULO 1

ESTATÍSTICA: MEDIDAS DE DISPERSÃO

NESTE CAPÍTULO

- Representações gráficas
- Medidas de tendência central
- Medidas de dispersão
- Quartis

Neste capítulo, faremos a retomada dos conceitos e das relações centrais da Estatística para, então, avançar no estudo, apresentando aos estudantes as medidas de dispersão. Proponha a leitura individual deste tópico e uma discussão em pequenos grupos para dirimir dúvidas que eventualmente surgirem. Verifique e registre o que é preciso retomar com todos ou com alguns estudantes.

RECORDANDO ESTATÍSTICA

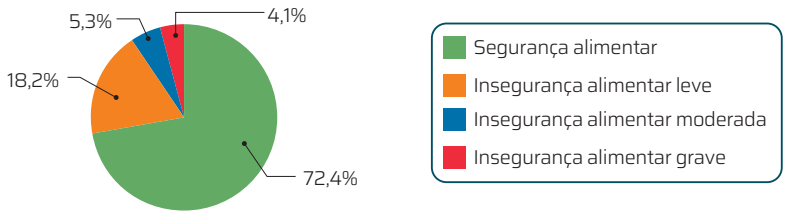
Neste capítulo, vamos retomar algumas ideias da Estatística estudadas em anos anteriores e entender como a Matemática desenvolve medidas que permitem analisar tendências de dados de uma população ou de qualquer conjunto de informações, e como os dados coletados em uma pesquisa podem ser organizados em diferentes tipos de tabela e gráfico.

Antes de avançar, vamos relembrar alguns tipos de gráfico e suas características. Acompanhe os exemplos.

Exemplo 1

O **gráfico de setores** a seguir foi construído a partir de dados divulgados da Pnad Contínua. Esses dados podem auxiliar no planejamento de medidas que visem combater a fome no Brasil.

Percentual da prevalência de segurança alimentar e insegurança alimentar leve, moderada e grave nos domicílios particulares permanentes, no Brasil (2023)



ID/BR

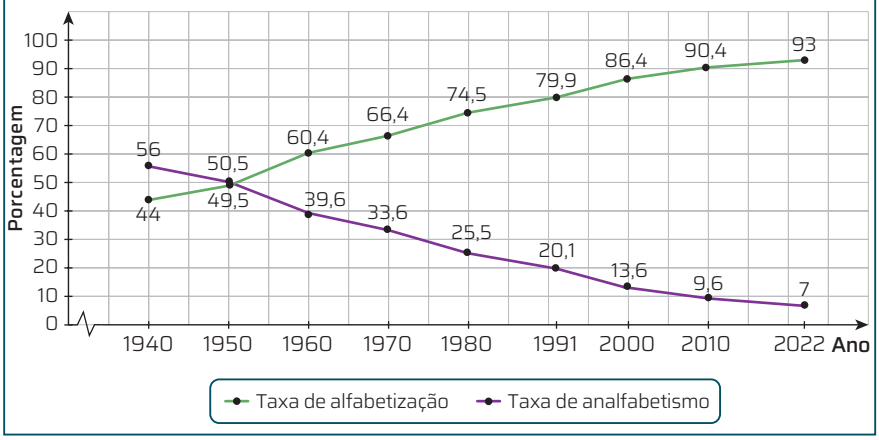
Fonte de pesquisa: Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. *Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua*: segurança alimentar 2023. Rio de Janeiro: IBGE, 2024. Disponível em: https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv102084.pdf. Acesso em: 30 ago. 2024.

A representação dos dados de uma pesquisa em um gráfico desse tipo costuma ocorrer quando se pretende destacar a relação entre as partes e o todo.

Exemplo 2

Agora, analise um **gráfico de linhas** ou **curvas**, que apresenta os dados publicados do Censo 2022 sobre as taxas de alfabetização e de analfabetismo dos brasileiros. Esse tema é investigado desde o primeiro Censo do país, que ocorreu em 1872.

Taxa de alfabetização e de analfabetismo das pessoas de 15 anos ou mais, no Brasil (1940-2022)



ID/BR

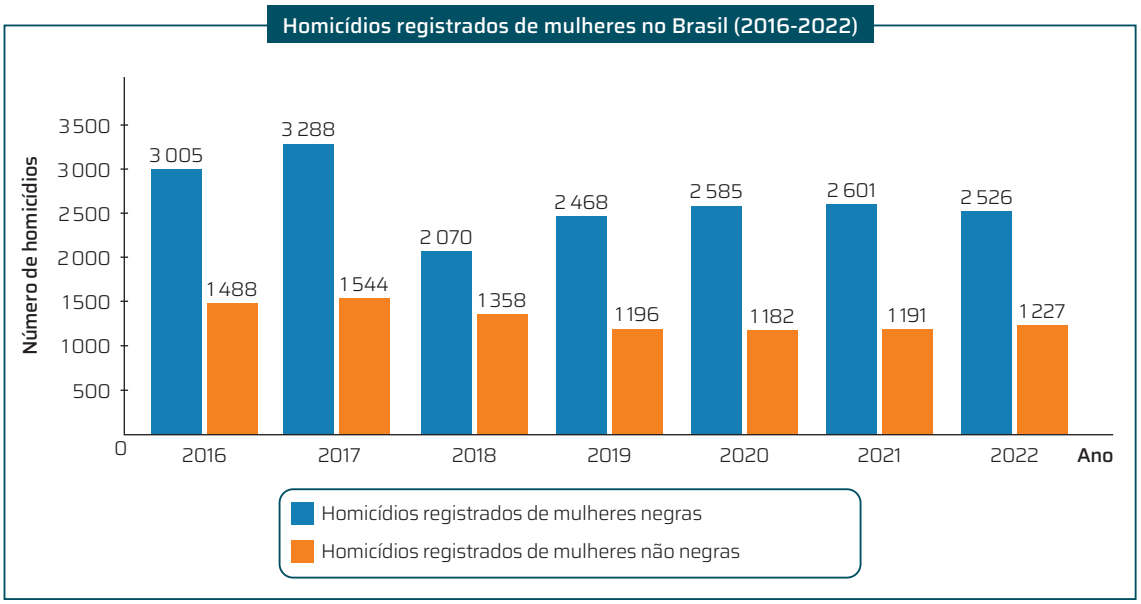
Fonte de pesquisa: Nery, Carmen. Censo 2022: taxa de analfabetismo cai de 9,6% para 7,0% em 12 anos, mas desigualdades persistem. *Agência IBGE Notícias*, Rio de Janeiro, 17 maio 2024. Disponível em: https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-noticias/2012-agencia-de-noticias/noticias/40098-censo-2022-taxa-de-analfabetismo-cai-de-9-6-para-7-0-em-12-anos-mas-desigualdades-persistem. Acesso em: 30 ago. 2024.

Não escreva no livro.

Um **gráfico de linhas ou curvas** utiliza uma linha para ligar os pontos que representam os dados pesquisados. Esse tipo de gráfico é muito utilizado na análise do comportamento de uma ou mais variáveis no decorrer do tempo, com períodos de crescimento, decrescimento ou constância.

Exemplo 3

Outra maneira de organizar as informações são os **gráficos de barras horizontais ou verticais**. Nesse tipo de gráfico, os dados são representados por meio de figuras retangulares (ou de blocos retangulares) dispostos vertical ou horizontalmente. Esse tipo de representação tem o objetivo de permitir uma comparação visual entre diferentes variáveis ou diferentes valores de uma mesma variável. O gráfico apresentado a seguir é chamado de **gráfico de barras verticais múltiplas**. Para esse tipo de gráfico, é necessário ter uma legenda que diferencie uma barra da outra.

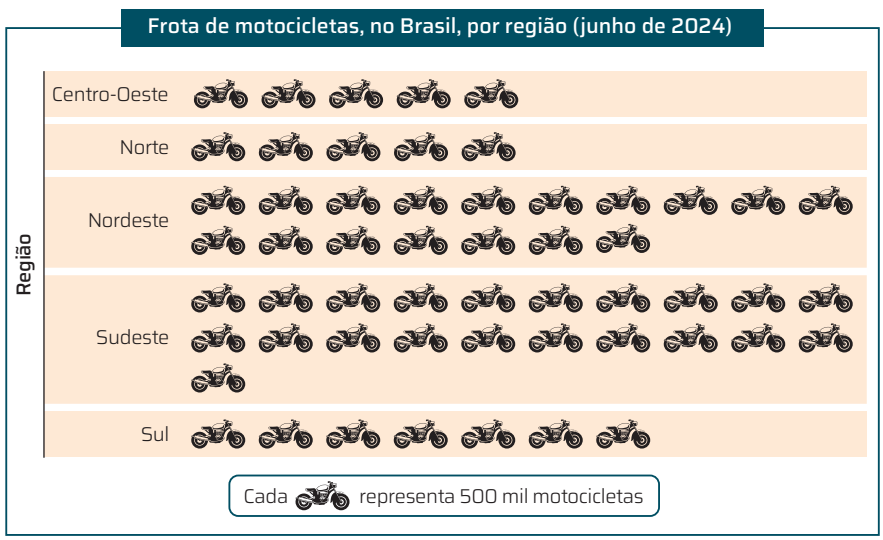


Fonte de pesquisa: Cerqueira, Daniel; Bueno, Samira (coord.). *Atlas da violência 2024*. Brasília, DF: Ipea; FBSP, 2024. Disponível em: https://www.ipea.gov.br/atlasviolencia/publicacoes. Acesso em: 30 ago. 2024

Exemplo 4

Há ainda o **gráfico pictórico ou pictograma**, um tipo de gráfico estilizado que utiliza desenhos ou ícones relacionados ao tema da pesquisa para representar seus dados.

O pictograma a seguir foi elaborado com base em informações divulgadas pela Secretaria Nacional de Trânsito (Senatran) sobre as frotas de veículos no Brasil em junho de 2024.



Fonte de pesquisa: Brasil. Ministério dos Transportes. Frota de veículos – 2024. Frota nacional (julho de 2024). *Frota por UF e tipo de veículo*. Disponível em: https://www.gov.br/transportes/pt-br/assuntos/transito/conteudo-Senatran/frota-de-veiculos-2024. Acesso em: 30 ago. 2024.

Em Estatística, há sempre o interesse por uma questão a ser investigada em um conjunto de pessoas ou de objetos, denominado **população**, ou de uma **amostra**, que é um subconjunto finito de uma população.

Não escreva no livro.

Explique aos estudantes que o número de indivíduos da amostra é menor que o da população.

Os dados de uma pesquisa podem ser apresentados de duas maneiras distintas: em sua **frequência absoluta**, que é o número de vezes que um dado é observado, e em sua **frequência relativa**, que representa a razão (geralmente na forma de percentual) entre o número de vezes que o dado é observado e o total de elementos da população pesquisada.

Ao realizar uma pesquisa estatística, escolhe-se um aspecto a ser investigado, chamado de **variável**, comum a todos os indivíduos. No caso do exemplo 1, a pesquisa foi realizada por meio de uma amostra de domicílios, de maneira a garantir a representatividade dos resultados para os níveis geográficos em que é produzida, e a população foi constituída por todas as pessoas moradoras em domicílios particulares permanentes situados na área de abrangência da pesquisa. Nesse caso, as variáveis estatísticas investigadas foram as situações de segurança alimentar e insegurança alimentar nesses domicílios.

As variáveis estatísticas podem ser classificadas em dois tipos:

- **qualitativas**: que exprimem atributo ou qualidade. Por exemplo: o grupo etário a que uma pessoa pertence, sua nacionalidade, cor dos olhos, tipos de transporte que costuma usar, preferências em geral (por um gênero musical, por um candidato em uma eleição, por um time de futebol, etc.).
- **quantitativas**: que exprimem contagem ou medida, ou seja, são numéricas. Por exemplo: idade, altura, salário, entre outros dados.

Os dados estatísticos costumam ser apresentados por meio de tabelas e gráficos. Note que, nos gráficos dos exemplos, há um **título**, que tem a função de descrever o conteúdo do gráfico, e uma **fonte**, que indica de onde foram coletados os dados, o que nos permite avaliar se as informações apresentadas são confiáveis ou mesmo fazer uma consulta para obter mais dados correlacionados.

1. a) O setor verde. Isso indica que há um percentual maior de domicílios particulares brasileiros em situação de segurança alimentar em relação aos domicílios em situação de insegurança alimentar leve.

1. c) Sim, pois, em 2023, 4,1% dos 78 322 000 domicílios particulares entrevistados estavam em situação de insegurança alimentar grave, o que correspondia a 3 211 202 domicílios particulares.

3. a) Número de homicídios registrados de mulheres não negras. Número de homicídios registrados de mulheres negras.

3. b)
- Verdadeira.
- Falsa. O número de homicídios registrados de mulheres negras é superior ao de mulheres não negras em todos os anos do período apresentado.
- Falsa. No ano de 2022, foram registrados 1 227 homicídios de mulheres não negras.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Nas atividades a seguir, você vai relembrar alguns dos conceitos de Estatística e refletir sobre eles para então avançar para os próximos tópicos.

1 **Analise o gráfico apresentado no exemplo 1 da página 10 e resolva as questões.**

a) Nesse gráfico, qual setor tem maior área: o verde ou o alaranjado? O que isso indica no contexto apresentado?

b) Em 2023, qual era o percentual de domicílios particulares brasileiros que estavam em segurança alimentar? 72,4%.

c) Segundo a Escala Brasileira de Insegurança Alimentar (Ebia), a insegurança alimentar grave é caracterizada pela quebra do padrão usual da alimentação com o comprometimento da qualidade e a redução da quantidade de alimentos de todos os membros da família, inclusive das crianças residentes no domicílio, podendo incluir ainda a experiência de fome. Sabendo que, na pesquisa Pnad Contínua de 2023, foram entrevistados 78 322 000 domicílios particulares, é correto afirmar que cerca de 3,2 milhões de domicílios brasileiros naquele ano estavam em insegurança alimentar grave? Justifique.

Resposta esperada: Sim, pois, em 2023, 4,1% dos 78 322 000 domicílios particulares entrevistados estavam em situação de insegurança alimentar grave, o que correspondia a 3 211 202 domicílios particulares.

2 **Retome as informações apresentadas no gráfico de linhas do exemplo 2, da página 10, para resolver as questões a seguir.**

a) Qual é o período abarcado pelos dados apresentados nesse gráfico? De 1940 a 2022.

b) Em 1940, que percentual de brasileiros estava enquadrado na situação de analfabetismo? E em 2022? 56%, em 1940; 7%, em 2022.

c) No Brasil, a partir de qual ano a taxa de alfabetização passou a ser maior que a taxa de analfabetismo? 1950.

3 **Analise os dados estatísticos apresentados no gráfico do exemplo 3, da página 11, e faça o que se pede em cada item a seguir.**

a) Nesse gráfico, o que é indicado pelas barras alaranjadas? E pelas barras azuis?

b) Classifique, no caderno, cada afirmativa a seguir em verdadeira ou falsa. Depois, reescreva cada afirmativa que classificou como falsa, corrigindo-a.

- Em 2018, foram registrados 2070 homicídios de mulheres negras.
- O número de homicídios registrados de mulheres não negras é superior ao de mulheres negras em todos os anos do período apresentado.
- No ano de 2022, foram registrados 1 227 homicídios de mulheres negras.

Não escreva no livro.

Consulte a resposta no Manual do Professor.

c) No caderno, construa um gráfico de linhas para representar os dados desse gráfico.

d) O racismo estrutural e a escassez de políticas públicas específicas para a proteção de mulheres negras são fatores conjunturais que precisam ser considerados para a compreensão dos altos números de homicídios de mulheres negras no Brasil. Historicamente, as mulheres negras sempre foram mais expostas a fatores geradores de violência em comparação com a realidade das mulheres não negras. No caderno, elabore um texto apresentando suas conclusões sobre esse fenômeno tendo por base os dados do gráfico e as informações adicionais obtidas em uma pesquisa pessoal.

Resposta pessoal.

4 **Na página 11, há um pictograma. Analise esse gráfico e realize o que é proposto nos itens a seguir.**

a) Em junho de 2024, em qual região havia a maior frota de motocicletas? Quantos milhões de motocicletas compunham essa frota? Sudeste; 10,5 milhões.

b) Que outra figura você escolheria para construir esse pictograma? Resposta pessoal.

c) Com base nas informações do gráfico, elabore duas questões e troque-as com um colega para que ele as resolva, enquanto você resolve aquelas que ele elaborou. Por fim, confiram juntos as resoluções. Resposta pessoal.

5 **Você sabe o que é um quilombo? Segundo a Coordenação Nacional de Articulação das Comunidades Negras Rurais Quilombolas (Conaq):**

[...]

[a] palavra *quilombo* é originária do idioma africano quimbunco [e] significa: sociedade formada por jovens guerreiros que pertenciam a [grupos] étnicos desenraizados de suas comunidades.

[...]

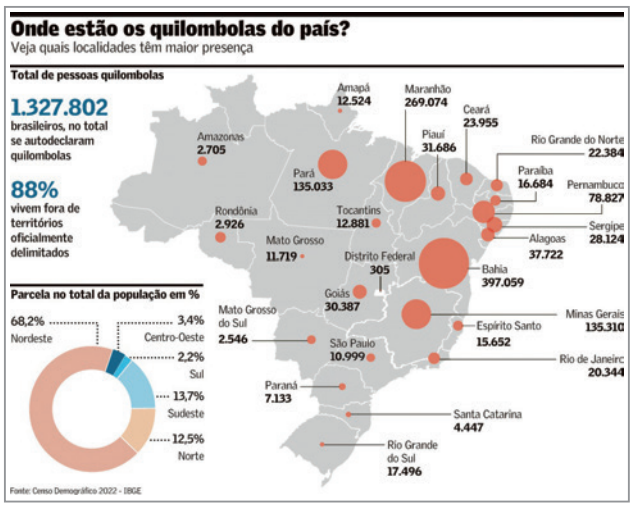
O Território Remanescente de Comunidade Quilombola é uma concretização das conquistas da comunidade afrodescendente no Brasil, fruto das várias e heroicas resistências ao modelo escravagista e opressor instaurado no Brasil colônia e do reconhecimento dessa injustiça histórica. [...]

Os remanescentes de quilombo são definidos como grupos [etnorraciais] que tenham também uma trajetória histórica própria, dotado de relações territoriais específicas, com presunção de ancestralidade negra relacionada com a resistência à opressão histórica sofrida, e sua caracterização deve ser dada segundo critérios de autoatribuição atestada pelas próprias comunidades, como também adotado pela Convenção da OIT sobre Povos Indígenas e Tribais.

[...]

Coordenação Nacional de Articulação das Comunidades Negras Rurais Quilombolas – Conaq. Quilombo? Quem somos nós! Disponível em: https://conaq.org.br/quem-somos/. Acesso em: 30 ago. 2024.

Em 2022, pela primeira vez, o Censo Demográfico – a mais abrangente pesquisa sobre a população brasileira, realizada periodicamente pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) – contabilizou a população quilombola do Brasil. Segundo a pesquisa, cerca de 1,3 milhão de pessoas se autodeclararam quilombolas na pesquisa. Leia o infográfico, que apresenta mais informações.



Valor Econômico/Rafael Vazquez e Alessandra Saraiva/ https://valor.globo.com/brasil/noticia/2023/07/28/brasil-tem-13-milhao-de-quilombolasmas-so-12-em-area-demarcada.ghtml publicada em 28 de julho de 2023

Vazquez, Rafael; Saraiva, Alessandra. Brasil tem 1,3 milhão de quilombolas, mas só 12% em área demarcada. *Valor Econômico*, 28 jul. 2023. Disponível em: https://valor.globo.com/brasil/noticia/2023/07/28/brasil-tem-13-milhao-de-quilombolas-mas-so-12-em-area-demarcada.ghtml. Acesso em: 10 out. 2024.

O infográfico, gênero textual presente em diferentes mídias, utiliza gráficos e outros recursos visuais para trazer informações e dados estatísticos de modo sucinto e objetivo.

Com base nos dados do infográfico reproduzido aqui, resolva as questões.

a) Em 2022, qual era a população quilombola no estado em que você mora? Resposta pessoal. A resposta dependerá do estado em que o estudante mora.

b) Qual é a região do Brasil com maior população quilombola? Nordeste.

c) Analise os dados apresentados no infográfico sobre o total da população quilombola no Brasil. Em seguida, sugira um tipo de gráfico que possa representar esses dados. Explique a um colega a sua escolha. Resposta pessoal.

Os conceitos e os procedimentos envolvidos no estudo de dados organizados em classes são mais elaborados, por isso é interessante que os estudantes façam uma primeira leitura individual para, depois, sob sua orientação, ser realizada uma análise coletiva dos exemplos e dos modos de efetuar registros em tabelas e histogramas.

Dados organizados em classes

Algumas vezes, em uma pesquisa estatística, os dados assumem valores distintos uns dos outros, não sendo possível determinar uma tendência. Acompanhe o exemplo a seguir.

Exemplo 5

Ao medir a altura, em metro, dos estudantes de uma turma, obtivemos os seguintes dados organizados em ordem crescente: 1,55; 1,57; 1,58; 1,59; 1,61; 1,61; 1,65; 1,65; 1,66; 1,66; 1,67; 1,67; 1,68; 1,69; 1,71; 1,71; 1,72; 1,75; 1,76; 1,77; 1,79; 1,80; 1,82; 1,83; 1,83; 1,85; 1,90; 1,92.

No caso de muitos dados dispersos, é possível agrupar os valores da variável em **intervalos de classes**, ou seja, em intervalos com a mesma amplitude. Em relação ao exemplo apresentado, podemos organizar os dados em classes com amplitude de 10 cm e verificar a quantidade de estudantes para cada intervalo, como na tabela a seguir.

O símbolo $\vdash$ usado na descrição de um intervalo de classes significa o intervalo de valores que inclui o limite inferior do intervalo e exclui o limite superior do intervalo, ou seja, a notação $1{,}65 \vdash 1{,}75$ indica que 1,65 pertence e que 1,75 não pertence a esse intervalo de classe. Além disso, essa notação também pode ser representada pelo intervalo real $[1{,}65; 1{,}75[$ ou ainda $\{x \in \mathbb{R} \mid 1{,}65 \leqslant x < 1{,}75\}$.

Informações dos estudantes de uma turma da escola	
Altura (em metro)	**Quantidade de estudantes**
$1{,}55 \vdash 1{,}65$	6
$1{,}65 \vdash 1{,}75$	11
$1{,}75 \vdash 1{,}85$	8
$1{,}85 \vdash 1{,}95$	3

Dados obtidos pela escola.

Com essa organização, observa-se nessa turma uma tendência maior para estudantes com altura entre 1,65 m e 1,75 m.

Chamamos de **ponto médio de classe** o valor que divide o intervalo de classe em duas partes iguais. Por exemplo, para calcular o ponto médio do intervalo de classe $1{,}65 \vdash 1{,}75$, é necessário adicionar os valores dos extremos do intervalo e dividir o resultado por 2. Sendo assim, o ponto médio dessa classe é 1,70 m, pois $1{,}70 = \frac{1{,}65 + 1{,}75}{2}$. Conhecido o ponto médio, podemos interpretá-lo como o valor que representa esse intervalo de classe.

Para os dados agrupados em classes, podemos calcular a frequência relativa de cada classe como a razão (escrita na forma de percentual) entre a frequência absoluta e o total de elementos da população pesquisada.

Agora, considerando o exemplo da turma com 28 estudantes, podemos construir a tabela de distribuição de frequência. Inicialmente, vamos determinar a **frequência absoluta** (**f**) correspondente a cada intervalo de classe. Em seguida, determinar a **frequência relativa** (**fr**) correspondente a esses intervalos de classe. Acompanhe:

Informações dos estudantes de uma turma da escola		
Altura (em metro)	**Frequência absoluta (f)**	**Frequência relativa (fr)**
$1{,}55 \vdash 1{,}65$	6	$21\% \simeq \frac{6}{28} = 0{,}21428$
$1{,}65 \vdash 1{,}75$	11	39%
$1{,}75 \vdash 1{,}85$	8	29%
$1{,}85 \vdash 1{,}95$	3	11%

Dados obtidos pela escola

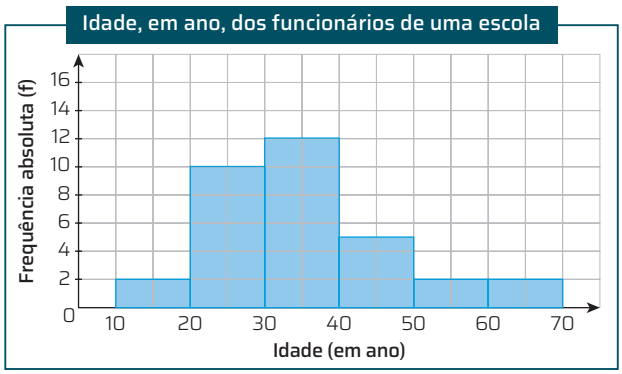
Não escreva no livro.

Representação gráfica de uma distribuição de frequências em classes

A representação da distribuição de frequências absolutas ou relativas é feita por meio de um **histograma** ou de um **polígono de frequências**.

Em um histograma, cada classe é representada por uma figura retangular vertical (coluna) cuja largura corresponde à amplitude dos intervalos considerados e cuja altura é proporcional à frequência absoluta ou relativa correspondente.

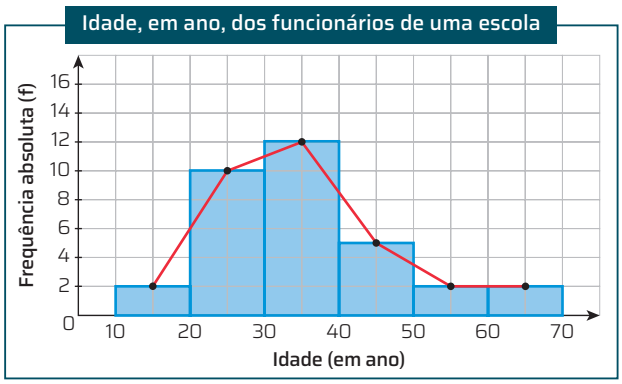
Analise o histograma da distribuição de frequência da idade dos funcionários de uma escola, sabendo que todos os funcionários têm mais de 18 anos.



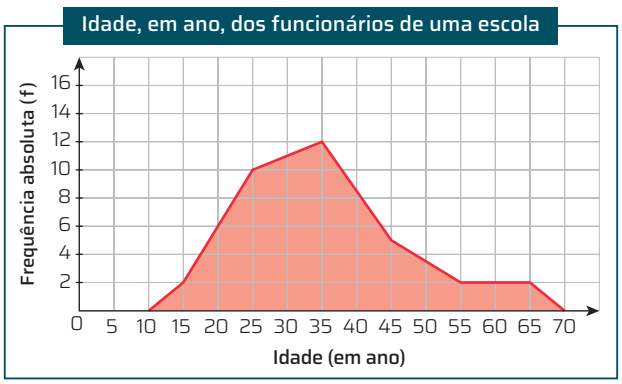
ID/BR

Dados obtidos pela escola.

O **polígono de frequência** é um gráfico construído a partir do histograma da seguinte maneira: os pontos médios das bases superiores das colunas do histograma são unidos por segmentos de reta e, em seguida, a figura obtida é unida ao eixo das abscissas, em pontos equidistantes dos últimos pontos médios, como mostram as figuras a seguir.



Dados obtidos pela escola.



Ilustrações: ID/BR

Dados obtidos pela escola.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

6 Construa um histograma e um polígono de frequência para representar os dados da tabela a seguir.

Consulte as respostas das atividades **6** e **7** no Manual do Professor.

Distribuição de 150 empresas segundo o número de empregados	
Número de empregados	**Número de empresas**
0 ⊢ 20	12
20 ⊢ 40	15
40 ⊢ 60	45
60 ⊢ 80	46
80 ⊢ 100	32
Total	150

Dados fictícios.

7 Durante 30 dias, contou-se o número de erros de impressão cometidos na primeira página de um jornal. Os resultados constam da lista a seguir.

5	8	9	4	8	17	42	26	32	21
7	6	8	19	32	29	17	23	22	21
22	27	12	16	17	12	11	8	4	12

a) Com base nesses dados, construa uma tabela de distribuição de frequência com dados agrupados em intervalos de classes.

Você pode organizar os dados em classes de 10 em 10, ou de 5 em 5, ou de 4 em 4.

b) Com base na resposta do item **a**, construa um histograma para representar esses dados.

O trabalho com este tópico possibilita que os estudantes desenvolvam a habilidade **EM13MAT316**, na medida em que interpretam o texto, mobilizam conhecimentos na resolução de problemas e registram as soluções usando a linguagem matemática de maneira adequada, uma vez que exploram o cálculo e a interpretação das medidas de tendência central.
Os conceitos de moda, média e mediana têm sido estudados desde o Ensino Fundamental, por isso considere utilizar o trabalho com este tópico, bem como as atividades da seção *Problemas e exercícios e propostos*, como uma avaliação diagnóstica do que os estudantes já aprenderam. Para isso, solicite a eles que, após a leitura individual, expliquem, em duplas, um para o outro, o que é e como se calcula cada uma das medidas de tendência central.

Medidas de tendência central: moda, média e mediana

Em algumas situações, é necessário fazer referência a um conjunto extenso de dados (obtidos em uma pesquisa, por exemplo) usando poucos valores ou até mesmo um único valor que represente a tendência de todo o conjunto de dados. Nesses casos, podemos utilizar as medidas de tendência central: **média aritmética**, **moda** e **mediana**.

Considere a situação a seguir.

Determinada sede do Comando do Corpo de Bombeiros realizou um levantamento dos atendimentos realizados diariamente durante um ano. Em seguida, os dados obtidos foram organizados na tabela de frequência a seguir.

Resultado do levantamento sobre o número de atendimentos diários realizados por uma sede do Comando do Corpo de Bombeiros

Número de atendimentos diários	f (em dias)	fr (%)
0	84	23
1	105	28,8
2	72	19,7
3	59	16,2
4	28	7,7
5	15	4,1
6	2	0,5
Total	365	100

Dados obtidos pelo Corpo de Bombeiros.

Vamos, então, interpretar os dados aproveitando o apoio das medidas de tendência central, assim poderemos ter uma ideia de como a variável se distribui sem precisar ler todos os dados estatísticos.

Observamos que, nesses dados, o valor de maior frequência é 1 (um atendimento), que corresponde à maior ocorrência do número de atendimentos diários (105 dias) por essa sede durante um ano. Assim, dizemos que a **moda** (**Mo**) desse conjunto de dados foi 1 atendimento, que pode ser indicada por Mo = 1.

Podemos também, por exemplo, determinar a média de atendimentos diários. O valor da média representa o conjunto de todos os dados, ou seja, é em torno dela que os dados se distribuem. Para isso, é preciso calcular a **média aritmética** ($\overline{X}$) deles, assim:

$$\overline{X} = \frac{(84 \cdot 0 + 105 \cdot 1 + 72 \cdot 2 + 59 \cdot 3 + 28 \cdot 4 + 15 \cdot 5 + 2 \cdot 6)}{365} = \frac{625}{365} \simeq 1{,}7$$

Portanto, podemos dizer que, esse grupo de bombeiros realizou, em média, 1,7 atendimento diário, no ano desse levantamento de dados.

Outra medida de tendência central que se pode calcular para um conjunto de dados é a **mediana** (**Me**). A mediana de um conjunto de valores é o valor central desses dados, quando eles estão dispostos em ordem crescente ou decrescente, ou seja, o valor que separa esses valores organizados em dois subconjuntos com exatamente, ou aproximadamente, o mesmo número de elementos. Portanto, 50% dos dados serão menores que a mediana e 50% dos dados serão maiores que esse valor.

Por exemplo: Considere que a quantidade de gols marcados por um time em dez partidas de um campeonato foi (por ordem de partida) 3, 2, 1, 0, 4, 1, 0, 1, 2 e 2. Organizando esses valores em ordem crescente, temos: 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4.

Os valores centrais dessa sequência são dois: 1 e 2. Nesse caso, a mediana dos gols é 1,5 gol, pois $\frac{1+2}{2} = 1{,}5$.

Se considerássemos apenas as cinco últimas partidas, por exemplo, a mediana seria 2 gols.

Resumindo:

A **mediana** de uma sequência de n valores em ordem crescente ou decrescente é:

- o valor que estiver na posição central, se n for ímpar;
- a média aritmética dos dois valores centrais da sequência, se n for par.

No exemplo dos atendimentos diários dos bombeiros, a mediana também é 1 atendimento porque é o valor que corresponde à posição 183 (posição central dos 365 dias de observação).

Não escreva no livro.

O entendimento das medidas de tendência central para dados agrupados em classes é mais complexo e, por isso, exige mais tempo. Avalie se há necessidade de apresentar outros exemplos além dos abordados no Livro do Estudante.

Moda, média e mediana de dados agrupados em classes

Nos casos em que os dados estão agrupados em intervalos de classes, apesar de não conhecermos cada valor do conjunto de dados, podemos estimar a média, a moda e a mediana. Para isso, determinamos o valor médio de cada intervalo de classe, que corresponde à média entre seus extremos. Acompanhe o exemplo.

Exemplo 6

Uma associação cultural destinada a pessoas com mais de 55 anos de idade organizou as idades de 100 de seus associados como na tabela apresentada.

Distribuição dos associados segundo a idade	
Idade (em ano)	**f**
55 ⊢ 60	5
60 ⊢ 65	12
65 ⊢ 70	19
70 ⊢ 75	25
75 ⊢ 80	20
80 ⊢ 85	10
85 ⊢ 90	7
90 ⊢ 95	2

Dados obtidos pela associação.

Nesse caso, para calcular a moda desse conjunto de dados, identificamos a classe de maior frequência absoluta; ela será a **classe modal**. Nesse caso, a maior frequência absoluta é 25 e a classe modal é 70 ⊢ 75. Em seguida, determinamos o valor médio da classe modal:

$$\frac{70 + 75}{2} = 72{,}5$$

Portanto, podemos estimar que a moda das idades dos associados é 72,5 anos.

Para calcular a média aritmética desse conjunto de dados, podemos adicionar os produtos do valor médio de cada intervalo de classe pela frequência absoluta dele e dividir o resultado obtido pelo total da frequência absoluta.

$$\overline{X} = \frac{57{,}5 \cdot 5 + 62{,}5 \cdot 12 + 67{,}5 \cdot 19 + 72{,}5 \cdot 25 + 77{,}5 \cdot 20 + 82{,}5 \cdot 10 + 87{,}5 \cdot 7 + 92{,}5 \cdot 2}{100} = \frac{7\,305}{100} = 73{,}05$$

Portanto, podemos estimar que a média das idades dos associados é aproximadamente 73 anos.

Se a quantidade de valores for ímpar, a mediana corresponderá ao valor médio do intervalo de classe que contém o valor central dos dados. Se a quantidade de valores for par, a mediana corresponderá à média aritmética dos valores médios dos intervalos de classe que contêm os dois valores centrais.

Nesse caso, como a quantidade de valores é par (100), podemos calcular a mediana pela média aritmética das idades nas posições 50 e 51 dos dados, dispostos em ordem crescente. Isso acontece na classe 70 ⊢ 75 cujo ponto médio é 72,5; daí a mediana das idades desses indivíduos ser 72,5 anos.

Isso significa que deve haver 50 indivíduos com idade inferior ou igual a 72,5 anos e outros 50 indivíduos com idade superior ou igual a 72,5 anos.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

8 **Em um município foi realizada uma pesquisa sobre a faixa salarial mensal (em salário mínimo) dos trabalhadores. Os dados recolhidos estão expressos na tabela a seguir.**

Distribuição da remuneração mensal		
Faixa salarial (em salário mínimo)	**Número de trabalhadores**	**fr (%)**
Até 3	11 770 000	67,1
De 3 a 7	3 931 000	22,4
De 7 a 15	1 355 000	7,7
Mais de 15	483 000	2,8
Total	17 539 000	100

Dados fictícios.

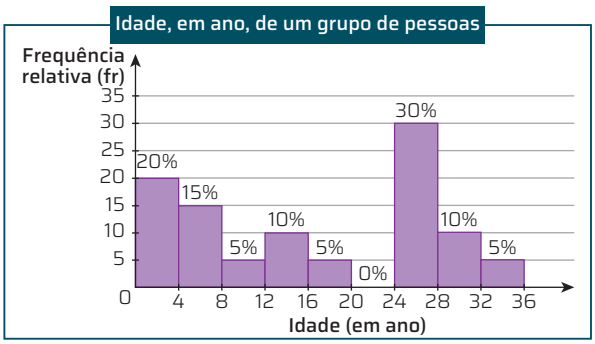
Indique as faixas:

a) da média aritmética dos salários; De 3 a 7 salários.

b) do salário mediano; Até 3 salários.

c) da moda dessa distribuição. Até 3 salários.

9 **No histograma a seguir, estão representadas as idades de um grupo de pessoas.**



Dados fictícios.

Com base nos dados do histograma, responda às questões.

a) Qual é a média das idades? 16,5 anos.

b) Qual é o percentual total de pessoas com 16 anos ou mais? 50%

Não escreva no livro.

MEDIDAS DE DISPERSÃO

"Se uma pessoa comeu dois pedaços de frango e outra não comeu nenhum, em média cada uma comeu um pedaço de frango."

Essa frase – que esboça, com certo humor, um ponto de vista da Estatística – não agradaria muito a quem ficou sem um pedaço de frango.

Dependendo da situação, no cálculo da média aritmética, há alguma informação que se perde. A média, apesar de ser uma medida bastante utilizada em Estatística, às vezes, pode ser insuficiente para caracterizar aceitavelmente uma distribuição. A moda e a mediana também são medidas que não informam muito bem como os valores da variável estão distribuídos. Por isso, foi preciso encontrar outro indicador que informasse a maneira como os dados se distribuem em volta da média.

Variância e desvio-padrão

Acompanhe atentamente a situação a seguir.

Em uma escola, há três turmas em que a média das idades é 16 anos. A distribuição das idades dos estudantes dessas turmas é a seguinte:

Turma A	Idade	15	16	17
	Número de estudantes	3	15	3

Dados fornecidos pela direção da escola.

Turma B	Idade	14	15	16	17	18
	Número de estudantes	3	7	1	7	3

Dados fornecidos pela direção da escola.

Turma C	Idade	14	15	16	17	18	19	20
	Número de estudantes	7	6	1	2	1	0	4

Dados fornecidos pela direção da escola.

Observando as distribuições, percebemos diferenças muito grandes nas idades, apesar de as médias serem iguais. Na turma C, só há 8 estudantes com idade superior ou igual a 16 anos, enquanto na turma A há 18 e, na B, 11.

É possível obter um indicador numérico que informe a existência dessas diferenças? Ou seja, como podemos medir essa disparidade entre as distribuições?

Temos que a **amplitude** das idades (isto é, a diferença entre a maior e a menor idade) em cada turma também é distinta. Na turma A é 2 anos, na B é 4 anos, e na C, 6 anos. Contudo, essa informação sozinha não nos diz nada sobre a distribuição das idades.

Há duas medidas estatísticas, a **variância** e o **desvio-padrão**, que complementam as informações dadas pela média. Essas medidas permitem a análise da dispersão de dados.

Para obter essas medidas de dispersão, partimos da diferença que cada valor tem em relação à média. Essa diferença chamamos de **desvio**.

Vamos entender isso a partir da situação com as turmas A, B e C.

Nas três turmas, $\overline{X} = 16$, ou seja, 16 anos. O desvio de um valor em relação à média $\overline{X}$ é a diferença entre esse valor e $\overline{X}$. Na turma A, temos:

Turma A			
Idade	**Desvio**	**(Desvio)²**	**Número de estudantes**
15	$15 - 16 = -1$	1	3
16	$16 - 16 = 0$	0	15
17	$17 - 16 = 1$	1	3

Dados fornecidos pela direção da escola.

Não escreva no livro.

O desvio −1 aparece na distribuição dos estudantes 3 vezes; o desvio 0 ocorre 15 vezes; e o desvio 1 aparece 3 vezes.

A variância é a média dos quadrados dos desvios e é representada por V. No caso da turma A, temos:

$$V = \frac{3 \cdot 1 + 15 \cdot 0 + 3 \cdot 1}{21} = \frac{6}{21} \simeq 0{,}29$$

O desvio-padrão é definido como a raiz quadrada da variância e representado por DP ou pela letra grega σ (sigma).

$$DP = \sqrt{V}$$

Essa é uma maneira de medir os desvios dos dados em relação à média, independentemente de os dados serem maiores ou menores que a média $\overline{X}$.

No caso da turma A, temos:

$$DP = \sqrt{0{,}29} \simeq 0{,}54$$

Na turma B, temos:

Turma B			
Idade	**Desvio**	**(Desvio)²**	**Número de estudantes**
14	14 − 16 = −2	4	3
15	15 − 16 = −1	1	7
16	16 − 16 = 0	0	1
17	17 − 16 = 1	1	7
18	18 − 16 = 2	4	3

Dados fornecidos pela direção da escola.

$$V = \frac{3 \cdot 4 + 7 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 7 \cdot 1 + 3 \cdot 4}{21} = \frac{12 + 7 + 0 + 7 + 12}{21} = \frac{38}{21} \simeq 1{,}81$$

$$DP = \sqrt{1{,}81} \simeq 1{,}35$$

Na turma C, temos:

Turma C			
Idade	**Desvio**	**(Desvio)²**	**Número de estudantes**
14	14 − 16 = −2	4	7
15	15 − 16 = −1	1	6
16	16 − 16 = 0	0	1
17	17 − 16 = 1	1	2
18	18 − 16 = 2	4	1
19	19 − 16 = 3	9	0
20	20 − 16 = 4	16	4

Dados fornecidos pela direção da escola.

$$V = \frac{7 \cdot 4 + 6 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 9 + 4 \cdot 16}{21} = \frac{28 + 6 + 0 + 2 + 4 + 0 + 64}{21} = \frac{104}{21} \simeq 4{,}95$$

$$DP = \sqrt{4{,}95} \simeq 2{,}22$$

Podemos organizar esses dados em um quadro para analisar as três turmas da seguinte maneira:

Turma	Variância	Desvio-padrão
A	0,29	0,54
B	1,81	1,35
C	4,95	2,22

Como podemos observar, as variâncias e os desvios são muito diferentes. Na turma A, as idades estão mais concentradas em torno da média, pois o desvio-padrão é menor, enquanto o maior desvio-padrão aparece na turma C.

O significado de desvio em Estatística é o mesmo que atribuímos a esse termo na linguagem cotidiana. Quando dizemos, por exemplo, que um navio se desviou de sua rota, isso significa que havia um percurso a ser seguido e o navio se afastou dele. Analogamente, em Estatística, o desvio-padrão expressa quanto os dados se afastam do valor de referência, que é a média.

Boa parte dos estudantes desconhece como e por que usar as atividades da seção *Problemas e exercícios resolvidos*. Por isso, é importante que eles sejam orientados a ler essas atividades e a analisá-las tendo em vista que elas podem ajudá-los a resolver as atividades da seção *Problemas e exercícios propostos*, que está na próxima página deste capítulo.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Ao analisar as atividades resolvidas, procure:

- ler o enunciado calmamente, mais de uma vez se necessário, para compreender o que se pede;
- identificar palavras ou expressões desconhecidas e buscar o significado delas, organizando uma lista para consulta, se considerar conveniente;
- ver a resolução e analisar cada estratégia escolhida, tentando entender o porquê de cada escolha.

R1 **Lucas e Evandro tiveram média anual 6,5 em determinada disciplina. No entanto, essa média não é suficiente para mostrar o desenvolvimento desses estudantes durante o ano. A tabela a seguir apresenta as notas bimestrais de cada um deles.**

Notas bimestrais dos estudantes				
Estudante	1º bimestre	2º bimestre	3º bimestre	4º bimestre
Lucas	3,5	8,5	8,0	6,0
Evandro	7,0	6,5	6,5	6,0

Dados obtidos pela professora.

A variância e o desvio-padrão permitem determinar qual dos estudantes tem o desempenho mais regular. Calcule essas medidas e mostre por que Evandro apresenta um desempenho mais regular que Lucas.

Resolução

- Notas de Lucas

  Para calcular a variância, devemos primeiro calcular os desvios.

Nota	Desvio	(Desvio)²
3,5	$3,5 - 6,5 = -3$	9
6,0	$6,0 - 6,5 = -0,5$	0,25
8,0	$8,0 - 6,5 = 1,5$	2,25
8,5	$8,5 - 6,5 = 2,0$	4,0

A variância, então, será dada por:

$$V = \frac{9 + 0,25 + 2,25 + 4,0}{4} = \frac{15,5}{4} = 3,875$$

O desvio-padrão é dado por:

$$DP = \sqrt{3,875} \simeq 1,97$$

- Notas de Evandro

  Para calcular a variância, devemos primeiro calcular os desvios.

Nota	Desvio	(Desvio)²
7,0	$7,0 - 6,5 = 0,5$	0,25
6,5	$6,5 - 6,5 = 0$	0
6,5	$6,5 - 6,5 = 0$	0
6,0	$6,0 - 6,5 = -0,5$	0,25

A variância, então, será dada por:

$$V = \frac{0,25 + 0 + 0 + 0,25}{4} = \frac{0,5}{4} = 0,125$$

O desvio-padrão é dado por:

$$DP = \sqrt{0,125} \simeq 0,35$$

Como a variância das notas de Evandro é menor que a variância das notas de Lucas, concluímos que Evandro teve um desempenho mais regular que Lucas.

Como o desvio-padrão é a raiz quadrada da variância, chegamos à mesma conclusão: Evandro teve um desempenho mais regular que Lucas.

Não escreva no livro.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Esta seção é precedida pela seção *Problemas e exercícios resolvidos*, para que os estudantes exerçam o raciocínio por analogia, na medida em que se apoiam em atividades resolvidas para transferir estratégias e representações na resolução de problemas e exercícios semelhantes.

> A cada problema, retorne ao texto e às atividades da seção *Problemas e exercícios resolvidos* para investigar qual delas pode auxiliá-lo a resolver a atividade que você deve solucionar agora.

As atividades **10** a **20** possibilitam que os estudantes desenvolvam a habilidade **EM13MAT316**, pois exploram o cálculo e a interpretação de medidas de tendência central.

10 Calcule a média aritmética e o desvio-padrão dos dados apresentados a seguir.

a) 4, 4, 6, 6 5; 1

b) 3, 3, 7, 7 5; 2

11 Estime a média aritmética e o desvio-padrão dos dados apresentados a seguir.

5; aproximadamente 2,16.

2, 2, 3, 3, 4, 4, 6, 6, 7, 7, 8, 8

12 O comitê de esportes de um município precisa selecionar uma equipe para uma competição. O coordenador tem dúvidas sobre o atleta que deve representar a cidade nos 400 metros rasos. Ele resolveu analisar as marcas de dois atletas nas últimas competições e organizou as informações com os tempos dados em décimo de segundo.

Atleta A: 464; 467; 469; 474; 476

Atleta B: 467; 469; 472; 473

a) Calcule a média e a mediana das marcas de cada atleta. Considerando apenas esses dados, qual dos atletas o coordenador deve escolher?

b) Em sua opinião, qual dos atletas tem maior chance de conseguir uma boa marca na competição?

c) A média é suficiente para avaliar as diferenças entre os atletas? Não, pois o desempenho de um atleta depende de diversos fatores, como suas condições física e psicológica.

13 Ainda considerando os dados da atividade anterior, responda às questões.

a) Qual é a diferença entre a melhor e a pior marca do atleta A? E a do atleta B? Atleta A: 12 s; atleta B: 6 s.

b) A amplitude das marcas de cada atleta pode ajudar o coordenador em sua decisão? Por quê? Sim, porque, embora o atleta A tenha melhor desempenho, ele é menos "constante" em seus resultados.

14 Considere as notas de quatro estudantes em quatro testes. A nota máxima em cada teste é 20.

	T1	T2	T3	T4
Estudante A	10	10	10	10
Estudante B	8	12	8	12
Estudante C	0	8	12	20
Estudante D	0	0	20	20

a) Calcule a nota média de cada estudante. A nota média de todos os estudantes é igual a 10.

b) Calcule a amplitude, a variância e o desvio-padrão das notas de cada um deles.

c) Analise os valores obtidos. O que você pode concluir? Resposta pessoal.

14. b) Amplitude – Estudante A: 0; Estudante B: 4; Estudante C: 20; Estudante D: 20. Variância – Estudante A: 0; Estudante B: 4; Estudante C: 52; Estudante D: 100. Desvio-padrão – Estudante A: 0; Estudante B: 2; Estudante C: aproximadamente 7,21; Estudante D: 10.

15 Em uma turma de 18 estudantes, os acertos de 8 estudantes em um teste de Matemática foram:

2 6 10 10 14 16 18 20

a) Calcule a média e o desvio-padrão dessa distribuição. $\overline{X} = 12$; DP $\simeq 5{,}74$.

b) Os acertos dos outros 10 estudantes dessa turma na mesma prova constituem uma distribuição com a mesma média e com desvio-padrão 2. Que comparação é possível fazer entre as duas distribuições?

c) Construa uma distribuição possível para os acertos de todos os estudantes dessa turma na referida prova. Consulte a resposta no Manual do Professor.

16. a) Equipe A: DP = 10,7. Equipe B: DP $\simeq$ 5,95. A dispersão de massas é maior na equipe A.

16 No quadro, são dadas as medidas de massa, em quilograma, dos atletas de duas equipes.

Nesta atividade, os estudantes se deparam com um novo termo: "conjunto de dados homogêneo". Incentive-os a formular hipóteses sobre o significado desse termo. Pergunte-lhes, por exemplo, que relação esse conceito pode ter com o desvio-padrão de uma distribuição de dados. Ao final, sistematize as ideias da turma e apresente a definição de que um conjunto de dados é mais homogêneo quanto menor for o desvio-padrão dos dados em relação à sua média.

Equipe A	Equipe B
83	60
74	57
66	71
64	49
92	62
56	58
77	57
60	54
79	65
65	65

12. a) Atleta A: $\overline{X} = 470$; Me = 469. Atleta B: $\overline{X} = 470{,}25$; Me = 470,5. O coordenador deve escolher o atleta A, que tem média e mediana menores que as do atleta B.

16. b) Consulte a resposta no Manual do Professor.

a) Calcule o desvio-padrão de cada uma das equipes. Em qual delas a dispersão de massas é maior?

b) Em cada equipe, organize os dados em classes e construa um polígono de frequências.

c) Qual conjunto de dados é mais homogêneo? Por quê? A equipe B tem o conjunto de dados mais homogêneo, pois há menor dispersão em relação à média.

17 Construa duas amostras fictícias de dados que tenham a mesma frequência total, mas amplitudes diferentes. Para cada uma delas, calcule o desvio-padrão. Resposta pessoal.

18 Indique a alternativa correta no caderno.

(Ufam) Em uma prova de seleção, o critério de aprovação leva em conta a média e o desvio padrão de três provas. Logo, a média e o desvio padrão de um candidato que obteve nas três provas 64, 57 e 62 pontos são, respectivamente: Alternativa **c**.

a) 49 e $\sqrt{6{,}79}$

b) 52 e $\sqrt{7{,}68}$

c) 61 e $\sqrt{8{,}67}$

d) 74 e $\sqrt{6{,}27}$

e) 81 e $\sqrt{9{,}75}$

Analise as produções dos estudantes para a atividade **17**. Avalie a compreensão deles acerca dos conceitos apresentados neste capítulo, bem como a capacidade de relacionar dados em uma situação (ainda que fictícia) de modo a construir um texto matemático adequado.

15. b) A comparação que se pode fazer é a de que as notas dos dez estudantes são mais próximas da média, ou seja, são mais regulares.

Não escreva no livro.

12. b) Resposta pessoal. O atleta B tem maior regularidade nos resultados e seu rendimento parece ter caído menos que o do atleta A, porém ele nunca atingiu a marca de 464 décimos de segundo do atleta A.

19 Ao pesquisar as medidas de massa, em quilograma, dos estudantes do 6º ano A, um professor obteve os resultados a seguir.

38	40	45	42	45	40
43	38	45	45	40	42
41	38	46	32	48	46
42	43	44	50	38	40

a) Organize esses dados em uma tabela de classes de amplitude 4 kg.

b) Qual é a média e a variância dessa distribuição? $\overline{X} \simeq 43$; $V \simeq 15$.

c) Qual é o desvio-padrão? $DP \simeq 4$.

O trabalho com a atividade **20** possibilita o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT202**, quando os estudantes planejam e executam as estapas de uma pesquisa estatística; **EM13MAT316**, na medida em que interpretam o texto, mobilizam conhecimentos na resolução do problema e registram a solução usando a linguagem matemática de maneira adequada; e, **EM13MAT407**, quando interpretam e analisam gráficos. Essa tarefa favorece o desenvolvimento das competências gerais **7**, **9** e **10**, e possibilitam aos estudantes exercitar a empatia e aprender a respeitar diferentes opiniões.

20 **Reúna-se com cinco colegas para planejar e realizar uma pesquisa estatística. A pesquisa deve possibilitar uma análise que aplique as medidas de tendência central e as medidas de dispersão que vocês estudaram neste capítulo. Conversem e escolham um tema que seja do interesse de vocês. Para essa pesquisa, vocês podem coletar informações de fontes diretas ou buscar em outras fontes (da internet, por exemplo) os dados necessários para compor a análise.**

Vocês devem registrar por escrito, em uma espécie de relatório, todos os passos da pesquisa: tema pesquisado, coleta inicial de dados (números e suas respectivas fontes), organização dos dados, elaboração das tabelas e dos gráficos e, por fim, a interpretação das medidas de tendência central e de dispersão.

Depois, vocês devem apresentar à turma os resultados obtidos. Essa apresentação deve mostrar e explorar as tabelas e os gráficos necessários, bem como a interpretação das medidas de tendência central e de dispersão. Além disso, vocês devem elaborar três ou quatro perguntas para que a turma responda após a apresentação. É importante que as perguntas busquem verificar se os colegas compreenderam como a pesquisa foi feita, quais foram os dados obtidos e as conclusões possíveis sobre o tema abordado.

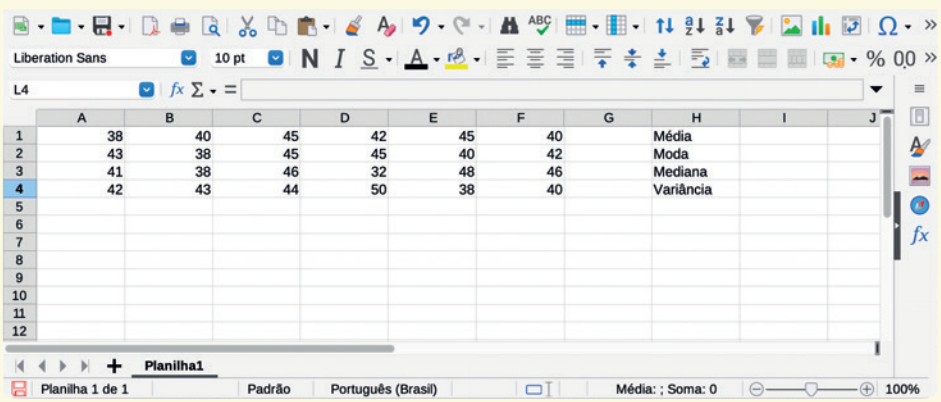
TECNOLOGIA

A seção *Tecnologia* busca favorecer o desenvolvimento de competências e habilidades relacionadas ao pensamento computacional, bem como a compreensão e a utilização de recursos tecnológicos para a resolução de problema, contribuindo para a aquisição da competência geral **5**.

O LibreOffice é um *software* que pode ser baixado gratuitamente. Você pode adquirir uma versão confiável desse *software* acessando o *link* http://pt-br.libreoffice.org (acesso em: 4 set. 2024). É preciso fazer o *download* do LibreOffice no computador e instalá-lo. Entre os aplicativos disponibilizados por esse *software*, temos a planilha eletrônica Calc, que pode ser utilizada para diferentes finalidades, como obter algumas medidas estatísticas de conjuntos de dados.

Acompanhe as etapas de como calcular a média, a moda, a mediana e a variância das massas, em quilograma, dos estudantes apresentados na atividade **19**, utilizando a planilha eletrônica Calc.

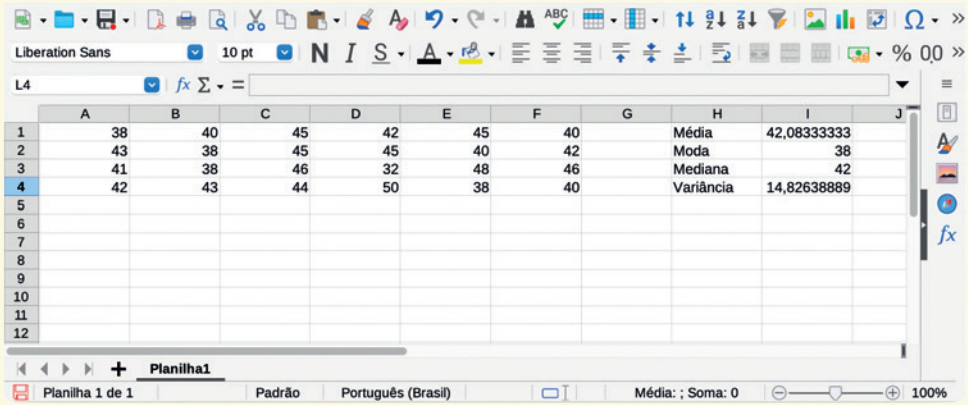
1ª etapa: Representamos o quadro na planilha eletrônica nas células A1:F4. Nas células H1, H2, H3 e H4, escrevemos “Média”, “Moda”, “Mediana” e “Variância”, respectivamente, para localizar as medidas que vamos calcular.



Imagens: LibreOffice/D/BR

Não escreva no livro.

2ª etapa: Para calcular essas medidas, digitamos nas células I1, I2, I3 e I4 as fórmulas =MÉDIA(A1:F4), =MODO(A1:F4), =MED(A1:F4) e =VAR.P(A1:F4), respectivamente, sempre pressionando "*Enter*" após digitar cada fórmula. As medidas são calculadas automaticamente pela planilha, nas respectivas células.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	38	40	45	42	45	40		Média	42,08333333
2	43	38	45	45	40	42		Moda	38
3	41	38	46	32	48	46		Mediana	42
4	42	43	44	50	38	40		Variância	14,82638889

Imagens: LibreOffice/ID/BR

ATIVIDADES

1 **Considerando o exemplo apresentado, responda às questões a seguir.**

a) Qual a média, a moda, a mediana e a variância dos dados obtidos no exemplo? $\overline{X} \simeq 42{,}08$; Mo = 38; Me = 42; $V \simeq 14{,}82$.

b) Para você, foi mais fácil obter esses dados com a planilha eletrônica Calc ou realizando os cálculos sem esse recurso (na atividade **19**)? Resposta pessoal.

2 **Reproduza o exemplo apresentado na planilha eletrônica e resolva as questões a seguir.**

a) Aumente o valor do maior dado (50) para 80. O que aconteceu com as medidas calculadas? A moda e a mediana foram mantidas. A média e a variância aumentaram.

b) Diminua o valor do menor dado (32) para 25. O que aconteceu com as medidas calculadas? A moda e a mediana foram mantidas. A média e a variância diminuíram.

c) Agora, altere o valor do menor dado para o valor do maior dado. Para isso, modifique 32 para 80. O que aconteceu com as medidas calculadas? Todas as medidas aumentaram, exceto a moda, que foi mantida.

d) Qual relação podemos estabelecer de acordo com a variação das medidas calculadas ao aumentar o maior dado ou diminuir o menor dado? Essa relação se mantém ao alterar o valor do menor dado para o do maior? Ao aumentar o maior dado ou diminuir o menor dado, a moda e a mediana são mantidas e a média e a variância aumentam ou diminuem. Essa relação não se mantém ao alterar o valor do menor dado para o do maior.

3 **Pesquise as medidas das alturas das jogadoras da seleção brasileira de vôlei (em quadra e reservas) que participaram das Olimpíadas de 2024 em Paris. Em seguida, utilizando a planilha eletrônica Calc, calcule a média, a moda, a mediana e a variância dessas medidas.** $\overline{X} \simeq 1{,}86$ m; Mo $\simeq 1{,}85$ m; Me = 1,86 m; $V \simeq 0{,}003$ m.

Você é capaz de dizer o que aprendeu e quais são suas dúvidas ao final destas atividades?

Você reconhece o esforço que precisa fazer para enfrentar situações novas como as destas atividades? As respostas às duas últimas questões apresentam evidências da competência socioemocional autoconhecimento.

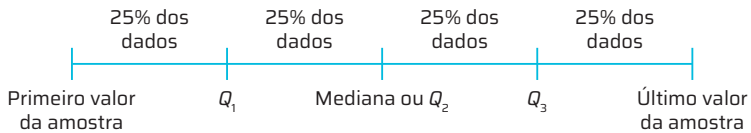
QUARTIS

Os conceitos apresentados neste tópico (quartis, distribuição interquartil, *outliers* e diagramas de caixas) constituem um aprofundamento da Estatística, com foco no desenvolvimento da habilidade **EM13MAT407**, pois os estudantes vão interpretar e analisar informações em situações-problema e em diferentes tipos de gráfico.

Em um conjunto de dados, há valores que ocupam determinadas posições que dividem o conjunto de dados ordenados em partes com a mesma quantidade de dados. Esses valores são conhecidos como **medidas separatrizes**. A mediana é um exemplo de medida separatriz, pois ela representa o valor que separa um conjunto de dados ordenados em duas partes, com 50% dos dados em cada uma.

Outra medida separatriz são os **quartis**. Eles dividem uma amostra de dados organizados em ordem crescente em quatro partes, cada uma delas com 25% dos dados.

Observe um esquema que ilustra essa divisão. Nele, Q_1 é o primeiro quartil, Q_2 é o segundo quartil e Q_3 é o terceiro quartil.



Não escreva no livro.

Acompanhe o exemplo.

Exemplo

Os dados a seguir correspondem às idades dos participantes de um curso de dança. Note que eles já estão organizados em ordem crescente.

56 57 59 60 62 64 64 65 67

Como esse é um conjunto com 9 elementos, a mediana é o valor na quinta posição: Me = 62. A média aritmética desses valores é aproximadamente 61,6. Note que essa média está próxima da mediana.

O primeiro quartil, Q_1, é a mediana da primeira metade dos dados, ou seja, o valor cuja posição coloca 25% dos dados abaixo dele. Assim, esse valor é a mediana dos 4 primeiros valores, ou seja, a média aritmética entre os valores que estão na segunda e na terceira posições:

$$Q_1 = \frac{57 + 59}{2} = 58$$

A interpretação desse resultado é que 25% dos participantes têm idade inferior ou igual a 58 anos ou que 75% têm idade superior ou igual a 58 anos.

O segundo quartil, Q_2, equivale à mediana, ou seja, o valor cuja posição coloca 50% dos dados do conjunto abaixo dele: $Q_2 = 62$.

A interpretação desse resultado é que 50% dos participantes têm idade inferior ou igual a 62 anos e 50% têm idade superior ou igual a 62 anos.

O terceiro quartil, Q_3, é a mediana da segunda metade dos dados, ou seja, o valor cuja posição coloca 75% dos dados do conjunto abaixo dele. Assim, esse valor é a mediana dos 4 últimos valores, ou seja, a média aritmética entre os valores que estão na sétima e na oitava posições:

$$Q_3 = \frac{64 + 65}{2} = 64{,}5$$

Isso significa que 75% dos participantes têm idade inferior ou igual a 64,5 anos e 25% têm idade superior ou igual a 64,5 anos.

Uma medida de dispersão alternativa ao desvio-padrão nos casos em que estamos trabalhando com quartis é a **distância interquartil** (d_Q), definida como a diferença entre o terceiro e o primeiro quartis:

$$d_Q = Q_3 - Q_1$$

Assim, no caso analisado aqui, a distância interquartil (em ano) é dada por:

$$d_Q = 64{,}5 - 58 = 6{,}5$$

Agora, vamos observar o que acontece quando inserimos na amostra um estudante de 10 anos.

10 56 57 59 60 62 64 64 65 67

Como esse é um conjunto com 10 elementos, a mediana é a média aritmética entre os valores que estão na quinta e na sexta posições: $\text{Me} = \frac{60 + 62}{2} = 61$

A média aritmética desses valores é 56,4.

Para calcular Q_1 e Q_3 desse novo conjunto, considere-os assim dispostos:

10 56 **57** 59 60 **61** 62 64 **64** 65 67

Então, temos $Q_1 = 57$, $Q_2 = 61$ e $Q_3 = 64$.

Note que a mediana desse caso (Me = 61) está bem próxima da mediana do caso anterior (Me = 62), mas a média desse ($\overline{X} = 56{,}4$) não está tão próxima da média anterior. Perceba que o novo valor que foi inserido no conjunto é um valor discrepante dos outros, pois, enquanto os valores do conjunto original estavam entre 56 e 67, os do novo estão entre 10 e 67.

Dizemos que, nesse caso, a mediana é resistente (ou robusta) pelo fato de não ser muito afetada pela inclusão do valor discrepante.

Os dados que se diferenciam muito da maioria dos outros são chamados de ***outliers***. Um *outlier* é um valor que foge da normalidade e que pode causar mudanças nos resultados que representam a tendência de um conjunto de dados.

Eliminar valores discrepantes é importante quando eles podem alterar consideravelmente a análise de uma pesquisa. Por outro lado, há interesse especial em estudar os *outliers* para entender os motivos de sua existência. Essa abordagem é útil quando se quer investigar situações extremas, como casos de fraude, desempenho muito bom ou muito ruim de determinada máquina ou pessoa, entre outras.

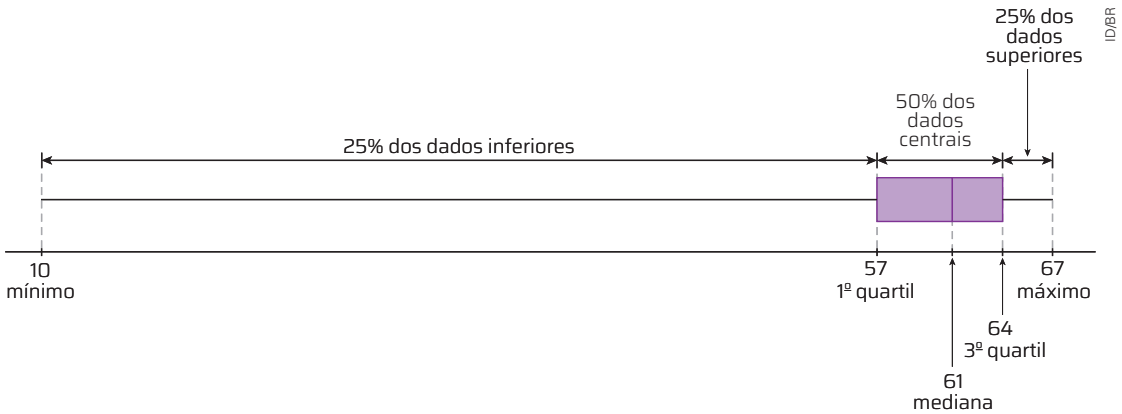
Não escreva no livro.

Representação gráfica

Para representar situações usando os quartis, podemos elaborar um **diagrama de caixa**, conhecido também como ***boxplot***.

Um diagrama de caixa exibe o resumo de 5 números de um conjunto de dados: o valor mínimo, o primeiro quartil, a mediana (ou segundo quartil), o terceiro quartil e o valor máximo.

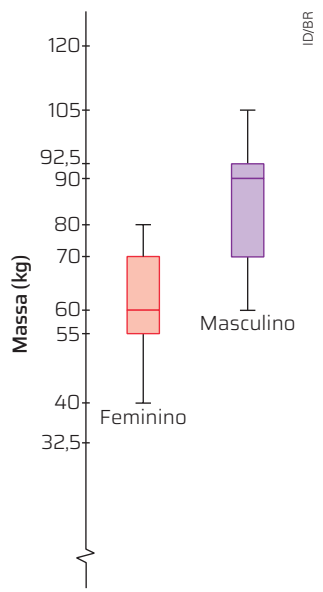
Para construir um diagrama de caixa, desenhamos um retângulo com a medida do comprimento correspondente à amplitude entre a marca do primeiro quartil e a do terceiro quartil e com uma medida de altura qualquer. Dentro do retângulo, desenhamos um segmento de reta que marca a posição da mediana. Dos lados do retângulo, determinados pelo primeiro quartil e pelo terceiro quartil, saem dois segmentos de reta: um até o valor mínimo e o outro até o valor máximo.



Como o diagrama de caixas é a representação gráfica do que acontece nos quartis, esse diagrama mostra que 25% dos participantes do curso de dança têm de 10 a 57 anos; 50% dos participantes têm de 57 a 64 anos; e 25% dos participantes têm de 64 a 67 anos.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

21 **Considere o diagrama de caixas ao lado. Ele representa as medidas de massa, em quilograma, dos participantes de uma pesquisa.**



Observando o diagrama, indique no caderno quais das afirmações a seguir são verdadeiras e quais são falsas. Em seguida, reescreva as afirmações falsas de modo a torná-las verdadeiras.

a) 50% dos participantes do sexo masculino têm massa superior a 80 kg.
Falsa. 50% dos participantes do sexo masculino têm medida de massa superior a 90 kg.

b) A mediana das massas das mulheres é menor que a mediana das massas dos homens desse grupo. Verdadeira.

c) 25% das mulheres têm mais de 50 kg. Falsa. 25% das mulheres têm menos de 55 kg.

d) 50% das mulheres têm menos de 60 kg. Verdadeira.

e) 25% dos homens têm menos de 60 kg.
Falsa. 25% dos homens têm menos de 70 kg.

f) A mediana das massas dos homens coincide com o terceiro quartil das massas das mulheres. Falsa. O primeiro quartil das medidas de massa dos homens coincide com o terceiro quartil das medidas de massa das mulheres.

g) 75% das mulheres desse grupo têm massa inferior ou igual a 70 kg.
Verdadeira.

h) O terceiro quartil das massas das mulheres é igual ao primeiro quartil das massas dos homens. Verdadeira.

i) A medida mínima de massa das participantes dessa pesquisa é 45 kg.
Falsa. A medida de massa mínima das participantes dessa pesquisa é 40 kg.

22 **Construa, no caderno, um diagrama de caixas para os dados ordenados a seguir.**
Consulte a resposta no Manual do Professor.

0,5	0,7	0,7	0,9	1,0	1,1	1,1	1,2	1,3	1,3	1,5	1,8	2,1	2,2	2,5

Não escreva no livro.

A atividade **24** contribui para a aquisição das competências gerais **4** e **9**. A utilização da linguagem matemática para expressar ideias possibilita aos estudantes exercitar a empatia e aprender a respeitar diferentes opiniões.

23 A tabela de frequência a seguir representa a nota que jovens de uma escola obtiveram em um teste com 25 questões, em que cada acerto vale 1 ponto na nota.

Distribuição das notas no teste													
Nota	1	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	24
f	1	1	2	6	10	16	13	9	8	5	2	1	1

Dados obtidos pela escola.

a) Quantos estudantes responderam a esse teste? 75 estudantes.

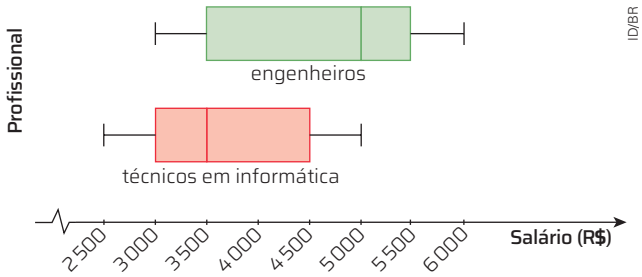
b) Qual é a mediana das notas obtidas nesse teste? 11

c) Quais são os valores do primeiro e do terceiro quartis da distribuição de notas? $Q_1 = 9$ e $Q_3 = 12$.

d) Qual foi o percentual de estudantes que conseguiram mais de 12 pontos? Aproximadamente 22,7%.

24 **Os diagramas de caixa ao lado comparam os salários iniciais, em real, de engenheiros e de técnicos em informática em determinada empresa.**

Escreva, no caderno, duas afirmações verdadeiras e duas afirmações falsas com base nos dados apresentados nesses diagramas. Troque suas afirmações com um colega, para que um identifique as afirmações verdadeiras e as falsas escritas pelo outro. Depois, conversem sobre as respostas dadas por vocês.



ID/BR

Resposta pessoal.

As representações gráficas apresentadas neste tópico contribuem para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT407**, pois os estudantes precisam analisá-las e interpretá-las.

UM POUCO MAIS SOBRE REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

No início do capítulo, retomamos os gráficos mais usuais para apresentar dados de uma coleta de informações sobre uma ou mais variáveis estatísticas. No entanto, existem outros tipos de representação gráfica para exibir coletas de dados. Vamos conhecer alguns deles.

Diagrama de ramos e folhas

Uma maneira de expressar visualmente um conjunto de valores, com o objetivo de obter uma ideia de como se dá sua distribuição, é usar o diagrama de ramos e folhas, também conhecido como diagrama de caule e folhas. Acompanhe o exemplo a seguir.

Exemplo 1

Uma terapeuta tem pacientes do sexo feminino com as seguintes idades (em ano):

18	19	20	21	24	25	27	28	30	31	32	33
35	35	36	37	41	43	44	46	47	49	60	61

Vamos construir um diagrama de ramos e folhas com esses dados. A ideia básica desse tipo de diagrama é dividir cada dado em duas partes: a primeira (ramo) é colocada à esquerda de uma linha vertical, e a segunda (folha) é colocada à direita da linha vertical.

Cada ramo deve ser listado somente uma vez e nenhum número deve ser pulado, mesmo que haja ramos sem folhas. Os ramos e as folhas devem ser listados em ordem crescente. Quando houver um número repetido nos dados, como é o caso de 35, o diagrama deve representar esse dado duas vezes.

No caso das idades das pacientes, podemos organizá-las pelas dezenas. Verifique ao lado como ficaria o diagrama.

1	8 9
2	0 1 4 5 7 8
3	0 1 2 3 5 5 6 7
4	1 3 4 6 7 9
5	
6	0 1

Legenda: 3 | 0 representa 30 anos

Não escreva no livro.

Os diagramas de ramos e folhas podem expressar valores de qualquer ordem de grandeza. É por isso que nele deve ter sempre uma legenda, indicando o que significam os ramos e as folhas. Assim, por exemplo, se quisermos que o ramo represente a unidade, e as folhas, os décimos, 0 | 7 significará 0,7 e 9 | 3 significará 9,3. Geralmente, nesses diagramas, a folha contém o último algarismo do número, e o ramo contém todos os outros algarismos.

Podemos também representar informações de dois grupos em um mesmo diagrama de ramos e folhas. Para incluir as idades dos pacientes do sexo masculino dessa terapeuta, podemos utilizar o lado esquerdo do ramo. Nesse caso, as folhas dos pacientes são registradas de modo espelhado e a legenda deve ser dupla, para explicar a leitura de todos os dados.

As idades dos pacientes do sexo masculino dessa terapeuta são:

Idades de pacientes do sexo masculino		Idades de pacientes do sexo feminino
8 8	1	8 9
5 3 1	2	0 1 4 5 7 8
3 2 2 1	3	0 1 2 3 5 5 6 7
5 4 3 2 0	4	1 3 4 6 7 9
9 9 7 5 1 1	5	
	6	0 1

Legenda: 3 | 0 representa 30 anos para pacientes do sexo feminino
0 | 3 representa 30 anos para pacientes do sexo masculino

18	32	51
18	33	51
21	40	55
23	42	57
25	43	59
31	44	59
32	45	

Note que, com o diagrama de ramos e folhas, conseguimos ter uma percepção visual da distribuição dos dados sem perder os valores originais.

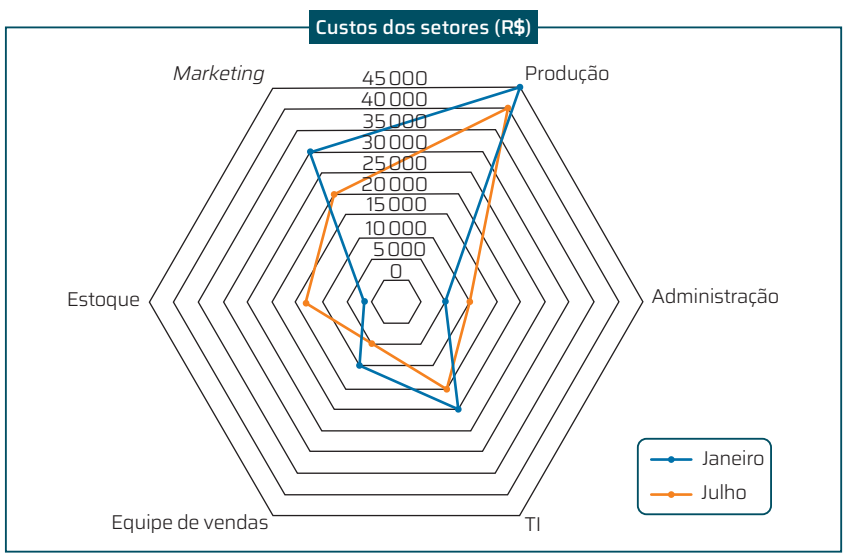
Gráfico de radar

Um gráfico de radar, também conhecido como gráfico de aranha ou gráfico de estrela por causa de sua aparência, tem múltiplos eixos, e cada eixo representa uma categoria. Esse tipo de gráfico é usado quando queremos comparar diferentes atributos de um ou mais conjuntos de dados.

Acompanhe o exemplo a seguir.

Exemplo 2

Uma empresa registrou, em janeiro e em julho de um mesmo ano, os custos com os seguintes setores: produção, administração, TI, equipe de vendas, estoque e *marketing*. Analise o gráfico construído com base nesses dados.



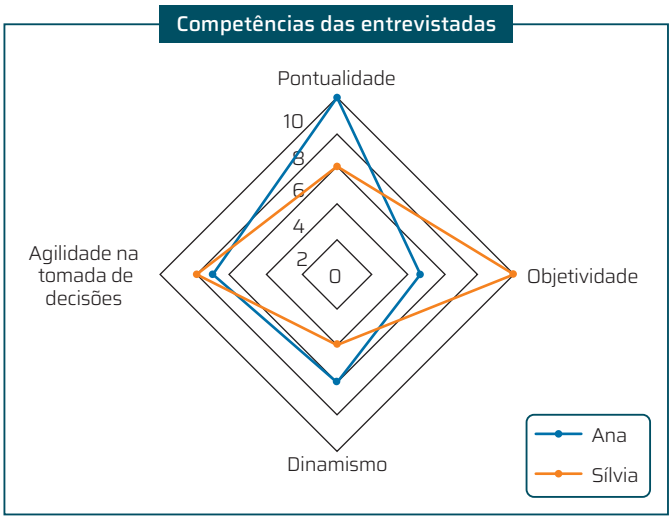
Dados obtidos pela empresa.

Esse gráfico permite uma visão do que aconteceu com os custos da empresa nesses dois momentos. Note os hexágonos (cada lado é um eixo desse gráfico) do menor para o maior e os números marcados em um dos eixos (que vale como escala para todos os outros). No polígono azul, temos que o custo da equipe de vendas, em janeiro, foi 10 mil reais, já no polígono amarelo podemos notar que, em julho, o custo dessa equipe diminuiu para 5 mil reais.

O gráfico de radar também é empregado para a análise de processos em empresas, na engenharia, na programação e até mesmo para representar habilidades e atitudes.

Exemplo 3

O gráfico de radar a seguir foi desenvolvido com base em uma entrevista fictícia realizada com duas candidatas a uma mesma vaga de trabalho.
Analisando esse gráfico, é possível concluir que Sílvia tem pontuação mais alta em objetividade e agilidade na tomada de decisões, enquanto Ana tem pontuação mais alta em dinamismo e pontualidade.



ID/BR

Dados obtidos pela equipe de RH.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R2 **Em um laboratório, foi feita a medição da altura, em centímetro, de um conjunto de 44 plantas após duas semanas do plantio. Analise os dados ao lado.**

9,8	4,2	7,5	8,4	8,7	6,5	5,9	6,3	8,6	7,8	3,7
6,6	9,0	7,9	8,0	8,9	6,8	5,7	9,5	5,5	7,9	8,8
6,0	7,7	4,9	9,2	8,3	7,1	7,7	5,3	8,1	7,7	5,8
8,5	7,0	6,2	8,0	7,4	6,9	9,0	6,2	8,4	6,4	7,3

a) Represente esse conjunto de dados em um diagrama de ramos e folhas.

b) Determine a moda desse conjunto de dados.

Resolução

a) O intervalo dos dados vai de 3,7 a 9,8. Vamos fazer o diagrama de tal maneira que o ramo expresse a unidade, e as folhas representem os décimos. Para construir o diagrama, vamos organizar os dados em ordem crescente.

3,7	4,2	4,9	5,3	5,5	5,7	5,8	5,9	6,0	6,2	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6	6,8	6,9	7,0	7,1	7,3	7,4	7,5
7,7	7,7	7,7	7,8	7,9	7,9	8,0	8,0	8,1	8,3	8,4	8,4	8,5	8,6	8,7	8,8	8,9	9,0	9,0	9,2	9,5	9,8

Depois, basta colocar as unidades nos ramos e os décimos nas folhas.

3	7
4	2 9
5	3 5 7 8 9
6	0 2 2 3 4 5 6 8 9
7	0 1 3 4 5 7 7 7 8 9 9
8	0 0 1 3 4 4 5 6 7 8 9
9	0 0 2 5 8

Legenda: 3 | 7 representa 3,7 cm

ID/BR

b) Para determinar a moda, observamos os valores das folhas e procuramos o valor que mais se repete. Analisando o diagrama, o valor que mais se repete é o 7 que está no ramo 7. Note que ele aparece três vezes.
Assim, nesse conjunto, o valor que ocorre com maior frequência é 7,7. Portanto, a moda é 7,7 cm.

Não escreva no livro.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

25 Os dados a seguir são as notas de 48 estudantes em um teste de Matemática.

75	98	42	75	84	87	65	59	63	86	78	37
99	66	90	79	80	89	68	57	95	55	79	88
76	60	77	49	92	83	71	78	53	81	77	58
93	85	70	62	80	74	69	90	62	84	64	73

a) Represente esses dados em um diagrama de ramos e folhas. Consulte as respostas dos itens **a** e **b** no Manual do Professor.

b) Faça o histograma dos percentuais das notas desses estudantes.

c) Escreva uma conclusão sobre as notas dos estudantes nesse teste. Resposta pessoal.

26 Carlos e Pedro trabalham na mesma empresa. A seguir, estão os valores das vendas da semana, em milhares de real, que cada um realizou durante 30 semanas.

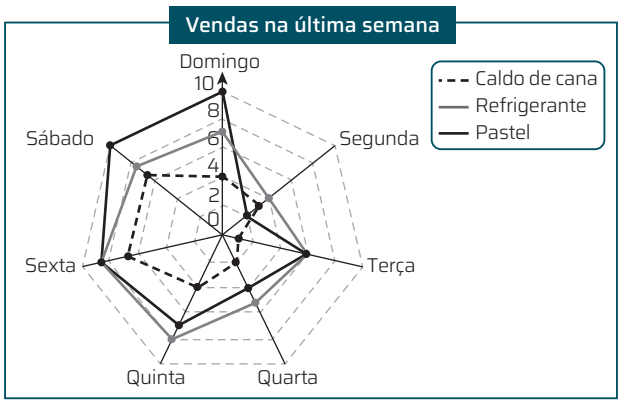
Carlos			Pedro		
8,7	9,3	8,7	7,1	9,5	7,1
9,4	5,3	7,4	8,3	7,1	7,4
6,6	7,3	6,3	7,1	7,5	7,4
6,0	6,7	5,9	7,9	7,9	7,8
6,9	5,8	10,0	7,5	6,4	6,2
9,9	4,7	6,5	6,2	6,2	8,6
6,6	5,6	8,6	8,2	7,5	8,4
8,9	5,9	7,7	8,7	7,7	6,6
10,1	9,4	9,0	8,5	7,6	8,1
9,6	7,6	7,9	7,6	8,8	7,1

a) Construa um diagrama de ramos e folhas para os valores das vendas dos dois vendedores, representando as unidades de milhar nos ramos. Consulte a resposta no Manual do Professor.

b) Analisando esse diagrama, é possível concluir qual deles é o melhor em vendas? Justifique sua conclusão. Resposta pessoal.

27 Indique a alternativa correta no caderno.

(Enem) Um comerciante, que vende somente pastel, refrigerante em lata e caldo de cana em copos, fez um levantamento das vendas realizadas durante a semana. O resultado desse levantamento está apresentado no gráfico.



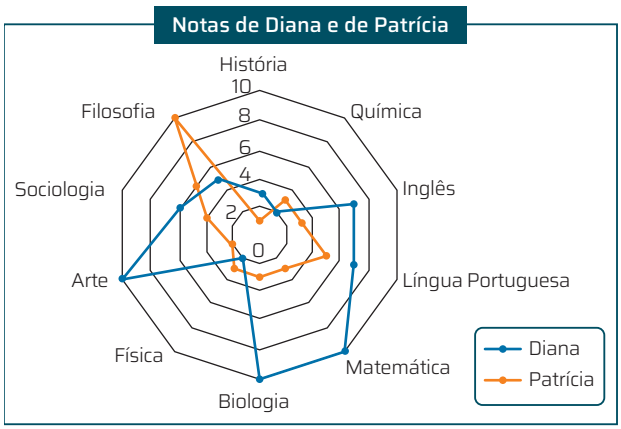
Enem: ID/BR

Ele estima que venderá, em cada dia da próxima semana, uma quantidade de refrigerante em lata igual à soma das quantidades de refrigerante em lata e caldo de cana em copos vendidas no respectivo dia da última semana. Quanto aos pastéis, estima vender, a cada dia da próxima semana, uma quantidade igual à quantidade de refrigerante em lata que prevê vender em tal dia. Já para o número de caldo de cana em copos, estima que as vendas diárias serão iguais às da última semana.

Segundo essas estimativas, a quantidade a mais de pastéis que esse comerciante deve vender na próxima semana é: Alternativa **b**.

a) 20. b) 27. c) 44. d) 55. e) 71.

28 Essas são as notas de Diana e de Patrícia no primeiro bimestre deste ano.



ID/BR

Dados fornecidos pela escola.

a) Em quais componentes Diana está abaixo da média, que é a nota 5? História, Química e Física.

b) Em quais componentes Patrícia tirou nota acima da nota de Diana? Filosofia, Química e Física.

c) Construa um gráfico de barras múltiplas que substitua o gráfico de radar com as notas das duas estudantes. Consulte a resposta no Manual do Professor.

d) Em sua opinião, em qual dos gráficos é mais fácil analisar os dados apresentados? Justifique sua resposta. Resposta pessoal.

Na resolução das atividades **26** a **28**, os estudantes desenvolvem a habilidade **EM13MAT407** ao interpretar e analisar dados estatísticos diversos. Em algumas atividades, é necessário que o estudante escolha a estratégia de resolução mais adequada. Acompanhe quais recursos da Estatística cada um utiliza para a tomada de decisão.

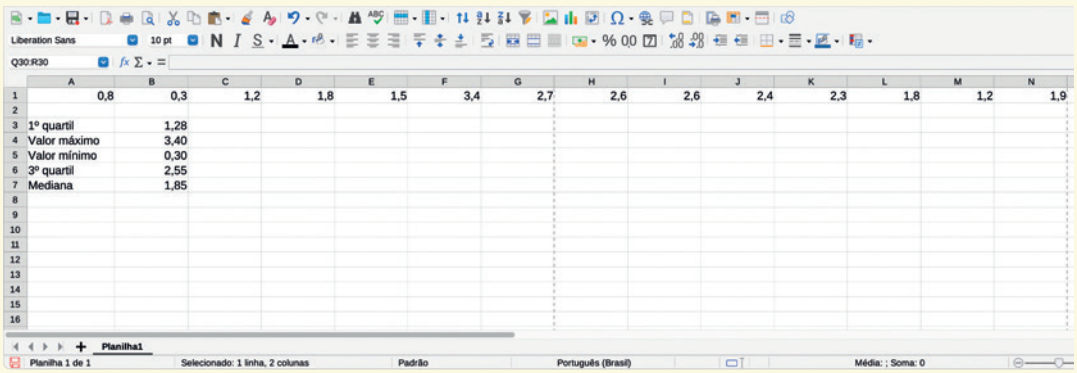
Não escreva no livro.

TECNOLOGIA

Podemos utilizar a planilha eletrônica Calc para construir um diagrama de caixas para determinados conjuntos de dados. Acompanhe as etapas para realizar essa construção para o conjunto de dados apresentado a seguir.

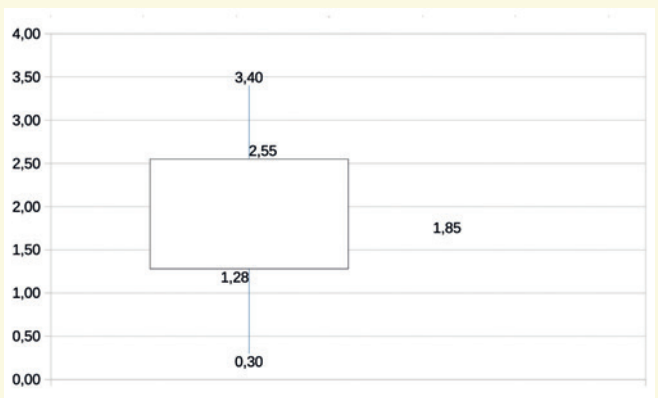
0,8	0,3	1,2	1,8	1,5	3,4	2,7	2,6	2,6	2,4	2,3	1,8	1,2	1,9

1ª etapa: Representamos os dados na planilha eletrônica nas células A1:N1 e, nas células A3, A4, A5, A6 e A7, escrevemos "1º quartil", "Valor máximo", "Valor mínimo", "3º quartil" e "Mediana", respectivamente, para localizar as medidas que vamos calcular. Em seguida, para calcular essas medidas, nas células B3, B4, B5, B6 e B7, digitamos as fórmulas =QUARTIL(A1:N1;1), =MÁXIMO(A1:N1), =MÍNIMO(A1:N1), =QUARTIL(A1:N1;3) e =MED(A1:N1), respectivamente, sempre teclando em "*Enter*" depois de digitar cada fórmula. As medidas são calculadas automaticamente pela planilha, nas respectivas células.



Imagens: LibreOffice/ID/BR

2ª etapa: Com as células B3:B7 selecionadas, clicamos no menu em "Inserir" e, na sequência, em "Gráfico…". Na janela que abrir, clicamos em "1. Tipo de gráfico", selecionamos "Cotações" e "Gráfico de cotações 2"; em "2. Intervalo de dados", marcamos a opção "Série de dados em linhas" e clicamos em "Finalizar". O diagrama de caixas será gerado automaticamente. Utilizando os recursos da planilha eletrônica, podemos inserir os rótulos de dados e excluir a legenda.



Imagens: LibreOffice/ID/BR

ATIVIDADES

1 **De acordo com o exemplo apresentado, responda às questões a seguir.**

a) O que as fórmulas digitadas na 1ª etapa calcularam? 1º quartil; maior valor; menor valor; 3º quartil; mediana.

b) Em sua opinião, foi mais fácil obter esses dados com a planilha eletrônica Calc ou realizar cálculos à mão? Resposta pessoal.

c) Podemos afirmar que 75% dos dados são maiores que 1,28? Justifique.
Sim, pois o 1º quartil divide o conjunto de dados em duas partes, e o valor 1,28 é aquele que divide o conjunto de dados nessa proporção.

2 **Usando a planilha eletrônica Calc, resolva novamente a atividade 22 da página 25.**
Consulte a resposta no Manual do Professor.

Não escreva no livro.

CÁLCULO RÁPIDO

Esta seção estará presente ao final de cada capítulo deste livro. Ela tem como objetivo auxiliar você a desenvolver uma habilidade muito importante: saber calcular mentalmente. Essa habilidade é essencial, uma vez que, diante de um problema, você não deve despender sua energia e atenção com cálculos que podem ser realizados rapidamente, utilizando estratégias de cálculo mental.

1 Calcule o valor de:

a) 7^2 49
b) 9^1 9
c) 10^6 1 000 000
d) 0^3 0
e) 20^0 1
f) 1^4 1
g) $(-4)^3$ -64
h) $(-3)^4$ 81
i) -2^7 -128
j) $(-8)^2$ 64

2 Cálculos com fatorial também são frequentes em contextos relacionados à contagem de possibilidades. Simplifique mentalmente cada uma das expressões.

a) $\frac{5!}{4! \cdot 1!}$ 5
b) $\frac{6!}{2! \cdot 4!}$ 15
c) $\frac{10!}{7! \cdot 3!}$ 120
d) $\frac{20!}{2! \cdot 18!}$ 190
e) $\frac{100!}{3! \cdot 97!}$ 161 700

PARA RECORDAR

Nesta seção, você vai relembrar alguns conceitos, pensar um pouco mais sobre técnicas de cálculo e de resolução de problemas e retomar conhecimentos importantes para a continuidade de seus estudos.

1 Represente na reta numerada os conjuntos a seguir.

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 4\}$
b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0{,}5\}$
c) $C =]-4, 3]$
d) $A \cup C$
e) $B \cap C$

2 Nos quadros a seguir, as grandezas são diretamente proporcionais.

x	10	25	45 ///	60
y	6	15 ///	27	36

s	6	7	8	9 ///
t	0,6	0,7 ///	0,8 ///	0,9

a) Qual é a constante de proporcionalidade em cada quadro? $\frac{5}{3}$; 10.
b) Copie os quadros no caderno e complete-os.

3 Dois lados opostos de um quadrado qualquer têm um aumento de 50% e os outros dois lados têm um decréscimo de 50%. Determine se a área do quadrilátero resultante aumenta ou diminui. Determine também a porcentagem de aumento ou decréscimo dessa área. Decréscimo de 25%.

4 Sabemos que, até completarmos 2 anos de idade, 80% do nosso corpo é formado de água. Então, até os 5 anos, essa porcentagem cai para 70%. Depois dos 60 anos, temos apenas 58% de água no organismo. Qual é o percentual de redução da quantidade de água no organismo de uma pessoa com mais de 60 anos em relação à quantidade de água nele contida aos 2 anos de idade? 27,5%

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO

Nesta seção, você encontra problemas nem sempre relacionados aos conhecimentos que adquiriu no capítulo, mas que dependem do uso do raciocínio lógico para serem resolvidos, muitas vezes sem a necessidade de qualquer cálculo.

1 (Clube Eureka da Obmep) Com uma ampulheta de 7 minutos e outra de 11 minutos, como podemos marcar 15 minutos? Consulte a resposta no Manual do Professor.

2 Uma garrafa e a sua tampa custam 2 reais e 10 centavos. A garrafa custa 2 reais a mais que a tampa. Qual é o preço da tampa? R$ 0,05

Esta é a primeira vez que a seção *Palavras-chave* aparece neste volume. Sua função é promover a avaliação em três aspectos:
1. Como avaliação formativa, possibilita acompanhar as aprendizagens dos estudantes pelas evidências trazidas em seus resumos, para que, com base nesse acompanhamento, sejam planejadas eventuais retomadas coletivas ou direcionadas a determinados estudantes.
2. Como autoavaliação, permite que cada estudante se conscientize do que aprendeu e do que falta aprender.
3. Como novo momento de aprendizagem, possibilita aos estudantes identificar a importância de rever os conteúdos abordados neste capítulo e de refletir sobre eles.

PALAVRAS-CHAVE

Escreva no caderno um resumo das principais ideias abordadas neste capítulo. Antes, porém, reflita sobre o que foi trabalhado neste capítulo e elabore uma lista de palavras que exprimam os conceitos fundamentais que você aprendeu. Ao lado de cada palavra, escreva um texto curto explicando-a com suas próprias palavras.

Depois, usando o livro e suas anotações, confira sua lista e as explicações e acrescente o que for necessário para completar seu resumo.

Fazer essa lista sem consulta para depois complementá-la com suas anotações e as do livro é uma estratégia de estudo.

Avalie como foi para você fazer essa lista e o resumo.

Anote suas dúvidas e procure resolvê-las antes de prosseguir.

MATEMÁTICA E VACINAÇÃO

Esta seção contempla as competências gerais **1**, **2**, **8** e **10** propostas pela BNCC, ao exercitar a curiosidade intelectual dos estudantes a partir da interpretação de dados e da compreensão dos desafios de campanhas de saúde pública, reforçando a ideia de responsabilidade coletiva e a necessidade de cuidar de sua saúde física e emocional. Além disso, possibilita uma integração com a área de Ciências da Natureza e com o tema contemporâneo transversal Saúde. Se considerar oportuno, convide um professor de Ciências para participar das discussões.



Divulgação/Prefeitura de Jaraguá do Sul

Profissional da Saúde em monitoramento rápido de vacinação em Jaraguá do Sul (SC). Foto de 2023.

Você já ouviu falar sobre Monitoramento de Estratégias de Vacinação (MEV)?

O MEV é uma ação que visa monitorar crianças de 6 meses a 5 anos de idade para verificar se elas receberam todas as doses de vacinas contra a poliomielite e o sarampo. Esse monitoramento otimiza recursos, pois possibilita que sejam feitos ajustes nas estratégias de vacinação em locais em que o número de crianças vacinadas esteja abaixo do esperado, garantindo o maior número de crianças protegidas contra doenças imunopreveníveis.

Esse monitoramento é uma das ações que o Brasil está realizando para garantir a implementação da Agenda 2030 para o Desenvolvimento Sustentável, em relação ao ODS 3 – Assegurar uma vida saudável e promover o bem-estar para todos, em todas as idades –, seguindo as recomendações da Organização Mundial da Saúde (OMS).

Os conhecimentos de Matemática e da Estatística desempenham um papel crucial nesse monitoramento, pois auxiliam nos processos de coleta, análise e interpretação dos dados.

Leia o texto a seguir, que aborda o MEV e o monitoramento realizado, segundo o protocolo operacional de 2024 do Ministério da Saúde.

1.1 Poliomielite

O Brasil não detecta casos de poliomielite desde 1990, e em 1994 o País recebeu da Organização Pan-Americana da Saúde (Opas) a certificação de área livre de circulação do Poliovírus Selvagem (PVS). Depois disso, o Brasil precisa garantir o alcance das metas dos indicadores preconizados para a manutenção do País livre da doença, que englobam as altas e homogêneas coberturas vacinais [...].

[...]

1.2 Sarampo

O sarampo é uma doença em processo de eliminação. Seu vírus foi reintroduzido no Brasil em 2018, e diante do cenário de baixas coberturas vacinais houve sua disseminação no País. Em 2019, após a circulação do mesmo genótipo do vírus no período de um ano, o Brasil perdeu a certificação de "área livre do vírus do sarampo", restabelecendo a transmissão endêmica da doença no território nacional.

[...]

De forma geral, a operacionalização do MEV envolve oito etapas:

I. mapeamento do município e setorização conforme o número de salas de vacina;
II. identificação das áreas/localidades a serem visitadas e monitoradas;
III. definição da amostra populacional a ser avaliada;
IV. identificação dos recursos necessários e da logística para o início da ação;
V. abordagem dos pais ou dos responsáveis;
VI. checagem do cartão ou da caderneta de vacinação;
VII. coleta e registro dos dados;
VIII. avaliação da proporção de crianças encontradas vacinadas no MEV.

Destaca-se que os resultados do MEV são representativos do município para fins estatísticos, podendo-se aplicar seus resultados a todo o município.

[...]

Brasil. Ministério da Saúde. Secretaria de Vigilância em Saúde e Ambiente. Departamento do Programa Nacional de Imunizações. *Monitoramento das estratégias de vacinação contra a poliomielite e o sarampo no Brasil*: protocolo operacional 2024. Brasília, DF: Ministério da Saúde, 2024. p. 6-7, 9-10. Disponível em: https://www.gov.br/saude/pt-br/vacinacao/publicacoes/estrategias-de-vacinacao-contra-a-poliomielite-e-o-sarampo-no-brasil-protocolo-operacional-2024.pdf. Acesso em: 10 out. 2024.

Agora, acompanhe os passos da Etapa 3, na qual se define a amostra populacional a ser avaliada.

[...] o grupo-alvo são as crianças de 6 meses a menores de 5 anos de idade (4 anos 11 meses e 29 dias). A quantidade de crianças a serem avaliadas dependerá do tamanho da população-alvo e do número de salas de vacina públicas e ativas no município, seguindo os passos descritos abaixo.

1º PASSO – Inicialmente, deve-se fazer o levantamento do número de salas de vacina públicas e ativas no município.

[...]

De posse desse número, classificar o município nas seguintes categorias, conforme o número de salas de vacina (Quadro 1).

Quadro 1 [...]

Nº de salas de vacinas públicas e ativas	Categorias		
	Mínimo	Intermédio	Máximo
1 a 2			X
3 a 9		X	
10 ou mais	X		

ID/BR

Fonte: adaptação própria DPNI/SVSA.

Não escreva no livro.

Essas categorias foram definidas com base na divisão do número de salas de vacina nos seguintes quartis:

- 25% dos municípios com no máximo duas salas de vacina (categoria Máximo);
- 50% dos municípios com no máximo nove salas de vacina (categoria Intermédio);
- 25% dos municípios com dez ou mais salas de vacina (categoria Mínimo).

[...]

2º PASSO – Levantar o número de crianças de 6 meses a menores de 5 anos de idade (4 anos 11 meses e 29 dias) por município.

[...]

De posse do número total de crianças de 6 meses a menores de 5 anos (4 anos 11 meses e 29 dias), identificar no Quadro 2 em qual estrato populacional o município se enquadra a fim de verificar o percentual da população a ser avaliada no MEV, considerando também a categoria do município, conforme o número de salas de vacina que ele possui:

Quadro 2 [...]

Estrato populacional nos municípios	Percentual utilizado para definição do número de crianças de 6 meses a < 5 anos de idade a serem avaliadas no MEV conforme categoria de classificação do município		
	Mínimo (10 ou mais salas de vacina) %	Intermédio (3 a 9 salas de vacinas) %	Máximo (1 a 2 salas de vacina) %
Até 500 crianças de 6 meses a < 5 anos	25	50	75
501 a 1 000 crianças de 6 meses a < 5 anos	15	32	60
1 001 a 2 500 de 6 meses a < 5 anos	6	16	38
2 501 ou mais de 6 meses a < 5 anos	3	5	15

ID/BR

Fonte: adaptação própria DPNI/SVSA.

Os percentuais apresentados no Quadro 2 foram definidos segundo critérios estatísticos de amostragem, considerando-se o número máximo de crianças em cada estrato. Levando-se em conta os níveis de confiança entre 80% e 99%, os percentuais de cada categoria indicam a menor porcentagem possível a ser aplicada sobre o número de crianças [...] para que a amostra seja representativa.

A amostra de crianças a ser avaliada no MEV deverá ser calculada com a seguinte fórmula:

$$\text{Amostra de crianças para o MEV} = \frac{\text{Nº de crianças de 6 meses a menores de 5 anos no município}}{100} \times \text{porcentagem conforme categoria do município}$$

ID/BR

Para o cálculo do número de crianças a serem avaliadas por sala de vacina, considera-se o número de crianças atendidas na área de abrangência da respectiva sala, aplicando-se o mesmo percentual identificado para o município, apresentado no Quadro 2. A definição da amostra por setor é calculada com a seguinte fórmula:

$$\text{Nº de crianças avaliadas por setor} = \frac{\text{tamanho da amostra por sala de vacina}}{\text{nº de bairros atendidos pela respectiva sala}}$$

ID/BR

[...]

Brasil. Ministério da Saúde. Secretaria de Vigilância em Saúde e Ambiente. Departamento do Programa Nacional de Imunizações. *Monitoramento das estratégias de vacinação contra a poliomielite e o sarampo no Brasil*: protocolo operacional 2024. Brasília, DF. 2024. p. 11-13.Disponível em: https://www.gov.br/saude/pt-br/vacinacao/publicacoes/estrategias-de-vacinacao-contra-a-poliomielite-e-o-sarampo-no-brasil-protocolo-operacional-2024.pdf. Acesso em: 10 out. 2024.

Os percentuais apresentados no Quadro 2 foram definidos segundo critérios estatísticos de amostragem, de modo a garantir que os percentuais de cada categoria indiquem a menor porcentagem da população de crianças de 6 meses a menores de 5 anos (4 anos 11 meses e 29 dias) para que a amostra acompanhada pelo MEV seja representativa de todo o público a ser vacinado.

Conectando ideias

1 **Considere que o MEV atuará em um município que tenha 2 580 de crianças de 6 meses a menores de 5 anos (4 anos 11 meses e 29 dias) e três salas de vacinação que atendem a seus 19 bairros, distribuídas da seguinte maneira:**

- A sala de vacinação 1 atende 5 bairros com 1 000 crianças;
- A sala de vacinação 2 atende 12 bairros com 1 200 crianças;
- A sala de vacinação 3 atende 2 bairros com 380 crianças.

a) Quantas crianças deverão ser avaliadas pelo MEV nesse munícipio? 129 crianças.

b) Qual é o tamanho *n* da amostra de cada sala de vacinação? Sala de vacinação 1: 50; Sala de vacinação 2: 60; Sala de vacinação 3: 19.

2 **Os dados do Quadro 1 do texto mostram como os municípios brasileiros foram categorizados em função do número de salas de vacinação que possuem.**

a) Com base nos dados do Quadro 1, é possível saber o valor da mediana do número de salas de vacinação dos municípios brasileiros? Justifique sua resposta. Não, mas é possível concluir que esse número está entre 3 e 9 salas de vacinação.

b) Suponha que a mediana seja 6, construa um gráfico de caixa para representar a distribuição das salas de vacinação de acordo com os quartis indicados no texto. Consulte o gráfico no Manual do Professor.

3 **Converse com os colegas sobre a importância do Programa Nacional de Imunizações do Brasil.** Resposta pessoal.

Não escreva no livro.

CAPÍTULO 2 CAPÍTULO 2 CAPÍTULO 2

PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

NESTE CAPÍTULO

- Função ou distribuição de probabilidade
- Probabilidade frequentista e lei dos grandes números
- Média e desvio-padrão
- Curva normal

Este capítulo completa o trabalho com os estudantes da Educação Básica em relação à unidade temática Probabilidade e Estatística. De acordo com os documentos oficiais, o que se espera dos estudantes nessa fase da escolaridade é que eles extrapolem a leitura de informações e reflitam mais criticamente sobre seus significados e suas consequências, podendo, então, se posicionar e decidir diante de um conjunto de dados, o que contribui para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT106**.

O uso da probabilidade em Estatística está relacionado à predição de eventos futuros. Por exemplo: o meteorologista prediz que há 8% de chance de chover em determinada região; o setor de controle de qualidade de uma fábrica faz uma pesquisa estatística e prediz que apenas três em cada mil peças produzidas apresentarão defeito; um médico sanitarista analisa as últimas pesquisas sobre uma epidemia em certa região do país e conclui que a probabilidade de infecção nas condições observadas é 50%.

Com os colegas e o professor, leia o texto e reflita sobre a situação e as questões a seguir.

Uma máquina automática de envasar água mineral está regulada para que o volume médio de líquido em cada garrafa seja 1 000 cm^3. Nesse processo, há um desvio-padrão de 10 cm^3, ou seja, existe a chance de que o conteúdo das garrafas tenha 10 cm^3 a mais ou a menos que o valor médio de 1 litro.

a) Se o controle de qualidade da empresa selecionar ao acaso uma garrafa já envasada, qual é a probabilidade de que ela tenha menos de 990 cm^3 de água mineral?

b) Em um lote com 5 000 dessas garrafas, quantas se espera encontrar com conteúdo correto entre 990 cm^3 e 1010 cm^3?

Questões como as apresentadas poderão ser solucionadas com os conhecimentos que você vai estudar neste capítulo.

Vamos analisar a relação entre Estatística e Probabilidade, de modo que o estudo de probabilidade possa auxiliar na interpretação e na tomada de decisões com base em dados estatísticos.



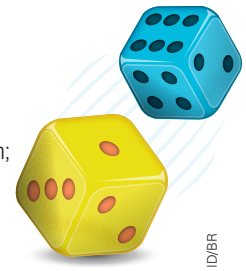
Linha de produção de envasamento de água mineral. Foto de 2022.

Edwin Tan/iStock/Getty Images

Não escreva no livro.

O trabalho com este tópico contribui para o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT310** e **EM13MAT311**, ao propor aos estudantes que resolvam e elaborem problemas de contagem e que envolvam o cálculo da probabilidade de eventos aleatórios.

FUNÇÃO OU DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE


ID/BR

Considere o problema a seguir.

Certo jogo de dados para duas pessoas funciona da seguinte maneira:

- em cada jogada, lançam-se dois dados, um azul e um amarelo, e adicionam-se os pontos de cada um;
- o jogador A ganha se a soma for 6, 7, 8 ou 9;
- o jogador B ganha se a soma for 2, 3, 4, 5, 10, 11 ou 12.

Se você fosse apostar na vitória de um deles, qual escolheria?

Analisando de maneira superficial, poderíamos dizer que a melhor escolha seria o jogador B, porque há sete somas que lhe permitem ganhar e só quatro que o fazem perder, ou seja, a probabilidade de B ganhar seria $\frac{7}{11}$ ou aproximadamente 63,6%. Mas será essa a melhor escolha?

Para responder a essa pergunta, vamos, inicialmente, construir um quadro para obter as somas possíveis.

		Dado amarelo					
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Dado azul	**1**	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

Considerando as somas possíveis, percebemos que a soma 2 é mais difícil de acontecer do que a soma 7, pois a soma 2 é obtida apenas se sair 1 em ambos os dados, enquanto a soma 7 é possível de várias maneiras: 1 e 6, 2 e 5, ou 3 e 4.

Temos de considerar também que sair 3 no dado azul e 4 no dado amarelo é diferente de sair 4 no dado azul e 3 no dado amarelo. Assim, para resolver o problema de maneira segura, é importante listar todas as combinações possíveis nesse jogo. Observe a seguir.

Dado azul	Dado amarelo	Soma
1	1	2
1	2	3
1	3	4
1	4	5
1	5	6
1	6	7
2	1	3
2	2	4
2	3	5
2	4	6
2	5	7
2	6	8
3	1	4
3	2	5
3	3	6
3	4	7
3	5	8
3	6	9

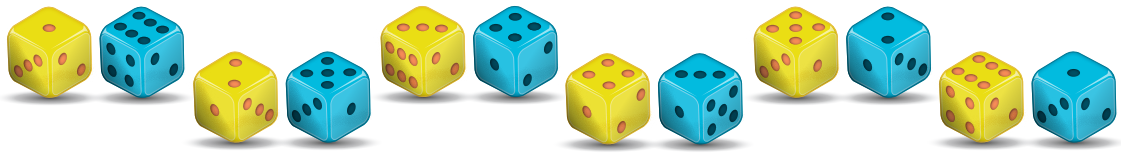
Dado azul	Dado amarelo	Soma
4	1	5
4	2	6
4	3	7
4	4	8
4	5	9
4	6	10
5	1	6
5	2	7
5	3	8
5	4	9
5	5	10
5	6	11
6	1	7
6	2	8
6	3	9
6	4	10
6	5	11
6	6	12

Fazendo isso, notamos que há 11 somas possíveis, com 36 possibilidades diferentes de lançamentos.

Para obter soma 2, só há uma maneira.



Para obter soma 7, há seis maneiras possíveis, considerando a cor dos dados.



Ilustrações: ID/BR

Organizando um quadro com o número de possibilidades de cada soma, temos:

Soma	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Número de maneiras possíveis	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

Agora, vamos calcular a probabilidade de obter cada soma.

- soma 2: $\frac{1}{36} \simeq 2{,}8\%$
- soma 3: $\frac{2}{36} \simeq 5{,}6\%$
- soma 4: $\frac{3}{36} \simeq 8{,}3\%$
- soma 5: $\frac{4}{36} \simeq 11{,}1\%$
- soma 6: $\frac{5}{36} \simeq 13{,}9\%$
- soma 7: $\frac{6}{36} \simeq 16{,}7\%$
- soma 8: $\frac{5}{36} \simeq 13{,}9\%$
- soma 9: $\frac{4}{36} \simeq 11{,}1\%$
- soma 10: $\frac{3}{36} \simeq 8{,}3\%$
- soma 11: $\frac{2}{36} \simeq 5{,}6\%$
- soma 12: $\frac{1}{36} \simeq 2{,}8\%$

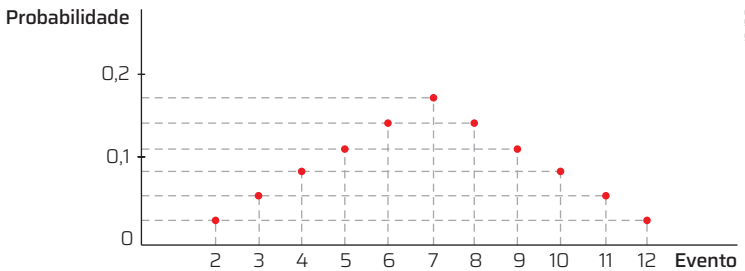
O que acabamos de fazer foi definir uma função que a cada evento faz corresponder à respectiva probabilidade. É a **função de probabilidade** ou **distribuição de probabilidade**.

Função de probabilidade ou **distribuição de probabilidade** para uma dada experiência aleatória é a função que a cada evento possível faz corresponder à probabilidade de o evento ocorrer.

Podemos representar a função de probabilidade em um quadro ou gráfico. No caso da situação anterior, temos:

Evento	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Probabilidade	0,028	0,056	0,083	0,111	0,139	0,167	0,139	0,111	0,083	0,056	0,028

Agora, vamos retomar a questão "Se você fosse apostar na vitória de um deles, qual escolheria?". Podemos responder a essa pergunta analisando a situação exposta no quadro ou no gráfico.



ID/BR

- O jogador A ganha se a soma for 6, 7, 8 ou 9. As probabilidades aproximadas de ele obter essas somas são, respectivamente, 0,139, 0,167, 0,139 e 0,111. Somando esses valores, teremos a probabilidade de A vencer: 0,556 ou 55,6%.

Não escreva no livro.

- O jogador B vence se obtiver soma 2, 3, 4, 5, 10, 11 ou 12. Do mesmo modo que fizemos para o jogador A, calculamos a probabilidade de B vencer somando as probabilidades de ele obter cada uma das somas que lhe dão vantagem. Logo, a probabilidade aproximada de B vencer é 0,445 ou 44,5%.

Portanto, o jogo é favorável ao jogador A. Observe que, embora o número de somas possíveis para A vencer seja menor que para o jogador B, as somas favoráveis a A são somas mais prováveis.

Pelo gráfico, podemos encontrar a resposta ao problema analisando os valores que correspondem a cada soma e sua respectiva probabilidade e, então, concluir que as chances de A vencer são maiores.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R1 **Responda às questões.**

Considere que um casal tenha passado por um estudo genético que apontou que os filhos deles têm probabilidades iguais de uso de óculos e de não uso de óculos na primeira infância. Esse casal teve quatro filhos.

a) Qual é a probabilidade de todos os filhos usarem óculos na primeira infância?

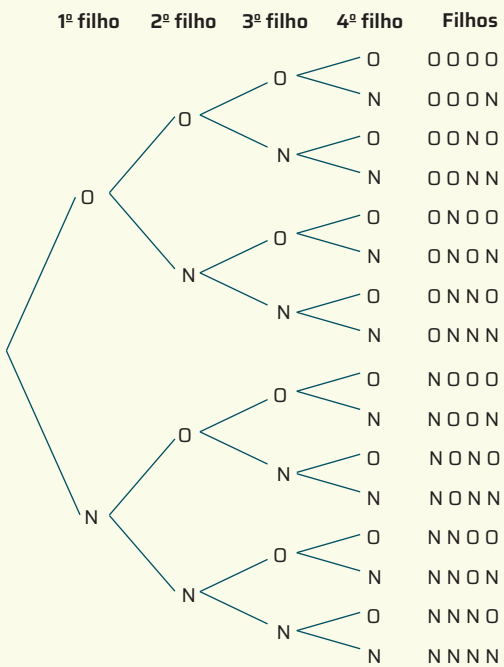
b) Qual é a probabilidade de dois filhos usarem óculos e dois não usarem óculos na primeira infância?

c) Construa o gráfico da distribuição de probabilidade do número de filhos que usam e de que não usam óculos na primeira infância.

Resolução

a) Para resolver esse problema, vamos admitir a hipótese de que a probabilidade de um filho usar óculos na primeira infância é igual à de não usar, isto é, 50% para cada caso.

Para descobrir todos os casos possíveis, podemos fazer um diagrama de árvore. Usaremos O para indicar uso de óculos e N para indicar não uso de óculos. Observe a seguir.



Analisando o diagrama, notamos que há 16 (ou 2^4) casos possíveis e equiprováveis de uso de óculos. Podemos resumir esses casos em um quadro.

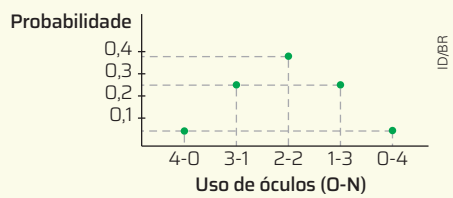
O	N	Frequência
4	0	1
3	1	4
2	2	6
1	3	4
0	4	1
Total		**16**

Com base nos dados, identificamos que a probabilidade de todos usarem óculos é $\frac{1}{16} = 0{,}0625$ ou 6,25%.

b) Observando o quadro do item **a**, temos que a probabilidade de dois filhos usarem e dois não usarem óculos é $\frac{6}{16} = 0{,}375$ ou 37,5%.

c) Nessa situação, a distribuição de probabilidade é:

O	N	Frequência	Probabilidade
4	0	1	0,0625
3	1	4	0,25
2	2	6	0,375
1	3	4	0,25
0	4	1	0,0625
Total		**16**	**1**



Analisando o gráfico, concluímos que a probabilidade maior é que dois filhos usem óculos na primeira infância e dois não usem.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

O trabalho com esta seção permite desenvolver as habilidades **EM13MAT311** e **EM13MAT312**, ao propor que os estudantes resolvam e elaborem problemas de contagem e cálculo de probabilidade.

1 **Lançam-se dois dados de seis faces e multiplicam-se os números que saíram nas faces superiores.**
Consulte a resposta no Manual do Professor.

a) Construa um quadro com os resultados possíveis.

b) Qual é a probabilidade de o produto dessa multiplicação ser 15? Aproximadamente 5,6%.

c) Construa um gráfico de distribuição de probabilidade dos produtos e indique os produtos que têm a maior e os que têm a menor probabilidade de sair.
Consulte o gráfico no Manual do Professor.

2 **No jogo do "palitinho", os jogadores podem ficar com uma das mãos vazia ou esconder nela um, dois ou três palitos. Antes de abrirem a mão, cada jogador tenta adivinhar a soma dos palitos escondidos. Dois amigos estão jogando "palitinho" e escondem alguns palitos ao acaso.**

a) Construa um quadro com todos os resultados possíveis. Consulte o quadro no Manual do Professor.

b) Construa um quadro de distribuição de probabilidade da soma dos palitos escondidos.
Consulte o quadro no Manual do Professor.

c) Construa o gráfico correspondente ao quadro que você obteve no item anterior.
Consulte o gráfico no Manual do Professor.

3 **Dois dados de seis faces são lançados e subtrai-se o menor do maior número obtido.**

a) Construa um quadro com os resultados possíveis.
Consulte o quadro no Manual do Professor.

b) Qual é a probabilidade de a diferença ser 2? 26,7%

c) Qual é a diferença mais provável? 1

d) Faça um quadro e um gráfico da distribuição de probabilidade das diferenças.
Consulte respostas no Manual do Professor.

4 **Dois jogadores lançaram três dados e adicionaram os números que saem nas faces superiores. O jogador A ganha se a soma for 8, 9, 10, 11 ou 12, e o jogador B ganha nos outros casos.**

O quadro com o número de casos possíveis para cada soma é este:

Soma	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Casos favoráveis	1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1

a) Quantos são os casos possíveis de somas? 16

b) Faça um quadro e um gráfico da distribuição de probabilidade. Consulte o quadro e o gráfico no Manual do Professor.

c) Qual é o jogador que tem maior probabilidade de ganhar? Por quê? O jogador A, porque a probabilidade de ocorrerem somas favoráveis a ele é 57,9%.

d) Como você alteraria o jogo para que os dois jogadores tivessem possibilidades iguais? Faça isso de dois modos diferentes. Respostas pessoais.

5 **Reúna-se com um colega para elaborar mais duas perguntas para a atividade 1.** Respostas pessoais.

Na atividade **5**, avalie os estudantes, considerando as perguntas criadas pelas duplas. Observe se elas são coerentes com a atividade **1** e se os estudantes utilizaram adequadamente a linguagem matemática. Além disso, ao se reunir com um colega para criar um problema, eles estarão desenvolvendo a competência geral **9**, exercitando a empatia e aprendendo a respeitar diferentes opiniões.

PROBABILIDADE FREQUENTISTA E LEI DOS GRANDES NÚMEROS

Observe na tabela a seguir os resultados para a investigação de possíveis tratamentos para determinada doença de dois grupos de pessoas.

Resultado para os possíveis tratamentos de determinada doença nos grupos 1 e 2

Tipo de tratamento	Número de pessoas do grupo 1	Número de pessoas do grupo 2
Não receberam tratamento	622	1880
Tratamento A	495	2556
Tratamento B	483	2875
Tratamento C	228	1011
Tratamento D	93	301
Receberam placebo	93	327
Total de votos	**2014**	**8950**

Dados fornecidos por meio da investigação para o tratamento dos grupos 1 e 2.

No grupo 2, é mais provável que uma pessoa tenha recebido o tratamento A ou o tratamento B?

Para responder a essa questão, podemos calcular a probabilidade de cada um dos eventos. Para isso, devemos considerar que o grupo 2 tem 8950 pessoas .

Não escreva no livro.

A probabilidade de que uma pessoa tenha recebido o tratamento A é:

$$P_A = \frac{2556}{8950} \simeq 0{,}286 = 28{,}6\%$$

E a probabilidade de que uma pessoa tenha recebido o tratamento B é:

$$P_B = \frac{2875}{8950} \simeq 0{,}321 = 32{,}1\%$$

Portanto, é mais provável que a pessoa tenha recebido o tratamento B. Essa constatação também poderia ser imediata: observando a tabela, notamos que o número de pessoas que receberam o tratamento B é maior que o número de pessoas que receberam o tratamento A.

Agora, considere que nos dirigíssemos ao acaso a um desses grupos. Em qual deles seria mais provável encontrar alguém que não tivesse feito nenhum tratamento?

Como o número de pessoas é diferente nos dois grupos, não basta olhar as frequências absolutas na tabela para fazer a comparação.

No grupo 1, há 2014 pessoas, e, no grupo 2, há 8950.

No grupo 1, há 622 pessoas que não receberam tratamento. Logo, a probabilidade de encontrar alguém que não tenha recebido tratamento é:

$$P_{\text{não receberam tratamento}} = \frac{622}{2014} \simeq 0{,}309 = 30{,}9\%$$

No grupo 2, há 1880 pessoas que não receberam tratamento. Portanto, a probabilidade de encontrar alguém que não tenha recebido tratamento é:

$$P_{\text{não receberam tratamento}} = \frac{1880}{8950} \simeq 0{,}210 = 21{,}0\%$$

Nota-se que, em termos absolutos, há mais pessoas que não receberam tratamento no grupo 2. No entanto, ao considerar uma pessoa do grupo 1 e uma pessoa do grupo 2, é mais provável que a pessoa do grupo 1 não tenha recebido tratamento.

Para chegar a essa conclusão, tivemos de fazer uma análise relativa entre o número de pessoas de cada grupo e a respectiva quantidade de pessoas que não receberam tratamento. Ou seja, calculamos as frequências relativas dividindo o número de casos favoráveis pelo número de casos possíveis.

Observe com os estudantes como a probabilidade frequentista está presente em pesquisas realizadas na área da saúde.

Verifique como deve ficar a tabela dos dois grupos após o cálculo das frequências relativas.

Resultado para os possíveis tratamentos da doença nos grupos 1 e 2

Tipo de tratamento	Grupo 1		Grupo 2	
	f	fr (%)	f	fr (%)
Não receberam tratamento	622	30,9	1880	21,0
Tratamento A	495	24,6	2556	28,6
Tratamento B	483	24,0	2875	32,1
Tratamento C	228	11,3	1011	11,3
Tratamento D	93	4,6	301	3,4
Receberam placebo	93	4,6	327	3,6

Dados fornecidos por meio da investigação para o tratamento dos grupos 1 e 2.

Quando se toma a frequência relativa como a probabilidade de um evento, dizemos que estamos considerando a **probabilidade frequentista** ou o conceito frequentista de probabilidade.

Lei dos grandes números

Os estudantes de uma turma realizaram o seguinte experimento: cada um deles lançou um dado várias vezes e registrou os resultados, destacando o número de vezes que ocorreu o evento 6.

Após um tempo repetindo a experiência, como todos os dados eram idênticos, os estudantes juntaram os resultados, obtendo, assim, um número elevado de lançamentos.

Lançamento de um dado pelos estudantes de uma turma

Número de lançamentos	Número de vezes que ocorreu o evento 6	fr (%)
100	14	14,0
200	40	20,0
300	43	14,3
400	72	18,0
500	83	16,6
600	100	16,7
700	117	16,7
⋮	⋮	⋮
1 000	168	16,8

Dados obtidos pelos estudantes.

Observe que, a partir de um número grande de lançamentos, as frequências relativas desses eventos tendem para 16,7%, que é aproximadamente $\frac{1}{6}$.

Há uma propriedade das probabilidades, conhecida como **lei dos grandes números**, que justifica esse fato.

De acordo com essa lei, para um grande número de experiências, tendo cada uma um resultado aleatório, a frequência relativa de obtenção de cada um desses resultados tende a se estabilizar, convergindo para certo número, que é a probabilidade desse resultado.

> Quando o número de experiências aumenta muito, a frequência relativa de um evento tende a se estabilizar em determinado valor, que é adotado como **probabilidade** desse evento.

Essa lei, que tornou possível o estudo de probabilidades e análises estatísticas em populações muito grandes, foi enunciada pela primeira vez pelo matemático Jacob Bernoulli (1654-1705) e publicada postumamente em 1713.

Alamy/Fotoarena



Jacob Bernoulli (1654-1705).

Família Bernoulli e suas contribuições para a Matemática

O objeto digital acrescenta conhecimentos sobre a família Bernoulli, na medida em que explora as contribuições para a Matemática, como o cálculo infinitesimal e a teoria de probabilidades. Além disso, são apresentados detalhes sobre os avanços na Física e na Matemática feitos por Daniel Bernoulli.

PARA EXPLORAR

Site

Rodrigues, Paulo R. Souza. A família Bernoulli. *In:* Clubes de Matemática da Obmep. Rio de Janeiro: Obmep, [20--]. Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/a-familia-bernoulli/. Acesso em: 2 out. 2024.

Esse artigo apresenta as contribuições da família Bernoulli para as áreas de Matemática e Física.

Não escreva no livro.

TECNOLOGIA

Vamos usar a tecnologia para simular o lançamento de uma moeda e, assim, verificar a lei dos grandes números. Para isso, vamos trabalhar com a planilha eletrônica do LibreOffice que você utilizou anteriormente.

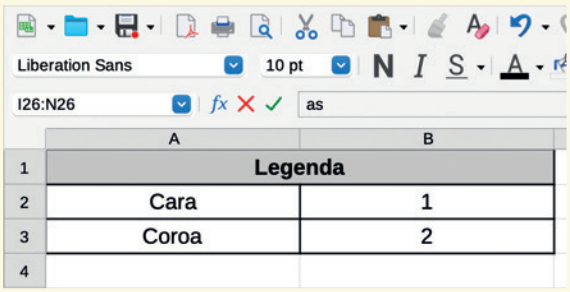
Essa planilha eletrônica, assim como a maioria das planilhas desse tipo, apresenta diversas funções. Entre elas há a que retorna números aleatórios e a que conta o número de resultados em um intervalo. Essas funções são as que vamos aprender a utilizar agora.

1ª etapa: Abra a Planilha Calc. Vamos utilizar uma função que faça o programa retornar os números 1 ou 2 aleatoriamente. Vamos associar ao número 1 o resultado cara e ao número 2, coroa. Assim, é preciso escrever uma breve legenda.



Lançamento de uma moeda.

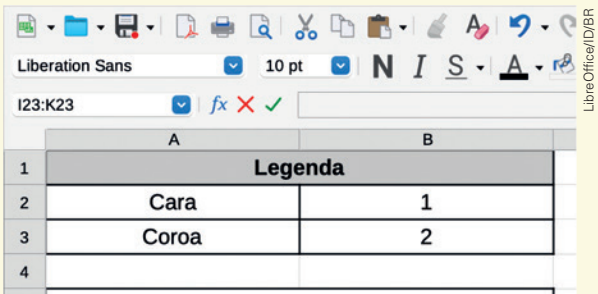
Yeti studio/Shutterstock.com/ID/BR



LibreOffice/ID/BR

	A	B
1	**Legenda**	
2	Cara	1
3	Coroa	2
4		

2ª etapa: A ideia é simular as probabilidades de obter cara ou coroa em 10, 50, 100 e 1 000 lançamentos. Começaremos com 10 lançamentos. Para isso, organize a planilha como mostra a imagem a seguir.

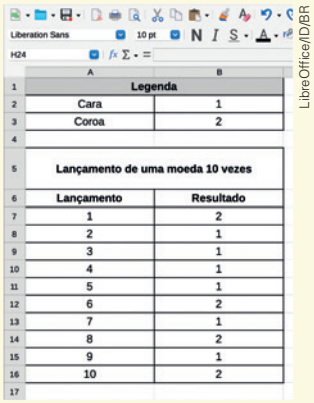


LibreOffice/ID/BR

	A	B
1	**Legenda**	
2	Cara	1
3	Coroa	2
4		
5	**Lançamento de uma moeda 10 vezes**	
6	**Lançamento**	**Resultado**
7	1	
8	2	
9	3	
10	4	
11	5	
12	6	
13	7	
14	8	
15	9	
16	10	
17		

Na célula B7, digite =INT(ALEATÓRIO()*2+1) e aperte *Enter*. A função "aleatório" retorna um valor aleatório entre 0 e 1. A função "int" seleciona apenas a parte inteira de um número. Assim, combinando essas duas funções e utilizando os parâmetros *2 e +1, garantimos que o número a ser retornado seja obrigatoriamente 1 ou 2, que, nessa situação, indicam cara ou coroa.

Depois de digitar essa fórmula na célula B7, clique no canto inferior direito da célula e arraste até a célula B16 para obter os resultados.

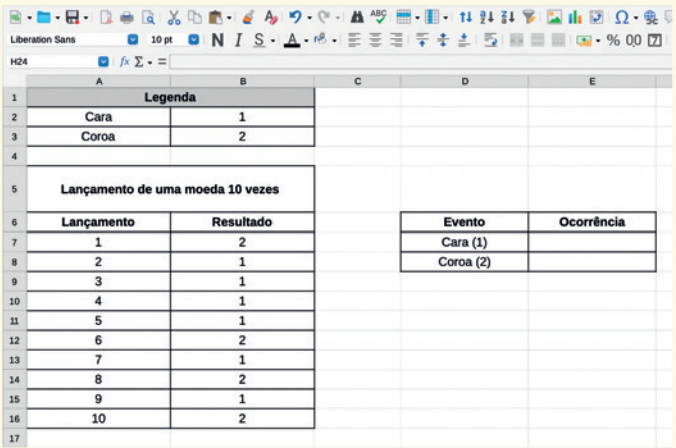


	A	B
1	**Legenda**	
2	Cara	1
3	Coroa	2
4		
5	**Lançamento de uma moeda 10 vezes**	
6	**Lançamento**	**Resultado**
7	1	2
8	2	1
9	3	1
10	4	1
11	5	1
12	6	2
13	7	1
14	8	2
15	9	1
16	10	2
17		

LibreOffice/ID/BR

Observação: como a função retorna valores aleatórios, é provável que a distribuição de 1 e 2 na sua planilha não fique como a apresentada na imagem, o que é um indício de que a função está correta.

3ª etapa: Agora, vamos utilizar outra função para contar a quantidade de resultados 1 e de resultados 2 obtidos. Inicialmente, organizamos novamente a planilha, como indicado a seguir.



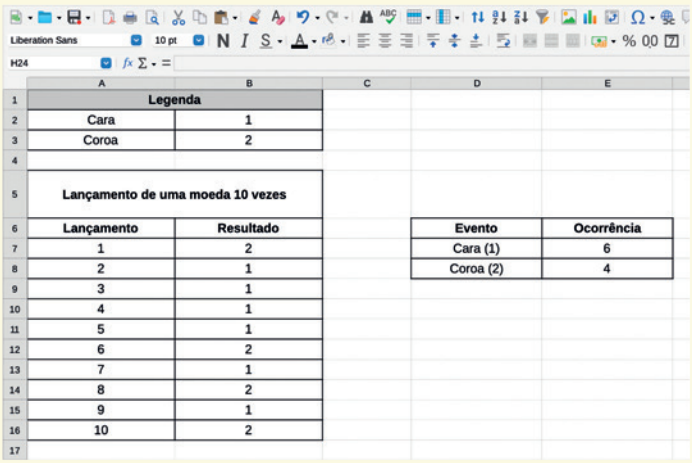
	A	B	C	D	E
1	**Legenda**				
2	Cara	1			
3	Coroa	2			
4					
5	**Lançamento de uma moeda 10 vezes**				
6	**Lançamento**	**Resultado**		**Evento**	**Ocorrência**
7	1	2		Cara (1)	
8	2	1		Coroa (2)	
9	3	1			
10	4	1			
11	5	1			
12	6	2			
13	7	1			
14	8	2			
15	9	1			
16	10	2			
17					

LibreOffice/ID/BR

Agora, na célula E7, digitamos =CONT.SE(B7:B16;1). A função "cont.se" conta o número de resultados em um intervalo. Colocamos primeiro o intervalo entre parênteses, depois utilizamos um ponto e vírgula e indicamos o resultado que queremos que a função procure. Nesse caso, queremos que a função retorne à quantidade de números 1 nas células de B7 a B16.

Usando o mesmo raciocínio, na célula E8, digitamos =CONT.SE(B7:B16;2).

Observe os resultados obtidos.

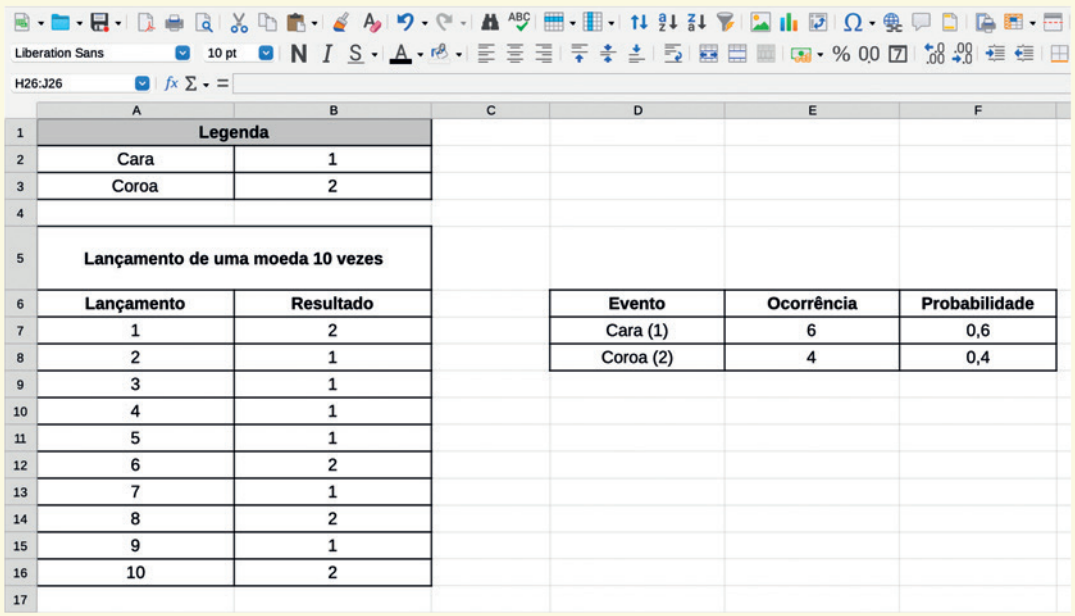


	A	B	C	D	E
1	**Legenda**				
2	Cara	1			
3	Coroa	2			
4					
5	**Lançamento de uma moeda 10 vezes**				
6	**Lançamento**	**Resultado**		**Evento**	**Ocorrência**
7	1	2		Cara (1)	6
8	2	1		Coroa (2)	4
9	3	1			
10	4	1			
11	5	1			
12	6	2			
13	7	1			
14	8	2			
15	9	1			
16	10	2			
17					

LibreOffice/ID/BR

Não escreva no livro.

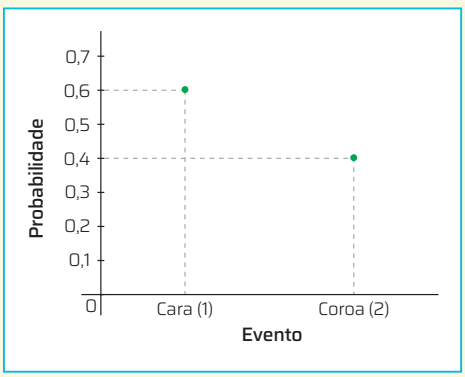
4ª etapa: Vamos, então, calcular as probabilidades envolvidas. Para isso, usaremos recursos que você já conhece. Na célula F7, digitamos =E7/10 e, na célula F8, =E8/10.



LibreOffice/ID/BR

	A	B	C	D	E	F
1	**Legenda**					
2	Cara	1				
3	Coroa	2				
4						
5	**Lançamento de uma moeda 10 vezes**					
6	**Lançamento**	**Resultado**		**Evento**	**Ocorrência**	**Probabilidade**
7	1	2		Cara (1)	6	0,6
8	2	1		Coroa (2)	4	0,4
9	3	1				
10	4	1				
11	5	1				
12	6	2				
13	7	1				
14	8	2				
15	9	1				
16	10	2				
17						

5ª etapa: Selecionando os dados das colunas D e F e usando o botão  , podemos construir um gráfico como o mostrado a seguir.



ID/BR

ATIVIDADES

1 Seguindo as orientações apresentadas, utilize uma planilha eletrônica e faça simulações considerando as quantidades de lançamentos indicadas em cada item.

a) 50 Resposta pessoal.

b) 100 Resposta pessoal.

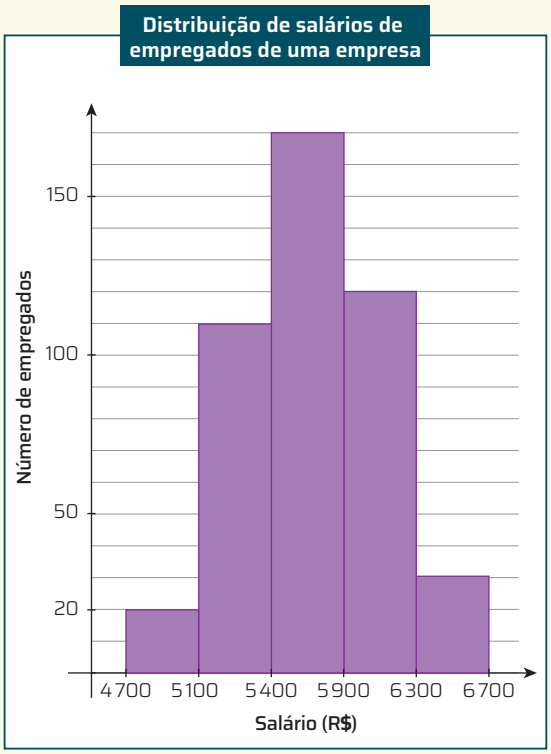
c) 1000 Resposta pessoal.

2 Reúna-se com um colega para comparar os resultados que vocês obtiveram na atividade anterior. Comentem o que vocês perceberam com o gráfico de distribuição de probabilidade à medida que a quantidade de lançamentos ficou maior. Respostas pessoais.

3 Na internet, é possível encontrar outros simuladores de lançamento de moeda. Ainda em dupla, pesquisem outro simulador e explorem como utilizá-lo. Depois, compartilhem com os demais colegas da turma as descobertas feitas. **Dica:** Muitos desses simuladores estão em inglês; então, se considerarem necessário, tenham um dicionário para consultar possíveis termos que sejam desconhecidos. Nas apresentações dos estudantes, avalie o uso adequado da linguagem matemática relativa à probabilidade.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R2 O histograma a seguir corresponde à distribuição de salários de empregados de uma empresa.



Dados fornecidos pela empresa.

a) Construa uma tabela de frequências absolutas e relativas para os salários dos empregados dessa empresa.

b) No caso do sorteio aleatório de um dos empregados dessa empresa, qual é a probabilidade de que o salário dele seja menor que R$ 5 500,00?

c) Escolhendo aleatoriamente um intervalo de classe salarial entre as cinco do gráfico, qual é a probabilidade de que o intervalo de classe escolhido tenha menos que 50 empregados?

Resolução

a) Construindo a tabela solicitada, temos:

SALÁRIOS DOS FUNCIONÁRIOS		
Faixa salarial (R$)	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa (aproximada)**
4 700 ⊢ 5 100	20	4,4%
5 100 ⊢ 5 500	110	24,4%
5 500 ⊢ 5 900	170	37,8%
5 900 ⊢ 6 300	120	26,7%
6 300 ⊢ 6 700	30	6,7%
Total	**450**	**100%**

Dados fictícios.

b) A probabilidade de sortear um empregado e o salário dele ser inferior a R$ 5 500,00 é aproximadamente igual à soma das frequências 4,4 + 24, 4 = 28,8. Portanto, a probabilidade pedida é, aproximadamente, 28,8%.

c) Temos 5 intervalos de classes salariais e em dois deles o número de empregados é menor que 50. Então, a probabilidade de esse evento acontecer é $\frac{2}{5} = 0,4 = 40\%$.

Não escreva no livro.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Se preferir, use uma calculadora para resolver as atividades a seguir.

6 Analise a tabela de distribuição por faixa etária da população de um município.

Distribuição por faixa etária da população	
Idade	**Número de pessoas**
0 ⊢ 9	1 569 000
10 ⊢ 19	1 778 200
20 ⊢ 29	1 663 140
30 ⊢ 39	1 349 340
40 ⊢ 49	1 171 520
50 ⊢ 59	1 161 060
60 ⊢ 69	920 480
Maior de 70	847 260
Total	**10 460 000**

Dados fornecidos pela prefeitura do município.

a) Faça uma tabela das frequências relativas.
Consulte a tabela no Manual do Professor.
b) Agora, considere um município parecido com esse, mas que tenha 80 000 habitantes. Quantas pessoas você prevê que tenham entre 30 e 39 anos de idade? E com menos de 30 anos? 10 320; 38 320.

7 Uma estação de rádio transmite músicas distribuindo-as ao longo de sua programação diária de acordo com a tabela a seguir.

Tipo de música mais tocado na programação diária de uma estação de rádio	
Tipo de música	**Porcentagem**
Rock	45%
Tecno	13%
Dance	26%
Pagode	10%
Flashback	6%

Dados fornecidos pela administração da estação de rádio.

a) Sintonizando a rádio ao acaso durante o dia, qual é a probabilidade de se ouvir pagode? E *tecno*?
10%; 13%.
b) Durante quantas horas por dia pode-se ouvir *rock*?
10 h 48 min

8 (Unifesp) O quadro mostra o resultado de uma pesquisa realizada com 200 nadadores de competição da cidade de São Paulo, visando apontar o percentual desses nadadores que já tiveram lesões (dores) em certas articulações do corpo, decorrentes da prática de natação, nos últimos três anos.

Articulação	Percentual de nadadores
Ombro	80%
Coluna	50%
Joelho	25%
Pescoço	20%

Com base no quadro, determine:

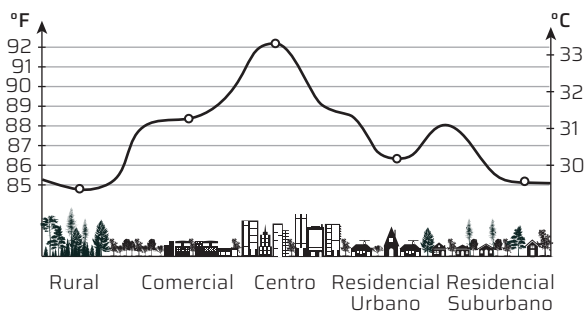
a) quantos nadadores do grupo pesquisado tiveram lesões (dores) no joelho ou no pescoço, considerando que 5% dos nadadores tiveram lesões nas duas articulações, joelho e pescoço. 80

b) qual é a probabilidade de um nadador do grupo pesquisado, escolhido ao acaso, não ter tido lesões (dores) no ombro ou na coluna, considerando as manifestações de dores como eventos independentes. 10%

9 Registre no caderno a alternativa correta.

(Enem) Rafael mora no Centro de uma cidade e decidiu se mudar, por recomendações médicas, para uma das regiões: Rural, Comercial, Residencial Urbano ou Residencial Suburbano. A principal recomendação médica foi com as temperaturas das "ilhas de calor" da região, que deveriam ser inferiores a 31 °C. Tais temperaturas são apresentadas no gráfico:

Perfil da ilha de calor urbana



Enem. Fac-símile: ID/BR

Fonte: EPA.

Escolhendo, aleatoriamente, uma das outras regiões para morar, a probabilidade de ele escolher uma região que seja adequada às recomendações médicas é:
Alternativa **e**.

a) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{2}{5}$ e) $\frac{3}{4}$

b) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{3}{5}$

O estudo deste tópico contribui para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT316**, pois os estudantes vão resolver problemas que envolvem cálculo e interpretação de média aritmética e desvio-padrão.

MÉDIA ARITMÉTICA E DESVIO-PADRÃO

Agora, vamos verificar como utilizar os conceitos de média aritmética e de desvio-padrão na análise de dados estatísticos com o auxílio da probabilidade.

Acompanhe a situação a seguir.

Em uma escola, foi selecionada uma amostra de quatrocentos estudantes para uma pesquisa sobre o número de irmãos. Recolhidos os dados e calculadas as frequências, foi organizada a tabela a seguir.

Número de irmãos dos estudantes da escola											
Número de irmãos (x_i)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	**Total**
Frequência absoluta	25	52	68	123	79	33	11	6	2	1	**400**
Frequência relativa (%)	6,25	13	17	30,75	19,75	8,25	2,75	1,5	0,5	0,25	**100**

Dados obtidos pela direção da escola.

A frequência relativa é um valor aproximado da probabilidade de que um estudante, escolhido ao acaso, tenha x_i irmãos.

Observando a tabela, podemos afirmar, por exemplo, que:

- a probabilidade de que um estudante dessa escola tenha três irmãos é 30,75%;
- a probabilidade de que um estudante dessa escola tenha mais que cinco irmãos é:

$$2{,}75\% + 1{,}5\% + 0{,}5\% + 0{,}25\% = 5\%$$

Portanto, escolher um estudante **ao acaso** e registrar o número de irmãos é uma experiência aleatória cujos resultados possíveis são números. Temos, assim, uma **variável aleatória** quantitativa que pode assumir os valores 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9 com as probabilidades aproximadas p_0, p_1, p_2, ..., p_9, que, em percentual, coincidem com os valores das frequências relativas. A média $\overline{X}$ do conjunto de dados é:

$$\overline{X} = \frac{25 \cdot 0 + 52 \cdot 1 + 68 \cdot 2 + 123 \cdot 3 + 79 \cdot 4 + 33 \cdot 5 + 11 \cdot 6 + 6 \cdot 7 + 2 \cdot 8 + 1 \cdot 9}{400}$$

$$\overline{X} = 2{,}9275 \simeq 2{,}93$$

Perceba que, embora ninguém possa ter 2,93 irmãos, esse número mostra uma leve tendência para que os estudantes tenham, em média, três irmãos.

Podemos também calcular o desvio-padrão (DP).

$$DP = \sqrt{\frac{25 \cdot (0 - 2{,}93)^2 + 52 \cdot (1 - 2{,}93)^2 + 68 \cdot (2 - 2{,}93)^2 + \ldots + 1 \cdot (9 - 2{,}93)^2}{400}}$$

Usando as frequências relativas, o desvio-padrão pode ser escrito em percentual.

$$DP = \sqrt{6{,}25 \cdot (0 - 2{,}93)^2 + 13 \cdot (1 - 2{,}93)^2 + 17 \cdot (2 - 2{,}93)^2 + \ldots + 0{,}25 \cdot (9 - 2{,}93)^2}$$

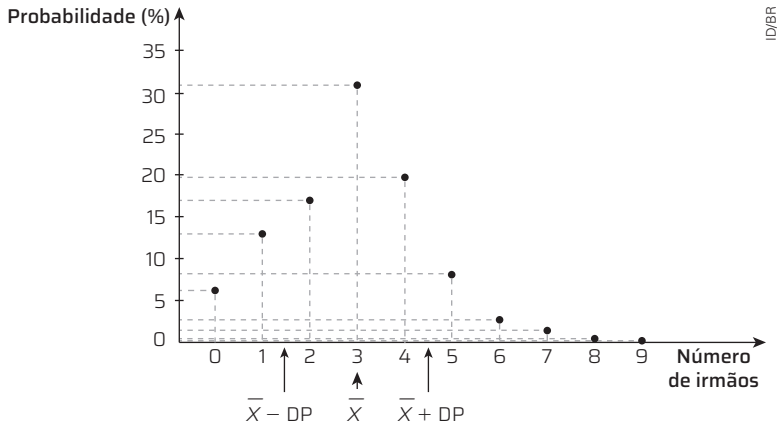
$$DP \simeq 1{,}57$$

No gráfico a seguir, é possível identificar que a maior frequência dos dados está concentrada no intervalo $\left]\overline{X} - DP, \overline{X} + DP\right[$, sendo:

$$\overline{X} - DP = 2{,}93 - 1{,}57 = 1{,}36$$

$$\overline{X} + DP = 2{,}93 + 1{,}57 = 4{,}50$$

Não escreva no livro.



ID/BR

Adicionando as probabilidades correspondentes ao intervalo]1,36; 4,50[, temos:

$$17 + 30{,}75 + 19{,}75 = 67{,}5$$

Isso indica que um estudante dessa pesquisa, escolhido ao acaso, tem 67,5% de probabilidade de pertencer ao intervalo $\left]\overline{X} - DP, \overline{X} + DP\right[$, ou seja, ter mais de um irmão e menos de cinco irmãos.

Curva normal

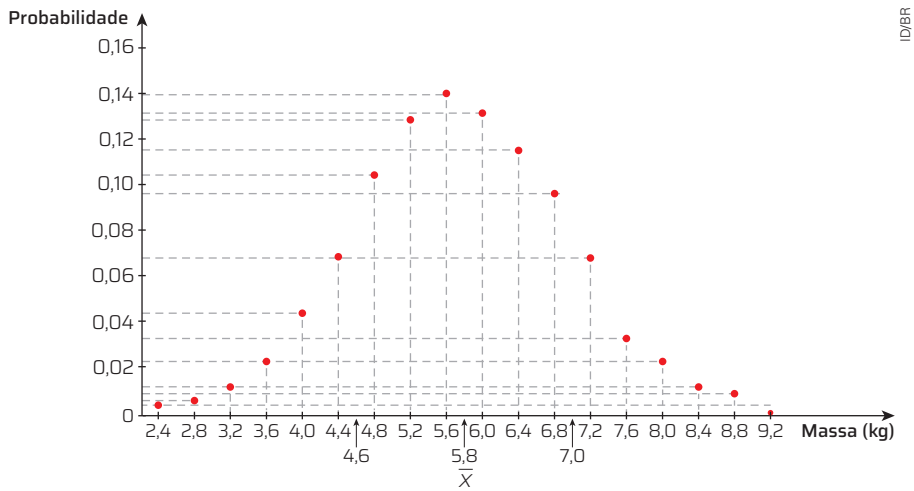
A tabela a seguir mostra o resultado de um estudo realizado em uma clínica pediátrica sobre a medida de massa de bebês entre 0 e 12 meses.

Medida de massa dos bebês de 0 a 12 meses		
Medida de massa (kg)	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**
2,4	1	0,003
2,8	2	0,005
3,2	4	0,011
3,6	8	0,022
4,0	16	0,043
4,4	25	0,067
4,8	38	0,103
5,2	47	0,127
5,6	51	0,138
6,0	48	0,130
6,4	42	0,114
6,8	35	0,095
7,2	25	0,067
7,6	12	0,032
8,0	8	0,022
8,4	4	0,011
8,8	3	0,008
9,2	1	0,003
Total	**370**	**1,001**

Dados fornecidos pela administração da clínica.

Note que a soma das frequências relativas é 1, mas, como usamos valores aproximados, o resultado total também aparece aproximado.

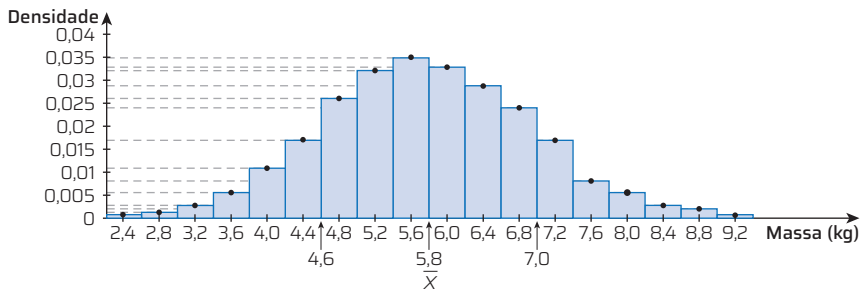
Adotando as frequências relativas como valores das probabilidades, podemos fazer o gráfico da distribuição de probabilidades.



ID/BR

A esse gráfico vamos associar um outro chamado **gráfico de densidade**, ou seja, um histograma em que cada retângulo tem como centro da base os pontos do eixo horizontal e área numericamente igual à probabilidade do respectivo valor da variável naquele ponto. Isso significa que o valor da medida da área de cada retângulo corresponde à probabilidade do ponto central de sua base. Neste gráfico, a altura de cada um destes retângulos é chamada **densidade** e o gráfico resultante corresponde a uma função da variável que está no eixo horizontal e é denominada função **densidade de probabilidade**. Analise o gráfico a seguir.

Calculando a média aritmética e o desvio-padrão, temos: $\overline{X} = 5{,}8$ e DP $= 1{,}2$.



ID/BR

Logo:

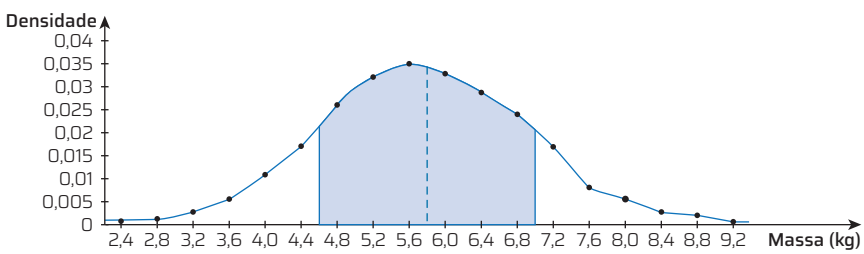
$$\left]\overline{X} - \text{DP}, \overline{X} + \text{DP}\right[=]4{,}6;\ 7{,}0[$$

Isso significa que há 70,7% (0,103 + 0,127 + 0,138 + 0,130 + 0,114 + 0,095 = 0,707) de bebês com "a medida de massa" entre 4,6 kg e 7,0 kg.

O intervalo $]\overline{X} - \text{DP}, \overline{X} + \text{DP}[$ é definido como **zona de normalidade** dessa distribuição de dados e, se unirmos os pontos médios do topo das barras (figuras retangulares) do histograma, obtemos a **curva de distribuição** dos dados.

Em uma curva de distribuição, a frequência ou a probabilidade de certo intervalo é igual à área limitada pelo eixo horizontal, pelas retas verticais que passam nos extremos do intervalo e pela curva de distribuição.

No exemplo que estamos analisando, a área destacada a seguir corresponde à zona de normalidade. Ela mostra onde está concentrada a maioria dos indivíduos pesquisados.



ID/BR

Não escreva no livro.

A curva de distribuição que obtivemos nesse caso tem algumas características que podem ser ressaltadas. Tem a forma de um sino (por isso, também é conhecida como "curva do sino") e é simétrica.

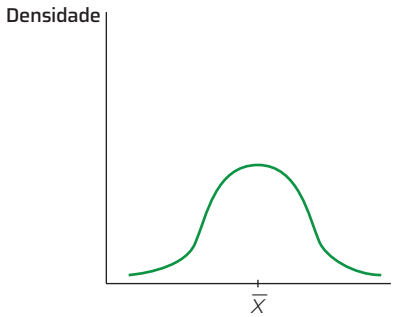
De acordo com os dados apresentados, a média das massas dos bebês de 0 a 12 meses analisados é 5,8 kg. Observe que o ponto máximo do gráfico está próximo a esse valor.

A maioria dos indivíduos estudados está na zona central.

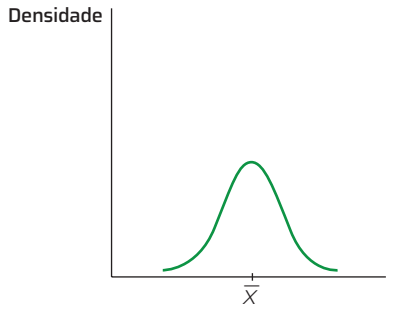
Em Estatística, curvas desse tipo podem, muitas vezes, ser aproximadas pela **curva de distribuição normal**, **curva normal** ou **curva de Gauss**.

A curva de Gauss aparece no estudo de muitas variáveis estatísticas: altura, medida de massa, comprimento dos pés, número de filhos, número de horas em que se assiste à televisão, salários, tempo de reação a um medicamento, etc.

Nessas distribuições normais, o desvio-padrão tem influência sobre o aspecto da curva. Analise os exemplos a seguir.



Desvio-padrão grande: valores mais dispersos em torno de $\overline{X}$.

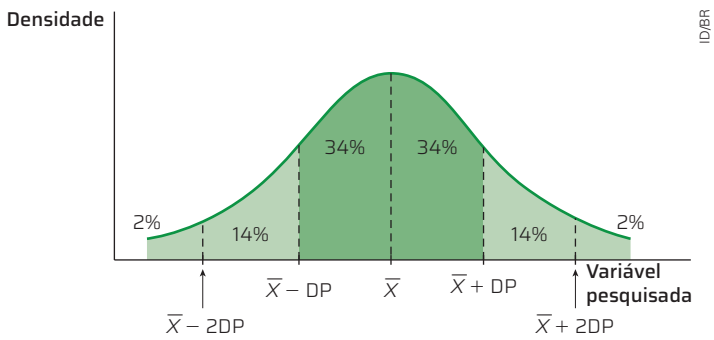


Desvio-padrão: valores concentrados em torno de $\overline{X}$.

Ilustrações: ID/BR

Propriedades da distribuição normal

Uma distribuição normal fica completamente definida pela média e pelo desvio-padrão.



ID/BR

Qualquer que seja a distribuição normal, verificamos que:

- a curva tem sempre a forma de sino;
- a curva é simétrica em relação a $\overline{X}$;
- o ponto máximo da função corresponde a $\overline{X}$;
- ao intervalo $]\overline{X} - DP, \overline{X} + DP[$ correspondem cerca de 68% da distribuição, metade para cada lado da média;
- ao intervalo $]\overline{X} - 2DP, \overline{X} + 2DP[$ correspondem cerca de 96% da distribuição, metade para cada lado da média;
- os outros 4% da distribuição aparecem relacionados, como mostra o gráfico.

PARA EXPLORAR

Artigo

Média e desvio-padrão de uma prova. *In*: **Física Net.** [*S. l.*: s. n., 20--]. Disponível em: https://fisica.net/passenaufrgs/guia/medias-desvios-padrao.php. Acesso em: 2 out. 2024.

Esse artigo mostra como a média e o desvio-padrão podem ajudar a compreender o resultado de uma prova de vestibular da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Não escreva no livro.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R3 **De acordo com um estudo, as medidas de massa de jogadores de futebol profissional se distribuem de acordo com uma curva normal, com média de 74 kg e desvio-padrão de 4 kg. Com base nessas informações, responda aos itens a seguir.**

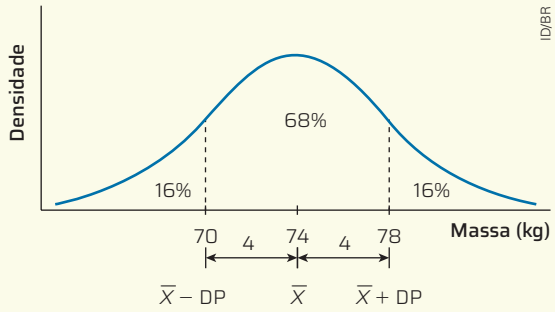
a) Qual é a porcentagem de jogadores com mais de 78 kg?

b) Em um país com 830 jogadores profissionais, quantos jogadores têm menos de 66 kg?

Resolução

É impossível responder a essas perguntas com exatidão sem saber a medida de massa de todos os jogadores, mas o que estudamos até aqui nos permite fazer estimativas assertivas.

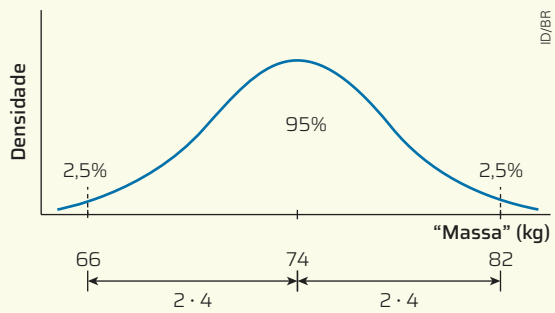
a) Conhecendo a média e o desvio-padrão, podemos esboçar a curva de Gauss, vista a seguir.



ID/BR

Aproximadamente, 68% dos jogadores têm medidas de massa no intervalo $]\overline{X} - DP, \overline{X} + DP[$, que, nesse caso, é]70, 78[. Logo, 32% dos jogadores estão com medidas de massa fora desse intervalo. Sendo a distribuição simétrica, concluímos que 16% deles têm menos de 70 kg e 16% têm mais de 78 kg.

b) Para responder à pergunta do item, devemos lembrar que 95% dos jogadores têm medidas de massa no intervalo $]\overline{X} - 2DP, \overline{X} + 2DP[$, ou seja, no intervalo]66, 82[, o que significa que os outros 5% estão fora desse intervalo.



ID/BR

Assim, haverá 2,5% dos 830 jogadores com menos de 66 kg, ou seja:

$$0{,}025 \cdot 830 = 20{,}75$$

Portanto, é provável que haja cerca de 21 jogadores com menos de 66 kg.

R4 **Vamos retomar o problema da abertura:**

> Uma máquina automática de envase de água mineral está regulada para que o volume médio de líquido em cada garrafa seja 1000 cm³. Nesse processo, há um desvio-padrão de 10 cm³, ou seja, há chance de que o conteúdo das garrafas tenha 10 cm³ a mais ou a menos que o valor médio de 1 litro.

a) Se o controle de qualidade da empresa selecionar ao acaso uma garrafa já envasada, qual é a probabilidade de que ela tenha menos de 990 cm³ de água mineral?

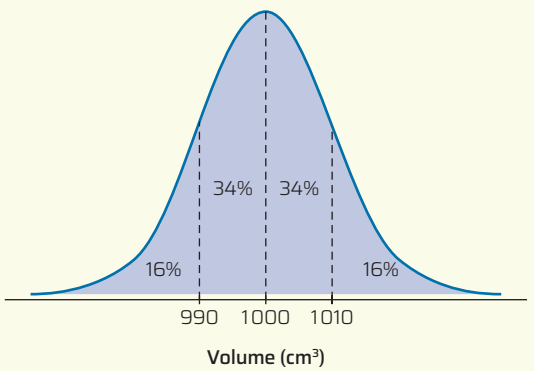
b) Em um lote com 5 000 dessas garrafas, quantas se espera encontrar com conteúdo correto entre 990 cm³ e 1010 cm³?

Observe que o processo de envasamento tem uma distribuição aproximadamente normal, com média de 1000 cm³ e desvio-padrão de 10 cm³.

Resolução

Como o processo de envasamento das garrafas segue uma distribuição aproximadamente normal, isso significa que a distribuição de valores do líquido em cada garrafa pode ser descrita pela curva de Gauss.

Podemos afirmar, então, que 68% das garrafas têm conteúdo no intervalo]990, 1010[, 16% dos vasilhames têm conteúdo abaixo de 990 cm³ e outros 16% deles têm conteúdo acima de 1010 cm³, o que nos permite responder às questões.



ID/BR

a) Observando o gráfico, apenas 16% das garrafas têm conteúdo inferior a 990 cm³. Portanto, a probabilidade de se escolher uma dessas garrafas é 16% ou 0,16.

b) Se 68% das garrafas têm o conteúdo no intervalo esperado, em 5 000 garrafas devemos ter 3 400 garrafas $(0{,}68 \cdot 5\,000 = 3\,400)$ com o conteúdo dentro do intervalo esperado.

Não escreva no livro.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

As atividades desta seção contribuem para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT316**, ao propor que os estudantes resolvam e elaborem problemas que envolvem o cálculo e a interpretação de medidas de tendência central e de dispersão.

Na resolução dos próximos problemas, utilize a distribuição normal, supondo que ela é uma boa aproximação para a distribuição das variáveis expressas em cada atividade.

10 Observe a distribuição por idade dos estudantes de uma classe.

Idade dos estudantes da classe	
Idade (em ano)	**Frequência relativa**
15	38%
16	31%
17	18%
18	10%
19	3%

Dados fictícios.

a) Qual é a média aritmética das idades? Aproximadamente 16 anos.
b) Qual é o desvio-padrão? Aproximadamente 1,1.

11 Escreva a alternativa correta no caderno.
Em uma distribuição cujos valores são iguais, o valor do desvio-padrão é: Alternativa **b**.

a) 1.
b) 0.
c) negativo.
d) 0,5.
e) 0,25.

12 Em uma fábrica de lâmpadas, quase todos os dias há lâmpadas que não passam no teste de qualidade. Ao longo de trezentos dias, fez-se a estatística do número de lâmpadas defeituosas.

Resultado do teste de qualidade	
Lâmpadas defeituosas	**Número de dias**
0	3
1	16
2	59
3	75
4	68
5	31
6	22
7	15
8	7
9	3
10	1
Total	**300**

Dados obtidos pelo setor de qualidade da empresa.

a) Em média, quantas lâmpadas são inutilizadas diariamente por apresentarem defeito? Aproximadamente 4 lâmpadas.
b) Qual é o desvio-padrão? Aproximadamente 1,81 lâmpada.
c) Qual é a probabilidade de o número de lâmpadas com defeito estar entre 2 e 6? Aproximadamente 68%.
d) Reúna-se com um colega para criar outras duas perguntas para esta atividade. Em seguida, troquem as perguntas com outra dupla: vocês respondem às perguntas que eles elaboraram e eles respondem às perguntas que vocês fizeram.

13 No jogo de bilhar, a pontuação de um jogador em uma jogada é igual ao número de tacadas seguidas que ele consegue fazer sem errar.
Um jogador de bilhar faz, em média, 45 tacadas por jogada, com um desvio-padrão de 15. Qual é a probabilidade de, em uma jogada, um jogador conseguir dar entre 60 e 75 tacadas? 14%

14 A tabela a seguir mostra o resultado de uma pesquisa feita com trinta casais sobre o número de filhos.

Número de filhos dos casais		
Número de filhos	**Número de casais**	**Frequência relativa**
0	1	0,033
1	4	0,133
2	5	0,167
3	7	0,233
4	6	0,2
5	3	0,1
6	2	0,067
7	1	0,033
8	1	0,033
Total	**30**	**0,999**

Dados fictícios.

a) Calcule a média aritmética e o desvio-padrão do número de filhos dos casais. 3; aproximadamente 2.
b) Calcule a porcentagem relativa ao intervalo $]\overline{X} - DP, \overline{X} + DP[$. 60%
c) Escolhendo-se ao acaso um dos casais, qual é a probabilidade de ele ter mais de cinco filhos? E menos de três? 13,3%; 33,3%.
d) O que é mais provável nessa amostra: ter mais de quatro filhos ou menos?
É mais provável um casal ter menos de 4 filhos.

15 As contas de luz para uma área municipal, no mês de junho, seguem uma distribuição normal. Se a média das contas for R$ 80,00 e o desvio-padrão residencial foi R$ 12,00, qual é o intervalo de valores que contém 68% das contas? E 95% das contas?
]68, 92[;]56, 104[

16 Amostras aleatórias de lâmpadas produzidas por três empresas foram testadas e o tempo depois do qual cada lâmpada queimou foi registrado nos gráficos do tipo caule e folhas a seguir.

Na atividade **12**, ao se reunirem com um colega para elaborar perguntas, os estudantes desenvolvem a competência geral **9** e exercitam o uso da linguagem matemática, oral e escrita, enquanto vivenciam o respeito a diferentes opiniões e formas de pensar.

Não escreva no livro.

Empresa A

2	7 9
3	2 3 9
4	5 6
5	7 8 9
6	1 5 8 9
7	3 4 7 9
8	3 5 6 7 8 9 9
9	2 6 7 8 9

2 | 7 significa 27

Empresa B

5	4 7 8
6	0 0 0 2 2 4 5 5 5 6 8 8 9
7	1 1 2 3 4 5 5 5 6 6 7
8	2 9
9	1

5 | 4 significa 54

Empresa C

3	7
4	5
5	1 5 8 9 9
6	0 1 2 2 3 3 5 5 8
7	0 0 2 2
8	0 3 4 4 5 6 7 9
9	2 3

3 | 7 significa 37

a) Copie a tabela no caderno e complete-a. Se necessário, utilize uma calculadora.

Valores obtidos dos gráficos de teste das lâmpadas

Empresa	Número de testes	Intervalo dos dados	Média	Mediana	Desvio-padrão
A	30	[27, 99]	69,33	73,5	22,13
B	30	[54, 91]	69,33	68,5	8,74
C	30	[37, 93]	69,33	66,5	14,08

Dados fornecidos pela administração das empresas.

b) Em qual das três empresas a média é mais representativa da amostra pesquisada?
As três têm a mesma média.

c) Se você fosse comprador de grande quantidade de lâmpadas e tivesse de escolher entre as três empresas, qual delas escolheria? Por quê?

17 **Com os dados obtidos na atividade anterior, responda:**

a) Se escolhemos aleatoriamente uma lâmpada produzida pela Empresa A, qual é a probabilidade de que ela dure, pelo menos, 50 horas?
Maior que 14% e menor que 68%.

b) Se escolhemos aleatoriamente uma lâmpada produzida pela Empresa B, qual é a probabilidade de que ela dure, pelo menos, 50 horas? Menor que 14%.

c) Se escolhemos aleatoriamente uma lâmpada produzida pela Empresa C, qual é a probabilidade de que ela dure, pelo menos, 50 horas? Menor que 14%.

d) Se desejamos escolher lâmpadas que durem, pelo menos, 80 horas, de qual empresa é melhor escolher esse produto? Empresas A e C.

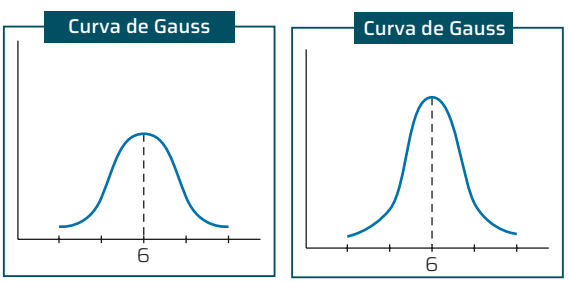
18 **Considerando os mesmos dados dos itens da atividade 16, resolva os problemas a seguir.**

a) Suponha que os dados das três empresas correspondam ao diâmetro de esferas metálicas que devem ser encaixadas em uma máquina. A máquina está preparada para trabalhar com esferas de diâmetro igual a 69 mm, mas ela tolera esferas com 2 mm a mais ou a menos que esse valor. Qual das empresas você escolheria para comprar as esferas? Por quê? Empresa B, porque a maioria das esferas teria diâmetro próximo do valor 69 mm.

b) Supondo que esses dados correspondam aos salários (em milhares de real) dos executivos mais bem pagos pela empresa, em qual das empresas você se candidataria para trabalhar? Por quê?
Respostas pessoais.

c) Supondo que os dados correspondam aos pontos feitos por três times de basquete durante uma temporada de trinta jogos, em qual dos times você gostaria de jogar? Contra qual time você gostaria de jogar? A opção mais segura é ser um jogador do time B e jogar contra os times A ou C.

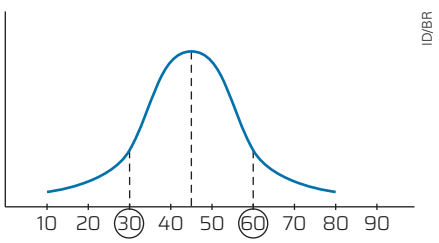
19 **As duas curvas de Gauss a seguir indicam média 6. Em qual delas o desvio-padrão é maior? Por quê?**



Ilustrações: ID/BR

Na primeira, pois há menor concentração dos dados em torno da média.

20 **O gráfico a seguir representa uma distribuição normal de probabilidade.**



ID/BR

a) Qual é a média aritmética da distribuição? 45

b) Qual parece ser o desvio-padrão? Por quê? 15

16. c) Empresa B, pois, apesar de as médias serem todas iguais, a empresa apresenta maior valor mínimo, mediana mais próxima à média e menor desvio-padrão, sendo, assim, a empresa mais vantajosa.

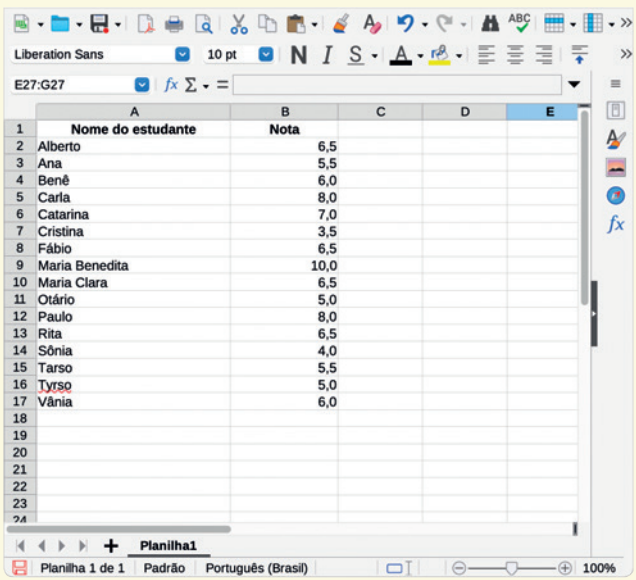
Não escreva no livro.

TECNOLOGIA

Acompanhe a seguir alguns procedimentos para o cálculo do desvio-padrão e da média aritmética das notas de alguns estudantes, usando uma planilha eletrônica. Neste exemplo, vamos utilizar a planilha eletrônica Calc, do LibreOffice. As etapas descritas são basicamente as mesmas para qualquer programa de planilha eletrônica; portanto, qualquer um desses programas poderá ser utilizado.

1ª etapa: Para representar os dados na planilha eletrônica Calc, indique os nomes dos estudantes na coluna A, e as notas na coluna B, como mostra a imagem a seguir.

Reprodução: LibreOffice. Fac-símile: ID/BR

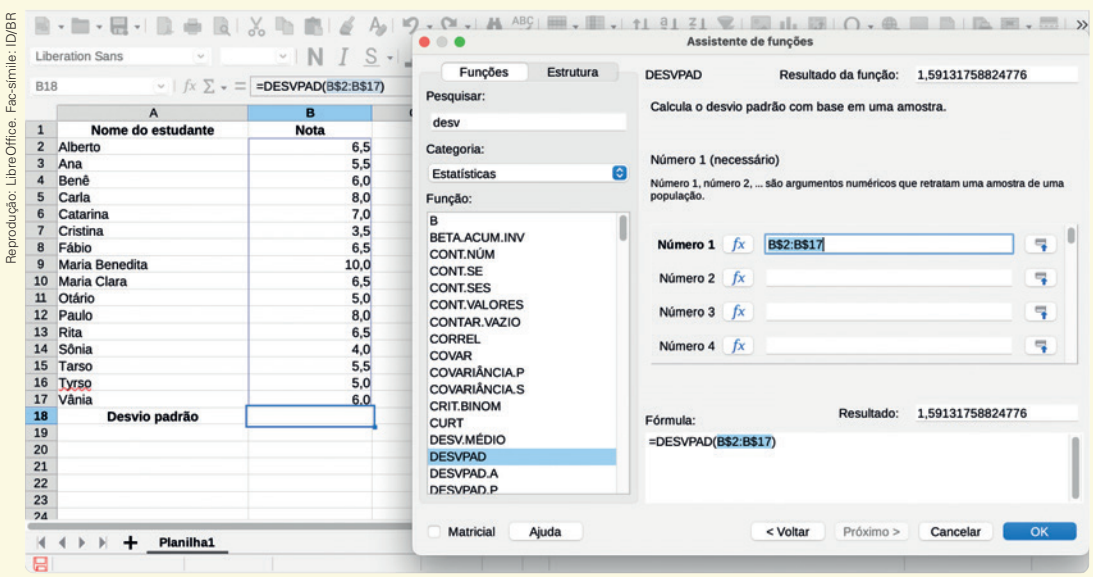


	A	B	C	D	E
1	Nome do estudante	Nota			
2	Alberto	6,5			
3	Ana	5,5			
4	Benê	6,0			
5	Carla	8,0			
6	Catarina	7,0			
7	Cristina	3,5			
8	Fábio	6,5			
9	Maria Benedita	10,0			
10	Maria Clara	6,5			
11	Otário	5,0			
12	Paulo	8,0			
13	Rita	6,5			
14	Sônia	4,0			
15	Tarso	5,5			
16	Tyrso	5,0			
17	Vânia	6,0			
18					
19					
20					
21					
22					
23					
24					

No contexto da análise de dados, a calculadora e o computador ganham importância como instrumentos que permitem a abordagem de problemas de dados reais, ao mesmo tempo que os estudantes podem ter a oportunidade de se familiarizar com as máquinas e os *softwares*.

2ª etapa: Para calcular o desvio-padrão, escreva na célula A18 "Desvio-padrão" e, na célula B18, digite a fórmula para calcular esse desvio. Para isso, selecione a célula B18 e clique no botão fx, correspondente ao "Assistente de funções", que está ao lado da "Caixa de nome". Na janela que abrir, na aba "Funções", selecione a categoria "Estatísticas" e, dentro dessa categoria, escolha a função "DESVPAD". Clique duas vezes nessa palavra. Selecione a célula B2 e, com a tecla *shift* do teclado apertada, clique em B17. Por fim, aperte a tecla *Enter*. Assim, o valor do desvio-padrão aparecerá automaticamente na célula B18.

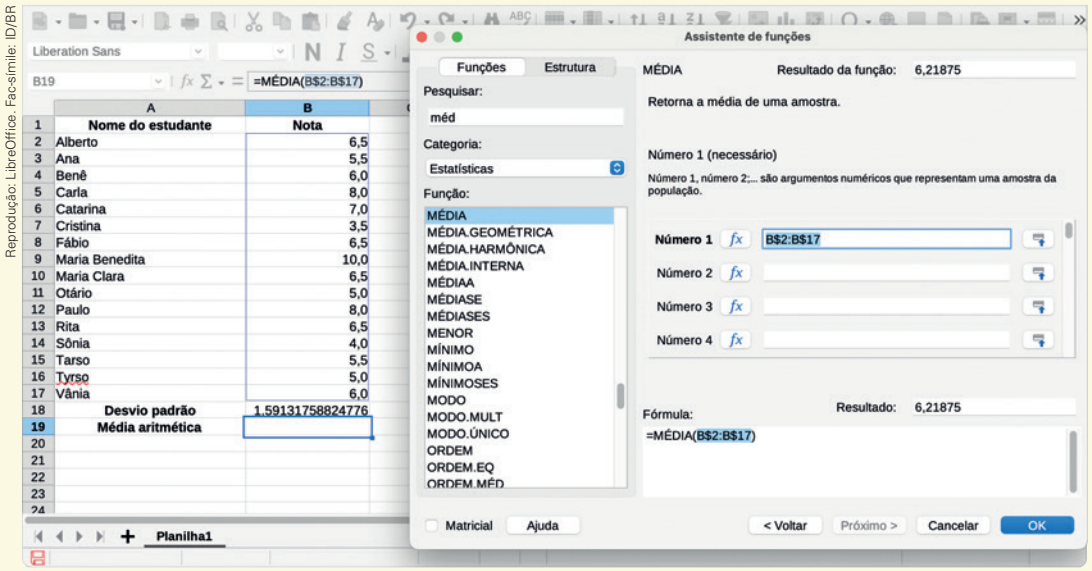
Reprodução: LibreOffice. Fac-símile: ID/BR



	A	B
1	Nome do estudante	Nota
2	Alberto	6,5
3	Ana	5,5
4	Benê	6,0
5	Carla	8,0
6	Catarina	7,0
7	Cristina	3,5
8	Fábio	6,5
9	Maria Benedita	10,0
10	Maria Clara	6,5
11	Otário	5,0
12	Paulo	8,0
13	Rita	6,5
14	Sônia	4,0
15	Tarso	5,5
16	Tyrso	5,0
17	Vânia	6,0
18	Desvio padrão	
19		
20		
21		
22		
23		
24		

O trabalho com esta seção permite o desenvolvimento das competências gerais **4** e **5**, ao propor que os estudantes usem a linguagem digital para partilhar informações e resolver problemas cotidianos, ao utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais.

3ª etapa: Para calcular a média aritmética dos dados apresentados, na célula A19 escreva "Média aritmética" e, com a célula B19 selecionada, abra o "Assistente de funções" e, na categoria "Estatística", dê um duplo clique na função MÉDIA. Em seguida, selecione a célula B2 e, com a tecla *shift* do teclado pressionada, clique em B17. Por fim, aperte a tecla *Enter*. Assim, o valor da média aritmética aparecerá na célula B19 automaticamente.



ATIVIDADES

1 **De acordo com o exemplo apresentado, responda às questões a seguir.**

a) Qual é o desvio padrão e a média aritmética calculados na planilha eletrônica? 6,22; 1,54.

b) Utilizar o "Assistente de funções" é muito útil quando não sabemos qual a função necessária para realizarmos determinado cálculo. Você sabe outra maneira de realizar esses cálculos? Resposta pessoal.

2 **Reproduza o exemplo apresentado em uma planilha eletrônica e faça o que se pede a seguir.**

a) Explore outras funções que aparecem na categoria "Estatística" do "Assistente de funções". Você reconhece alguma delas? Resposta pessoal.

b) Com o auxílio do "Assistente de funções", calcule a moda, a mediana e a variância dos dados apresentados. 6,5; 6,25; 2,374.

3 **Escolha uma das atividades que você realizou neste capítulo e use a planilha eletrônica Calc para resolvê-la novamente. Depois reflita: Como foi mais simples resolver a atividade: com ou sem planilha eletrônica? Quais são as possíveis vantagens e desvantagens em utilizar a planilha eletrônica?**

Resposta pessoal.

4 **Utilizando a planilha eletrônica Calc, resolva a atividade a seguir.**

Observe no quadro a seguir as alturas, em metro, dos estudantes da 3ª série de um colégio, medidas pelo professor de Educação Física.

1,62	1,78	1,77	1,59	1,85	1,92
1,56	1,68	1,74	1,76	1,80	1,86
1,59	1,63	1,69	1,71	1,67	1,75
1,73	1,65	1,67	1,72	1,70	1,69

a) Calcule a média aritmética e o desvio-padrão das medidas das alturas desses estudantes.

1,714; 0,087.

b) Qual é a zona de normalidade dessa distribuição de dados?]1,627; 1,801[

Não escreva no livro.

CÁLCULO RÁPIDO

Nesta seção, vamos efetuar cálculos com porcentagens.

1 Calcule o valor a ser pago após:

a) um desconto de 6% em R$ 1200,00. R$ 1 128,00

b) uma multa de 4% sobre R$ 800,00. R$ 832,00

c) uma multa de 5% sobre R$ 550,00. R$ 577,50

2 Qual é a porcentagem de:

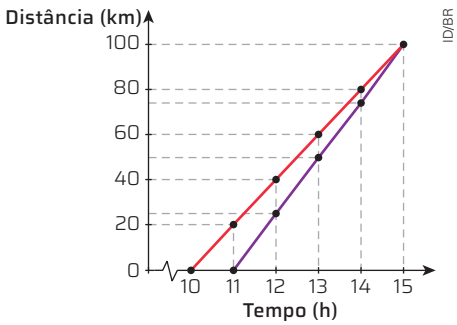
a) 9000 em relação a 36000? 25%

b) 420 em relação a 600? 70%

c) 15 em relação a 300? 5%

PARA RECORDAR

1 **Dois ciclistas saem de um mesmo lugar, na mesma direção, com um intervalo de 1 hora entre um e outro. O primeiro partiu às 10 h, a uma velocidade de 20 km/h; o segundo partiu às 11 h, a 25 km/h. O trajeto dos dois ciclistas está representado no gráfico a seguir.**



a) Ao meio-dia, qual era a distância entre os dois ciclistas? 15 km

b) A que horas se encontravam a uma distância de 5 km um do outro? Às 14 horas.

c) A que horas o segundo ciclista alcançou o primeiro? Às 15 horas.

d) Suponha que o primeiro ciclista partisse à velocidade de 15 km/h e o segundo, a 20 km/h. Desenhe no caderno um gráfico que traduza essa situação e responda: A que horas o segundo ciclista deve alcançar o primeiro? Às 14 horas.

2 **Uma liga esportiva elaborou um campeonato de futebol que será disputado em dois turnos. Em cada turno, cada clube jogará exatamente uma partida contra cada um dos outros participantes. Sabendo que serão 306 partidas no total, qual é o número de clubes que participarão do campeonato?** 18 clubes.

3 **Quatro amigos, Pedro, Luís, Júlia e Ana, vão ao cinema e querem se sentar em lugares consecutivos na mesma fila. De quantas maneiras os quatro podem se sentar de modo que Pedro fique sempre junto de Júlia e Luís fique sempre junto de Ana?** 8 maneiras diferentes.

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO

Não se deixe enganar por enunciados curtos, eles podem exigir bastante do seu raciocínio lógico. Observe isso nestes problemas.

1 **(Obmep) Sobre uma mesa estão 10 moedas, todas com "cara" voltada para cima. Uma jogada consiste em virar exatamente 4 moedas. Qual a quantidade mínima de jogadas para que todas estejam com "coroa" voltada para cima?** 3 jogadas.

2 **Em uma sala de aula há 50 estudantes, entre meninos e meninas. Pelo menos um dos estudantes é menino. Tomando qualquer par de estudantes, pelo menos um dos dois é menina. Quantas são as meninas dessa sala?** 49 meninas.

PALAVRAS-CHAVE

O resumo com exemplos das principais ideias aprendidas é um instrumento de avaliação. Observe se:
- todos os conceitos centrais deste capítulo estão presentes nos resumos;
- o resumo apresenta corretamente os conceitos;

Agora que você concluiu o estudo deste capítulo, retome os conteúdos apresentados e suas anotações e produza um resumo sobre as principais ideias aprendidas. Lembre-se de acrescentar exemplos, além de problemas e exercícios que ilustrem essas ideias.

- a linguagem específica da Matemática é usada adequadamente nos exemplos.

Em função dessas observações, é possível fazer intervenções mais assertivas.

MATEMÁTICA E ELEIÇÃO

Para ampliar o conhecimento dos estudantes sobre o tema trabalhado nesta seção, convide um professor da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas para participar das discussões.

Pesquisa eleitoral

Você já ouviu falar em pesquisa eleitoral? A cada dois anos, durante a época de eleições no Brasil, é comum a realização de pesquisas eleitorais de intenção de voto. Você já pensou em como essas pesquisas são feitas e por que elas são confiáveis?

Esta seção contempla as competências gerais **2**, **6**, **9** e **10** propostas pela BNCC, na medida em que os estudantes recorrem à reflexão e à análise crítica, fazem escolhas alinhadas ao exercício da cidadania, exercem a cooperação, o diálogo e a resolução de conflitos, além de tomar decisões com base em princípios democráticos. Além disso, esta seção possibilita integração com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e com o tema contemporâneo transversal Cidadania e Civismo. Trabalhos com os professores de História, Filosofia e Sociologia podem ser propostos, a fim de explorar a competência específica **2** da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, ao permitir que os estudantes compreendam o papel geopolítico dos Estados-nações.



Urna eletrônica utilizada para votação no Brasil. Foto de 2024.

Antônio Machado/Fotoarena

Como são feitas as pesquisas eleitorais

Você já foi entrevistado ou conhece alguém que respondeu [a] questões para uma pesquisa eleitoral? Boa parte dos cidadãos costuma ter curiosidade a esse respeito, mas as qualificações para ser selecionado pelos institutos que realizam os levantamentos não são muito conhecidas do público, assim como quais detalhes, exigências e recortes populacionais tornam o resultado da pesquisa factível.

– Para ser representativa, ela precisa ser aleatória, estar associada a um determinado nível de confiança e a uma margem de erro – explica Marcos Ruben Oliveira, estatístico do DataSenado.

Isso significa dizer que para responder a um questionário de intenção de votos um eleitor precisa ser sorteado na loteria dos institutos de pesquisa. Eles escolhem os entrevistados depois de definida a quantidade de pessoas a serem ouvidas, a partir de um cálculo que considerará a margem de erro (a variação possível em torno do resultado) e o nível de confiança (a quantidade de vezes que a pesquisa dará resultado semelhante se for repetida). Esse cálculo, como exige a lei, deve ser feito por um estatístico, para garantir que o processo de seleção seja bem feito e com a técnica adequada, frisa Marcos.

[...]

Amostra

De acordo com Marcos Oliveira, o primeiro passo para a realização do levantamento é a definição do público-alvo. No caso da pesquisa eleitoral para governador, por exemplo, os eleitores de um estado; para a Presidência da República, todos os 142,8 milhões de eleitores brasileiros. Ele ressalta um dado interessante: os votantes do exterior também deveriam ser ouvidos para retratar mais fielmente as intenções de sufrágio. Afinal, são mais de 350 mil que participam da escolha do presidente estando fisicamente em outro país.

– Mas deixá-los de fora não invalida uma pesquisa – salienta.

Definido o público-alvo e calculada a quantidade de pessoas a ser entrevistadas a partir do cálculo estatístico, é preciso definir a amostragem, que deve ser feita sem intervenção humana, como se fosse um sorteio. A forma desse "sorteio" varia muito, afirma Marcos.

[...]

Tamanho

O que diferencia o tamanho da amostra é a margem de erro com a qual o instituto trabalha e o nível de confiança atribuído à margem de erro, explica o servidor do DataSenado. Os dois conceitos são associados. Quanto menor a margem de erro e maior a confiança, mais pessoas precisam ser ouvidas.

Os índices que se tornaram padrão no mercado são 2 pontos percentuais de margem de erro com 95% de nível de confiança. Isso significa dizer que, se a pesquisa for repetida 100 vezes, em 95 delas os resultados estarão dentro da variação de 2 pontos percentuais para mais ou para menos. Uma pesquisa com essas variáveis precisa ouvir 2 401 eleitores. No DataSenado, a margem de erro utilizada é de 3 pontos, e para isso é necessário ouvir nacionalmente 1 068 pessoas.

Não escreva no livro.

De acordo com Marcos Oliveira, o cálculo estatístico é preciso. Se for fixada a entrevista de 2 mil pessoas, vai se chegar a um resultado, e se forem entrevistadas 3 ou 4 mil, o resultado continuará sendo muito semelhante.

– Então, se com 2 mil eu tenho a precisão que eu queria, por que entrevistar mais pessoas? Não precisa. Você pode fazer esse teste várias vezes e vai comprovar que isso ocorre – detalha.

[...]

Erros

Ao contrário do que parece, os institutos não estão errando mais em suas pesquisas de intenção de votos, acredita Marcos Oliveira. Para ele, o que pode estar acontecendo é o fato de mais pesquisas estarem sendo realizadas e os erros se tornarem mais evidentes. Pelo padrão do mercado, de cada 100 pesquisas, 5 podem estar erradas.

– Toda pesquisa pode errar porque não é precisa, é uma amostragem. Sempre tem a possibilidade de cair na margem de erro e no nível de confiança. Em 95% das vezes a pesquisa vai acertar, mas sobraram 5% de possibilidade de erro – diz.

[...]

Outro fator que pode induzir ao erro é um questionário mal elaborado. Se o entrevistador faz uma pergunta tendenciosa, provavelmente captará uma tendência que não é verdadeira. Para Marcos, enviesar a pergunta é falta de ética ou de preparo técnico.

Pozzebom, Elina Rodrigues. Como são feitas as pesquisas eleitorais. *Senado Notícias*, Brasília, DF, 24 set. 2014. Disponível em: https://www12.senado.leg.br/noticias/materias/2014/09/24/como-sao-feitas-as-pesquisas-eleitorais. Acesso em: 2 out. 2024.

Para realizar uma pesquisa, é necessário identificar qual variável será pesquisada. Em seguida, escolhem-se o nível de confiança e a margem de erro da pesquisa. Então, calcula-se a quantidade de pessoas necessárias para que o resultado da pesquisa esteja dentro dos parâmetros escolhidos.

Uma forma de calcular o tamanho n da amostra utilizando a margem de erro E é pela expressão $n = \left(\frac{z_\alpha \cdot \sigma}{E}\right)^2$, em que z_α é um fator relacionado ao nível de confiança da pesquisa (é comum usar $z_\alpha = 1{,}96$) e σ é o desvio-padrão populacional. Entrevistam-se as n pessoas e, por fim, cria-se o intervalo de confiança $(\overline{X} - E; \overline{X} + E)$, em que $\overline{X}$ é a média amostral.

Conectando ideias

1 **Em grupos, realizem uma pesquisa estatística com estudantes de outra turma da sua escola. Escolham uma variável quantitativa, como a altura dos estudantes, o tamanho do calçado, a distância entre a casa dos entrevistados e a escola, entre outras. Façam os cálculos necessários e encontrem o intervalo de confiança em que a média da variável se encontra. Como não será possível calcular o desvio-padrão da população, utilizem o desvio-padrão amostral dado por $S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\overline{X} - x_i)^2}{n-1}}$, escolham o tamanho da amostra que desejam e calculem o erro E. Considerem um nível de confiança de 95%, em que $z_\alpha = 1{,}96$.** Resposta pessoal.

2 **Você já entendeu a importância da realização de pesquisas com bases estatísticas para resultados confiáveis e precisos. Agora, que tal pensar na contribuição da matemática para as eleições?**

Como os conhecimentos matemáticos podem contribuir para o sistema eleitoral?

- Reúnam-se em grupos e pesquisem para responder à questão de como os conhecimentos matemáticos, principalmente os de Estatística, podem contribuir para o sistema eleitoral brasileiro.
- O grupo deverá pesquisar as aplicações e as principais ferramentas estatísticas utilizadas nessas pesquisas eleitorais, bem como a importância dessas pesquisas para prevenir a disseminação de informações falsas durante o período eleitoral.
- Reúnam todas as informações pesquisadas e elaborem um relatório para entregar ao professor. Escolham um formato de apresentação – texto ou infográfico, por exemplo.
- Com o professor, combinem uma data para a entrega dos relatórios e compartilhem com os colegas suas experiências durante a pesquisa. Com base no resultado das pesquisas, discutam sobre questões como: De que maneira a Matemática colabora para a confiabilidade das pesquisas eleitorais? As pesquisas eleitorais podem ajudar a combater a desinformação e as *fake news*?

Vocês participaram ativamente das atividades propostas? Resposta pessoal.

2. Oriente os estudantes a realizar a pesquisa em fontes confiáveis, como o *site* do Tribunal Superior Eleitoral (TSE). Explique à turma que as pesquisas eleitorais embasadas em noções matemáticas são fundamentais para o combate à desinformação, pois seguem parâmetros confiáveis e uma metodologia científica. Se julgar pertinente, explique que a fraude e a manipulação em pesquisas são consideradas crimes eleitorais no Brasil, pois se enquadram como disseminação de *fake news*.

Essa atividade é uma oportunidade de ampliar o repertório dos estudantes acerca das aplicações matemáticas no dia a dia, além de promover o desenvolvimento do pensamento crítico com bases científicas e confiáveis e contribuir para o letramento digital ao abordar a checagem de fatos e de *fake news*. As respostas dos estudantes ao último item trazem evidências da competência socioemocional autoconfiança.

POR DENTRO DO ENEM E DOS VESTIBULARES

O texto de um problema de Matemática tem como característica o uso de palavras, de símbolos e de termos específicos da linguagem dessa área. Ler esse tipo de texto requer certos cuidados. A seguir, algumas sugestões de como ler esse tipo de problema que vão ajudar você a resolvê-lo.

- Leia o texto mais de uma vez e procure o significado das palavras e dos símbolos que você desconhece.
- Identifique a pergunta que deve ser respondida.
- Faça um plano de resolução, como anotar as informações e os dados necessários e decidir o que precisa ser calculado primeiro.
- Agora, teste essa forma de ler textos de problemas de Matemática analisando a questão a seguir.

VESTIBULAR EM CONTEXTO

(Fatec-SP) A Orientação Profissional (OP) tem, dentre seus objetivos, promover a reflexão sobre possíveis carreiras para um indivíduo.

Entre os instrumentos utilizados pela OP, está a Escala de Aconselhamento Profissional (EAP) que parte do pressuposto de que as profissões são escolhidas em função das preferências das pessoas em relação a diferentes situações.

Essa escala está organizada em sete dimensões, como mostrado na tabela.

Antes de os estudantes lerem a resolução do problema, solicite que retomem as sugestões de como ler o problema por etapas para resolvê-lo. Após essa leitura, peça que o resolvam. Concluída a resolução, pergunte aos estudantes como pensaram para obter a resposta e, então, peça que a comparem com a que se encontra no livro, na próxima página.

Tabela – Estatística Descritiva das Dimensões do EAP

Dimensões do EAP	Mínimo	Máximo	Média	Desvio-padrão
Ciências Exatas	1,00	5,00	2,58	1,05
Artes e Comunicação	1,00	4,71	2,64	0,88
Ciências Biológicas e da Saúde	1,00	5,00	2,91	1,13
Ciências Agrárias e Ambientais	1,00	5,00	2,91	1,13
Atividades Burocráticas	1,15	5,00	2,87	0,81
Ciências Humanas e Sociais Aplicadas	1,00	4,90	2,93	0,85
Entretenimento	1,00	4,83	2,42	0,95

https://tinyurl.com/3t8fm473. Acesso em: 5 nov. 2022. Adaptado.

Com base nesses dados, assinale a afirmativa correta.

a) As preferências dos entrevistados em relação à dimensão Atividades Burocráticas são as mais dispersas em torno da média.

b) Apesar de as médias serem diferentes, as preferências dos entrevistados são mais homogêneas em relação à dimensão Atividades Burocráticas do que à dimensão Artes e Comunicação.

c) As preferências dos entrevistados em relação às dimensões Ciências Exatas e Ciências Biológicas e da Saúde têm o mesmo nível de heterogeneidade, visto que possuem a mesma amplitude.

d) Apesar de as médias serem diferentes, as preferências dos entrevistados são mais homogêneas em relação à dimensão Ciências Exatas do que à dimensão Artes e Comunicação.

e) As preferências dos entrevistados em relação à dimensão Ciências Biológicas e da Saúde são as menos dispersas em torno da média.

Não escreva no livro.

Resolução

Dizer que um conjunto de valores é "mais homogêneo" ou "menos disperso" que outro conjunto significa que os valores do primeiro conjunto têm o desvio-padrão mais próximo de zero.

Considerando as informações da tabela, temos que:

- as preferências dos entrevistados em relação às dimensões Ciências Exatas e Ciências Biológicas e da Saúde não têm o mesmo nível de heterogeneidade, visto que não possuem o mesmo desvio-padrão. Assim, a alternativa **c** está incorreta.
- as preferências dos entrevistados são mais homogêneas em relação à dimensão Artes e Comunicação do que à dimensão Ciências Exatas, pois $0{,}88 < 1{,}05$. Assim, a alternativa **d** está incorreta.
- as preferências dos entrevistados são mais homogêneas (ou menos dispersas) em relação à dimensão Atividades Burocráticas do que a todas as outras dimensões, inclusive em relação à dimensão Artes e Comunicação, pois $0{,}81 < 0{,}88$. Assim, as alternativas **a** e **e** estão incorretas, e a alternativa **b** é a correta.

Explorando a estratégia

Antes de resolver as questões, identifique as palavras e os símbolos desconhecidos, procure o significado de cada um deles e destaque a pergunta e os dados relevantes para responder a cada questão.

1 **Registre a alternativa correta no caderno.**

(Enem) Um zootecnista pretende testar se uma nova ração para coelhos é mais eficiente do que a que ele vem utilizando atualmente. A ração atual proporciona uma massa média de 10 kg por coelho, com um desvio-padrão de 1 kg, alimentado com essa ração durante um período de três meses.

O zootecnista selecionou uma amostra de coelhos e os alimentou com a nova ração pelo mesmo período de tempo. Ao final, anotou a massa de cada coelho, obtendo um desvio-padrão de 1,5 kg para a distribuição das massas dos coelhos dessa amostra.

Para avaliar a eficiência dessa ração, ele utilizará o coeficiente de variação (CV) que é uma medida de dispersão definida por $CV = \frac{s}{\overline{X}}$, em que s representa o desvio-padrão e $\overline{X}$, a média das massas dos coelhos que foram alimentados com uma determinada ração.

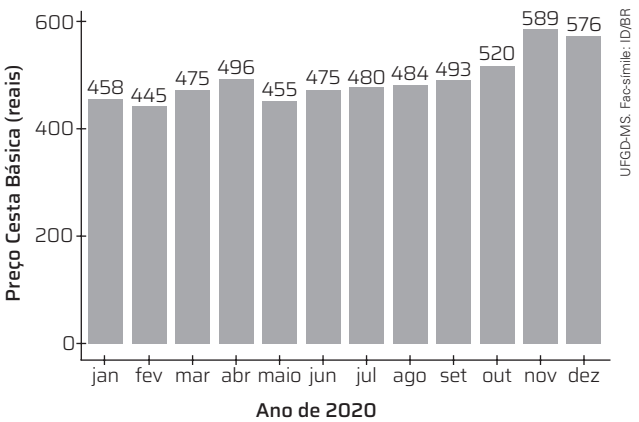
O zootecnista substituirá a ração que vinha utilizando pela nova, caso o coeficiente de variação da distribuição das massas dos coelhos que foram alimentados com a nova ração for menor do que o coeficiente de variação da distribuição das massas dos coelhos que foram alimentados com a ração atual.

A substituição da ração ocorrerá se a média de distribuição das massas dos coelhos da amostra, em quilograma, for superior a Alternativa **e**.

a) 5,0.
b) 9,5.
c) 10,0.
d) 10,5.
e) 15,0.

2 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(UFGD-MS) A cesta básica é formada pelo conjunto de alimentos necessários para as refeições de uma pessoa adulta (conforme Decreto-Lei nº 399/1938). A Pesquisa Nacional da Cesta Básica de Alimentos, realizada pelo DIEESE (Departamento Intersindical de Estatística e Estudos Socioeconômicos), indicou que, em 2020, o preço da cesta básica aumentou em todas as capitais brasileiras. Em Campo Grande, capital do estado de Mato Grosso do Sul (MS), o preço médio mensal no ano de 2020 foi de R$ 495,50, com um desvio padrão populacional de R$ 43,43. Analise o gráfico a seguir.



Departamento Intersindical de Estatística e Estudos Socioeconômicos. **DIEESE – Pesquisa Nacional da Cesta Básica de Alimentos Tomada especial de preços de dezembro de 2020 e do ano de 2020**. Disponível em: https://www.dieese.org.br/. Acesso em: 14 out. 2021.

O gráfico apresenta o preço da cesta básica, em cada um dos doze meses no ano de 2020, na capital Campo Grande (MS). Caso o preço da cesta básica em Campo Grande, no ano de 2020, fosse reduzido em 20% em todos os meses, o que aconteceria com o resultado da variância populacional desses valores?

a) A nova variância seria de 80% da anterior.
b) A nova variância seria de 60% da anterior.
c) A nova variância seria de 64% da anterior.
d) A nova variância seria de 140% da anterior.
e) A nova variância seria de 136% da anterior.

Alternativa **c**.

GEOMETRIA ESPACIAL

Ao repararmos em tudo que nos rodeia, deparamo-nos com objetos, construções, esculturas, embalagens, mobiliário, traçado de ruas, enfim, um conjunto inumerável de formas criadas pelo ser humano. Somos capazes de criar figuras geométricas para nos serem úteis e melhorar nossa qualidade de vida ou, simplesmente, para a apreciação estética na arte, no *design* ou na decoração.

Nesta unidade, vamos nomear e representar figuras espaciais, classificar os sólidos geométricos, estudar alguns poliedros e corpos redondos e utilizar as propriedades dessas figuras geométricas no cálculo de áreas e volumes. Além disso, vamos explorar projeções cartográficas e entender como os avanços tecnológicos impulsionaram as transformações no trabalho com elas.

OBJETIVOS

- Interpretar diferentes representações de figuras planas e espaciais.
- Identificar propriedades geométricas e utilizá-las na resolução de situações-problema em contextos diversos.
- Desenvolver a investigação e a criatividade pelo estudo das aplicações das figuras geométricas em situações cotidianas, sociais e econômicas.
- Retomar procedimentos de cálculo de áreas e volumes.
- Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos de áreas e volumes.
- Conhecer projeções cartográficas.
- Analisar as distorções de áreas e de ângulos em algumas projeções cartográficas.
- Relacionar conhecimentos de diferentes áreas.
- Elaborar argumentos e escrever conclusões.



Condomínio residencial em Heliópolis, São Paulo (SP), projetado pelo arquiteto e urbanista Ruy Ohtake (1938-2021). Foto de 2024. ▶



UNIDADE 2

3 Sólidos geométricos: poliedros

4 Sólidos geométricos: corpos redondos

5 Geometria métrica espacial

6 Projeções cartográficas

SÓLIDOS GEOMÉTRICOS: POLIEDROS

Neste capítulo, iniciamos o estudo sistemático dos sólidos geométricos, começando pelos poliedros, suas propriedades e características geométricas. O foco estará nas habilidades de percepção espacial e de representação e, por isso, incluímos como tópico de estudo a planificação de alguns prismas e de algumas pirâmides.

NESTE CAPÍTULO

- Prismas e pirâmides
- Planificações de alguns poliedros
- Relação de Euler
- Poliedros de Platão
- Poliedros regulares

Objetos que lembram o formato de poliedros podem ser identificados em construções arquitetônicas, em *games*, em jogos de tabuleiro e em diversos *softwares* computacionais voltados ao estudo ou ao trabalho. Acompanhe alguns exemplos.



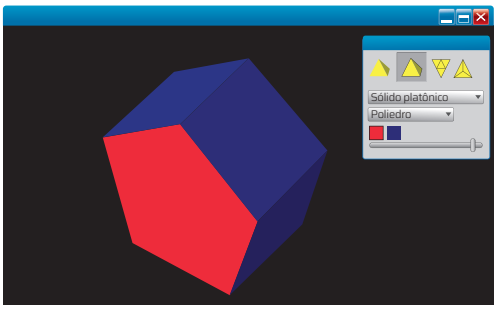
huntergol hp/Shutterstock.com/ID/BR

Conjunto habitacional The Interlace, Singapura. Foto de 2019.



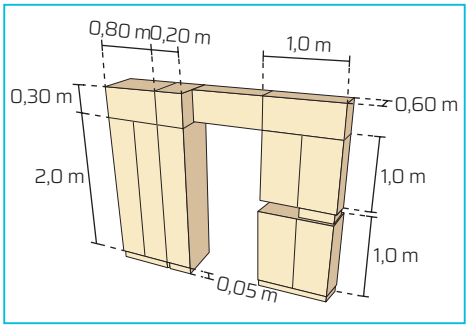
ID/BR

Personagem de um *game*.



ID/BR

Imagem reproduzida com o *software* educacional Poly.



ID/BR

Projeto de armário criado com *software* do tipo Computer Aided Design (CAD).



Stenko Vlad/Shutterstock.com/ID/BR

Jogo com peças poliédricas. Foto de 2022.

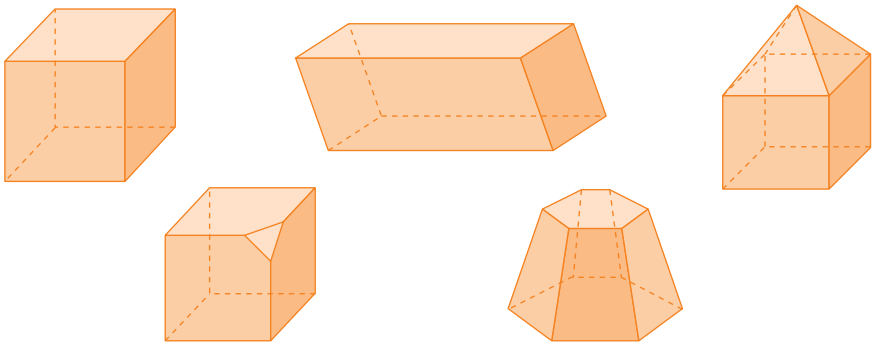
Neste capítulo e nos próximos, vamos estudar sólidos geométricos (poliedros e corpos redondos), além de projeções cartográficas.

Esses temas permitem a continuidade do desenvolvimento da interpretação e do uso de modelos e representações matemáticas para analisar relações entre figuras no espaço e obter, assim, determinadas medições em objetos que têm formato de sólidos, além de favorecer o uso de projeções cartográficas para minimizar distorções e aprimorar a compreensão do geoprocessamento.

Não escreva no livro.

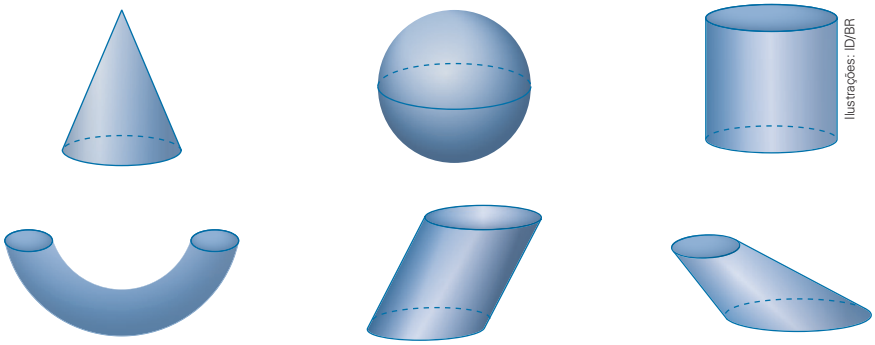
SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

Verifique a seguir estas representações de alguns sólidos geométricos.



Ilustrações: ID/BR

Todas as superfícies que delimitam cada sólido desse grupo são planas.



Ilustrações: ID/BR

Algumas das superfícies que delimitam os sólidos desse grupo não são planas.

Ao observarmos objetos à nossa volta, verificamos que alguns deles podem se assemelhar a um sólido de um desses dois grupos. Por exemplo, uma borracha como a mostrada ao lado, ainda sem uso, lembra um sólido com todas as superfícies planas.

De fato, é possível separar todos os sólidos geométricos em grandes grupos. Vamos analisar mais detalhadamente o grupo que contém os **poliedros** e o que contém os **corpos redondos**.



tnehala77/Shutterstock.com/ID/BR

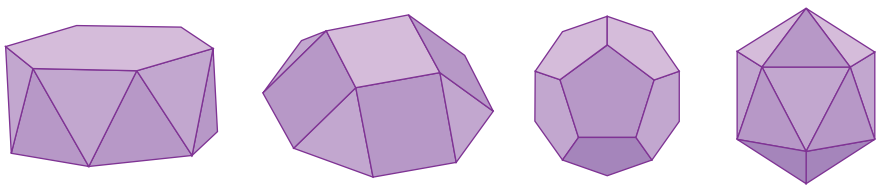
Borracha escolar.

Poliedros

Os **poliedros** são figuras geométricas espaciais sólidas delimitadas por superfícies poligonais planas.

Uma superfície poligonal plana corresponde a um polígono reunido com a parte do plano em seu interior.

Os sólidos representados a seguir são exemplos de poliedros.



Ilustrações: ID/BR

PARA EXPLORAR

Vídeo

Quadrado, cubo e cia. Realização: TV Escola. Produção: Seed, MEC, FNDE (Série Mão na Forma, programa 3). 1 vídeo (10 min). Disponível em: http://www.dominiopublico.gov.br/download/video/me001051.mp4. Acesso em: 30 set. 2024.

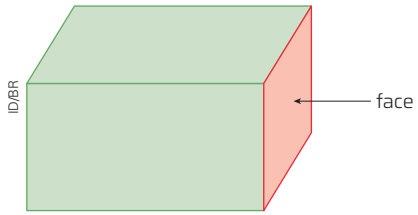
Esse vídeo é o terceiro episódio da série *Mão na forma*. Nele, há reflexões sobre o formato de objetos, elementos naturais e construções de uma cidade.

Não escreva no livro.

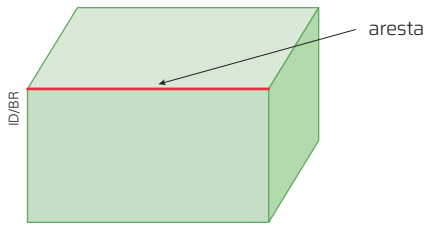
Características de um poliedro

Analise algumas características dos poliedros.

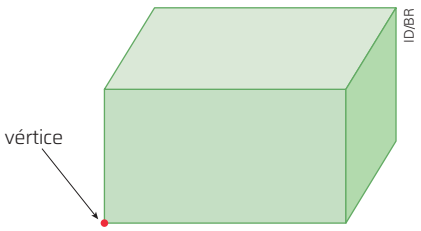
- Eles são limitados por superfícies poligonais planas chamadas **faces** do poliedro.



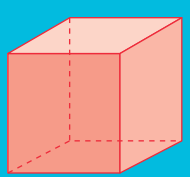
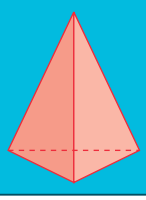
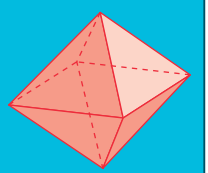
- As superfícies poligonais que delimitam o poliedro intersectam-se em lados dos polígonos. Esses segmentos são chamados **arestas** do poliedro.



- Os pontos na intersecção de três ou mais arestas são chamados **vértices** do poliedro.



Verifique a quantidade de faces, vértices e arestas dos poliedros representados a seguir.

	Cubo	Tetraedro	Octaedro
			
Quantidade de faces	6	4	8
Quantidade de vértices	8	4	6
Quantidade de arestas	12	6	12

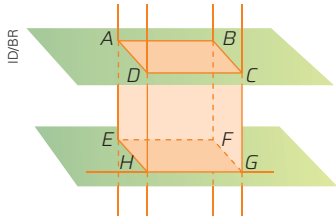
Ilustrações: ID/BR

As faces (superfícies poligonais planas) de um poliedro estão contidas em planos, e suas arestas são segmentos de reta. Por isso, as faces e as arestas dos poliedros têm propriedades desses planos e retas. Acompanhe a seguir.

No cubo temos pares de faces paralelas duas a duas, pois estão contidas em planos paralelos (planos sem ponto comum).

Não escreva no livro.

Na figura a seguir, o plano que contém a face *ABCD* do cubo é paralelo ao plano que contém a face *EFGH*. O cubo, portanto, tem arestas perpendiculares e arestas paralelas.



ID/BR

$\overline{DH} \perp \overline{HG}$
$\overline{DH} \parallel \overline{CG}$
$\overline{DH} \parallel \overline{AE}$

No estudo de sólidos geométricos, muitas vezes utilizamos o termo "polígono" (triângulo, quadrilátero, etc.) para indicar o polígono reunido com seu interior para simplificar a terminologia. O uso do termo "polígono" não compromete a compreensão, pois, quando dizemos "face quadrada", não estamos nos referindo apenas ao polígono quadrado, mas, sim, à superfície formada por ele e por seu interior.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Para a resolução das atividades desta seção, é importante que os estudantes tenham compreensão dos conceitos de retas e segmentos paralelos e de retas e segmentos perpendiculares. Se necessário, retome esses conceitos antes da resolução desta sequência de atividades.

1 **Pense em alguns poliedros e responda: Em qualquer poliedro, o número de arestas que concorrem em um vértice será sempre o mesmo? Justifique com alguns exemplos.** Resposta pessoal.
Consulte exemplos de resposta no Manual do Professor.

2 **Para cada item, apresente um exemplo de poliedro que tenha:** Respostas possíveis:

a) todas as arestas com medidas de comprimento iguais; Cubo.

b) pelo menos duas arestas com medidas de comprimento diferentes; Bloco retangular.

c) um número ímpar de vértices; Pirâmide de base quadrada.

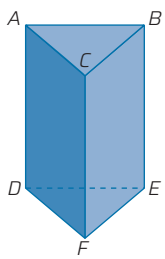
d) um número par de vértices; Pirâmide de base triangular.

e) um número par de faces; Cubo.

f) um número ímpar de faces. Pirâmide de base quadrada.

3 **Cite um poliedro que não tenha arestas paralelas.** Resposta possível: Pirâmide de base triangular.

4 **Analise o poliedro representado a seguir, cujas faces quadrangulares são retângulos.**



ID/BR

a) Quantas faces esse poliedro tem? 5 faces.

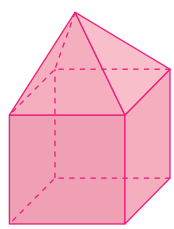
b) E quantos vértices? 6 vértices.

c) E quantas arestas? 9 arestas.

d) Indique todas as arestas paralelas a $\overline{AD}$. $\overline{CF}$ e $\overline{BE}$.

e) Indique todas as arestas perpendiculares a $\overline{DF}$. $\overline{AD}$ e $\overline{CF}$.

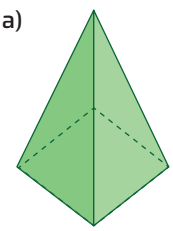
5 **O sólido a seguir foi obtido a partir de um cubo ao qual se juntou uma pirâmide de base quadrada.**


ID/BR

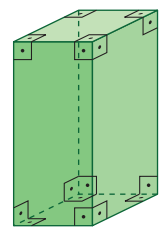
Compare a quantidade de faces, vértices e arestas do cubo com os dados desse novo sólido.
Cubo: 12 arestas, 8 vértices e 6 faces.
Sólido: 16 arestas, 9 vértices e 9 faces.

6 **Um paralelepípedo retângulo é um poliedro com faces paralelas retangulares e congruentes. Quais dos sólidos a seguir são paralelepípedos retângulos? Indique as alternativas corretas no caderno.** Itens **c** e **d**.

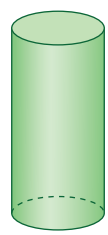
a)



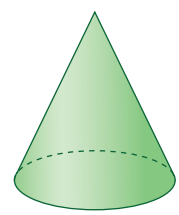
d)


Ilustrações: ID/BR

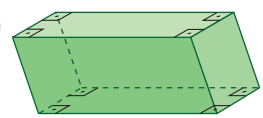
b)



e)



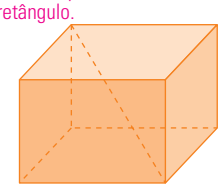
c)



Na atividade **7**, se julgar necessário, relembre os estudantes de que todo quadrado também é um retângulo, uma vez que todos os seus ângulos são retos.

7 **Iara afirmou que o cubo é um paralelepípedo retângulo. Você concorda com ela? Justifique.**
Espera-se que os estudantes concordem. Como todo quadrado é um retângulo, o cubo é um paralelepípedo retângulo.

8 **A figura a seguir mostra um paralelepípedo retângulo com uma diagonal representada.**


ID/BR

a) Copie a figura no caderno e trace outra diagonal desse sólido. Consulte as respostas dos itens **a** e **b** no Manual do Professor.

b) Nomeie todos os vértices.

c) Indique quantos pares de arestas paralelas esse sólido tem. 18 pares.

Na atividade **8**, depois de feitos os desenhos, peça aos estudantes que comparem suas produções e que aperfeiçoem seus desenhos. Essa troca favorece o desenvolvimento da competência específica **4** da área de Matemática e suas Tecnologias, uma vez que os estudantes precisam realizar diferentes registros e representações para se comunicar com os colegas.

Não escreva no livro.

Prismas

Entre os poliedros conhecidos, vamos estudar mais detalhadamente um grupo cujos elementos são denominados **prismas**.

Objetos e construções cujos formatos lembram prismas são facilmente identificados em nosso dia a dia. Basta observar à nossa volta e veremos alguns deles: contêineres, blocos usados no calçamento de ruas, casas, embalagens, etc.

Representações sem proporção de tamanho entre si.



DenisKot/iStock/Getty Images

Contêiner.



Vangelis_Vassalakis/Shutterstock.com/ID/BR

Bloco usado em calçamentos.



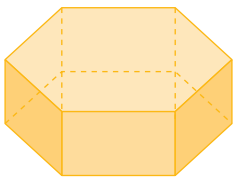
masik0553/Shutterstock.com/ID/BR

Casas de madeira em um acampamento. Foto de 2017.

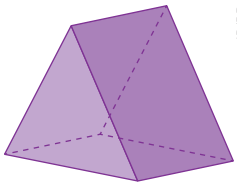


Abramova Elena/Shutterstock.com/ID/BR

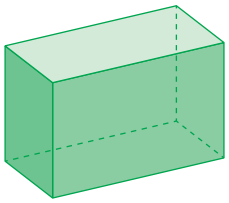
Embalagem de chá.



ID/BR



ID/BR



ID/BR

Representação de alguns prismas.

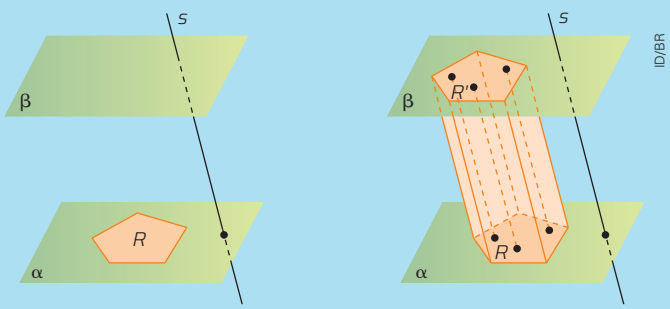
Um prisma é um poliedro porque é um sólido cuja superfície é formada por polígonos e seus interiores.

Repare que, em todos os prismas representados nas três figuras, há dois polígonos idênticos que estão em planos paralelos e há faces laterais formadas por paralelogramos.

Um prisma, portanto, pode ser assim definido:

Sejam α e β dois planos paralelos, R uma superfície poligonal contida em α e s uma reta que intersecta α.

A reunião de todos os segmentos de reta com uma extremidade em R e a outra em β, paralelos a s, é denominada **prisma**.

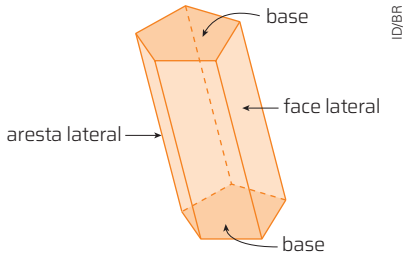


ID/BR

Não escreva no livro.

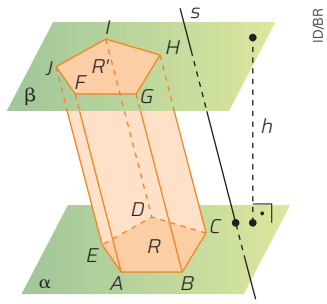
Elementos de um prisma

Em um prisma, podemos destacar alguns elementos. Analise a figura.



ID/BR

Agora, vamos definir esses elementos. Para isso, verifique o mesmo prisma representado com os planos α e β que contêm suas bases.



ID/BR

A distância entre os planos α e β é a **altura** do prisma.

As superfícies poligonais R e R' são as **bases** do prisma. Cada lado da base do prisma é uma **aresta da base**. O total de arestas do prisma é a soma da quantidade de arestas laterais com a quantidade de arestas das bases.

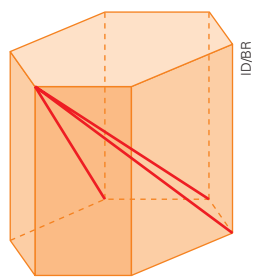
Seja $\overline{JE}$, com $J \in R'$ e $E \in R$, um segmento de reta paralelo a uma reta s que intersecta os planos α e β. Se E é um vértice de R, então $\overline{JE}$ é uma **aresta lateral** do prisma.

As superfícies poligonais que não estão contidas nos planos α e β são as **faces laterais** do prisma. As faces laterais de um prisma são **paralelogramos**.

Na figura anterior, temos:

- h é a altura do prisma;
- $ABCDE$ e $FGHIJ$ são as bases (que também são faces);
- $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EA}$, $\overline{FG}$, $\overline{GH}$, $\overline{HI}$, $\overline{IJ}$ e $\overline{JF}$ são as arestas da base;
- $\overline{AF}$, $\overline{BG}$, $\overline{CH}$, $\overline{DI}$ e $\overline{EJ}$ são as arestas laterais;
- $ABGF$, $BCHG$, $CDIH$, $DEJI$ e $EAFJ$ são as faces laterais.

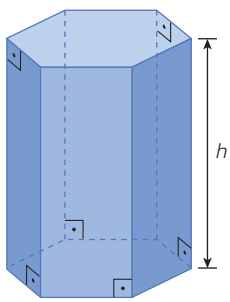
A **diagonal** de um prisma é todo segmento de reta cujas extremidades são vértices não pertencentes a uma mesma face desse prisma, como na figura ao lado.


ID/BR

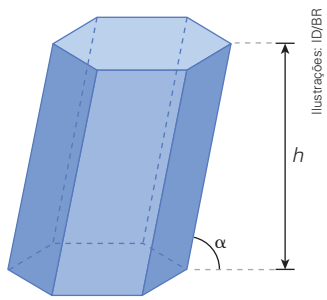
Os segmentos em vermelho representam algumas das diagonais desse prisma.

Classificação de um prisma

Um prisma pode ser **reto** ou **oblíquo**. Ele é **reto** se suas arestas laterais são perpendiculares aos planos que contêm as bases, e a altura h corresponde à medida do comprimento da aresta lateral; caso contrário, ele é **oblíquo**.



prisma reto



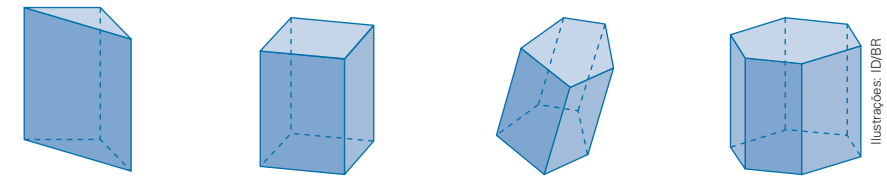
prisma oblíquo

Ilustrações: ID/BR

Não escreva no livro.

Nomenclatura de um prisma

Um prisma recebe denominação de acordo com a quantidade de lados do polígono da base: se a base é um triângulo, o prisma é **triangular**; se a base é um quadrilátero, o prisma é **quadrangular**; se a base é um pentágono, o prisma é **pentagonal**; e assim por diante.

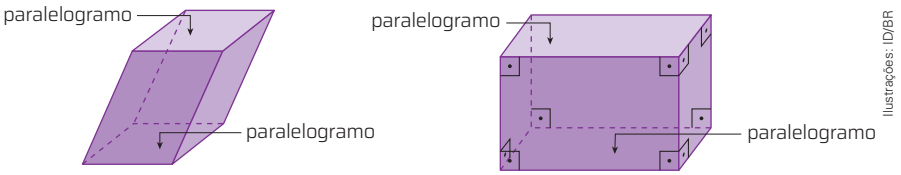


prisma triangular | prisma quadrangular | prisma pentagonal | prisma hexagonal

Ilustrações: ID/BR

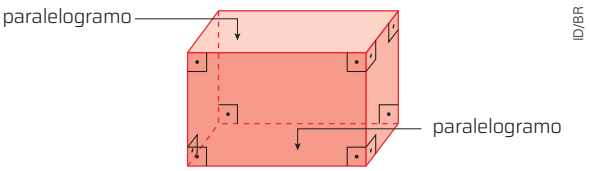
As bases do prisma também são faces desse prisma.
Alguns prismas quadrangulares recebem denominações especiais.

- **Paralelepípedo:** todo prisma cujas bases são paralelogramos.



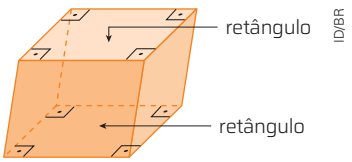
Ilustrações: ID/BR

- **Paralelepípedo reto:** todo prisma reto cujas bases são paralelogramos.



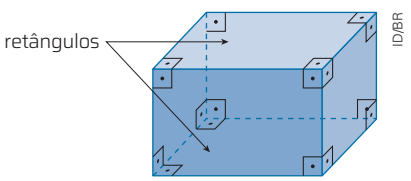
ID/BR

- **Paralelepípedo retângulo:** todo paralelepípedo cujas bases são retângulos.



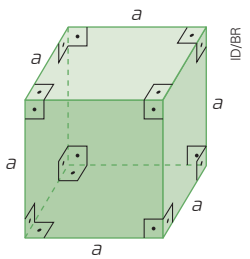
ID/BR

- **Paralelepípedo reto-retângulo (bloco retangular):** todo paralelepípedo reto cujas bases são retângulos. Consequentemente, as seis faces de um paralelepípedo reto-retângulo são retangulares.



ID/BR

- **Cubo:** paralelepípedo reto-retângulo cujas arestas são congruentes entre si. O cubo é também denominado **hexaedro regular**.



ID/BR

Não escreva no livro.

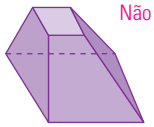
PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

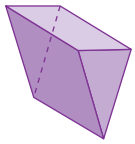
Ao resolver esta sequência de atividades, os estudantes desenvolvem a habilidade de desenhar poliedros e de reconhecer suas características.

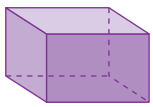
9 Dentre os objetos que costumamos usar no dia a dia, selecione alguns que lembrem o formato de prisma e faça no caderno uma lista deles.

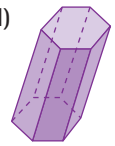
Respostas possíveis: caixa de sapato, dado, caixa de sabonete, caixa de creme dental, aquário, cubo mágico, etc.

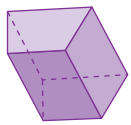
10 Analise cada um dos poliedros representados a seguir e indique, no caderno, os que são prismas, apresentando o nome de acordo com o polígono da base, e liste a quantidade de faces, vértices e arestas.

a)  Não é prisma.

b)  Polígono da base: triângulo. Faces: 5; vértices: 6; arestas: 9.

c)  Polígono da base: quadrilátero. Faces: 6; vértices: 8; arestas: 12.

d)  Polígono da base: hexágono. Faces: 8; vértices: 12; arestas: 18.

e)  Polígono da base: quadrilátero. Faces: 6; vértices: 8; arestas: 12.

f)  Não é prisma.

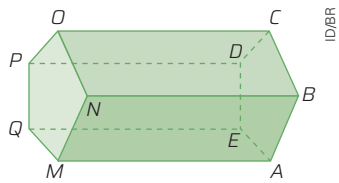
Ilustrações: ID/BR

11 Responda às questões a seguir.

a) Todo poliedro pode ser chamado de prisma? Por quê? Não. Prismas são somente os poliedros com duas bases paralelas e congruentes.

b) Todo prisma pode ser chamado de poliedro? Por quê? Sim, porque todo prisma é um poliedro particular.

12 No prisma a seguir:



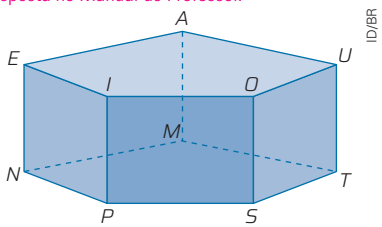
ID/BR

a) $\overline{AM}$ é uma aresta lateral. Indique as outras arestas laterais. $\overline{BN}$, $\overline{CO}$, $\overline{DP}$ e $\overline{EQ}$.

b) uma das faces laterais é o retângulo *ABNM*. Indique as outras faces laterais. *BCON*, *CDPO*, *DEQP*, *EAMQ*.

13 Elabore uma atividade como a atividade **12**, considerando a figura a seguir.

Consulte a resposta no Manual do Professor.



ID/BR

14 Suponha que um prisma tenha por base um polígono com *n* lados.

a) Quantas faces tem esse prisma? Por quê? $n + 2$ faces, n faces laterais e as 2 bases.

b) Quantos vértices tem esse prisma? Por quê? $2n$ vértices, n vértices em cada base.

c) Quantas arestas tem esse prisma? Por quê? $3n$ arestas, n arestas laterais e n arestas em cada base.

15 Faça o que se pede em cada item.

a) Copie o quadro a seguir no caderno e complete-o. Observe o exemplo.

Base do prisma	Lados do polígono da base	Faces	Vértices	Arestas
Triangular	3	5	6	9
Quadrangular	4 ////////	6 ////////	8 ////////	12 ////////
Pentagonal	5 ////////	7 ////////	10 ////////	15 ////////
Hexagonal	6 ////////	8 ////////	12 ////////	18 ////////
Heptagonal	7 ////////	9 ////////	14 ////////	21 ////////

b) Que relação você observa entre a quantidade de faces do prisma e a quantidade de lados do polígono da base? O número de faces é igual ao número de lados do polígono da base mais 2.

c) Que relação há entre a quantidade de vértices e a base do prisma? O número de vértices é igual a duas vezes o número de lados do polígono da base.

d) Que relação há entre a quantidade de arestas e a quantidade de lados do polígono da base? O número de arestas é igual a três vezes o número de lados do polígono da base.

16 Caio e Carol estavam conversando em uma aula de Matemática quando Caio afirmou:

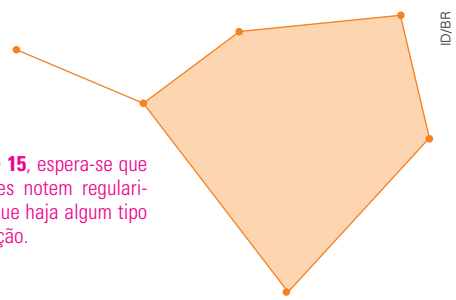
"A menor quantidade de lados que um polígono pode ter é três, então a menor quantidade de faces que um prisma pode ter é quatro."

Ao escutá-lo, Carol discordou, dizendo que "com quatro faces não se forma um prisma".

a) Qual é sua opinião sobre essas duas observações? Quem está correto? Carol está correta. O menor número de faces que um prisma pode ter é 5.

b) Qual é a menor quantidade de arestas e de vértices que um prisma pode ter? A menor quantidade de arestas e de vértices que um prisma pode ter são, respectivamente, 9 e 6.

17 A figura a seguir representa uma face e algumas arestas de um prisma.



ID/BR

Na atividade **15**, espera-se que os estudantes notem regularidades sem que haja algum tipo de formalização.

a) Copie a figura no caderno e complete-a, desenhando o prisma. Consulte a resposta no Manual do Professor.

b) Que tipo de prisma essa figura representa? Prisma de base pentagonal.

c) Qual é o número de faces, vértices e arestas desse prisma? 7 faces, 10 vértices e 15 arestas.

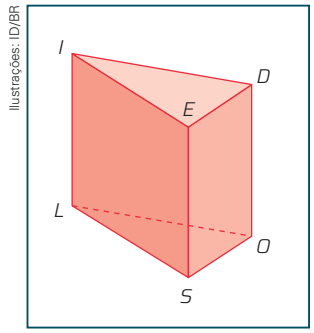
O trabalho com as atividades **16** e **19** favorece o desenvolvimento da competência geral **7**, pois exige dos estudantes argumentação e análise de diferentes pontos de vista.

Não escreva no livro.

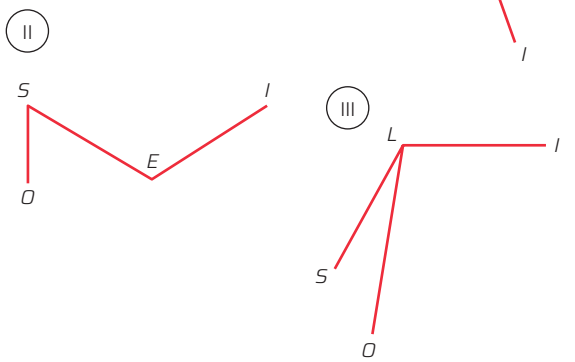
O trabalho com a atividade **20** favorece o desenvolvimento da competência geral **9**, uma vez que leva os estudantes a exercitar a empatia e o respeito mútuo enquanto aprendem uns com os outros.

18 **Analise os desenhos inacabados do prisma destacado. Copie os desenhos no caderno e complete-os.**

Consulte a resposta no Manual do Professor.



Ilustrações: ID/BR



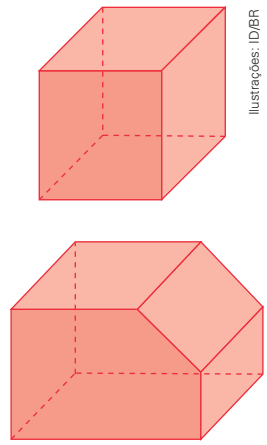
19. a) $\overline{OE}$ e $\overline{SD}$ têm o mesmo comprimento e se cruzam no meio porque são diagonais de um retângulo.

19 **Analise, novamente, o prisma da atividade anterior.**

a) Sabendo que *DESO* é um retângulo, explique, sem fazer cálculos, por que $\overline{OE}$ e $\overline{SD}$ têm o mesmo comprimento e se cruzam no meio.

b) Supondo que duas das faces laterais sejam dois quadrados congruentes, o que se pode afirmar sobre ΔLSO? Por quê? ΔLSO é isósceles, pois tem dois lados de mesma medida.

20 **Elabore algumas perguntas considerando as figuras a seguir. Depois, troque-as com um colega para que um responda às perguntas do outro.** Resposta pessoal.



Ilustrações: ID/BR

Pirâmides

Além das pirâmides do Egito

O objeto digital acrescenta conhecimentos sobre a utilização da figura geométrica pirâmide em construções modernas, em diferentes locais do mundo.

Assim como os prismas, as **pirâmides** constituem outro grupo de poliedros que também vamos estudar mais detalhadamente.

As pirâmides mais conhecidas no mundo são as do Egito.



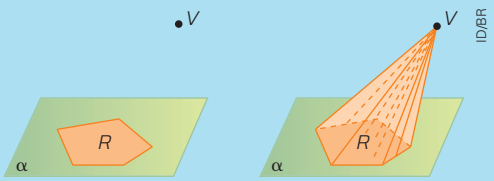
Ahmed Alattar/iStock/Getty Images

Pirâmides de Gizé, no Egito, construídas por volta de 2550 a.C. Foto de 2024.

Podemos definir assim uma pirâmide:

Sejam *R* uma superfície poligonal contida em um plano α e *V* um ponto fora de α.

A reunião de todos os segmentos de reta com uma extremidade em *V* e a outra em *R* é denominada **pirâmide**.

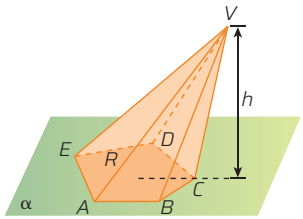


ID/BR

Não escreva no livro.

Elementos de uma pirâmide

Analise a pirâmide a seguir, representada com o plano que contém sua base.



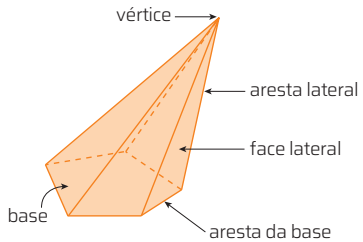
ID/BR

O ponto V é o **vértice** da pirâmide, e a superfície poligonal R é a **base** da pirâmide. Cada lado da base da pirâmide é uma **aresta da base**.

Os segmentos de reta com uma extremidade em V e a outra em um vértice da base são as **arestas laterais** da pirâmide. O total de arestas da pirâmide é a soma da quantidade de arestas laterais com a quantidade de arestas das bases.

A reunião de todos os segmentos de reta com uma extremidade em V e outra em uma aresta da base é uma **face lateral**. As faces laterais de uma pirâmide são triângulos.

A altura de uma pirâmide é a distância entre o vértice e o plano que contém a base.



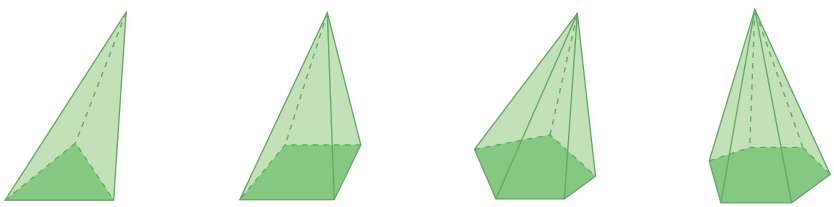
ID/BR

Na figura acima, temos:

- $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ e $\overline{EA}$ são as arestas da base;
- $\overline{VA}$, $\overline{VB}$, $\overline{VC}$, $\overline{VD}$ e $\overline{VE}$ são as arestas laterais;
- $\triangle VAB$, $\triangle VBC$, $\triangle VCD$, $\triangle VDE$, $\triangle VEA$ são as faces laterais;
- h é a altura da pirâmide.

Nomenclatura de uma pirâmide

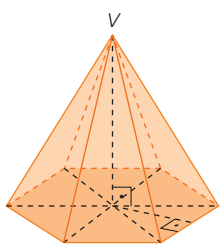
Uma pirâmide recebe denominação de acordo com o polígono da base: é **triangular** se a base é um triângulo; **quadrangular** se a base é um quadrilátero; **pentagonal** se a base é um pentágono, e assim por diante.


pirâmide triangular | pirâmide quadrangular | pirâmide pentagonal | pirâmide hexagonal

Ilustrações: ID/BR

Pirâmide regular

Uma pirâmide é **regular** se sua base é um polígono regular, e o segmento que une o vértice V da pirâmide ao centro da base é perpendicular à base.



ID/BR

pirâmide hexagonal regular

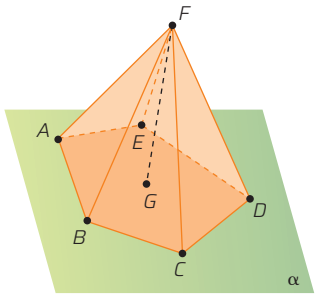
Em uma pirâmide regular, as arestas laterais são congruentes entre si, e as faces laterais são triângulos isósceles congruentes entre si.

Não escreva no livro.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Nas atividades de Geometria, muitas vezes as informações estão contidas em um desenho que acompanha o texto. Outras vezes, precisamos fazer um desenho auxiliar que nos ajude a pensar na estratégia de resolução.

21 O sólido representado a seguir é uma pirâmide regular, na qual $\overline{FG} \perp \alpha$.



ID/BR

a) Indique, no caderno, o vértice da pirâmide. *F*

b) Indique, no caderno, a altura da pirâmide. $\overline{FG}$

c) Indique, no caderno, as faces laterais. *△FEA, △FED, △FCD, △FBC, △FAB.*

d) Que tipo de base essa pirâmide tem? Pentagonal.

e) Qual é a quantidade de faces, vértices e arestas dessa pirâmide? 6 faces, 6 vértices e 10 arestas.

22 Faça o que se pede a seguir.

a) Copie o quadro a seguir no caderno e complete-o com a quantidade de cada item. Observe o exemplo.

Base da pirâmide	Lados do polígono da base	Vértices	Faces	Arestas
Triangular	3	4	4	6
Quadrangular	4	5	5	8
Pentagonal	5	6	6	10
Hexagonal	6	7	7	12
Heptagonal	7	8	8	14

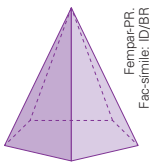
b) Que relação você observa entre a quantidade de faces de uma pirâmide e a quantidade de lados do polígono da base? O número de faces é igual ao número de lados do polígono da base mais 1.

c) Que relação há entre a quantidade de arestas e a quantidade de lados do polígono da base? O número de arestas é igual ao dobro do número de lados do polígono da base.

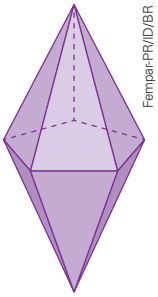
23 Indique a alternativa correta no caderno.

(Fempar-PR) A figura a seguir ilustra uma pirâmide de base pentagonal.

Duas dessas pirâmides idênticas foram coladas pelas bases formando um novo sólido com 7 vértices e 10 faces.


Fempar-PR. Fac-símile: ID/BR

Nas proximidades de cada um desses 7 vértices, são feitos cortes no sólido produzindo 7 pequenas pirâmides que serão, posteriormente, removidas. A esse processo se chama **truncamento**. Após o truncamento descrito, o sólido passará a ter Alternativa **a**.


Fempar-PR/ID/BR

a) 5 faces quadrangulares, 2 faces pentagonais e 10 faces hexagonais.

b) 5 faces quadrangulares, 7 faces pentagonais e 10 faces hexagonais.

c) 10 faces triangulares, 5 faces quadrangulares e 2 faces pentagonais.

d) 10 faces triangulares e 7 faces quadrangulares.

e) 10 faces triangulares e 7 faces pentagonais.

24 Quais são as pirâmides que têm exatamente:

a) 6 vértices? Pirâmide de base pentagonal.

b) 6 faces? Pirâmide de base pentagonal.

c) 16 arestas? Pirâmide de base octogonal.

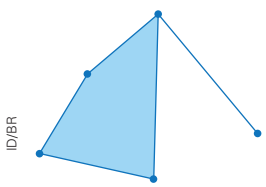
25 Suponha que uma pirâmide tenha por base um polígono com *n* lados. **a)** $(n + 1)$ faces, *n* faces laterais e a base.

a) Quantas faces essa pirâmide tem? Por quê?

b) Quantos vértices ela tem? Por quê? **b)** $(n + 1)$ vértices, *n* vértices na base mais o vértice formado pelas arestas laterais.

c) Quantas arestas ela tem? Por quê? **c)** $2n$ arestas, *n* arestas na base mais *n* arestas laterais.

26 A figura a seguir representa uma face e algumas arestas de uma pirâmide.

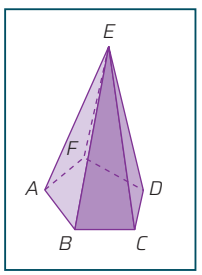

ID/BR

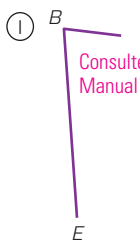
a) Copie a figura no caderno e complete-a, desenhando a pirâmide. Consulte a resposta no Manual do Professor.

b) Qual é a quantidade de faces, vértices e arestas dessa pirâmide? 5 faces, 5 vértices e 8 arestas.

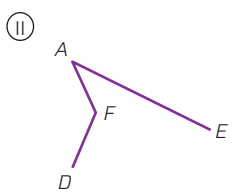
27 Analise os desenhos inacabados da pirâmide destacada. Copie os desenhos no caderno e complete-os.

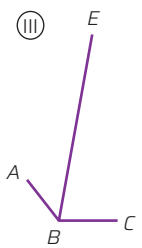
Ilustrações: ID/BR





Consulte a resposta no Manual do Professor.





Não escreva no livro.

Planificação de prismas e de pirâmides

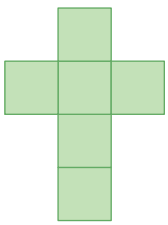
As superfícies dos prismas e as das pirâmides podem ser **planificadas**. Informalmente, planificar a superfície de um poliedro consiste em estender a superfície dele em um plano, ou seja, fazer um "molde" para o sólido de maneira que cada face dele fique ligada a pelo menos uma outra face por uma aresta.

Em geral, podemos construir uma ou mais planificações para a mesma figura, desde que os cortes sejam feitos pelas arestas e que os polígonos das faces, no molde, estejam ligados pelos seus lados.

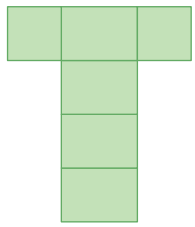
Acompanhe alguns exemplos de planificações e de não planificações de superfícies de prismas e de pirâmides.

Exemplo 1

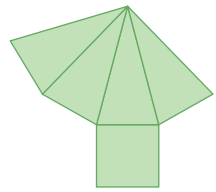
As figuras a seguir são algumas planificações de superfícies de prismas e de pirâmides.



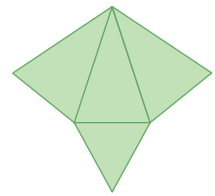
planificação da superfície de um cubo



planificação da superfície de um paralelepípedo reto-retângulo



planificação da superfície de uma pirâmide de base quadrada

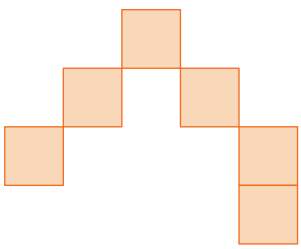


planificação da superfície de uma pirâmide de base triangular

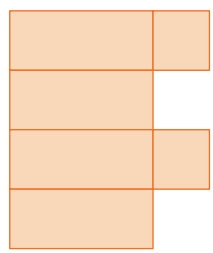
Ilustrações: ID/BR

Exemplo 2

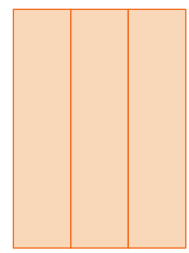
As figuras a seguir **não** são planificações de superfícies de prismas.



Há polígonos ligados por vértices.



Ao montar o prisma, haverá sobreposição das duas faces quadradas.

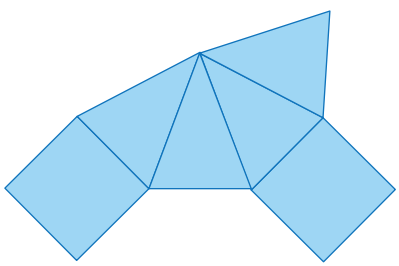


Faltam partes do prisma.

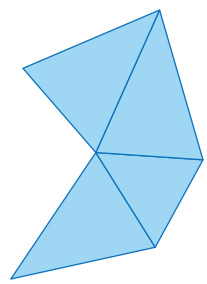
Ilustrações: ID/BR

Exemplo 3

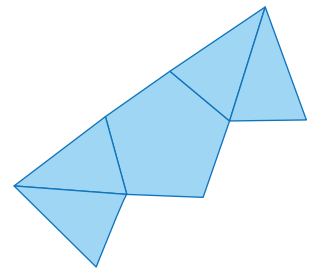
As figuras a seguir **não** são planificações de superfícies de pirâmides.



Há excesso de polígonos (faces).



Ao montar a pirâmide, haverá sobreposição de faces.



Faltam partes da pirâmide.

Ilustrações: ID/BR

Não escreva no livro.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Consulte as respostas das atividades **28** a **33** no Manual do Professor.

28 Construa um triângulo *ABC* equilátero cujos lados meçam 5 cm.

29 Construa um triângulo *ABC*, retângulo em *A*, dadas as medidas dos catetos $b = 2{,}5$ cm e $c = 3$ cm.

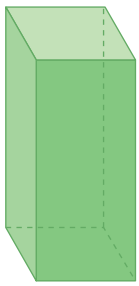
30 Construa um quadrado *ABCD*, dado $AB = 2$ cm.

31 Construa um trapézio isósceles *ABCD* cujos lados congruentes meçam 4,5 cm. (**Dica:** use como base a construção do hexágono regular.)

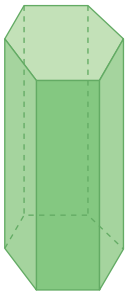
ATENÇÃO!
Tenha cuidado com a ponta-seca ao manusear o compasso.

32 Utilizando régua e compasso, construa no caderno uma planificação das superfícies dos prismas representados a seguir.

a)



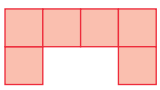
b)



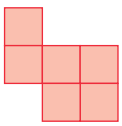
Ilustrações: ID/BR

33 Ao desenhar planificações de um cubo, André cometeu alguns erros. Descubra os erros cometidos por ele e corrija-os, redesenhando as diferentes planificações a seguir.

a)



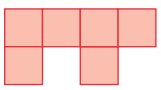
b)



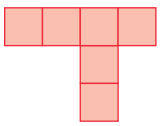
c)



d)



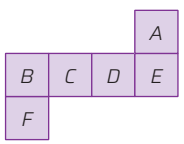
e)



Ilustrações: ID/BR

34 As figuras a seguir são planificações da superfície de um cubo. Em cada uma, indique os pares de faces paralelas.

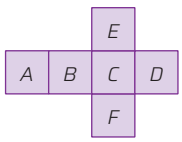
a)



Ilustrações: ID/BR

B e *D*; *C* e *E*; *A* e *F*.

b)

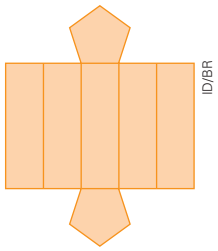


A e *C*; *B* e *D*; *E* e *F*.

Se possível, sugira a eles que construam os modelos das figuras das atividades **37** e **40** utilizando um *software* de geometria dinâmica como proposto na seção *Tecnologia*.

35 A figura a seguir é a planificação da superfície de um prisma.

As atividades de **28** a **31** solicitam construções de figuras geométricas planas a fim de retomar, com os estudantes, a construção de triângulos e quadriláteros para utilizar esses conhecimentos nas construções de planificações de superfícies de poliedros.



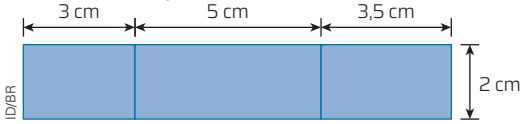
ID/BR

a) De que tipo de prisma é essa planificação?
Prisma reto de base pentagonal.

b) Qual é a quantidade de faces, vértices e arestas que esse prisma tem? 7 faces, 10 vértices e 15 arestas.

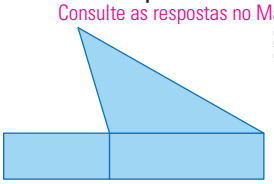
c) Desenhe no caderno duas outras planificações desse prisma. Desenho pessoal.
Consulte as planificações possíveis no Manual do Professor.

36 O desenho a seguir representa uma planificação inacabada da superfície de um prisma reto de base triangular. Copie o desenho no caderno e complete-o, de modo a obter quatro diferentes planificações para a superfície desse prisma. Desenho pessoal.
Consulte as planificações possíveis no Manual do Professor.



ID/BR

37 O desenho a seguir representa uma planificação inacabada da superfície de um prisma de base triangular.
Consulte as respostas no Manual do Professor.



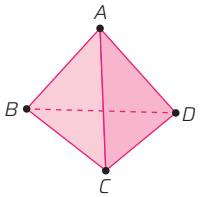
ID/BR

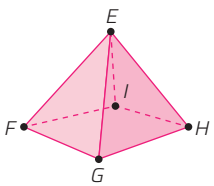
a) No caderno, faça um esboço de como seria a planificação completa desse prisma triangular.

b) Imagine como ficaria esse prisma montado e faça um desenho dele.

38 Registre no caderno a alternativa correta.

Nas pirâmides *ABCD* e *EFGHI* representadas a seguir, todas as faces, exceto a base *FGHI*, são triângulos equiláteros congruentes.





Ilustrações: ID/BR

Se a face *ABC* for colocada sobre a face *EFG*, de modo que os dois triângulos fiquem completamente sobrepostos, quantas faces terá o sólido resultante?
Alternativa **c**.

a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9

Não escreva no livro.

No item **a** da atividade **39**, espera-se que os estudantes respondam 9, pois é a soma das faces de cada uma das pirâmides.

39 **Júlio estava resolvendo a questão anterior e percebeu que, se marcasse a resposta mais óbvia, cometeria um erro.**

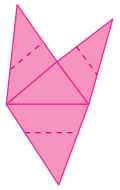
Resposta pessoal.

a) Em sua opinião, qual seria a resposta mais óbvia?

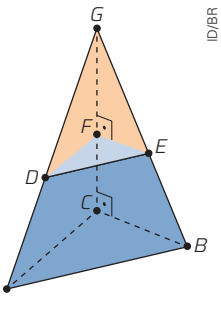
b) Utilizando folhas de cartolina, construa dois modelos de pirâmides similares às indicadas na atividade anterior. Em seguida, monte os modelos e verifique se as respostas que você apresentou anteriormente estão adequadas. Resposta pessoal.

40 **Chamamos de tronco de pirâmide de bases paralelas a parte da pirâmide que fica entre sua base e um plano paralelo a essa base. A figura a seguir representa uma pirâmide triangular cuja altura, $\overline{GC}$, é uma de suas arestas laterais. A parte destacada em azul é um tronco da pirâmide.**

40. b)



ID/BR



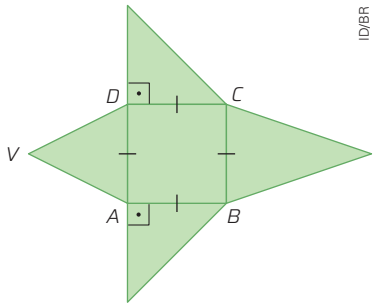
ID/BR

a) *ABED* é uma das faces laterais do tronco. Que tipo de quadrilátero é esse? Por quê? Trapézio, porque $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$.

b) No caderno, faça um esboço da planificação da superfície da pirâmide, indicando, nas faces, os cortes que vão gerar o tronco.

Na atividade **41**, será exigida a leitura de uma planificação e das informações contidas nela; contudo, para decidir como calcular o que é solicitado na atividade, precisamos também imaginar o sólido espacial correspondente a essa planificação construído no espaço.

41 **Esta figura representa uma planificação da superfície de uma pirâmide de base quadrada.** $2\sqrt{3}$ cm



ID/BR

Sabendo que $AB = 4$ cm e que o triângulo *VAD* é equilátero, calcule a medida da altura dessa pirâmide.

Dica: Imagine a pirâmide no espaço e encontre um segmento que possa ajudar no cálculo da medida da altura da pirâmide.

TECNOLOGIA

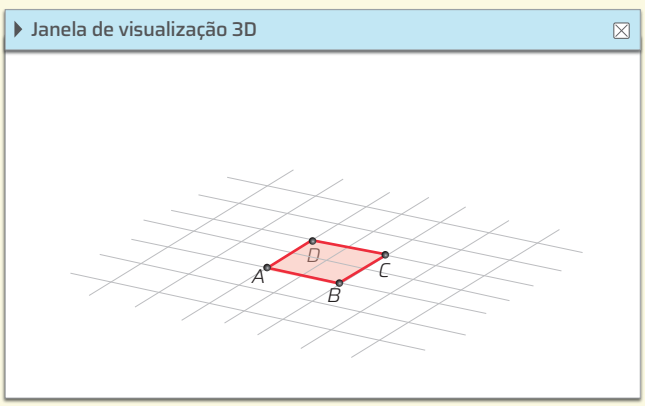
As etapas de construção de poliedros descritas nesta seção podem ser feitas com o *software* de geometria dinâmica GeoGebra.

Como proposta para relacionar as principais propriedades de poliedros, em especial, prismas e pirâmides, consulte o jogo "Capturando poliedros", proposto nas *Orientações específicas*.

Podemos usar um *software* de geometria dinâmica para construir poliedros. Alguns programas desse tipo podem ser encontrados gratuitamente na internet. Baixe e instale um *software* de geometria dinâmica em um computador. Lembre-se de verificar se você está baixando o programa de um *site* confiável.

Acompanhe as etapas a seguir para construir uma pirâmide reta de base quadrada e obter sua planificação utilizando um *software* de geometria dinâmica.

1ª etapa: Buscamos o comando que leva à opção de gráficos em três dimensões para abrir a janela em que podemos representar figuras geométricas espaciais. Em seguida, com a ferramenta de desenho, construímos um quadrado *ABCD* no plano *xy*, que será a base do poliedro.

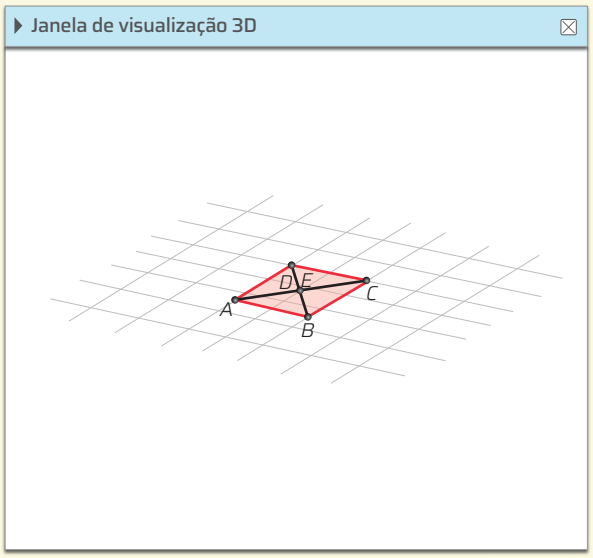


Nelson Matsuda/ID/BR

Não escreva no livro.

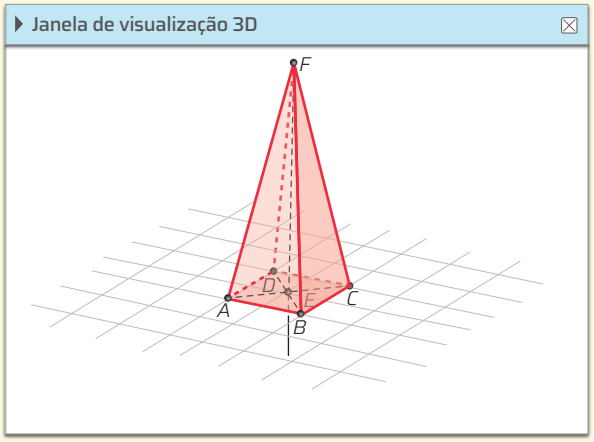
2ª etapa: Agora, vamos encontrar o centro do polígono. Para isso, basta usar a ferramenta de desenho de segmento e construir as duas diagonais do quadrado. Em seguida, obtemos a intersecção dessas diagonais e marcamos o ponto *E*, correspondente ao centro do quadrado.

Nelson Matsuda/ID/BR



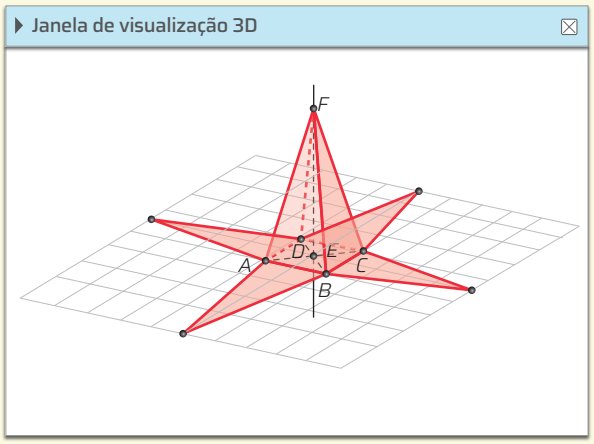
3ª etapa: Para obter a reta onde deve ser localizado o vértice da pirâmide, usamos a ferramenta de desenho para traçar uma reta que passa pelo ponto *E* e que é perpendicular ao plano que contém o quadrado *ABCD*. Em seguida, usando a ferramenta que permite a construção de pirâmide, clicamos sobre o quadrado e sobre um ponto qualquer da reta perpendicular. Em seguida, indicamos a base da pirâmide e a altura dela.

Nelson Matsuda/ID/BR



4ª etapa: Para planificar a superfície da pirâmide, vamos selecionar a ferramenta que apresenta a planificação do sólido construído.

Nelson Matsuda/ID/BR



ATIVIDADES

1 **De acordo com a construção apresentada, responda às questões a seguir.**

a) Qual é a quantidade de vértices, de faces e de arestas dessa figura? 5 vértices, 5 faces e 8 arestas.

b) Quais polígonos correspondem às faces dessa figura? Um quadrado e quatro triângulos.

2 **Usando um *software* de geometria dinâmica, reproduza o exemplo apresentado. Em seguida, utilizando a ferramenta "Mover", descreva o que acontece com a pirâmide ao movimentar:**

a) um dos vértices da base da pirâmide; Ao movimentar um dos vértices da base, a pirâmide permanece com suas propriedades, alterando apenas o tamanho da base quadrada.

b) o vértice não pertencente à base da pirâmide; Ao movimentar o vértice fora da base, a pirâmide permanece com suas propriedades, alterando apenas sua altura.

c) um dos vértices da planificação não pertencente à base. Ao movimentar um dos vértices da planificação, ela se fecha, formando novamente a pirâmide, ou se abre para planificação novamente.

3 **Com um *software* de geometria dinâmica, construa um prisma reto de base quadrada. Para isso, proceda de maneira semelhante ao exemplo realizado. Pule, porém, a 2ª etapa e, na 3ª etapa, construa uma reta perpendicular ao quadrado que passe por um de seus vértices.** Consulte as respostas das atividades **3** e **4** no Manual do Professor.

Utilize a ferramenta "Girar janela de visualização 3D"  , para girar a construção que você realizou e observá-la de diferentes posições.

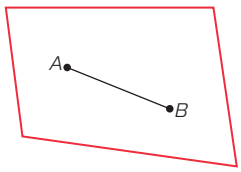
4 **Novamente usando um *software* de geometria dinâmica, crie uma pirâmide e um prisma reto cujas bases sejam polígonos regulares com mais de 4 lados. Crie também as planificações das superfícies dessas figuras. Depois, compartilhe com os colegas e o professor suas construções.**

Não escreva no livro.

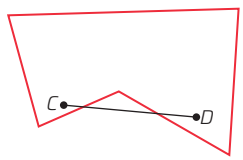
Um pouco mais sobre poliedros

Vamos aprofundar nosso estudo sobre poliedros conhecendo outras classificações e outras propriedades desses sólidos. Começaremos pelos **poliedros convexos** e **poliedros não convexos**.

Para entender melhor esses conceitos, vamos relembrar o que é um polígono convexo. Dizemos que um polígono é convexo quando qualquer segmento de reta que liga dois pontos da região interna a esse polígono está inteiramente contido na região interna do polígono.



polígono convexo



polígono não convexo

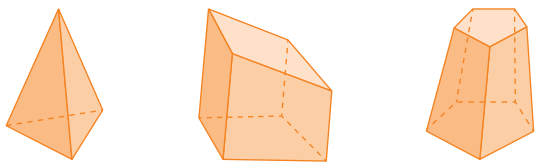
Ilustrações: ID/BR

Poliedros convexos

De forma semelhante à definição de polígonos convexos, temos:

Um **poliedro convexo** é aquele em que, para qualquer par de pontos interiores ou nas faces do sólido, o segmento que os une está completamente contido no sólido. Caso exista algum segmento que não satisfaça essa condição, tem-se um **poliedro não convexo** ou **côncavo**.

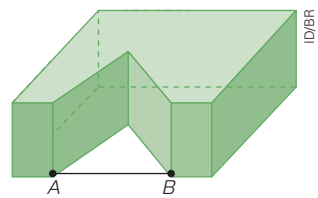
Verifique alguns exemplos de poliedros convexos.



Ilustrações: ID/BR

Analise com os estudantes que um mesmo poliedro pode ter diferentes nomes dependendo do critério de classificação. Por exemplo, o prisma de base triangular também pode ser denominado pentaedro; o cubo é um hexaedro; e a pirâmide de base hexagonal é um heptaedro.

Agora, examine a representação do poliedro verde ao lado. Ao verificar os vértices A e B, notamos que o segmento que os une não está contido no poliedro (o segmento $\overline{AB}$ não está totalmente na parte interna do poliedro). Há outros pontos das faces desse poliedro que também não estão unidos por segmentos contidos no poliedro; portanto, ele é um poliedro não convexo.



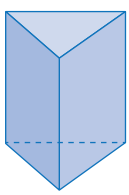
ID/BR

A nomenclatura de um poliedro convexo é dada de acordo com seu número de faces. Verifique nos quadros a seguir os nomes de alguns poliedros convexos.

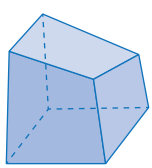
Quantidade de faces	Poliedro
4	tetraedro
5	pentaedro
6	hexaedro
7	heptaedro
8	octaedro
9	eneaedro

Quantidade de faces	Poliedro
10	decaedro
11	undecaedro
12	dodecaedro
13	tridecaedro
⋮	⋮
20	icosaedro

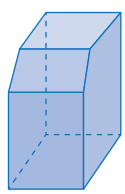
Exemplos



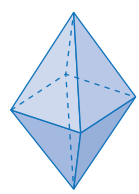
pentaedro



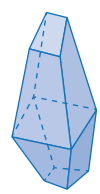
hexaedro



heptaedro



octaedro



decaedro

Ilustrações: ID/BR

Não escreva no livro.

Relação de Euler Para obter a relação de Euler, vamos usar o raciocínio indutivo.

Considerando os poliedros representados anteriormente, vamos chamar de V, A e F as quantidades, respectivamente, de vértices, arestas e faces desses poliedros e calcular o valor da expressão $V - A + F$.

Poliedro convexo	V	A	F	$V - A + F$
pentaedro	6	9	5	2
hexaedro	8	12	6	2
heptaedro	10	15	7	2
octaedro	6	12	8	2
decaedro	12	20	10	2

Note que, nos poliedros considerados, encontramos a seguinte relação:

$$V - A + F = 2$$

Essa relação é válida para qualquer poliedro convexo e é conhecida como **relação de Euler**.

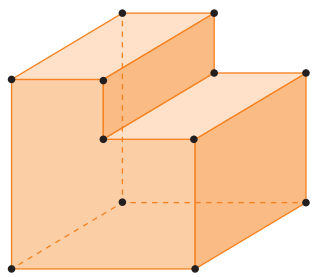
Em todo poliedro convexo, se V, A e F são as quantidades, respectivamente, de vértices, arestas e faces, então, pela relação de Euler, temos:

$$V - A + F = 2$$

Existem alguns poliedros não convexos que satisfazem a relação de Euler.

Analise a aplicação dessa relação nos poliedros não convexos representados a seguir.

I



ID/BR

poliedro não convexo

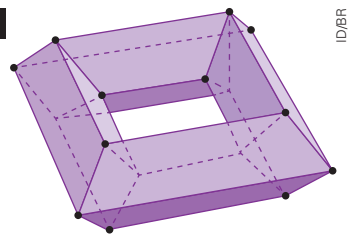
$V = 12, A = 18, F = 8$

$12 - 18 + 8 = 2$

$V - A + F = 2$

Como a equação é verdadeira, vale a relação de Euler.

II



ID/BR

poliedro não convexo

$V = 16, A = 32, F = 16$

$16 - 32 + 16 \neq 2$

$V - A + F \neq 2$

Como a equação é falsa, não vale a relação de Euler.

Podemos, então, afirmar que:

Em todo poliedro convexo vale a relação de Euler, mas nem todo poliedro em que essa relação é válida é convexo.

Não escreva no livro.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R1 **Um heptaedro convexo tem uma face quadrangular, duas faces pentagonais e quatro faces triangulares. Calcule a quantidade de:**

a) arestas; **b)** vértices.

Na realização dessas atividades, incentive a consulta constante ao que foi apresentado ao longo do capítulo, uma vez que as questões exigem que os estudantes identifiquem o significado de vários termos que podem ser novos para eles.

Resolução

a) Em uma face quadrangular, temos 4 arestas; em uma face pentagonal, 5 arestas; e, em uma face triangular, 3 arestas.

Então, em duas faces pentagonais, teremos 10 arestas ($2 \cdot 5 = 10$) e, em quatro faces triangulares, teremos 12 arestas ($4 \cdot 3 = 12$).

Adicionando-as às arestas da face quadrangular, teremos um total de 26 arestas.

Como cada aresta foi contada duas vezes (cada aresta é comum a duas faces), temos:

$$A = \frac{26}{2} = 13$$

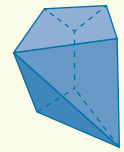
Portanto, 13 arestas.

b) Substituindo F por 7 e A por 13 em $V - A + F = 2$, obtemos:

$$V - 13 + 7 = 2 \Rightarrow V = 8$$

Logo, 8 vértices.

Na figura ao lado, vemos uma representação possível do sólido do problema.



ID/BR

R2 **Um poliedro convexo tem 20 vértices, e de cada um deles saem 3 arestas. Calcule a quantidade de arestas e de faces desse poliedro.**

Resolução

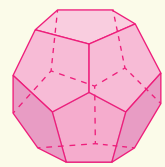
Ao calcular a quantidade de arestas que partem dos 20 vértices, obtemos o dobro do número de arestas, pois cada aresta estará sendo "considerada" partindo de dois vértices. Se de cada um dos 20 vértices saem 3 arestas; logo:

$$2A = 20 \cdot 3 \Rightarrow A = 30$$

Substituindo V por 20 e A por 30 em $V - A + F = 2$, temos:

$$20 - 30 + F = 2 \Rightarrow F = 12$$

Na figura ao lado, vemos uma representação possível desse poliedro.



ID/BR

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

42 **Em um poliedro convexo, a quantidade de vértices é 8 e a de arestas é 12. Calcule a quantidade de faces.** 6 faces.

43 **Um poliedro convexo tem a quantidade de vértices igual à quantidade de faces. Sabendo que a quantidade de arestas é 6, calcule a quantidade de vértices.** 4 vértices.

44 **Calcule a quantidade de vértices e a quantidade de arestas de um poliedro convexo que tem:**

a) três faces quadrangulares, duas faces triangulares e duas faces pentagonais; 9 vértices e 14 arestas.

b) cinco faces quadrangulares e quatro faces triangulares. 9 vértices e 16 arestas.

45 **Registre a alternativa correta no caderno.**

(Fuvest-SP) Um deltaedro é um poliedro cujas faces são todas triângulos equiláteros. Se um deltaedro convexo possui 8 vértices, então o número de faces desse deltaedro é:

Note e adote: Em poliedros convexos, vale a relação de Euler $F - A + V = 2$, em que F é o número de faces, A é o número de arestas e V é o número de vértices do poliedro. Alternativa **e**.

a) 4 **c)** 8 **e)** 12

b) 6 **d)** 10

46 **Em um octaedro convexo, as faces são triangulares. Calcule a quantidade de vértices.** 6 vértices.

47 **Em grego, dodecaedro significa 12 faces, e icosaedro significa 20 faces.**

a) Quantos vértices tem o dodecaedro regular, sabendo que ele tem 30 arestas? 20 vértices.

b) Quantas arestas tem o icosaedro, sabendo que ele tem 12 vértices? 30 arestas.

48 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(Enem) O hábito cristalino é um termo utilizado por mineralogistas para descrever a aparência típica de um cristal em termos de tamanho e forma. A granada é um mineral cujo hábito cristalino é um poliedro com 30 arestas e 20 vértices. Um mineralogista construiu um modelo ilustrativo de um cristal de granada pela junção dos polígonos correspondentes às faces.

Supondo que o poliedro ilustrativo de um cristal de granada é convexo, então a quantidade de faces utilizadas na montagem do modelo ilustrativo desse cristal é igual a: Alternativa **b**.

a) 10. **c)** 25. **e)** 50.

b) 12. **d)** 42.

PARA EXPLORAR

Vídeo

***Os sólidos de Platão*. Realização: TV Escola. Produção: Seed, MEC, FNDE (Série *Mão na Forma*, programa 1). 1 vídeo (9 min 53 s). Disponível em: http://www.dominiopublico.gov.br/download/video/me001046.mp4. Acesso em: 30 set. 2024.**

Esse é mais um episódio da série *Mão na forma*, programa que mostra como a geometria está por toda parte. Nesse vídeo, você vai aprender mais sobre as características dos poliedros de Platão.

Incentive os estudantes a perceber que todo poliedro regular é poliedro de Platão, mas nem todo poliedro de Platão é poliedro regular.

Poliedro de Platão

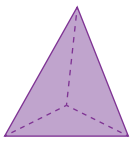
Um poliedro convexo é chamado de **poliedro de Platão** se:

- suas faces são polígonos com a mesma quantidade de lados;
- de cada vértice do poliedro parte a mesma quantidade de arestas.

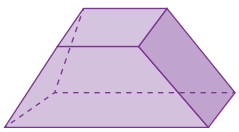
Por exemplo, o cubo é um poliedro de Platão, pois suas seis faces são quadradas, de cada vértice saem três arestas e a relação de Euler é válida.

É possível provar que existem cinco, e somente cinco, classes de poliedros de Platão: tetraedros, hexaedros, octaedros, dodecaedros e icosaedros.

Verifique a seguir alguns exemplos desses poliedros.



tetraedro



hexaedro

Ilustrações: ID/BR

Poliedros regulares

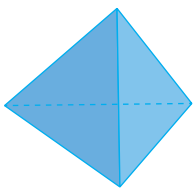
Um poliedro convexo é chamado de **poliedro regular** se:

- suas faces são polígonos regulares e congruentes entre si;
- de cada vértice do poliedro parte a mesma quantidade de arestas.

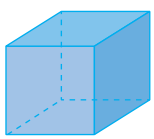
Existem cinco, e apenas cinco, tipos de poliedros regulares.

Os cinco poliedros regulares são: tetraedro regular, hexaedro regular (cubo), octaedro regular, dodecaedro regular e icosaedro regular.

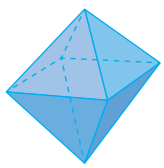
Os poliedros a seguir representam os cinco tipos de poliedros regulares.



tetraedro regular

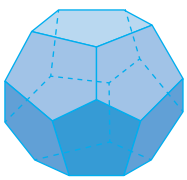


hexaedro regular (cubo)

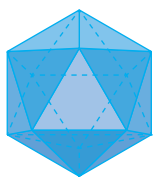


octaedro regular

Ilustrações: ID/BR

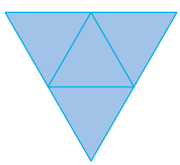


dodecaedro regular

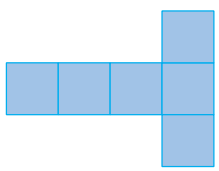


icosaedro regular

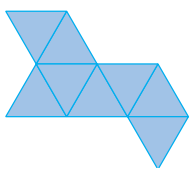
A seguir, apresentamos possíveis planificações das superfícies dos cinco poliedros regulares.



tetraedro

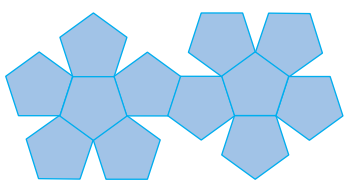


cubo

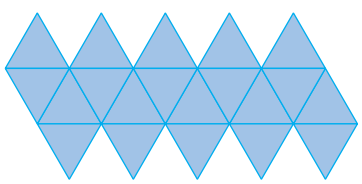


octaedro

Ilustrações: ID/BR



dodecaedro



icosaedro

Não escreva no livro.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

49 Dê exemplos de poliedros que satisfazem apenas uma das condições exigidas para que um poliedro seja regular. Resposta pessoal.
Espera-se que os estudantes mencionem um poliedro que seja apenas convexo, por exemplo, uma pirâmide de base quadrada, ou ainda, um poliedro com uma face poligonal não regular.

50 Um tetraedro regular tem 4 cm de medida de aresta e de cada um de seus vértices é retirado um tetraedro regular de 2 cm de medida da aresta.

a) Faça no caderno um desenho do sólido resultante. Consulte a resposta no Manual do Professor.

b) O sólido resultante é regular? Justifique.
Sim, o sólido resultante é um octaedro regular de aresta 2 cm.

51 Identifique as frases falsas e reescreva-as no caderno, corrigindo-as.

a) Há apenas cinco poliedros de Platão.
Verdadeira.

b) Todo poliedro convexo é poliedro de Platão.
Falsa. Todo poliedro de Platão é convexo.

c) Todo poliedro de Platão é regular.
Falsa. Todo poliedro regular é de Platão.

d) Nem todo poliedro regular é poliedro de Platão.
Falsa. Nem todo poliedro de Platão é poliedro regular.

e) O hexaedro tem faces hexagonais.
Falsa. O hexaedro tem faces quadrangulares.

CÁLCULO RÁPIDO

Enfatize com os estudantes que o cálculo mental é uma importante habilidade e que seu desenvolvimento deve ser um dos objetivos do aprendizado da Matemática, pois, entre outros motivos: tem importância prática no dia a dia; tem valor pessoal, individual; é útil na resolução de problemas matemáticos.

1 Calcule mentalmente:

a) $410 \cdot 0{,}5$ 205

b) $620 \cdot 0{,}5$ 310

c) $36 \cdot 0{,}5$ 18

d) $31 \cdot 0{,}5$ 15,5

e) $74 \cdot 0{,}5$ 37

f) $315 \cdot 0{,}5$ 157,5

2 Uma estratégia para multiplicar um número por 0,4, por 0,6 ou por 0,7 é multiplicá-lo, respectivamente, por 4, por 6 ou por 7 e dividir o resultado por 10. Utilize essa forma de calcular para obter mentalmente os valores de:

a) $60 \cdot 0{,}7$ 42

b) $80 \cdot 0{,}4$ 32

c) $90 \cdot 0{,}6$ 54

d) $36 \cdot 0{,}3$ 10,8

e) $55 \cdot 0{,}4$ 22

f) $26 \cdot 0{,}8$ 20,8

g) $45 \cdot 0{,}7$ 31,5

h) $26 \cdot 0{,}6$ 15,6

i) $82 \cdot 0{,}8$ 65,6

3 É importante saber fazer estimativa de medidas. Então, no caderno, faça uma lista de objetos que tenham aproximadamente cada comprimento ou largura a seguir. Respostas pessoais. Exemplo de resposta:

a) 1 mm A espessura de uma folha de papel sulfite.

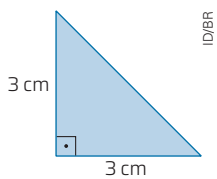
b) 1 cm A espessura de um tampo de vidro de uma mesa.

c) 1 m A largura de uma porta.

d) 1 km O comprimento de um viaduto.

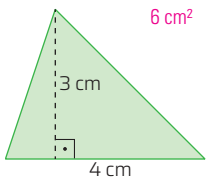
4 Calcule mentalmente as áreas das figuras representadas a seguir. Algumas delas estão fora de escala.

a) 4,5 cm²



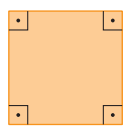
ID/BR

b) 6 cm²



ID/BR

c) 2,25 cm²



ID/BR

d) paralelogramo 6 000 cm² ou 0,6 m².



ID/BR

Não escreva no livro.

PARA RECORDAR

1 A despesa mensal de uma empresa, contando os encargos sociais, é dada pela função $D(n) = 20 + \frac{n}{10}$, em que D é a despesa em milhares de reais e n é a quantidade de funcionários.

a) Qual será essa despesa quando a empresa tiver 200 funcionários? R$ 40 000,00.

b) Qual será a quantidade de funcionários quando a despesa mensal for R$ 100 000,00? 800 funcionários.

2 Determinada mercadoria, cujo preço de tabela é R$ 800,00, é vendida à vista com desconto de x% ou em 2 parcelas iguais de R$ 400,00, sendo a primeira no ato da compra e a segunda um mês após a compra. Suponha que um comprador disponha do dinheiro necessário para pagar à vista e que ele saiba que a diferença entre o preço à vista e a primeira parcela pode ser aplicada no mercado financeiro a uma taxa de 1,5% ao mês.

Nessas condições:

a) se $x = 15$, será vantajosa para ele a compra a prazo? Explique.
Não. O valor R$ 284,20 é inferior a R$ 400,00, o que inviabiliza o pagamento da segunda parcela.

b) qual é o valor de x que torna indiferente comprar à vista ou a prazo? Explique. $x = 0{,}74$.

3 Registre a alternativa correta no caderno.

(Enem) O prefeito de uma cidade deseja construir uma rodovia para dar acesso a outro município. Para isso, foi aberta uma licitação na qual concorreram duas empresas. A primeira cobrou R$ 100 000,00 por km construído (n), acrescidos de um valor fixo de R$ 350 000,00, enquanto a segunda cobrou R$ 120 000,00 por km construído (n), acrescidos de um valor fixo de R$ 150 000,00. As duas empresas apresentam o mesmo padrão de qualidade dos serviços prestados, mas apenas uma delas poderá ser contratada.

Do ponto de vista econômico, qual equação possibilitaria encontrar a extensão da rodovia que tornaria indiferente para a prefeitura escolher qualquer uma das propostas apresentadas? Alternativa **a**.

a) $100n + 350 = 120n + 150$

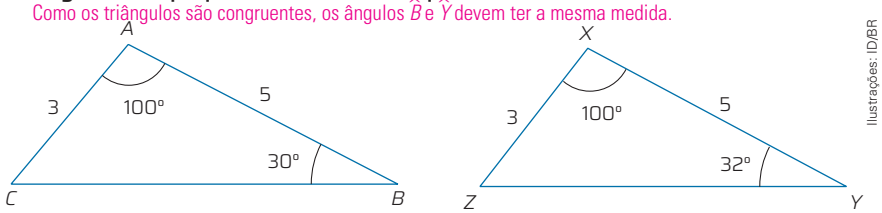
b) $100n + 150 = 120n + 350$

c) $100(n + 350) = 120(n + 150)$

d) $100(n + 350\,000) = 120(n + 150\,000)$

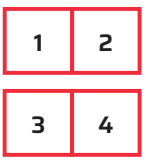
e) $350(n + 100\,000) = 150(n + 120\,000)$

4 Analise as figuras a seguir. Existe um erro na medida do ângulo $\hat{B}$ ou do ângulo $\hat{Y}$. Explique como descobrir que esse erro existe.
Como os triângulos são congruentes, os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{Y}$ devem ter a mesma medida.



Ilustrações: ID/BR

5 Duas crianças e dois adultos viajarão de ônibus ocupando as poltronas numeradas de 1 a 4, com 1 e 2 juntas e 3 e 4 juntas, como no esquema abaixo.



ID/BR

De quantas maneiras eles podem se sentar nas quatro poltronas, de modo que ao lado de uma criança sempre esteja um adulto? 16 maneiras diferentes.

Não escreva no livro.

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO

Os problemas a seguir, além do raciocínio lógico, exigem sua visão espacial dos poliedros citados em cada desafio.

1 **Indique no caderno a alternativa correta.**

(UFPR) Todas as faces de um cubo sólido de arestas 9 cm foram pintadas de verde. Em seguida, por meio de cortes paralelos a cada uma das faces, esse cubo foi dividido em cubos menores, todos com a aresta 3 cm. Com relação a esses cubos, considere as seguintes afirmativas:

1. Seis desses cubos menores terão exatamente uma face pintada de verde.
2. Vinte e quatro desses cubos menores terão exatamente duas faces pintadas de verde.
3. Oito desses cubos menores terão exatamente três faces pintadas de verde.
4. Um desses cubos menores não terá nenhuma das faces pintada de verde.

Assinale a alternativa correta. Alternativa **c**.

a) Somente as afirmativas 1, 2 e 4 são verdadeiras.
b) Somente as afirmativas 1 e 4 são verdadeiras.
c) Somente as afirmativas 1, 3 e 4 são verdadeiras.
d) Somente as afirmativas 2 e 3 são verdadeiras.
e) As afirmativas 1, 2, 3 e 4 são verdadeiras.

2 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(Insper-SP) Uma pessoa dispõe dos seis adesivos numerados reproduzidos a seguir, devendo colar um em cada face de um cubo.



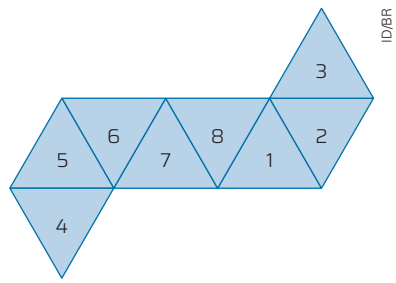
Sabe-se que:

- se numa face do cubo for colado um número ímpar, então na face oposta será colado um número maior que ele;
- a soma dos números colados em duas faces opostas quaisquer do cubo pertence ao intervalo [6,5; 12,5].

Nessas condições, multiplicando os números colados em duas faces opostas quaisquer desse cubo, obtém-se, no máximo: Alternativa **c**.

a) 20
b) 24
c) 30
d) 32
e) 40

3 **A planificação a seguir é dobrada para formar um octaedro e em cada vértice é marcado o valor da soma das quatro faces triangulares que o compõem.**

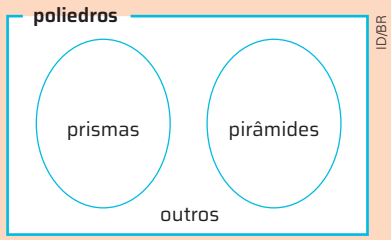


a) Qual é o valor máximo que pode ser marcado em um vértice? 24
b) Reorganize a planificação para obter uma soma maior. Consulte a resposta no Manual do Professor.

PALAVRAS-CHAVE Auxilie os estudantes na organização de um mapa conceitual a partir da imagem sugerida a seguir.

O trabalho com esta seção vai ajudar você no estudo do tema do capítulo, possibilitando uma autoavaliação sobre o que foi aprendido e o que é necessário ser retomado ou aperfeiçoado.

Desenhe no caderno um quadro como o que começamos a seguir. Complete-o com os desenhos e as definições para que você tenha uma síntese do que aprendeu sobre poliedros.



Em seguida, com ilustrações e exemplos, escreva sobre prismas e pirâmides.

Aproveite também para obter informações sobre o que ainda não sabe, consultando novamente o capítulo e, se necessário, conversando com o professor.

Não escreva no livro.

MATEMÁTICA E EDIFICAÇÕES

Esta seção contempla as competências gerais **1**, **2**, **3** e **9** propostas pela BNCC, na medida em que valoriza e utiliza conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo cultural e exercita a curiosidade intelectual com diversas manifestações artísticas e culturais. Assim, possibilita uma integração com a área de Linguagens e suas Tecnologias, com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e com o tema contemporâneo transversal Multiculturalismo. Além disso, a seção possibilita o trabalho com a habilidade **EM13MAT309**, na medida que permite ao estudante mobilizar conhecimentos na resolução e registrar a solução usando a linguagem matemática de maneira adequada.

Museu de Arte de São Paulo (Masp)

Para ampliar os conhecimentos dos estudantes sobre a história e a importância do Masp, convide um professor de Arte, ou de Sociologia ou de História, para participar das discussões. Desse modo, é possível explorar a competência específica **6** da área de Linguagens e suas Tecnologias e a competência específica **4** da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

O Masp é um dos museus e centros de exposição mais importantes do Brasil, considerado um dos símbolos da cidade de São Paulo graças à sua arquitetura moderna e inovadora. Seu prédio, de arquitetura inconfundível, foi projetado pela arquiteta italiana Lina Bo Bardi (1914-1992) na década de 1950, sendo inaugurado em 1968.

Leia o texto a seguir e conheça um pouco mais da história desse museu.

Conheça um pouco da história do MASP, o museu mais famoso de São Paulo

Com mais de 70 anos de existência, o museu reúne o mais importante acervo de arte europeia do Hemisfério Sul

Um dos principais pontos artísticos da capital paulista, o Museu de Arte de São Paulo Assis Chateaubriand, mais conhecido como MASP, foi transferido para a atual sede na avenida Paulista, com icônico projeto de Lina Bo Bardi, em 7 de novembro de 1968. Sua história, porém, teve início muito antes disso.

Originalmente instalado na rua 7 de Abril, no centro da cidade, o museu privado sem fins lucrativos foi fundado em 1947 pelo empresário Assis Chateaubriand. Primeiro museu moderno do Brasil, o MASP nasceu ocupando o segundo andar do edifício dos Diários Associados e em pouco tempo se expandiu, tomando novos andares e incorporando exposições sobre cinema e teatro à sua programação. [...]

A fundação de espaço com a proposta de questionar o tradicional modelo europeu de museu causou grande impacto no meio cultural paulista, na época pautado pelo tradicionalismo de instituições como a Pinacoteca do Estado e o Museu Paulista. Cerca de uma década depois, com a contundente repercussão e grande interesse da sociedade paulistana pelo museu[,] dirigido pelo crítico e *marchand* italiano Pietro Maria Bardi, ainda adaptado aos limites de um edifício não voltado a tal fim, tornou-se necessária a criação de um projeto especificamente pensado para abrigar a coleção de obras do MASP.

Lina Bo Bardi, que já havia sido responsável pela adaptação do edifício dos Diários Associados para abrigar as atividades do MASP, foi incumbida da criação do projeto do museu como o conhecemos hoje. Desde a escolha da localização privilegiada com vista espetacular na Avenida Paulista, até a criação da estrutura arquitetônica [...], tudo foi pensado de maneira a romper com a noção clássica de museus. A ideia era fazer do MASP um museu popular, com acesso irrestrito, reforçando seu caráter atemporal.

A construção do MASP onde ele se encontra hoje durou cerca de 12 anos. Para não obstruir a vista da Avenida Nove de Julho para o centro e a Serra da Cantareira – exigência feita para que o terreno onde o museu foi instalado fosse doado à Prefeitura de São Paulo –, Lina Bo Bardi projetou o famoso vão livre abaixo do museu elevado vazado sustentado por quatro pilares, de onde é possível ver a paisagem do entorno da Avenida Paulista. O vão livre de cerca de 70 metros de extensão é até hoje um marco na região, sediando diferentes tipos de encontros e agrupamentos e persistindo ainda hoje como um dos pontos estratégicos às manifestações políticas e culturais em São Paulo.

Mais importante acervo de arte europeia do Hemisfério Sul, a coleção do MASP reúne atualmente mais de 11 mil obras, incluindo pinturas, esculturas, objetos, fotografias, vídeos e vestuário de diversos períodos, abrangendo a produção europeia, africana, asiática e das Américas. [...]



Foto: Lew Parrella - Acervo do Centro de Pesquisa do Museu de Arte de São Paulo Assis Chateaubriand. © Instituto Bardi / Casa de Vidro, Lina Bo Bardi / AUTVIS, Brasil, 2024

Lina Bo Bardi na construção do Masp, em foto da década de 1960.

Não escreva no livro.

As primeiras obras adquiridas para a coleção foram essencialmente de renascentistas italianos, como Botticelli, Perugino, Tintoretto, além de uma tela de Francisco Goya, um El Greco e obras de pintores modernos como Chagall e Marx Ernst. Nos anos 1950 o acervo cresceu bastante com o acréscimo de uma representativa coleção de impressionistas, com nomes como Manet, Degas, Renoir, Van Gogh, Cézanne, além de Picasso, Matisse. Na época, como estratégia de divulgação, o Masp iniciou uma itinerância internacional e, logo na primeira abertura, em Paris, a recepção positiva de sua mostra possibilitou novas aquisições. [...]

Hoje, além da mostra de longa duração de seu acervo em transformação na pinacoteca do museu, realiza-se ao longo do ano uma ampla programação de exposições coletivas e individuais que se articulam em torno de eixos temáticos, sempre com a missão de estabelecer, de maneira crítica e criativa, diálogos entre passado e presente, culturas e territórios, a partir das artes visuais. Diverso, inclusivo e plural, o MASP segue seu caminho em busca constante por ampliar, preservar, pesquisar e difundir seu acervo, bem como promover o encontro entre públicos e arte por meio de experiências transformadoras e acolhedoras.

Conheça um pouco da história do Masp, o museu mais famoso de São Paulo. Escola Panamericana de Arte e *Design*, São Paulo, 18 out. 2021. Disponível em: https://www.escola-panamericana.com.br/conheca-um-pouco-da-historia-do-masp-o-museu-mais-famoso-de-sao-paulo/. Acesso em: 30 set. 2024.

PARA EXPLORAR

Site

Masp. Disponível em: https://masp.org.br. Acesso em: 30 set. 2024.

No portal, é possível conferir o acervo permanente e as exposições do museu, conhecer sua estrutura, os cursos oferecidos e outras informações.

A arquitetura do Masp se destaca na paisagem de uma das avenidas mais movimentadas e modernas do país, que abriga diferentes estilos arquitetônicos. Sua estrutura de concreto em formato de bloco retangular, suspensa por duas vigas e quatro pilares e resultando em um grande espaço abaixo de si, é um dos maiores ícones arquitetônicos, não somente para os paulistas, mas para todos os brasileiros.



© Sergio Monti/Alamy/Fotoarena
© Instituto Bardi/Casa de Vidro, Lina Bo Bardi/ AUTVIS, Brasil, 2024.

Pinacoteca e vão livre do Masp, na avenida Paulista, São Paulo (SP), com suas medidas reais indicadas. Foto de 2022.

Conectando ideias

1 **Analise a foto que mostra a estrutura do Masp e suas dimensões. As colunas e vigas vermelhas, tão identificadas com a arquitetura do museu, só passaram a ter essa cor em 1989, quando infiltrações e goteiras ameaçaram o acervo. A solução foi impermeabilizar as quatro colunas e as duas vigas, e foi a própria Lina Bo Bardi quem sugeriu a cor vermelha. Para realizar a pintura, foi necessário saber as medidas da área da superfície lateral das colunas e vigas. Como você faria o cálculo dessas medidas? Seu desafio é calcular a medida da área da superfície vermelha das colunas, utilizando seus conhecimentos de Geometria.**

2 402,4 m²

2 **O Masp pode ser considerado importante em âmbito municipal, estadual e nacional, no entanto, muitos outros museus, ainda que não tão famosos, são fundamentais para a cultura local, regional e nacional.**

Há algum museu, monumento ou outro equipamento cultural de grande relevância cultural, científica e educacional no município, no estado ou na região em que você mora?

- Investigue a existência de equipamentos culturais na região, no estado ou no município em que você mora. Consulte as páginas oficiais dos órgãos públicos governamentais e das instituições de ensino, como secretarias públicas de Educação e Cultura, além de universidades estaduais ou federais.
- Pesquise imagens e informações relacionadas à arquitetura do equipamento cultural escolhido, suas dimensões e a extensão do terreno. Se possível organizem com seu professor uma visita guiada ao local escolhido.
- Por fim, desenhe a estrutura arquitetônica desse local, representando os sólidos geométricos que a compõem e a escala utilizada em seu desenho.

Resposta pessoal.

Para a atividade **2**, reserve momentos no dia a dia escolar para sanar as dúvidas dos estudantes e orientar seu desenvolvimento. Se necessário, auxilie-os durante a pesquisa de equipamentos de arte e cultura no lugar onde vivem. Existem algumas ferramentas *on-line* que podem colaborar nessa busca, como o Google Arts and Culture, disponível em: https://artsandculture.google.com/, e o Guia dos Museus Brasileiros, disponível em https://antigo.museus.gov.br/guia-dos-museus-brasileiros/ (acessos em: 30 set. 2024). Oriente os estudantes durante a realização dessa atividade. Primeiro, eles deverão escolher o projeto que vão reproduzir; em seguida, devem planejar as tarefas e separar os materiais necessários; por fim, devem estabelecer uma data para realizar a atividade. Se julgar pertinente, peça-lhes que apresentem semanalmente a evolução do projeto.

Depois de os estudantes terminarem os desenhos, combine com eles um dia em sala de aula para a exposição das produções e para conversar sobre o processo de criação e de apreciação dos objetos elaborados.

Durante a discussão, pergunte se eles frequentam esses equipamentos culturais e quais equipamentos gostariam de conhecer. Permita que os estudantes apreciem livremente os trabalhos dos colegas, sempre de maneira positiva, construtiva e empática.

Não escreva no livro.

CAPÍTULO 4 CAPÍTULO 4 CAPÍTULO 4

SÓLIDOS GEOMÉTRICOS: CORPOS REDONDOS

NESTE CAPÍTULO

- Cilindro
- Cone
- Esfera
- Sólidos inscritos e sólidos circunscritos

Dando continuidade ao estudo de sólidos geométricos, vamos explorar os corpos redondos neste capítulo. Daremos ênfase também às propriedades da tangência, de modo a permitir que os estudantes compreendam o significado de um sólido estar inscrito em ou circunscrito a outro.

No capítulo anterior, estudamos as características e as propriedades dos poliedros. Agora, vamos estudar as figuras geométricas tridimensionais cuja superfície não é formada apenas por polígonos.

Essas figuras espaciais são delimitadas por alguma parte da superfície arredondada, ou seja, não plana, e são chamadas de **corpos redondos**.

Verifique a seguir exemplos de construções arquitetônicas que tiveram inspiração no formato dessas figuras geométricas.



Paparacy/Shutterstock.com/ID/BR

Sphere, em Las Vegas, nos Estados Unidos. É o maior telão esférico do mundo. Foto de 2023.

Arquitetura brutalista

Esse foi um movimento arquitetônico desenvolvido entre as décadas de 1950 e 1960. As obras identificadas ao estilo desse movimento caracterizam-se principalmente pela utilização do concreto armado aparente.



Bernardo Emanuelle/Shutterstock.com/ID/BR

Museu Oscar Niemeyer (MON) ou Museu do Olho, em Curitiba (PR), projetado em 1967 por Oscar Niemeyer (1907-2012). Foto de 2023.



Yes Drone/Shutterstock.com/ID/BR

A Catedral Metropolitana Basílica Menor Nossa Senhora da Glória, em Maringá (PR), é um ícone da arquitetura brutalista brasileira. Foto de 2023.

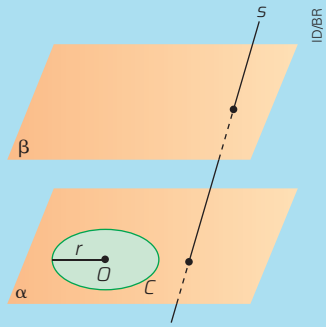
Não escreva no livro.

Neste capítulo, vamos estudar alguns corpos redondos que recebem nomes especiais: o **cilindro**, o **cone** e a **esfera**.

CILINDRO

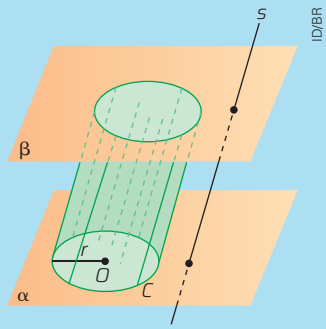
A definição de cilindro é bem parecida com a definição de prisma. Acompanhe.

Sejam α e β dois planos paralelos, C um círculo de centro O e de raio r, contido em α, e s uma reta secante a α.



ID/BR

A reunião de todos os segmentos de reta paralelos a s, com uma extremidade em C e a outra em β, é denominada **cilindro circular**.



ID/BR

Note que a intersecção do cilindro com o plano β é um círculo congruente a C.

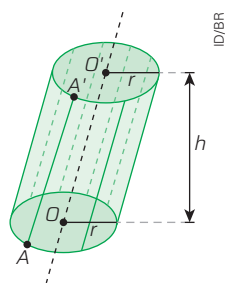
Elementos de um cilindro

Os dois círculos congruentes são as **bases** do cilindro.

A reta que passa pelos centros das bases é o **eixo** do cilindro.

A reunião dos segmentos de reta paralelos ao eixo, com uma extremidade na circunferência de cada base, é chamada de **superfície lateral** do cilindro.

A **altura** de um cilindro circular é a distância entre os planos que contêm as bases.



ID/BR

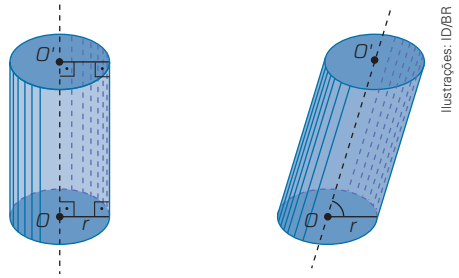
Na figura, temos:

- Bases: círculo de centro O e raio r e círculo de centro O' e raio r.
- Eixo: $\overleftrightarrow{OO'}$.
- Altura: h.
- $\overline{AA'}$: é uma **geratriz** do cilindro, pertence à superfície lateral do cilindro e é paralela ao eixo $\overleftrightarrow{OO'}$.

Não escreva no livro.

Classificação de um cilindro

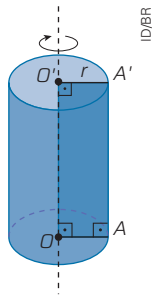
Um cilindro circular é **reto** se o eixo $\overleftrightarrow{OO'}$ é perpendicular aos planos que contêm as bases. Caso contrário, o cilindro é **oblíquo**.



Ilustrações: ID/BR

cilindro reto cilindro oblíquo

Um cilindro circular reto é também chamado de **cilindro de revolução**, pois pode ser considerado um sólido obtido pela rotação de um retângulo (de lados $\overline{OA}$ e $\overline{AA'}$) em torno do eixo $\overleftrightarrow{OO'}$, que é o eixo dessa rotação.

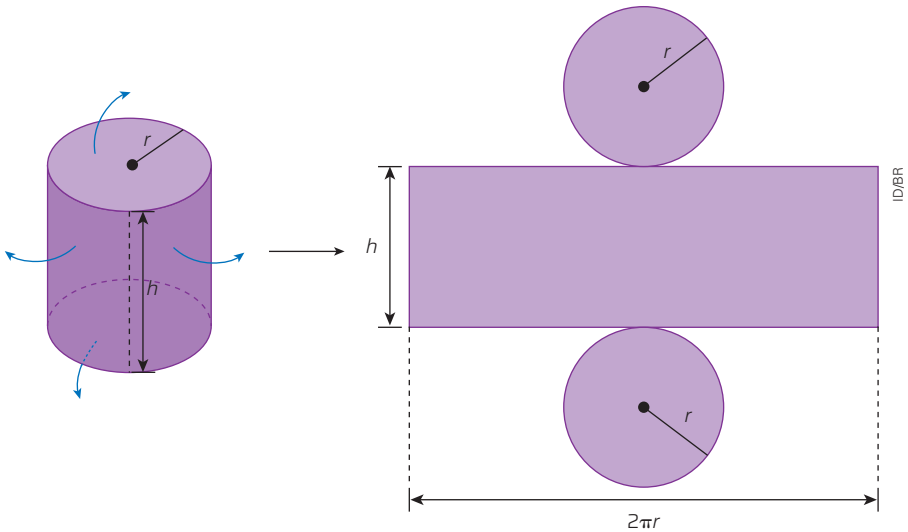


ID/BR

Nesse caso, todas as geratrizes do cilindro são congruentes a $\overline{AA'}$.

Planificação da superfície de um cilindro reto

Para obter a planificação da superfície de um cilindro, podemos imaginar que a superfície de um cilindro foi "recortada" ao redor das bases, sem desprendê-las totalmente da parte lateral, e que, depois, foi feito um "corte" em uma das geratrizes do cilindro.



ID/BR

Ao planificar a superfície do cilindro, os círculos tangenciam um dos lados do retângulo.

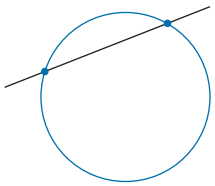
Não escreva no livro.

Se julgar conveniente, comente com os estudantes as posições relativas entre circunferências.

Posições relativas entre reta e circunferência

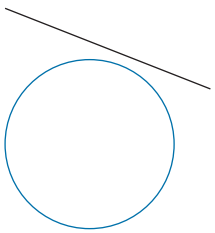
Uma reta e uma circunferência em um plano podem assumir diversas posições relativas entre si. Acompanhe as situações a seguir.

- Quando a reta e a circunferência têm dois pontos em comum, dizemos que a reta é **secante** à circunferência.



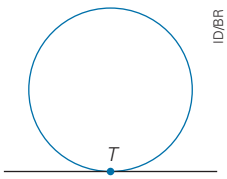
Reta secante à circunferência.

- Se a reta não intersecta a circunferência, elas são **disjuntas** ou sem intersecção.



Reta e circunferência disjuntas.

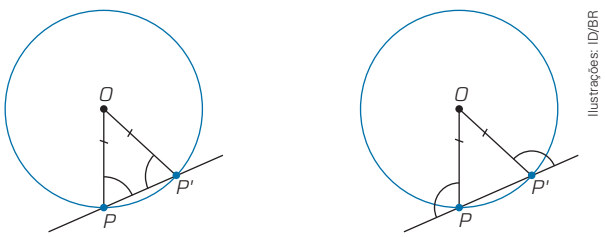
- Quando a reta e a circunferência têm exatamente um ponto em comum, dizemos que elas se tangenciam ou que a reta é **tangente** à circunferência. O ponto comum à reta e à circunferência é chamado de ponto de tangência.



Reta tangente à circunferência.

Quando uma reta e uma circunferência são tangentes, existe uma relação entre o ângulo formado pela reta e o raio da circunferência que tem o ponto de tangência como um dos extremos: o raio é perpendicular à reta tangente no ponto de tangência.

Quando o ângulo entre o raio e a reta é agudo ou obtuso, existe outro ponto da circunferência comum à reta, de maneira que é possível a construção de um triângulo isósceles de lados congruentes ao raio.

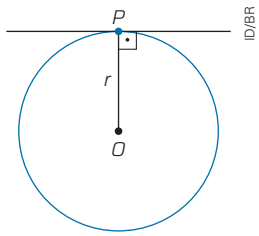


Ilustrações: ID/BR

Assim, os pontos P e P' pertencem à reta e à circunferência. Portanto, a reta e a circunferência são secantes.

Se o ângulo entre o raio e a reta é reto, a reta e a circunferência só podem ter o ponto P em comum.

Vamos supor que exista outro ponto P', comum à reta e à circunferência. Teríamos um triângulo isósceles POP' com um ângulo da base reto. Mas sabemos que um triângulo com dois ângulos retos é impossível.



Portanto, uma reta e uma circunferência são tangentes se, e somente se, o raio é perpendicular à reta tangente no ponto de tangência.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R1 Utilizando régua e compasso, construa a planificação da superfície de um cilindro reto cuja altura mede 2 cm e o comprimento da base, 5 cm. Considere $\pi \simeq 3,14$.



ATENÇÃO!

Tenha cuidado com a ponta-seca ao manusear o compasso.

Resolução

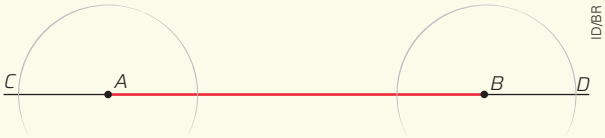
Primeiro, vamos construir o retângulo com 2 cm de largura e 5 cm de comprimento que vai gerar a superfície lateral do cilindro.

Com a régua, vamos traçar um segmento de 5 cm de comprimento.



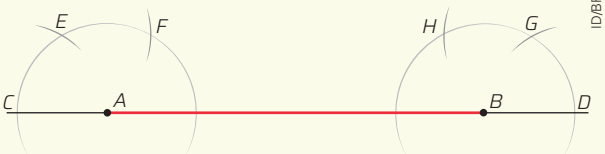
ID/BR

Em seguida, com a ponta-seca do compasso em *A*, vamos marcar um arco como mostra a figura a seguir, obtendo o ponto *C*. Repetindo o procedimento para a extremidade *B*, obtemos o ponto *D*.



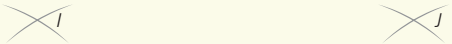
ID/BR

Usando o compasso com a mesma abertura anterior, posicionamos a ponta-seca em *C* e marcamos outro arco, obtendo o ponto *E*. Depois, com a ponta-seca em *E*, marcamos mais um arco e o ponto *F*. Repetindo o procedimento a partir do ponto *D*, obtemos os pontos *G* e *H*.

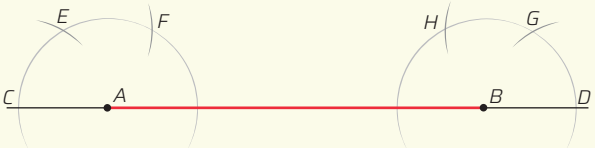


ID/BR

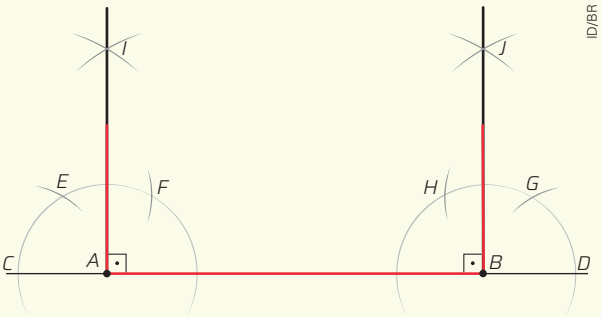
Usando o compasso com abertura maior que a anterior, posicionamos a ponta-seca em *E* e depois em *F* e determinamos o ponto *I*. Procedemos da mesma maneira com a ponta-seca do compasso em *G* e *H* para obter o ponto *J*.



ID/BR

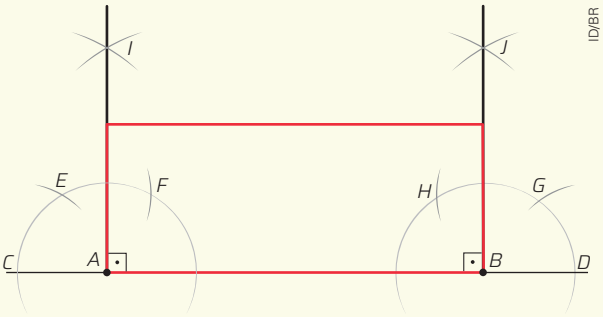


Representamos $\overrightarrow{AI}$ e $\overrightarrow{BJ}$, como indicado na figura a seguir e, depois, marcamos 2 cm em cada uma das semirretas a partir de *A* e de *B*.



ID/BR

Por fim, fechamos o retângulo.



ID/BR

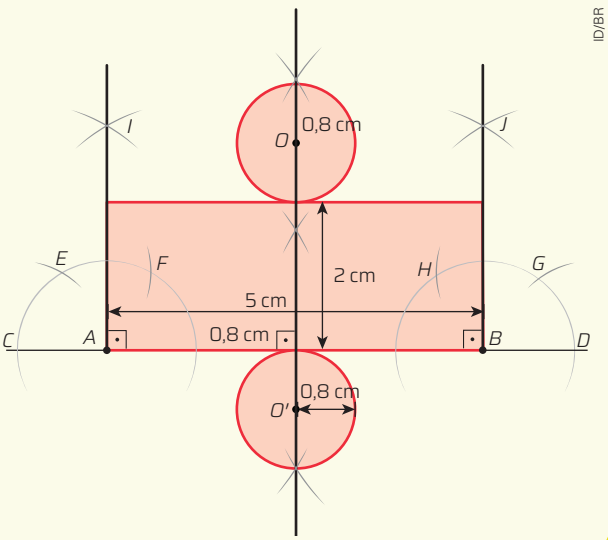
No passo seguinte, temos de construir as bases do cilindro. Para isso, devemos calcular a medida *r* do raio.

Sabemos que o comprimento da circunferência da base mede 5 cm e que o comprimento de uma circunferência pode ser calculado por $2\pi r$. Usando $\pi \simeq 3,14$, temos:

$$2\pi r = 5 \Rightarrow r = \frac{5}{2\pi} \Rightarrow r \simeq \frac{5}{2 \cdot 3,14} \Rightarrow r = 0,8$$

Portanto, o raio da base do cilindro mede aproximadamente 0,8 cm.

Agora, novamente com o auxílio de um compasso e de uma régua, representamos uma reta perpendicular a $\overline{AB}$ e obtemos os centros *O* e *O'* para traçar as circunferências tangentes aos dois lados do retângulo que medem 5 cm. E, finalmente, pintamos a região interna dessas figuras.



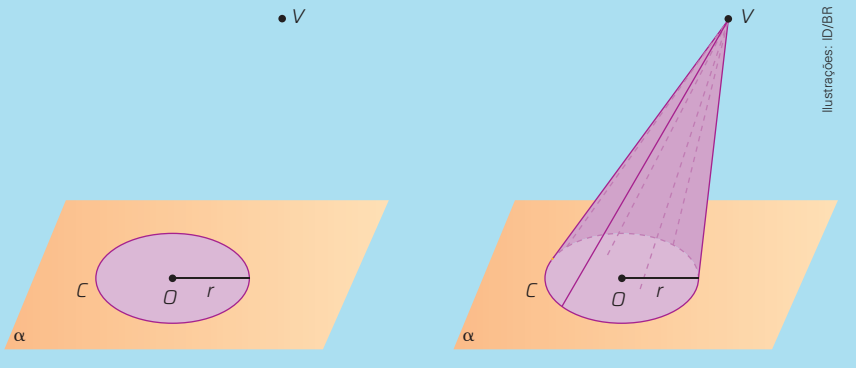
ID/BR

Não escreva no livro.

CONE

Assim como a definição de cilindro é parecida com a de prisma, o modo como podemos definir cone é parecido com aquele utilizado para definir pirâmide.

Sejam um círculo C, de centro O e raio r, contido em um plano α, e um ponto V não pertencente a α. A reunião de todos os segmentos de reta com uma extremidade em V e a outra em C é denominada **cone circular**.



Ilustrações: ID/BR

Elementos de um cone

O círculo C é a **base** do cone e o ponto V é o **vértice**.

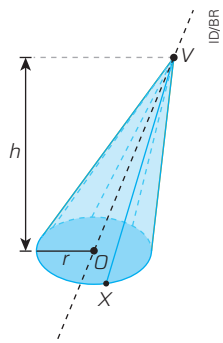
A reta que passa pelo vértice e pelo centro da base é o **eixo** do cone circular.

A reunião de todos os segmentos de reta com uma extremidade na circunferência do círculo C e a outra em V forma a **superfície lateral** do cone.

A **altura** de um cone circular é a distância entre o vértice e o plano que contém a base.

Na figura, temos:

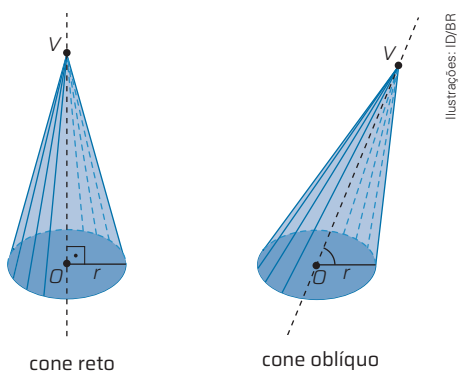
- Base: círculo de centro O e raio r.
- Eixo: $\overleftrightarrow{OV}$.
- Altura: h.
- $\overline{VX}$: uma **geratriz** do cone e pertence à superfície lateral do cone.



ID/BR

Classificação de um cone

Um cone circular é **reto** se o eixo $\overleftrightarrow{OV}$ é perpendicular ao plano que contém a base. Caso contrário, o cone é **oblíquo**.



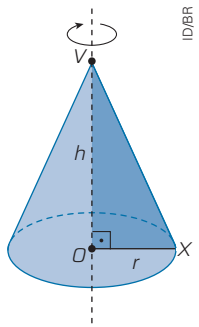
cone reto

cone oblíquo

Ilustrações: ID/BR

Não escreva no livro.

Um cone circular reto é também denominado **cone de revolução**, pois pode ser considerado um sólido gerado pela rotação de um triângulo retângulo (de catetos r e h) em torno do eixo $\overleftrightarrow{OV}$.



ID/BR

Nesse caso, todas as geratrizes do cone são congruentes a $\overline{VX}$.

2. a) Tanto a pirâmide quanto o cone são formados pela reunião de todos os segmentos de reta com uma extremidade em um plano e a outra em um mesmo ponto fora desse plano.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Nas atividades a seguir, quando necessário, use $\pi \simeq 3{,}14$.

a) Tanto o prisma quanto o cilindro são formados por retas paralelas a uma reta que intersecta dois planos paralelos e distintos.

1 **Compare as definições de prisma e de cilindro.**

a) O que elas têm de parecido?

b) O que foi alterado na definição de prisma para obter a definição de cilindro?

Trocar o termo "polígono" por "círculo".

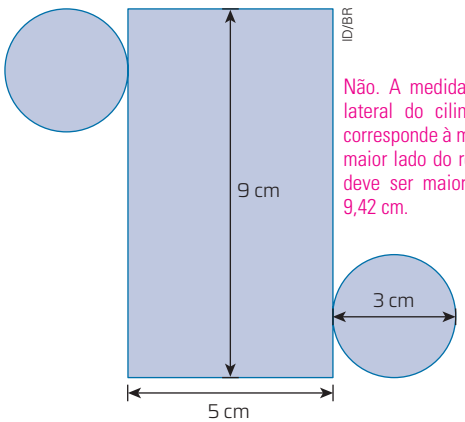
2 **Compare as definições de pirâmide e de cone.**

a) O que elas têm de parecido?

b) O que foi alterado na definição de pirâmide para obter a definição de cone?

Trocar o termo "polígono" por "círculo".

3 **As medidas indicadas no esboço da planificação a seguir correspondem às da planificação da superfície de um cilindro reto com 3 cm de diâmetro da base e 5 cm de altura? Justifique sua resposta.**



ID/BR

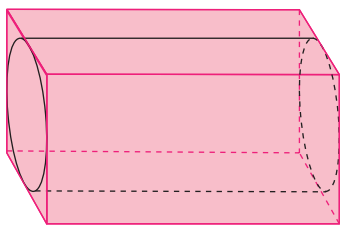
Não. A medida da face lateral do cilindro, que corresponde à medida do maior lado do retângulo, deve ser maior, igual a 9,42 cm.

4 **Utilizando régua e compasso, construa a planificação da superfície de um cilindro reto com 1,5 cm de raio da base e 4 cm de altura.**

Resposta pessoal.
Consulte a resposta no Manual do Professor.

ATENÇÃO!
Tenha cuidado com a ponta-seca ao manusear o compasso.

5 **Deseja-se construir uma caixa em forma de paralelepípedo que sirva de embalagem para um objeto com o formato de um cilindro reto de 2 cm de raio da base e 12 cm de altura. A figura a seguir ilustra essa situação, mas as medidas estão fora de proporção entre si.** Resposta pessoal.

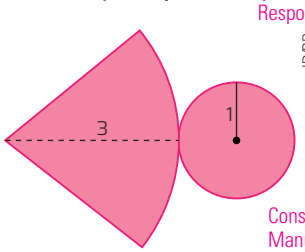

ID/BR

Com o auxílio de uma régua e de um compasso, construa planificações das superfícies do cilindro e da caixa, visando economizar o máximo de material para produzir a caixa. (Se precisar, use uma calculadora.)

Consulte a resposta no Manual do Professor.

6 **Crie um problema parecido com o proposto na atividade 5 para o esboço da planificação a seguir.**

Resposta pessoal.



ID/BR

Consulte a resposta no Manual do Professor.

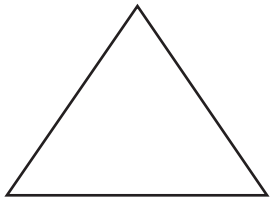
7 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(Enem) Um sinalizador de trânsito tem o formato de um cone circular reto. O sinalizador precisa ser revestido externamente com adesivo fluorescente, desde sua base (base do cone) até a metade de

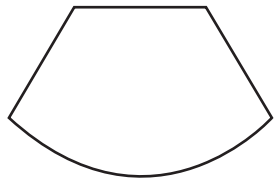
Não escreva no livro.

sua altura, para sinalização noturna. O responsável pela colocação do adesivo precisa fazer o corte do material de maneira que a forma do adesivo corresponda exatamente à parte da superfície lateral a ser revestida. Qual deverá ser a forma do adesivo? Alternativa **e**.

a)



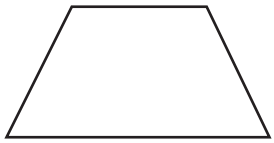
c)



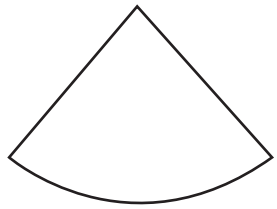
e)



b)



d)



Ilustrações: Enem. Fac-símile: ID/BR

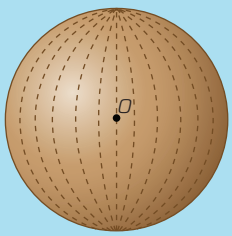
ESFERA

A **esfera** é considerada por muitos como um sólido perfeito por não ter arestas e por apresentar sempre o mesmo formato, qualquer que seja o ângulo de observação.

De modo geral, diferenciamos esfera de superfície esférica.

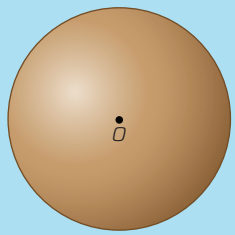
Sejam um ponto O e um segmento r, não nulo, temos:

- **superfície esférica** de centro O e raio r é o conjunto dos pontos do espaço cujas distâncias a O são iguais a r.
- **esfera** de centro O e raio r é o conjunto dos pontos do espaço cujas distâncias a O são iguais ou menores que r.



ID/BR

superfície esférica

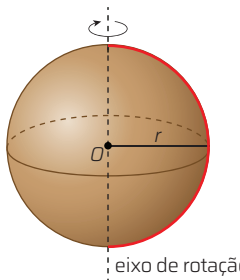


ID/BR

esfera

Podemos também considerar:

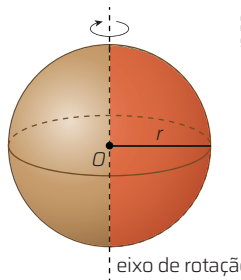
- uma superfície esférica de centro O e raio r como a superfície gerada pela rotação de uma semicircunferência de raio r em torno do eixo que contém seu diâmetro;



ID/BR

eixo de rotação

- uma esfera de centro O e raio r como o sólido gerado pela rotação de um semicírculo de raio r em torno do eixo que contém seu diâmetro.



ID/BR

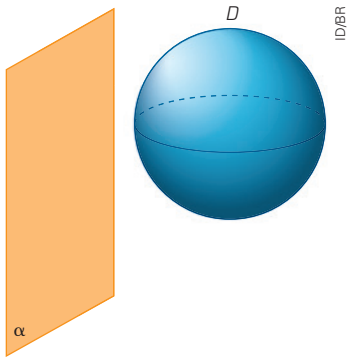
eixo de rotação

Não escreva no livro.

Posições relativas entre plano e esfera

Considerando uma esfera D e um plano α, temos três possibilidades de posições relativas entre eles.

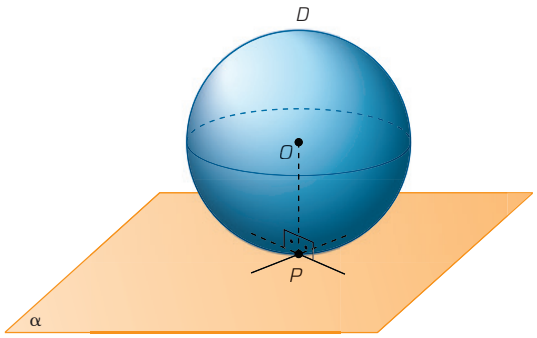
- Se D e α não têm ponto comum, então D e α são **disjuntos**, ou seja, não se intersectam.



ID/BR

$D \cap \alpha = \varnothing$

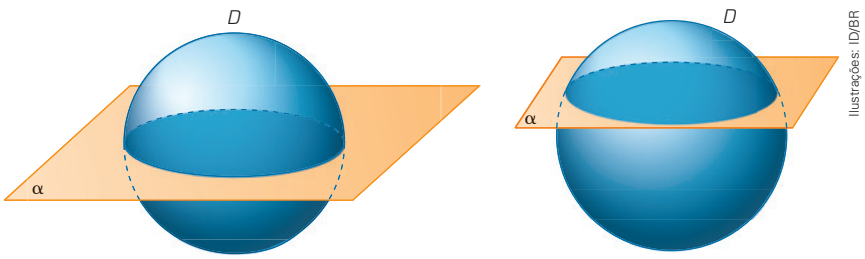
- Se D e α têm um único ponto comum, então D e α são **tangentes**. Assim, o raio $\overline{OP}$ é perpendicular a todas as retas contidas em α que passam pelo ponto P.



ID/BR

$\alpha \cap D = \{P\}$
$\overline{OP} \perp \alpha$

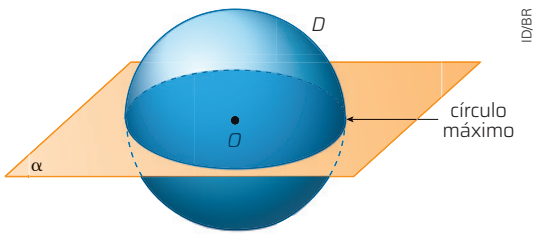
- Se D e α têm mais de um ponto comum, então D e α são **secantes**.



Ilustrações: ID/BR

A intersecção entre uma esfera D e um plano α, secantes entre si, é um círculo. O raio desse círculo aumenta à medida que a distância de α ao centro de D vai diminuindo.

Quando α passa pelo centro O da esfera D, temos o **círculo máximo** de D.

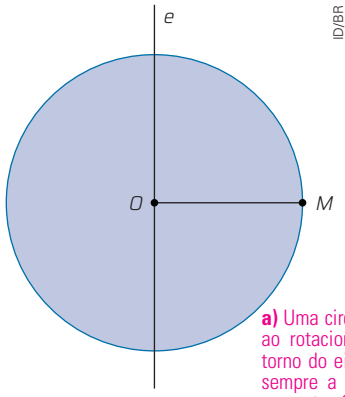


ID/BR

Não escreva no livro.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

8 O desenho a seguir representa um círculo de raio $\overline{OM}$ e um eixo e que passa por um diâmetro desse círculo. Analise e faça o que se pede.



ID/BR

a) Uma circunferência, pois, ao rotacionar o círculo em torno do eixo e, M manterá sempre a mesma distância ao centro O do círculo.

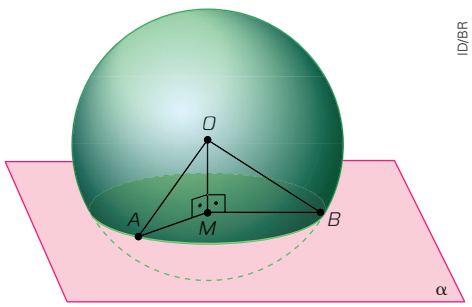
a) Rotacionando o círculo em torno do eixo e, qual é o trajeto descrito pelo ponto M? Por quê?

b) Considerando a rotação mencionada no item **a**, que figura descreve um segmento $\overline{PQ}$, perpendicular ao diâmetro do círculo contido no eixo e, com P no diâmetro e Q na circunferência?
Um círculo de raio PQ, com $PQ \geqslant OM$.

9 Procure no dicionário o significado geométrico de "hemisfério" e registre-o no caderno. Em seguida, desenhe um hemisfério de centro O.

10 Desenhe, sobre uma esfera, dois círculos máximos situados em planos perpendiculares. Desenho pessoal.
Consulte um exemplo de resposta no Manual do Professor.

11 A figura a seguir representa uma esfera de centro O, intersectada por um plano α em mais de um ponto, formando um círculo.



ID/BR

Note que os pontos A e B correspondem a dois pontos quaisquer na intersecção do plano com a esfera e que $\overline{OM}$ é perpendicular a α.

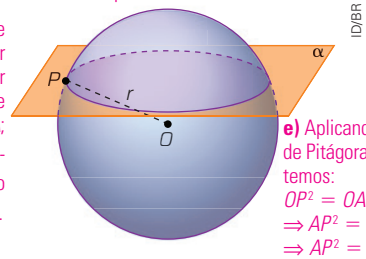
Com base nessas informações, responda às questões a seguir.

a) Por que $OA = OB$? Porque $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ são raios da esfera.

b) Por que o triângulo OMA é congruente ao triângulo OMB? $\triangle OMA$ e $\triangle OMB$ são retângulos, com hipotenusa e um cateto congruentes.

c) Por que $MA = MB$?

12 Considere uma superfície esférica de centro O e raio r, cortada por um plano α, como mostra a figura.
Consulte as respostas dos itens **a** e **b** no Manual do Professor.



ID/BR

d) A é ponto de reta que passa por O e é perpendicular a qualquer reta de α que passa por A; logo, $\overleftrightarrow{OA}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{AP}$, e o ângulo $O\hat{A}P$ é reto.

e) Aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle OAP$, temos:
$OP^2 = OA^2 + AP^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow AP^2 = OP^2 - OA^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow AP^2 = r - OA^2$.

a) Reproduza a figura no caderno e trace uma reta perpendicular ao plano α que passe por O. Chame de A o ponto no qual a perpendicular intersecta o plano.

b) Trace o triângulo OAP, em que P é um ponto comum ao plano e à superfície esférica.

c) Explique por que $OP = r$. $OP = r$ porque O é o centro da esfera de raio r e P é um ponto de esfera.

d) Explique por que o triângulo OAP é retângulo em A.

e) Explique por que $AP^2 = r^2 - OA^2$.

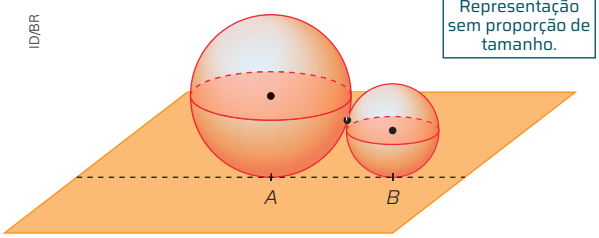
Muitos dos problemas de Geometria espacial que envolvem o cálculo de medidas no espaço se apoiam em medidas de figuras planas, sendo comum, nesses casos, o uso do teorema de Pitágoras, das razões trigonométricas ou da semelhança de triângulos.

Na atividade a seguir, a chave da resolução é encontrar uma figura plana que se encaixe nos dados do problema e que possibilite calcular a distância entre as esferas. Seu desafio é "ler" o desenho e determinar essa figura para, depois, resolver o problema.

13 No jogo de bocha, trazido ao Brasil pelos imigrantes italianos, o objetivo é lançar uma bola de 11,5 cm de diâmetro o mais próximo possível de uma bola menor, de 4 cm de diâmetro, chamada de bolim.


Pessoas jogando bocha em um parque. Estados Unidos. Foto de 2024.
LPETTET/iStock/Getty Images

Analise o esquema a seguir, que representa o momento em que a bola está encostada no bolim. Qual é a distância aproximada entre os pontos A e B indicados na figura? 6,8 cm



ID/BR
Representação sem proporção de tamanho.

11. c) Da congruência dos triângulos OMA e OMB, segue que $MA = MB$ e, consequentemente, são raios do círculo contido em α.

9. *Segundo o Dicionário eletrônico Houaiss da língua portuguesa 3.0*, **hemisfério** é "cada uma das metades de uma esfera determinadas por um plano que passa por seu centro".

Não escreva no livro.

SÓLIDOS INSCRITOS OU CIRCUNSCRITOS

Alguns equipamentos e estruturas lembram sólidos "encaixados" uns nos outros. Acompanhe dois exemplos a seguir.



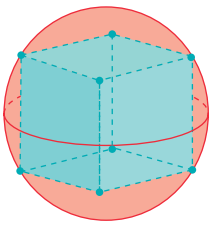
Silo formado por partes que lembram um cilindro e um cone dentro de uma estrutura metálica que lembra um paralelepípedo.



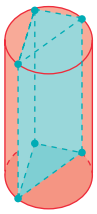
Reservatório de forma cilíndrica dentro de uma estrutura metálica que lembra um paralelepípedo.

Ilustrações: Cris Alencar/ID/BR

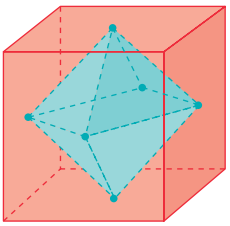
Dizemos que um poliedro está **inscrito** em um sólido geométrico quando todos os seus vértices pertencem à superfície do sólido. Acompanhe alguns exemplos.



Cubo inscrito em esfera.

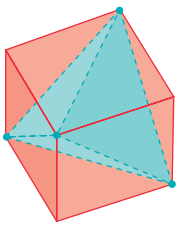


Prisma inscrito em cilindro.

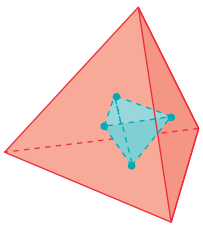


Octaedro inscrito em cubo.

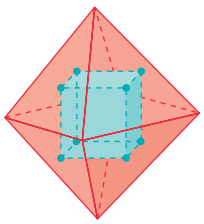
Ilustrações: ID/BR



Pirâmide inscrita em cubo.

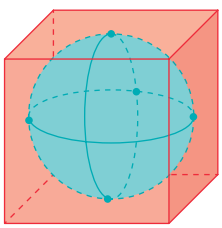


Pirâmide inscrita em pirâmide.

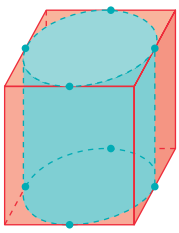


Cubo inscrito em octaedro.

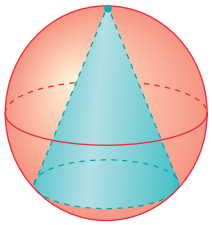
Agora, analise alguns corpos redondos inscritos em outros sólidos.



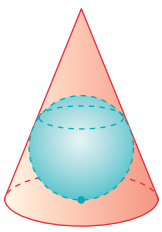
Esfera inscrita em cubo.
Note que as faces do cubo tangenciam a esfera.



Cilindro inscrito em paralelepípedo.



Cone inscrito em esfera.

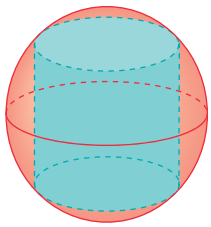


Esfera inscrita em cone.

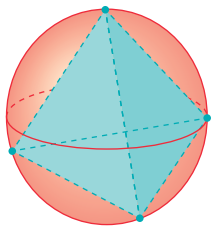
Não escreva no livro.

Consulte, na *Revista do Professor de Matemática*, n. 3, p. 5-11, 2º semestre de 1983, o texto "Poliedros, abelhas, arquitetura e... futebol", de José Jakubovic e Luiz Márcio Imenes, disponível no endereço: https://rpm.org.br/cdrpm/3/3.htm (acesso em: 4 out. 2024).

Se um sólido S_1 está inscrito em um sólido S_2, dizemos que S_2 circunscreve S_1 ou que S_2 está circunscrito a S_1. Acompanhe dois exemplos.



Dizemos que a esfera (S_2) circunscreve o cilindro (S_1) ou, ainda, que a esfera (S_2) está circunscrita ao cilindro (S_1).



Ilustrações: ID/BR

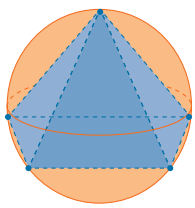
Dizemos que a esfera (S_2) circunscreve o tetraedro (S_1) ou, ainda, que a esfera (S_2) está circunscrita ao tetraedro (S_1).

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

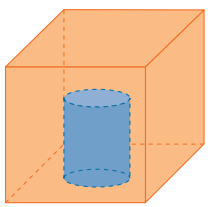
14. As respostas são pessoais, mas espera-se que os estudantes identifiquem que os sólidos dos desenhos **a** e **c** são inscritos em função da relação de vértices na esfera e de tangência de faces.

14 **Analise novamente os exemplos de sólidos inscritos que foram apresentados anteriormente. Depois, analise cada caso a seguir, verificando em quais os sólidos estão, ou não, inscritos. Justifique suas escolhas e registre no caderno sua justificativa. Por fim, com a orientação do professor, converse com os colegas para buscar um consenso sobre o que significa um sólido estar, ou não, inscrito em outro.**

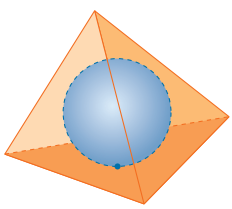
a)



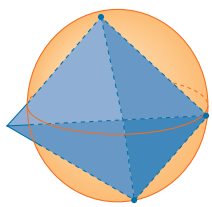
b)



c)

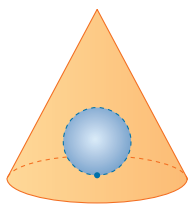


d)



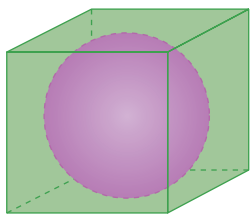
Ilustrações: ID/BR

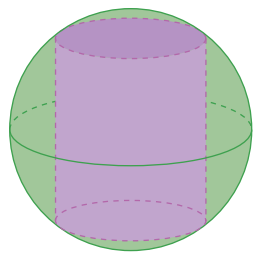
e)



A atividade **15** é mais complexa e pode demandar mais tempo para ser realizada. Ela pode ser dividida em algumas etapas, e cada etapa pode ser realizada em uma aula. A produção dos estudantes constitui um instrumento de avaliação das aprendizagens sobre os sólidos, assim como da capacidade de escrita de textos de problemas. A atividade contribui também para o desenvolvimento da competência geral **9**, ao permitir que os estudantes exercitem a empatia e aprendam a respeitar diferentes opiniões.

15 **Em duplas, analisem os desenhos a seguir e elaborem questões que envolvam esferas, cilindros e cubos inscritos ou circunscritos. Em seguida, troquem as questões elaboradas por vocês com outra dupla, para que uma responda às questões elaboradas pela outra.** Resposta pessoal.
Consulte um exemplo de resposta no Manual do Professor.



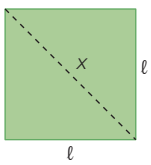


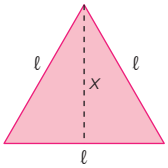
Ilustrações: ID/BR

CÁLCULO RÁPIDO

Explicite aos estudantes que esta seção e a próxima trazem atividades que envolvem conceitos de relações métricas em triângulos e de grandezas e unidades de medida. Esses conceitos devem ser relembrados e exercitados porque serão necessários para as aprendizagens do próximo capítulo, em que serão estudados áreas e volumes de sólidos geométricos.

1 Use o teorema de Pitágoras e calcule o valor de x em cada caso.





Ilustrações: ID/BR

Agora, use os resultados obtidos e calcule mentalmente:

a) a medida da diagonal de um quadrado com 12 cm de lado; $12\sqrt{2}$ cm

b) a medida da altura de um triângulo equilátero com 10 cm de lado; $5\sqrt{3}$ cm

c) a medida da diagonal de um quadrado cujo perímetro é 32 cm; $8\sqrt{2}$ cm

d) a medida da diagonal de um quadrado cuja área é 100 cm²; $10\sqrt{2}$ cm

e) a medida da altura de um triângulo equilátero cujo perímetro é 15 cm; $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm

f) o perímetro e a área de um quadrado cuja diagonal mede $9\sqrt{2}$ m; 36 m; 81 m².

g) o perímetro e a área de um triângulo equilátero cuja altura mede $3\sqrt{3}$ cm. 18 cm; $9\sqrt{3}$ cm².

2 Qual é a melhor unidade para realizar cada medição indicada nos itens a seguir?

a) A área: Respectivamente: cm, cm, m, m, m, km.

- da unha de um polegar;
- da capa de um livro;
- de um campo de futebol;
- de um tapete;
- de uma mesa;
- de uma cidade.

b) A massa: Respectivamente: mg, arroba (ou kg), kg, g.

- dos componentes de um medicamento;
- de um boi;
- de uma criança;
- de um prato de comida.

3 Indique no caderno algo que você conheça que tenha massa: Respostas pessoais.

Exemplos de resposta:

- menor que 1 g; uma pitada de sal.
- entre 1 g e 10 g; uma colher de chá de fermento em pó.
- maior que 100 g e menor que 500 g; *smartphone*.
- maior que 1 000 g. 2 litros de água.

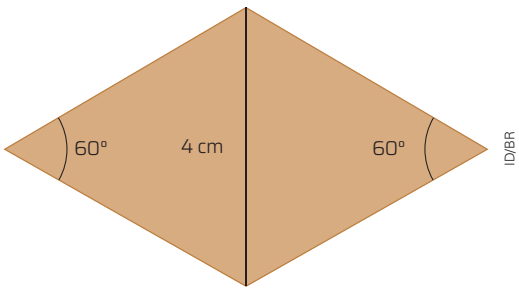
PARA RECORDAR

1 Em um mapa feito com escala de 17 km por milímetro, a distância em linha reta entre duas cidades é 0,185 m. Pode-se afirmar que a distância real, em linha reta, entre essas cidades é 314,5 km?

A afirmação está errada, pois houve erro na colocação da vírgula.

2 Um mapa está desenhado em uma escala em que 2 cm correspondem a 5 km. Uma região assinalada nesse mapa tem o formato de um quadrado de 3 cm de lado. Qual é a área real dessa região, em quilômetro quadrado? 56,25 km²

3 Calcule a área do terreno no formato de um losango que, representado na escala 1:100 000, apresenta as medidas a seguir. $8\sqrt{3}$ km²



ID/BR

4 Leia a afirmação do quadro a seguir.

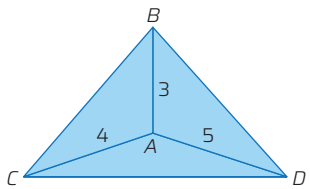
> **Em um triângulo, a medida de qualquer lado deve ser menor que a soma das medidas dos outros dois lados.**

Use essa informação para responder, no caderno, às questões a seguir.

a) É possível construir um triângulo com quaisquer três números inteiros positivos e consecutivos? Não é possível construir um triângulo.

b) Sabendo que dois lados de um triângulo medem, respectivamente, 3 cm e 7 cm, entre quais valores inteiros pode variar o outro lado? 4 cm e 10 cm.

c) As distâncias, em quilômetro, do ponto A até os pontos B, C e D são 3, 4 e 5, respectivamente.



ID/BR

Fábio partiu de bicicleta de B e fez uma volta completa: passou por C e por D e depois voltou a B pelos lados do $\triangle BCD$. Como a bicicleta não tem hodômetro, ele estima que tenha andado mais de 25 km. Isso é possível? Por quê?

Não, ele poderá andar no máximo 24 km.

Não escreva no livro.

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO

Os três problemas a seguir são desafios reais de raciocínio lógico. Leia cada um deles com muita atenção, faça anotações no caderno e, ao final, volte ao enunciado para se certificar de que sua resposta é a correta.

1 **Registre no caderno a alternativa correta.**

(UEPB) Considere as três seguintes afirmações:

I. Todos os amigos de João são amigos de José.
II. José não é amigo de qualquer amigo de Paulo.
III. Mário só é amigo de todos os amigos de Roberto.

Se Roberto é amigo de Paulo, então: Alternativa **d**.

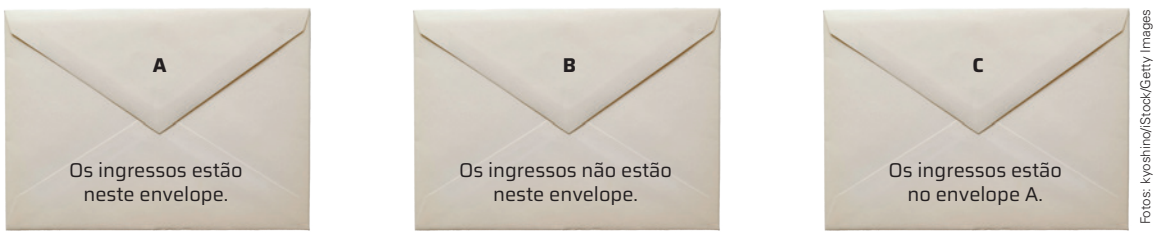
a) Mário é amigo de Roberto.
b) Mário é amigo de José.
c) João é amigo de Roberto.
d) Mário não é amigo de João.
e) João é amigo de Mário.

2 **Cinco amigos vão a uma festa de aniversário, mas um deles não foi convidado. A aniversariante pergunta: Quem é o penetra?** Fernando.

- Gabriel diz: É o João.
- Rodrigo diz: Não sou eu.
- Tiago diz: É o Fernando.
- João responde: Eu não sou.

Se apenas um dos amigos mentiu, resolva o enigma: Quem era o penetra?

3 **Carolina adora desafios! A mãe dela, Érica, comprou dois ingressos para o cinema e colocou-os em um dos envelopes a seguir.**

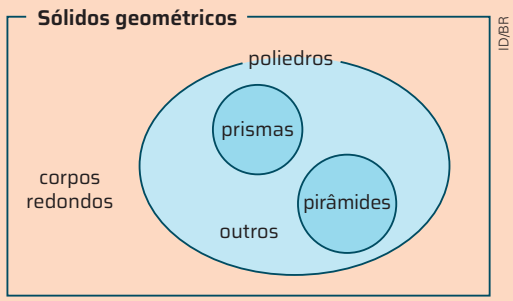


Fotos: kyoshino/iStock/Getty Images

Érica disse à filha que apenas uma afirmação era verdadeira e que Carolina não poderia tocar nos envelopes. Após alguns minutos, Carolina encontrou os ingressos. Agora é com você! Descubra em qual envelope Érica colocou os ingressos. Envelope **C**.

PALAVRAS-CHAVE

Desenhe no caderno um esquema como o que começamos a seguir. Complete-o com os desenhos e as definições, para que você tenha uma síntese do que aprendeu sobre sólidos geométricos.



ID/BR

Em seguida, com ilustrações e exemplos:

a) escreva sobre as características da esfera, do cilindro e do cone;

b) faça uma lista com as principais diferenças entre poliedros e corpos redondos.

Antes de propor essa síntese do estudo deste capítulo, retome com os estudantes a síntese feita por eles ao final do capítulo sobre poliedros. Em seguida, incentive-os a comparar os dois registros.

MATEMÁTICA E RECICLAGEM

O tema desta seção, além da proposta de um trabalho de pesquisa, de desenvolvimento de um objeto usando recicláveis e da elaboração de um relatório, favorece o desenvolvimento das competências gerais **2**, **4**, **7** e **9** propostas pela BNCC, incentivando os estudantes a agir de forma ética e responsável e utilizando conhecimentos de diversas áreas para criar soluções criativas. A habilidade **EM13MAT309** também é trabalhada, na medida em que os estudantes realizam o cálculo de áreas e de volumes de corpos redondos em situações reais. Além disso, esta seção possibilita integração com todas as áreas de conhecimento e com os temas contemporâneos transversais Meio Ambiente, Trabalho, Saúde, Cidadania e Civismo e Ciência e Tecnologia. Ao conectar essas competências e essa habilidade em um trabalho interdisciplinar, os estudantes podem compreender os desafios relacionados a soluções em sustentabilidade e conservação ambiental.

Brasil como exemplo de reciclagem

Sugerimos um trabalho integrado com os professores de Arte, História, Geografia e Biologia a fim de ampliar os conhecimentos dos estudantes acerca da reciclagem de latas de alumínio no Brasil e explorar as competências específicas **3** e **6** de Linguagens e suas Tecnologias, as competências específicas **3** e **6** da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, a competência específica **3** da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

Usadas para refrigerante, suco, chá e até água mineral, muitas latas de alumínio são consumidas e descartadas diariamente no Brasil. Você já parou para refletir sobre o destino desses resíduos ou de que maneira eles podem ser reaproveitados? Leia o texto a seguir e descubra um pouco mais sobre a reciclagem desses materiais.

Índice de reciclagem de latas de alumínio para bebidas atinge mais de 95% nos últimos 15 anos

O Brasil reciclou nos últimos 15 anos mais de 95% das latas de alumínio para bebidas. Em 2022, a média foi equivalente a um volume de 390,2 mil toneladas de alumínio.

O índice é resultado de uma apuração feita pela Associação Brasileira do Alumínio (ABAL) do volume de latas coletadas e recicladas e do volume de latas vendidas levantado pela Associação Brasileira dos Fabricantes de Latas de Alumínio (Abralatas).

"Este resultado consolida a posição do alumínio como uma solução mais vantajosa em matéria de sustentabilidade e economia circular. O protagonismo da indústria brasileira do alumínio na cadeia de reciclagem de latas para bebidas é resultado direto da aposta feita pelo setor nos últimos anos, na realização de investimentos para ampliação do número de centros de coletas, e na modernização das fábricas de reciclagem. Também contribu[íram] para esse resultado [...] o valor social e a importância estratégica da cadeia [de] reciclagem de alumínio [...] e o fato de contarmos com um sistema de logística reversa que privilegia a cooperação entre governo, indústria, a sociedade e as cooperativas de catadores", afirma Janaina Donas, presidente-executiva da ABAL. Considerando que, em 2022, o volume de vendas de latas apresentou queda maior do que o volume coletado, este resultado indica um provável aumento do consumo de estoque na cadeia.

[...]

Benefícios da reciclagem de alumínio e desafios para maior competitividade.

O [fato de que o] alumínio é um metal que pode ser infinitamente [reciclado] e o ciclo de vida útil da lata, de 60 dias, são fatores que também contribuem para o sucesso do *case* de reciclagem das latinhas de alumínio. Além do valor econômico e social gerado pela reciclagem[,] que injeta aproximadamente R$ 6 bilhões anualmente na economia, contribuindo [para] a geração de trabalho e renda para mais de 800 mil catadores, há um expressivo ganho ambiental em termos de gestão de recursos e de redução de emissões. O processo de reciclagem do alumínio reduz em 95% as emissões de gás de efeito estufa (GEE) e o consumo [de] energia elétrica em relação ao alumínio primário.

[...]

ÍNDICE de reciclagem de latas de alumínio para bebidas atinge marca recorde de 100%. Associação Brasileira de Alumínio (Abal), São Paulo, 2 jun. 2023. Disponível em: https://abal.org.br/noticia/indice-de-reciclagem-de-latas-de-aluminio-para-bebidas-atinge-marca-recorde-de-100/. Acesso em: 4 out. 2024.



ozgurdonmaz/iStock/Getty Images

Latas de alumínio compactadas. Foto de 2022.

Não escreva no livro.

Segundo a Associação Brasileira dos Fabricantes de Latas de Alumínio (Abralatas), a lata de alumínio para bebidas é composta de oito partes: flange, pescoço, corpo, rótulo, base, tampa, anel e rebite.



Roman Samokhin/Shutterstock.com/ID/BR

A produção da lata é feita em duas etapas: uma para a tampa e outra para o corpo e fundo da lata.

Atualmente, existem latas com diferentes capacidades, como 250 mL, 269 mL, 310 mL, 350 mL, 473 mL e 710 mL. O formato cilíndrico, a variedade de tamanhos e muitas outras vantagens fazem da lata de alumínio uma das opções de envasamento mais utilizadas pela indústria no Brasil e no mundo.

PARA EXPLORAR

Site

Associação Brasileira do Alumínio (Abal). Mudanças climáticas. Abal, São Paulo, 2023. Disponível em: https://abal.org.br/sustentabilidade/mudancas-climaticas/. Acesso em: 8 out. 2024.

Nesse *site*, há informações sobre a atuação da Associação Brasileira do Alumínio (Abal) para reduzir as emissões de dióxido de carbono, um dos gases responsáveis pelo aumento do efeito estufa e pelas mudanças climáticas, no processo de produção do alumínio.

Produção e ciclo de reciclagem do alumínio

O objeto digital apresenta conhecimentos sobre a produção e o ciclo de reciclagem do alumínio, mostrando as etapas de extração, produção e reaproveitamento. Além disso, há informações sobre a eficiência energética da reciclagem.

Conectando ideias

1 **Uma fábrica que produz o corpo das latas recebe bobinas com uma chapa de alumínio cujas dimensões são: 0,2 mm de espessura, 1,7 m de largura e aproximadamente 1 km de comprimento. Sabendo que o cilindro do corpo de uma lata de alumínio de 350 mL tem 6,5 cm de diâmetro, que a chapa é cortada com 13 cm de altura e que o alumínio tem 100% de aproveitamento, estime quantas latas podem ser produzidas com uma dessas bobinas. Depois, converse com os colegas e o professor sobre as vantagens das latas de alumínio em relação a outros materiais e por que elas são produzidas no formato cilíndrico, e não em outros formatos.** Resposta pessoal.

2 **O Brasil é o líder mundial de reciclagem de latas de alumínio, e, nos últimos 15 anos, reciclou mais de 95% das latas de alumínio consumidas no país! Há diversos modos de contribuir para a reciclagem de alumínio no Brasil.**

Como reutilizar latas de alumínio e praticar o consumo sustentável?

- Reúna-se em grupo com três colegas. Pesquisem na internet outros objetos que podem ser criados com latas de alumínio. Organizem uma lista com alguns desses objetos.
- Em seguida, escolham um dos objetos e façam um esquema apresentando como ele pode ser desenvolvido utilizando as partes de uma lata de alumínio. Apresentem esse esboço para o professor validar.
- Organizem-se para produzir esse objeto e separem os materiais e as ferramentas necessários. Executem e organizem um relatório com o passo a passo da montagem desse objeto. Caso precisem utilizar algo cortante, solicitem a ajuda de um adulto responsável.
- Por fim, realizem uma exposição para compartilhar os objetos criados por vocês e contem para a turma as impressões sobre a experiência de desenvolvimento desse projeto. Resposta pessoal.

2. Oriente os estudantes durante a realização dessa atividade. Devido à sua complexidade, sugerimos que seja desenvolvida além da sala de aula. Reserve momentos no dia a dia escolar para orientar seu desenvolvimento e sanar eventuais dúvidas dos estudantes. Peça que encontrem um objeto que desejem elaborar e avalie seus esboços com atenção. Permita que escolham livremente, mas chame a atenção deles para a viabilidade do projeto em curto prazo. Ajude-os a selecionar projetos factíveis e ressalte a necessidade da supervisão de um adulto durante a execução da atividade, especialmente se houver o uso de objetos perfurocortantes.

Com os objetos montados, combine com a turma um dia em sala de aula para a exposição dos projetos e para conversar sobre o processo de criação e apreciação dos objetos elaborados. Solicite aos estudantes que expliquem, por exemplo, quais materiais foram utilizados, por que escolheram esse objeto para construir e como esse tipo de ação pode colaborar para o consumo sustentável. Durante a discussão, ressalte que, além da reutilização das latas de alumínio, a destinação correta dos resíduos para a reciclagem também contribui para uma sociedade mais sustentável. Essa atividade mobiliza a criatividade dos estudantes ao mesmo tempo que promove a consciência socioambiental e a reflexão crítica acerca da sociedade de consumo em que vivemos.

Não escreva no livro.

Nesta coleção, para simplificar a linguagem, utilizamos o nome do polígono quando nos referimos ao polígono em si e também a ele acrescido de sua região interna.

GEOMETRIA MÉTRICA ESPACIAL

NESTE CAPÍTULO

- Área da superfície dos prismas
- Volume de sólidos: princípio de Cavalieri
- Volume de prismas
- Área da superfície e volume das pirâmides
- Área da superfície e volume dos corpos redondos

Este capítulo completa o estudo dos sólidos geométricos. Agora que os estudantes conhecem as representações de poliedros e de corpos redondos e conseguem visualizá-los por meio de desenhos e planificações, é possível estabelecer processos para o cálculo de áreas e de volumes que envolvem esses sólidos.

O objetivo da geometria métrica, tema deste capítulo, é o cálculo de distâncias, áreas e volumes que envolvem figuras geométricas espaciais, em especial os poliedros e os corpos redondos. Esse saber é utilizado em diversas áreas do conhecimento. Por exemplo, você já se perguntou como fazer para definir a melhor embalagem para determinado produto, de modo a usar o mínimo de material possível? Ou, ainda, como saber se o tamanho da embalagem é adequado para armazenar tal produto? É evidente que, além dessas análises, outras devem ser feitas, como considerar o tipo de produto e o melhor material para armazená-lo, de modo a garantir que suas propriedades sejam conservadas. Há produtos que só podem ser armazenados em vidros translúcidos, outros que só podem ser armazenados em embalagens de metal e assim por diante.

Para começar, leia o problema a seguir.

Uma fábrica de suco precisa decidir entre usar como embalagem um cilindro ou um prisma reto retangular. Os dois recipientes têm 20 cm de altura e o comprimento da base do prisma é igual ao diâmetro da base do cilindro: 10 cm. Em qual das embalagens cabe mais suco, se a largura da base do prisma tem 4 cm?



Representação sem proporção de tamanho.

Para resolver esse e outros tipos de problema, vamos continuar estudando os sólidos geométricos, com ênfase agora nas relações métricas em cada um e entre diferentes sólidos.


andrey shalari/iStock/Getty Images

Linha de produção de embalagem de suco em uma fábrica. Foto de 2020.

Não escreva no livro.

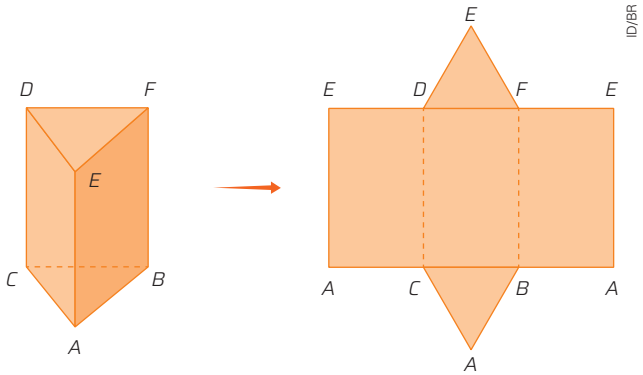
ÁREA DA SUPERFÍCIE DOS PRISMAS

Para iniciar o cálculo de medidas relacionadas a prismas, é preciso retomar a noção de superfície do prisma, que, de certa forma, já apresentamos quando discutimos sua planificação.

Solicite aos estudantes que se organizem em pequenos grupos para fazer a leitura deste tópico e, depois, uma discussão sobre o que compreenderam de cálculos relacionados a prismas. Eles devem considerar não só o que acabaram de ler, mas também os conhecimentos que trazem do estudo de capítulos anteriores. Essa é uma oportunidade de observar e avaliar o uso da linguagem matemática na comunicação de ideias entre os estudantes.

A **superfície lateral** de um prisma é a reunião de suas faces laterais. Indicamos a medida da área da superfície lateral por A_ℓ.

A **superfície total** de um prisma é a reunião de suas faces laterais com suas bases. Indicamos a medida da área da superfície total por A_t.



Indicando por A_b a medida da área de cada base de um prisma, temos:

$$A_t = A_\ell + 2A_b$$

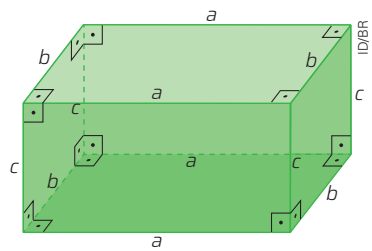
Em particular, em um paralelepípedo reto-retângulo, cujas arestas medem a, b e c, temos como faces:

- dois retângulos de medida de área $a \cdot b$;
- dois retângulos de medida de área $a \cdot c$;
- dois retângulos de medida de área $b \cdot c$.

Logo:

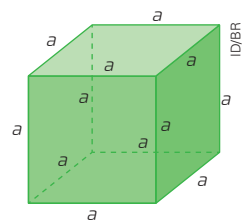
$$A_t = 2ab + 2ac + 2bc$$

$$A_t = 2(ab + ac + bc)$$



Em um cubo, temos as seis faces quadradas de aresta de medida a; então:

$$A_t = 6a^2$$

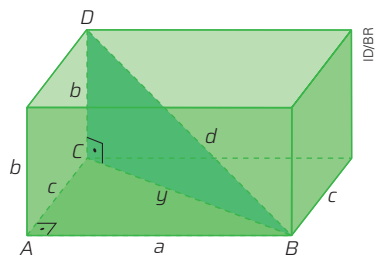


Cálculo da medida da diagonal de um paralelepípedo reto-retângulo

Vamos calcular a medida d de uma diagonal de um paralelepípedo reto-retângulo cujas arestas têm medidas a, b e c.

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

- no $\triangle ABC$: $y^2 = a^2 + c^2$
- no $\triangle BCD$: $d^2 = y^2 + b^2$



Não escreva no livro.

Substituindo $y^2 = a^2 + c^2$ em $d^2 = y^2 + b^2$, obtemos:

$$d^2 = a^2 + c^2 + b^2$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

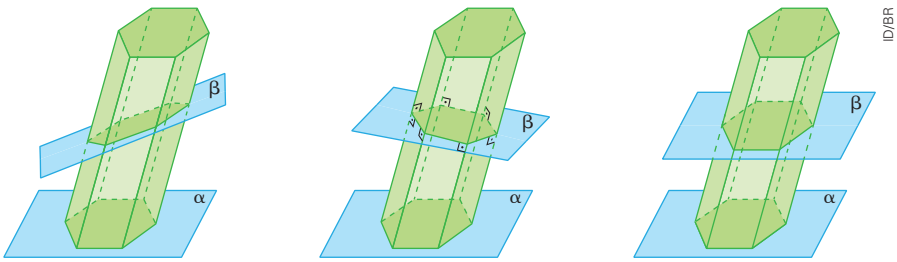
Em particular, em um cubo cuja aresta mede a, temos:

$$d = a\sqrt{3}$$

Analise a forma e a medida da área de seções de diferentes prismas com os estudantes. Observe e avalie a capacidade de visualização espacial que eles revelam ao identificar as figuras resultantes de seções por planos paralelos ou não paralelos às bases do prisma.

Seções de um prisma

Seja P um prisma com a base contida em um plano α. Consideremos um plano β que intersecta todas as arestas laterais de P. A intersecção de β com P é denominada **seção**. Se β é perpendicular às arestas laterais de P, temos uma **seção reta** ou **normal**; se β é paralelo a α, temos uma **seção transversal**, que é congruente à base.



ID/BR

seção | seção reta ou normal | seção transversal

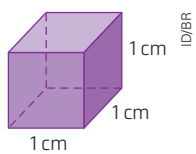
No caso do prisma reto, as seções reta e transversal coincidem e são congruentes às bases.

VOLUME DE SÓLIDOS: PRINCÍPIO DE CAVALIERI

Todo sólido ocupa uma porção do espaço. A medida dessa porção é o **volume** desse sólido.

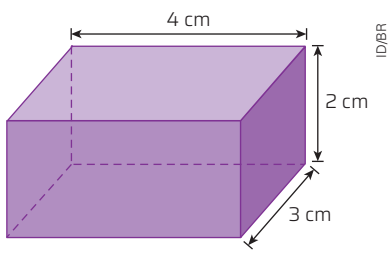
Para calcular o volume de um corpo, em geral, usamos como unidade-padrão o volume de um cubo de aresta de medida 1 u: esse volume mede 1 u^3.

Assim, se a aresta mede 1 cm, o volume desse cubo mede 1 cm^3; se a aresta mede 1 m, o volume mede 1 m^3.



ID/BR

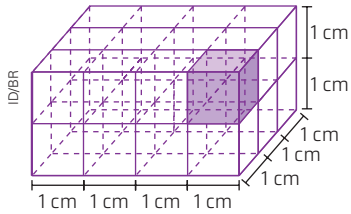
Por exemplo, considere um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões 2 cm, 3 cm e 4 cm.



ID/BR

Não escreva no livro.

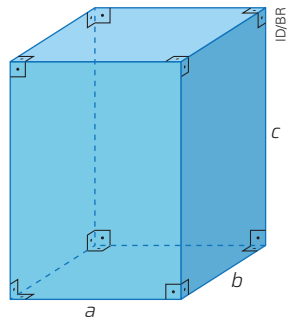
Como $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, o cubo de aresta 1 cm cabe nesse paralelepípedo 24 vezes, como pode ser visto na figura a seguir.



Portanto, o volume desse sólido mede 24 cm³.

O volume V de um paralelepípedo reto-retângulo, de dimensões a, b e c (na mesma unidade u), é medido por:

$$V = a \cdot b \cdot c$$



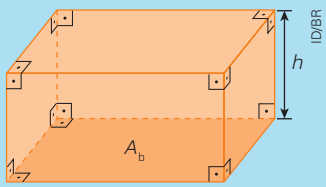
Em particular, para um cubo de aresta de medida a, o volume mede:

$$V = a^3$$

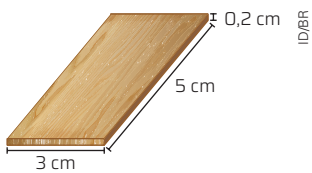
Considerando o retângulo de dimensões a e b como base do paralelepípedo reto-retângulo, sua altura terá medida c. Podemos, assim, afirmar que:

A medida do volume de um paralelepípedo reto-retângulo é o produto da medida da área da base pela medida da altura relativa a essa base.

$V = A_b \cdot h$



Vamos, agora, considerar 15 placas de madeira que têm formato de paralelepípedo reto-retângulo, cada uma delas com as dimensões indicadas na figura a seguir.



Vamos calcular o volume de cada placa:

$$3 \cdot 5 \cdot 0{,}2 = 3$$

Portanto, o volume de cada placa mede 3 cm³.

Qualquer que seja a maneira de empilharmos essas 15 placas, o volume do sólido resultante medirá:

$$15 \cdot 3 = 45$$

Logo, o volume dessas 15 placas mede 45 cm³.



$V = 45$ cm³



$V = 45$ cm³

Ilustrações: ID/BR

Esse fato é a base para um princípio mais geral, conhecido como **Princípio de Cavalieri**.

Antes de conversar com os estudantes sobre o exemplo das placas de madeira, explore intuitivamente com eles o princípio de Cavalieri. Empilhe sobre a mesa um bloco de folhas de papel de mesmo tamanho. Peça a eles que determinem o volume do bloco e o anotem. Desloque, então, as folhas de modo a obter um paralelepípedo não retângulo. Discuta se o volume foi, ou não, alterado e por quê. Experimentações desse tipo utilizam e valorizam os conhecimentos historicamente construídos, contribuindo para o desenvolvimento da competência geral **1**, e exercitam a curiosidade dos estudantes, favorecendo a aquisição da competência geral **2** e da habilidade **EM13MAT504**, ao investigarem o volume de sólidos geométricos.

Não escreva no livro.

O objeto digital acrescenta conhecimentos sobre Bonaventura Cavalieri, destacando sua vida, suas contribuições para o desenvolvimento da matemática moderna e também da óptica e da astronomia.



PARA EXPLORAR

Vídeo

3, 2, 1 – MISTÉRIO. Campinas, Unicamp: Matemática Multimídia, [2012]. 1 vídeo (9 min). Disponível em: https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1040. Acesso em: 11 out. 2024.

Esse vídeo aborda o princípio de Cavalieri, utilizado no cálculo de áreas de figuras planas e também de volumes de sólidos geométricos.

O vídeo sugerido apresenta uma história encenada com abordagem didática do princípio de Cavalieri, bem como de volumes e áreas de sólidos geométricos, auxiliando no desenvolvimento da habilidade **EM13MAT504**.
É recomendável que os estudantes assistam ao vídeo, na escola ou em casa, antes de estudarem a seção do livro sobre o princípio de Cavalieri.

Cavalieri

Francesco Cavalieri nasceu em 1598, em Milão, na Itália, e adotou o nome de Bonaventura quando entrou para a ordem jesuítica, em 1615. Estudou Filosofia e Teologia e foi introduzido no estudo de Geometria por Benedetto Castelli (1578-1643). Em Pisa, tornou-se matemático e discípulo de Galileu. Em 1629, com o auxílio de Galileu, tornou-se catedrático da Universidade de Bolonha, onde permaneceu até sua morte, em 1647.

Cavalieri publicou 11 livros sobre diversos assuntos matemáticos. Parte da importância desse estudioso foi a introdução do uso dos logaritmos na Itália como ferramenta para cálculos. Suas tábuas de logaritmos incluíam logaritmos de funções trigonométricas usadas pelos astrônomos da época.

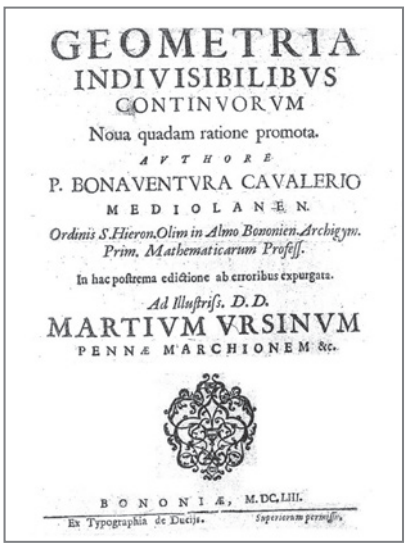

German Vizulis/ Shutterstock.com/ID/BR

Francesco Cavalieri, sacerdote e matemático italiano.

Sua grande contribuição para a Matemática foi o desenvolvimento do que ele chamou de método dos indivisíveis, que possibilitou no século XVII a introdução do cálculo integral pelos estudos de matemáticos como Newton e Leibniz.

O método dos indivisíveis foi desenvolvido por Cavalieri com base nas ideias de Arquimedes, ao investigar como calcular áreas e volumes de figuras curvas. A ideia central desse matemático foi a de olhar para uma área como um número infinito de segmentos de reta equidistantes e para um volume como uma infinidade de áreas planas. Cavalieri chamou esses elementos de indivisíveis da área e do volume.

Biblioteca Europeia de Informação e Cultura/BEIC. Fac-símile: ID/BR

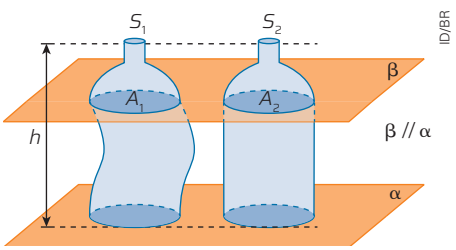

GEOMETRIA
INDIVISIBILIBVS
CONTINVORVM
Noua quadam ratione promota.
AVTHORE
P. BONAVENTVRA CAVALERIO
MEDIOLANEN.
Ordinis S. Hieron. Olim in Almo Bononien. Archigym.
Prim. Mathematicarum Profess.
In hac postrema editione ab erroribus expurgata.
Ad Illustriss. D. D.
MARTIVM VRSINVM
PENNÆ M. ARCHIONEM &c.
BONONIÆ, M.DC.LIII.
Ex Typographia de Ducijs. Superiorum permissu.

Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota, edição de 1653, a mais conhecida obra escrita por Cavalieri.

Princípio de Cavalieri

Dois sólidos S_1 e S_2, de mesma altura h, apoiados em um plano α e contidos em um mesmo semiespaço de origem α, terão o mesmo volume se qualquer plano paralelo a α determinar em S_1 e S_2 seções A_1 e A_2 com áreas iguais.

Para ter uma imagem dessa relação, imagine os dois sólidos sendo simultaneamente enchidos com água à mesma vazão. Como as áreas das seções são iguais, a altura a cada momento seria a mesma.



ID/BR

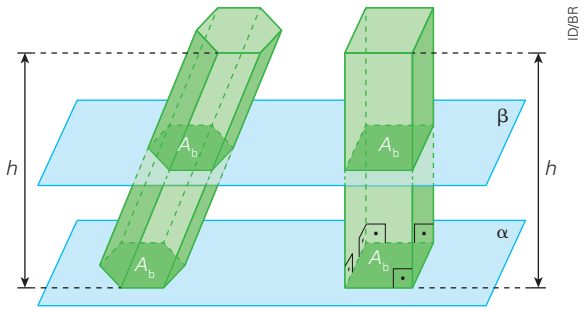
Duas figuras planas de medidas de área iguais são denominadas **superfícies equivalentes**.

Dois sólidos de medidas de volume iguais são denominados **sólidos equivalentes**.

Não escreva no livro.

Volume de prismas

Vamos considerar um prisma qualquer e um paralelepípedo reto-retângulo, de mesma altura h, apoiados em um plano α e contidos em um mesmo semiespaço de origem α, de modo que suas bases sejam equivalentes. Então, qualquer plano paralelo a α que intersecte os dois sólidos determina seções com medidas de área iguais.



Pelo princípio de Cavalieri, os dois sólidos têm medidas de volume iguais.

$$V_{prisma} = V_{paralelepípedo} = A_b \cdot h$$

A medida do volume de um prisma é igual ao produto da medida da área da sua base pela medida da altura relativa a essa base.

$$V_{prisma} = A_b \cdot h$$

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Durante a análise das resoluções, destaque o fato de os problemas exigirem cálculos e desenhos de figuras planas. Ou seja, conhecimentos das propriedades de figuras planas são essenciais na resolução de problemas de Geometria métrica espacial.

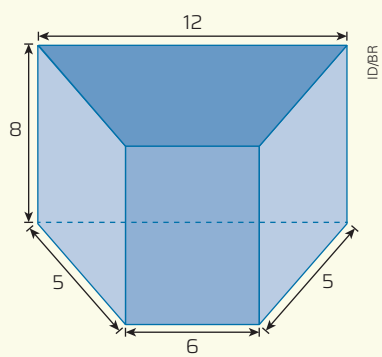
Nas atividades a seguir, vamos calcular medidas de áreas e volumes que exigirão a obtenção de medidas com a utilização de relações métricas nas figuras planas. Leia as atividades e acompanhe cada resolução. Caso tenha dúvidas, retome o início deste capítulo.

R1 **Um trapézio isósceles de 6 m e 12 m de bases e lado oblíquo igual a 5 m é a base de um prisma reto de altura igual a 8 m. Calcule, para esse prisma, a medida:**

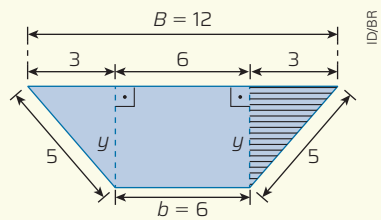
a) da área da base;
b) da área lateral;
c) da área total;
d) do volume.

Resolução

a) Representando o prisma descrito no enunciado, temos:



A base desse prisma é um trapézio isósceles, e sua área é dada por $A_b = \frac{(B + b)y}{2}$, de acordo com as medidas indicadas na figura a seguir.



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo hachurado na base, temos:

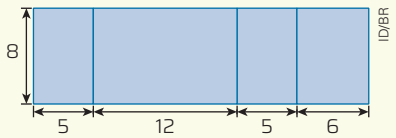
$$y^2 + 3^2 = 5^2$$
$$y^2 + 9 = 25$$
$$y^2 = 25 - 9$$
$$y = 4$$

Então:

$$A_b = \frac{(12 + 6)4}{2}$$
$$A_b = 36$$

Portanto, a área da base desse prisma mede 36 m².

b) A superfície lateral desse prisma é composta de quatro retângulos.



$$A_\ell = 5 \cdot 8 + 12 \cdot 8 + 5 \cdot 8 + 6 \cdot 8 = 224$$

Portanto, a área lateral desse prisma mede 224 m².

c) Como $A_t = A_\ell + 2A_b$, então:

$$A_t = 224 + 2 \cdot 36 = 296$$

Assim, a área total desse prisma mede 296 m².

d) A medida do volume de um prisma é dada por $V = A_b h$, então:

$$V = 36 \cdot 8 = 288$$

Logo, o volume desse prisma mede 288 m³.

R2 **Em um prisma hexagonal regular, cada aresta da base mede 4 m e cada aresta lateral mede 8 m. Calcule para esse prisma a medida:**

a) da área da base;

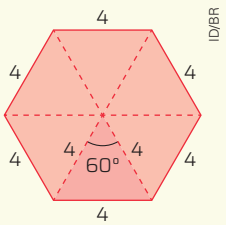
b) da distância do centro da base superior a um vértice da base inferior;

c) do volume;

d) da área total.

Resolução

a) A base desse prisma é um hexágono regular de 4 m de lado.



Note que podemos dividir o hexágono em seis triângulos equiláteros. Então, a área desse hexágono pode ser calculada como $6 \cdot A_\triangle$, sendo $A_\triangle$ a medida da área do triângulo equilátero de medida de lado igual a 4 m.

$$A_\triangle = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \operatorname{sen} 60°$$

$$A_\triangle = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$A_\triangle = 4\sqrt{3}$$

Logo, a medida da área do hexágono é dada por:

$$A_b = 6 \cdot A_\triangle$$

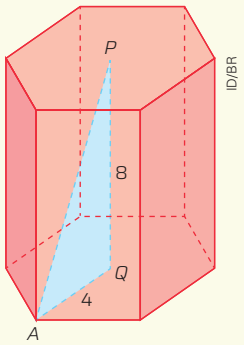
$$A_b = 6 \cdot 4\sqrt{3}$$

$$A_b = 24\sqrt{3}$$

Portanto, a área da base desse prisma hexagonal mede $24\sqrt{3}$ m².

b) As medidas das distâncias do centro da base superior aos vértices da base inferior são iguais entre si.

Considerando P o centro da base superior, Q o centro da base inferior e A um vértice da base inferior, temos a seguinte representação:



Pelo teorema de Pitágoras, no $\triangle PQA$, temos:

$$(AP)^2 = 8^2 + 4^2$$

$$(AP)^2 = 80$$

$$AP = 4\sqrt{5}$$

Portanto, a distância do centro da base superior a um vértice da base inferior mede $4\sqrt{5}$ m.

c) Como $V = A_b \cdot h$, $A_b = 24\sqrt{3}$ e $h = 8$, temos:

$$V = 24\sqrt{3} \cdot 8$$

$$V = 192\sqrt{3}$$

Logo, o volume desse prisma hexagonal mede $192\sqrt{3}$ m³.

d) Para calcular a área total, fazemos a soma das medidas das áreas de todos os polígonos que compõem o prisma: dois hexágonos e seis retângulos. A área de cada hexágono mede $24\sqrt{3}$ m² e a área de cada retângulo mede 32 m². Portanto:

$$A_t = 2 \cdot 24\sqrt{3} + 6 \cdot 32$$

$$A_t = 48\sqrt{3} + 192$$

$$A_t \simeq 275{,}14$$

Logo, a área total desse prisma hexagonal mede, aproximadamente, 275,14 m².

R3 **Em um paralelepípedo reto-retângulo, as dimensões da base, em metro, são dadas por a e b, e a altura, em metro, mede c. Sabendo que as medidas de a, b e c são inversamente proporcionais a 3, 4 e 5, respectivamente, e que o volume é $\frac{2}{15}$ m³, calcule a medida da área da região determinada pela intersecção desse sólido com um plano que contém duas arestas laterais opostas.**

Resolução

As medidas de a, b e c são inversamente proporcionais, respectivamente, a 3, 4 e 5; então:

$$a = \frac{k}{3},\ b = \frac{k}{4},\ c = \frac{k}{5},\ \text{com } k > 0 \quad (1)$$

O volume desse sólido é igual a $\frac{2}{15}$ m³; então:

$$V = \frac{2}{15}$$

$$a \cdot b \cdot c = \frac{2}{15} \quad (2)$$

Não escreva no livro.

Substituindo (1) em (2), obtemos:

$$\frac{k}{3} \cdot \frac{k}{4} \cdot \frac{k}{5} = \frac{2}{15}$$

$$k^3 = 8$$

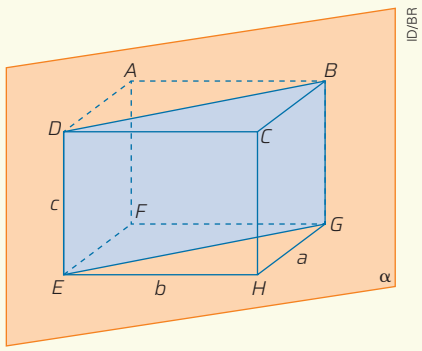
$$k = 2$$

Daí:

- $a = \frac{k}{3} \Rightarrow a = \frac{2}{3}$
- $b = \frac{k}{4} \Rightarrow b = \frac{2}{4} \Rightarrow b = \frac{1}{2}$
- $c = \frac{k}{5} \Rightarrow c = \frac{2}{5}$

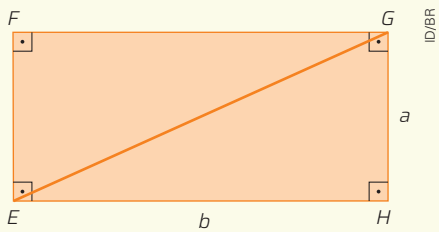
Logo, as dimensões desse sólido são $\frac{2}{3}$ m, $\frac{1}{2}$ m e $\frac{2}{5}$ m.

Há dois pares de arestas laterais opostas: $\overline{DE}$ e $\overline{BG}$, $\overline{AF}$ e $\overline{CH}$. As regiões determinadas nas duas possibilidades são congruentes entre si. Na figura, consideramos o plano α, contendo $\overline{DE}$ e $\overline{BG}$. A intersecção é o retângulo $DBGE$, em que $\overline{EG}$ é a diagonal de $EFGH$.



ID/BR

Na face $EFGH$, aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle GHE$, temos:



ID/BR

$$(EG)^2 = a^2 + b^2$$

$$(EG)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$(EG)^2 = \frac{4}{9} + \frac{1}{4}$$

$$(EG)^2 = \frac{25}{36}$$

$$EG = \frac{5}{6}$$

A área da região determinada pela intersecção desse sólido com o plano é dada por:

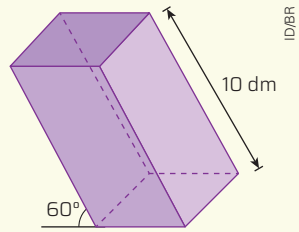
$$A = EG \cdot DE$$

$$A = \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{5}$$

$$A = \frac{1}{3}$$

Logo, a área dessa região mede $\frac{1}{3}$ m².

R4 **Na figura a seguir, temos um paralelepípedo cuja base é um quadrado de perímetro medindo 24 dm e cujas arestas laterais formam um ângulo de 60° com o plano da base. Calcule a medida do volume desse paralelepípedo.**



ID/BR

Resolução

Para calcular o volume do paralelepípedo, precisamos encontrar as medidas da área da base e da altura.

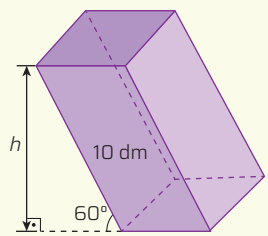
Como a base é um quadrado de perímetro medindo 24 dm, cada lado mede 6 dm.

Logo, a área da base mede:

$$A_b = 6^2$$

$$A_b = 36$$

Para o cálculo da altura h, temos:



ID/BR

$$\text{sen } 60° = \frac{h}{10}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{10}$$

$$h = 5\sqrt{3}$$

Se julgar oportuno, comente com os estudantes que a altura do prisma pode ser calculada dessa maneira devido ao fato de a aresta lateral pertencer à face lateral, que é perpendicular ao plano da base.

Portanto, o volume é dado por:

$$V = A_b h$$

$$V = 36 \cdot 5\sqrt{3}$$

$$V = 180\sqrt{3}$$

Logo, o volume do paralelepípedo mede $180\sqrt{3}$ dm³.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Ao conversar com os estudantes sobre a resolução desta sequência de atividades, é importante incentivá-los a compartilhar o modo de resolução escolhido, especialmente o das atividades **7** a **10**, **16**, **17**, **27** e **30**.

Leia as atividades e pense no que é necessário para resolvê-las. Se tiver dúvidas, releia as atividades da seção *Problemas e exercícios resolvidos*. Fazer um resumo do que já foi estudado até aqui ajudará na resolução desta sequência de atividades.

1. a) Consulte a resposta no Manual do Professor.

1 Muitas embalagens de leite têm a forma de um prisma com base retangular e capacidade de 1 litro.

a) Cite duas maneiras de como você poderia cortar embalagens de leite desse tipo de modo a obter um recipiente que permitisse medir, no máximo, meio litro.

b) Ainda utilizando embalagens desse tipo, como você faria para obter recipientes que permitissem medir um terço de litro, um quarto de litro, um decilitro, etc.? Cortar em um plano paralelo à base na medida correspondente às frações desejadas.

c) Se as embalagens tivessem a forma de um prisma de base pentagonal, como você faria para obter meio litro? Cortaria em um plano paralelo à base, na metade da altura do prisma.

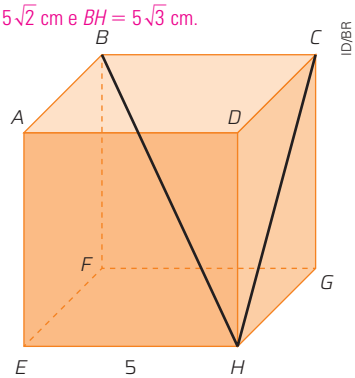
2 Copie o quadro a seguir no caderno, referente aos cubos *A*, *B*, *C*, *D* e *E*, e complete-o.

Medida \ Cubo	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
Aresta	5	9	6	12	7
Área da base	25	81	36	144	49
Área lateral	100	324	144	576	196
Área total	150	486	216	864	294
Volume	125	729	216	1728	343

3 Qual é a medida da aresta de um cubo cuja área total é 726? 11

4 A figura a seguir representa um cubo no qual o comprimento da aresta mede 5 cm.

4. b) $CH = 5\sqrt{2}$ cm e $BH = 5\sqrt{3}$ cm.



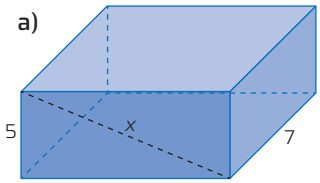
ID/BR

a) Qual dos segmentos traçados é uma diagonal do cubo? $\overline{BH}$

b) Calcule as medidas de $\overline{CH}$ e de $\overline{BH}$.

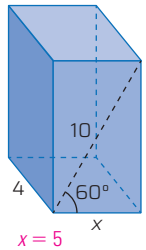
5 Calcule o valor de x em cada prisma reto-retângulo a seguir.

a)



$x = 13$

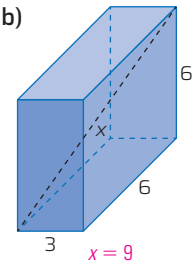
c)



Ilustrações: ID/BR

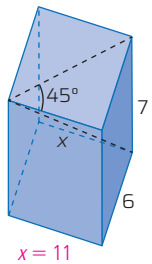
$x = 5$

b)



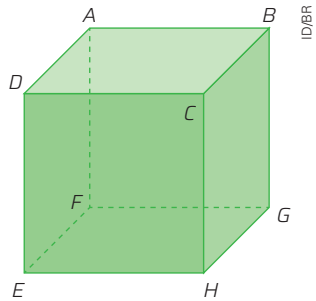
$x = 9$

d)



$x = 11$

6 Na figura a seguir, temos um cubo cuja diagonal mede $4\sqrt{3}$ cm.



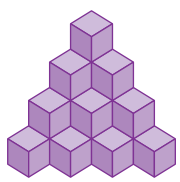
ID/BR

Calcule a medida da área do triângulo:

a) *BDH*; $8\sqrt{3}$ cm²

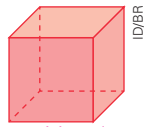
b) *MNP*, em que *M*, *N* e *P* são, respectivamente, os pontos médios de $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{CH}$. $2\sqrt{3}$ cm²

7 A figura a seguir é formada por cubos empilhados sem deixar buracos.


ID/BR

Se cada cubo tem 1 dm de medida de aresta, qual é a medida do volume da pilha? Qual é o menor número de cubos que devemos acrescentar à pilha para formar um cubo? 20 dm³; 44 cubos.

8 Considere que eu tenha 8 cubos iguais ao da figura a seguir.


ID/BR

A atividade **1**, que envolve o cálculo de volumes de sólidos representados por embalagens, contribui para a aquisição da competência geral **2** e possibilita o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT309**, pois os estudantes interpretam o texto, mobilizam conhecimentos na resolução e registram a solução usando a linguagem matemática de maneira adequada.

Não escreva no livro.

Consulte os desenhos no Manual do Professor.

a) Quantos paralelepípedos diferentes posso construir com 8 cubos? Desenhe-os no caderno.
3 paralelepípedos.

b) Compare as áreas totais desses paralelepípedos. O que você observa? As áreas totais dos paralelepípedos medem 34, 28 e 24 unidades de área.

c) Compare seus volumes. O que você observa?
Todos têm o mesmo volume.

9 **De dois prismas retos, sabe-se que, em suas respectivas unidades de medida, têm-se:**

Prisma *A*:
- medida do perímetro da base: 27
- medida da área da base: 28
- medida da altura: 10

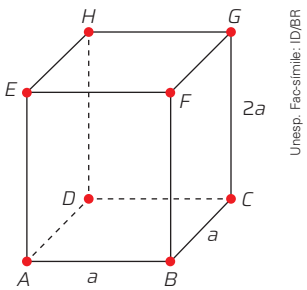
Prisma *B*:
- medida do perímetro da base: 24
- medida da área da base: 36
- medida da altura: 10

a) Compare suas áreas laterais. O que você observa?
A área lateral do prisma *A* é maior do que a área lateral do prisma *B*.

b) Compare seus volumes. O que você observa?
O volume do prisma *A* é menor do que o volume do prisma *B*.

10 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(Unesp) A figura mostra um paralelepípedo reto-retângulo *ABCDEFGH* com base quadrada *ABCD* de aresta *a* e altura 2*a*, em centímetros.



Unesp. Fac-símile: ID/BR

A distância, em centímetros, do vértice *A* à diagonal *BH* mede: Alternativa **e**.

a) $\frac{\sqrt{5}}{6}a$

b) $\frac{\sqrt{6}}{6}a$

c) $\frac{\sqrt{5}}{5}a$

d) $\frac{\sqrt{6}}{5}a$

e) $\frac{\sqrt{30}}{6}a$

11 **As dimensões, em metro, de um paralelepípedo reto-retângulo são números inteiros consecutivos. Se a área total mede 94 m², calcule a medida do volume do paralelepípedo.** 60 m³

12 **As dimensões de um paralelepípedo reto-retângulo, de 376 m² de área total, são proporcionais a 3, 4 e 5. Calcule para esse paralelepípedo:**

a) a medida do volume; 480 m³

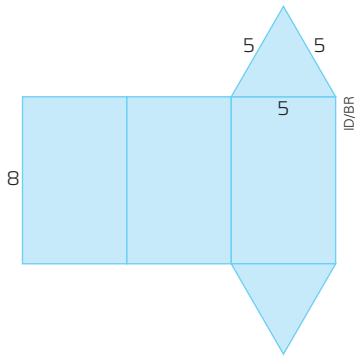
b) a medida de uma diagonal desse sólido; $10\sqrt{2}$ m

c) as medidas das diagonais das faces.
10 m, $2\sqrt{34}$ m e $2\sqrt{41}$ m.

13 **Calcule a medida do volume de um prisma reto, cuja altura mede 8 cm e cuja base é um trapézio retângulo de bases medindo 11 cm e 6 cm, e de lado oblíquo de medida 13 cm.** 816 cm³

14 **Calcule as medidas da área total e do volume de um prisma hexagonal regular, sabendo que uma aresta lateral mede 6 cm e uma aresta da base mede 2 cm.** $12(6 + \sqrt{3})$ cm²; $36\sqrt{3}$ cm³.

15 **A figura a seguir representa a planificação da superfície de um prisma triangular reto. Calcule a medida da área total do prisma.** $120 + 12{,}5\sqrt{3}$



ID/BR

Consulte os desenhos no Manual do Professor.

16 **Um prisma reto tem 2 cm de medida de altura e sua base é um losango no qual as diagonais medem 3 cm e 4 cm.** Resposta pessoal.

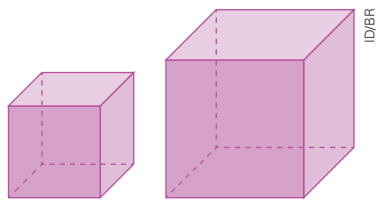
a) Desenhe no caderno uma planificação da superfície do prisma.

b) Faça um desenho do prisma no caderno.
Resposta pessoal.

c) Calcule as medidas da área total e do volume.
$A_t = 32$ cm²; $V = 12$ cm³.

d) Construa um modelo desse prisma. Resposta pessoal.

17 **Os cubos a seguir têm arestas de comprimento 2*a* e 3*a*, respectivamente.** $A_{t_1} = 24a^2$; $A_{t_2} = 54a^2$; $V_1 = 8a^3$; $V_2 = 27a^3$.


ID/BR

Calcule as medidas da área total e do volume de cada cubo em função de *a* e, depois, responda às questões.

a) Se a medida da aresta de um cubo é duplicada, o que ocorre com as medidas da área e do volume do cubo? A área total é multiplicada por 4 e o volume por 8.

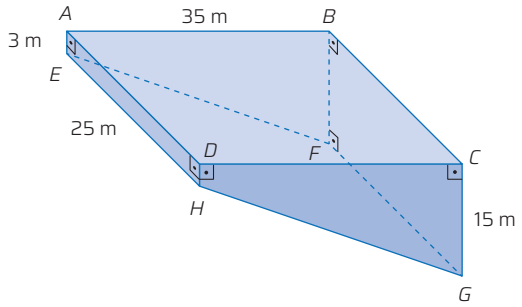
b) Se a medida da aresta de um cubo é triplicada, o que ocorre com as medidas da área e do volume do cubo? A área total é multiplicada por 9 e o volume por 27.

Nos problemas de Geometria, muitas vezes há uma figura que auxilia na resolução. Ela permite que se estabeleçam relações entre as medidas de comprimento ou de ângulos.
Saber desenhar essas figuras é uma habilidade importante e, muitas vezes, essencial para se obter uma resposta. Na atividade a seguir, trace um desenho de apoio.

18 **A diagonal de um prisma reto de base quadrada mede $20\sqrt{3}$ m e sua base tem 150 m² de medida de área. Calcule a medida do ângulo que uma diagonal desse sólido forma com o plano da base.** 60°

Ao resolver as atividades **19** a **22**, os estudantes desenvolvem a habilidade **EM13MAT309** na medida em que interpretam o texto, mobilizam conhecimentos na resolução e registram a solução usando a linguagem matemática de maneira adequada.

19 A figura a seguir representa uma piscina.



ID/BR

a) Que tipo de prisma pode ser identificado na construção dessa piscina? Prisma de base trapezoidal ou hexaedro.

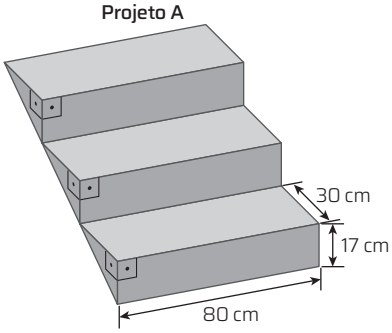
b) Qual é a medida da área da superfície da piscina? E a do fundo? 875 m²; 925 m², respectivamente.

c) Qual é a medida do volume da piscina? 7 875 m³

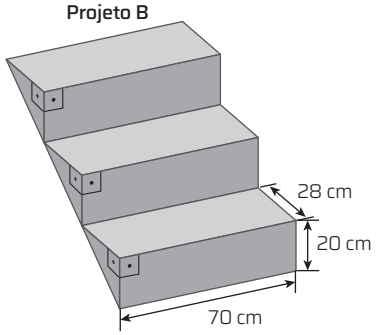
20 Um arquiteto pretende construir uma sala retangular com capacidade para 60 pessoas. A altura da sala tem de ser 3,60 m. Para cada pessoa, é necessário um volume de 3 m³. Quais devem ser as dimensões do chão da sala, sabendo que uma das dimensões tem de ser o dobro da outra? 10 m e 5 m.

21 Nas figuras a seguir, estão representados três degraus (de iguais tamanhos) de dois projetos para a construção de uma escada de cimento. Em cada projeto, cada degrau é um prisma triangular com as dimensões indicadas.

Projeto A



Projeto B



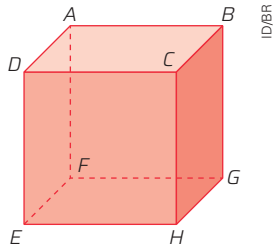
Ilustrações: ID/BR

O projeto escolhido foi o da escada que necessita do maior volume de cimento para a sua construção.

a) Se a escada tiver 18 degraus, qual projeto de escada foi escolhido para a construção? Projeto A.

b) Se, no projeto A, os degraus tivessem 1 m de comprimento em vez de 80 cm, que quantidade de cimento seria necessária para construir uma escada com 18 degraus? 229 500 cm³

22 Na figura a seguir, temos um cubo de aresta de medida $a\sqrt{2}$. Sejam M e N os pontos médios, respectivamente, de $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$. Calcule a medida da área do quadrilátero $EGMN$. $\frac{3a^2\sqrt{11}}{4}$

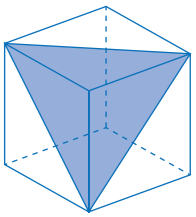


ID/BR

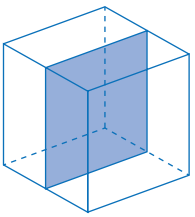
23 As arestas de um paralelepípedo reto-retângulo têm medidas proporcionais a 2, 4 e 5 e sua diagonal mede $9\sqrt{5}$ m. Calcule as medidas da área total e do volume desse paralelepípedo. 684 m²; 1 080 m³, respectivamente.

24 A seguir são mostradas três seções de um mesmo cubo de 8 cm de aresta. Cada seção gerou um polígono regular.

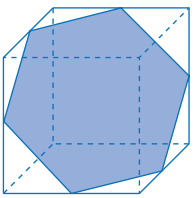
1



2



3



Ilustrações: ID/BR

24. a) Área da seção **1**: $32\sqrt{3}$ cm². Área da seção **2**: 64 cm². Área da seção **3**: $48\sqrt{3}$ cm².

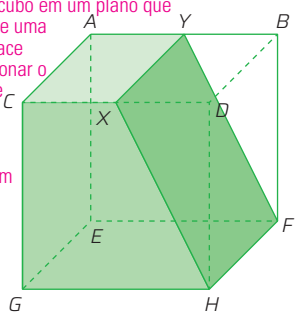
a) Calcule a medida da área de cada seção.

b) Descreva como é feita cada uma das três seções para que surjam os respectivos polígonos.

c) Descreva como seccionar o cubo para obter um polígono não regular e faça o desenho correspondente no caderno. Há outra maneira? Se sim, qual? Respostas pessoais.

25 A figura a seguir destaca o sólido que restou de um cubo de aresta de medida a, após retirar dele o prisma $XDHYBF$, sendo $\overline{XY}$ paralelo a $\overline{CA}$. Se o volume do sólido restante mede $\frac{4}{7}$ do volume do cubo, ache a fração de a que expressa a medida de $\overline{CX}$. $CX = \frac{a}{7}$

24. b) (**1**) Seccionar o cubo em um plano que contenha a diagonal de uma face e um vértice da face oposta a ela. (**2**) Seccionar o cubo em um plano que passe pelos pontos médios de arestas de duas faces opostas. (**3**) Seccionar o cubo em um plano que passe pelos pontos médios de duas arestas concorrentes de uma face e pelo centro do cubo.



ID/BR

A resolução da atividade **24** exige do estudante a investigação e a argumentação, com o uso adequado da linguagem matemática para se expressar, o que contribui para o desenvolvimento das competências gerais **2** e **7**.

Não escreva no livro.

Ao resolver as atividades **28**, **29** e **30**, os estudantes desenvolvem a habilidade **EM13MAT309**, ao interpretar o texto, mobilizar conhecimentos na resolução e registrar a solução usando linguagem matemática de maneira adequada.

26 **Secciona-se um cubo, de aresta de medida *a*, em um plano que contém duas arestas não situadas em uma mesma face.** **26. a)** $d = a\sqrt{3}$; $A = a^2\sqrt{2}$.

a) Calcule, em função de *a*, as medidas da diagonal e da área do quadrilátero obtido nessa intersecção.

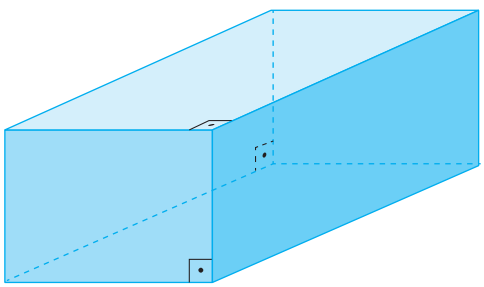
b) Qual é a relação entre a diagonal desse quadrilátero e a diagonal do cubo?
A diagonal do quadrilátero e a diagonal do cubo são coincidentes.

27 **Seja *V* a medida do volume de um cubo de aresta de medida *a*. Constrói-se um prisma quadrangular com vértices nos pontos médios das arestas de duas faces opostas do cubo. Sendo *V'* a medida do volume desse prisma, no caderno, calcule:**

a) $V' \frac{a^3}{2}$ b) $V - V' \frac{a^3}{2}$

28 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(Fuvest-SP) Uma empresa de alimentos utiliza embalagens, no formato de paralelepípedo reto-retângulo, de dimensões 2 cm × 3 cm × 11 cm para armazenar biscoitos. Para o transporte desse produto, são utilizadas caixas para acondicionar essas embalagens, também no formato de paralelepípedo reto-retângulo, de dimensões 12 cm × 13 cm × 26 cm. A imagem a seguir ilustra um paralelepípedo reto-retângulo.

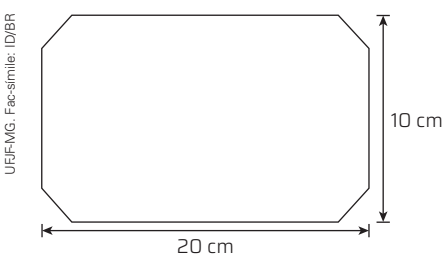

Fuvest-SP. Fac-símile: ID/BR

Determine o número máximo de embalagens que podem ser acondicionadas em cada caixa fechada para transporte, sem que o produto seja danificado. Alternativa **e**.

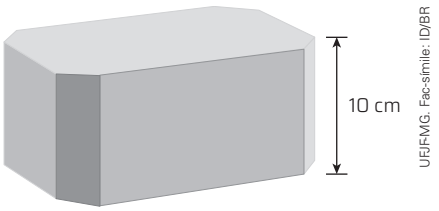
a) 48 d) 60
b) 52 e) 61
c) 56

29 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(UFJF-MG) Uma empresa de sorvete utiliza como embalagem um prisma reto, cuja altura mede 10 cm e cuja base é dada conforme descrição a seguir: de um retângulo de dimensões 20 cm por 10 cm, extrai-se em cada um dos quatro vértices um triângulo retângulo isósceles de catetos de medida 1 cm.



UFJF-MG. Fac-símile: ID/BR



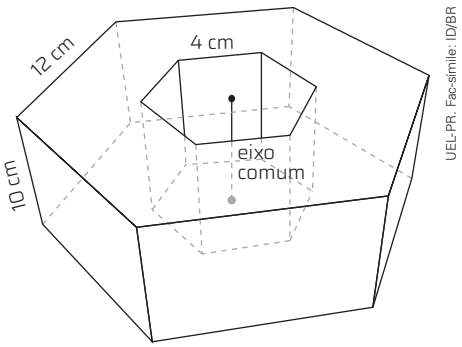
UFJF-MG. Fac-símile: ID/BR

a) Calcule o volume da embalagem. 1 980 cm³

b) Sabendo que o volume ocupado por esse sorvete aumenta em $\frac{1}{5}$ (um quinto) quando passa do estado líquido para o estado sólido, qual deve ser o volume máximo ocupado por esse sorvete no estado líquido, nessa embalagem, para que, ao congelar, o sorvete não transborde? 1 650 cm³

30 **Escreva a alternativa correta no caderno.**

(UEL-PR) Uma metalúrgica produz uma peça cujas medidas são especificadas na figura a seguir.



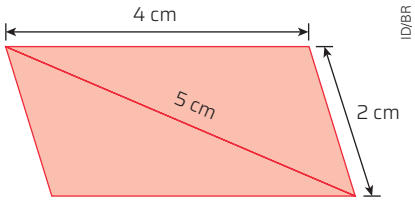
UEL-PR. Fac-símile: ID/BR

A peça é um prisma reto com uma cavidade central e com base compreendida entre dois hexágonos regulares, conforme a figura.

Considerando que os eixos da peça e da cavidade coincidem, qual é o volume da peça? Alternativa **e**.

a) $640\sqrt{3}$ cm³
b) $1280\sqrt{3}$ cm³
c) $2560\sqrt{3}$ cm³
d) $320\sqrt{3}$ cm³
e) $1920\sqrt{3}$ cm³

31 **Reúna-se com um colega para criar um problema que envolva área e volume de um prisma em que apareça a figura a seguir. Em seguida, troquem o problema elaborado por vocês com o de outra dupla, para que uma dupla resolva o problema que a outra criou.** Resposta pessoal.



ID/BR

Ao elaborar problemas em duplas ou em grupos, como na atividade **31**, os estudantes desenvolvem a competência geral **9**. Momentos como esse possibilitam aos estudantes exercitar a empatia e aprender a respeitar diferentes opiniões.

Não escreva no livro.

Para evitar excesso de fórmulas, antes de os estudantes encontrarem a fórmula do volume de uma pirâmide, proponha a seguinte experimento: em duplas, peça aos estudantes que façam duas construções em cartolina, ou em outro papel mais grosso, obedecendo aos passos descritos a seguir.

1º) Desenhar as planificações de um prisma e de uma pirâmide que tenham a mesma base (congruentes) e a mesma altura.
O formato da base e as medidas podem ser escolhidas pelos próprios estudantes, desde que os dois sólidos tenham a mesma figura como base e a mesma altura.

2º) Montar os modelos de sólidos, sem fechar suas bases, e revestir as paredes internas com plástico, porque os estudantes vão utilizar esses objetos como recipientes e enchê-los com água (ou areia fina).

3º) Completar o interior do modelo da pirâmide com água (ou areia), despejando-a, depois, no modelo de prisma.

4º) Observar quantas vezes o conteúdo do modelo da pirâmide coube no modelo do prisma, para concluir a relação entre o volume do prisma e o da pirâmide.

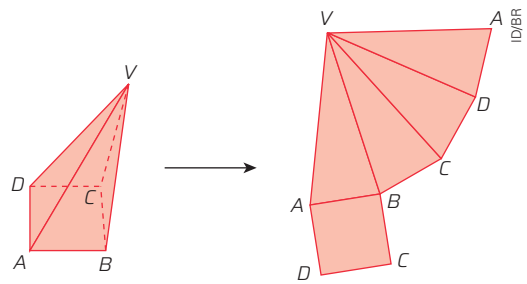
ÁREA DA SUPERFÍCIE E VOLUME DAS PIRÂMIDES

Assim como fizemos no estudo de prismas, vamos iniciar o estudo de pirâmides retomando o conceito de superfície.

A **superfície lateral** de uma pirâmide é a reunião de suas faces laterais.

A **superfície total** de uma pirâmide é a reunião de suas faces laterais com sua base.

Indicando por A_b, A_ℓ e A_t, respectivamente, as medidas da área da base, da área da superfície lateral e da área da superfície total de uma pirâmide, temos:

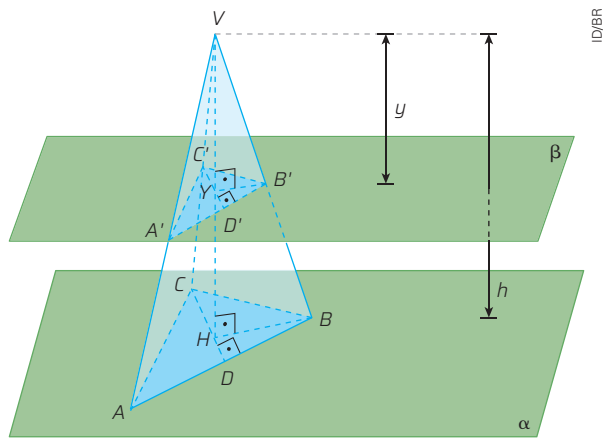


$$A_t = A_b + A_\ell$$

Seção paralela à base de uma pirâmide triangular

Enfatize a diferença entre as seções paralelas à base de prismas e de pirâmides, destacando que as relações são de congruência nos prismas e de semelhança nas pirâmides.

Consideremos uma pirâmide triangular de vértice V e base ABC.



Seccionando essa pirâmide em um plano β, paralelo ao plano α, que intersecta as arestas laterais em pontos distintos, notamos que:

a) a seção e a base são semelhantes;
Justificativa: Os ângulos do $\triangle A'B'C'$ e do $\triangle ABC$ são, respectivamente, congruentes por terem os lados correspondentes paralelos.

b) a razão de semelhança entre a seção e a base é $\frac{y}{h}$;
Justificativa:

- $\triangle VYB' \sim \triangle VHB$, então:

$$\frac{VB'}{VB} = \frac{VY}{VH}$$

$$\frac{VB'}{VB} = \frac{y}{h}$$

- $\triangle VA'B' \sim \triangle VAB$, então:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{VB'}{VB}$$

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{y}{h}$$

Não escreva no livro.

c) a razão entre as medidas da área da seção e da área da base é $\left(\frac{y}{h}\right)^2$.

Justificativa:

- Considerando $\overline{C'D'}$ e $\overline{CD}$ as alturas da seção e da base, respectivamente, temos:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{C'D'}{CD} \text{ e } \frac{C'D'}{CD} = \frac{y}{h}$$

- Assim, temos o seguinte cálculo para cada medida:

$$\frac{\text{Área}\,(\triangle A'B'C')}{\text{Área}\,(\triangle ABC)} = \frac{\frac{1}{2}(A'B')}{\frac{1}{2}(AB)} \cdot \frac{(C'D')}{(CD)}$$

$$\frac{\text{Área}\,(\triangle A'B'C')}{\text{Área}\,(\triangle ABC)} = \frac{A'B'}{AB} \cdot \frac{C'D'}{CD}$$

$$\frac{\text{Área}\,(\triangle A'B'C')}{\text{Área}\,(\triangle ABC)} = \frac{y}{h} \cdot \frac{y}{h}$$

$$\frac{\text{Área}\,(\triangle A'B'C')}{\text{Área}\,(\triangle ABC)} = \left(\frac{y}{h}\right)^2$$

Volume de pirâmides de base triangular

A justificativa para o cálculo do volume de uma pirâmide é mais complexa que a dos prismas, por isso dedique mais tempo para o desenvolvimento dos próximos tópicos.

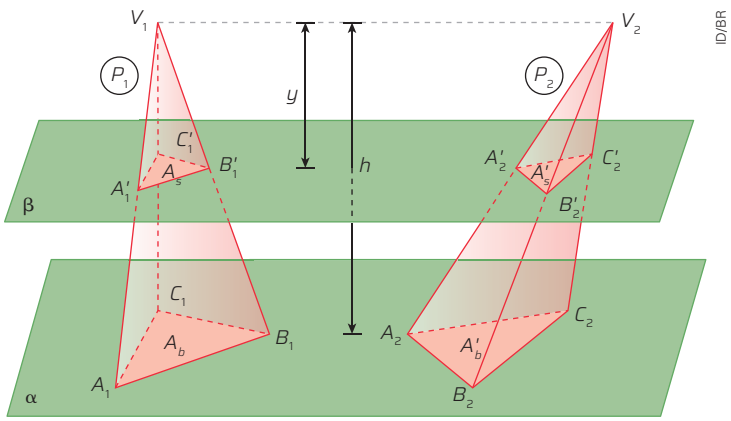
Inicialmente, vamos provar este teorema:

> Duas pirâmides triangulares de mesma altura e bases equivalentes têm medidas de volumes iguais.

Consideremos duas pirâmides triangulares, P_1 e P_2, de mesma altura h, apoiadas em um plano α e contidas em um mesmo semiespaço de origem α, de modo que qualquer plano paralelo a α estabeleça em P_1 seção de área A_s e determine em P_2 seção de área A'_s.

Pelo item **c** anterior, temos:

$$\frac{A_s}{A_b} = \left(\frac{y}{h}\right)^2 \quad \text{e} \quad \left(\frac{A'_s}{A'_b}\right) = \left(\frac{y}{h}\right)^2$$



ID/BR

Mas, como as pirâmides têm bases de mesma medida de área, $A_b = A'_b$, isso nos permite concluir que: $A_s = A'_s$

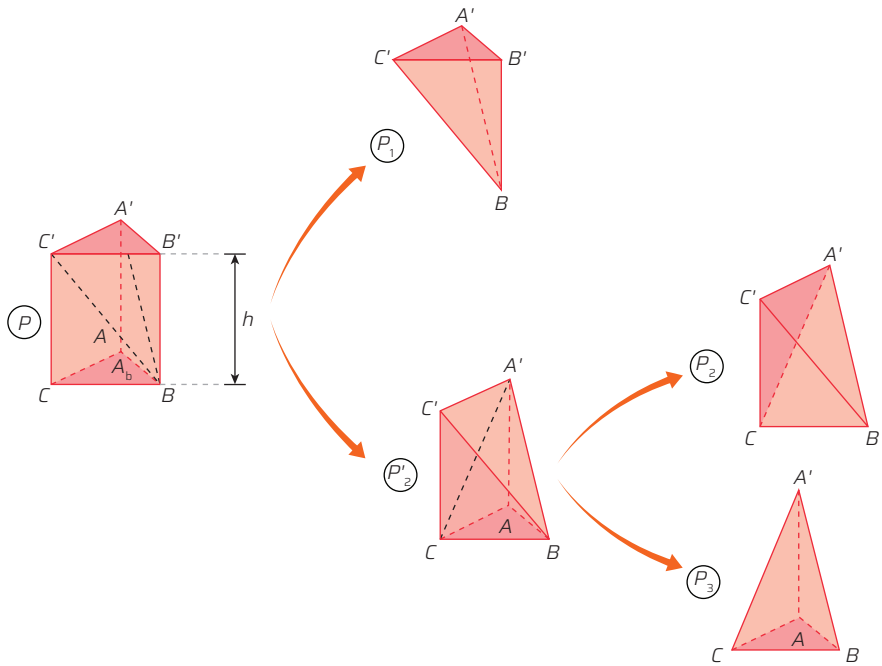
Se todas as seções das duas pirâmides são equivalentes, pelo princípio de Cavalieri, as medidas dos volumes de P_1 e de P_2 são iguais: $V_{P_1} = V_{P_2}$.

Para obter uma fórmula para calcular o volume das pirâmides, vamos relacionar pirâmides de bases triangulares equivalentes a um prisma cujo volume já sabemos calcular.

Consideremos um prisma P reto de bases ABC e $A'B'C'$ e medida de altura h.

Seccionando-o em um plano $BA'C'$, resultam as pirâmides P_1, de vértices A', B', C' e B, e P'_2, de vértices A, A', C', C e B.

Seccionando P'_2 em um plano $A'BC$, resultam as pirâmides P_2, de vértices A', B, C e C', e P_3, de vértices A', A, B e C.



Ilustrações: ID/BR

Portanto, o prisma P foi decomposto em três pirâmides triangulares, P_1, P_2 e P_3, e podemos escrever:

$$V_{P_1} + V_{P_2} + V_{P_3} = V_P$$

As pirâmides P_1 e P_3 são equivalentes, pois ambas têm bases com áreas congruentes ($\triangle A'B'C'$ e $\triangle ABC$) e mesma altura (distância entre as bases de P). Logo:

$$V_{P_1} = V_{P_3} \quad (1)$$

As pirâmides P_2 e P_3 são equivalentes, pois ambas têm bases com áreas congruentes $\left(A_{\triangle A'CC'} = A_{\triangle AA'C} = \frac{1}{2} \cdot A_{A'CC'}\right)$ e mesma altura (distância de B à face oposta). Logo:

$$V_{P_2} = V_{P_3} \quad (2)$$

De (1) e (2), temos:

$$V_{P_1} = V_{P_3} = V_{P_2}$$

Como $V_{P_1} + V_{P_2} + V_{P_3} = V_P$, resulta que o volume V de cada pirâmide triangular é dado por $V = \frac{V_P}{3}$.

Mas $V_P = A_b h$; então:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_b h$$

Concluímos, assim, que:

A medida do volume de uma pirâmide triangular é $\frac{1}{3}$ do produto da medida da área de sua base pela medida da sua altura.

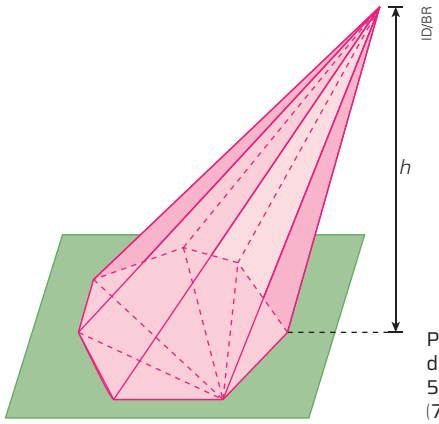
Não escreva no livro.

Volume de uma pirâmide de base qualquer

Antes de iniciar este tópico, que justifica a fórmula do volume de uma pirâmide, retome com os estudantes o resultado que obtiveram no experimento sugerido na página 114.

Vamos estender o resultado encontrado anteriormente para qualquer pirâmide.

Para uma pirâmide P de vértice V e base com n lados, basta notar que a base pode ser decomposta em $(n - 2)$ triângulos; logo, P pode ser decomposta em $(n - 2)$ pirâmides triangulares cujas bases são esses $(n - 2)$ triângulos, de mesma altura h.



ID/BR

Pirâmide heptagonal decomposta em 5 pirâmides triangulares $(7 - 2 = 5)$.

Sendo $B_1, B_2, B_3, ..., B_{n-2}$ as medidas das áreas desses $(n - 2)$ triângulos, temos:

$$B_1 + B_2 + B_3 + ... + B_{n-2} = A_b$$

Então:

$$V_P = \frac{1}{3} \cdot B_1 h + \frac{1}{3} \cdot B_2 h + \frac{1}{3} \cdot B_3 h + ... + \frac{1}{3} \cdot B_{n-2} h$$

$$V_P = \frac{1}{3} \cdot h \cdot (B_1 + B_2 + B_3 + ... + B_{n-2})$$

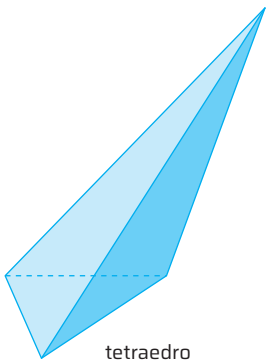
$$V_P = \frac{1}{3} \cdot A_b h$$

Isso nos permite enunciar o teorema:

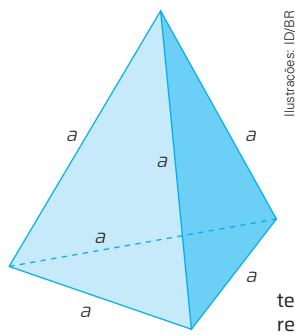
A medida do volume de qualquer pirâmide é $\frac{1}{3}$ do produto da medida da área de sua base pela medida de sua altura.

Área da superfície e volume dos tetraedros regulares

O **tetraedro** é uma pirâmide triangular e um tetraedro é **regular** quando tem as seis arestas de mesma medida.



tetraedro



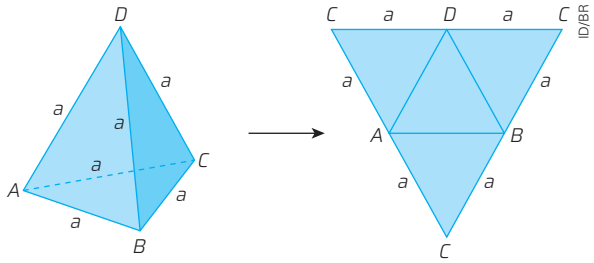
Ilustrações: ID/BR

tetraedro regular

Não escreva no livro.

Vamos calcular as medidas da **área total**, da **altura** e do **volume** de um tetraedro regular.

As quatro faces são triângulos equiláteros de lado de medida a.



Pelo teorema de Pitágoras, podemos demonstrar que a altura de um triângulo equilátero de lado a mede $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Assim, temos:

- $A_{\triangle} = \frac{bh}{2}$

  $A_{\triangle} = a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}$

  $A_{\triangle} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

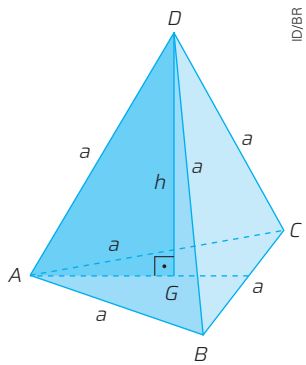
- $A_t = 4 \cdot A_{\triangle}$

$$A_t = a^2\sqrt{3}$$

Como o tetraedro é uma pirâmide regular, o baricentro G é o centro do $\triangle ABC$. Logo, AG é igual a $\frac{2}{3}$ da medida da altura. Então:

$$AG = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$AG = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$



Aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle ADG$, temos:

$$(DG)^2 + (AG)^2 = (AD)^2$$

$$h^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = a^2$$

$$h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

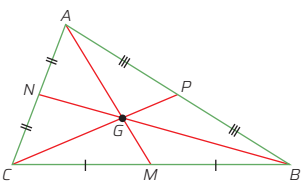
Como $V = \frac{1}{3} \cdot A_b h$, temos:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

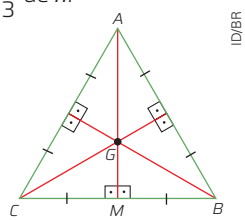
Mediana e baricentro

Mediana de um triângulo é um segmento que une um vértice do triângulo ao ponto médio do lado oposto a ele. Todo triângulo tem três medianas, cada uma relativa a um de seus lados. As medianas se intersectam em um ponto denominado **baricentro** (G) do triângulo.



O baricentro divide a mediana de um triângulo em dois segmentos, de modo que o segmento com extremidade em G e em um dos vértices do triângulo corresponde a $\frac{2}{3}$ da mediana.

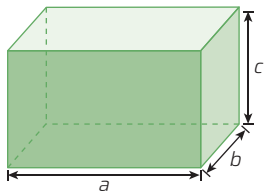
Como em um triângulo equilátero as medianas coincidem com as alturas h, a distância de um vértice até o ponto G é dada por $\frac{2}{3}$ de h.



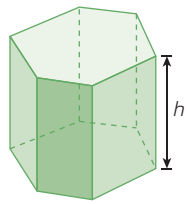
Não escreva no livro.

Volume de prismas e de pirâmides

Podemos resumir o que sabemos até aqui sobre volumes de poliedros:



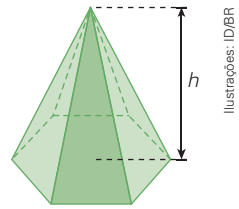
$V_{\text{paralelepípedo reto-retângulo}} = a \cdot b \cdot c$



$V_{\text{prisma}} = A_b \cdot h$

A_b: área da base

h: altura do prisma



Ilustrações: ID/BR

$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} A_b \cdot h$

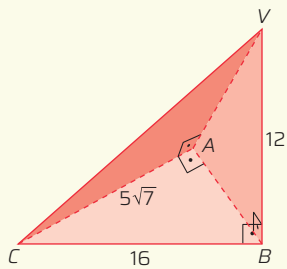
A_b: área da base

h: altura da pirâmide

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Na análise da resolução dos problemas, enfatize novamente a importância de identificar figuras planas em partes do sólido, a utilização de conhecimentos sobre figuras congruentes ou semelhantes e as relações de Pitágoras e de semelhança de triângulos.

R5 Em uma pirâmide de vértice V, o ângulo $V\hat{A}C$ é reto, a base é um triângulo retângulo ABC de hipotenusa $\overline{BC}$, com $BC = 16$ cm e $AC = 5\sqrt{7}$ cm. A aresta $\overline{VB}$ é perpendicular ao plano da base e mede 12 cm.



ID/BR

Calcule as medidas:

a) da área da base;

b) do volume;

c) da área lateral.

Resolução

a) Aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle ABC$, temos:

$$16^2 = (AB)^2 + (5\sqrt{7})^2$$

$$(AB)^2 = 256 - 175$$

$$AB = 9$$

Logo:

$$A_b = \frac{AB \cdot AC}{2}$$

$$A_b = \frac{9 \cdot 5\sqrt{7}}{2}$$

$$A_b = \frac{45\sqrt{7}}{2}$$

Portanto, a área da base da pirâmide mede $\frac{45\sqrt{7}}{2}$ cm².

b) Como $V = \frac{1}{3} \cdot A_b h$ e $h = 12$, então:

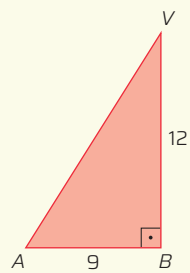
$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{45\sqrt{7}}{2} \cdot 12$$

$$V = 90\sqrt{7}$$

Logo, o volume da pirâmide mede $90\sqrt{7}$ cm³.

c) Vamos calcular a medida da área de cada face lateral.

- Área do $\triangle VAB$



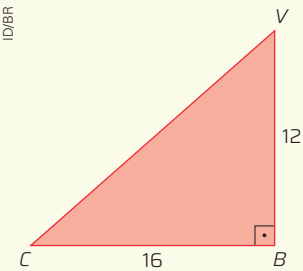
ID/BR

$$A_{\triangle VAB} = \frac{9 \cdot 12}{2}$$

$$A_{\triangle VAB} = 54$$

Assim, a área do triângulo VAB mede 54 cm².

- Área do $\triangle VBC$



ID/BR

$$A_{\triangle VBC} = \frac{16 \cdot 12}{2}$$

$$A_{\triangle VBC} = 96$$

Assim, a área do triângulo VBC mede 96 cm².

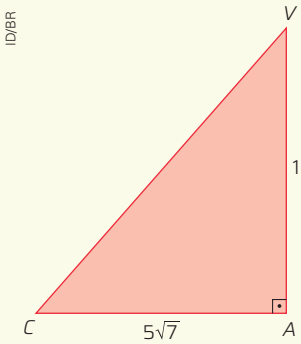
- Área do $\triangle VAC$

Inicialmente, precisamos descobrir a medida de $\overline{VA}$. Aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle VAB$, temos:

$$(VA)^2 = 12^2 + 9^2$$

$$VA = 15$$

Agora, vamos descobrir a medida da área do triângulo *VAC*.



$$A_{\triangle VAC} = \frac{5\sqrt{7} \cdot 15}{2}$$

$$A_{\triangle VAC} = \frac{75\sqrt{7}}{2}$$

Assim, a área do triângulo *VAC* mede $\frac{75\sqrt{7}}{2}$ cm².

Logo, a área lateral da pirâmide é dada por:

$$A_\ell = A_{\triangle VAB} + A_{\triangle VBC} + A_{\triangle VAC}$$

$$A_\ell = 54 + 96 + \frac{75\sqrt{7}}{2}$$

$$A_\ell = 150 + \frac{75\sqrt{7}}{2}$$

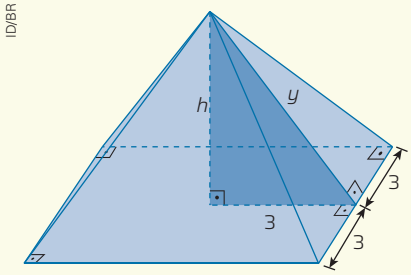
Portanto, a área lateral dessa pirâmide mede $\left(150 + \frac{75\sqrt{7}}{2}\right)$ cm².

R6 **Em uma pirâmide reta de base quadrada, com 4 m de altura, uma aresta da base mede 6 m. Calcule, para essa pirâmide, as medidas:**

a) da área total; **b)** do volume.

Resolução

Representando a pirâmide, temos:



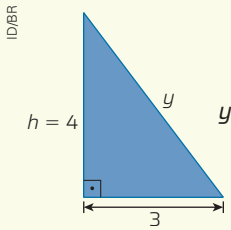
a) A base é um quadrado de lado de medida 6 m. Logo:

$$A_b = 6^2$$

$$A_b = 36$$

Assim, a área da base mede 36 m².

No triângulo assinalado, temos:



$$y^2 = 4^2 + 3^2$$

$$y = 5$$

Cada face lateral é um triângulo isósceles de medida da base 6 m e medida da altura 5 m.

Logo:

$$A_\ell = 4 \cdot A_\triangle$$

$$A_\ell = 4 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2}$$

$$A_\ell = 60$$

Assim, a área lateral dessa pirâmide mede 60 m².

Portanto, a área total é dada por:

$$A_t = A_\ell + A_b$$

$$A_t = 60 + 36$$

$$A_t = 96$$

Logo, a área total dessa pirâmide mede 96 m².

b) $V = \frac{1}{3} \cdot A_b h$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 4$$

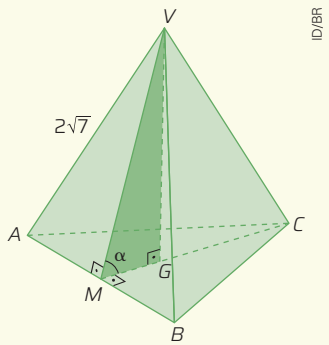
$$V = 48$$

Logo, o volume dessa pirâmide mede 48 m³.

R7 **Em uma pirâmide triangular regular, com $2\sqrt{3}$ cm de medida da altura, uma aresta lateral mede $2\sqrt{7}$ cm. Calcule a medida do ângulo formado por uma face lateral e a base dessa pirâmide.**

Resolução

Podemos representar a pirâmide da seguinte forma:



Temos de calcular a medida do ângulo agudo α formado por $\overline{VM}$ e $\overline{MC}$.

Na base *ABC*, temos: $CG = 2 \cdot GM$

Sabemos que $h = VG = 2\sqrt{3}$. Aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle VGC$, temos:

$$(CG)^2 + (VG)^2 = (VC)^2$$

$$(2 \cdot GM)^2 + (2\sqrt{3})^2 = (2\sqrt{7})^2$$

$$4 \cdot (GM)^2 + 12 = 28$$

$$GM = 2$$

No $\triangle VMG$, retângulo em *G*, conhecemos os catetos *VG* e *GM*. Então:

$$\text{tg } \alpha = \frac{VG}{GM}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } \alpha = \sqrt{3}$$

$$\alpha = 60°$$

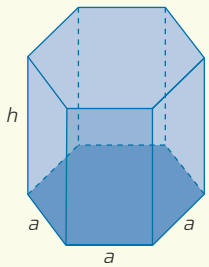
Portanto, o ângulo pedido mede 60°.

Não escreva no livro.

R8 **Em um prisma reto de base hexagonal regular, a área lateral mede 144 cm² e o perímetro da base mede 24 cm. Calcule a medida do volume da pirâmide que se obtém ao ligar um vértice da base superior aos vértices da base inferior.**

Resolução

Podemos representar o prisma reto de base hexagonal da seguinte forma:



ID/BR

Sabemos que o perímetro da base mede 24 cm; então:

$$6a = 24$$

$$a = \frac{24}{6}$$

$$a = 4$$

Assim, cada aresta mede 4 cm.

Como a área lateral mede 144 cm², temos:

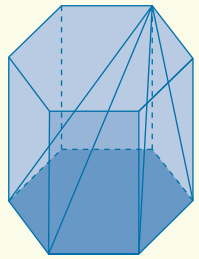
$$6 \cdot a \cdot h = 144$$

$$6 \cdot 4 \cdot h = 144$$

$$h = 6$$

Logo, a altura do prisma mede 6 cm.

Ao ligar um vértice da base superior aos vértices da base inferior, obtemos uma pirâmide.


ID/BR

Essa pirâmide mede 6 cm de altura; então:

$$A_b = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A_b = 24\sqrt{3}$$

Assim, a área da base da pirâmide mede $24\sqrt{3}$ cm².

Portanto:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_b h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 24\sqrt{3} \cdot 6$$

$$V = 48\sqrt{3}$$

Logo, o volume dessa pirâmide mede $48\sqrt{3}$ cm³.

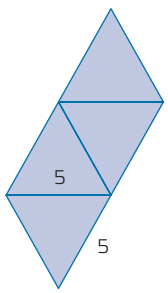
PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Para cada uma das atividades desta sequência, faça uma reflexão para perceber se:

- fazer esquemas ou desenhos ajudaria na resolução?
- há algum termo ou alguma ideia desconhecidos?
- é possível obter, de outra maneira, conhecimentos que ainda não tenho?

32 **As planificações a seguir representam superfícies de pirâmides regulares. Calcule as medidas da área lateral e da área total de cada pirâmide.**

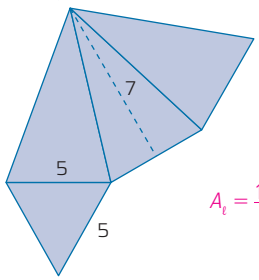
a)



Ilustrações: ID/BR

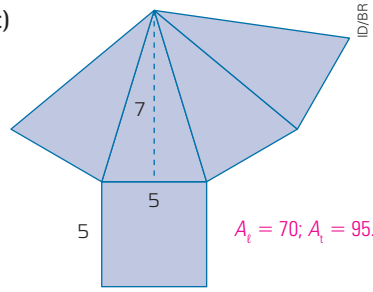
$A_\ell = \frac{75\sqrt{3}}{4}$; $A_t = 25\sqrt{3}$.

b)



$A_\ell = \frac{105}{2}$; $A_t = \frac{5(42 + 5\sqrt{3})}{4}$.

c)



ID/BR

$A_\ell = 70$; $A_t = 95$.

33 **Um cubo de 6 cm de aresta foi dividido em seis pirâmides idênticas, cada uma tendo uma das faces do cubo como base.**

a) No caderno, faça um desenho dessa situação. Resposta pessoal.

b) Calcule a medida do volume das pirâmides de duas maneiras diferentes. 36 cm³

34 **Dois sólidos são equivalentes se eles têm igual medida de volume. Se uma pirâmide medir 100 cm³ de volume, qual é a medida da aresta de um cubo equivalente?**

$\sqrt[3]{100}$ cm

35 **Calcule a medida do volume de um sólido formado por duas pirâmides pentagonais congruentes cuja área da base mede 25 cm² e cuja altura mede 12 cm.**

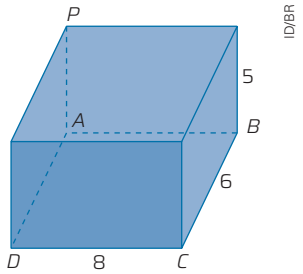
200 cm³

36 **Um triângulo retângulo isósceles *ABC*, de hipotenusa $BC = 3\sqrt{2}$ cm, é a base de uma pirâmide de vértice *V*. Sendo $\overline{VA}$ perpendicular ao plano da base e $VA = 4$ cm, calcule a medida do volume da pirâmide.**

6 cm³

Não escreva no livro.

37 Na figura a seguir, temos um paralelepípedo reto-retângulo. Calcule a medida do volume da pirâmide de vértice *P* e base *ABCD*. 80



ID/BR

A atividade **R8** pode ajudar na resolução da atividade **38**.

38 Considere um prisma reto de 12 m de aresta lateral, que tem como base um triângulo retângulo de hipotenusa de medida igual a 10 m e um cateto de medida igual a 6 m. Calcule a medida do volume da pirâmide que se obtém ao ligar um vértice da base superior aos vértices da base inferior. 96 m³

39 Uma pirâmide hexagonal regular, com 6 m de medida de altura, tem uma aresta da base com medida de 4 m. Calcule as medidas:

a) do volume da pirâmide; $48\sqrt{3}$ m³

b) da área total da pirâmide. $72\sqrt{3}$ m²

40 A área total de um tetraedro regular mede $36\sqrt{3}$ m². Calcule as medidas da altura e do volume desse tetraedro. $2\sqrt{6}$ m ; $18\sqrt{2}$ m³.

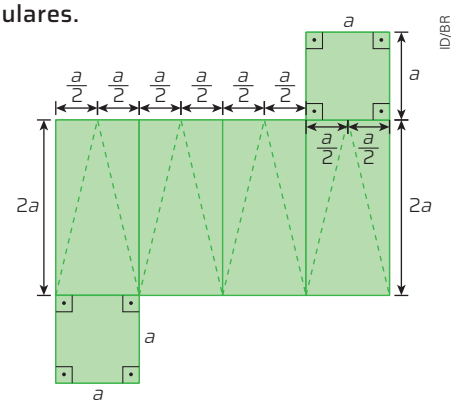
41 O volume de um tetraedro regular mede $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ cm³. Calcule as medidas da altura do tetraedro e da área de uma face. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ m; $\sqrt{3}$ m².

42 A altura de um tetraedro regular mede $\sqrt{6}$ m. Calcule as medidas da área total e do volume desse tetraedro.

A atividade **R7** pode ajudar na resolução da atividade **43**.

$9\sqrt{3}$ m²; $\frac{9\sqrt{2}}{4}$ m³.

43 Na figura a seguir, temos a planificação da superfície de um prisma quadrangular regular de medida de altura $2a$ e de base de medida de lado a. Cortando as faces laterais segundo as linhas tracejadas, podemos construir duas pirâmides quadrangulares regulares.



ID/BR

Calcule:

a) a medida do volume *V* de cada pirâmide; $V = \frac{a^3 \cdot \sqrt{15}}{6}$

b) a medida da área total A_t de cada pirâmide; $A_t = 5a^2$

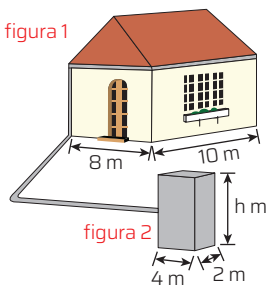
c) a razão $\frac{V}{V_0}$, sendo V_0 a medida do volume do prisma; $\frac{V}{V_0} = \frac{\sqrt{15}}{12}$

d) a razão $\frac{A_t}{A_0}$, sendo A_0 a medida da área total do prisma. $\frac{A_t}{A_0} = \frac{1}{2}$

44 Em uma pirâmide quadrangular regular, a área da base mede 16 m² e a área lateral mede 32 m². Calcule a medida do ângulo formado por uma face lateral e a base. 60°

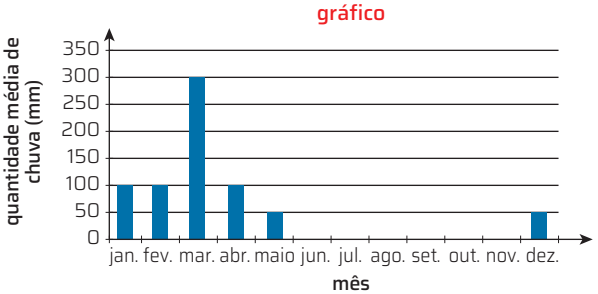
45 (Unesp) Prevenindo-se contra o período anual de seca, um agricultor pretende construir uma cisterna fechada, que acumule toda a água proveniente da chuva que cai sobre o telhado de sua casa, ao longo de um período de um ano.

As figuras e o gráfico representam as dimensões do telhado da casa, a forma da cisterna a ser construída e a quantidade média mensal de chuva na região onde o agricultor possui sua casa.



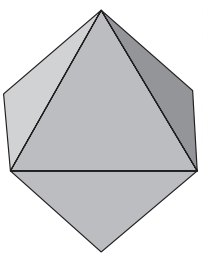
Ilustrações: Unesp. Fac-símile: ID/BR

gráfico



Sabendo que 100 milímetros de chuva equivalem ao acúmulo de 100 litros de água em uma superfície plana horizontal de 1 metro quadrado, determine a profundidade (*h*) da cisterna para que ela comporte todo o volume de água da chuva armazenada durante um ano acrescido de 10% desse volume. 7,7 m

46 (UFPE) Na ilustração [ao lado], temos um octaedro regular com área total da superfície $36\sqrt{3}$ cm². Indique o volume do octaedro, em cm³. 36 cm³


UFPE. Fac-símile: ID/BR

Não escreva no livro.

Enquanto os estudantes realizam a atividade **49**, aproveite para avaliá-los e verificar o que é preciso retomar com eles. Ao se reunir com os colegas para criar um problema, eles desenvolvem a competência geral **9**. Momentos como esse possibilitam que os estudantes exercitem a empatia e aprendam a respeitar diferentes opiniões.

Para resolver as atividades **47** e **48**, utilize uma calculadora.

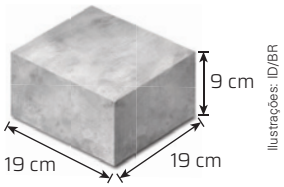
47 **A pirâmide de Quéops, também conhecida como a Grande Pirâmide do Egito, foi construída há mais de 4 mil anos. Essa construção lembra a forma de uma pirâmide quadrangular reta com 146 m de altura, na qual o comprimento do lado da base é aproximadamente 230 m. Considerando que essa pirâmide é maciça, responda: Qual seria a medida aproximada do seu volume?** $2{,}6 \cdot 10^6$ m³

Lizavetta/Shutterstock.com/ID/BR



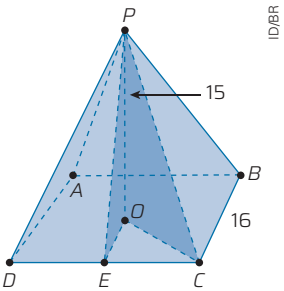
A pirâmide de Quéops é a mais antiga e a maior das três pirâmides da Necrópole de Gizé, na fronteira de Gizé, no Egito. É também a mais antiga das Sete Maravilhas do Mundo Antigo e a única a permanecer em grande parte intacta. Foto de 2023.

48 **Se fôssemos construir uma nova Grande Pirâmide do Egito, maciça, usando os tijolos com as dimensões indicadas na figura, quantos deles aproximadamente seriam necessários?** 800 000 000 tijolos.



Ilustrações: ID/BR

49 **Em duplas, analisem a figura a seguir e elaborem um problema que envolva a área lateral e o volume da pirâmide e no qual uma das respostas seja $PE = 17$ cm. Em seguida, troquem seu problema com o de outra dupla, para que uma resolva o problema elaborado pela outra.** Resposta pessoal.



ID/BR

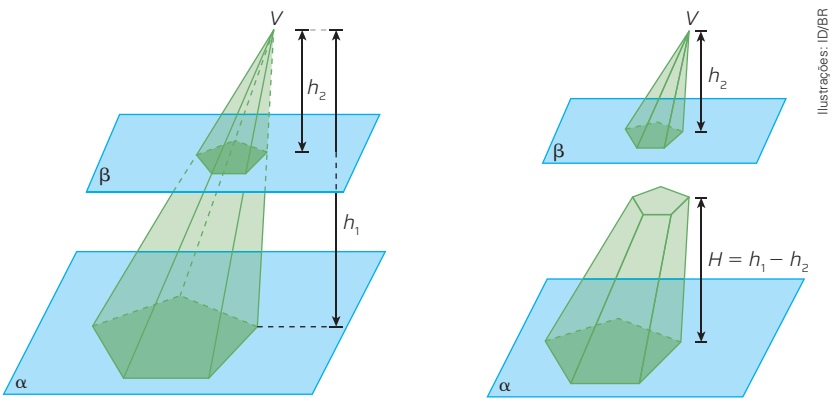
Ao término da resolução desta sequência de atividades, faça uma pausa para refletir com os estudantes: O que foi mais simples? O que já sabem? Onde erraram mais? Se julgar conveniente, organize com a turma uma discussão sobre os erros cometidos e o que fazer para evitá-los.

Tronco de pirâmide e pirâmides semelhantes

Sejam uma pirâmide de vértice V e medida de altura h_1 e α o plano que contém sua base.

Seccionando essa pirâmide em um plano β, paralelo a α e que está a uma distância h_2 $(0 < h_2 < h_1)$ de V, temos:

- uma nova pirâmide de vértice V e medida de altura h_2. Essa pirâmide e a pirâmide original são ditas **semelhantes**;
- outro sólido, chamado de **tronco de pirâmide de bases paralelas** (que correspondem às bases das duas pirâmides), cujas faces laterais são trapézios e cuja altura tem medida $H = h_1 - h_2$.



Ilustrações: ID/BR

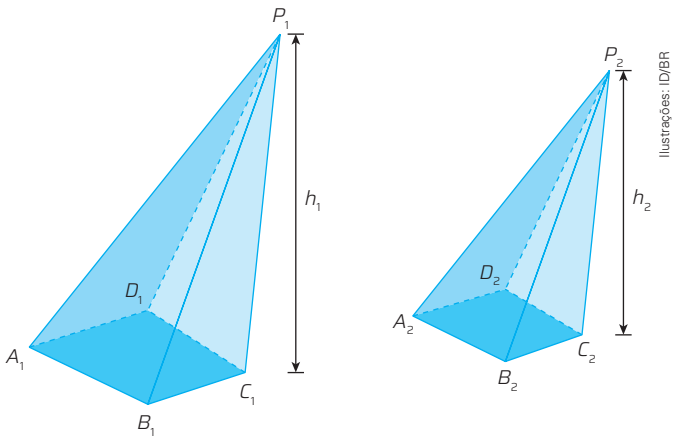
Duas pirâmides são semelhantes se existe uma correspondência entre elas, de modo que o quociente de cada segmento de reta de uma delas e o correspondente segmento da outra sejam constantes. Essa constante é a razão de semelhança entre essas pirâmides e será indicada por k.

Não escreva no livro.

Se duas pirâmides são semelhantes e a razão entre as medidas dos **elementos lineares** correspondentes é igual a k, então:

- a razão entre as medidas das **áreas de superfícies** correspondentes é igual a k^2;
- a razão entre as medidas dos **volumes** dos dois sólidos é igual a k^3.

Nas figuras a seguir, temos, por exemplo:



Ilustrações: ID/BR

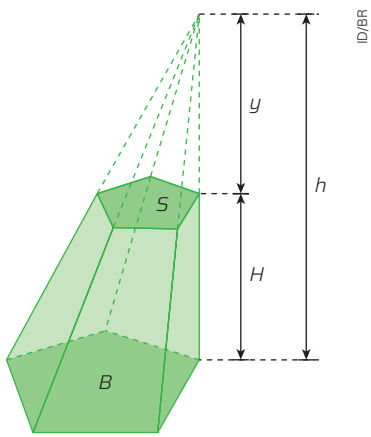
- $\frac{P_1A_1}{P_2A_2} = k$; $\frac{P_1B_1}{P_2B_2} = k$; $\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = k$; $\frac{A_1C_1}{A_2C_2} = k$; $\frac{h_1}{h_2} = k$; e assim para outros elementos lineares correspondentes;
- $\frac{A_{P_1A_1B_1}}{A_{P_2A_2B_2}} = k^2$; $\frac{A_{A_1B_1C_1D_1}}{A_{A_2B_2C_2D_2}} = k^2$; $\frac{A_{P_1A_1D_1}}{A_{P_2A_2D_2}} = k^2$; e assim para outras faces correspondentes;
- $\frac{V_1}{V_2} = k^3$ (V_1 e V_2: medidas dos volumes de pirâmides de alturas de medidas h_1 e h_2, respectivamente.

Volume de tronco de pirâmide

Sejam B e S as medidas das áreas das bases de um tronco de pirâmide de bases paralelas e H a medida da altura.

O volume V desse tronco será dado por $V_1 - V_2$, em que V_1 e V_2 são as medidas do volume das pirâmides de medidas de altura, respectivamente, h e y.

$$V = V_1 - V_2 \quad (1)$$



ID/BR

A razão de semelhança entre as pirâmides de bases B e S é $\frac{h}{y}$.

Então:

$$\frac{B}{S} = \left(\frac{h}{y}\right)^2 \quad \text{e} \quad \frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{h}{y}\right)^3$$

Substituindo V_1 por $V_2\left(\frac{h}{y}\right)^3$ em (1), obtemos:

$$V = V_2\left(\frac{h}{y}\right)^3 - V_2$$

$$V = V_2\left(\frac{h^3}{y^3} - 1\right)$$

$$V = V_2 \cdot \frac{h^3 - y^3}{y^3}$$

$$V = V_2 \cdot \frac{(h - y)(h^2 + hy + y^2)}{y^3}$$

Não escreva no livro.

Como $h - y = H$ e $V_2 = \frac{1}{3} \cdot S \cdot y$, temos:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot y \cdot \frac{H(h^2 + hy + y^2)}{y^3}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot \frac{H(h^2 + hy + y^2)}{y^2}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot H\left(\frac{h^2}{y^2} + \frac{h}{y} + 1\right)$$

Substituindo $\frac{h^2}{y^2}$ por $\frac{B}{S}$ e $\frac{h}{y}$ por $\sqrt{\frac{B}{S}}$, obtemos:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot H\left(\frac{B}{S} + \sqrt{\frac{B}{S}} + 1\right)$$

$$V = \frac{H}{3}(B + \sqrt{BS} + S)$$

Também podemos calcular o volume de duas pirâmides (V_1 e V_2) e obter o volume do tronco de pirâmide como $V_1 - V_2$.

É importante observar que:

- as bases de um tronco de pirâmide de bases paralelas são polígonos semelhantes;
- em um tronco de pirâmide reta que tem como base um polígono regular, as faces laterais são trapézios isósceles congruentes.

Analise com os estudantes se há necessidade de memorização da fórmula de cálculo do volume de um tronco de cone, uma vez que eles sabem as relações de semelhança e sabem calcular o volume de pirâmides.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

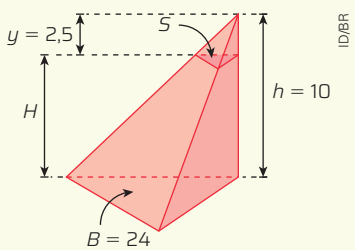
R9 **Secciona-se uma pirâmide triangular, de 24 m² de medida de área da base e 10 m de medida de altura, em um plano paralelo à base e distante 2,5 m do vértice da pirâmide. Calcule as medidas:**

a) da área da seção (S);

b) do volume do tronco de pirâmide obtido.

Resolução

Fazendo um esquema da situação, temos:



a) Temos: $\frac{S}{B} = \left(\frac{y}{h}\right)^2$

$$\frac{S}{24} = \left(\frac{2,5}{10}\right)^2$$

$$S = 1,5$$

Portanto, a área da seção S mede 1,5 m².

b) Sabemos que:

$$H + y = h$$

$$H = 10 - 2,5$$

$$H = 7,5$$

Logo, a altura do tronco mede 7,5 m.

Então:

$$V = \frac{H}{3}(B + \sqrt{BS} + S)$$

$$V = \frac{7,5}{3}(24 + \sqrt{24 \cdot 1,5} + 1,5)$$

$$V = 2,5(25,5 + 6)$$

$$V = 78,75$$

Portanto, o volume do tronco de pirâmide mede 78,75 m³.

R10 **Um tronco de pirâmide reta de base quadrada tem arestas das bases com medidas 2 cm e 8 cm e altura de medida 5 cm. Calcule a medida:**

a) da área lateral;

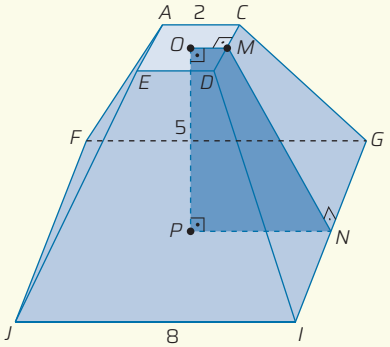
b) da área total;

c) de uma aresta lateral;

d) do volume.

Resolução

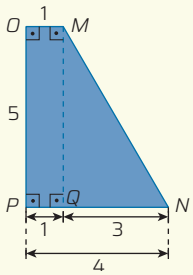
Podemos representar a situação da seguinte forma:



ID/BR

O: centro do quadrado *ACDE*
P: centro do quadrado *FGIJ*
M: ponto médio de $\overline{CD}$ ($OM = 1$ cm)
N: ponto médio de $\overline{GI}$ ($PN = 4$ cm)

a) Para calcular a medida da área de cada face lateral, precisamos, inicialmente, calcular a medida da altura $\overline{MN}$ do trapézio isósceles *CDIG*.



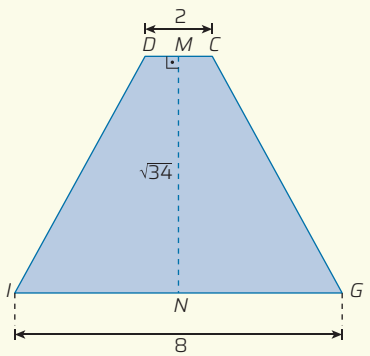
ID/BR

No trapézio *OMNP*, traçando $\overline{MQ} \parallel \overline{OP}$, obtemos o $\triangle MNQ$. Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$(MN)^2 = (MQ)^2 + (QN)^2$$
$$(MN)^2 = 5^2 + 3^2$$
$$MN = \sqrt{34}$$

Assim, $MN = \sqrt{34}$ cm.

Cada face lateral é um trapézio isósceles de bases de medidas 8 cm e 2 cm e de altura de medida $\sqrt{34}$ cm; então:



ID/BR

$$A_{\text{trapézio}} = \frac{(8 + 2)\sqrt{34}}{2}$$
$$A_{\text{trapézio}} = 5\sqrt{34}$$

Assim, a área do trapézio mede $5\sqrt{34}$ cm².

Portanto, a área lateral A_ℓ do tronco é dada por:

$$A_\ell = 4 \cdot A_{\text{trapézio}}$$
$$A_\ell = 4 \cdot 5\sqrt{34}$$
$$A_\ell = 20\sqrt{34}$$

Logo, a área lateral desse tronco de pirâmide mede $20\sqrt{34}$ cm².

b) $A_t = A_\ell + B + S$

Mas:

- *B* é a medida da área de *FGIJ*; então:
$$B = 8^2$$
$$B = 64$$
Assim, a área da base maior mede 64 cm².
- *S* é a medida da área de *ACDE*; então:
$$S = 2^2$$
$$S = 4$$
Assim, a área da base menor mede 4 cm².

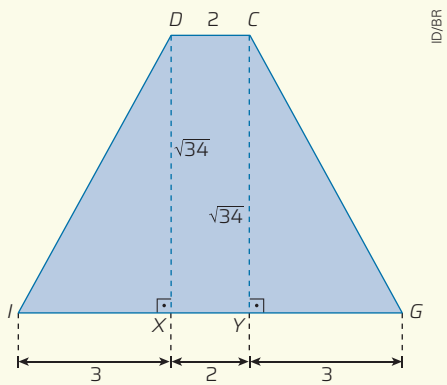
Logo:

$$A_t = 20\sqrt{34} + 64 + 4$$
$$A_t = 68 + 20\sqrt{34}$$

Portanto, a área total desse tronco de pirâmide mede $(68 + 20\sqrt{34})$ cm².

c) Cada face lateral desse tronco de pirâmide é um trapézio isósceles.

Vamos traçar $\overline{DX} \perp \overline{GI}$ e $\overline{CY} \perp \overline{GI}$.



ID/BR

Aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle CYG$, temos:

$$(CG)^2 = (CY)^2 + (YG)^2$$
$$(CG)^2 = (\sqrt{34})^2 + 3^2$$
$$CG = \sqrt{43}$$

Portanto, a medida de uma aresta lateral é $\sqrt{43}$ cm.

d) Podemos calcular o volume desse tronco de duas maneiras:

1ª maneira: Usando a fórmula para o volume do tronco de pirâmide.

Não escreva no livro.

Sabendo que $H = 5$, temos:

$$V = \frac{H}{3}(B + \sqrt{BS} + S)$$

$$V = \frac{5}{3}(64 + \sqrt{64 \cdot 4} + 4)$$

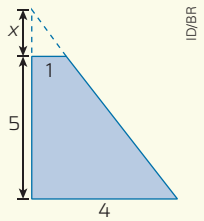
$$V = 140$$

Logo, o volume do tronco mede 140 cm³.

2ª maneira: Calculando o volume de cada uma das pirâmides.

Vamos considerar que:

- V_1 é a medida do volume da primeira pirâmide (de altura $x + 5$) que contém o tronco;
- V_2 é a medida do volume da pirâmide de altura de medida x retirada da primeira pirâmide.



ID/BR

Assim, por semelhança, temos:

$$\frac{1}{4} = \frac{x}{x+5}$$

$$x = \frac{5}{3}$$

Portanto, a altura da primeira pirâmide retirada mede $\frac{5}{3}$ cm.

A altura da pirâmide maior mede:

$$x + 5 = \frac{5}{3} + 5 = \frac{20}{3}$$

Ou seja, a altura da pirâmide maior mede $\frac{20}{3}$ cm.

Logo:

$$V = V_1 - V_2$$

$$V = \left(\frac{1}{3} \cdot 64 \cdot \frac{20}{3}\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 4 \cdot \frac{5}{3}\right)$$

$$V = \frac{1280}{9} - \frac{20}{9}$$

$$V = 140$$

Portanto, o volume do tronco de pirâmide mede 140 cm³.

Ao resolver a atividade **58**, na medida em que os estudantes interpretam o texto, mobilizam conhecimentos na resolução e registram a solução utilizando a linguagem matemática, são desenvolvidas a habilidade **EM13MAT309** e a competência geral **9**.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

50 Uma pirâmide de base quadrada mede 12 m de altura com aresta da base medindo 8 m. A que distância do vértice deve-se traçar um plano paralelo à base para se obter um quadrado de lado de medida 2 m? 3 m

51 Um tronco de pirâmide regular tem 8 m de medida de altura e bases quadradas com lados de medidas 6 m e 18 m. Calcule a medida do seu volume. 1 248 m³

52 Em um tronco de pirâmide reta, cada aresta lateral mede 13 cm e as bases são quadrados de lados de medidas 6 cm e 16 cm. Calcule as medidas da área lateral e da área total do tronco. $A_\ell = 528$ cm²; $A_t = 820$ cm².

53 Secciona-se uma pirâmide triangular regular, cuja aresta lateral mede 17 cm e cuja aresta da base mede $8\sqrt{3}$ cm, em um plano paralelo à base e distante 5 cm do vértice. Usando sua calculadora para dar as respostas em números decimais, calcule as medidas:

a) das arestas da nova pirâmide; $a_\ell \simeq 5{,}67$ cm e $a_b \simeq 4{,}62$ cm.

b) da área da seção obtida; Aproximadamente 9,24 cm².

c) do volume da nova pirâmide; Aproximadamente 15,40 cm³.

d) do volume do tronco. Aproximadamente 400,30 cm³.

54 Uma pirâmide quadrangular regular, com diagonal da base medindo 12 cm e aresta lateral medindo 10 cm, foi seccionada em um plano paralelo à base e que passa a 2 cm do vértice. Calcule as medidas:

a) da aresta lateral da nova pirâmide; 2,5 cm

b) do lado da seção; $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ cm

c) do volume do tronco. 189 cm³

55 Um triângulo com lados de medidas 5 cm, 5 cm e 6 cm é base de uma pirâmide de 15 cm de medida de altura. Seccionando-se essa pirâmide em um plano paralelo à sua base e distante 6 cm do vértice, calcule as medidas:

a) da área da seção; 1,92 cm²

b) do volume do tronco obtido. 56,16 cm³

56 Um tetraedro regular T, de 6 cm de medida de aresta, é seccionado em um plano que passa pelos pontos médios de três das suas arestas, originando um novo tetraedro T_1 e um tronco T_2. Usando a calculadora para dar as respostas em números na forma decimal, calcule as medidas:

a) da aresta de T_1; 3 cm

b) da altura de T_1; $\sqrt{6}$ cm

c) da área total de T_1; $9\sqrt{3}$ cm²

d) do volume de T_1; $\frac{9\sqrt{2}}{4}$ cm³

e) do volume de T_2; $\frac{63\sqrt{2}}{4}$ cm³

f) da área total de T_2. $\frac{63\sqrt{3}}{2}$ cm²

57 Uma pirâmide regular P é cortada por um plano paralelo à sua base. Se a área da seção mede um terço da área da base de P, calcule a razão entre as medidas do volume de P e do volume da nova pirâmide. $\frac{V_p}{V_{pir.}} = 3\sqrt{3}$

58 Reúna-se com um colega para elaborar um problema que envolva o cálculo da área total ou do volume de uma pirâmide de altura de medida 12 cm. Depois, troquem seu problema com o de outra dupla, para que uma resolva o problema elaborado pela outra.

Resposta pessoal.

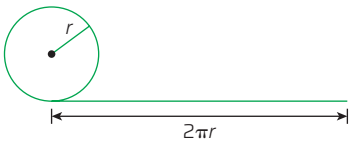
ÁREA DA SUPERFÍCIE E VOLUME DOS CORPOS REDONDOS

Agora, vamos aprender a realizar cálculos de distâncias, volumes e áreas relacionados a corpos redondos. Para compreender e fazer esses cálculos, você vai precisar de algumas relações métricas no círculo e na circunferência, que relembraremos a seguir.

Comprimento da circunferência, área do círculo e de partes do círculo

O comprimento C de uma circunferência de raio de medida r é dado por:

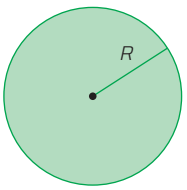
$$C = 2\pi r$$



ID/BR

A área A de um círculo de raio de medida R é dada por:

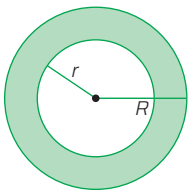
$$A = \pi R^2$$



ID/BR

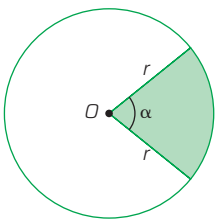
A área A de uma coroa circular, determinada por circunferências coplanares e concêntricas de raios r e R, com $r < R$, é dada por:

$$A = \pi(R^2 - r^2)$$



ID/BR

Para calcular a área de um setor circular, determinado por um ângulo central de medida α (em grau) em um círculo de raio r, podemos utilizar a regra de três.

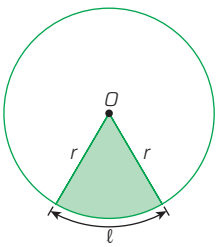


ID/BR

Ângulo central	Área
360°	πr^2
α	A_{setor}

$$A_{setor} = \frac{\pi r^2 \alpha}{360^\circ}$$

Podemos, também, calcular a área de um setor circular em função do comprimento ℓ do arco que o determina.



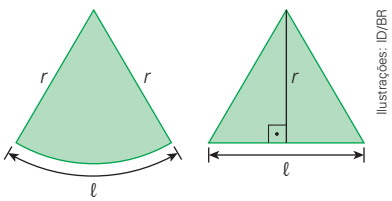
ID/BR

Arco	Área
$2\pi r$	πr^2
ℓ	A_{setor}

$$A_{setor} = \frac{\ell r}{2}$$

Note que:

Um setor circular determinado por um arco de comprimento ℓ em um círculo de raio r é equivalente a um triângulo isósceles de base ℓ e de altura relativa à base igual a r.

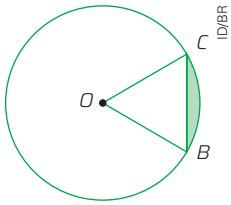


Ilustrações: ID/BR

Não escreva no livro.

A área A do segmento circular da figura é dada por:

$$A = A_{\text{setor } COB} - A_{\triangle COB}$$



ID/BR

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

59 Calcule as medidas do comprimento da circunferência e da área do círculo, dado o raio r.

a) $r = 5$ cm — 10π cm e 25π cm².

b) $r = 8$ cm — 16π cm e 64π cm².

60 Calcule a medida do comprimento da circunferência de um círculo de 36π cm² de medida de área. 12π cm

61 Calcule a medida da área de um círculo cuja circunferência tem 20π cm de comprimento. 100π cm²

62 Calcule a medida da área de uma coroa circular determinada por circunferências de raios 4 m e 7 m. 33π m²

63 Calcule a medida da área de uma coroa circular, sabendo que uma corda da maior circunferência, que tangencia a menor, mede 16 m. 64π m²

64 Calcule a medida da área de um setor circular de:

a) raio 6 cm e ângulo de 20°; 2π cm²

b) raio 4 cm e arco de comprimento 3 cm; 6 cm²

c) raio 9 m e ângulo de 45°; $\frac{81\pi}{8}$ m²

d) raio 8 m e arco de comprimento 5 m. 20 m²

65 Calcule a medida da área do menor dos segmentos circulares determinados por um lado:

a) de um triângulo equilátero inscrito em um círculo de raio 6 m; $3(4\pi - 3\sqrt{3})$ m²

b) de um quadrado inscrito em um círculo de raio 6 m; $9(\pi - 2)$ m²

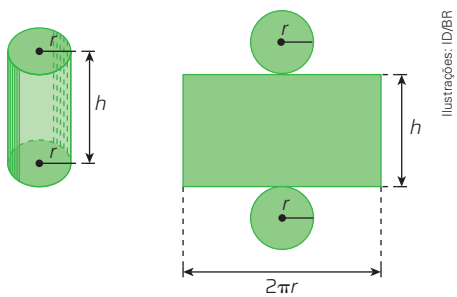
c) de um hexágono regular inscrito em um círculo de raio 12 cm. $12(2\pi - 3\sqrt{3})$ cm²

Superfície de um cilindro e sua área

Em um cilindro, temos:

A **superfície total** de um cilindro é a reunião da superfície lateral com as superfícies de suas bases.

Consideremos um cilindro circular reto de medidas de raio r e altura h.



Ilustrações: ID/BR

A medida da área lateral A_ℓ desse cilindro é igual à medida da área de um retângulo de dimensões $2\pi r$ e h.

$$A_\ell = 2\pi rh$$

Cada base tem medida de área πr^2; logo, a área total A_t desse cilindro mede:

$$A_t = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

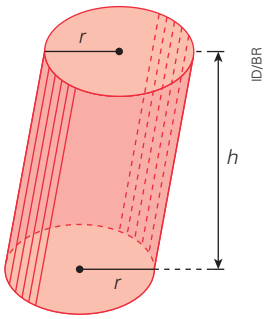
$$A_t = 2\pi r(r + h)$$

Incentive os estudantes a investigar outras maneiras de obter a medida do volume de cilindros, reproduzindo o experimento de comparar o conteúdo de um cilindro com o de um prisma de mesma área da base e de mesma altura que o cilindro. Essa investigação contribui para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT504**, na medida em que os estudantes investigam e obtêm fórmulas para o cálculo de volume de sólidos geométricos.

Volume de um cilindro

Usando o princípio de Cavalieri, podemos verificar que o volume V de um cilindro circular de raio r e altura h é dado por:

$$V = \pi r^2 h$$



PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Para resolver as próximas atividades, saber calcular a área do círculo e o comprimento da circunferência é muito importante. Se tiver dúvidas, faça uma revisão.

R11 **Em um cilindro reto, a área lateral mede 30π m² e a área total, 48π m². Calcule a medida do seu volume.**

Resolução

Sendo r o raio e h a altura, temos:

- $A_\ell = 30\pi$
  $2\pi rh = 30\pi$ (1)
- $A_t = 48\pi$
  $2\pi r(r + h) = 48\pi$
  $2\pi r^2 + 2\pi rh = 48\pi$ (2)

Substituindo (1) em (2), obtemos:

$$2\pi r^2 + 30\pi = 48\pi$$
$$r^2 = 9$$
$$r = 3$$

Substituindo r por 3 em (1), temos:

$$2\pi \cdot 3 \cdot h = 30\pi$$
$$h = 5$$

Portanto:

$$V = \pi r^2 h$$
$$V = \pi \cdot 3^2 \cdot 5$$
$$V = 45\pi$$

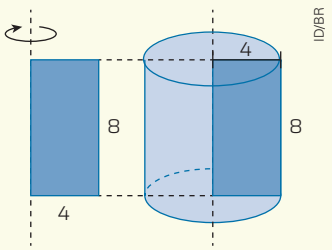
Logo, o volume do cilindro mede 45π m³.

R12 **Calcule a medida do volume do cilindro circular reto gerado pela rotação de um retângulo de dimensões 4 cm e 8 cm em torno do lado:**

a) maior; **b)** menor.

Resolução

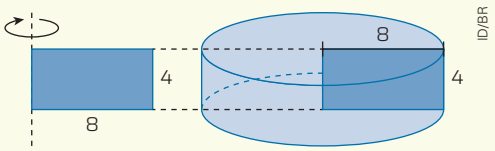
a) O sólido é um cilindro circular reto de raio 4 cm e altura 8 cm.



$$V = \pi r^2 h$$
$$V = \pi \cdot 4^2 \cdot 8$$
$$V = 128\pi$$

Portanto, o volume do cilindro circular mede 128π cm³.

b) O sólido é um cilindro circular reto de raio 8 cm e altura 4 cm.



$$V = \pi r^2 h$$
$$V = \pi \cdot 8^2 \cdot 4$$
$$V = 256\pi$$

Portanto, o volume do cilindro circular é 256π cm³.

R13 **Um cilindro circular reto está circunscrito a um prisma reto cuja base é um triângulo retângulo de catetos 6 m e 8 m. Se a altura do prisma mede 15 m, calcule as medidas:**

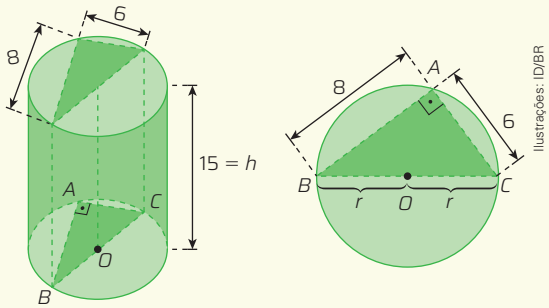
a) da área total do cilindro;

b) do volume do cilindro.

Não escreva no livro.

Resolução

Na base, temos um triângulo retângulo inscrito em uma circunferência de raio r. A hipotenusa passa pelo centro do círculo.



Ilustrações: ID/BR

Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2$$
$$(2r)^2 = 8^2 + 6^2$$
$$r = 5$$

Assim, o raio da base do cilindro mede 5 m.

a) $A_t = 2\pi r(r + h)$

$$A_t = 2\pi \cdot 5(5 + 15)$$
$$A_t = 200\pi$$

Portanto, a área total do cilindro mede 200π m².

b) $V = \pi r^2 h$

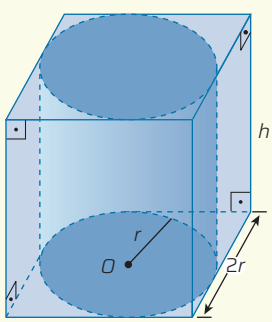
$$V = \pi \cdot 5^2 \cdot 15$$
$$V = 375\pi$$

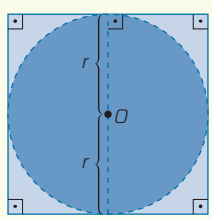
Portanto, o volume do cilindro mede 375π m³.

R14 **Um cilindro circular reto está inscrito em um prisma quadrangular regular de área lateral 160 cm² e volume 160 cm³. Calcule a medida da área lateral do cilindro.**

Resolução

O prisma tem base quadrada de lado $2r$ e face retangular de dimensões $2r$ e h.





Ilustrações: ID/BR

Assim:

- Área lateral do prisma = 160

$$4 \cdot 2rh = 160$$
$$rh = 20 \quad (1)$$

- Volume do prisma = 160

$$(2r)^2 h = 160$$
$$r^2 h = 40 \quad (2)$$

Substituindo (1) em (2), obtemos:

$$r^2 \cdot \frac{20}{r} = 40$$
$$r = 2$$

Substituindo r por 2 em (1), obtemos:

$$2h = 20$$
$$h = 10$$

Logo, a altura do cilindro mede 10 cm.

A área lateral (A_ℓ) do cilindro é dada por:

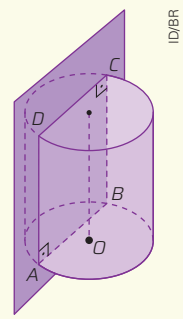
$$A_\ell = 2\pi rh$$
$$A_\ell = 2\pi \cdot 2 \cdot 10$$
$$A_\ell = 40\pi$$

Portanto, a área lateral do cilindro mede 40π cm².

R15 **Em um cilindro circular reto de raio 5 cm e altura 10 cm, a que distância do eixo devemos traçar um plano paralelo a ele para obtermos seção de área 80 cm²?**

Resolução

A seção que obtemos ao traçar o plano paralelo ao cilindro é o retângulo $ABCD$, com $AD = 10$ cm. Então, temos:

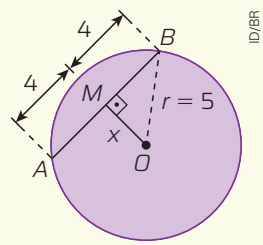


ID/BR

$$A_{\text{seção}} = 80$$
$$AB \cdot AD = 80$$
$$AB = \frac{80}{10}$$
$$AB = 8$$

Assim, $AB = 8$ cm.

Na base, podemos observar que $\triangle OMB$ é retângulo. Então, aplicando o teorema de Pitágoras, temos:



ID/BR

$$(OM)^2 + (MB)^2 = (OB)^2$$
$$x^2 + 4^2 = 5^2$$
$$x^2 = 25 - 16$$
$$x = 3$$

Portanto, devemos traçar o plano paralelo a uma distância de 3 cm do eixo do cilindro.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

No item **c** da atividade **66**, ao comentar uma afirmação dada, os estudantes exercem a habilidade de argumentação, desenvolvendo, assim, a competência geral **7**.

66 Faça o que se pede.

a) Copie o quadro a seguir no caderno e complete-o, considerando que os cilindros têm as bases congruentes.

Altura do cilindro	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Volume	1,5	3	4,5	6	7,5	9	10,5	12	13,5

b) Represente em um referencial cartesiano a relação entre a altura e o volume desses cilindros de bases congruentes. Considere as alturas no eixo das abscissas e os volumes no das ordenadas.
Consulte a resposta no Manual do Professor.

c) Analise o gráfico e comente esta afirmação: "A medida do volume de cilindros com mesma base é diretamente proporcional à medida da altura de cada um". A afirmação está correta, pois $V = 1{,}5 \cdot h$.

67 Dois cilindros têm a mesma medida de altura: 1 m. O raio da base de um deles mede 10 cm, e o do outro, 20 cm. **67. a)** $A_{\ell_1} = 0{,}2\pi$ cm²; $A_{\ell_2} = 0{,}4\pi$ cm²; $A_{\ell_2} = 2A_{\ell_1}$

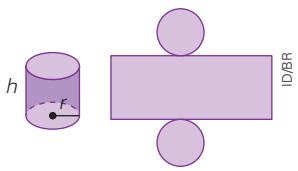
a) Calcule e compare as áreas laterais dos dois cilindros.

b) Calcule as medidas das áreas totais dos dois cilindros. $A_{t_1} = 0{,}22\pi$ m²; $A_{t_2} = 0{,}48\pi$ m²

68 Quanto mede o raio da base de um cilindro cujo volume mede 52 cm³ e cuja altura mede 13 cm? $\frac{2\sqrt{\pi}}{\pi}$ cm

69 As figuras a seguir mostram um cilindro e um molde de sua planificação.

Na atividade **70**, peça aos estudantes que expliquem suas resoluções. Isso os auxiliará no desenvolvimento da argumentação, contribuindo para a aquisição da competência geral **7**.



a) Indique uma expressão para a medida da área lateral do cilindro em função de r e h. $A_\ell = 2\pi \cdot r \cdot h$

b) Faça o mesmo para a área total e para o volume. $A_t = 2\pi r \cdot (h + r)$; $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$

70 Agora, resolva o problema proposto na abertura deste capítulo. $V_{prisma} = 800$ e $V_{cilindro} \simeq 1\,571$.
Na embalagem cilíndrica cabe mais suco.

71 Um cilindro de revolução tem altura 6 m e volume 54π m³. Calcule a medida da área total do cilindro. 54π m²

72 O volume e a área da base de um cilindro circular reto medem 100π m³ e 25π m², respectivamente. Calcule a medida da área lateral do cilindro. 40π m²

73 Um cilindro é equilátero se sua altura e o diâmetro da sua base têm a mesma medida. Em um cilindro equilátero de altura 20 cm, calcule as medidas:

a) da área da base; 100π cm²

b) da área lateral; 400π cm²

c) da área total; 600π cm²

d) do volume. 2 000π cm³

74 Sabendo que o volume de um cilindro equilátero mede 250π m³, faça o que se pede em cada item.

a) Calcule a medida da sua área total. 150π m²

b) Calcule a medida da área de uma seção meridiana, dado que ela corresponde à intersecção de um cilindro com o plano que contém seu eixo. 100 m²

75 Calcule as medidas do volume e da área total do sólido gerado pela rotação de um retângulo de dimensões 2 cm e 6 cm em torno do lado maior. 24π cm³; 32π cm².

76 Calcule a medida do volume do sólido gerado pela rotação de um retângulo de dimensões 3 m e 4 m em torno do:

a) lado menor; 48π m³

b) lado maior. 36π m³

77 Certa bolacha pode ser encontrada em pacotes de mesma massa, mas em dois tamanhos de bolacha:

- redonda, com 6 cm de diâmetro; **77. a)** 20 bolachas.
- redonda, com 3 cm de diâmetro. **77. b)** R$ 7,60, R$ 11,40 e R$ 22,80.

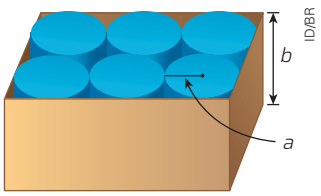


Pretende-se vender, pelo mesmo preço, dois tipos de embalagem, cada um com um só tamanho de bolacha.

a) Se a embalagem de bolachas maiores tiver 5 unidades, quantas unidades deverá ter a outra?

b) Se um pacote com 5 bolachas grandes custar R$ 4,75, quanto deverão custar pacotes com 8, 12 e 24 bolachas desse mesmo tamanho?

78 Seis cilindros retos foram colocados em uma caixa, como mostra a figura.



a) Indique uma expressão para a medida do volume total ocupado pelos cilindros. $V = 6\pi a^2 b$

b) Indique uma expressão para a medida do volume da caixa. $V_c = 24a^2 b$

c) Que porcentagem do volume da caixa é ocupada pelos cilindros? Aproximadamente 79%.

79 Um cilindro circular reto tem altura de medida 4 m. Conservando-se a altura e aumentando-se em 1 m o raio desse cilindro, a área lateral do novo cilindro será igual à área total do cilindro primitivo. Calcule o raio do cilindro primitivo. 2 m

80 Calcule a área da seção paralela ao eixo de um cilindro circular reto, de 8 m de altura e 1 m de raio, feita a 0,6 m do eixo. 12,8 m²

Ao resolver as atividades **70**, **77**, **78**, **81**, **82**, **83**, **84**, **85** e **90**, os estudantes desenvolvem a habilidade **EM13MAT309** na medida em que interpretam o texto, mobilizam conhecimentos na resolução e registram a solução usando a linguagem matemática de maneira adequada.

Não escreva no livro.

81 **Indique a alternativa correta no caderno.**

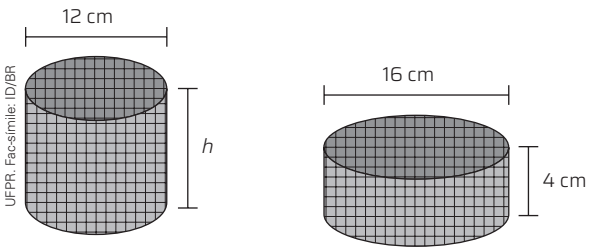
(Unifesp) Por motivos técnicos, um reservatório de água na forma de um cilindro circular reto (reservatório 1), completamente cheio, será totalmente esvaziado e sua água será transferida para um segundo reservatório, que está completamente vazio, com capacidade maior do que o primeiro, também na forma de um cilindro circular reto (reservatório 2). Admita que a altura interna $h(t)$ em metros da água no reservatório 1, t horas a partir do instante em que se iniciou o processo de esvaziamento, pôde ser expressa pela função $h(t) = \frac{15t - 120}{t - 12}$.

a) Determine quantas horas após o início do processo de esvaziamento a altura interna da água no reservatório 1 atingiu 5 m e quanto tempo demorou para que esse reservatório ficasse completamente vazio. 8 horas.

b) Sabendo que o diâmetro interno da base do reservatório 1 mede 6 m e o diâmetro interno da base do reservatório 2 mede 12 m, determine o volume de água que o reservatório 1 continha inicialmente e a altura interna H, em metros, que o nível da água atingiu no reservatório 2, após o término do processo de esvaziamento do reservatório 1. 90π m³; 2,5 m.

82 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(UFPR) As duas latas na figura abaixo possuem internamente o formato de cilindros circulares retos, com as alturas e diâmetros da base indicados.



UFPR. Fac-símile: ID/BR

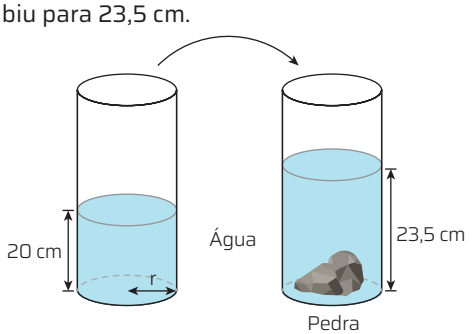
Sabendo que ambas as latas têm o mesmo volume, qual o valor aproximado da altura h? Alternativa **d**.

a) 5 cm **c)** 6,25 cm **e)** 8,43 cm

b) 6 cm **d)** 7,11 cm

83 **Escreva a alternativa correta no caderno.**

(Fuvest-SP) Para medir o volume de uma pedra com formato irregular, Ana utilizou um recipiente cilíndrico de raio $r = 8$ cm e com água até a altura de 20 cm. Após colocar a pedra no recipiente, a altura da água subiu para 23,5 cm.



Fuvest-SP. Fac-símile: ID/BR

O volume da pedra é: Alternativa **b**.

a) 128π cm³ **c)** 240π cm³ **e)** 320π cm³

b) 224π cm³ **d)** 282π cm³

84 **É comum os construtores de poços avaliarem o volume de um poço multiplicando o diâmetro da boca do poço por si mesmo e pela profundidade do poço.**

a) De quantos por cento, em relação ao volume real, é o erro que um poceiro comete quando faz esse cálculo? Aproximadamente 27%.

b) Como você explica o cálculo usado por esses construtores? Eles usam o valor 4 como aproximação de π.

85 **Registre no caderno a alternativa correta.**

(Enem) No manejo sustentável de florestas, é preciso muitas vezes obter o volume da tora que pode ser obtida a partir de uma árvore. Para isso, existe um método prático, em que se mede a circunferência da árvore à altura do peito de um homem (1,30 m), conforme indicado na figura. A essa medida denomina-se "rodo" da árvore. O quadro a seguir indica a fórmula para se *cubar*, ou seja, obter o volume da tora em m³ a partir da medida do rodo e da altura da árvore.



Enem. Fac-símile: ID/BR

O volume da tora em m³ é dado por

V = rodo² × altura × 0,06

O rodo e a altura da árvore devem ser medidos em metros. O coeficiente 0,06 foi obtido experimentalmente.

Um técnico em manejo florestal recebeu a missão de cubar, abater e transportar cinco toras de madeira, de duas espécies diferentes, sendo

- 3 toras de espécie I, com 3 m de rodo, 12 m de comprimento e densidade 0,77 toneladas/m³;
- 2 toras da espécie II, com 4 m de rodo, 10 m de comprimento e densidade 0,78 toneladas/m³.

Após realizar seus cálculos, o técnico solicitou que enviassem caminhões para transportar uma carga de, aproximadamente, Alternativa **a**.

a) 29,9 toneladas. **d)** 35,3 toneladas.

b) 31,1 toneladas. **e)** 41,8 toneladas.

c) 32,4 toneladas.

86 **Calcule o volume e a área total do cilindro inscrito em um prisma reto de base quadrada, cujas arestas lateral e da base medem, respectivamente, 10 cm e 6 cm.** 283 cm³; 245 cm².

Para as atividades **84** e **85**, pergunte aos estudantes: Quais conhecimentos as pessoas que perfuram poços utilizam? Como elas aprenderam a fazer essa construção? A Matemática que essas pessoas empregam se assemelha à que eles provavelmente aprenderam na escola?

Não escreva no livro.

87 Calcule as medidas do volume e da área total do cilindro inscrito em um cubo de volume 216 cm³.
170 cm³; 170 cm².

88 Faça o que se pede a seguir. Se necessário, utilize uma calculadora.

a) Copie no caderno o quadro relativo a cilindros, todos de bases congruentes, e complete-o.

Altura	0,5	1	1,5	2	...	h
Volume	1,57	3,14	4,71	6,28		3,14h

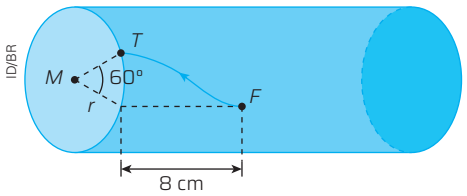
b) Os volumes desses cilindros são diretamente proporcionais às alturas? Explique. Sim, $V = 3{,}14 \cdot h$.

c) Qual deve ser a medida da altura aproximada de um cilindro com essa base para que seu volume seja 11? Aproximadamente 3,5.

89 Sabendo que as dimensões de uma folha de papel A4 são 21 cm e 29,7 cm, qual é a medida do volume de um cilindro cuja superfície lateral é uma folha de papel A4?
1 474 cm³ ou 1 042 cm³.

Incentive os estudantes a planificar a superfície do sólido para resolver a atividade **90**.

90 O caminho mais curto entre uma formiga (F) e um torrão de açúcar (T), sobre a superfície de um corpo cilíndrico, já está traçado. Analise a figura.



$r = \frac{18}{\pi}$ cm

A formiga tem, no máximo, 5 segundos para chegar ao torrão; caso contrário, uma mosca (M) fica com o torrão. Qual deve ser a velocidade média mínima da formiga para que ela não perca o doce? 2 cm/s

91 Com um colega, formulem um problema que comece assim: "De um cilindro, sabe-se que...". Esse problema deve envolver uma situação real. Em seguida, troquem o problema elaborado por vocês com outra dupla, para que uma resolva o problema elaborado pela outra. Resposta pessoal.

Sorteie alguns dos problemas elaborados pelas duplas na atividade **91** para que sejam resolvidos e analisados pela turma. Essa atividade contribui para a aquisição da competência geral **9**. Momentos como esse possibilitam aos estudantes exercitar a empatia e aprender a respeitar diferentes opiniões.

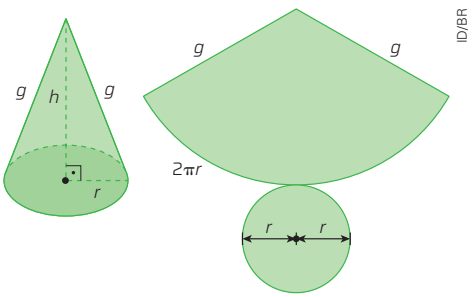
Superfícies de um cone e sua área

Vamos iniciar o estudo de cones retomando o conceito de superfície.

A **superfície lateral** de um cone é a reunião de suas geratrizes.

A **superfície total** de um cone é a reunião de sua superfície lateral com sua base.

Consideremos um cone circular reto de altura h e raio da base r.



A superfície lateral é o setor circular de raio g e arco de comprimento $2\pi r$. Logo, sua área A_ℓ é dada por:

$$A_\ell = \pi r g$$

A base é um círculo de área πr^2. Logo, a área A_t da superfície total é dada por:

$$A_t = \pi r^2 + \pi r g$$

$$A_t = \pi r(r + g)$$

Volume de um cone

Usando o princípio de Cavalieri, verificamos que o volume V de um cone circular reto, de raio r e altura h, é dado por:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 h$$

Volumes de cilindros e cones e princípio de Cavalieri

O objeto digital apresenta conhecimentos sobre volumes de cilindros e cones, explorando o princípio de Cavalieri. Além disso, há animações que ilustram como esse princípio se aplica a pirâmides e a outros sólidos geométricos.

Antes de iniciar este tópico com os estudantes, repita o experimento sobre volumes de prismas e pirâmides, mas, agora, compare os volumes de cones e cilindros. Pergunte aos estudantes se a mesma relação de volume se aplica entre cilindros e cones com a mesma altura e bases de mesma área. Solicite-lhes que elaborem um esquema ou roteiro e produzam um relato escrito, definindo o problema e detalhando as etapas do experimento. Experimentações desse tipo valorizam e utilizam conhecimentos historicamente construídos, contribuindo para o desenvolvimento da competência geral **1**, e exercitam a curiosidade dos estudantes, favorecendo a aquisição da competência geral **2** e o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT504** na medida em que eles investigam e obtêm fórmulas para o cálculo do volume de sólidos geométricos. Além disso, o experimento de comparação entre os volumes desses sólidos propicia o exercício do raciocínio abdutivo, na medida em que os dados obtidos empiricamente permitem uma conclusão plausível.

Não escreva no livro.

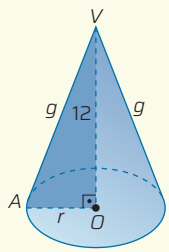
PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Tente resolver estas atividades antes de ler as resoluções. Para começar, identifique os termos desconhecidos e procure o significado deles no livro ou em um dicionário. Ao resolver as atividades, faça, no caderno, os cálculos com cuidado para evitar erros. Depois, confira o modo de resolução e a resposta para ver se estão de acordo com os apresentados nesta seção.

R16 **Em um cone circular reto de altura 12 cm, a área total é 90π cm² e o volume, 100π cm³. Calcule o raio da base e a geratriz.**

Resolução

Vamos fazer um esboço do cone.



ID/BR

Sabendo que $A_t = 90\pi$ cm², temos:

$$A_t = \pi r(r + g)$$
$$\pi r(r + g) = 90\pi$$
$$r(r + g) = 90 \quad (1)$$

Como $h = 12$ cm e $V = 100\pi$ cm³, temos:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 h$$
$$\frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot 12 = 100\pi$$
$$4r^2 = 100$$
$$r^2 = 25$$
$$r = 5$$

Portanto, o raio da base desse cone é 5 cm.

Substituindo r por 5 em (1), obtemos:

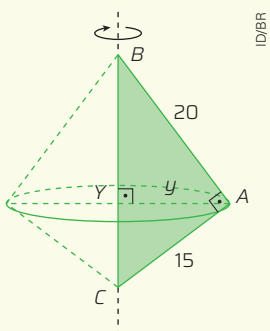
$$5(5 + g) = 90$$
$$5 + g = 18$$
$$g = 13$$

Logo, a geratriz desse cone é 13 cm.

R17 **Calcule o volume e a área total do sólido gerado pela rotação de um triângulo retângulo, de catetos 15 cm e 20 cm, em torno da hipotenusa.**

Resolução

O sólido gerado é a reunião de dois cones circulares retos, de mesma base (círculo de centro Y e raio y) e altura BY e CY.



ID/BR

Aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle BAC$, temos:

$$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2$$
$$(BC)^2 = 20^2 + 15^2$$
$$BC = 25$$

Assim, a medida da hipotenusa do $\triangle BAC$ é 25 cm.

Aplicando uma das relações métricas no $\triangle ABC$, temos:

$$BC \cdot AY = AB \cdot AC$$
$$25y = 20 \cdot 15$$
$$y = 12$$

Logo, a medida do raio y é 12 cm.

O volume V do sólido é o volume do cone de vértice B, de base circular de centro Y e raio y, somado ao volume do cone de vértice C de mesma base. Então:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi y^2 \cdot BY + \frac{1}{3} \cdot \pi y^2 \cdot CY$$
$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi y^2 (BY + CY)$$
$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi y^2 \cdot BC$$
$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 12^2 \cdot 25$$
$$V = 1200\pi$$

Portanto, o volume do sólido é 1200π cm³.

A área total A_t do sólido é a soma das áreas laterais dos dois cones; então:

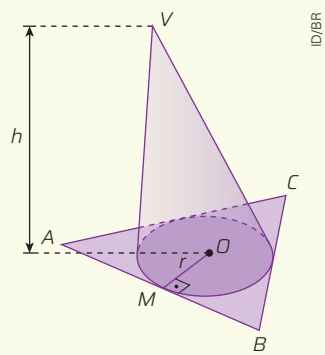
$$A_t = \pi y(AB) + \pi y(AC)$$
$$A_t = \pi y(AB + AC)$$
$$A_t = \pi \cdot 12(20 + 15)$$
$$A_t = 420\pi$$

Logo, a área total desse sólido é 420π cm².

R18 **Em um cone circular, a base está inscrita em um triângulo equilátero de área $9\sqrt{3}$ cm², e a altura é congruente à altura desse triângulo. Calcule o volume do cone.**

Resolução

Representando o cone descrito na situação, temos:



ID/BR

Como o $\triangle ABC$ é equilátero de lado a, sua altura é igual a $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Sabemos que a área desse triângulo é igual a $9\sqrt{3}$ cm²; portanto:

$$A_{\triangle ABC} = 9\sqrt{3}$$

$$\frac{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = 9\sqrt{3}$$

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$$

$$a^2 = 36$$

$$a = 6$$

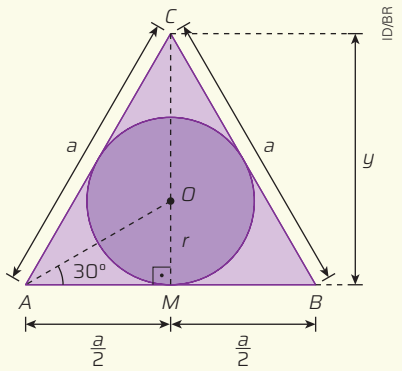
Assim, a medida do lado do $\triangle ABC$ é 6 cm.

Como a altura do cone é congruente à altura do $\triangle ABC$, então:

$$y = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$y = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

Logo, a altura do cone mede $3\sqrt{3}$ cm.



ID/BR

No $\triangle OAM$, temos:

$$OM = \frac{1}{3} \cdot y$$

$$OM = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3}$$

$$OM = \sqrt{3}$$

Assim, a medida do raio da base do cone é $\sqrt{3}$ cm.

Portanto, o volume do cone é:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi (\sqrt{3})^2 \cdot 3\sqrt{3}$$

$$V = 3\sqrt{3}\,\pi$$

Logo, o volume do cone circular é $3\sqrt{3}\,\pi$ cm³.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Retome as sugestões dadas na seção *Problemas e exercícios resolvidos*. Nas atividades que não apresentam desenho, fazer um esboço pode ajudar na resolução.

92 **De dois cones, sabe-se que:**

Cone A { altura: 5 cm; raio da base: 2,5 cm

Cone B { altura: 2,5 cm; raio da base: 5 cm

O perímetro e a área do cone A medem 5π cm e $6{,}25\pi$ cm². O perímetro e a área do cone B medem 10π cm e 25π cm².

a) Calcule o perímetro e a área da base de cada um dos cones.

b) Qual dos cones tem maior volume?

O cone B tem o volume maior.

93 **Dois cones têm as seguintes medidas:**

Cone A { raio da base: 10 cm; geratriz: 18 cm

Cone B { raio da base: 20 cm; geratriz: 36 cm

93. a) $A_{\ell_1} = 180\pi$ cm² e $A_{\ell_2} = 720\pi$ cm². A área lateral do cone B é maior que a do cone A.

Calcule e compare:

a) as áreas laterais dos dois cones;

b) as áreas totais dos dois cones.

94 **Um cone de revolução tem altura 30 m e geratriz 34 m. Calcule:**

a) a área lateral; 544π m²

b) a área total; 800π m²

c) o volume. 2560π m³

93. b) $A_{t_1} = 280\pi$ cm² e $A_{t_2} = 1\,120\pi$ cm². A área total do cone B é maior que a do cone A.

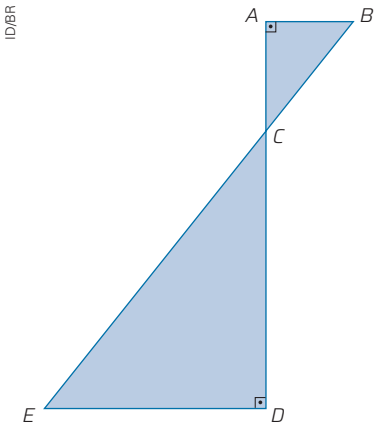
95 **Em um cone circular reto, as áreas lateral e total são, respectivamente, 65π cm² e 90π cm². Calcule seu volume.** 100π cm³

96 **Calcule o volume e a área total do sólido gerado pela rotação de um triângulo equilátero, de perímetro 30 cm, em torno de um de seus lados.**

250π cm³ e $100\sqrt{3}\,\pi$ cm².

Não escreva no livro.

97 Na figura, os triângulos *ABC* e *CDE* são coplanares, com $AB = 3$ dm, $CA = 4$ dm e $CD = 8$ dm.



Calcule o volume e a área total do sólido gerado pela rotação dos dois triângulos em torno de $\overleftrightarrow{AD}$.
108π dm³ *e* 120π dm².

98 Calcule a área total do sólido gerado pela rotação de um losango de diagonais de 16 m e 30 m em torno:

a) da diagonal menor; 510π m²

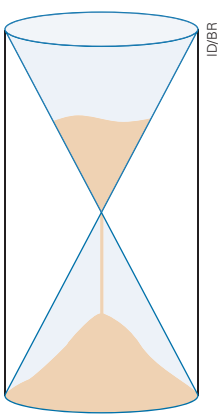
b) da diagonal maior. 272π m²

99 Calcule o volume e a área total do sólido gerado pela rotação de um trapézio isósceles de altura 4 m e cujas bases medem 6 m e 12 m em torno da base maior.
128π m³ ; 88π m².

100 A base de um cone circular reto é equivalente à seção meridiana. Se o raio da base mede 1 m, calcule a altura do cone. π m

101 Uma ampulheta consiste em dois cones idênticos colocados dentro de um cilindro reto.

Na atividade **101**, os estudantes podem desenvolver a habilidade **EM13MAT309** na medida em que interpretam o texto, mobilizam conhecimentos na resolução e registram a solução usando a linguagem matemática de forma adequada.



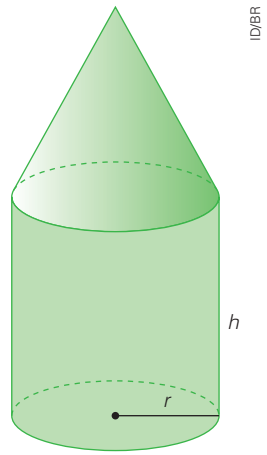
a) Sabendo que a altura do cilindro é 9 cm e que o raio da base é 5 cm, calcule o volume da região ocupada pelos cones. 75π cm³

b) Calcule o volume do espaço entre os cones e o cilindro. 150π cm³

102 Um cilindro e um cone têm bases congruentes. Que relação deve haver entre a altura do cone e a do cilindro para que tenham volumes iguais?

$h_{cone} = 3 \cdot h_{cilindro}$ ou $3 \cdot h_{cilindro} = h_{cone}$

103 Um sólido é formado por um cilindro e um cone que têm a mesma base e a mesma altura, conforme o desenho.

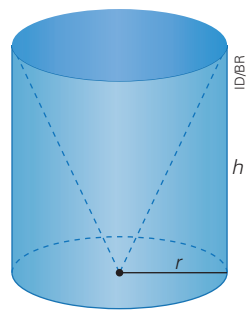


Sejam *r* o raio da base e *h* a altura, calcule o volume do sólido resultante:

a) em função de *r* e fixando *h*; $V = \frac{4\pi h}{3} \cdot r^2$

b) em função de *h* e fixando *r*. $V = \frac{4\pi r^2}{3} \cdot h$

104 A figura a seguir é composta de um cilindro do qual foi retirado um cone. Repita o que foi pedido na atividade **103** para essa figura. $V = \frac{2\pi h}{3} \cdot r^2$; $V = \frac{2\pi r^2}{3} \cdot h$.



105 Para um cone circular reto, de geratriz 15 cm e raio da base de medida 12 cm, calcule:

a) a área lateral; 180π cm²

b) a área total; 324π cm²

c) o volume. 432π cm³

106 Calcule o volume e a área total do sólido gerado pela rotação de um triângulo retângulo, cujos catetos medem 6 m e 8 m, em torno:

a) do cateto menor; 128π m³; 144π m².

b) do cateto maior. 96π m³; 96π m².

107 Em um cone circular reto, uma geratriz de medida 16 m forma ângulo de 30° com o eixo desse cone. Com o auxílio de uma calculadora, calcule a área total e o volume do cone. 1 607,68 m³; 1 299,52 m².

Caso sua calculadora tenha a tecla π, use-a para encontrar valores aproximados com duas casas decimais.

Ao finalizar a resolução desta sequência de atividades, discuta com os estudantes o que aprenderam, as dúvidas que surgiram e quais pontos precisam ser retomados.

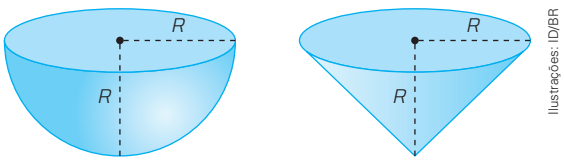
Não escreva no livro.

Volume de uma esfera

O matemático grego Arquimedes de Siracusa (século III a.C.), em sua obra *Sobre a esfera e o cilindro: parte II*, escreveu e demonstrou o seguinte teorema:

> O **volume de uma esfera** mede **quatro vezes o volume de um cone** que tem como base o círculo máximo da esfera e como altura o raio da esfera.

Para compreender esse raciocínio, imagine vasilhas como as representadas nas figuras a seguir: uma semiesférica e outra cônica.



Ilustrações: ID/BR

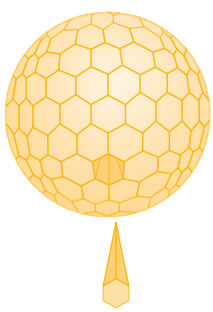
Nelas, o raio da semiesfera é igual ao raio da circunferência do cone, e a altura do cone é igual ao raio da semiesfera.

Arquimedes percebeu que, despejando duas vezes o conteúdo da vasilha cônica no interior da vasilha semiesférica, esta ficaria completamente cheia, ou seja, a capacidade da semiesfera é o dobro da capacidade do cone. Isso fez com que ele concluísse que a capacidade da esfera era quatro vezes a capacidade do cone.

Arquimedes posteriormente demonstrou essa relação, e assumiremos que o volume V de uma esfera de raio R é dado por:

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Área da superfície de uma esfera



ID/BR

Arquimedes também estudou como calcular a área da superfície de uma esfera.

Como a superfície da esfera não pode ser planificada como a do cone e a do cilindro, é preciso que seja utilizada outra ideia para descobrir como calcular a área procurada.

A ideia intuitiva utilizada pelos matemáticos, inclusive por Arquimedes, foi decompor a superfície da esfera em regiões aproximadamente planas. Cada uma dessas regiões, junto com o centro da esfera, constitui um sólido que é, aproximadamente, uma pirâmide. Quando esses sólidos são reunidos, a soma das áreas de suas bases se aproxima do valor da área da superfície da esfera.

Podemos chamar de $A_1, A_2, \ldots, A_n$ as áreas das pequenas regiões e considerar que a altura de cada sólido é o raio da esfera.

Nesse caso, o volume da esfera é dado por:

$$V \simeq \frac{1}{3} \cdot A_1 R + \frac{1}{3} \cdot A_2 R + \ldots + \frac{1}{3} \cdot A_n R$$

Sabemos que $V = \frac{4\pi R^3}{3}$. Assim:

$$\frac{4\pi R^3}{3} = \frac{1}{3} \cdot \underbrace{(A_1 + A_2 + \ldots + A_n)}_{\text{aproximadamente igual à área } A \text{ da superfície esférica}} \cdot R$$

Intuitivamente, se aumentarmos o número n de regiões que recobrem a superfície da esfera, mais a soma das áreas $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ se aproxima da área A da superfície da esfera. Usando a ideia de n se aproximando do infinito, temos:

$$\frac{4\pi R^3}{3} = \frac{1}{3} \cdot A \cdot R$$

Portanto:

$$A = 4\pi R^2$$

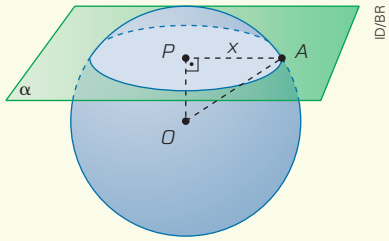
Não escreva no livro.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R19 **A que distância do centro de uma esfera de raio 10 m devemos traçar um plano para obter uma seção de área 64π m²?**

Resolução

Vamos representar a situação:



ID/BR

$x = PA$: raio da seção

$r = OA$: raio da esfera ($r = 10$)

$d = OP$: distância de α a O

Como a área da seção é igual a 64π, temos:

$$A_{\text{seção}} = 64\pi$$
$$\pi x^2 = 64\pi$$
$$x = 8$$

Assim, o raio da seção mede 8 m.

Aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle OPA$, temos:

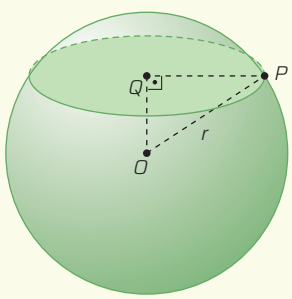
$$(OP)^2 + (PA)^2 = (OA)^2$$
$$d^2 + 8^2 = 10^2$$
$$d^2 = 100 - 64$$
$$d = 6$$

Logo, a distância do centro da esfera ao plano é 6 m.

R20 **Secciona-se uma esfera de raio 17 cm em um plano que dista 15 cm do centro. Calcule a área dessa seção.**

Resolução

Vamos representar a situação:



ID/BR

$r = OP = 17$

$OQ = d = 15$

$PQ = x$: raio da seção

Aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle OPQ$, temos:

$$(PQ)^2 + (OQ)^2 = (OP)^2$$
$$x^2 + 15^2 = 17^2$$
$$x^2 = 289 - 225$$
$$x = 8$$

Assim, o raio da seção mede 8 cm.

A área da seção é dada por:

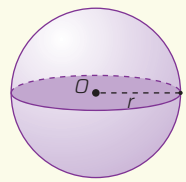
$$A_{\text{seção}} = \pi x^2$$
$$A_{\text{seção}} = \pi \cdot 8^2$$
$$A_{\text{seção}} = 64\pi$$

Portanto, a área procurada é 64π cm².

R21 **A área de um círculo máximo de uma esfera é 100π dm². Calcule a área da superfície esférica e o volume da esfera.**

Resolução

Um círculo máximo de uma esfera contém o centro da esfera; logo:



ID/BR

$$A_{\text{círculo}} = \pi r^2$$
$$\pi r^2 = 100\pi$$
$$r = 10$$

Assim, o raio do círculo máximo mede 10 dm.

A área da superfície esférica é dada por $4\pi r^2$; então:

$$A_{\text{superfície esférica}} = 4\pi \cdot 10^2$$
$$A_{\text{superfície esférica}} = 400\pi$$

Portanto, a área da superfície esférica é 400π dm².

O volume da esfera é dado por $\frac{4\pi R^3}{3}$; então:

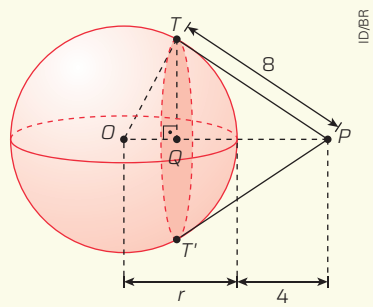
$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 10^3$$
$$V = \frac{4\,000\pi}{3}$$

Logo, o volume da esfera é $\frac{4\,000\pi}{3}$ dm³.

R22 **De um ponto P, situado a 4 cm de uma superfície esférica S, traçam-se segmentos de reta tangentes a S. Esses segmentos medem 8 cm. Calcule o raio de S e a área do círculo determinado pelos pontos de contato dessas tangentes com S.**

Resolução

Representando a situação, temos:

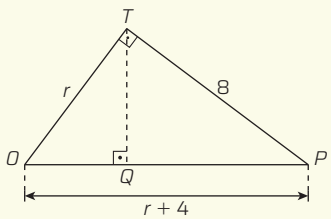


ID/BR

Antes de prosseguir, proponha aos estudantes voltar ao boxe *Volumes de prismas e de pirâmides,* da página 119, e completá-lo no caderno com desenhos e as fórmulas para os volumes de cilindros, cones e esferas.

Não escreva no livro.

$\overline{PT}$ é perpendicular a $\overline{OT}$.



ID/BR

No $\triangle OPT$, temos:

- $(r + 4)^2 = r^2 + 8^2$

$$r^2 + 8r + 16 = r^2 + 64$$
$$8r = 48$$
$$r = 6$$

Portanto, o raio de S mede 6 cm.

- $OP \cdot QT = OT \cdot PT$

$$10 \cdot QT = 6 \cdot 8$$
$$QT = 4{,}8$$

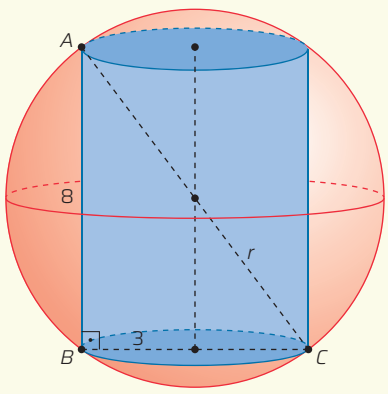
Como a área do círculo de raio r é dada por πr^2, então:

$$A_{\text{círculo}} = \pi (QT)^2$$
$$A_{\text{círculo}} = \pi \cdot 4{,}8^2$$
$$A_{\text{círculo}} = 23{,}04\pi$$

Logo, a área do círculo procurado é $23{,}04\pi$ cm².

R23 **Uma superfície esférica S está circunscrita a um cilindro circular reto de altura 8 cm e raio da base 3 cm. Calcule a área dessa superfície esférica.**

Resolução



ID/BR

Aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle ABC$, temos:

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$
$$(2r)^2 = 8^2 + (2 \cdot 3)^2$$
$$4r^2 = 64 + 36$$
$$r = 5$$

Portanto, o raio da esfera mede 5 cm.

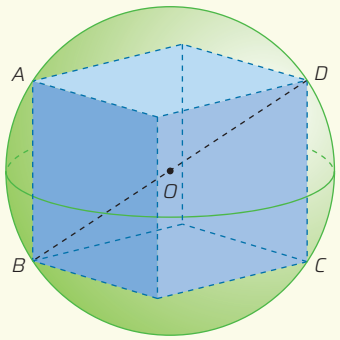
Então:

$$A_{\text{superfície esférica}} = 4\pi r^2$$
$$A_{\text{superfície esférica}} = 4\pi \cdot 5^2$$
$$A_{\text{superfície esférica}} = 100\pi$$

Logo, a área da superfície esférica é 100π cm².

R24 **Um cubo de aresta a está inscrito em uma superfície esférica S de raio r. Calcule r em função de a.**

Resolução



ID/BR

$\overline{BD}$ é diagonal do cubo e passa pelo centro de S; logo:

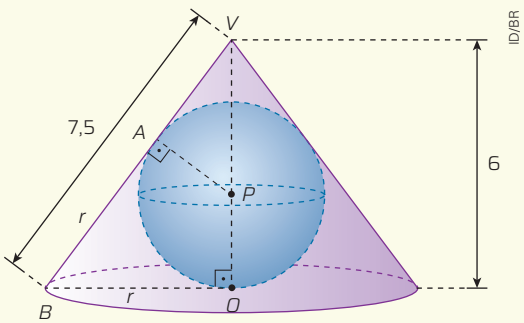
$$BD = a\sqrt{3}$$
$$2r = a\sqrt{3}$$
$$r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Logo, $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

R25 **Uma esfera está inscrita em um cone circular reto, de altura 6 cm e geratriz 7,5 cm. Calcule o volume dessa esfera.**

Resolução

Representando a situação, temos:



ID/BR

O: centro da base do cone

P: centro da esfera

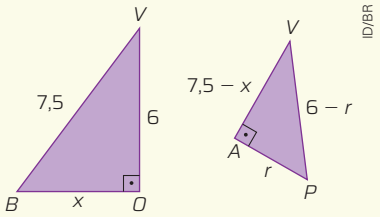
$AP = r$: raio da esfera

$OB = x$: raio da base do cone

Sendo B um ponto externo ao círculo máximo da esfera, então as distâncias aos pontos de tangência BO e BA são iguais, assim:

$OB = AB = x$

Não escreva no livro.



Os triângulos VOB e VAP são semelhantes; logo:

$$\frac{7,5}{6-r} = \frac{6}{7,5-x} = \frac{x}{r} \quad (1)$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle VOB$, temos:

$$x^2 + 6^2 = (7,5)^2$$
$$x^2 = 56,25 - 36$$
$$x = 4,5$$

Assim, o raio da base do cone mede 4,5 cm.

Substituindo x por 4,5 em (1), obtemos:

$$\frac{7,5}{6-r} = \frac{6}{7,5-4,5} = \frac{4,5}{r}$$
$$\frac{6}{3} = \frac{4,5}{r}$$
$$r = 2,25$$

Então, o raio da esfera mede 2,25 cm.

Portanto:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi r^3$$
$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (2,25)^3$$
$$V = 15,1875\pi$$

Logo, o volume da esfera é $15,1875\pi$ cm³.

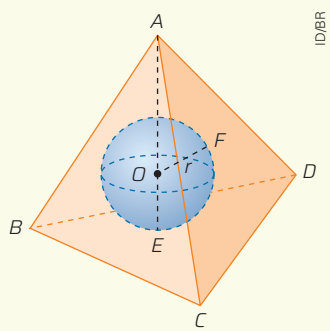
R26 **Sabendo que E e F são centros de gravidade das faces ABC e ACD, respectivamente, de um tetraedro $ABCD$, calcule:**

a) o raio da esfera inscrita em um tetraedro regular de aresta a;

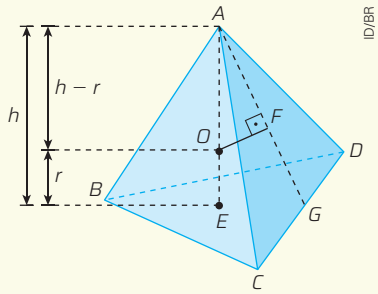
b) o raio da esfera circunscrita a um tetraedro regular de aresta a.

Resolução

a) A esfera inscrita, de raio r, tangencia BCD em E e ACD em F.



Sendo h a altura do tetraedro, temos $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.



Como $\overline{AG}$ é a altura do triângulo equilátero, temos $AG = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Como F é o centro da face ACD, temos:

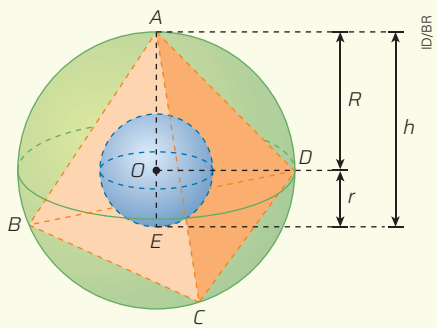
$$AF = \frac{2}{3} \cdot AG$$
$$AF = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}$$
$$AF = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$\overline{OF}$ é o raio da esfera; então, $OF = r$.

Aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle AOF$, temos:

$$(AO)^2 = (AF)^2 + (OF)^2$$
$$(h-r)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + r^2$$
$$\left(\frac{a\sqrt{6}}{3} - r\right)^2 = \frac{a^2}{3} + r^2$$
$$\frac{6a^2}{9} - \frac{2ar\sqrt{6}}{3} + r^2 = \frac{a^2}{3} + r^2$$
$$-\frac{2ar\sqrt{6}}{3} = -\frac{a^2}{3}$$
$$r = \frac{a\sqrt{6}}{12}$$

b)



Para o cálculo do raio R da esfera circunscrita, basta notar que: $R + r = h$

Substituindo h por $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ e r por $\frac{a\sqrt{6}}{12}$, obtemos:

$$R + \frac{a\sqrt{6}}{12} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$
$$R = \frac{a\sqrt{6}}{3} - \frac{a\sqrt{6}}{12}$$
$$R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Nas atividades **108** e **117**, ao investigar o que acontece com o volume e com a área da superfície de uma esfera se a medida do raio aumentar, os estudantes desenvolvem a competência geral **2**.

108 Duas esferas têm raios x e $2x$ unidades, respectivamente.

a) Dê as expressões para as medidas das áreas das superfícies das esferas. $4\pi x^2$ e $16\pi x^2$

b) Dê as expressões para as medidas dos volumes das esferas. $V = \frac{4}{3}\pi x^3$ e $V = \frac{32}{3}\pi x^3$

c) O que ocorre com as medidas da área e do volume da esfera quando o raio dobra?
A área quadruplica e o volume octuplica.

109 Secciona-se uma esfera de raio 13 cm em um plano que passa a 12 cm do centro. Calcule a medida da área dessa seção. 25π cm²

110 A que distância do centro de uma superfície esférica de raio 20 cm devemos traçar um plano para obter uma circunferência de comprimento 32π cm? 12 cm

111 Uma esfera tem diâmetro de medida 6 cm. Calcule as medidas:

a) do volume; 36π cm³

b) da área da superfície esférica; 36π cm²

c) da área de um círculo máximo. 9π cm²

112 A superfície de uma esfera mede 324π cm² de área. Calcule as medidas:

a) do volume da esfera; 972π cm³

b) do comprimento de uma circunferência máxima. 18π cm

113 Se uma esfera é seccionada por um plano que passa por seu centro, obtemos duas partes idênticas, chamadas hemisférios. Suponha que um hemisfério tenha raio r. Indique uma expressão para as medidas:

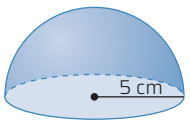
a) do volume do hemisfério; $\frac{2}{3}r^3$

b) da área da superfície curva; $2\pi r^2$

c) da área total do hemisfério. $3\pi r^2$

114 Use as expressões da atividade anterior para calcular as medidas do volume, da área da superfície curva e da área total dos hemisférios a seguir:

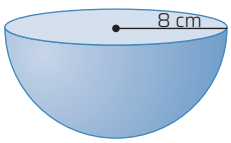
a)



ID/BR

$\frac{250\pi}{3}$ cm³; 50π cm²; 75π cm².

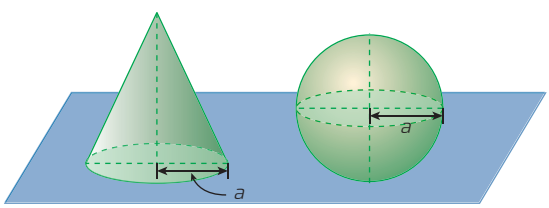
b)



ID/BR

$\frac{1\,024\pi}{3}$ cm³; 128π cm²; 192π cm².

115 Na figura a seguir, o raio da base do cone reto e o raio da esfera medem a.



ID/BR

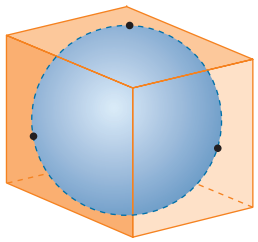
Se o cone tem medida de altura $2a$:

a) dê uma expressão para a medida do volume do cone; $V_{cone} = \frac{2\pi a^3}{3}$

b) dê uma expressão para a medida do volume da esfera; $V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi \cdot a^3$

c) escreva como podemos comparar o volume da esfera com o do cone. $V_{esfera} > V_{cone}$ ou $V_{esfera} = 2V_{cone}$

116 A figura ao lado representa uma esfera inscrita em um cubo de aresta de medida a. Toda esfera inscrita em um cubo tangencia cada face do cubo em um único ponto.



ID/BR

Dê uma expressão que indique:

a) a medida da área total da esfera; $A_{esfera} = \pi a^2$

b) a medida da área total do cubo; $A_{cubo} = 6a^2$

c) a razão entre as medidas das áreas da esfera e do cubo; **c)** $\frac{A_{esfera}}{A_{cubo}} = \frac{\pi}{6}$

d) a medida do volume da esfera; $V_{esfera} = \frac{\pi a^3}{6}$

e) a medida do volume do cubo; $V_{cubo} = a^3$

f) a razão entre a medida do volume da esfera e do volume do cubo. $\frac{V_{esfera}}{V_{cubo}} = \frac{\pi}{6}$

117 Diminuindo em 50% a medida do raio de uma esfera, o que ocorre com a medida:

a) do seu volume? O volume passa a ser $\frac{1}{8}$ do volume inicial.

b) da área da sua superfície?
A área da sua superfície passa a ser $\frac{1}{4}$ da área inicial.

118 Uma esfera está inscrita em um cone equilátero (a medida da geratriz é igual a medida do diâmetro da bse) de raio $4\sqrt{3}$ cm. Calcule as medidas do volume e da área da superfície dessa esfera. $\frac{256\pi}{3}$ cm³; 64π cm².

119 Calcule as medidas do volume e da área da superfície da esfera circunscrita a um cubo de volume 8 cm³.
$4\pi\sqrt{3}$ cm³; 12π cm².

120 Uma esfera está circunscrita a um tetraedro regular de aresta 8 cm. Calcule as medidas do volume e da área da superfície dessa esfera. $64\pi\sqrt{6}$ cm³; 96π cm².

121 Duas esferas, congruentes entre si, são tangentes externamente. Um cilindro reto, de volume 32π dm³, está circunscrito à reunião dessas esferas. Calcule as medidas do volume e da área da superfície esférica de cada esfera e faça um desenho da situação.
$\frac{32\pi}{3}$ dm³; 16π dm².

122 Escreva a alternativa correta no caderno.

(Fuvest-SP) A esfera ε, de centro O e raio $r > 0$, é tangente ao plano α. O plano β é paralelo a α e contém O. Nessas condições, o volume da pirâmide que tem como base um hexágono regular inscrito na intersecção de ε com β e, como vértice, um ponto em α é igual a:

a) $\frac{\sqrt{3}r^3}{4}$ c) $\frac{3\sqrt{3}r^3}{8}$ e) $\frac{\sqrt{3}r^3}{2}$

b) $\frac{5\sqrt{3}r^3}{16}$ d) $\frac{7\sqrt{3}r^3}{16}$

Alternativa **e**.

Não escreva no livro.

Ao resolver as atividades **123** e **124**, os estudantes desenvolvem a habilidade **EM13MAT309**, na medida em que interpretam o texto, mobilizam conhecimentos na resolução e registram a solução usando a linguagem matemática de forma adequada.

123 Sabe-se que o raio da Terra mede aproximadamente 6 400 km. Usando uma calculadora, calcule a medida:

a) do comprimento da linha do Equador; 40 212 km

b) da área da superfície da Terra; $5{,}15 \cdot 10^8$ km²

c) do volume da Terra; $1{,}10 \cdot 10^{12}$ km³

d) da área da Terra coberta por água, sabendo que dois terços da superfície terrestre estão cobertos por água. $3{,}43 \cdot 10^8$ km²

124 Os astrônomos estimam que o diâmetro da Lua mede aproximadamente $\frac{1}{4}$ do diâmetro da Terra. Com base nessa informação, calcule as medidas do volume aproximado da Lua e da área de sua superfície. Se necessário, utilize uma calculadora. $R \simeq 1\,600$ km; $V \simeq 1{,}72 \cdot 10^{10}$ km³; $A \simeq 3{,}22 \cdot 10^7$ km².

CÁLCULO RÁPIDO

1 Observe como podemos resolver mentalmente a equação $(x - 1)^2 = 4$:

$x - 1 = 2$ ou $x - 1 = -2$

$x = 3$ ou $x = -1$

Assim, as raízes procuradas são 3 e −1.

Use essa estratégia e calcule:

a) $(x + 5)^2 = 9$ $x = -2$ ou $x = -8$

b) $(x - 1)^2 = 16$ $x = 5$ ou $x = -3$

c) $(x - 5)^2 = 0$ $x = 5$

d) $(x - 2)^2 = 1$ $x = 1$ ou $x = 3$

e) $(y - 3)^2 = 36$ $y = 9$ ou $y = -3$

f) $(a + 6)^2 = 0$ $a = -6$

2 Agora, resolva mentalmente as equações.

a) $x^2 - 15 = 1$ $x = \pm 4$

b) $9x^2 - 1 = 0$ $x = \pm\frac{1}{3}$

c) $y^2 = -1$ $S = \varnothing$

d) $3x^2 - 5 = 0$ $x = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}$

e) $49y^2 + 1 = 0$ $S = \varnothing$

f) $-49y^2 - 1 = 0$ $S = \varnothing$

3 Calcule mentalmente o que se pede.

a) A área de um retângulo de lados $\frac{1}{2}$ m e 60 cm. 3 000 cm²

b) A área de um quadrado de perímetro 20 cm. 25 cm²

c) O lado de um quadrado de área 121 m². 11 m

d) A base de um triângulo de área 60 m² e altura 10 m. 12 m

e) A área de um triângulo de altura 7 cm e base 3 cm. 10,5 cm²

4 Lembrando que o comprimento da circunferência é dado por $C = 2\pi r$ e a área do círculo dada por $A = \pi r^2$, use $\pi = 3$ e calcule mentalmente o que se pede.

a) A medida do comprimento de uma circunferência com 7 cm de raio. 42 cm

b) A medida da área de um círculo com 7 cm de raio. 147 cm²

c) A área de um círculo com 16 m de diâmetro. 192 m²

d) A medida do perímetro de um círculo com 18 mm de diâmetro. 54 mm

e) A medida da área de um semicírculo com 6 m de raio. 54 m²

f) A medida da área de uma coroa circular determinada por circunferências com 8 cm e 6 cm de raios. 84 cm²

g) A medida do raio de uma circunferência com 25π dm de comprimento. 12,5 dm

h) A medida do raio do círculo que tem 25π m² de área. 5 m

5 Converta em litro.

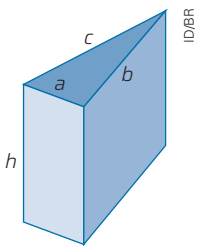
a) 0,5 dm³ 0,5 L

b) 5 m³ 5 000 L

c) 1100 mL 1,1 L

d) 50 m³ 50 000 L

6 Observe o prisma triangular representado a seguir.



ID/BR

Agora, considerando o prisma dado, copie o quadro a seguir no caderno e complete-o, calculando mentalmente (observe as unidades).

a	5 cm	3 m	0,07 m	0,5 m
b	6 cm	150 cm	Aproximadamente 9,2 cm	78 cm
c	7,7 cm	Aproximadamente 152 cm	6 cm	1,2 m
h	10 cm	50 cm	9,6 cm	1,5 m
Área da base	Aproximadamente 15 cm²	2 600 cm²	21 cm²	Aproximadamente 1300 cm²
Volume	150 cm³	130 000 cm³	201,6 cm³	195 000 cm³

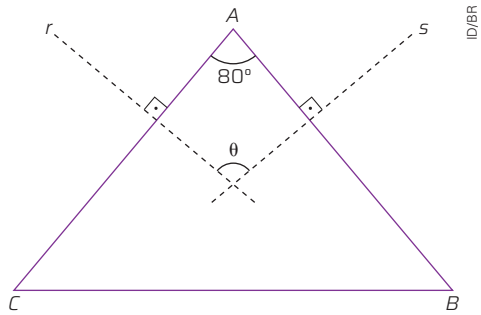
Não escreva no livro.

PARA RECORDAR

Analise cada atividade e verifique se é preciso rever algum conteúdo que você estudou neste ano ou em anos anteriores.

1 No triângulo *ABC*, a medida do ângulo *A* é 80° e as retas *r* e *s* são perpendiculares aos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente. Qual é a medida do ângulo formado por essas retas, como indicado na figura?

100°



ID/BR

2 Dois barcos, *A* e *B*, que se encontram a 5 km um do outro, observam um terceiro barco, *C*, em dificuldade. O barco *A* observa os dois outros barcos segundo direções que fazem um ângulo de 60° e o barco *B* observa os outros dois segundo um ângulo reto.

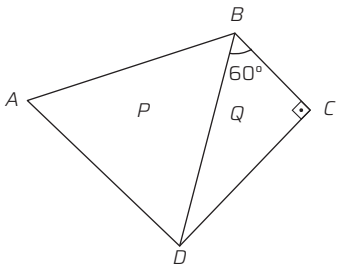
a) A que distância se encontram de *C* o barco *A* e o barco *B*? $AC = 10$ km e $BC = 5\sqrt{3}$ km

b) Se o barco *A* se deslocar à velocidade de 25 km/h e o barco *B*, à velocidade de 20 km/h, qual deles chegará primeiro para socorrer *C*? O barco *A*.

3 Um paralelogramo *ABCD* no plano cartesiano é tal que *A*(0, 0), *D*(5, 0) e *C*(9, 4), $\overline{AB} // \overline{CB}$ e $\overline{AD} // \overline{BC}$. Determine as coordenadas do vértice *B* desse paralelogramo. (4, 4)

4 Indique a alternativa correta no caderno.

(UFMT) O quadrilátero *ABCD* foi dividido em duas regiões, *P* e *Q*, conforme mostra a figura, sendo que a região *P*, com a forma de um triângulo equilátero, ficou com área igual a $9\sqrt{3}$ km².



UFMT. Fac-símile: ID/BR

A razão entre as áreas das regiões *Q* e *P*, nessa ordem, é:

Alternativa **e**.

a) $\frac{1}{9}$

b) $\frac{1}{6}$

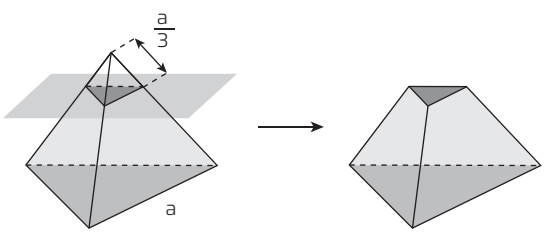
c) $\frac{1}{4}$

d) $\frac{1}{3}$

e) $\frac{1}{2}$

5 Escreva a alternativa correta no caderno.

(Enem) As luminárias para um laboratório de matemática serão fabricadas em forma de sólidos geométricos. Uma delas terá a forma de um tetraedro truncado. Esse sólido é gerado a partir de secções paralelas a cada uma das faces de um tetraedro regular. Para essa luminária, as secções serão feitas de maneira que, em cada corte, um terço das arestas seccionadas serão removidas. Uma dessas secções está indicada na figura. Alternativa **a**.



Enem. Fac-símile: ID/BR

Essa luminária terá por faces:

a) 4 hexágonos regulares e 4 triângulos equiláteros.

b) 2 hexágonos regulares e 4 triângulos equiláteros.

c) 4 quadriláteros e 4 triângulos isósceles.

d) 3 quadriláteros e 4 triângulos isósceles.

e) 3 hexágonos regulares e 4 triângulos equiláteros.

Não escreva no livro.

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO

1 **Um banco tem um diretor-geral, dois diretores adjuntos e cinco chefes de serviço. O diretor-geral resolve instalar um novo cofre, cuja porta terá várias fechaduras, e deseja distribuir as chaves de modo que:**

- possa abrir o cofre sozinho;
- qualquer dos diretores adjuntos só possa abrir o cofre com o outro ou com quaisquer dos chefes de serviço;
- os chefes de serviço só possam abrir o cofre se houver quatro números juntos.

Quantas fechaduras são necessárias? 20 fechaduras.

2 **(Obmep) Ari, Bruna e Carlos almoçam juntos todos os dias e cada um deles pede água ou suco.** Alternativa **a**.

- Se Ari pede a mesma bebida que Carlos, então Bruna pede água.
- Se Ari pede uma bebida diferente da de Bruna, então Carlos pede suco.
- Se Bruna pede uma bebida diferente da de Carlos, então Ari pede água.
- Apenas um deles sempre pede a mesma bebida.

Quem pede sempre a mesma bebida e que bebida é essa?

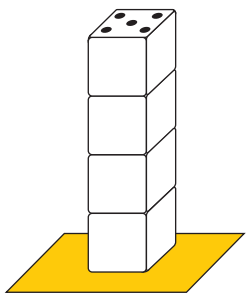
a) Ari; água **c)** Carlos; suco **e)** Bruna; suco
b) Bruna; água **d)** Ari; suco

3 **Registre a alternativa correta no caderno.**

(Unesp) Todo dado cúbico padrão possui as seguintes propriedades:

— Sobre suas faces estão registrados os números de 1 a 6, na forma de pontos.

— A soma dos números registrados, em qualquer duas de suas faces opostas, é sempre igual a 7.



Unesp. Fac-símile: ID/BR

Se quatro dados cúbicos padrões forem colocados verticalmente, um sobre o outro, em cima de uma superfície plana horizontal, de forma que qualquer observador tenha conhecimento apenas do número registrado na face horizontal superior do quarto dado, podemos afirmar que, se nessa face estiver registrado o número 5, então a soma dos números registrados nas faces horizontais não visíveis ao observador será de: Alternativa **a**.

a) 23 **c)** 25 **e)** 27
b) 24 **d)** 26

A produção do quadro-síntese proposto nesta seção é um instrumento de avaliação das aprendizagens esperadas neste capítulo. No entanto, não bastam as fórmulas e os desenhos. Após a produção dos quadros, incentive os estudantes a explicar as características de cada sólido e indicar os elementos que compõem cada fórmula e como ela foi obtida.

PALAVRAS-CHAVE

Retome o que você estudou neste capítulo e o resumo que fez sobre o volume de prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas.

Complete esse resumo com desenhos, o significado de área das superfícies de todos esses sólidos e as fórmulas para calcular cada uma dessas áreas.

Analise bem o resumo e pense sobre o que mais deveria ser incluído nele para que possa auxiliar na resolução de problemas.

As palavras-chave deste capítulo são:

- área de superfície de prismas, pirâmides, cilindros, cones e esfera;
- volume de prismas, pirâmides, cilindros, cones e esfera.

MATEMÁTICA E METEOROLOGIA

Esta seção contempla as competências gerais **1**, **2**, **4** e **7** propostas pela BNCC, ao incentivar os estudantes a utilizar conhecimentos historicamente construídos na resolução de problemas reais da comunidade, refletindo sobre a responsabilidade social e ambiental de suas ações. Desse modo, possibilita integração com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, além de abordar e explorar os temas contemporâneos transversais Ciência e Tecnologia, Meio Ambiente e Cidadania e Civismo.

Se julgar conveniente, proponha um trabalho com os professores de Biologia, História e Geografia a fim de explorar as competências específicas **1** e **3** da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e a competência específica **1** da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, além de os conhecimentos dos estudantes sobre o assunto abordado nesta seção.

Como medir a quantidade de chuva?

Ao ver ou ouvir uma previsão meteorológica do tempo, você já se deparou com a expressão "milímetros de chuva"? Quando chove 10 mm ou 50 mm, esses valores são grandes ou pequenos? Você já pensou como o volume de chuva pode ser medido?

De olho no tempo: entenda como é calculado o volume de chuva

Tempo de medição também é levado em conta pelos especialistas para saber se a chuva foi volumosa.

A estação mais quente do ano é também a que registra os temporais mais volumosos na região Sudeste, por conta da combinação calor e umidade. No Sul do Rio de Janeiro, muitas vezes, as consequências dessa precipitação são alagamentos e deslizamentos de terra.

O meteorologista Diogo Arsego, do Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos, CPTEC, explica que a condição de chuva forte é inevitável para a região.

"Os maiores índices de precipitação se concentram desde o Sul da região Amazônica, passando pelo Centro-Oeste e Sudeste do Brasil. São precipitações intensas e frequentes."

Para entender [...] o que significam os volumes de chuva, o cálculo deve ser feito em milímetros e metro quadrado. Em um espaço de um metro por um metro, 1 litro de água subiria até a marca de 1 milímetro. Ou seja, 1 milímetro de chuva equivale a 1 litro de água por metro quadrado. Em um caso onde o volume de chuva registrado é de 50 mm, seriam 50 litros de água em cada metro quadrado.

O tempo de medição também é levado em conta pelos especialistas para saber se a chuva foi volumosa.

"Se você pegar um período de uma hora, uma chuva de 25, 30 milímetros já é considerada uma chuva forte. Vai trazer problemas de alagamentos nos centros urbanos, por conta de um volume de chuva muito intenso em um curto período de tempo, vai ter dificuldade para escoar", explicou Diogo.

[...]

RJTV. De olho no tempo: entenda como é calculado o volume de chuva. *G1*, 18 fev. 2019. Disponível em: https://g1.globo.com/rj/sul-do-rio-costa-verde/noticia/2019/02/18/de-olho-no-tempo-entenda-como-e-calculado-o-volume-de-chuva.ghtml. Acesso em: 14 out. 2024.

O aparelho mais comum que mede a quantidade de chuva é o pluviômetro, mas existem ainda duas outras tecnologias mais modernas: o pluviógrafo e a estação automática.

Pluviógrafo.



Lucas Lacaz Ruiz/Fotoarena

Não escreva no livro.

MandorGaming/Shutterstock.com/ID/BR



Estação automática.



Beto Celi/Pulsar Imagens

Pluviômetro.

Com base nas medidas feitas por esses aparelhos, é possível registrar a quantidade de chuva e comparar essa medida com a média diária, mensal ou anual de chuva de uma região. A quantidade de chuva em um certo período de precipitação é chamado de índice pluviométrico.

Conectando ideias

1 **Um dos maiores temporais já registrados no Brasil ocorreu em fevereiro de 2023, no município de Bertioga, litoral do estado de São Paulo. Lá, foram registrados índices pluviométricos de 680 mm em 24 horas, sendo que a média pluviométrica anual é de 2 523 mm.** Consulte a resposta no Manual do Professor.

Considerando que Bertioga tem uma área de 491,546 km^2, calcule o volume total de chuva no município, em fevereiro de 2023. Em seguida, responda:

- Quais foram as conversões de medidas necessárias para realizar esse cálculo?
- Esse volume equivale a quantos litros de água por metro quadrado?
- Em sua opinião, esse volume é alto ou baixo em relação à média anual?

Por fim, converse com os colegas sobre quais devem ter sido os impactos dessa chuva para a população de Bertioga.

2 **Depois de compreender como o volume de chuva é medido, que tal aplicar esses conhecimentos em o seu dia a dia no lugar onde você vive? Você e os colegas vão analisar o regime pluviométrico do lugar onde vivem e suas consequências para o cotidiano dos moradores.**

Atividade de pesquisa. Respostas a depender dos resultados da pesquisa.

- Em grupos, iniciem os trabalhos pesquisando os índices pluviométricos do lugar onde vivem.
- Em seguida, pesquisem e selecionem notícias, reportagens, relatos de pessoas da sua comunidade sobre o clima e o regime pluviométrico da região onde moram.
- Investiguem como os órgãos públicos e as empresas privadas têm atuado para minimizar o impacto da falta ou do excesso de precipitações na região.
- Elaborem um infográfico com as principais informações coletadas, apresentando o regime pluviométrico da sua região.
- Por fim, após a exposição do resultado das pesquisas, discutam coletivamente, com o auxílio do professor, as seguintes questões: É possível compreender as vulnerabilidades das cidades e das áreas mais afetadas ao analisar o regime de chuvas? Existe relação entre comportamento pluviométrico, mudanças climáticas e meio ambiente?

Você enfrentou com entusiasmo e alegria os desafios das tarefas solicitadas?

As respostas dos estudantes ao último item indicam evidências da competência socioemocional autoconfiança.

Não escreva no livro.

CAPÍTULO 6

PROJEÇÕES CARTOGRÁFICAS

Este capítulo foi pensado, principalmente, para desenvolver a habilidade **EM13MAT509**, visto que os estudantes investigam as características de projeções cartográficas. Ele também contribui para a aquisição da competência geral **1**, ao trabalhar conhecimentos do mundo físico, além de favorecer o desenvolvimento da competência específica **2** da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

NESTE CAPÍTULO

- Geometria na esfera
- Posições relativas entre plano e esfera
- Projeções cartográficas
- Marcadores de Tissot

O maior quebra-cabeça do mundo tem "apenas" 60 mil peças. Agora, suponha que você tenha de montar um quebra-cabeça formado por 17 bilhões de peças. Seria um desafio e tanto, certo? Então, considere que as peças não tenham encaixes, diferentemente das peças que estamos acostumados a ver em jogos desse tipo. Imagine ainda que, a cada dia, o total de peças seja alterado para mais, ou que as peças, apesar de planas, apresentem medidas de comprimento e largura diferentes, e que o objetivo seja encaixá-las de modo a formar uma superfície praticamente esférica. Como você faria para resolver essa situação?



Arquivo pessoal/Acervo do cedente

O maior quebra-cabeça do mundo, montado por Janice Bragagnolo, em Carlos Barbosa (RS). Quando montado, ele mede 8,83 m de comprimento e 2,4 m de largura. Foto de 2023.

Na realidade, esse quebra-cabeça gigante já existe e nós o visualizamos sempre que precisamos, por exemplo, buscar um endereço ou explorar um novo lugar. Estamos nos referindo a um mapa global digitalizado que usa um sistema de localização.



PV productions/Shutterstock.com/ID/BR

Os aplicativos de navegação utilizados nos automóveis ajudam os motoristas a se localizar durante um trajeto e indicam possíveis rotas. Foto de 2024.



Vlad Ispas/Shutterstock.com/ID/BR

Os aplicativos de navegação instalados em telefones celulares podem indicar as rotas mais rápidas ao usuário, atualizando informações do trânsito em tempo real, além de calcular o tempo de duração do trajeto em diferentes meios de transporte. Foto de 2020.

Este capítulo tem como objetivo apresentar a geometria que nos permite confiar em mapas como representações planas de partes da superfície da Terra.

Vamos ampliar o estudo dos sólidos geométricos e relacioná-lo a alguns conceitos de outras áreas do conhecimento que possibilitarão compreender como os mapas são feitos e como os aplicativos de localização funcionam.

Para começar, vamos retroceder à origem dessa forma de representar a superfície de nosso planeta.

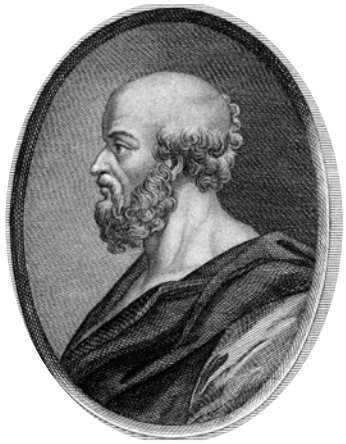
Não escreva no livro.

Cartografia e geoprocessamento

O ser humano sempre buscou maneiras de registrar sua passagem por lugares e delimitar territórios. Existem registros que indicam a elaboração de mapas antes mesmo do surgimento da escrita.

As expedições realizadas na Grécia Antiga por volta do século VI a.C. impulsionaram o trabalho de cosmógrafos, astrônomos e matemáticos para buscar métodos científicos capazes de representar a superfície terrestre.

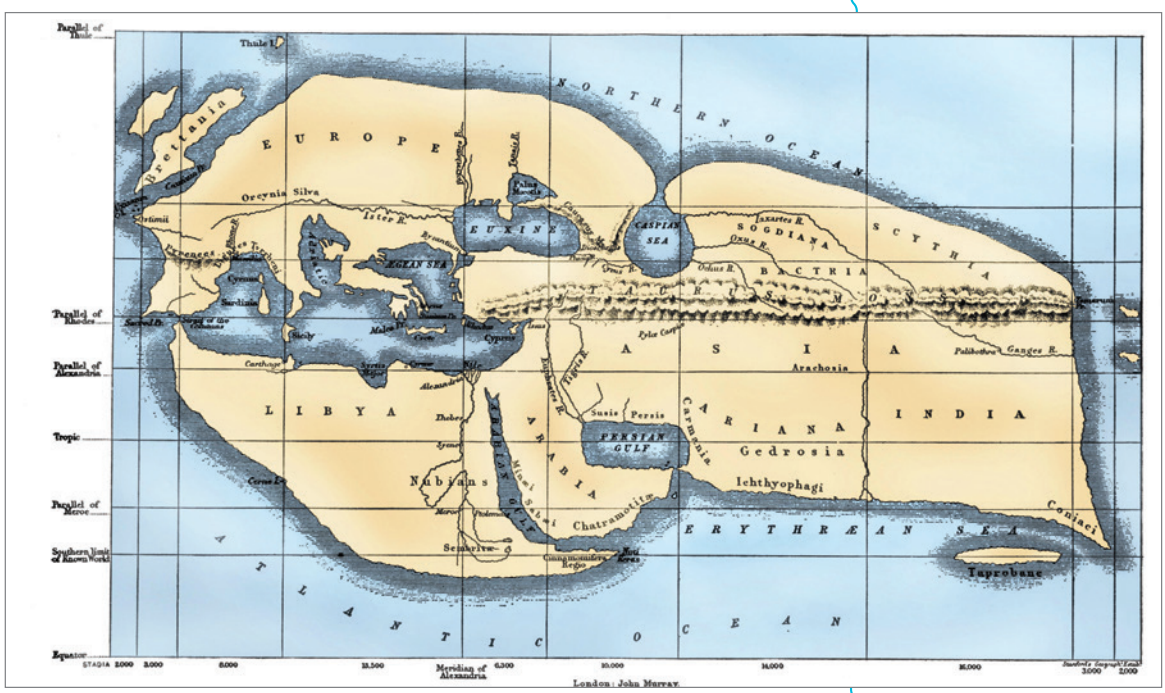
Diante desse cenário, destaca-se uma personagem importante: Eratóstenes de Cirene (276 a.C.-194 a.C.). Ele desenvolveu trabalhos em diversas áreas, como Matemática, Geografia e Astronomia. Uma de suas principais contribuições para a ciência foi calcular a circunferência da Terra, usando, para isso, a altura angular do Sol e a distância entre as cidades de Alexandria e Syene (atual Assuã), no Egito.



Interfoto/Alamy/Fotoarena

Eratóstenes de Cirene (276 a.C.-194 a.C.).

Um dos primeiros mapas de que se tem registro foi elaborado por Eratóstenes, aproximadamente no ano 250 a.C. Ele representava apenas a Europa, o norte da África, o Oriente Médio e a Índia, e foi elaborado com base em relatos de viagens.



Granger, NYC./ Alamy/Fotoarena

Imagem da reconstrução do primeiro mapa feito por Eratóstenes.

Note que esse mapa apresenta algumas imprecisões em relação ao que conhecemos hoje, como o prolongamento da Índia até o Sudeste Asiático ou a África sendo chamada de Libya. Apesar disso, é importante enfatizar o feito notável de construir um mapa-múndi desse porte apenas com base em relatos sobre o mundo conhecido na época.

De modo breve, a Cartografia pode ser entendida como a arte e a técnica de elaborar mapas.

Da época do mapa mostrado acima até os dias de hoje, as tecnologias evoluíram de maneira considerável. Atualmente, a Cartografia utiliza fotos aéreas obtidas com o auxílio de *drones*, aviões ou satélites, sistemas de posicionamento por satélites e outros recursos, que, além de facilitar as atividades cartográficas, possibilitam a rápida disponibilização das informações coletadas. Essa evolução também contribuiu de maneira significativa para a área de **geoprocessamento**.

Este boxe apresenta um breve panorama da evolução da Cartografia. Esse tema pode ser ampliado de acordo com o interesse dos próprios estudantes.

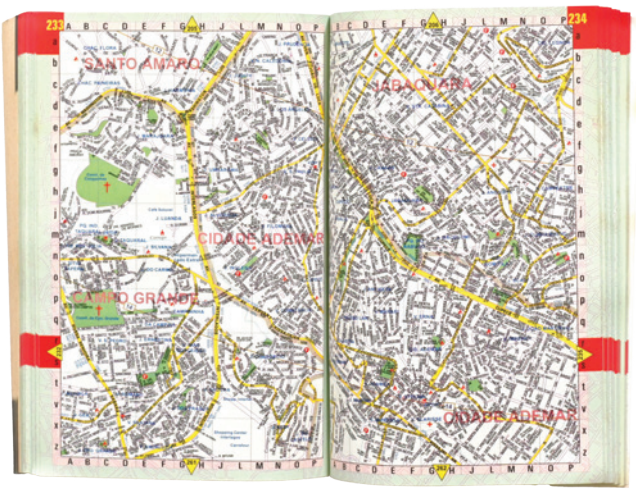
É importante ressaltar que a ideia deste capítulo não é apresentar a história completa da Cartografia, mas compor um contexto para o estudo das deformações nas projeções cartográficas. Se possível, sugira aos estudantes que façam uma pesquisa sobre o assunto, começando pelas Grandes Navegações, com o intuito de tornar a aprendizagem ainda mais significativa.

[...] Geoprocessamento é o conjunto de atividades que lidam com aquisição, tratamento, interpretação e análise de dados sobre a Terra. Observando, porém, por um prisma mais restrito, Geoprocessamento caracteriza-se por aplicações transdisciplinares em diversas áreas, apoiadas pela utilização de tecnologias de ponta como satélites de observação da Terra, sensores remotos aerotransportados, técnicas de mensuração e coleta de dados através do sistema GPS, estações totais e medidores a laser, contando, ainda, com o apoio de sofisticados periféricos e programas de informática em ambientes integrados para o gerenciamento de fatos e fenômenos geográficos.

[...]

Timbó, M. A. *Elementos de cartografia*. Belo Horizonte: Universidade Federal de Minas Gerais, 2001. p. 1.

Antes da criação do GPS (sigla para *Global Position System*, em inglês, ou Sistema de Posicionamento Global), as pessoas utilizavam um guia de ruas e avenidas para saber como chegar a determinado destino.



Fernando Favoretto/Criar Imagem

Guia de ruas da cidade de São Paulo (SP). Foto de 2024.

Hoje, com os conhecimentos de Cartografia e de geoprocessamento, a tarefa de localização é muito mais simples. Existem diversos aplicativos que, trabalhando de maneira colaborativa entre os usuários, além de mostrar o caminho para chegar ao local desejado, indicam rotas de modo a evitar congestionamentos, entre outros imprevistos. Outros aplicativos possibilitam às pessoas conhecer destinos sem sair de casa.



Veículo com câmeras que capturam imagens em 360°, em Ramsgate, Inglaterra. Foto de 2022.

Wirestock Creators/Shutterstock.com/ID/BR

Se considerar oportuno, comente com os estudantes que a representação de um guia de ruas utiliza uma escala cartográfica grande, enquanto o mapa-múndi é feito em escala cartográfica pequena.

Informe à turma que o estudo da localização é apenas uma das atribuições da Cartografia. Essa área também estuda, por exemplo, a correlação entre fenômenos a partir das categorias de mapas temáticos (quantitativos, qualitativos, ordenados, dinâmicos ou de movimento).

No boxe *Cartografia e geoprocessamento* e em outros momentos deste capítulo, é possível encontrar algumas diferenças nas datas biográficas de Eratóstenes, dependendo das fontes citadas, em virtude das imprecisões históricas que se consolidaram ao longo do tempo.

PARA EXPLORAR

Sites

Descubra quando, onde e como coletamos imagens em 360°. *Google Maps*. Disponível em: https://www.google.com/intl/pt-BR/streetview/how-it-works/. Acesso em: 24 out. 2024.

Nesse *link*, é possível ler uma reportagem que mostra como funciona uma ferramenta que disponibiliza vistas panorâmicas de diversas regiões do mundo.

Google Maps para iniciantes: como mapeamos o mundo. Google *Blog*, 24 jul. 2019. Disponível em: https://brasil.googleblog.com/2019/07/google-maps-para-iniciantes-como-mapeamos-o-mundo.html. Acesso em: 17 out. 2024.

Nesse blogue, é possível conhecer como uma plataforma de mapas mapeia o mundo, além de ler textos sobre sistemas de localização.

Não escreva no livro.

GEOMETRIA NA ESFERA

Considere a situação a seguir.

Ao treinar para uma maratona, uma pessoa correu 10 km na direção sul, 10 km na direção leste e, depois, 10 km na direção norte, retornando ao local onde estava inicialmente.

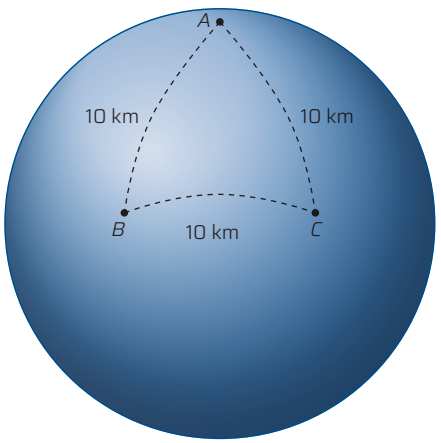
Em que local você acha que essa pessoa estava?



À primeira vista, essa situação pode parecer estranha e até impossível, porque estamos condicionados a imaginar que ela se passa em uma região plana. Mas, e se você pensar que o indivíduo estava sobre uma superfície esférica?

Suponha que o indivíduo estivesse no ponto *A* e que viajasse 10 km para o sul até o ponto *B*, depois 10 km para o leste até o ponto *C* e, por último, 10 km para o norte. Dessa maneira, ele retornaria ao ponto *A*, de onde havia saído inicialmente.

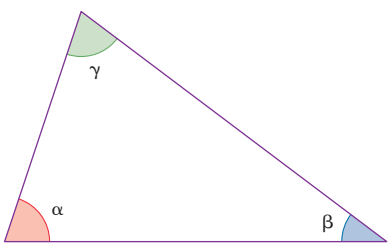
Esse tipo de situação é um bom exemplo para entendermos como as representações dos mapas que utilizamos diariamente devem ser interpretadas de maneira cuidadosa, uma vez que eles são representações planas de superfícies esféricas.



ID/BR

Soma dos ângulos internos de um triângulo na esfera

Sabemos, pela Geometria euclidiana plana, que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é sempre 180°.



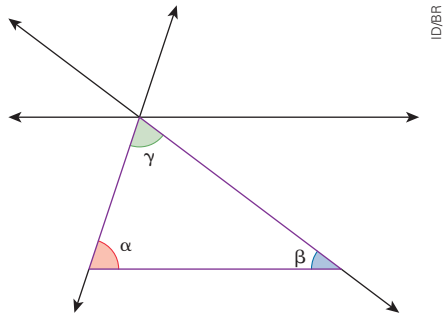
ID/BR

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

Esse fato pode ser provado de diferentes maneiras.

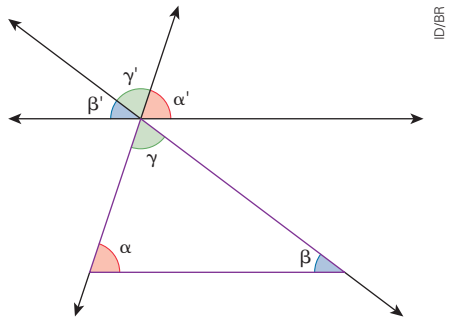
Não escreva no livro.

Uma maneira de verificar isso consiste em prolongar os lados de um dos ângulos internos de um triângulo e traçar uma reta paralela ao lado oposto a esse ângulo e que passe pelo seu vértice.



ID/BR

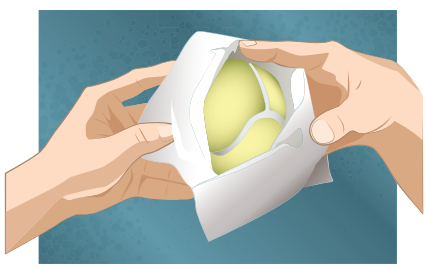
Comparando os ângulos determinados pela construção com os ângulos internos do triângulo e utilizando os conhecimentos de ângulos correspondentes e de ângulos opostos pelo vértice, nota-se que eles são congruentes e que a soma de suas medidas resulta no ângulo raso (cuja medida é 180°).



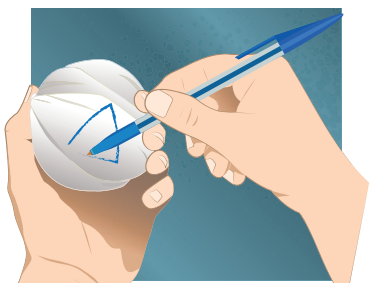
ID/BR

Agora, convidamos você a realizar o seguinte experimento:

- Separe um guardanapo de papel branco, uma caneta e um objeto com o formato de esfera, como uma bola de tênis, por exemplo.

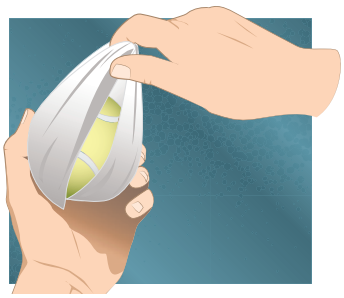

Ilustrações: Nelson Matsuda/ID/BR

- Pegue o guardanapo de papel e coloque-o sobre o objeto com a forma de esfera.



- Em uma parte "lisa" do embrulho, utilize a caneta e trace um triângulo sobre o guardanapo.

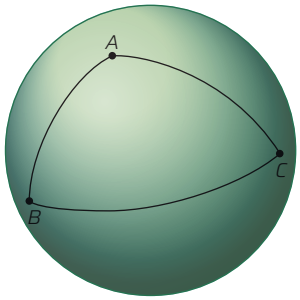
- Por fim, retire o guardanapo do objeto.

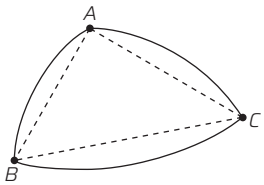


O que você percebeu em relação ao formato do triângulo quando retirou o papel do objeto esférico? O que aconteceu com sua forma, seus lados e seus ângulos? É possível afirmar que a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo continua sendo 180°?

Não escreva no livro.

Realizando esse experimento, é possível notar que o triângulo obtido ficou deformado, ou seja, sua forma foi alterada devido à curvatura da esfera. Também é possível verificar que a medida de seus ângulos aumentou em comparação ao triângulo formado pelos segmentos de reta que unem seus vértices, e, por esse motivo, a soma das medidas dos ângulos internos passou a ser maior que 180°.





Ilustrações: ID/BR

O resultado que você obteve na experiência anterior está relacionado a um teorema chamado de **teorema egrégio** ou **teorema notável**. Ele trata da curvatura de superfícies e foi demonstrado pelo matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855) em 1828.



Museu Pushkin, Rússia. Fotografia: CBW/Alamy/Fotoarena

Jensen, Christian Albrecht. *Retrato de Carl Friedrich Gauss*, 1840. Óleo sobre tela, 31,70 cm × 39,65 cm.

De acordo com o teorema notável de Gauss, não é possível mudar a curvatura dos pontos de uma superfície sem alterar as distâncias entre esses pontos. Ou seja, é impossível fazer um mapa plano de uma superfície esférica que siga uma escala fixa, isto é, sem que existam deformações.

PARA EXPLORAR

Site

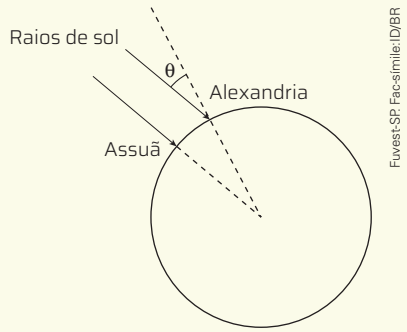
Karl Friedrich Gauss. Biblioteca Matemática. Universidade de Coimbra. Disponível em: https://www.uc.pt/fctuc/dmat/seccoes-servicos/biblio-mat/colecoes-especiais/biografias/karl-friedrich-gauss/. Acesso em: 24 out. 2024.

O *site* do departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, em Portugal, apresenta diversos serviços ligados ao estudo científico e acadêmico da área. Além disso, tem uma seção de biografia dos maiores matemáticos, como Gauss, considerado o "príncipe dos matemáticos" em virtude de suas colaborações e descobertas para todas as áreas da Matemática. Quer saber mais? Acesse o *link* indicado e descubra outras curiosidades sobre esse matemático.

Não escreva no livro.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R1 **(Fuvest-SP) Uma das primeiras estimativas do raio da Terra é atribuída a Eratóstenes, estudioso grego que viveu, aproximadamente, entre 275 a.C. e 195 a.C. Sabendo que em Assuã, cidade localizada no sul do Egito, ao meio-dia do solstício de verão, um bastão vertical não apresentava sombra, Eratóstenes decidiu investigar o que ocorreria, nas mesmas condições, em Alexandria, cidade no norte do Egito. O estudioso observou que, em Alexandria, ao meio-dia do solstício de verão, um bastão vertical apresentava sombra e determinou um ângulo θ entre as direções do bastão e de incidência dos raios de Sol. O valor do raio da Terra, obtido a partir de θ e da distância entre Alexandria e Assuã, foi de, aproximadamente, 7 500 km.**



Fuvest-SP. Fac-símile:ID/BR

O mês em que foram realizadas as observações e o valor aproximado de θ são:

a) junho; 7°.

b) dezembro; 7°.

c) junho; 23°.

d) dezembro; 23°.

e) junho; 0,3°.

(Note e adote: Distância estimada por Eratóstenes entre Assuã e Alexandria ≃ 900 km; π = 3.)

Resolução

Para resolver esta atividade, precisamos utilizar conhecimentos tanto da área de Matemática e suas Tecnologias como da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. Os conhecimentos da primeira área nos possibilitam calcular o valor aproximado de θ. Já os conhecimentos da segunda área devem ser utilizados para determinar o mês em que as observações foram realizadas.

- **Determinando o ângulo θ**

  Primeiro, vamos calcular o comprimento C da circunferência de raio r, que passa pelas cidades de Alexandria e Assuã.

  $$C = 2\pi r = 2 \cdot 3 \cdot 7\,500 = 45\,000$$

  Portanto, o comprimento da circunferência que passa pelas cidades mencionadas é 45 000 km.

  Agora, vamos comparar o comprimento da circunferência com a distância entre as duas cidades (arco da circunferência). Assim, temos:

Comprimento (km)		Ângulo (em grau)
45 000	———	360
900	———	θ

  Dessa maneira, pode-se determinar a medida do ângulo θ:

  $$\theta = \frac{360^{\circ} \cdot 900}{45\,000} = \frac{36^{\circ} \cdot 9}{45\,5} = \frac{36^{\circ}}{5} = 7{,}2^{\circ}$$

- **Determinando o mês de observação**

  A cidade de Alexandria situa-se no hemisfério Norte, território do Egito, onde o solstício de verão acontece em junho (mais exatamente, em 21 de junho).

Portanto, a alternativa **a** é a correta.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 **Para esta atividade, será necessário utilizar um mapa-múndi político, um globo terrestre e uma régua.**

a) Escolha duas cidades quaisquer e localize-as tanto no mapa-múndi como no globo terrestre.

b) Em sua opinião, a distância entre as duas cidades, considerando o mapa-múndi, é maior, menor ou igual quando comparada em relação ao globo?

c) Meça a distância entre as cidades com a régua.

d) Identifique as escalas utilizadas no mapa e no globo.

e) Utilizando as escalas encontradas, determine a distância real entre as duas cidades.

f) Compare o resultado com sua hipótese registrada no item **b**.

g) Caso as distâncias obtidas no item **e** não sejam iguais, escreva uma possível justificativa para os resultados obtidos.

As respostas dos itens da atividade **1** dependem das duas cidades escolhidas pelos estudantes no item **a**.

Não escreva no livro.

No trabalho com este tópico, os estudantes investigam deformações de ângulos e comprimentos em diferentes projeções cartográficas, desenvolvendo a habilidade **EM13MAT509**. Esse tema apresenta grande afinidade com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, mais especificamente com o componente curricular Geografia. Se possível, desenvolva esse conteúdo com o professor de Geografia, para que os estudantes possam analisar o tema de diferentes perspectivas. Mais importante que saber o nome de cada uma das projeções é compreender suas principais características e o que cada uma delas conserva ou deforma em relação ao terreno.

PROJEÇÕES CARTOGRÁFICAS

Vamos estudar algumas projeções cartográficas, ou seja, algumas maneiras de representar no plano a superfície da Terra ou partes dela. Mas, antes, leia o texto a seguir.

Nem plana, nem redonda: definir a forma exata da Terra é um desafio

O aperfeiçoamento constante dos métodos para construir a representação do nosso planeta aumenta a exatidão em mapeamentos e medições.

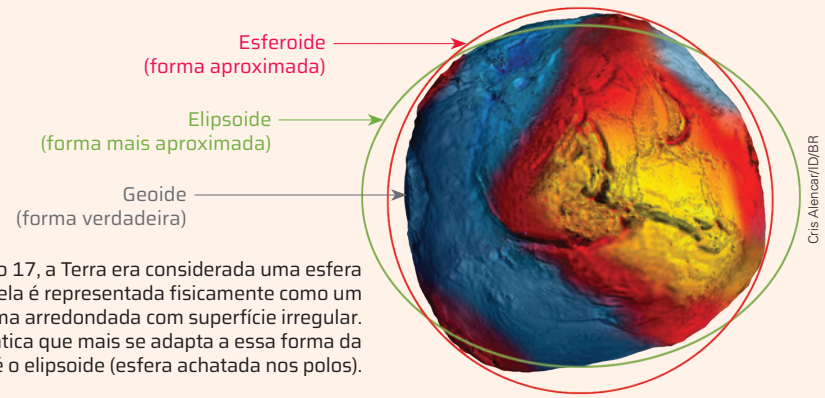
Sempre investimos em meios de conhecer melhor a forma da Terra, e durante muitos anos esse tema foi foco de debates e de elaboração de teorias. Desde a Antiguidade, buscamos maneiras de melhor conhecer e representar o nosso planeta, possibilitando, assim, que mapeamentos e medições diversas pudessem ser feitos com maior exatidão.

Plana? Redonda? Arredondada? Foram muitos os questionamentos. E só com o aprimoramento de técnicas cartográficas e o desenvolvimento tecnológico foi possível ir construindo uma melhor definição.

Mas por que devemos conhecer tão bem a forma do nosso planeta? Conhecer tanto a forma como a dimensão da Terra é fundamental para operações relacionadas ao posicionamento terrestre, à navegação (seja terrestre, marítima ou aérea) e a diferentes transformações de escala, importantes para a elaboração de mapas, com detalhamentos variados. Pequenas incertezas nessa determinação podem ser responsáveis por grandes erros.

A forma e as dimensões do nosso planeta podem ser definidas com diferentes graus de exatidão. Até meados do século 17, considerava-se a Terra como uma esfera regular. Com as novas teorias físicas (newtonianas), foi possível qualificar melhor as forças gravitacionais. Por meio de medições realizadas em diferentes latitudes, foram identificadas diferenças expressivas entre os raios geométricos do planeta.

Representação sem proporção de tamanho e em cores-fantasia.



Até o século 17, a Terra era considerada uma esfera regular. Hoje, ela é representada fisicamente como um geoide, uma forma arredondada com superfície irregular. A figura matemática que mais se adapta a essa forma da Terra é o elipsoide (esfera achatada nos polos).

Foi o xeque-mate para o paradigma da Terra esférica. Quando se colocou em questão o valor constante do raio da Terra, chegou-se a um novo conceito: o de um elipsoide de revolução. Achatado nos polos, o elipsoide de revolução é ainda hoje a figura matemática que os geodesistas (cientistas dedicados a estudar, entre outras questões, a forma e as dimensões da Terra) consideram a que mais se adapta à forma verdadeira da Terra. Ela é representada fisicamente como um geoide, que, de forma simples, pode ser definido como uma superfície fictícia determinada pelo prolongamento do nível médio dos mares sobre os continentes.

A superfície terrestre é irregular, com deformações, e seu formato está em constante modificação, consequência das ações erosivas, dos vulcões, do movimento das placas tectônicas, dos ventos, das chuvas, das ações do homem etc. Para representar a superfície terrestre em um plano, é necessário que se adote uma superfície de referência, que corresponda a uma figura matematicamente definida. Dependendo do propósito do mapeamento, a representação da Terra pode variar entre um plano tangente à superfície terrestre (específico para representação de pequenas áreas, como uma propriedade, por exemplo), um elipsoide de revolução (para representar áreas maiores, como um país) ou uma esfera (para o caso de áreas muito maiores, como um continente ou o próprio globo terrestre, quando, na escala de representação utilizada, os raios equatorial e polar não apresentam diferença significativa).

Apesar de tantas descobertas e avanços científicos, a Terra permanece sendo alvo de muita curiosidade. E continua a busca por desenvolver novos métodos de aperfeiçoamento da sua caracterização. Investimentos são direcionados para esse fim, com o intuito de reduzir ainda mais as distorções na representação do planeta. É fato que estamos acertando cada vez mais no posicionamento e nas medições realizadas na superfície terrestre, mas queremos mais!

Cruz, C. M. Nem plana, nem redonda: definir a forma exata da Terra é um desafio. *Ciência Hoje*, 12 jul. 2018. Disponível em: https://cienciahoje.org.br/artigo/nem-plana-nem-redonda-definir-a-forma-exata-da-terra-e-um-desafio/. Acesso em: 24 out. 2024.

A leitura do texto apresentado incentiva a valorização dos conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico para entender e explicar a realidade, auxiliando, dessa forma, o desenvolvimento da competência geral **1**.

Não escreva no livro.

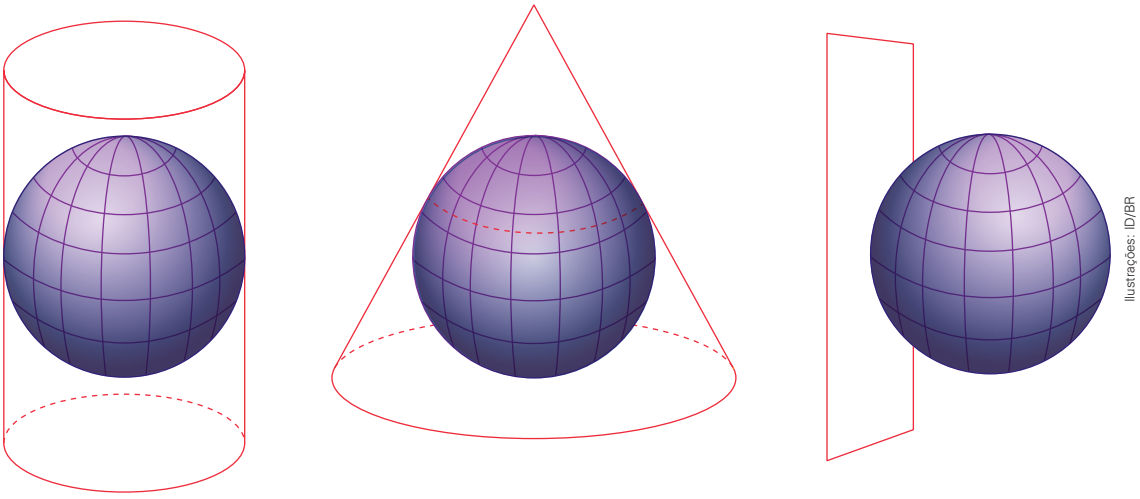
Se considerar oportuno, explique aos estudantes que a escala geográfica apresenta relação inversa à escala cartográfica. De maneira simplificada, na escala cartográfica, temos: superfície grande, escala pequena; superfície pequena, escala grande. E, na escala geográfica, temos: superfície grande, escala grande (o mundo, os continentes); superfície pequena, escala pequena (como a de um local específico).

A representação de uma superfície curva em uma superfície plana apresenta diversas vantagens. Por exemplo, é mais fácil de ser reproduzida e de ser manuseada. Além disso, calcular escalas cartográficas em um plano é muito mais simples. Entretanto, essa representação gera distorções, e é necessário aplicar diferentes técnicas para minimizar essas imprecisões. O conjunto dessas técnicas refere-se ao estudo das projeções cartográficas.

Assim, um dos maiores desafios da Cartografia consiste em representar uma superfície curva em uma superfície plana. Você tem alguma ideia de como fazer isso?

Sugerimos a você outro experimento. Utilizando uma folha de papel e um objeto esférico, pense em diferentes maneiras de "cobrir" parte ou partes desse objeto com a folha, mas sem amassá-la. Depois, verifique se a posição em que você colocou a folha lembra algum sólido geométrico.

Existem basicamente três maneiras de posicionar a folha em relação à esfera. Acompanhe:



Ilustrações: ID/BR

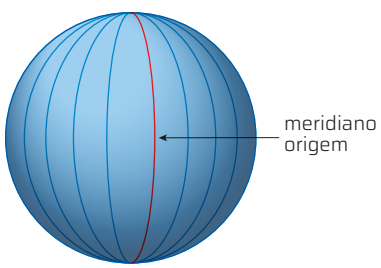
cilindro | cone | plano

Repare que a folha pode ser posicionada de modo a se obter a superfície lateral de um cilindro, a superfície lateral de um cone ou um plano.

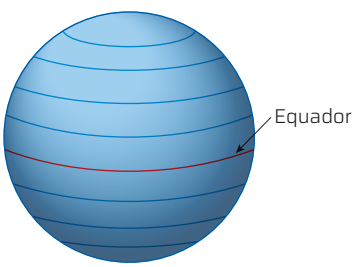
Incentive os estudantes a realizar a experimentação sugerida. Atividades como essa trabalham o senso crítico e de investigação deles, contribuindo para o desenvolvimento da competência geral **2**.

Meridianos e paralelos geográficos e fusos horários

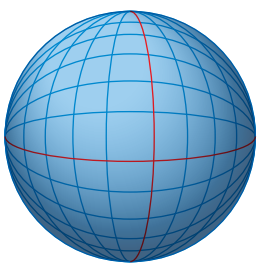
Os **meridianos e os paralelos geográficos** são linhas imaginárias que são utilizadas para facilitar a localização das coordenadas geográficas.



Representação simplificada dos meridianos (linhas de longitude).



Representação simplificada dos paralelos (linhas de latitude).



Ilustrações: ID/BR

Representação da rede de paralelos e meridianos.

O objeto digital apresenta conhecimentos sobre os fusos horários mundiais, explorando a divisão dos 24 fusos horários.

Fusos horários mundiais

Ao viajar para algum lugar, às vezes é preciso ajustar o relógio, caso isso não seja feito automaticamente. Isso acontece porque o globo terrestre é dividido em **fusos horários**. Para organizar a variação de horários das regiões do planeta, foi adotado esse sistema de uniformização dos horários.

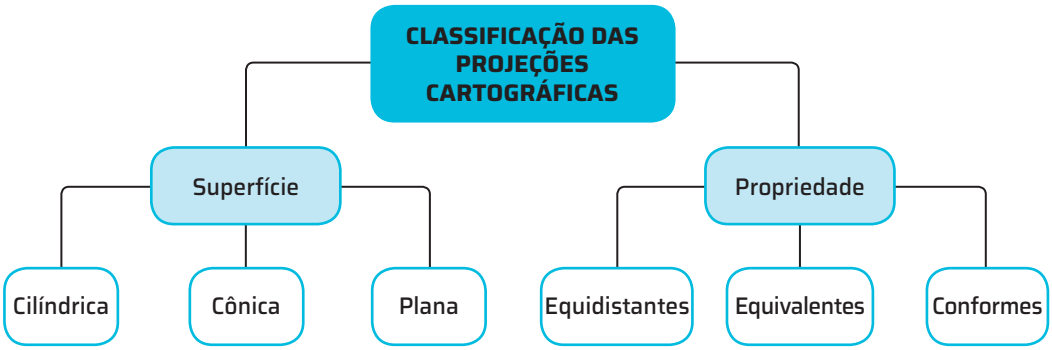
Cada fuso é determinado aproximadamente por intervalos de 15° entre um meridiano e outro. Esse valor é obtido dividindo-se a circunferência do planeta (360°) pelo tempo que a Terra completa o movimento de rotação (24 horas). A demarcação dos fusos não segue em linhas retas, pois acompanha os limites territoriais definidos pelos países.

Não escreva no livro.

Se considerar oportuno, comente com os estudantes que existem outras classificações possíveis. Entretanto, nesta coleção, vamos nos concentrar em estudar a classificação indicada no diagrama a seguir.

Classificação e características das projeções cartográficas

As projeções cartográficas são classificadas, principalmente, quanto à superfície de projeção e quanto às propriedades que conservam em relação à figura original. Analise o diagrama a seguir.



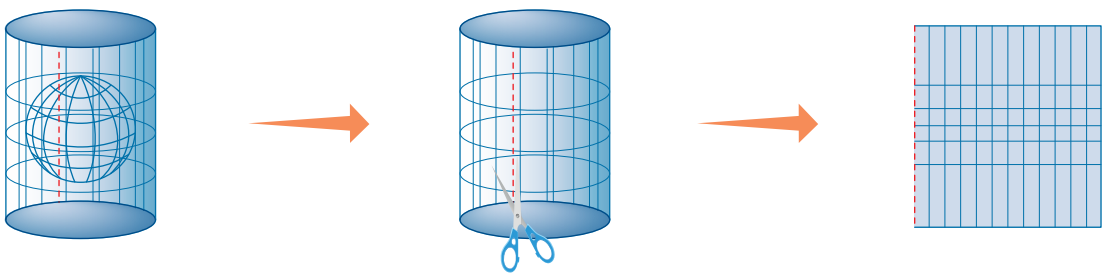
Agora, vamos estudar as classificações indicadas nesse diagrama.

Superfície de projeção

Em relação à superfície de projeção, as projeções podem ser classificadas em cilíndricas, cônicas ou planas.

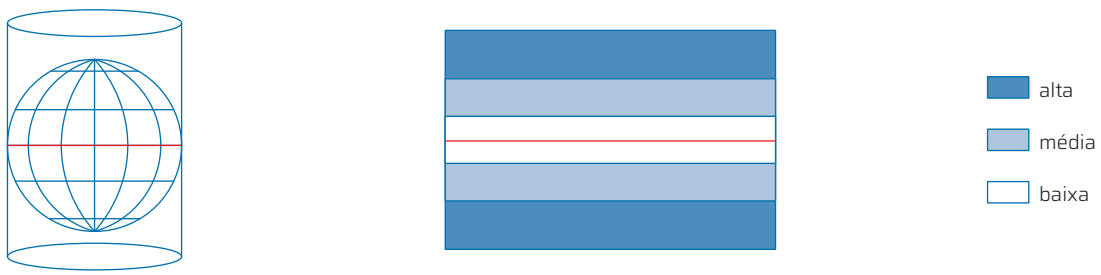
- **Projeção cilíndrica:** a projeção dos meridianos e dos paralelos geográficos é feita em um cilindro tangente ou secante à superfície de referência, desenvolvendo o cilindro em um plano.

Ilustrações: ID/BR



O esquema a seguir mostra, de maneira simplificada, a distorção no caso de a superfície cilíndrica ser tangente à esfera.

Ilustrações: ID/BR



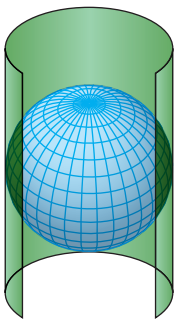
Agora, verifique como é a distorção no caso de a superfície cilíndrica ser secante à esfera, ou seja, a superfície cilíndrica intersecta a esfera em dois paralelos da esfera.

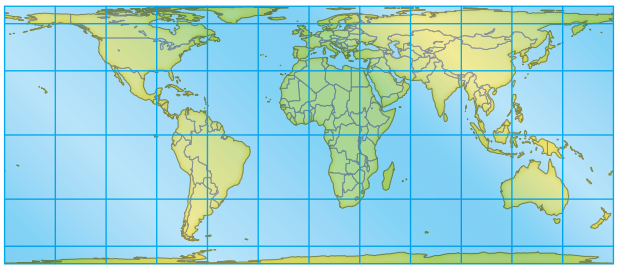
Ilustrações: ID/BR



Não escreva no livro.

Acompanhe um exemplo de mapa-múndi confeccionado por uma projeção cilíndrica. Esta é a projeção de Peters. Repare que, nesse tipo de projeção, os territórios mais próximos aos polos estão representados de maneira mais deformada que aqueles que se encontram próximos à linha do Equador.

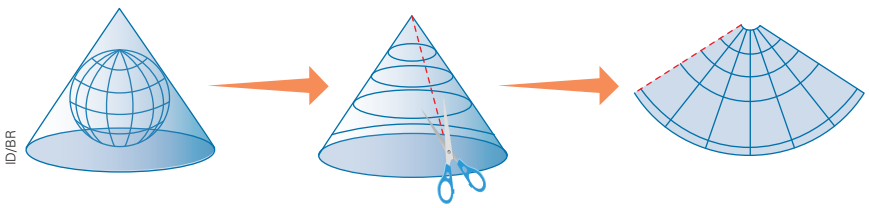




João Miguel A. Moreira/ID/BR

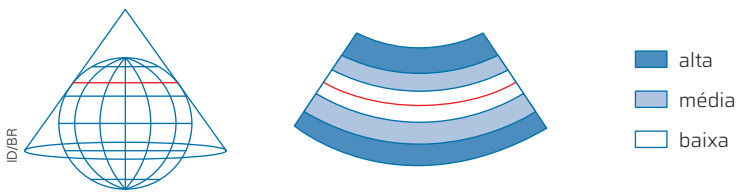
Fonte de pesquisa: IBGE. Projeções cartográficas. *Atlas geográfico escolar*. Disponível em: https://atlasescolar.ibge.gov.br/cartografia/21733-as-projecoes-cartograficas.html. Acesso em: 18 ago. 2024.

- **Projeção cônica:** os meridianos e os paralelos geográficos são projetados em um cone tangente ou secante à superfície de referência, desenvolvendo o cone em um plano.



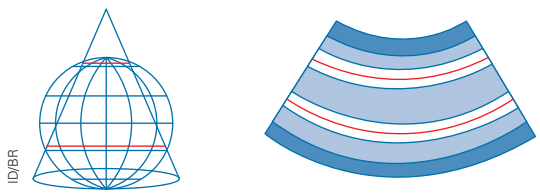
ID/BR

O esquema a seguir mostra a distorção no caso de tangência.



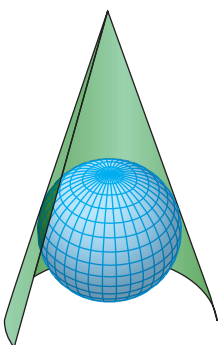
ID/BR

Agora, analise a distorção no caso de a superfície do cone ser secante à esfera, ou seja, intersectar a esfera em um de seus paralelos.



ID/BR

O mapa-múndi a seguir foi representado por uma projeção cônica (de Albers).



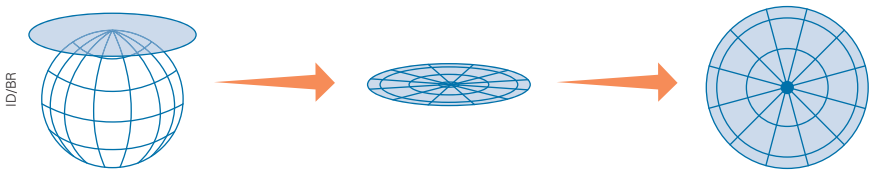


João Miguel A. Moreira/ID/BR

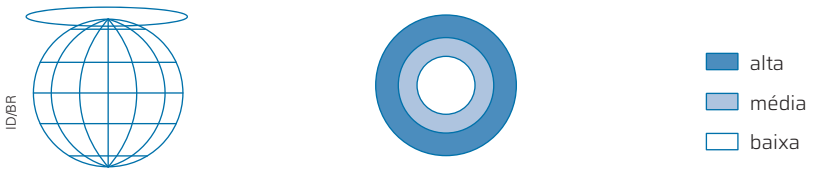
Fonte de pesquisa: IBGE. Projeções cartográficas. *Atlas geográfico escolar*. Disponível em: https://atlasescolar.ibge.gov.br/cartografia/21733-as-projecoes-cartograficas.html. Acesso em: 18 ago. 2024.

Não escreva no livro.

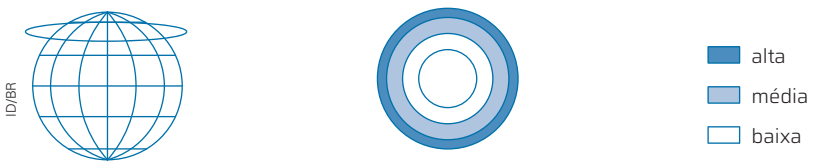
- **Projeção plana (ou azimutal):** é construída com base em um plano tangente ou secante a um ponto na superfície de referência.



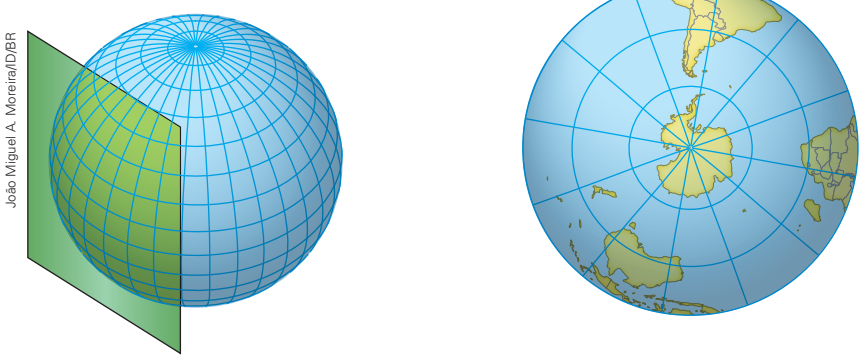
O esquema a seguir mostra a distorção no caso de tangência.



Agora, veja a distorção no caso de secância:



Observe um mapa-múndi representado por uma projeção plana:



Fonte de pesquisa: IBGE. Projeções cartográficas. *Atlas geográfico escolar*. Disponível em: https://atlasescolar.ibge.gov.br/cartografia/21733-as-projecoes-cartograficas.html. Acesso em: 18 ago. 2024.

Propriedades de projeção

As propriedades conservadas nas projeções cartográficas são: equidistância, equivalência e conformidade. De acordo com essas propriedades, as projeções são classificadas do seguinte modo:

- **Equidistantes:** são as que não apresentam deformações lineares ao longo de determinada direção, isto é, os comprimentos não sofrem deformação.

  Geralmente, os mapas-múndi são confeccionados dessa maneira, pois, assim, as distâncias entre duas localidades se mantêm o mais fiéis possível.

- **Equivalentes:** não deformam as áreas, isto é, as áreas representadas no mapa são equivalentes a suas áreas correspondentes na superfície da Terra.

  Projeções desse tipo são utilizadas para cálculo de áreas oficiais – por exemplo, para o cálculo das áreas das Unidades da Federação e dos municípios.

- **Conformes:** são as que não deformam os ângulos. Elas são utilizadas com frequência na navegação marítima e aérea, pois a navegação é orientada por ângulos determinados entre pontos de referência.

Não escreva no livro.

Veja, a seguir, a representação do Brasil nas projeções equidistante, equivalente e conforme.



Projeção equidistante.



Projeção equivalente.



Projeção conforme.

Ilustrações: João Miguel A. Moreira/ID/BR

Se julgar necessário, informe aos estudantes que uma projeção pode ser classificada tanto em relação à superfície de projeção como em relação às propriedades que ela conserva. Entretanto, para cada uma das classificações, uma projeção só pode se enquadrar em uma categoria, isto é, não é possível que uma projeção seja ao mesmo tempo cilíndrica e cônica, ou, ainda, conforme e equidistante.

De acordo com o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), não existe uma representação ideal, apenas uma melhor representação para determinado propósito.

Além disso, saber o que é alterado de acordo com cada tipo de projeção é muito importante para evitar, por exemplo, comparações equivocadas.

Exemplo 1

O mapa-múndi a seguir foi feito com base na projeção de Mercator, que é uma das mais utilizadas do mundo. Trata-se de uma projeção cilíndrica e conforme – obtida a partir de um cilindro e que preserva os ângulos.



João Miguel A. Moreira/ID/BR

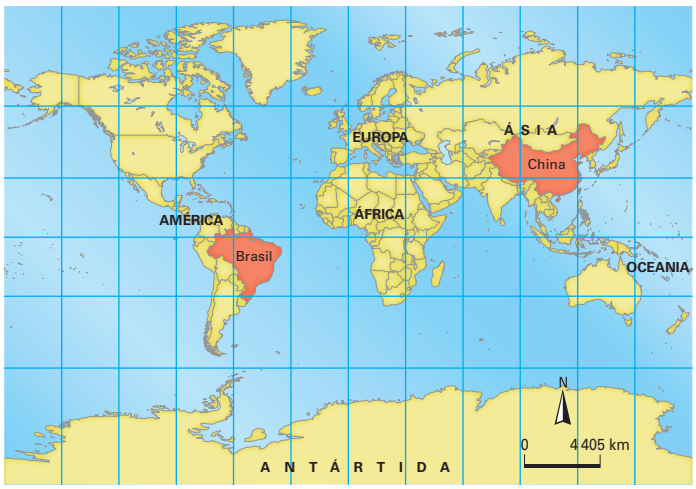
Note que a maior área representada no mapa corresponde à Antártida. Entretanto, o maior continente da Terra é a Ásia, medindo cerca de 43 810 000 km². A Antártida fica na quarta posição em relação à extensão territorial, com cerca de 13 720 000 km².

Não escreva no livro.

Exemplo 2

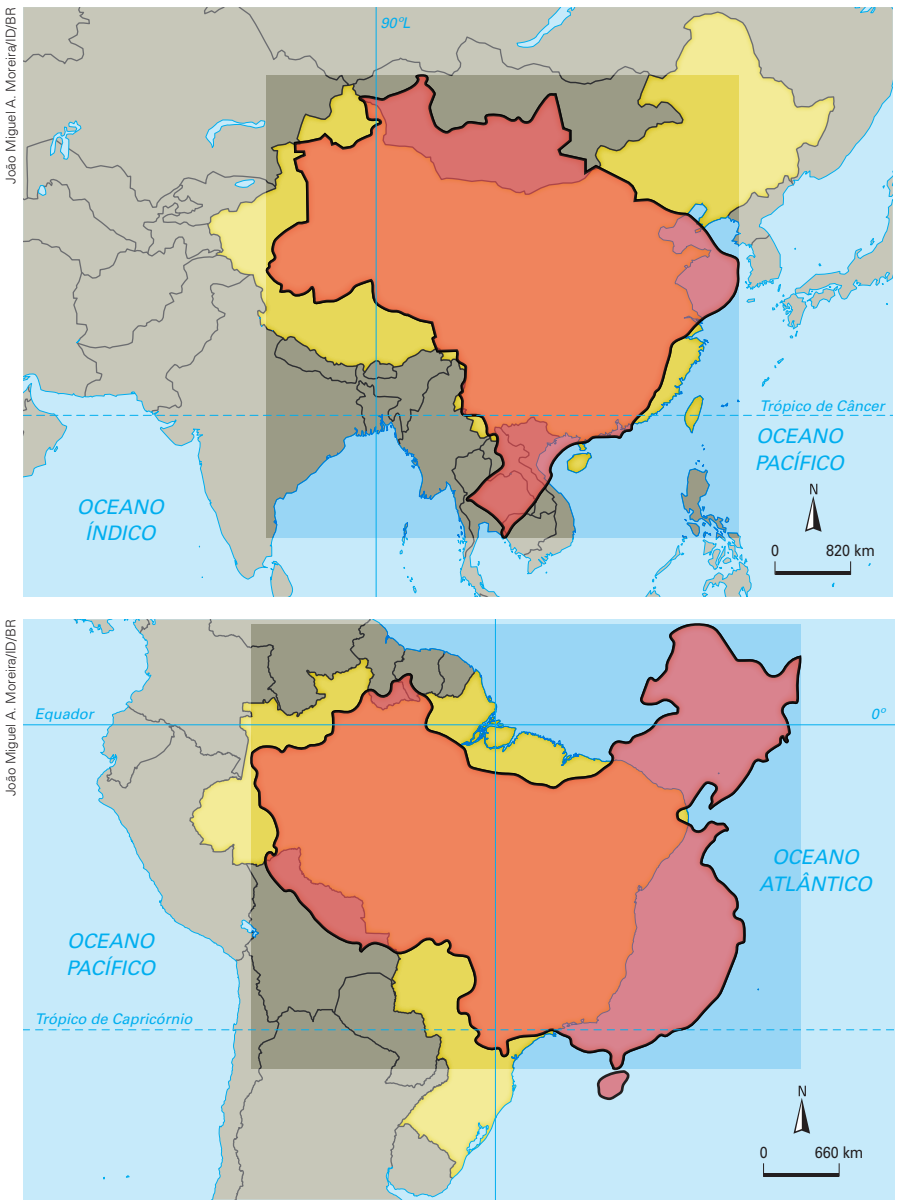
A projeção de Miller também é utilizada com frequência. É uma projeção cilíndrica e equivalente, isto é, ela é obtida a partir de um cilindro e preserva as áreas.

Note que, nessa projeção, a área da China parece maior que a área do Brasil. De fato, a área da China, de 9 596 961 km², é maior que a do Brasil, que mede 8 515 767 km².



João Miguel A. Moreira/ID/BR

Nas imagens a seguir, é possível ver a sobreposição do mapa de um país sobre o outro a fim de comparar suas extensões territoriais reais.



João Miguel A. Moreira/ID/BR

Comparação das extensões territoriais da China e do Brasil.

PARA EXPLORAR

Vídeo

MERCATOR projection. [*S.l.*: *s.n.*], 26 set. 2013. 1 vídeo (40 s). Publicado pelo canal Actuator. Disponível em: https://youtu.be/CPQZ7NcQ6YQ?si=TUv0_Fn12x6ZpPNf. Acesso em: 25 out. 2024.

Acesse o *link* indicado e veja a deformação das áreas que ocorre na projeção de Mercator.

Site

THE TRUE size. Disponível em: https://thetruesize.com. Acesso em: 25 out. 2024.

Nesse *site*, que pode ser acessado pelo *link*, é possível escolher alguns países e arrastá-los sobre outros para comparar suas áreas. Apesar de o *site* estar em inglês, ele pode ser traduzido pelo navegador de internet, além de seu manuseio ser muito intuitivo.

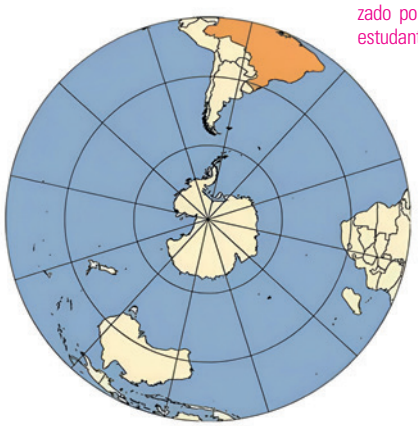
Não escreva no livro.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Muitas das atividades relativas a projeções cartográficas envolvem conceitos próprios do componente curricular Geografia. Assim, sugerimos que você oriente os estudantes a ler as atividades, a registrar termos e conceitos desconhecidos, a fazer uma pesquisa para sanar as dúvidas e, então, a retornar para resolver as atividades. Uma abordagem integrada com o professor de Geografia também pode contribuir para um melhor aprendizado por parte dos estudantes.

2 **Indique a resposta correta no caderno.**

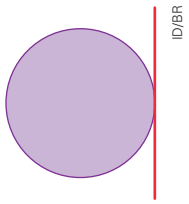
(Famerp-SP) Analise o mapa.



FAMERP 2023/Fac-símile: ID/BR

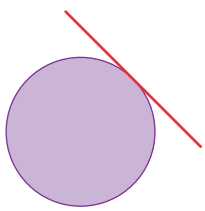
O processo de elaboração da projeção cartográfica desse mapa é ilustrado em: Alternativa **d**.

a)



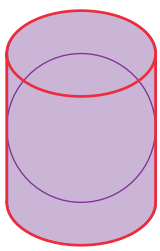
ID/BR

b)



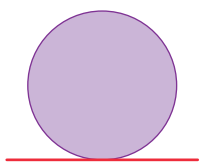
ID/BR

c)



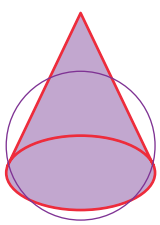
ID/BR

d)



ID/BR

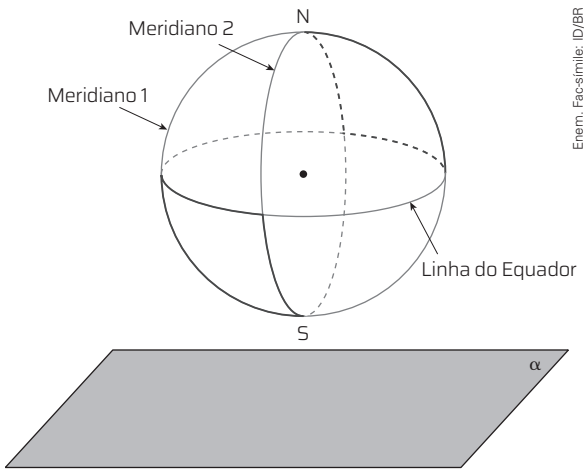
e)



ID/BR

3 **Indique a resposta correta no caderno.**

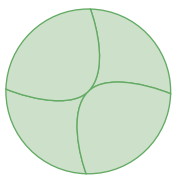
(Enem) Na figura estão destacadas duas trajetórias sobre a superfície do globo terrestre, descritas ao se percorrer parte dos meridianos 1, 2 e da Linha do Equador, sendo que os meridianos 1 e 2 estão contidos em planos perpendiculares entre si. O plano α é paralelo ao que contém a Linha do Equador.



Enem. Fac-símile: ID/BR

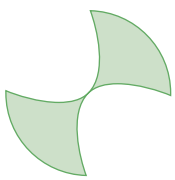
A vista superior da projeção ortogonal sobre o plano α dessas duas trajetórias é Alternativa **e**.

a)



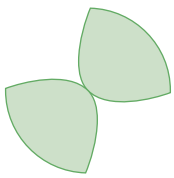
ID/BR

b)



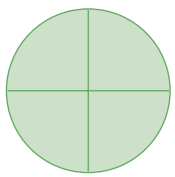
ID/BR

c)



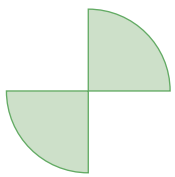
ID/BR

d)



ID/BR

e)

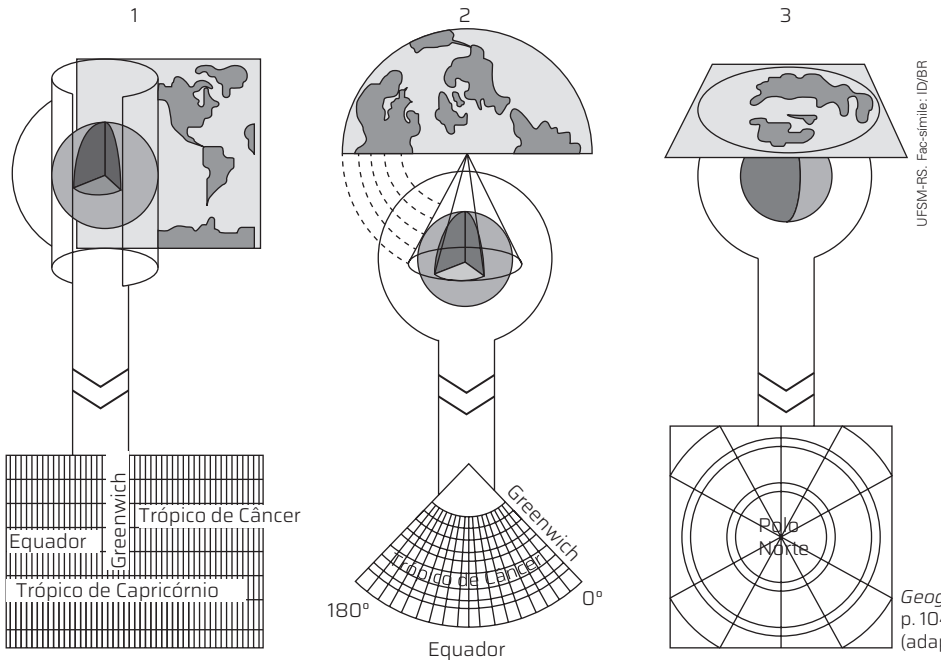


ID/BR

Não escreva no livro.

4 **Resolva esta atividade e registre no caderno a alternativa correta.**

(UFSM-RS) Observe as projeções cartográficas:



UFSM-RS. Fac-símile: ID/BR

Geografia, ed. 3, p. 104, 2011. (adaptado)

Numere corretamente as projeções com as afirmações a seguir. Alternativa **c**.

(///) Na projeção cilíndrica, a representação é feita como se um cilindro envolvesse a Terra e fosse então pl**anificado.**

(///) Na projeção azimutal, o mapa é construído sobre um plano que tangencia algum ponto da **superfície terrestre.**

(///) Na projeção cônica, a representação é feita como se o cone envolvesse o planeta e de**pois fosse planificado.**

(///) Esse tipo de projeção representa, com menos distorções, as baixas **latitudes.**

(///) Essa projeção é comumente utilizada para análises geopolíticas e para retratar as regiões polares **e suas extremidades.**

A sequência correta é:

a) 1 - 3 - 2 - 3 - 1

b) 3 - 2 - 1 - 1 - 3

c) 1 - 3 - 2 - 1 - 3

d) 1 - 2 - 1 - 1 - 3

e) 3 - 1 - 2 - 3 - 1

5 **Indique no caderno a alternativa correta.**

(FGV-SP) Considerando a cartografia enquanto um conjunto de técnicas, temos nas projeções cartográficas o desafio de representar em um plano o formato geoide do planeta Terra. Quanto ao tipo de superfície de projeção, aquela cujas distorções aumentam conforme nos afastamos da Linha do Equador denomina-se projeção: Alternativa **c**.

a) cônica.

b) polissuperficial.

c) cilíndrica.

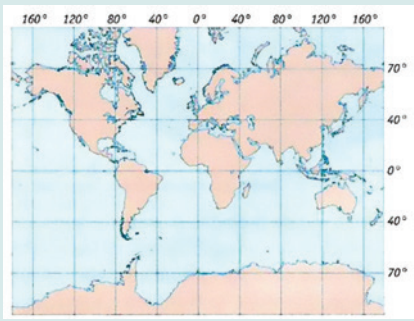
d) poliédrica.

e) azimutal.

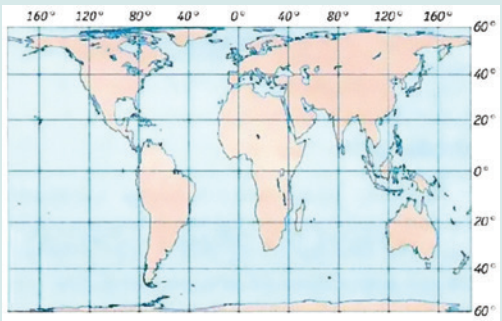
6 Registre no caderno a alternativa correta.

(UPF-RS) Observe os mapas e, com base em seus conhecimentos sobre o tema, analise as afirmações que seguem.

MAPA 1



MAPA 2



UFPR-RS. Fac-símile: ID/BR

(Fonte: Marina; Tércio. *Geografia Geral e do Brasil*. São Paulo: Ática, 2008. p. 23.)

I. O primeiro mapa é conhecido como Projeção de Mercator, e o segundo, Projeção de Peters.
II. Ambos os mapas utilizam como base de projeção o modelo cilíndrico.
III. O mapa de Mercator utiliza projeção cilíndrica enquanto o de Peters utiliza a projeção cônica.
IV. O mapa de Peters distorce as formas dos continentes, mas preserva suas dimensões relativas.
V. O mapa de Mercator destaca os países setentrionais, refletindo o contexto do eurocentrismo.

Está correto apenas o que se afirma em: Alternativa **a**.

a) I, II, IV e V. **b)** I, III e V. **c)** II e IV. **d)** II e V. **e)** III.

7 Indique a alternativa correta no caderno.

(Mackenzie-SP) Ao transferir uma grade esférica para uma superfície plana, há a produção de uma projeção cartográfica. [...] Hoje, as projeções cartográficas são desenvolvidas matematicamente, com o uso de computadores para encaixar a coordenada geográfica na superfície. As projeções cartográficas sempre distorcerão a forma, a área, a direção ou a distância das características do mapa, ou algumas combinações delas, portanto, é importante que os desenhistas escolham a melhor projeção para efetuar a tarefa.

Petersen; Sack; Gabler. *Fundamentos de Geografia Física*. São Paulo: Cengage Learning, 2014. p. 31-32.

Observe o planisfério e assinale a opção que contém a informação INCORRETA sobre a projeção de Mercator. Alternativa **d**.

a) Essa projeção não mostra as áreas com precisão e a distorção de tamanho aumenta próximo aos polos.

b) Nessa projeção, há uma enorme distorção leste-oeste de áreas de latitudes elevadas, porque as distâncias entre os meridianos são alongadas com a mesma largura que possuem no Equador.

c) A projeção de Mercator apresenta formas corretas, sendo considerada uma projeção conforme.

d) Nessa projeção cartográfica, a Groenlândia tem seu tamanho real preservado, o que se nota ao compará-lo ao da América do Sul. Esses territórios possuem áreas parecidas.

Projeção de Mercator



João Miguel A. Moreira/ID/BR

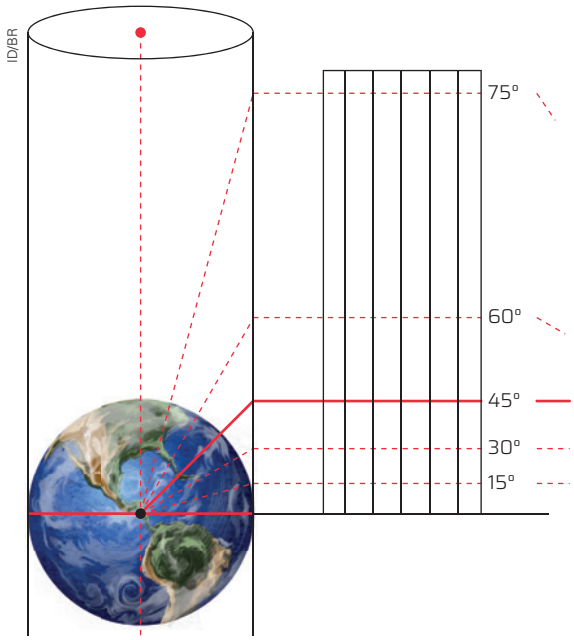
(Fonte do mapa: https://www.todamateria.com.br/projecoes-cartograficas/. Acesso em: 17 mar. 2019.)

e) O mapa-múndi de Mercator é ajustado matematicamente à projeção cilíndrica, cujos meridianos são linhas paralelas, em vez de convergirem aos polos.

Não escreva no livro.

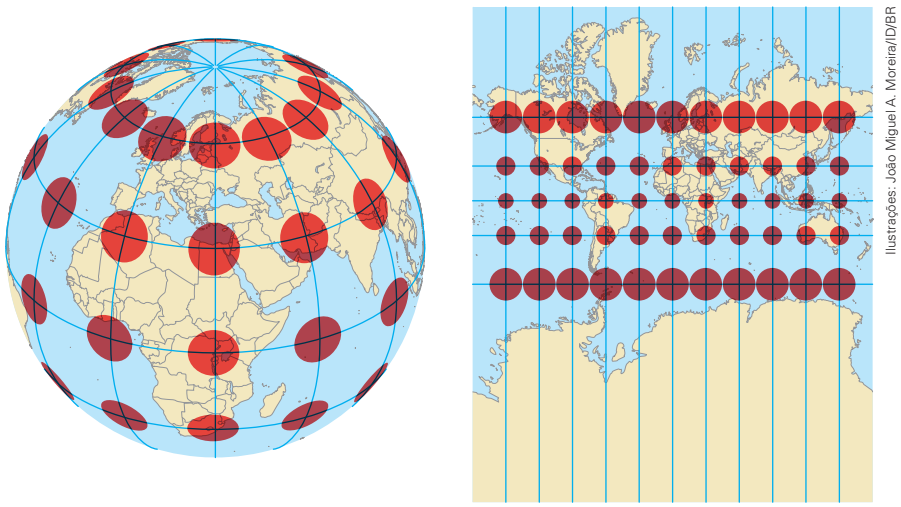
MARCADORES DE TISSOT

Vimos que, independentemente da projeção utilizada, há uma deformação ao representar, no plano, uma superfície curva. Existem diversas ferramentas matemáticas e tecnológicas que medem essa deformação.



Esquema que mostra a deformação dos ângulos na projeção de Mercator. Note que, ao se distanciar da linha do Equador, os paralelos apresentam uma distância maior entre si.

Um dos métodos utilizados para avaliar as deformações de uma projeção são os marcadores de Tissot. Esse método foi proposto em 1859 pelo cartógrafo francês Nicolas Tissot (1824-1897) e consiste em desenhar na superfície curva, comumente no encontro de paralelos e meridianos, uma figura geométrica de avaliação de distorção de mesmo tamanho. Ao fazer a projeção dessa superfície curva, tais figuras acompanhariam a deformação e, assim, possibilitariam dimensionar a distorção na projeção cartográfica.



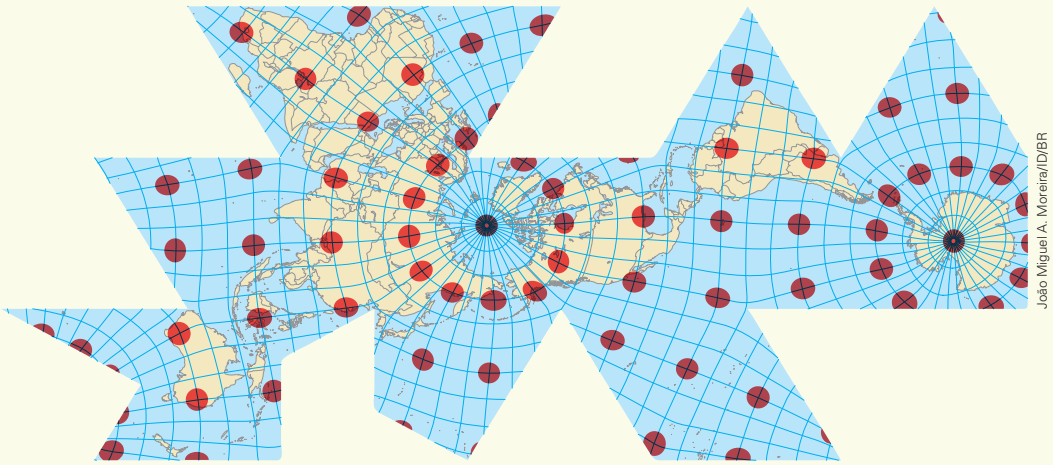
Ilustrações: João Miguel A. Moreira/ID/BR

A figura à esquerda mostra a posição de cada marcador de Tissot no globo terrestre, e a figura à direita apresenta a deformação que ocorre em cada marcador quando a projeção de Mercator é utilizada.

Não escreva no livro.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R2 A projeção de Fuller consiste em representar uma superfície curva na superfície de um poliedro. A imagem a seguir é um exemplo de projeção de Fuller. Ela pode ser composta de 20 regiões triangulares que, ao serem dobradas, dão origem à superfície de um icosaedro.



João Miguel A. Moreira/ID/BR

a) Observando os marcadores de Tissot na projeção, que vantagem existe ao utilizar esse tipo de projeção?

b) Quais são os pontos negativos de utilizar uma projeção como essa?

c) Calcule o número de arestas e de vértices do poliedro obtido após "montar" essa projeção.

Resolução

a) Os marcadores de Tissot são usados para avaliar a distorção de uma projeção. Observando a figura, percebemos que os marcadores apresentam pouca variação de formato entre si (são aproximadamente circulares). Assim, uma possível vantagem dessa projeção é a pouca deformação sofrida.

b) Uma desvantagem em utilizar essa projeção é não ter uma orientação espacial de fácil localização. Em outras palavras, não é possível distinguir com nitidez onde estão localizados o norte, o sul, o leste e o oeste geográficos. Outro ponto negativo é que a disposição dos triângulos é diferente do padrão apresentado por paralelos e meridianos, o que faz com que essa projeção raramente seja utilizada em aplicações técnicas.

c) O icosaedro é formado por 20 faces triangulares. Cada face tem 3 lados, ou seja, temos um total de 60 lados, pois:

$$20 \cdot 3 = 60$$

Entretanto, ao reunirmos um lado de uma face com outro, o mesmo lado é contado duas vezes. Então, para determinar o número de arestas do icosaedro, temos que dividir por 2 o total de lados obtidos.

$$\frac{60}{2} = 30$$

Assim, o icosaedro apresenta 30 arestas.

Utilizando a relação de Euler para poliedros convexos, podemos determinar o número de vértices. Sendo V o número de vértices, F o número de faces e A o número de arestas, temos:

$$V + F = A + 2$$

$$V + 20 = 30 + 2$$

$$V = 32 - 20$$

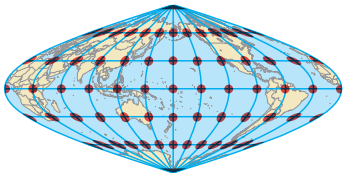
$$V = 12$$

Portanto, o icosaedro apresenta 30 arestas e 12 vértices.

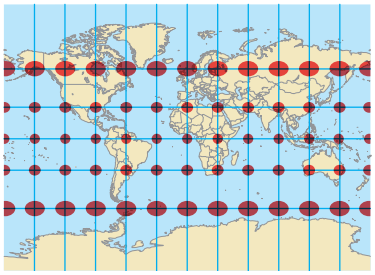
Não escreva no livro.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

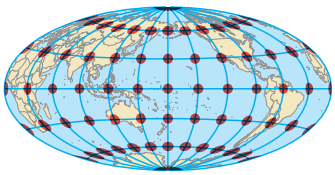
8 Analise a seguir três tipos diferentes de projeções cartográficas.



Projeção sinusoidal.



Projeção de Miller.



Projeção de Hammer.

Ilustrações: João Miguel A. Moreira/ID/BR

Observando os marcadores de Tissot em cada uma das projeções, faça o que se pede.

a) Escreva uma conclusão sobre a área dos continentes na linha do Equador. As projeções são conformes e equivalentes.

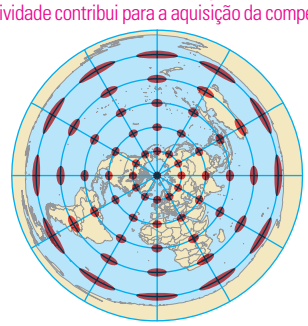
b) Escreva uma conclusão sobre a área dos continentes próxima aos polos. As projeções são distorcidas tanto na forma quanto na área.

9 A figura a seguir mostra o símbolo da Organização das Nações Unidas (ONU) e a projeção azimutal que inspirou a criação desse símbolo. Ao desenvolver esta atividade, o estudante deverá construir argumentos bem embasados e com fontes confiáveis. Assim, a atividade contribui para a aquisição da competência geral **7**.



abbaskhanpk/Shutterstock.com/ID/BR

Símbolo da ONU.



João Miguel A. Moreira/ID/BR

Projeção azimutal que inspirou a criação do símbolo da ONU.

Analise os marcadores de Tissot apresentados na projeção azimutal e escreva uma conclusão acerca da representação dos países no símbolo da ONU. O símbolo da ONU apresenta uma projeção azimutal equidistante centrada no polo Norte.

CÁLCULO RÁPIDO

Nos mapas, há sempre indicações de escalas e ângulos e esses valores devem ser calculados adequadamente. Por isso, seu desafio é resolver as próximas atividades mentalmente.

1 Faça as conversões a seguir entre medidas de comprimento.

a) Qual é o valor em centímetro de:

- 10 km? 10^6 cm
- 25 km? $2{,}5 \cdot 10^6$ cm
- 2,4 km? $2{,}4 \cdot 10^5$ cm

b) Qual é o valor em quilômetro de:

- 5 000 000 cm? 50 km
- 230 000 cm? 2,3 km
- 140 000 000 cm? 1 400 km

2 Considerando que um mapa está na escala 1 : 100 000, qual é a verdadeira distância, em quilômetro, entre duas cidades que, nesse mapa, distam:

a) 10 cm? 10 km

b) 15 cm? 15 km

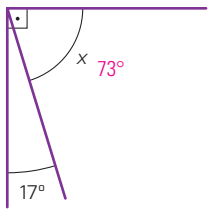
c) 24 cm? 24 km

d) 2,4 cm? 2,4 km

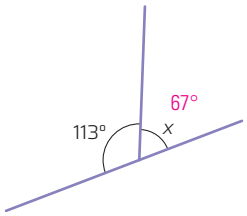
Não escreva no livro.

3 Calcule o valor de x em cada caso.

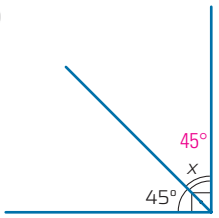
a)



c)

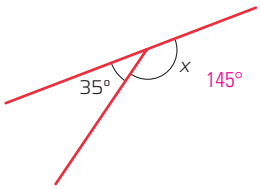


e)

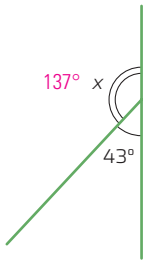


Ilustrações: ID/BR

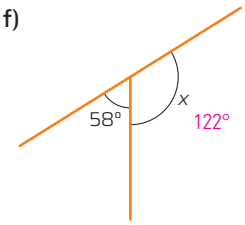
b)



d)



f)

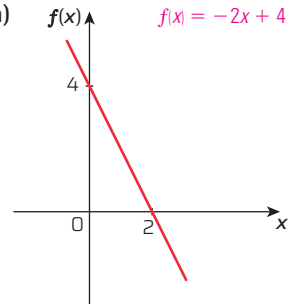


PARA RECORDAR

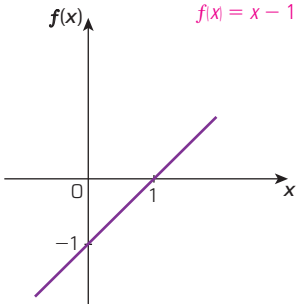
A resolução das atividades a seguir exige conteúdos diversos. Muitos dos conhecimentos que você vai utilizar aqui também podem ser empregados para resolver questões que extrapolam o ambiente escolar. Assim, estas atividades são úteis para avaliar sua compreensão e sua habilidade em resolver problemas.

1 Determine a função correspondente a cada gráfico no plano cartesiano.

a) $f(x) = -2x + 4$



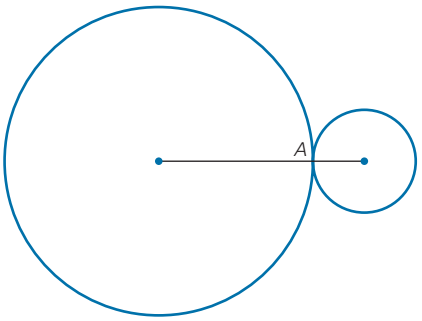
b) $f(x) = x - 1$



Ilustrações: ID/BR

2 Se um retângulo tem diagonal medindo 10 cm e lados cujas medidas somam 14 cm, qual é sua área?
48 cm²

3 A soma das medidas dos raios de duas circunferências é 12 dm, e a circunferência menor dá três voltas completas ao redor da maior, até voltar à posição inicial A. Qual é o raio de cada uma das circunferências? 9 dm; 3 dm.



ID/BR

4 Um campo de futebol tem 340 m de perímetro. O novo técnico do clube pediu que ele fosse ampliado em 10 m em seu comprimento, de modo que este passasse a ser o dobro da largura.

a) Quais eram as dimensões do campo antigo?
Comprimento 110 m e largura 60 m.

b) Quais são as dimensões do campo novo?
Comprimento 120 m e largura 60 m.

Não escreva no livro.

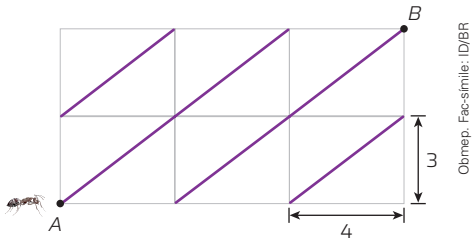
FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO

Aqui estão três problemas para você trabalhar o raciocínio lógico dedutivo. Seja persistente e mantenha certa organização ao registrar a resolução para não se perder enquanto a desenvolve.

1 **Escreva a alternativa correta no caderno.**

(Obmep) Uma formiga está no ponto *A* da malha mostrada na figura. A malha é formada por retângulos de 3 cm de largura por 4 cm de comprimento. A formiga só pode caminhar sobre os lados ou sobre as diagonais dos retângulos. Qual é a menor distância que a formiga deve percorrer para ir de *A* até *B*? Alternativa **b**.

a) 12 cm
b) 14 cm
c) 15 cm
d) 17 cm
e) 18 cm



Obmep. Fac-símile: ID/BR

2 **Indique a resposta correta no caderno.**

(Insper-SP) Dentro de um grupo de tradutores de livros, todos os que falam alemão também falam inglês, mas nenhum que fala inglês fala japonês. Além disso, os dois únicos que falam russo também falam coreano. Sabendo que todo integrante desse grupo que fala coreano também fala japonês, pode-se concluir que, necessariamente, Alternativa **e**.

a) todos os tradutores que falam japonês também falam russo.
b) todos os tradutores que falam alemão também falam coreano.
c) pelo menos um tradutor que fala inglês também fala coreano.
d) nenhum dos tradutores fala japonês e também russo.
e) nenhum dos tradutores fala russo e também alemão.

3 **Resolva a atividade e indique no caderno a alternativa correta.**

Joana tem um grupo de 40 amigos, em que o mais novo tem 15 anos e o mais velho tem 27 anos. Se cada um dos amigos de Joana tem um número inteiro de anos, podemos afirmar que: Alternativa **e**.

a) a média das idades de todos os amigos de Joana é 21 anos.
b) a idade de pelo menos um dos amigos de Joana é 21 anos.
c) nenhum amigo tem idade igual a 21 anos.
d) no máximo 15 amigos de Joana têm a mesma idade.
e) no mínimo 4 amigos de Joana têm a mesma idade.

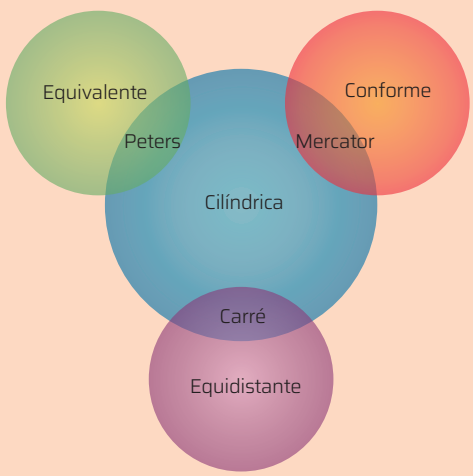
PALAVRAS-CHAVE

Neste capítulo, estudamos as principais projeções cartográficas e as características que as diferenciam. Podemos classificar as projeções utilizando mais de um critério, por exemplo, considerando as superfícies (plana, cônica ou cilíndrica) e as propriedades (equidistante, equivalente ou conforme).

Assim, você deve ter notado que cada projeção pode ser classificada tanto de acordo com sua superfície como de acordo com a propriedade que se deseja preservar.

Agora, convidamos você a elaborar um diagrama com o que aprendeu sobre as classificações das projeções cartográficas.

Veja ao lado uma sugestão de diagrama para você se inspirar. Se necessário, consulte o professor de Geografia sobre outras projeções cartográficas.



ID/BR

Incentive os estudantes a pesquisar outras projeções, diferentes das apresentadas no capítulo, para enriquecer o diagrama que eles devem elaborar, como a projeção de Carré, por exemplo, que não foi explorada. Por fim, recomendamos que você proponha a eles que compartilhem entre si os diagramas elaborados.

Não escreva no livro.

MATEMÁTICA E TECNOLOGIA

Esta seção contempla as competências gerais **1**, **2**, **4**, **5** e **10** propostas pela BNCC, a partir de conhecimentos historicamente construídos e de uma abordagem científica, para que os estudantes compreendam o uso de tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa e reflexiva. Além disso, possibilita uma integração com as áreas de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, assim como os temas contemporâneos transversais Ciência e Tecnologia, Economia (Trabalho) e Meio Ambiente (Educação Ambiental).

Para ampliar os conhecimentos dos estudantes sobre como um navegador digital funciona, convide os professores de Geografia, História e Física para participar das discussões. Com isso, é possível explorar a competência específica **3** da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e a competência específica **2** da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

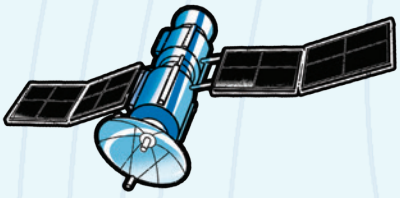
Matemática e o Sistema de Posicionamento Global (GPS)

Para manter uma vida saudável e prevenir doenças, é importante equilibrar nossa rotina com alimentação balanceada e exercícios físicos regulares. Os especialistas frequentemente recomendam atividades como caminhadas e corridas de baixo impacto. Além de melhorar nosso bem-estar físico e mental, essas práticas não pesam no bolso.

E sabe o que é interessante? Hoje existem diversos aplicativos que auxiliam na execução e no acompanhamento do desempenho em práticas esportivas. Alguns medem a distância percorrida, a frequência cardíaca, o tempo e outras informações úteis. Boa parte das variáveis analisadas por esses aplicativos utiliza o percurso feito, que é orientado com base no sistema de localização (GPS) dos aparelhos nos quais o aplicativo está instalado, como um *smartphone* ou um *smartwatch*.

Você já pensou em como esses aparelhos determinam com precisão a localização de um ponto no planeta Terra? Leia o texto a seguir para saber mais sobre o funcionamento dos navegadores digitais.

Representação sem proporção de tamanho.





O que é o GPS e como funciona?

A sigla GPS nada mais é do que a abreviatura para *Global Positioning System* (sistema de posicionamento global). Trata-se de uma constelação de vinte e quatro satélites, orbitando em torno da Terra a uma altura aproximada de 20 200 km acima do nível do mar, permitindo a receptores conhecer sua posição em qualquer lugar sobre a Terra com uma notável precisão.

[...]

O sistema NAVSTAR – *Navigation Satellite Timing and Ranging* (aferição de tempo e localização por satélite de navegação), nome oficial dado pelo Departamento de Defesa dos Estados Unidos ao GPS, consiste em um segmento espacial (os satélites), um segmento de controle (as estações terrestres de gerenciamento) e um segmento do usuário.



Cris Alencar/D/BR

Representação da Terra e dos satélites utilizados pelo GPS. Imagem fora de escala. Cores-fantasia.

Os vinte e quatro satélites que formam o segmento espacial do GPS trafegam em torno da Terra em seis órbitas estáveis e predeterminadas com quatro satélites em cada órbita. Os satélites percorrem uma órbita completa a cada 12 horas e cada satélite tem 28° de visualização sobre a Terra. Isso assegura que todo ponto da superfície terrestre, em qualquer instante, esteja visualizado por pelo menos quatro satélites. Várias áreas da Terra são, por alguns momentos, visualizadas por até dez satélites.

Todos os satélites são controlados pelas estações terrestres de gerenciamento. Existe uma "estação *master*", localizada no Colorado (Estados Unidos), que, com o auxílio de cinco estações de gerenciamento espalhadas pelo planeta, monitoram o desempenho total do sistema, corrigindo as posições dos satélites e reprogramando o sistema com o padrão necessário. Após o processamento de todos esses dados, as correções e sinais de controle são transferidos de volta para os satélites.

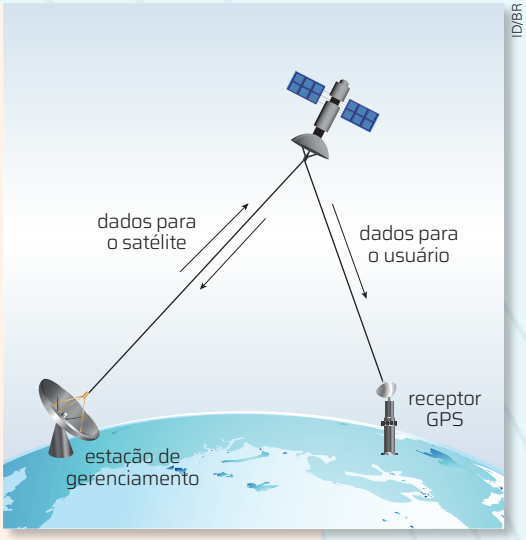
Não escreva no livro.

Afinal, de que maneira o GPS determina a localização de um ponto sobre a superfície terrestre?

Cada um dos satélites do GPS transmite por rádio um padrão fixado, que é recebido por um receptor na Terra (segmento do usuário), funcionando como um cronômetro extremamente acurado. O receptor mede a diferença entre o tempo que o padrão é recebido e o tempo que foi emitido. Essa diferença, não mais do que um décimo de segundo, permite que o receptor calcule a distância ao satélite emissor multiplicando-se a velocidade do sinal (aproximadamente $2{,}99792458 \cdot 10^8$ m/s – a **velocidade da luz**) pelo tempo que o sinal de rádio levou do satélite ao receptor.

Essa informação localiza uma pessoa sobre uma imaginária superfície esférica com centro no satélite e raio igual à distância acima calculada.

[...]

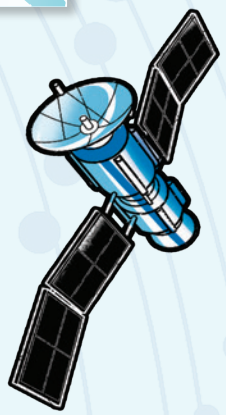


ID/BR

Alves, S. A Matemática do GPS. *Revista do Professor de Matemática*, Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, n. 59. Disponível em: https://rpm.org.br/cdrpm/59/5.htm. Acesso em: 25 out. 2024.

Nos aparelhos que utilizam o sistema GPS, o *software* determina a distância entre a posição inicial e a final do usuário e, com base no tempo que a pessoa demora para percorrer o trajeto, calcula a velocidade média percorrida da seguinte maneira:

$$\text{velocidade}_{\text{média}} = \frac{\text{distância percorrida}}{\text{intervalo de tempo para percorrê-la}}$$



Representação sem proporção de tamanho.

Conectando ideias

O procedimento descrito na atividade **1** pode ser feito com o Google Maps.

1 **Para determinar o tempo para percorrer determinado trajeto e estimar a melhor rota, os aplicativos combinam diversas tecnologias e informações. Muitas dessas informações são fornecidas pelo sistema de GPS. Reúna-se com um colega para acessar uma plataforma de mapas e imagens de satélite *on-line*.**

a) Vocês devem escolher um trajeto para fazer uma caminhada. Resposta pessoal.

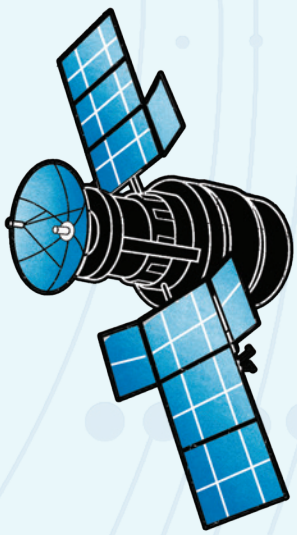
- Escolham o ponto inicial da caminhada e selecionem a opção "Rotas a partir daqui".
- Em seguida, cliquem no ponto final do trajeto que pretendem percorrer.
- Escolham o modo "A pé" e notem que o *site* indica a distância total e estima o tempo que será gasto para realizar o percurso. Registrem essa informação.

b) Esses *sites* informam o tempo para percorrer determinada rota a pé tendo como base a velocidade média que uma pessoa caminha, que é de 6,5 km/h. Calculem a velocidade média do percurso que vocês estabeleceram e verifiquem se o valor obtido é próximo a 6,5 km/h. Resposta pessoal.

c) Na opinião de vocês, que fatores podem influenciar a velocidade média em que uma pessoa caminha? Será que o aplicativo considera esses fatores para indicar ao usuário o tempo para percorrer determinado trajeto? Resposta pessoal.

d) Se possível e com a orientação de um adulto, imprimam o mapa que criaram, notando que deve conter escala e orientação, e caminhem pelo trajeto que vocês selecionaram. Durante o percurso, meçam o tempo gasto e comparem a velocidade média de vocês com a utilizada pelo *site*. O que vocês podem concluir em relação ao tempo proposto pelo *site* e ao resultado obtido por vocês? Resposta pessoal.

Caso os estudantes não consigam imprimir o mapa, eles podem desenhá-lo em papel vegetal. Nesse caso, será necessário que calculem a escala e insiram a orientação.


Davi Augusto/ID/BR

2 **Ainda em duplas, façam uma pesquisa sobre as profissões que precisam do GPS nas tarefas do dia a dia e como cada uma o utiliza. Depois, organizem as informações coletadas e, com a orientação do professor, compartilhem as descobertas com os demais colegas.** Resposta pessoal.

Geoprocessamento, localização e trabalho

O objeto digital apresenta conhecimentos sobre geoprocessamento e localização, explorando como o GPS e as plataformas digitais transformaram o deslocamento e o trabalho.

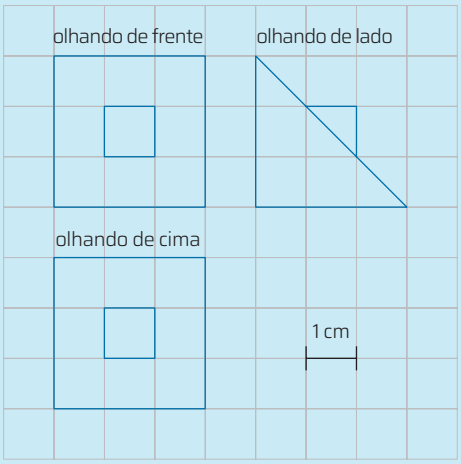
Não escreva no livro.

POR DENTRO DO ENEM E DOS VESTIBULARES

Muitas vezes, para resolver um problema, não basta conhecer as fórmulas de cálculo de áreas ou de volumes de sólidos geométricos: precisamos ter uma visualização espacial do objeto representado e perceber relações entre partes desse objeto. Além disso, a leitura atenta de cada frase do enunciado pode dar pistas importantes para a resolução do problema.

VESTIBULAR EM CONTEXTO

(ESPM-SP) A figura abaixo mostra como uma peça metálica maciça é vista de 3 direções distintas:



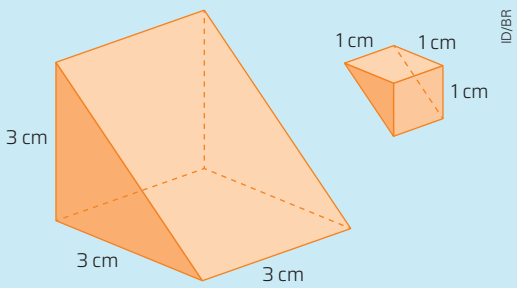
ESPM-SP. Fac-símile: ID/BR

Se a densidade do metal utilizado para a confecção dessa peça é de 8 500 kg/m³, podemos afirmar que sua massa é igual a:

a) 127 g **b)** 125 g **c)** 123 g **d)** 121 g **e)** 119 g

Resolução

Considerando as vistas apresentadas, a peça metálica maciça pode ser representada por um sólido composto de dois prismas com as dimensões indicadas a seguir.



ID/BR

Prisma I **Prisma II**

Calculando o volume V desse sólido, em centímetro cúbico:

$$V = V_{I} + V_{II} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{2} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{2} = \frac{28}{2} = 14$$

Temos que a densidade da peça metálica é 8 500 kg/m³, assim:

$$\frac{8\,500\ \text{kg}}{1\ \text{m}^3} = \frac{8\,500 \cdot 10^3\ \text{g}}{1 \cdot 10^6\ \text{cm}^3} = 8\,500 \cdot 10^{-3}\ \text{g/cm}^3 = 8{,}5\ \text{g/cm}^3$$

Como a densidade d de um corpo é dada pela razão entre sua massa m e seu volume V, temos:

$$d = \frac{m}{V} \Rightarrow 8{,}5 = \frac{m}{14} \Rightarrow m = 119$$

Portanto, a massa da peça metálica maciça é 119 g e a alternativa **e** é a correta.

Não escreva no livro.

Explorando a estratégia

Lembre-se de que fazer um desenho pode auxiliar na resolução do problema.

1 **Escreva a alternativa correta no caderno.**

(Uece) A medida, em m^3, do volume de uma pirâmide triangular regular na qual a medida da altura é igual a 4 m e a base está inscrita em uma circunferência cuja medida do raio é igual a 3 m é Alternativa **c**.

a) $5\sqrt{3}$.

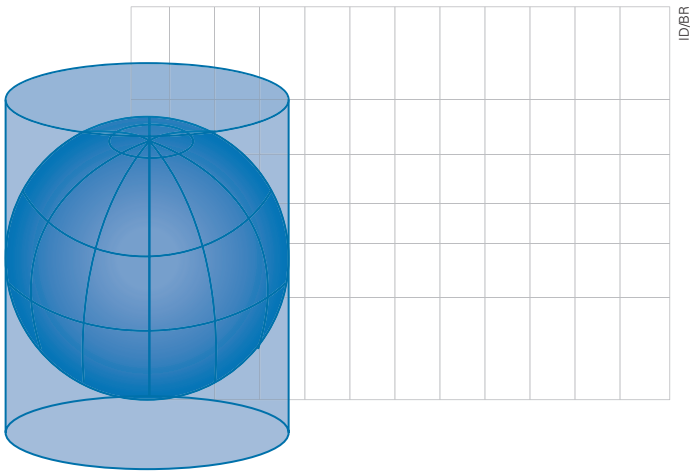
b) $3\sqrt{3}$.

c) $9\sqrt{3}$.

d) $7\sqrt{3}$.

2 **Registre no caderno a alternativa correta.**

(Unip-SP) Analise a projeção de Mercator.



ID/BR

(Paulo M. L. de Menezes e Manoel C. Fernandes. Roteiro de Cartografia, 2013. Adaptado.)

Uma desvantagem dessa projeção é Alternativa **c**.

a) a representação dos círculos polares em linhas curvas.

b) o espaçamento decrescente dos paralelos sentido polos.

c) a distorção de área que ocorre em altas latitudes.

d) a representação em conformidade dos polos Norte e Sul.

e) a equivalência de formas entre os paralelos e meridianos.

3 **Registre no caderno a alternativa correta.**

(Udesc) Constrói-se um sólido a partir de um cilindro reto de raio igual a 3 cm e altura 10 cm. Em uma de suas bases é acoplada uma semiesfera e na outra um cone reto, ambas de raio igual ao raio da base do cilindro. Sabendo que a altura do sólido completo (cilindro + semiesfera + cone) é de 16 cm, a área da superfície é: Alternativa **d**.

a) 87π cm^2

b) $(96\pi + 9\sqrt{2}\pi)$ cm^2

c) 96π cm^2

d) $(78\pi + 9\sqrt{2}\pi)$ cm^2

e) $(87\pi + 9\sqrt{2}\pi)$ cm^2

PROGRAMAÇÃO E PENSAMENTO COMPUTACIONAL

Chamado de Eniac (sigla, em inglês, para Eletronic Numerical Integrator and Computer), o primeiro computador eletrônico foi desenvolvido em 1946. Sua principal função era realizar cálculos de trajetórias balísticas, isto é, determinar o alcance e a altura que os projéteis desenvolviam no lançamento.

Hoje, temos assistido a avanços significativos no desenvolvimento de computadores quânticos. Essas máquinas tornam possível que uma unidade de informação (*qubits*) esteja em mais de um lugar ao mesmo tempo. O funcionamento desses computadores é muito diferente daquele das máquinas tradicionais e reduziu drasticamente o tempo para a realização de cálculos extremamente complexos.

Nesta unidade, você se aproximará da tecnologia e vai entender o que é pensamento computacional e linguagem de programação.

OBJETIVOS

- Compreender o que são e para que servem as linguagens de programação.
- Utilizar uma linguagem de programação para criar jogos e animações.
- Entender o sistema binário usado na codificação informática.
- Conhecer as características do pensamento computacional.
- Utilizar o pensamento computacional para resolver problemas.
- Conhecer os conceitos matemáticos associados a diferentes recursos tecnológicos.
- Elaborar argumentos e escrever conclusões.

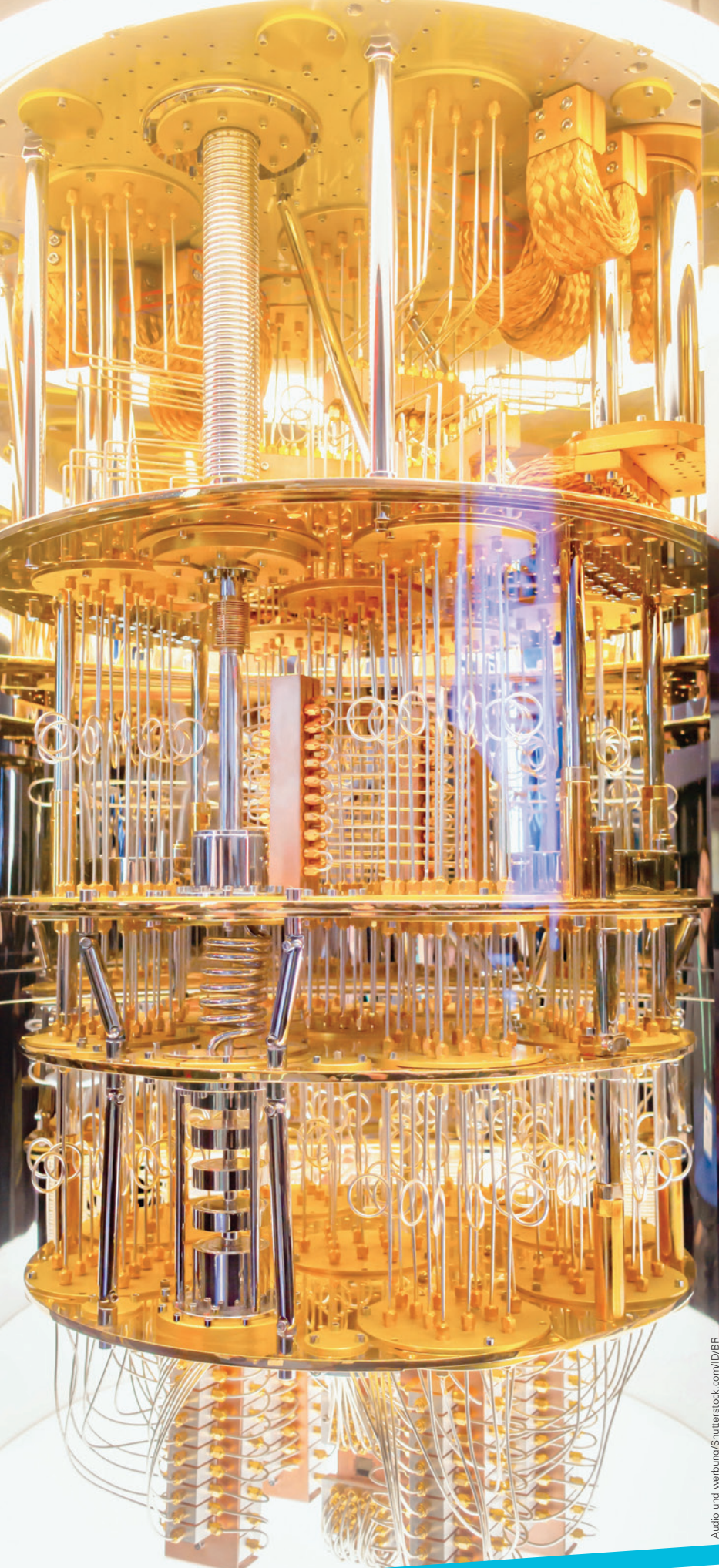


Computador quântico IBM Q System One, exibido na Consumer Electronics Show (CES), em Las Vegas, Nevada. Foto de 2020. ▶

UNIDADE 3

7 Pensamento computacional

8 Algoritmos e fluxogramas





Audio und werbung/Shutterstock.com/ID/BR

CAPÍTULO 7 CAPÍTULO 7 CAPÍTULO 7

Incentive os estudantes a ler os textos e as imagens. Reforce para eles que as mulheres têm o direito de ocupar todos os espaços que desejarem, assim como qualquer pessoa. Se considerar oportuno, convide um professor de História ou de Sociologia para uma roda de conversa com os estudantes a respeito das conquistas das mulheres ao longo dos anos. O trabalho com as imagens e os textos apresentados e a roda de conversa contribuem para o desenvolvimento das competências gerais **1** e **6**, pois valoriza conhecimentos historicamente construídos e defende a diversidade de saberes.

PENSAMENTO COMPUTACIONAL

NESTE CAPÍTULO

- Linguagem de programação
- Pensamento computacional
- Reconhecimento de padrões
- Decomposição
- Algoritmo
- Abstração

Não é possível ter certeza de qual foi o primeiro computador a ser inventado. Sabe-se que os princípios da computação moderna tiveram como base as obras dos matemáticos britânicos Charles Babbage (1791-1871) e Alan Turing (1912-1954). Babbage estruturou a máquina analítica, um computador mecânico que realizava cálculos a partir de comandos. Turing, por sua vez, foi responsável por muitos avanços teóricos e práticos, contribuindo, de maneira fundamental, para a construção de uma das primeiras máquinas de decodificação de mensagens dos alemães na Segunda Guerra Mundial.

O Eniac foi considerado o pioneiro na categoria de computador eletrônico digital de uso geral e foi desenvolvido a pedido do exército estadunidense. Era uma máquina bem diferente dos computadores que conhecemos atualmente: pesava cerca de 30 t e ocupava uma área de 180 m². Além disso, não contava com monitor, teclado e *mouse*. Para operá-lo, era preciso conectar uma centena de cabos em uma sequência específica para que as válvulas do computador executassem os comandos e, assim, obtinha-se um resultado de cada vez.

Ilustrações: Tael Gomes/ID/BR

AS MULHERES INVISÍVEIS PROGRAMADORAS DO ENIAC

Kathy Kleiman foi fundadora do Projeto Programadoras do Eniac. Por volta dos anos 1980, Kathy estudava Ciência da Computação em Harvard, nos Estados Unidos, e estava se sentindo desmotivada, pois percebia que, à medida que o curso se desenvolvia, o número de mulheres que o frequentavam estava diminuindo. Diante dessa situação, ela decidiu buscar algumas inspirações. Durante sua pesquisa, ela se deparou com a fotografia do Eniac, reproduzida ao lado, e um detalhe chamou sua atenção: na legenda, havia apenas a identificação dos homens. Em 1946, quando o Eniac foi apresentado ao público, nada se falou sobre as mulheres que participaram do projeto.

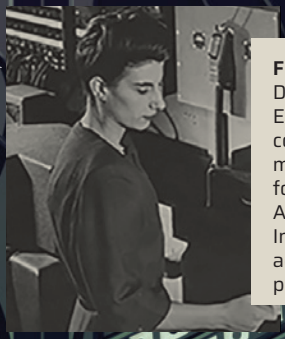
Depois de muitas pesquisas, em 2013, Kathy Kleiman se uniu a dois documentaristas premiados para produzir o documentário *The Computers*, no qual contou a história dessas mulheres com a finalidade de reconhecer o trabalho delas e corrigir essa omissão.

Agora, conheça as seis mulheres programadoras do Eniac e o que fizeram depois desse projeto.



New York Times Photo/Austrian National Library/APA-PictureDesk/AFP

Parte do Eniac e alguns de seus programadores. Da esquerda para a direita: desconhecido, J. Presper Eckert, dr. John Mauchly, Jean Jennings Bartik, tenente Herman Goldstine e Ruth Lichterman Teitelbaum.



J. Presper Eckert papers/Purchase of the Computer History Museum

Frances Bilas Spence (1922-2012)
Depois de participar do projeto do Eniac, Frances seguiu na área e colaborou com os principais matemáticos do mundo. Em 1997, foi indicada ao Hall da Fama da Associação Mulheres na Tecnologia Internacional (Witi, sigla em inglês), ao lado de outras cinco colegas programadoras do Eniac.

Não escreva no livro.



SPL/Fotoarena

Ruth Lichterman Teiltelbaum (1924-1986)
Tornou-se professora da geração seguinte de programadores do Eniac.



Arquivo/Truman State University Press, Kirksville

Jean Jennings Bartik (1924-2011)
Trabalhou na equipe que transformou o Eniac em uma máquina de programa armazenado. Também participou dos projetos dos dois primeiros computadores comerciais: o Binac e o Univac I. Posteriormente, elaborou relatórios para auxiliar diversos ramos empresariais a perceber o potencial dos microcomputadores.



SPL/Fotoarena

Marlyn Wescoff Meltzer (1922-2008)
Em 1997, ela foi indicada ao Hall da Fama da Associação Mulheres na Tecnologia Internacional, ao lado das companheiras programadoras do Eniac.

Do primeiro algoritmo até os supercomputadores atuais

O objeto digital acrescenta conhecimentos sobre a evolução das tecnologias computacionais desde 1842 até 2024.



U.S. Army/Science Photo Library/Fotoarena

Frances Elizabeth Snyder Holberton (1917-2001)
Betty, como era conhecida, contribuiu de maneira significativa para o desenvolvimento da criação das linguagens de programação.



Arquivo/Coleção particular

Kathleen McNulty Mauchly Antonelli (1921-2006)
Foi ela quem teve a ideia de criar "sub-rotinas", um programa menor utilizado pelo programa principal para conseguir calcular trajetórias que extrapolavam os limites computacionais do Eniac.

Fonte de pesquisa: Bittencourt, L. F. As programadoras do Eniac apagadas da história da computação. *In*: *LF Bittencourt*. [*s.l.*], 16 out. 2016. Disponível em: https://lfbittencourt.com/mulheres-programadoras-eniac-b68503ef05f6/. Acesso em: 17 out. 2024.

Ilustrações: Tael Gomes/ID/BR

Não escreva no livro.

Os textos apresentados neste tópico contribuem para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT405**, na medida em que os estudantes usam uma linguagem de programação, e da competência específica **7** da área de Linguagens e suas Tecnologias, ao mobilizar práticas de linguagem no universo digital.

PARA EXPLORAR

Filme

***Estrelas além do tempo*. Direção: Theodore Melfi. Estados Unidos, 2016 (127 min).**

Quer saber mais sobre o papel de mulheres pioneiras em programação? Esse filme conta a trajetória de um grupo de três cientistas negras da Nasa responsáveis por realizar os cálculos para uma missão espacial em 1961.



Fox Film do Brasil/ID/BR

Cartaz do filme *Estrelas além do tempo*.

LINGUAGENS DE PROGRAMAÇÃO

Desde o Eniac, muita coisa mudou em relação à computação, como o tamanho dos computadores. Os componentes eletrônicos também avançaram, deixando as máquinas com maior capacidade de armazenamento e processamento.



Santi S/Shutterstock.com/ID/BR

Modelo antigo de computador pessoal.



vovan/Shutterstock.com/ID/BR

Os *ultrabooks*, lançados por volta de 2011, pesando entre cerca de 2 kg e 4 kg.

Atualmente, grande parcela da população tem acesso a computadores ou aparelhos como *smartphones* e, por isso, seu uso tornou-se parte do cotidiano e da cultura.

Esse é um dos motivos da mudança significativa na interação entre os usuários e as máquinas. Muita gente já não consegue imaginar como seria viver sem utilizar aplicativos. Se, no passado, a produção deles estava concentrada nas mãos de programadores e empresas, agora existe a possibilidade de buscar informação gratuita e ferramentas adequadas para que mesmo leigos em computação sejam capazes de transformar suas ideias em realidade.



ID/BR

Existe uma infinidade de aplicativos com diversas funcionalidades: apresentar a previsão do tempo, informar o horário do próximo ônibus, enviar e receber mensagens, reproduzir música, etc.

Neste capítulo, vamos entender um pouco o que acontece por trás dos aplicativos e dos *softwares* disponíveis para utilização no dia a dia.

A comunicação entre o computador e as pessoas se dá por meio de uma linguagem especial chamada de **linguagem de programação**.

A **programação de computadores**, ou **codificação**, é o modo como instruímos a máquina para a execução de uma tarefa. A instrução é dada por comandos que ela vai interpretar e executar. Saber programar é conhecer a linguagem que estabelece essa comunicação entre as pessoas e a máquina.

Existem basicamente dois tipos de linguagem de programação: as de baixo nível e as de alto nível.

As linguagens de baixo nível são interpretadas pelo computador no sistema de base binária, no qual todos os dados são representados por algarismos 0 e 1.

Enquanto as linguagens de baixo nível se aproximam mais da linguagem da máquina, as linguagens de alto nível são mais próximas da linguagem humana e, por isso, costumam ser mais fáceis e agradáveis para quem faz a programação.

Para exemplificar, observe os comandos necessários para mostrar na tela a frase "Bom dia!" em duas linguagens de programação: de baixo nível e de alto nível.

Não escreva no livro.

- Programa utilizando a linguagem Assembly, de baixo nível.

```
Assembly (x86)
1  lea si, string
2  call printf
3  hlt
4  string db "Bom dia", 0
5  printf PROC
6      mov AL, [SI]
7      cmp AL, 0
8      je pfend
9      mov AH, 0Eh
10     int 10h
11     inc SI
12     jmp printf
13     pfend:
14     ret
15 printf ENDP
```

ID/BR

Exemplo de programa utilizando a linguagem Assembly.

- Programa utilizando a linguagem Python, de alto nível.

```
Python
1 print("Bom dia!")
```

ID/BR

Exemplo de programa utilizando a linguagem Python.

Atualmente, existem mais de 1300 linguagens de programação. Algumas são mais intuitivas que outras, como as que utilizam "blocos" com funções preestabelecidas, em que o programador pode clicar sobre eles, arrastá-los e combiná-los como se fossem blocos de montar e, assim, construir o programa que deseja.

Scratch

Essa linguagem de programação, desenvolvida pelo Instituto de Tecnologia de Massachusetts (MIT), permite a criação gratuita de animações, jogos e histórias interativas de maneira simples e intuitiva, e está disponível em 70 idiomas.

Ela deu origem ao *site*, de mesmo nome, que busca compartilhar, por meio de uma comunidade, os programas desenvolvidos por pessoas do mundo todo. Para criar um programa, é preciso conectar blocos lógicos em uma área de trabalho, de maneira a elaborar uma sequência de passos a ser seguida tanto pela personagem escolhida, quanto pelo cenário. Por isso, manipular os comandos do Scratch equivale a programar. De modo geral, o funcionamento se resume à escolha de comandos (*scripts*) que o usuário vai encaixando para que cada personagem (*sprite*) os execute no palco (*stage*). Observe, no quadro a seguir, como os comandos do Scratch estão organizados.

Blocos de comando	Funções
Movimento	Definir os movimentos feito pela personagem.
Aparência	Modificar o cenário utilizado e inserir a aparência e os dizeres das personagens em determinados momentos.
Som	Inserir ou modificar efeitos ou trilhas sonoras.
Eventos	Executar ações predefinidas pelo usuário em determinados instantes.
Controle	Testar condições e repetir procedimentos.
Sensores	Captar respostas do usuário, para que as ações possam ser executadas de acordo com as entradas.
Operadores	Realizar operações matemáticas, comparações, reuniões de termos, entre outros.
Variáveis	Descrever variáveis que auxiliam no funcionamento do programa.
Meus Blocos	Criar comandos personalizados, de acordo com as necessidades do usuário.

Não escreva no livro.

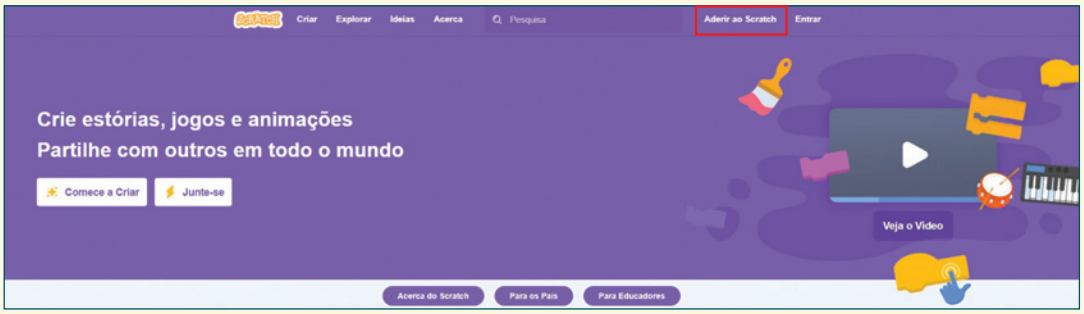
A seção *Tecnologia* apresenta as etapas de construção de um jogo de perguntas e respostas. Ao programar as etapas do jogo, observe se os estudantes mobilizam diferentes práticas de linguagem, relacionando as linguagens oral e escrita à linguagem digital, engajando-se em práticas autorais, de acordo com a competência específica **7** da área de Linguagens e suas Tecnologias.

TECNOLOGIA

Se considerar pertinente, antes de apresentar aos estudantes como a interface do Scratch funciona, deixe-os explorá-la e faça perguntas como: "Vocês conseguem descobrir o funcionamento do Scratch pelo que veem na tela?"; "Como vocês imaginam o funcionamento dessa linguagem de programação?".

Nesta seção, você vai criar um jogo de perguntas e respostas (*quiz*) utilizando a linguagem de programação Scratch. Para isso, acompanhe as etapas a seguir.

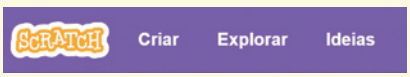
1ª etapa: Acesse o *link* https://scratch.mit.edu (acesso em: 17 out. 2024). No menu superior direito, clique em "Inscreva-se" ou "Aderir ao Scratch" e crie uma conta.



Scratch. Fac-símile: ID/BR

Na tela principal do Scratch, existem as opções "Criar", "Explorar" e "Ideias". A opção "Criar", como o nome diz, inicia a criação de um programa; a opção "Explorar" disponibiliza produções de outros usuários; e a opção "Ideias" apresenta vários tutoriais de utilização dos códigos.

2ª etapa: Depois de realizar o cadastro, escolha, no menu superior, a opção "Criar".



Scratch. Fac-símile: ID/BR

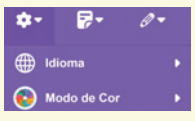
Ao selecionar "Criar", aparecerá a interface de trabalho. Essa tela é dividida em três setores:

- Área de *scripts*: onde é escrito o projeto.
- Palco (*stage*): onde a aparência final do projeto é visualizada.
- Lista de *sprites*: onde são selecionados os cenários, as personagens e as ações que serão executadas por elas.



Scratch. Fac-símile: ID/BR

Na parte superior, você pode trocar o idioma clicando em "*Settings*" ou "Configurações" e, depois, em "*Language*" ou "Idioma". Escolha "Português Brasileiro".



Scratch. Fac-símile: ID/BR

Não escreva no livro.

3ª etapa: Agora, é possível ajustar a personagem. Observe que, no palco, aparece um gato. Ele é a personagem padrão, ou seja, toda vez que o ambiente virtual for aberto, aparecerá esse gato como personagem. Os comandos estão organizados na lateral esquerda e estão vinculados às personagens. Isso significa que você pode inserir comandos diferentes para cada personagem que for selecionada.

No canto inferior direito, há o ícone de um gato. Ao clicar sobre esse ícone, é possível alterar ou inserir personagens. Como a proposta é criar um jogo de perguntas e respostas (*quiz*), troque o gato por uma personagem que represente uma pessoa – por exemplo, a personagem Avery.





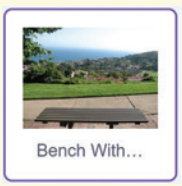
Scratch. Fac-símile: ID/BR

Se julgar necessário, tenha um dicionário de inglês em mãos ou utilize um tradutor *on-line* para fazer eventuais consultas.

4ª etapa: Escolha um cenário para o *quiz*. No canto inferior direito, há o ícone de uma paisagem. Ao clicar sobre ele, é possível escolher um cenário. Para esse jogo, vamos selecionar dois cenários: "*Chalkboard*" e "*Bench With View*". Escolhemos o primeiro para começar.





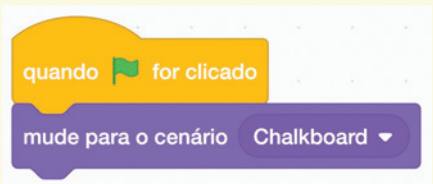


Scratch. Fac-símile: ID/BR

5ª etapa: Com a personagem e os cenários escolhidos, comece a programar o jogo de perguntas e respostas.

Com a personagem Avery selecionada na área de *sprites*, no bloco de comandos "Eventos", clique e arraste para a área de *script* o comando "quando  for clicado". Esse comando sempre vai determinar o início de um programa no Scratch.

Em seguida, no bloco "Aparência", clique e arraste o comando "mude para o cenário *Chalkboard*" para a área de *scripts*. Observe que os comandos se encaixam como blocos (repare nos encaixes). Observe também o que acontece com o palco.



Scratch. Fac-símile: ID/BR

Existem diversas possibilidades de criar um *quiz*, dependendo de como o programador quer que ele seja. Aqui, você vai criar uma interação entre o apresentador (personagem) e o usuário (quem estará jogando) para familiarizá-lo com o jogo. Para isso, vai utilizar comandos de fala.

Primeiro, solicite ao usuário que insira seu nome, para que ele tenha a impressão de estar vivenciando aquela situação. No bloco "Controle", clique e arraste para a área de *scripts* o comando "espere 1 seg" e, no bloco "Aparência", faça o mesmo com o comando "diga Olá! por 2 segundos". Em seguida, no bloco "Sensores", arraste para a área de *scripts* o comando "pergunte Qual é seu nome? e espere".



Scratch. Fac-símile: ID/BR

Esses comandos vão fazer aparecer no palco uma caixa para que o usuário digite o próprio nome. Toda vez que o jogador inserir algo em alguma caixa do palco, o programa entenderá como uma resposta.

Note que os campos que apresentam um fundo branco podem ser alterados pelo programador. Por exemplo, em vez de "Olá!", você poderia escrever "Oi!".

Até aqui, você pode observar que os comandos funcionam como peças de encaixe. Por exemplo, se os dois primeiros comandos fossem invertidos, o programa não funcionaria, pois as peças não se encaixariam. Assim, além de ser possível alterar os textos dos campos em fundo branco, também é permitido colocar alguns comandos nos espaços em branco de outros comandos, desde que eles se encaixem.

Agora, você vai unir os comandos “diga Olá! por 2 segundos” do bloco “Aparência” com o comando “resposta”, do bloco “Sensores”. Para isso, use o comando “junte maçã com banana”, do bloco “Operadores”.



Scratch. Fac-símile: ID/BR

As palavras “maçã” e “banana” são apenas textos fictícios padrões. No lugar de “maçã”, por exemplo, você pode digitar “Bem-vindo!” e, no lugar de “banana”, utilizar o comando “resposta”. Observe.



Scratch. Fac-símile: ID/BR

Ao longo da construção do programa, clique sobre a bandeirinha verde, na parte superior da área do palco, para verificar o andamento da configuração do programa.

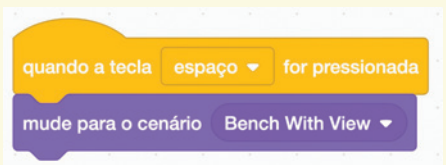

Scratch. Fac-símile: ID/BR

Após a apresentadora dar as boas-vindas ao usuário, ela vai se apresentar e, em seguida, convidará o usuário para jogar. Então, você vai alterar o nome dela de Avery para outro nome – por exemplo, Alice. Acompanhe.



Scratch. Fac-símile: ID/BR

Agora, você vai efetivamente começar a construir o *quiz*. Para que a aparência do jogo fique mais atrativa, você pode mudar o cenário entre uma questão e outra. Para isso, você deve usar os blocos a seguir.

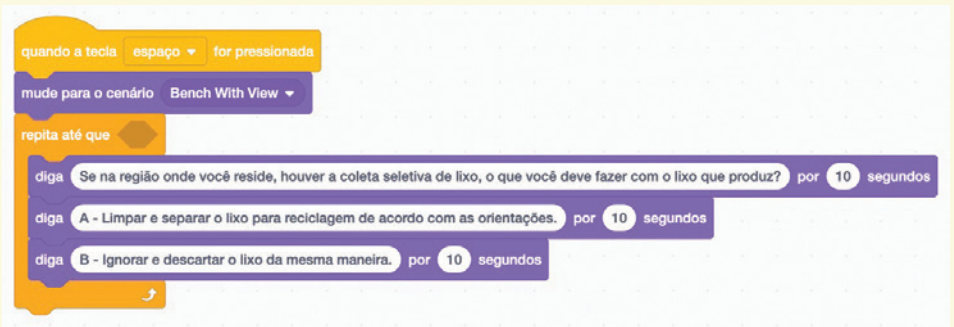


Scratch. Fac-símile: ID/BR

Não escreva no livro.

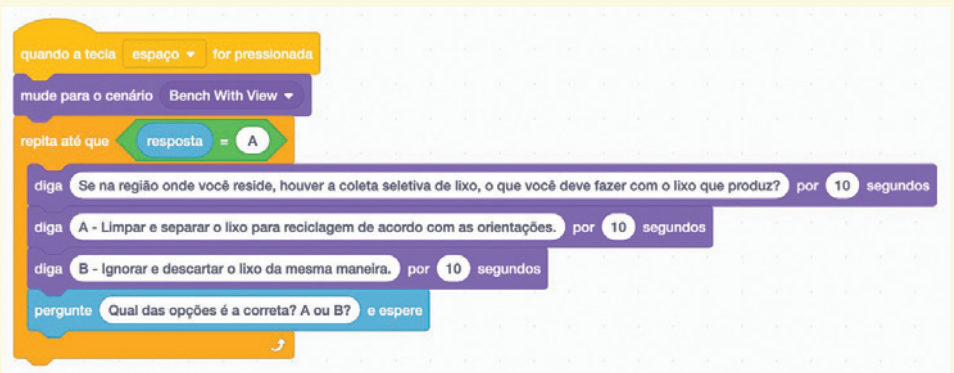
No jogo que você vai construir, o usuário passará para a próxima pergunta apenas quando acertar a resposta da questão proposta. A primeira pergunta do jogo será: "Se, na região onde você reside, houver coleta seletiva de lixo, o que você deve fazer com o lixo que produz?". As opções de resposta serão: "A – Limpar e separar o lixo para a reciclagem de acordo com as orientações." e "B – Ignorar e descartar o lixo da mesma maneira.".

Utilize o comando "repita até que < >", do bloco "Controle", para que o usuário fique nessa pergunta até que ele acerte a resposta. Observe como fica, inicialmente, a programação:



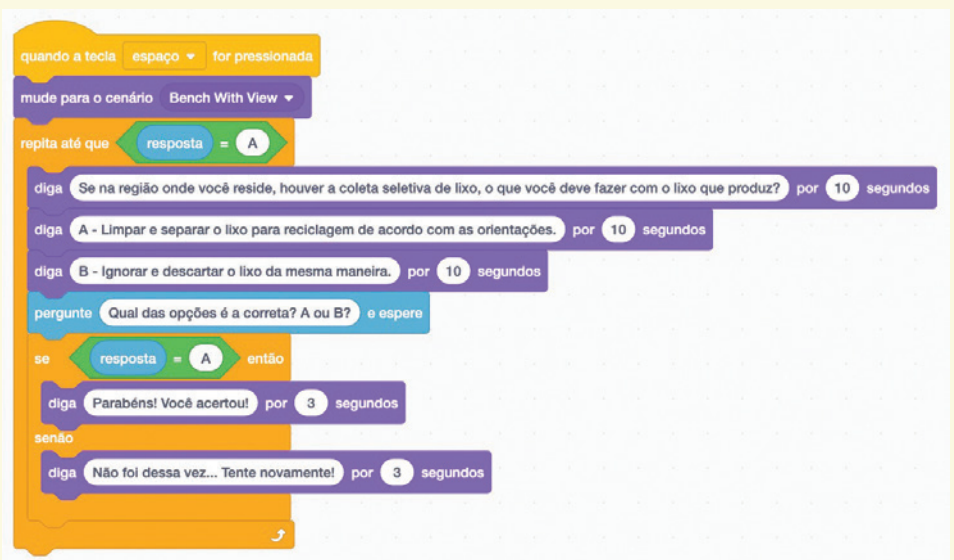
Scratch. Fac-símile: ID/BR

O comando a seguir é um pouco diferente dos que você utilizou até agora. Observe, na figura, que há um campo em formato de hexágono, no qual deve ser colocada a condição "repita até que <resposta = A>". Como o usuário deve ficar na mesma pergunta até responder "A", você vai utilizar um comando de igualdade do bloco "Operadores". Lembre-se de incluir um comando de pergunta do bloco "Sensores".



Scratch. Fac-símile: ID/BR

Outra opção interessante para usar em jogos de *quiz* é dar um retorno ao jogador caso ele acerte ou erre a resposta. Observe como é possível fazer isso usando os recursos do Scratch.



Scratch. Fac-símile: ID/BR

6ª etapa: Como você já sabe, de tempos em tempos, clique na bandeirinha verde para verificar se o programa está respondendo como o esperado. Isso é o que chamamos de testar. Esses momentos permitem que você retorne aos comandos e faça possíveis ajustes, se for necessário.

Para elaborar mais perguntas para o jogo, utilize esses mesmos procedimentos que aprendeu.

ATIVIDADES

O trabalho proposto nesta seção permite que os estudantes desenvolvam a habilidade **EM13MAT405**, ao utilizar uma linguagem de programação. Incentive a troca de conhecimentos e de descobertas entre os grupos. Momentos como esse contribuem para mobilizar as competências gerais **2**, **4**, **5** e **9**, pois possibilitam que os estudantes investiguem, utilizem diferentes linguagens, resolvam problemas com apoio de tecnologias digitais e exercitem a empatia e aprendam a respeitar diferentes opiniões.

1 **Depois de reproduzir o passo a passo apresentado nas etapas para conhecer o Scratch, explore os comandos. Tente compreender como utilizá-los e o que é possível fazer com eles. Em seguida, registre no caderno as considerações que julgar importantes, como eventuais dificuldades encontradas.**

Resposta pessoal.

2 **Com a orientação do professor, junte-se com mais um ou dois colegas. O desafio de vocês será elaborar outro *quiz* usando o Scratch. Comecem pesquisando algumas características comuns a jogos desse tipo e registrem todas as informações que encontrarem. Em seguida, vocês devem escolher, entre os diversos comandos disponíveis, aqueles que satisfizerem as ações que desejam que a personagem execute. Lembrem-se de que não há apenas uma possibilidade. Sejam curiosos e experimentem. As tentativas que não derem certo contribuirão para o aprendizado de todos.**

Resposta pessoal.

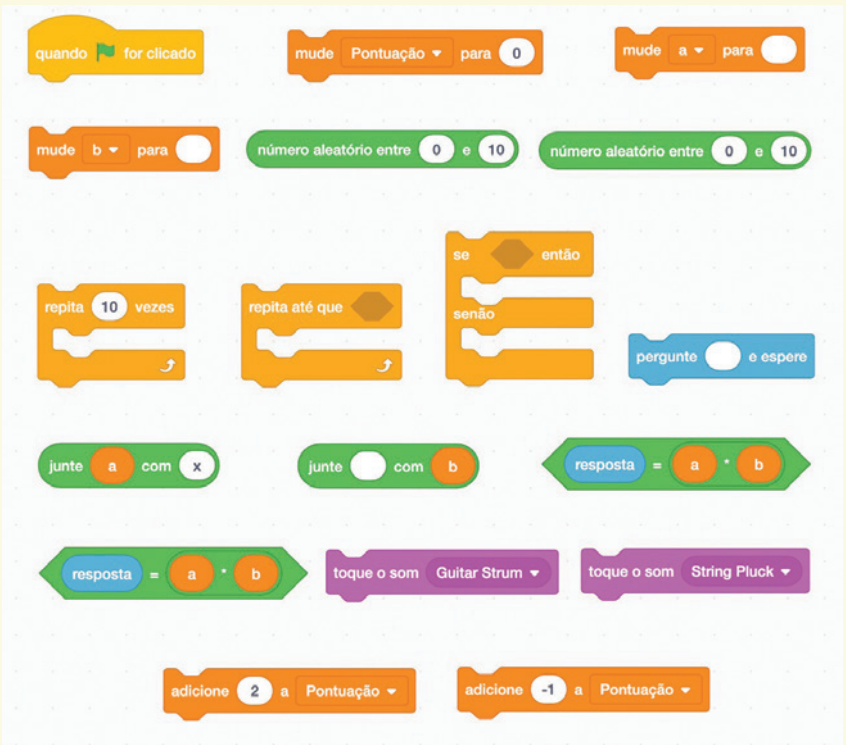
3 **Troquem de programa com os colegas de outros grupos para compartilhar experiências e ideias. Depois, em uma roda de conversa, discutam os resultados dessa experiência. Comentem, por exemplo, as descobertas e as dificuldades.**

Resposta pessoal.

4 **Agora um novo desafio! Você e seus colegas de grupo vão determinar como utilizar os comandos a seguir de modo a obter um jogo de tabuada com estas características:**

Resposta pessoal.

- O jogo terá 10 rodadas.
- Para cada resposta correta, o usuário marca 2 pontos e, para cada resposta errada, perde 1 ponto.
- Toda vez que o usuário acertar, o programa tocará um som e, quando errar, tocará outro som.
- **Usem a criatividade!**



Scratch. Fac-símile: ID/BR

Reflita sobre seu desenvolvimento e os resultados que obteve com o Scratch nessas atividades.

- Realizei as tarefas propostas colaborando com meus colegas?
- Mantive o foco e não abandonei o trabalho ao longo das etapas?

Destaque para os estudantes que essa autoavaliação tem o objetivo de que eles se analisem em relação às habilidades socioemocionais de responsabilidade e persistência, essenciais para aprender e continuar aprendendo ao longo da vida.

Não escreva no livro.

PENSAMENTO COMPUTACIONAL

Imagine que você esteja indo para a escola e uma das ruas que você sempre utiliza nesse trajeto esteja fechada para a manutenção na rede de esgoto. Você consegue pensar em uma rota alternativa? No caso de essa rua ser o único caminho possível, você consegue pensar no que fazer?

De maneira geral, quando estamos diante de um problema, buscamos em nosso repertório os conhecimentos que nos ajudam a resolvê-lo e, muitas vezes, fazemos isso sem nem mesmo nos darmos conta.

Quando usamos esses conhecimentos de maneira lógica, estruturada e eficiente para resolver problemas, estamos utilizando o que chamamos de **pensamento computacional**. Provavelmente, você já faz uso dele, mas talvez não soubesse que esse modo de pensar tinha um nome. Apesar desse nome, o pensamento computacional não se restringe apenas ao modo como os computadores processam informações.

O pensamento computacional apresenta muitas características importantes. Acompanhe algumas delas.

Pensamento computacional: O superpoder que você não sabia que tinha!

O objeto digital acrescenta conhecimentos sobre o pensamento computacional, explorando suas ferramentas e como essa habilidade pode ser aplicada na resolução de problemas do dia a dia e no trabalho.

Reconhecimento de padrões

Antes de elaborarmos o *quiz* na seção *Tecnologia*, foi preciso pensar nas principais características de jogos desse tipo. Esse foi um momento de reconhecimento de padrões, em que analisamos e explicitamos os elementos comuns – no caso do *quiz*, identificamos elementos comuns a todo jogo de perguntas e respostas.

Essa característica está presente em diversos problemas matemáticos, como quando temos de determinar termos em uma sequência numérica ou em uma sequência composta de figuras. Para encontrá-los, precisamos identificar algo que se repete, um padrão. Nesse caso, esse padrão pode ser um termo, partes da própria sequência ou uma regra que define a expressão dos termos da sequência.



ID/BR

Cada uma das figuras é formada pela soma dos n números ímpares:
$1;\ 1 + 3;\ 1 + 3 + 5;\ 1 + 3 + 5 + 7;\ 1 + 3 + 5 + 7 + 9;$ e assim por diante.

Reconhecer padrões é uma habilidade muito importante em Matemática. Toda vez que você descobrir um padrão de repetição ou de recursividade, a resolução da situação proposta ficará mais simples. Pode ser em uma tabuada, em uma figura geométrica ou até mesmo na resolução de equações do mesmo tipo.



fotostudiocolor24/iStock/Getty Images

O ritmo de uma música pode ser considerado um padrão de repetição de notas musicais.

Decomposição

Depois que você investigou os comandos do Scratch, foi convidado a elaborar o próprio jogo de perguntas e respostas. Para isso, você teve de combinar comandos para compor cada uma das partes do jogo. Essa é outra característica do pensamento computacional, comumente chamada de decomposição.

De maneira geral, quando precisamos resolver uma situação complexa, uma maneira mais simples para encontrar uma saída é separarmos o problema em partes menores que sejam mais fáceis de resolver. Por exemplo, o motor de um automóvel é composto de diversas peças, e a compreensão do funcionamento de cada uma dessas peças facilitará seu conserto em caso de pane.

Mecânica analisando o motor de um automóvel.



Dragana Gordic/Shutterstock.com/ID/BR

Provavelmente, você já deve ter feito isso em algumas aulas de Matemática. Muitas situações complexas em Matemática podem ser solucionadas mediante sua decomposição em partes mais simples ou menores, e os resultados obtidos em cada parte podem ser utilizados para resolver as etapas seguintes. Quando nos deparamos com uma situação-problema, podemos interpretá-la representando-a com uma figura, uma linguagem simbólica ou até mesmo com uma tabela de possíveis valores.

Algoritmo

No jogo que você elaborou na seção *Tecnologia*, o desafio era ordenar os comandos corretamente para que o computador pudesse executar o programa como você queria. Naquele momento, você estava desenvolvendo um algoritmo, outra característica do pensamento computacional.



New Africa/Shutterstock.com/ID/BR

Quando vamos preparar uma receita, é importante misturar os ingredientes na ordem adequada para obter o resultado esperado.

Basicamente, um algoritmo pode ser entendido como uma sequência ordenada de passos, etapas ou procedimentos que, quando executada (por uma máquina ou não), fornece um resultado.

O termo "algoritmo" é usado com frequência em Matemática, em situações como: cálculos básicos de adição, subtração, multiplicação e divisão; resolução de uma equação ou de um sistema de equações; cálculo de uma medida de tendência central (média, moda, mediana).

Apesar de os algoritmos serem passos de como resolver algo, é preciso saber qual algoritmo deve ser utilizado em cada situação. É fundamental saber se é, ou não, possível utilizar um procedimento para solucionar determinada situação. Se você compreender o que cada uma das etapas do algoritmo realiza e como elas se articulam, é mais fácil fazer essa avaliação.

Abstração

A estrutura que você utilizou no jogo de *quiz* pode ser adaptada e utilizada para construir outros jogos no *Scratch*. Essa característica do pensamento computacional é chamada de abstração e pode ser entendida como a capacidade de generalizar, de ignorar os detalhes de uma solução particular, de modo que ela possa ser adaptada a outros problemas.

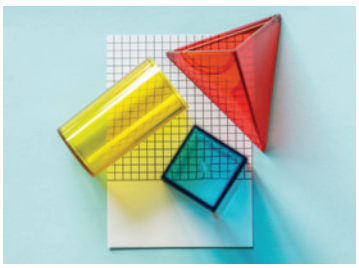


Ao escolher uma fruta ou uma hortaliça, comparamos formatos, texturas, massas, etc., buscando um vegetal "ideal", ou seja, uma abstração de como deve ser esse vegetal.

JackF/iStock/Getty Images

Não escreva no livro.

Em Matemática, a abstração é usada em diversos momentos. Na Geometria, por exemplo, usamos a abstração de formatos de objetos do mundo real para representações geométricas com a finalidade de resolver problemas. Em Álgebra, quando representamos valores desconhecidos por letras, também estamos utilizando a abstração. Do mesmo modo, a abstração ocorre na Aritmética ao generalizarmos as propriedades numéricas, ou em Grandezas e Medidas, quando estudamos os cálculos de perímetros, áreas ou volume de figuras quaisquer.



Harun427660/Shutterstock.com/ID/BR

Para estudar as características de uma figura geométrica, podemos nos apoiar em representações.

As principais características do pensamento computacional são: **reconhecimento de padrões**, **decomposição**, **algoritmo** e **abstração**.

Repare que você vivenciou todas essas etapas ao elaborar o jogo de perguntas e respostas.

Biometria

A palavra "biometria" corresponde à junção dos termos, em grego, *bio*, "vida", e *metria*, "medida", e está relacionada a medidas das características físicas dos seres vivos. Ela funciona como um reconhecimento de padrão.

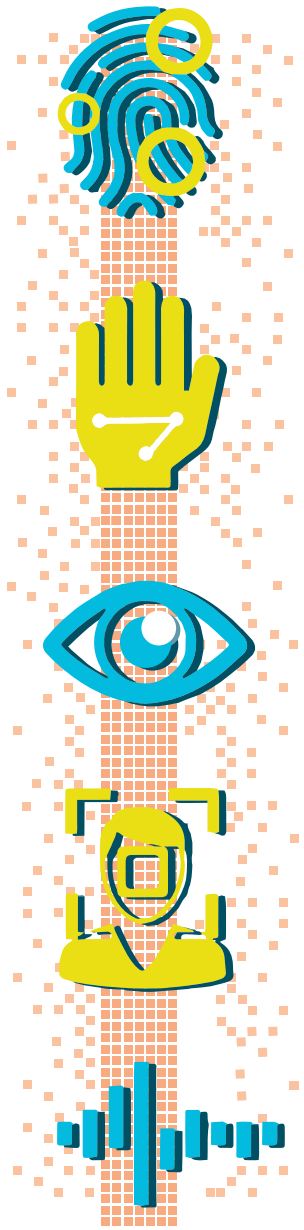
Com o avanço tecnológico e a popularização de aparelhos eletrônicos, como computadores, celulares e terminais de autoatendimento bancário, a utilização da biometria tornou-se uma importante ferramenta de segurança. Atualmente, existem sistemas biométricos que utilizam:

- a identificação de padrões nas impressões digitais;
- a comparação das veias ou das linhas da palma da mão;
- o mapeamento da íris humana;
- o reconhecimento de marcadores faciais;
- a análise do timbre da voz de um indivíduo.

Apesar de cada sistema utilizar uma característica física diferente, todos eles se baseiam em quatro etapas:

1. **Captura:** processo em que se recolhe a característica do indivíduo por meio de um sensor. Por exemplo, quando colocamos o dedo no leitor do celular ou quando o *software* solicita a você que pronuncie uma palavra. Essa etapa deve ser repetida até que o sistema efetue uma coleta satisfatória.
2. **Extração:** a informação capturada é convertida na linguagem adequada para que a máquina a processe. Por exemplo, é nessa etapa que o computador traduz a onda sonora pronunciada em *bits*, para que continue o processo de identificação.
3. **Reconhecimento de um padrão:** o *software* vai, então, identificar características únicas que vinculem o usuário a essas características. No reconhecimento facial, o programa analisa a distância entre os olhos da pessoa, as dimensões de sua testa ou de seu nariz, por exemplo.
4. **Comparação:** é a etapa de autochecagem que o próprio sistema realiza para verificar se todo o processo identificará o usuário com eficiência. Caso o procedimento resulte em falsos positivos – isto é, resulte positivo quando, na verdade, deveria resultar em negativo –, todas as etapas deverão ser refeitas para assegurar a integridade dos dados.

É provável que, com o barateamento dos recursos tecnológicos, os próximos passos da biometria possam envolver o reconhecimento do DNA, tornando a identificação do usuário extremamente confiável e garantindo a segurança dos dados pessoais em um nível extremo.



Davi Augusto/ID/BR

Na biometria são avaliados e medidos diversos pontos do rosto, da mão ou da digital da pessoa.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Na resolução de cada um dos problemas, você terá que raciocinar de acordo com as características do pensamento computacional. Depois de resolvê-los, analise se consegue identificar em que momento você recorreu ao reconhecimento de um padrão, decompôs o problema em partes mais simples, utilizou um algoritmo ou realizou uma abstração.

1 **Determinado jogo consiste em acertar uma sequência de três cores. Cada vez que um jogador acerta uma das cores na posição correta, aparece um *emoji* sorrindo ☺ e, quando erra, aparece um *emoji* triste ☹. A ordem em que o *emoji* aparece não corresponde à posição da cor correta.**

Analise como foi o desempenho de um jogador.

Tentativa	Posição 1	Posição 2	Posição 3	Verificação
1				☹☹☹
2				☺☹☹
3				☹☹☹
4	////////////////////	////////////////////	////////////////////	☺☺☺

Qual é a cor que deve ocupar cada uma das três posições da tentativa 4? Roxo, vermelho e laranja.

2 **O mesmo jogador decidiu se arriscar em mais três rodadas do jogo proposto na atividade anterior. Em cada um dos itens a seguir, está o desempenho desse jogador em cada nova rodada. Analise-os e determine a sequência correta de cores.** Na atividade **2**, verifique se os estudantes percebem que os itens **a** e **b** possuem a mesma ordem de cores nas tentativas, mas os resultados das verificações são diferentes. Isso significa que, apesar de o jogador fictício ter feito a mesma sequência de tentativas, as respostas são diferentes.

a) Vermelho, laranja e roxo.

Tentativa	Posição 1	Posição 2	Posição 3	Verificação
1				☹☹☹
2				☺☹☹
3				☹☹☹
4				☺☹☹
5	////////////////////	////////////////////	////////////////////	☺☺☺

b) Laranja, vermelho e roxo.

Tentativa	Posição 1	Posição 2	Posição 3	Verificação
1				☺☹☹
2				☹☹☹
3				☺☹☹
4				☹☹☹
5	////////////////////	////////////////////	////////////////////	☺☺☺

c) Laranja, preto e azul.

Tentativa	Posição 1	Posição 2	Posição 3	Verificação
1				☺☹☹
2				☹☹☹
3				☹☹☹
4				☺☹☹
5	////////////////////	////////////////////	////////////////////	☺☺☺

Não escreva no livro.

3 **Indique no caderno a alternativa correta.**

(Facisb-SP) Na linguagem de programação Logo, é possível a criação de desenhos a partir de comandos passados a uma tartaruga que está no centro de uma tela em branco, com sua cabeça inicialmente apontada para cima. Considere, por exemplo, a seguinte sequência de 5 comandos, sendo cada comando composto por duas letras seguidas de um número:

FD 50 RT 90 FD 50 LT 90 FD 50

Considere, ainda, a seguinte figura que representa a posição final da tartaruga, bem como o desenho resultante, composto por 3 segmentos de reta, sendo que a tartaruga está sobre o último segmento desenhado.



O comando FD 50 fez a tartaruga desenhar um segmento vertical de tamanho 50, pois a tartaruga apontava para cima; o comando RT 90 fez a tartaruga girar 90° para a direita; e o comando FD 50 traçou um segmento horizontal de tamanho 50, pois agora a tartaruga estava virada para a direita. Finalmente, os comandos LT 90 e FD 50 fizeram, primeiramente, a tartaruga girar 90° para a esquerda, apontando novamente sua cabeça para cima, e depois fizeram a tartaruga traçar um segmento de tamanho 50. Considere a seguinte sequência de 8 comandos:

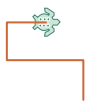
FD 50 LT 90 FD 50 FD 50 RT 90 FD 50 RT 90 FD 50

A partir de uma tela em branco, o desenho que será formado pela tartaruga por meio desses 8 comandos será Alternativa **d**.

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

Facisb-SP. Fac-símile: ID/BR

4 **Registre no caderno a alternativa correta.**

(FMJ-SP) Em muitas linguagens de programação, para se criar uma variável, basta digitar o nome da variável e atribuir um valor a ela usando o sinal de igual. Por exemplo, o comando x = 2 cria uma variável x cujo valor é 2. Para alterar o valor da variável, podemos atribuir um novo valor a ela, que pode ser o resultado de uma operação envolvendo a própria variável.

Veja o seguinte exemplo de código:

```
res = 0; //cria a variável res com o valor zero
res = 5; // altera o valor da variável res para 5
res = res + 2; // altera o valor de res para 5 + 2, ou
seja, para 7
res = res * 2; // altera o valor de res para 7 * 2, ou
seja, para 14
```

Considere agora o seguinte código escrito em linguagem natural, observando que o símbolo * significa multiplicação:

```
res = 1;
res = 3 * res;
execute todo o código entre chaves, repetidamente,
até que o valor da variável res seja maior do que 20
{
    res = res + 1;
    res = 2 * res;
}
res = res − 5;
```

Após a execução desse código, o valor da variável res é Alternativa **b**.

a) 25.
b) 33.
c) 15.
d) 16.
e) 38.

CÁLCULO RÁPIDO

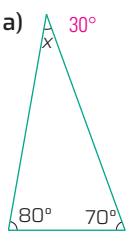
Conscientizar-se de como pensar para realizar um cálculo é uma habilidade importante para a aprendizagem em geral. Nessas atividades, os algoritmos estão ligados ao processo de resolver equações do 1º grau e de obter a medida de ângulos internos de um triangulo, considerando que a soma dessas medidas é 180°.

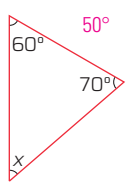
Em cada uma das atividades de cálculo, você certamente usará um algoritmo. Pense sobre isso e tente descrever, no caderno, as etapas de cada algoritmo.

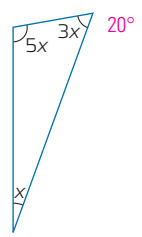
1 **Determine mentalmente a raiz das equações a seguir.**

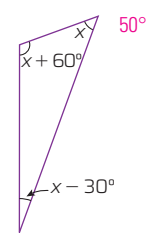
a) $2x = 6$ 3
b) $-2x = 6$ −3
c) $2x + 1 = 11$ 5
d) $-2x + 1 = 11$ −5
e) $12 = 3x + 3$ 3
f) $12 = 3x - 3$ 5
g) $-5 = 5x + 10$ −3
h) $5 = -5x + 10$ 1

2 **Determine mentalmente o valor de *x* em cada triângulo.**

a) 

b) 

c) 

d) 

Ilustrações: ID/BR

Não escreva no livro.

Considere propor aos estudantes a realização das atividades desta seção no decorrer do estudo do capítulo para que, caso eles apresentem dúvidas, elas possam ser solucionadas antes de finalizado o estudo deste capítulo.

PARA RECORDAR

Neste capítulo, você aprendeu como os padrões são importantes em Matemática e para a programação. Por isso, selecionamos alguns problemas em que a ideia central é encontrar um padrão ou utilizar um padrão já conhecido.

1 **Analise as igualdades a seguir.**
Alternativa **d**.

$$9^2 = 81$$
$$99^2 = 9\,801$$
$$999^2 = 998\,001$$
$$9999^2 = 99\,980\,001$$

Escreva no caderno a alternativa que expressa o resultado de $999\,999^2$ e justifique sua resposta.

a) 9 999 800 001
b) 99 998 000 001
c) 99 999 800 001
d) 999 998 000 001
e) 99 999 980 000 001

2 **Considere a sequência formada por hexágonos com lados de medida 1 a seguir:**

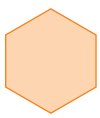


Figura 1

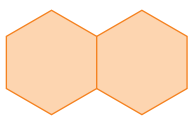


Figura 2

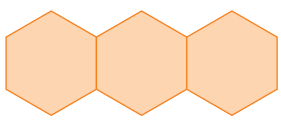
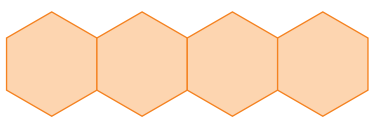


Figura 3



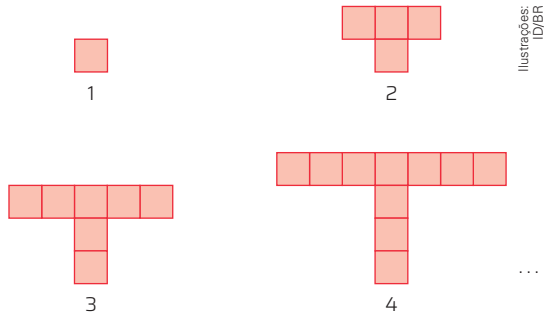
Ilustrações: ID/BR

Figura 4

a) Como será formada a quinta figura?
A figura 5 será formada por 5 hexágonos regulares.
b) Calcule o perímetro das quatro primeiras figuras dessa sequência. 6; 10; 14; 18.
c) Calcule o perímetro da décima figura dessa sequência sem desenhá-la. 42
d) Como você descreveria o perímetro da figura que ocupa a posição n nessa sequência?
Resposta pessoal. Exemplo: $P_n = 2 + 4n$.
e) Qual é a posição da figura que tem perímetro igual a 110? 27

3. a) Resposta possível: a cada figura, acrescentam-se 3 quadradinhos: um na coluna central para baixo e um de cada lado (esquerda e direita) da linha existente anteriormente.

3 **Analise a sequência de figuras a seguir. Depois, responda às questões.**



Ilustrações: ID/BR

a) Qual é o padrão dessa sequência?
b) Encontre uma expressão que determine a quantidade de quadrados da figura na posição n dessa sequência. $Q_n = 3n - 2$
c) Escreva a expressão do item anterior de duas maneiras diferentes e explique como foi feita a contagem de quadradinhos que resultou em cada uma dessas expressões.
$Q_n = 3(n - 1) + 1$; $Q_n = n(2n - 1) - 2(n - 1)^2$.

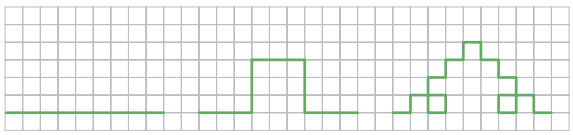
4 **Considere a seguinte sequência de figuras:**



ID/BR

a) Determine a expressão para o número de pontos de uma figura qualquer na posição n dessa sequência. $P_n = n + 2$
b) Determine a expressão para o número de segmentos de uma figura qualquer na posição n dessa sequência. $S_n = 2n + 1$

5 **Esta sequência de figuras tem como base um segmento de comprimento unitário. A segunda figura é obtida dividindo-se o segmento em três partes de mesma medida e construindo-se três lados de um quadrado, como mostra a figura 2. Cada um dos segmentos da segunda figura mede $\frac{1}{3}$. Esse processo continua: a cada figura, divide-se cada um dos segmentos em três partes iguais e encaixam-se os três lados de quadrados na parte central de cada segmento.**



ID/BR

Figura 1 Figura 2 Figura 3

a) Calcule o comprimento C das figuras 2, 3 e 4.
b) Determine o comprimento $C(n)$ da figura que ocupa a posição n.
c) O que se pode afirmar sobre o comprimento C quando o valor de n cresce indefinidamente?

5. a) $\frac{5}{3}, \left(\frac{5}{3}\right)^2, \left(\frac{5}{3}\right)^3$ **b)** $C(n) = \left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}$ **c)** $C(n)$ também cresce indefinidamente.

Não escreva no livro.

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO

Essa sequência de problemas tem como foco o raciocínio dedutivo. Cada problema é único e exigirá a construção de uma estratégia para chegar à resposta. Cada uma dessas estratégias é um algoritmo. Analise as etapas de cada um deles.

1 **Ana é irmã de Bruno. Cecília é mãe de Bruno. Daniel é pai de Cecília. Elisa é mãe de Daniel. Qual é a relação de parentesco entre Ana e Daniel?** Ana é neta de Daniel, ou Daniel é avô de Ana.

2 **Quatro amigos vão a uma festa e um deles não foi convidado. A pessoa que cuida da recepção da festa quer saber quem foi o penetra:** Pedro

I. Não fui eu, diz Beto.

II. Foi o Pedro, diz Carlos.

III. Foi o Carlos, diz Mário.

IV. O Mário está mentindo, diz Pedro.

Só um deles mentiu. Quem foi o penetra?

3 **Resolva a atividade a seguir e indique no caderno a alternativa correta.**

(Insper-SP) Em um programa de televisão que revela novos talentos para a música, cada candidato faz uma breve apresentação para os 4 jurados que, inicialmente, ficam de costas, apenas ouvindo. Durante a apresentação, todos os jurados que gostarem da voz do candidato viram-se para ele. Se pelo menos um jurado se virar, o candidato é selecionado.

Considerando a informação sublinhada no texto inicial, uma afirmação necessariamente verdadeira sobre esse programa é: Alternativa **b**.

a) se o candidato não foi selecionado, pelo menos um jurado não se virou para ele.

b) se o candidato não foi selecionado, nenhum jurado se virou para ele.

c) se pelo menos um dos jurados não se virar, o candidato não é selecionado.

d) um jurado não se vira se, e somente se, o candidato não é selecionado.

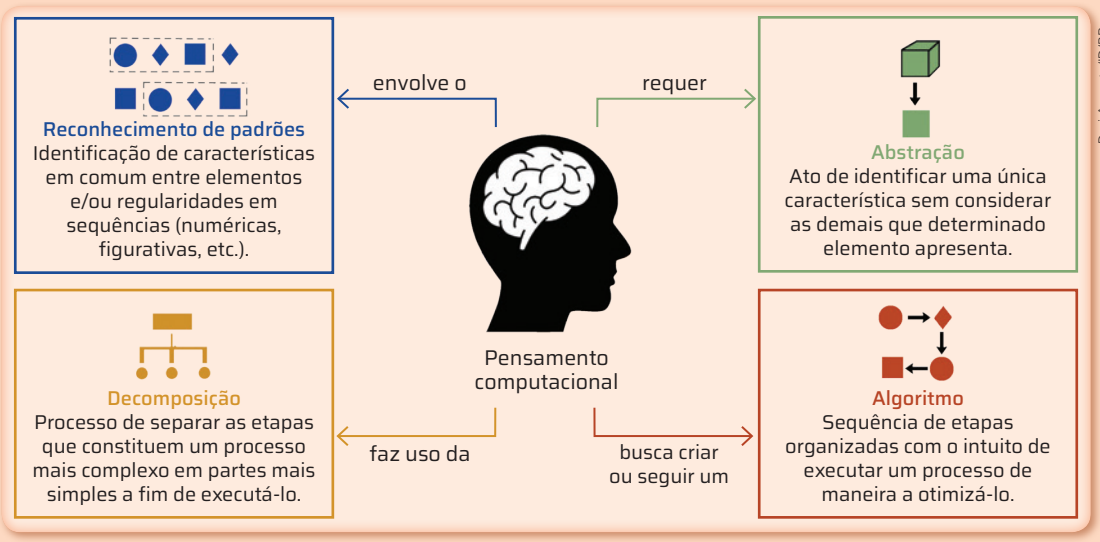
e) o candidato é selecionado se, e somente se, todos os jurados se virarem.

PALAVRAS-CHAVE

Propomos que você elabore um mapa mental com as principais ideias trabalhadas neste capítulo.

Lembre-se de que um mapa mental é um diagrama que pode conter textos e imagens, os quais podem ser ligados por setas ou traços para mostrar as relações entre ideias, informações, conceitos, etc.

Para inspirar sua produção, aqui está um exemplo de mapa mental.



Davi Augusto/ID/BR

O mapa que você vai criar poderá ser mais detalhado e os textos devem ser escritos por você, com suas palavras. Assim, essa produção poderá ser fonte de consulta sempre que desejar.

MATEMÁTICA E TECNOLOGIA

Esta seção favorece o desenvolvimento das competências gerais **1**, **2**, **4**, **5** e **7**, pois os estudantes vão usar conhecimentos digitais historicamente construídos e exercitar a curiosidade intelectual para resolver problemas. Além disso, a seção apresenta uma linguagem digital e incentiva o debate com argumentos baseados em dados e fatos confiáveis.

Esta seção possibilita uma integração com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e com os temas contemporâneos transversais Economia (Educação Fiscal e Educação Financeira) e Ciência e Tecnologia. Para ampliar os conhecimentos dos estudantes acerca do tema explorado nesta seção, pode ser proposto um trabalho integrado com um professor da área de Língua Portuguesa e os professores de Sociologia, História e Geografia, a fim de explorar a competência específica **4** de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, na medida em que é feita a análise das transformações das sociedades.

QR Code

Os QR Codes são utilizados em diversas situações. Você vai encontrar alguns, por exemplo, em certas páginas deste livro. Eles podem armazenar textos, *sites*, arquivos de áudio ou até mesmo imagens. Verifique alguns exemplos de como esses códigos são usados.



Ministério da Gestão e da Inovação em Serviços Públicos/Governo Federal

A Carteira de Identidade Nacional (CIN) é um novo padrão de documento de identificação no Brasil, cuja intenção é substituir, ao longo da próxima década, o Registro Geral (RG). No verso da CIN, há um QR Code que permite a validação da autenticidade do documento.

Davi Augusto/ID/BR



Joa Souza/Shutterstock.com/ID/BR

Com a leitura do QR Code presente no modelo Mercosul das placas de identificação de veículos, é possível obter algumas informações sobre o veículo e sobre a procedência da placa, o que ajuda a combater fraudes e falsificações.

Para acessar o conteúdo, basta apontar a câmera de um equipamento que tenha um leitor de QR Code instalado e, se ele estiver conectado à internet, automaticamente o aparelho direcionará você para o conteúdo armazenado.

Leia o texto a seguir para saber mais sobre o funcionamento dos QR Codes e entender a relação deles com a Matemática.

Como funciona o QR Code (ART 4052)

[...]

QR Code vem de *Quick Response* ou Resposta Rápida, assim o QR Code é um código de resposta rápida consistindo num tipo de código de barras bidimensional. [...]

Este código foi criado em 1994 pela empresa japonesa Denso-Wave para controlar o estoque de peças de uma forma rápida e simples.

Com o desenvolvimento de câmeras de celulares cada vez mais precisas, o processo de escaneamento do código passou a ser usado também nesses dispositivos em 2003. A vantagem é que até mesmo celulares com câmeras não muito boas podem captar as imagens e interpretá-las.

Hoje o QR Code encontra uma infinidade de aplicações, indo do pagamento de contas pelo celular [ao] acesso a *sites* e *e-mails* de forma direta, acesso a menus de restaurantes ou catálogos de componentes, informações técnicas sobre componentes e muito mais.

A partir do seu lançamento, o código se popularizou e seu uso, assim como os aplicativos que o interpretam, se tornaram gratuitos, podendo ser usados em qualquer aplicação e instalados em qualquer celular.

Não escreva no livro.

Como funciona

Diferentemente de um código de barras comuns, como mostra a figura 1, o QR Code é um código bidimensional ou 2-D.



Imagens: Arquivo/Instituto Newton C Braga/Acervo do cedente

Figura 1 – Código de barras comum de 1 dimensão (1-D).

Nesse código, as informações são codificadas pela largura e separação das barras segundo um código padronizado, adotado internacionalmente.

No código de barras bidimensional, temos a representação das informações por pequenos retângulos que formam um padrão de mosaico, conforme mostra a figura 2.



Arquivo/Instituto Newton C Braga/Acervo do cedente

Figura 2 – O código bidimensional do QR Code.

Desta forma, tomando [como] referência as linhas de retângulos, podemos fazer a leitura [da] sequência das regiões de claros e escuros convertendo-as em *bits*, conforme mostra a figura 3.



Arquivo/Instituto Newton C Braga/Acervo do cedente

Figura 3 – Lendo os dados.

Diversas versões existem que podem conter mais ou menos dados conforme a quantidade de "quadrados" [que] podem ser usados na representação de dados.

Assim, temos na figura 4 algumas versões com a quantidade de *bits* que podem armazenar:



Versão 21 × 21 Versão 25 × 25 Versão 33 × 33 Versão 57 × 57

Fotos: Arquivo/Instituto Newton C Braga/Acervo do cedente

Figura 4 – Quanto maior o número de pontos, maior a quantidade de informação armazenada.

Versões de 117 × 117 e 177 × 177 também existem, possibilitando o armazenamento de até 7 089 caracteres.

[...]

Instituto NCB – Newton C. Braga. Como funciona o QR Code (ART 4052). Disponível em: https://www.newtoncbraga.com.br/index.php/como-funciona/15548-como-funciona-o-qr-code-art4052. Acesso em: 25 out. 2024.

Davi Augusto/ID/BR

Conectando ideias

1 Os QR Codes já são utilizados em algumas notas fiscais. Procure em sua residência, com familiares, amigos ou em lugares de comércio (supermercado, farmácia, lojas, restaurantes, etc.), algumas notas fiscais nas quais haja QR Codes impressos.

a) Escreva no caderno sua hipótese sobre que tipo de informação está codificada nos QR Codes pesquisados. Resposta pessoal.

b) Faça a leitura das informações armazenadas nos QR Codes das notas fiscais que você pesquisou. Para isso, você deve ter um aplicativo de leitura de QR Code instalado no celular que você for utilizar ou, se for o caso, simplesmente direcionar a câmera do celular para o QR Code. Estava correta a hipótese que você escreveu no item anterior sobre o que estava armazenado nos QR Codes? Resposta pessoal.

2 Uma pessoa realizou uma compra em um estabelecimento e recebeu uma nota fiscal que apresentava um QR Code. Utilizando seu celular para fazer a leitura desse código, ela foi redirecionada para o *site* da Secretaria da Fazenda de seu estado e teve acesso direto à nota fiscal detalhada, na qual constavam os produtos adquiridos, as respectivas quantidades e o valor pago por eles. Analise-a.

Davi Augusto/ID/BR

FRALDA CAE C/80 MED (código 273890) Qtde.: 1 Un.: UN. Vl Unit.: 55,99	Vl. Total 55,99
PAPEL HIG. SEDA LV12 PG 11 20M (código 267503) Qtde.: 1 Un.: UN. Vl Unit.: 15,99	Vl. Total 15,99
DETERG. LIQ. LOUCA BOLHA 500 ML CLEAR (código 261) Qtde.: 1 Un.: FR. Vl Unit.: 1,59	Vl. Total 1,59
DETERG. LIQ. LOUCA BOLHA 500 ML CLEAR (código 261) Qtde.: 1 Un.: FR. Vl Unit.: 1,59	Vl. Total 1,59
DETERG. LIQ. LOUCA BOLHA 500 ML NEUTRO (código 265) Qtde.: 1 Un.: FR. Vl Unit.: 1,59	Vl. Total 1,59
DETERG. PO TOMMY 800 G LAV. PERFEITA (código 290533) Qtde.: 1 Un.: UN. Vl Unit.: 7,99	Vl. Total 7,99
DETERG. PO TOMMY 800 G LAV. PERFEITA (código 290533) Qtde.: 1 Un.: UN. Vl Unit.: 7,99	Vl. Total 7,99
AMAC. ROUPAS HUG CONC 1 LI CUIDAD (código 263098) Qtde.: 1 Un.: UN. Vl Unit.: 14,99	Vl. Total 14,99
Qtd. total de itens:	38
Valor total R$:	271,69
Desconto R$:	0,30
Valor a pagar R$:	271,39
Informação dos Tributos Totais Incidentes (Lei Federal 12.741/2012) R$	75,16

ID/BR



Escaneamento de QR Code no celular.

Não escreva no livro.

Na parte inferior da nota fiscal está indicado o valor total dos tributos que incidiram sobre os produtos adquiridos.

a) Com o auxílio de uma calculadora, determine a porcentagem aproximada que os tributos representam do valor total da nota fiscal. 27,7%

b) Pesquise na internet a Lei Federal n. 12 741/2012 e verifique quais são os tributos que fazem parte do total informado ao consumidor na emissão da nota fiscal. Caso não conheça algum deles, aprofunde sua pesquisa elaborando uma lista dos impostos e em quais situações eles são aplicados.
Resposta pessoal.

3 Um dos impostos cuja informação é obrigatória no ato da emissão da nota fiscal é o Imposto sobre Circulação de Mercadorias e Prestação de Serviços (ICMS). O valor desse imposto varia de acordo com o estado em que a nota fiscal foi emitida e, também, de acordo com o produto adquirido.

De maneira geral, na versão eletrônica de notas fiscais, existe um campo que indica o percentual médio cobrado de ICMS sobre os produtos comprados e o valor pago de ICMS. Assim, com base nesses dados, é possível calcular a porcentagem destinada aos demais tributos.

Imagine, por exemplo, que, na nota fiscal eletrônica da atividade **2**, exista uma aba que informa que a porcentagem que os tributos representam no total da compra seja 27,69% e que, dessa porcentagem, 22,65% correspondam ao ICMS. Isso significa que os demais tributos correspondem a 5,04%, pois 27,69% − 22,65% = 5,04%. Com essas informações, também é possível determinar o valor pago, em real, de ICMS.

$$22{,}65\% \text{ de } \mathbf{R\$}\ 271{,}39$$

$$\frac{22{,}65}{100} \cdot 271{,}39 \simeq 61{,}47$$

Portanto, foram pagos aproximadamente R$ 61,47 de ICMS.

Agora, considere as notas fiscais que você utilizou na atividade **1**. Verifique se o valor do ICMS está descrito ou não. Caso não esteja descrito em reais, considere o percentual do ICMS em seu estado e calcule o valor desse imposto pago nessa nota fiscal. R$ 18,76

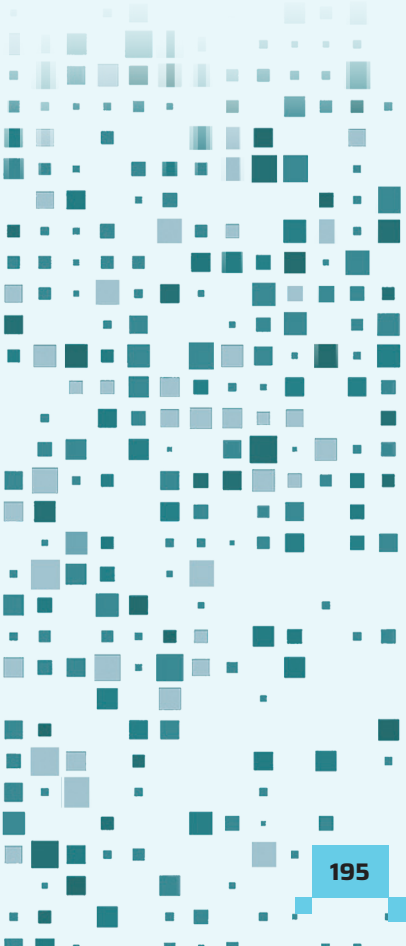
4 Você sabia que, como cidadão, tem o direito de saber detalhes de como o governo atua, inclusive quanto você e sua comunidade pagam de impostos e as finalidades a que eles são destinados? Essa é a base da transparência pública, princípio previsto na Constituição de 1988 que garante aos cidadãos o livre acesso a informações governamentais não sigilosas. Resposta pessoal.

O uso de QR Codes e a apresentação dos valores ou porcentagens de tributos em notas fiscais são exemplos de uso da tecnologia para aumentar a transparência pública e facilitar o acesso dos cidadãos a informações previstas por esse princípio.

<u>De que maneiras a tecnologia pode agir como mediadora da transparência pública?</u>

- Pesquise na internet outros exemplos de uso de tecnologias para manter e expandir a transparência de dados, como impostos, despesas públicas e licitações. Busque mais detalhes sobre o que é a transparência pública e sua importância para a democracia.
- Com a orientação do professor, organize, com os colegas, uma roda de conversa sobre tecnologia e transparência. Nessa roda, vocês devem levantar os pontos pesquisados anteriormente e, juntos, refletir sobre outras possíveis maneiras de uso da tecnologia que favorecem a transparência pública.
- Registrem, em um texto coletivo, as principais ideias e sugestões que surgiram durante a roda de conversa e compartilhem esse documento nas redes sociais do colégio.

Durante essa atividade, você manteve o foco e resistiu a distrações?
A resposta do estudante ao último item da atividade **4** traz evidências da competência socioemocional autogestão.



Davi Augusto/ID/BR

Não escreva no livro.

CAPÍTULO 8 CAPÍTULO 8 CAPÍTULO 8

ALGORITMOS E FLUXOGRAMAS

NESTE CAPÍTULO

- Sistema de numeração binário
- Armazenamento de dados
- Algoritmos
- Fluxogramas

No capítulo anterior, você conheceu o conceito de algoritmo aplicado à computação como uma sequência ordenada de comandos para que o computador execute um programa. Reconhecer problemas que podem ser resolvidos por meio de algoritmos permite que outra pessoa ou mesmo uma máquina seja capaz de repetir os passos indicados e obter o mesmo resultado. Foi o que aconteceu com a programação dos passos no Scratch. Os algoritmos estão presentes em diversas situações e muitos deles podem ser entendidos por um computador, desde que escritos em uma linguagem que ele consiga interpretar.

Este capítulo vai apresentar outros algoritmos e permitir que você tenha contato mais próximo com as características do pensamento computacional: reconhecer padrões e decompor uma situação em partes que podem ser ordenadas em um algoritmo e generalizadas.

Para começar, que tal aprender como se dá a comunicação com o computador? Vamos descobrir como nossa escrita é transformada em sinais eletrônicos entendidos pela máquina?

SISTEMA BINÁRIO

O trabalho desenvolvido neste tópico pode ser uma oportunidade para retomar características do sistema de numeração decimal. Além disso, um trabalho relacionado à história da Matemática pode ser proposto, a fim de que os estudantes busquem informações sobre outros sistemas de numeração, como o egípcio, o romano, etc. Assim, os textos propostos neste tópico contribuem para o desenvolvimento das competências gerais **1** e **5**, na medida em que valorizam e utilizam conhecimentos historicamente construídos, permitindo que os estudantes compreendam tecnologias digitais para se comunicar, acessar e disseminar informações.

Você já se perguntou por que uma máquina, como uma calculadora ou um computador, costuma executar cálculos mais rápido que um ser humano? Há fatores que contribuem para que isso ocorra, como a máquina ter circuitos elétricos e não executar outras funções além daquela solicitada. Para explorar as propriedades dos circuitos elétricos, os computadores utilizam a base binária.

Nos dispositivos eletrônicos, como é o caso dos computadores, as informações precisam ser interpretadas considerando duas opções relativas à passagem da corrente elétrica que percorre os circuitos da máquina: ou a corrente passa, ou não passa. É por esse motivo que a maioria dos equipamentos eletrônicos emprega a base binária de contagem.

O sistema de numeração binário utiliza apenas dois algarismos para representar informações:

- quando a corrente elétrica passa pelo circuito, a máquina entende isso como 1;
- quando não há passagem de corrente elétrica, ela interpreta isso como 0.

Em outras palavras, as máquinas executam todas as funções programadas utilizando **sequências de zeros e uns**.

Os computadores interpretam todas as informações de que precisam para executar as tarefas para as quais foram programados utilizando apenas sequências numéricas com os algarismos 0 e 1.



Michal Boubin/iStock/Getty Images

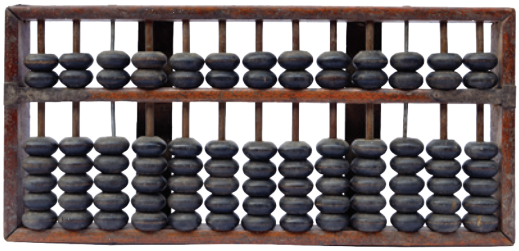
Não escreva no livro.

Relação entre o sistema de numeração binário e o decimal

Você deve estar pensando como uma calculadora entende, por exemplo, o número 2, ou ainda o número 23, se ela utiliza apenas os algarismos 1 e 0 para interpretar informações.

Para compreender como isso acontece, vamos retomar os agrupamentos do sistema de numeração decimal, com os quais estamos mais habituados. Na realidade, estamos tão acostumados a trabalhar com esse sistema de numeração que realizamos os agrupamentos sem perceber.

No sistema de numeração decimal, os agrupamentos são feitos na base 10: podemos agrupar 10 elementos de uma ordem inferior e representá-los por um valor de ordem imediatamente superior. Por exemplo:



ChungPhotoStory/ Shutterstock.com/ID/BR

O ábaco chinês é um instrumento de cálculo muito antigo que pode ter se originado na Mesopotâmia há mais de 5 500 anos. Com ele, os agrupamentos podem ser feitos com agilidade apenas movendo as contas.

10 unidades = 1 dezena
10 dezenas = 1 centena
10 centenas = 1 unidade de milhar

Para escrever um número no sistema decimal, utilizamos 10 algarismos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9), e a posição de cada algarismo na escrita do número corresponde a uma potência da base 10.

Se considerar oportuno, reserve um tempo para conversar com os estudantes sobre os diferentes sistemas de numeração. Nesta coleção, vamos trabalhar apenas com a representação binária de números naturais, isto é, não vamos falar sobre binários negativos nem com vírgula. Se julgar pertinente, comente com os estudantes que esses outros sistemas existem e recomende que façam uma pesquisa sobre o assunto para conhecer mais sobre eles.

Exemplo 1

- $59 = \mathbf{5} \cdot 10^1 + \mathbf{9} \cdot 10^0 = 50 + 9$
- $107 = \mathbf{1} \cdot 10^2 + \mathbf{0} \cdot 10^1 + \mathbf{7} \cdot 10^0 = 100 + 0 + 7$
- $2978 = \mathbf{2} \cdot 10^3 + \mathbf{9} \cdot 10^2 + \mathbf{7} \cdot 10^1 + \mathbf{8} \cdot 10^0 = 2000 + 900 + 70 + 8$

Conversão de um número na base binária para um número na base decimal

Assim como no sistema decimal temos 10 algarismos e a posição dos algarismos na escrita do número corresponde a uma potência da base 10, no sistema de numeração binário temos 2 algarismos (0 e 1), e a posição dos algarismos na escrita do número corresponde a uma potência de 2.

Observe como é possível estabelecer uma relação entre um número escrito na base 2 e um número escrito na base 10:

$$\underbrace{(10)_2}_{\text{número escrito na base 2}} = \mathbf{1} \cdot 2^1 + \mathbf{0} \cdot 2^0 = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 2 + 0 = \underbrace{(2)_{10}}_{\text{número escrito na base 10}}$$

Ou seja, o número 10 (lemos: um zero) na base 2 corresponde ao número 2 (dois) na base 10.

Exemplo 2

- $(110)_2 = \mathbf{1} \cdot 2^2 + \mathbf{1} \cdot 2^1 + \mathbf{0} \cdot 2^0 = 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 4 + 2 + 0 = (6)_{10}$

  O número 110 (lemos: um um zero) na base 2 corresponde ao número 6 (seis) na base 10.

- $(1011)_2 = \mathbf{1} \cdot 2^3 + \mathbf{0} \cdot 2^2 + \mathbf{1} \cdot 2^1 + \mathbf{1} \cdot 2^0 = 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 8 + 0 + 2 + 1 = (11)_{10}$

  O número 1011 (lemos: um zero um um) na base 2 corresponde ao número 11 (onze) na base 10.

- $(10011)_2 = \mathbf{1} \cdot 2^4 + \mathbf{0} \cdot 2^3 + \mathbf{0} \cdot 2^2 + \mathbf{1} \cdot 2^1 + \mathbf{1} \cdot 2^0 = 1 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 =$
  $= 16 + 0 + 0 + 2 + 1 = (19)_{10}$

  O número 10011 (lemos: um zero zero um um) na base 2 corresponde ao número 19 (dezenove) na base 10.

- $(110101)_2 = \mathbf{1} \cdot 2^5 + \mathbf{1} \cdot 2^4 + \mathbf{0} \cdot 2^3 + \mathbf{1} \cdot 2^2 + \mathbf{0} \cdot 2^1 + \mathbf{1} \cdot 2^0 =$
  $= 1 \cdot 32 + 1 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 32 + 16 + 0 + 4 + 0 + 1 = (53)_{10}$

  O número 110101 (lemos: um um zero um zero um) na base 2 corresponde ao número 53 (cinquenta e três) na base 10.

Conversão de um número na base decimal para um número na base binária

Para converter um número da base decimal para a base binária, temos de verificar quantos agrupamentos de 2 é possível realizar e quantas unidades ficam sem ser agrupadas. Por isso, é preciso dividir o número que está na base decimal por 2 até que não seja mais divisível e verificar o quociente e os restos.

Acompanhe como converter o número 2, na base decimal, para a base binária.

Primeiro, vamos dividir 2 por 2 usando o algoritmo convencional da divisão.

$$\begin{array}{r|l} 2 & 2 \\ \hline 0 & 1 \end{array}$$

Observe que é possível realizar 1 agrupamento de 2 e o resto nessa divisão é zero. Logo:

$$2 = 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$$

Assim, o número 2, na base decimal, é representado na base binária por 10, como vimos na página anterior. Indicamos:

$$(2)_{10} = (10)_2$$

Exemplo 3

Vamos escrever o número 3 na base binária.

$$\begin{array}{r|l} 3 & 2 \\ \hline 1 & 1 \end{array}$$

Observe que é possível realizar 1 agrupamento de 2 e sobra 1 unidade.

$$3 = 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

Assim, o número 3, na base decimal, é representado na base binária por 11. Indicamos:

$$(3)_{10} = (11)_2$$

Exemplo 4

Vamos escrever o número 4 na base binária.

$$\begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ \hline 0 & 2 \end{array}$$

Como o quociente 2 ainda é divisível por 2, realizamos novamente a divisão.

$$\begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ \hline 0 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 2 & 2 \\ \hline 0 & 1 \end{array}$$

Observe que é possível realizar 2 agrupamentos de 2 e não sobra unidade.

$$4 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$$

Assim, o número 4, na base decimal, é representado na base binária por 100. Indicamos:

$$(4)_{10} = (100)_2$$

Observe as representações dos demais algarismos na base binária.

Representação decimal	0	1	5	6	7	8	9
Representação binária	0	1	101	110	111	1000	1001

Você deve ter percebido que, na escrita binária, os números ocupam mais posições quando comparados a seus correspondentes na escrita decimal. Vamos investigar isso mais a fundo nos problemas resolvidos a seguir.

Não escreva no livro.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R1 **Uma pessoa vai escrever em uma folha de papel quadriculado alguns números na base binária. Como esses números estão na base decimal, ela vai fazer uma previsão da quantidade de espaços de que vai precisar. Ela está deixando um quadrinho para cada algarismo, 0 ou 1, do número escrito na base 2. Por exemplo, para escrever os números 2 e 3, ela vai reservar dois quadrinhos para cada um deles e, para escrever os números de 4 a 7, ela vai reservar três quadrinhos para cada um deles.**

Calcule quantos quadrinhos a pessoa deve reservar para escrever cada um dos números inteiros:

a) entre 7 e 16;

b) entre 15 e 32;

c) entre 31 e 64.

Resolução

a) Sabemos que $(8)_{10} = (1000)_2$ e, por isso, é necessário reservar 4 quadrinhos para escrever esse número. Vamos converter o número 15, que é o maior número possível nesse intervalo, e verificar quantos quadrinhos ele utilizará.

Realizando sucessivas divisões por 2, temos:

$$\begin{array}{r|l} 15 & 2 \\ 1 & 7 \quad 2 \\ & 1 \quad 3 \quad 2 \\ & \quad 1 \quad 1 \end{array}$$

Assim:

$(15)_{10} = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (1111)_2$

Portanto, a pessoa deverá reservar quatro quadrinhos para cada um dos números entre 7 e 16.

b) Para determinar os quadrinhos necessários para cada um dos números do intervalo entre 15 e 32, vamos converter os números 16 e 31, que são, respectivamente, o menor e o maior número desse intervalo.

Realizando sucessivas divisões por 2, temos:

$$\begin{array}{r|l} 16 & 2 \\ 0 & 8 \quad 2 \\ & 0 \quad 4 \quad 2 \\ & \quad 0 \quad 2 \quad 2 \\ & \quad\quad 0 \quad 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 31 & 2 \\ 1 & 15 \quad 2 \\ & 1 \quad 7 \quad 2 \\ & \quad 1 \quad 3 \quad 2 \\ & \quad\quad 1 \quad 1 \end{array}$$

Assim:

$(16)_{10} = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = (10000)_2$

$(31)_{10} = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (11111)_2$

Portanto, a pessoa deverá reservar cinco quadrinhos para cada um dos números entre 15 e 32.

c) De maneira análoga ao que fizemos anteriormente, para os números do intervalo entre 31 e 64, vamos converter os números 32 e 63 para a base 2.

Realizando sucessivas divisões por 2, temos:

$$\begin{array}{r|l} 32 & 2 \\ 0 & 16 \quad 2 \\ & 0 \quad 8 \quad 2 \\ & \quad 0 \quad 4 \quad 2 \\ & \quad\quad 0 \quad 2 \quad 2 \\ & \quad\quad\quad 0 \quad 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 63 & 2 \\ 1 & 31 \quad 2 \\ & 1 \quad 15 \quad 2 \\ & \quad 1 \quad 7 \quad 2 \\ & \quad\quad 1 \quad 3 \quad 2 \\ & \quad\quad\quad 1 \quad 1 \end{array}$$

Assim:

$(32)_{10} = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = (10000)_2$

$(63)_{10} = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (111111)_2$

Portanto, a pessoa deverá reservar seis quadrinhos para cada um dos números entre 31 e 64.

R2 **É possível perceber um padrão entre a quantidade de dígitos de um número na base 2 e sua escrita na base 10. Que padrão é esse? Quantos dígitos tem o número 250 na base binária?**

Resolução

Podemos relacionar a quantidade de dígitos de um número escrito na base 2 com a potência de 2 mais próxima do número. Escrevendo as potências de 2 na base binária, é possível verificar que cada número tem um dígito a mais na base binária.

$(2)_{10} = (2^1)_{10} = 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = (10)_2$

$(4)_{10} = (2^2)_{10} = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = (100)_2$

$(8)_{10} = (2^3)_{10} = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = (1000)_2$

$(16)_{10} = (2^4)_{10} = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = (10000)_2$

$(32)_{10} = (2^5)_{10} = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = (100000)_2$

Logo, para saber quantos dígitos a representação binária de um número apresenta, podemos verificar entre quais potências de base 2 ele se encontra. A quantidade de dígitos desse número corresponderá ao expoente da potência de base 2 imediatamente superior ao número.

Assim, para saber quantos dígitos tem o número 250 na base binária, devemos perceber que:

$$128 < 250 < 256$$

$$2^7 < 250 < 2^8$$

Logo, a representação binária de 250 tem exatamente oito dígitos.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 **Escreva na base binária os números na base decimal correspondentes às indicações de cada item.** Respostas pessoais.

a) Sua idade.

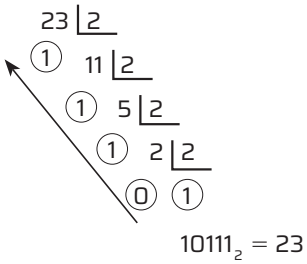
b) O número de estudantes de sua sala de aula.

c) O ano em que você nasceu.

2 **Indique no caderno a alternativa correta.**

(CP2-RJ) O sistema binário ou de base 2 é um sistema de numeração posicional em que todas as quantidades se representam com base em dois algarismos, zero e um (0 e 1).

Para converter um número da base decimal para a base binária, podemos utilizar o algoritmo ilustrado na figura a seguir:



$10111_2 = 23$

Fonte: https://www.google.com.br. Adaptado. Acesso em: 1º out. 2016.

Nesse contexto, o número 99 convertido para o sistema de base binária será representado por: Alternativa **a**.

a) 1100011

b) 1100100

c) 1100010

d) 1011001

3 **Indique no caderno a alternativa correta.**

(Cefet-RJ) Uma mensagem contendo uma representação binária de um dado em *byte* (8 bits) veio com o dado 11001000. Esse dado tem sua representação no sistema decimal igual ao valor: Alternativa **d**.

a) 100.

b) 128.

c) 192.

d) 200.

4 **Registre no caderno a alternativa correta.**

(PUC-MG) Em um código binário, utilizam-se dois símbolos: o algarismo 0 (zero) e o algarismo 1 (um). Considerando-se esses símbolos como letras, são formadas palavras. Assim, por exemplo, as palavras 0, 10 e 111 têm, respectivamente, uma, duas e três letras. O número máximo de palavras, com até seis letras, que podem ser formadas com esse código, é: Alternativa **d**.

a) 42

b) 62

c) 86

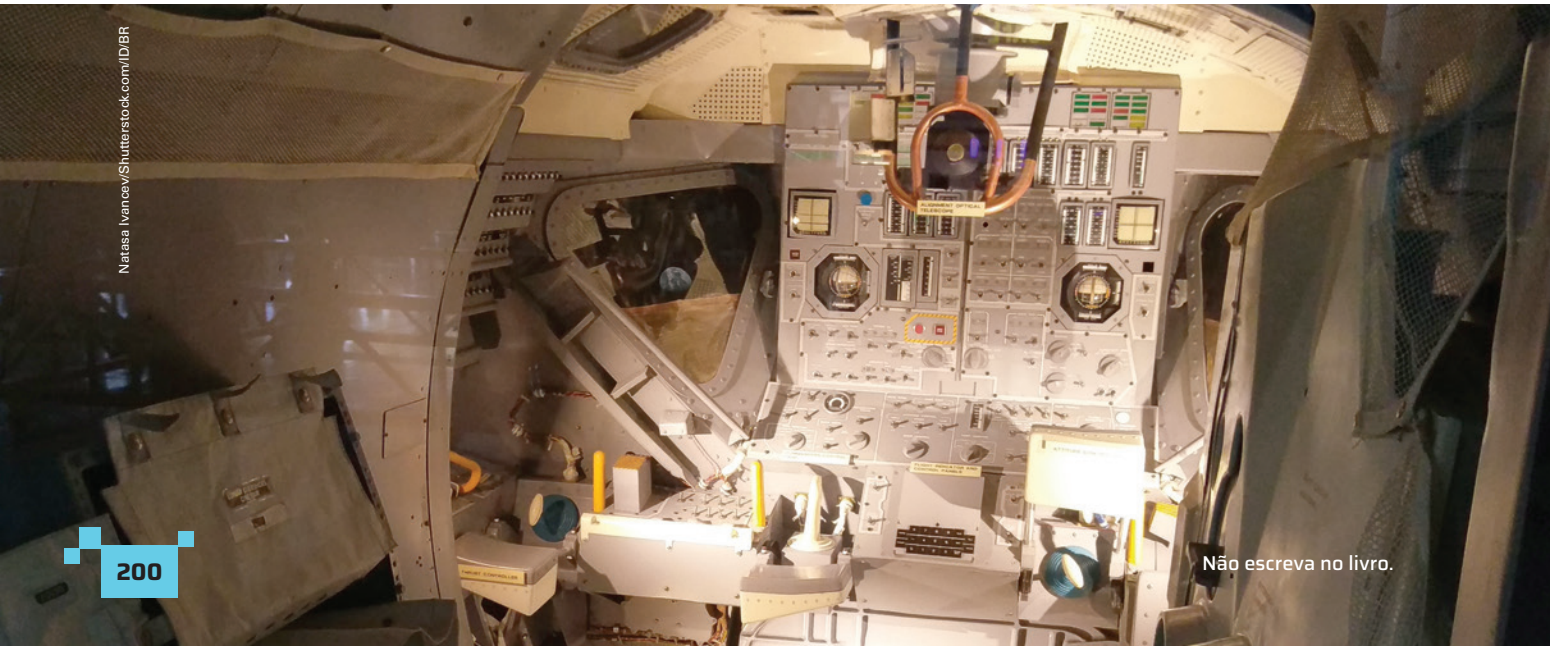
d) 126

O trabalho com os textos abordados neste tópico contribui para o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT103** e **EM13MAT314**, na medida em que os estudantes interpretam unidades de medidas de armazenamento, adotadas pelo Sistema Internacional (SI), mobiliza conhecimentos e registra a solução usando a linguagem matemática de maneira adequada. Além disso, favorece a aquisição das competências gerais **1** e **4**, ao valorizar e usar conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo digital, e usar a linguagem digital.

ARMAZENAMENTO DE DADOS

Agora, vamos entender como uma máquina armazena dados transformados em sinais de zeros e uns. A programação e a complexidade dos algoritmos que uma máquina é capaz de processar dependem de sua capacidade de armazenamento. Vamos entender isso melhor com uma comparação.

O computador instalado na espaçonave Apollo 11, que levou os primeiros astronautas estadunidenses à Lua, em 1969, tinha capacidade de armazenar 4 *megabytes* em sua memória RAM e 72 *kilobytes* em sua memória ROM. Um parâmetro para avaliar se essa capacidade era grande ou pequena: hoje, há *smartphones* com memória ROM de até 512 *gigabytes*.



Natasa Ivancev/Shutterstock.com/ID/BR

Interior do módulo de comando da espaçonave Apollo 11, localizada no Centro Espacial John F. Kennedy, Flórida, Estados Unidos. Foto de 2018.

Não escreva no livro.

Memória ROM × Memória RAM

Existem basicamente dois tipos de memória nos aparelhos eletrônicos: a *Read-Only Memory* (ROM) e a *Random Access Memory* (RAM).

A memória ROM permite a leitura de informações básicas do computador e não se perde quando a máquina é desligada. Já a memória RAM é utilizada para processar aplicações depois que o computador está ligado, e suas informações são perdidas quando a máquina é desligada.

Ao adquirir um equipamento eletrônico como computador, aparelho celular ou *tablet*, é muito importante saber distinguir a memória que será usada pelo aparelho para executar os comandos de seu sistema operacional (ROM) daquela memória que será utilizada para acessar os conteúdos nele armazenados (RAM).

Vimos que o computador trabalha com o sistema de numeração binário. Cada dígito do sistema de numeração binário corresponde a 1 *bit* (1 b), que é a menor unidade de medida de informática.

Cada conjunto de 8 *bits* corresponde a 1 *byte* (1 B). Uma das explicações para esse agrupamento ser de 8 *bits* é o fato de que, como um *bit* representa dois valores (1 ou 0) e um *byte* representa 8 *bits*, ao fazermos 2^8, obtemos 256 combinações. Essa quantidade é suficiente para representar todas as letras (maiúsculas e minúsculas), algarismos, sinais de pontuação, acentos e os demais símbolos que utilizamos para nos comunicar com a máquina.

Por exemplo, o número 200 é representado por 11001000 no sistema binário: são necessários 8 *bits*, ou 1 *byte*, para armazená-lo.

O *byte* é uma unidade pequena quando estamos tratando de grandes quantidades de informações. Imagine, por exemplo, como seria representar em *byte* a quantidade de informações presentes em uma fotografia digital, em um arquivo de áudio ou até mesmo em um vídeo. Por esse motivo, os *bytes* podem ser agrupados da seguinte maneira:

$$2^{10}\ bytes = 1024\ bytes = 1\ kilobyte\ (KB)$$

Os *kilobytes* também podem ser agrupados de maneira análoga: a cada 1024 *kilobytes*, temos 1 *megabyte* (MB).



Mauro Rodrigues/ Shutterstock.com/ID/BR

Vasylchenko/ Shutterstock.com/ID/BR

Ihor Berkyta/ Shutterstock.com/ID/BR

Imagens sem proporção de tamanho entre si.

Os disquetes (foto à esquerda) tinham capacidade de armazenamento de 1,44 MB. Os discos ópticos (foto do meio) têm diferentes capacidades de armazenamento: os CDs conseguem armazenar cerca de 700 MB, os DVDs conseguem armazenar até 9 GB, e os discos *blu-ray*, até 50 GB. Os discos rígidos (foto acima, à direita) também apresentam diversas capacidades de armazenamento, alguns com mais de 14 TB.

Evolução dos dispositivos de armazenamento

O objeto digital acrescenta conhecimentos sobre a evolução dos dispositivos de armazenamento, explorando a história e a capacidade de tecnologias como cartões perfurados, discos rígidos e armazenamento em nuvem.

De acordo com o Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia (Inmetro), os prefixos do Sistema Internacional de Medidas (SI) representam exclusivamente potências de base 10 e não devem ser utilizados para expressar potências de base 2. Ou seja, na teoria, 1 kB representa 1000 *bytes*, e não 1024 *bytes*.

Não escreva no livro.

Se considerar oportuno, retome com os estudantes as propriedades da potenciação, especialmente a que faz referência a potências de potência. Você pode utilizar, por exemplo, a seguinte situação: Sabendo que 1 MB corresponde a 10^3 KB e que 1 KB corresponde a 10^3 B, expressando o valor de 1 MB em B, temos:

$$1\ \text{MB} = 10^3\ \text{KB} = (10^3)^3\ \text{B} = 10^9\ \text{B}$$

Pode-se solicitar aos estudantes que comparem a diferença entre a capacidade de armazenamento real de um dispositivo eletrônico (na base binária) e aquela indicada na embalagem do produto para fins comerciais (na base decimal). Por exemplo, um *pen-drive* cuja capacidade é 1 GB apresenta uma capacidade real de armazenamento de 1 GiB.

$$1\ \text{GB} = 10^9\ \text{B} = 1\,000\,000\,000\ \text{B}$$
$$1\ \text{GiB} = 2^{30}\ \text{B} = 1\,073\,741\,824\ \text{B}$$

Ou seja, uma diferença de 73 741 824 B, o que corresponde a 7,37%.

A IEC (International Electrotechnical Commission, em inglês, ou Comissão Eletrotécnica Internacional) adotou prefixos correspondentes às potências binárias, como indicados no quadro a seguir.

Base decimal			Base binária		
kilobyte	KB	10^3	*kibibyte*	KiB	2^{10}
megabyte	MB	10^6	*mebibyte*	MiB	2^{20}
gigabyte	GB	10^9	*gibibyte*	GiB	2^{30}
terabyte	TB	10^{12}	*tebibyte*	TiB	2^{40}
petabyte	PB	10^{15}	*pebibyte*	PiB	2^{50}
exabyte	EB	10^{18}	*exbibyte*	EiB	2^{60}

Assim, por exemplo, 1 KiB = 2^{10} B = 1024 B, em que B designa um *byte*.

Apesar de o padrão IEC usar nomenclaturas específicas para diferenciar as unidades de base 2 das unidades de base 10, as de base binária raramente são usadas, pois as nomenclaturas da base decimal são mais populares.

Atualmente, a forma mais comum de armazenar os arquivos digitais é chamada de *cloud storage* ou "armazenamento na nuvem".



Blackboard/Shutterstock.com/ID/BR

Taxa de transferência

É importante diferenciar a quantidade de informação armazenada por um dispositivo eletrônico da taxa de transferência de informações. Enquanto a primeira se refere ao valor de *bytes* que um dispositivo pode armazenar, a segunda se refere à quantidade de dados que podem ser transferidos por unidade de tempo.

Por exemplo, ao contratar um plano de internet, os pacotes de dados são expressos na forma de *megabits* por segundo (Mbps). Assim, em um plano que oferece 150 Mbps, a cada segundo serão transferidos para o dispositivo 150 *megabits* (quantidade de dados transferida).

As atividades desta seção e as da seção *Problemas e exercícios propostos* utilizam os prefixos do SI, em vez de usar os prefixos definidos pela IEC, devido ao fato de, no cotidiano, essa ser a prática mais comum. Os cálculos, porém, devem ser feitos com os prefixos definidos pela IEC, ou seja, considerando-se a base binária, e não a decimal.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R3 **O Apollo Guidance Computer (AGC) era o computador da espaçonave Apollo 11 e tinha 72 KB de memória total. Um *smartphone* moderno pode ter até 1 TB dessa mesma memória. Compare a capacidade de armazenamento desses dois equipamentos eletrônicos.**

Resolução

Para comparar as capacidades desses dois dispositivos, é preciso que elas estejam na mesma unidade de medida. Vamos converter tanto a capacidade do AGC como a do *smartphone* para *bytes*.

- AGC: 72 KB = $72 \cdot 2^{10}$ *bytes*
- *Smartphone*: 1 TB = $1 \cdot 2^{40}$ *bytes*

Comparando os valores obtidos, percebemos que a memória do *smartphone* é muito superior à do AGC. Agora, vamos determinar em quantas vezes ela é superior.

$$\frac{\textit{smartphone}}{\text{AGC}} = \frac{1 \cdot 2^{40}}{72 \cdot 2^{10}} \approx 0{,}014 \cdot 2^{30} =$$

$$= 0{,}014 \cdot 1\,073\,741\,824 = 15\,032\,385{,}536$$

Portanto, a capacidade de armazenamento do *smartphone* é mais de 15 milhões de vezes superior à do AGC.

R4 **O arquivo de certa foto digital em alta resolução tem 4,92 MB. Com base nessa informação, faça o que se pede em cada item.**

a) Quantas fotos como essa podem ser armazenadas em um *pen-drive* cuja capacidade é 2 GB?

b) Por meio de um aplicativo que comprime o tamanho de arquivos, uma foto como a mencionada no item anterior passa a ocupar 1,86 MB. Usando esse aplicativo, quantas fotos poderiam ser armazenadas no mesmo *pen-drive*?

Não escreva no livro.

Resolução

a) Primeiro, vamos converter o tamanho da foto e a capacidade do *pen-drive* para *bytes* e, então, comparar essas medidas.

- Foto: $4,92 \text{ MB} = 4,92 \cdot 2^{20}$ *bytes*
- *Pen-drive*: $2 \text{ GB} = 2 \cdot 2^{30}$ *bytes*

Comparando a capacidade do *pen-drive* com o tamanho do arquivo da foto, temos:

$$\frac{\textit{pen-drive}}{\text{foto}} = \frac{2 \cdot 2^{30}}{4,92 \cdot 2^{20}} \simeq 0,407 \cdot 2^{10} =$$

$$= 0,407 \cdot 1024 = 416,768$$

Portanto, em um dispositivo como esse, podem ser armazenadas 416 fotos do tamanho citado.

b) O arquivo da foto comprimida tem 1,86 MB ou $1,86 \cdot 2^{20}$ *bytes*. Comparando com a capacidade do *pen-drive*, temos:

$$\frac{\textit{pen-drive}}{\text{foto}} = \frac{2 \cdot 2^{30}}{1,86 \cdot 2^{20}} \simeq 1,075 \cdot 2^{10} =$$

$$= 1,075 \cdot 1024 = 1100,8$$

Portanto, ao comprimir os arquivos, é possível armazenar 1100 dessas fotos.

Ao realizar a atividade **5**, os estudantes desenvolvem a habilidade **EM13MA103** e parte da habilidade **EM13MAT314**, ao resolver um problema que envolve unidades de medida de armazenamento e registrar a solução usando a linguagem matemática de maneira adequada. Se julgar oportuno, após a realização da atividade, sugira a eles que verifiquem as taxas de transmissão contratadas em suas residências, na escola ou em planos de acesso à internet banda larga, para uma comparação com as informações do texto, possibilitando uma ampliação da atividade.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

5 Leia o texto a seguir.

Entenda os *Megabits* por segundo (Mbps)

Você já ouviu falar em *Megabits* por segundo, também conhecido pela sigla Mbps? [...] É uma medida utilizada para medir a velocidade da conexão de internet.

Mas, antes de começarmos, para entender Mbps é preciso compreender um outro termo importante dentro desse mundo da conectividade, a largura de banda larga. [...]

A resposta depende do que você faz na internet. Se você usa a internet principalmente para navegar na *web*, ver *e-mails* e assistir a vídeos [...], uma velocidade de 10 Mbps deve ser suficiente. Se você joga *games on-line*, trabalha ou estuda com muitos arquivos grandes, pode querer uma velocidade mais rápida, como 100 Mbps ou mais.

Lembre-se de que a largura de banda também pode ser afetada por outros fatores, como o número de dispositivos conectados à sua rede e a qualidade do roteador que você está usando. Largura de banda é a quantidade total de dados que você pode baixar em um determinado período de tempo. É [medida] em Mbps e é importante encontrar a velocidade certa para suas necessidades *on-line*.

Mas o que são os *Megabits* e como eles funcionam por segundo?

Os *Megabits* são uma unidade de medida utilizada para quantificar a velocidade de transferência de dados. Eles são compostos por *bits*, sendo que oito *bits* formam 1 *byte*, a menor unidade de informação em computação. Portanto, quando falamos em *Megabits* por segundo (Mbps), estamos nos referindo à quantidade de dados que podem ser transferidos em um segundo. Vale lembrar que 1 *Megabyte* (MB) é igual a 8 *Megabits* (Mb). Portanto, uma conexão de internet de 8 Mbps permite, teoricamente, baixar 1 MB de dados por segundo.

Por exemplo, imagine que você está baixando um arquivo de 10 *Megabytes* (MB) em uma conexão de 10 *Megabits* por segundo (Mbps). Você pode pensar que esse arquivo será baixado em 1 segundo, mas isso não é correto. Estamos falando de *Megabits*, não *Megabytes*, então esse tempo será de cerca de 8 segundos, pois 1 *byte* é igual a 8 *bits*, e, portanto, 10 *Megabits* equivalem a 1,25 *Megabytes*.

[...]

Além disso, os Mbps também são importantes para determinar o desempenho dos jogos *on-line* e outros aplicativos que dependem de uma conexão rápida e estável. Quanto maior for a velocidade da sua conexão, melhor será a qualidade da imagem e do som transmitido.

Qual é a velocidade ideal de internet?

Isso vai depender do tipo de atividade que você estiver realizando na internet. Para navegar nas redes sociais, estudar ou ler notícias *on-line*, uma conexão com velocidade mínima de 10 Mbps é suficiente. Já para assistir [a] filmes, utilizar programas na nuvem ou jogar jogos *on-line*, uma velocidade entre 25 e 50 Mbps pode ser necessária.

É importante lembrar que a qualidade da conexão também pode ser afetada por fatores externos, como a distância do seu roteador para o dispositivo utilizado e interferências no sinal de internet.

Os tempos de *download* são calculados com base no tamanho do arquivo e na velocidade da conexão. [...]

Entidade Administradora da Conectividade de Escolas (Eace). Entenda os *Megabits* por segundo (Mbps). *Eace*, 26 out. 2023. Disponível em: https://eace.org.br/entenda-os-megabits-por-segundo-mbps/. Acesso em: 21 out. 2024.

a) Supondo que um consumidor tenha contratado um plano de 10 Mbps de internet, em quanto tempo ele consegue baixar um arquivo de 10 GB, considerando que ele seja baixado constantemente na velocidade máxima contratada?

8 192 s ou 2 h 16 min 32 s.

b) Se o plano contratado fosse de 10 MBps, em quanto tempo ele conseguiria baixar o mesmo arquivo nas mesmas condições? Lembre que 1 Mbps é o mesmo que 1 *megabit* por segundo e que 1 MBps é o mesmo que 1 *megabyte* por segundo.

1 024 s ou 17 min 4 s.

6 Os *smartphones* modernos conseguem gravar filmes em um formato de alta resolução conhecido como 4K. Nesses aparelhos, uma gravação de 1 minuto ocupa cerca de 375 MB. Suponha que seja realizada uma filmagem nessa resolução com duração de 1 hora. Determine, em GB, o tamanho do arquivo gerado pela gravação. 22,5 GB

7 Uma das taxas de transmissão mais rápidas do mundo é a utilizada pelos computadores da Agência Espacial Norte-Americana (Nasa). A rede ESnet (Energy Science Network), de uso privado pela agência, tem uma taxa de transferência de até 90 *gigabytes* por segundo. Nela, não é possível fazer *downloads* de arquivos como filmes, séries ou músicas, mas, se fosse possível transferir um filme de 4 horas de duração na resolução 4K citada na atividade **6**, quanto tempo demoraria para o arquivo completo do filme ser transferido? 1 s

OUTROS EXEMPLOS DE ALGORITMOS

No capítulo anterior, você estudou conceitos iniciais sobre algoritmos computacionais. Vimos que um algoritmo pode ser entendido como uma sequência ordenada de passos, etapas ou procedimentos que, quando executada (por uma máquina ou não), fornece um resultado. Assim, podemos escrever, por exemplo, um algoritmo para converter um número escrito no sistema binário em um número escrito no sistema decimal e vice-versa.

Saber como escrever um algoritmo é fundamental para estudar programação. Assim, nas próximas páginas, vamos estudar alguns algoritmos.

Código de barras

Se considerar oportuno, amplie a discussão sobre os códigos de barras em parceria com o professor de História ou de Sociologia. Uma pesquisa sobre os tipos de código de barras e as implicações socioeconômicas envolvidas na padronização desses códigos pode ser proposta aos estudantes, a fim de que eles compreendam a necessidade dessa uniformização por diferentes países/regiões.

Os códigos de barras são utilizados como uma identificação de produtos, documentos, serviços, entre outros itens. Esses códigos armazenam diversas informações sobre o item ao qual o código está atrelado. Por exemplo, quando o atendente de um mercado passa o código de barras de um produto pela luz infravermelha do leitor, informações como o preço e a descrição são automaticamente exibidas no monitor e utilizadas para gerar uma nota fiscal.



panuwat phimpha/Shutterstock.com/ID/BR

Os códigos de barras são utilizados para registrar a compra de um produto ou para obter mais dados sobre ele, como informações nutricionais.

A maneira como o leitor interpreta as barras de um código como esse é parecida com a forma como o computador interpreta os sinais elétricos. Quando o infravermelho incide sobre as barras que refletem a luz (brancas), o leitor interpreta o valor 0. Já as barras que absorvem a luz do escâner (pretas), representam o valor 1.

Existem diferentes padrões de códigos de barras. No mundo, o mais comum é o EAN-13 (sigla de *European Article Number*), que é composto de 13 dígitos, cada um deles representado por um conjunto de barras.

Nesse tipo de código de barras, as informações estão organizadas da seguinte maneira:

- Os três primeiros dígitos à esquerda representam o país de origem.
- Os cinco próximos dígitos indicam a empresa fabricante.
- Os quatro próximos dígitos à direita referem-se ao produto.
- O último dígito, da esquerda para a direita, é chamado de dígito verificador e tem a função de conferir se o código foi lido corretamente.

Não escreva no livro.



Arquivo/Shopify. Fotografia /ID/BR

Modelo de código de barras do tipo EAN-13.

Cada conjunto de barras representa um dígito do código de barras no sistema binário. Perceba que a imagem a seguir mostra a representação simplificada desse código de barras.

7	8	9	9	9	9	9	9	1	2	3	4	9
0111	1000	1001	1001	1001	1001	1001	1001	0001	0010	0011	0100	1001

IDBR

Para determinar o dígito verificador que compõe um código de barras, é preciso seguir um passo a passo. Ou seja, há um algoritmo para executar essa tarefa.

Imagine, por exemplo, que você tenha de pagar um boleto bancário e que o último número, correspondente ao dígito verificador, tenha sido rasurado. Ao executar o passo a passo indicado a seguir, você consegue determinar esse dígito.

Considere que o boleto rasurado seja o mostrado na imagem a seguir. Ele é do tipo EAN-13.

destacar

BANCO + | 789100031550-

Local de Pagamento	**Vencimento**
PREFERENCIALMENTE NO BANCO MAIS	11/10/2024
Beneficiário	**Agência/Código Cadente**
INTERNETION	1304-2/0059175-7

ID/BR

- Inicialmente, devemos multiplicar cada um dos dígitos, exceto o dígito verificador, por 1 e por 3, alternadamente e em sequência, começando por 1.

Dígito	7	8	9	1	0	0	0	3	1	5	5	0
Fator	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3
Produto	7	24	9	3	0	0	0	9	1	15	5	0

- Adicionar os produtos: $7 + 24 + 9 + 3 + 0 + 0 + 0 + 9 + 1 + 15 + 5 + 0 = 73$.
- Dividir o resultado por 10: $73 : 10 = 7{,}3$.
- Arredondar o quociente para o inteiro imediatamente inferior: $7{,}3 \rightarrow 7$.
- Adicionar 1 ao inteiro obtido: $7 + 1 = 8$.
- Multiplicar o resultado por 10: $8 \cdot 10 = 80$.
- Finalmente, para encontrarmos o dígito verificador do boleto, devemos subtrair do resultado obtido na etapa anterior a soma obtida inicialmente, correspondente à adição dos produtos de cada um dos dígitos multiplicados por 1 e 3, alternadamente e em sequência: $80 - 73 = 7$.

Portanto, o dígito verificador do boleto é 7 e o código de barras completo seria: 7891000315507.

Observação: Na última etapa, caso a diferença obtida seja um múltiplo de 10, então o dígito verificador será igual a zero.

Perceba que o processo para determinar o dígito verificador de um código de barras consiste em um algoritmo, pois corresponde a uma sequência finita de passos, que, se executada corretamente, resulta no valor esperado.

PARA EXPLORAR

Artigo

Vargas, Maria Amélia. Código de barras completa 50 anos entra em novo ciclo de evolução. *Jornal do Comércio*, 11 set. 2023. Disponível em: https://www.jornaldocomercio.com/cadernos/jc-logistica/2023/09/1122270-codigo-de-barras-completa-50-anos-e-entra-em-novo-ciclo-de-evolucao.html. Acesso em: 21 out. 2024.

Nesse artigo, é possível conhecer a história dos códigos de barras, conhecer seus benefícios e entender seu lugar após o surgimento do QR Code.

Não escreva no livro.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R5 **Um produto foi armazenado de modo indevido e, com isso, um dos números do seu código de barras foi danificado, impedindo a leitura por escâner. Na figura ao lado, o dígito desconhecido está representado pela letra X.**



Sabendo que esse código de barras é do tipo EAN-13, e que o último dígito é o verificador, determine a numeração completa do código para que ele possa ser inserido manualmente.

Resolução

Sabemos que, para determinar o dígito verificador de um código de barras do tipo EAN-13, podemos utilizar um algoritmo e, também, que o dígito verificador depende dos demais dígitos do código de barras. Assim, vamos realizar o procedimento que usamos para determinar o código verificador, mas agora com o intuito de determinar o dígito rasurado, representado por X.

- Multiplicando cada um dos dígitos por 1 e 3, alternadamente, em sequência e começando por 1, temos:

Dígito	7	6	1	3	X	3	4	9	0	9	4	8
Fator	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3
Resultado	7	18	1	9	X	9	4	27	0	27	4	24

- Adicionamos os resultados obtidos.

$$7 + 18 + 1 + 9 + X + 9 + 4 + 27 + 0 + 27 + 4 + 24 = 130 + X$$

- Dividimos por 10.

$$\frac{130 + X}{10} = 13 + \frac{X}{10}$$

- Arredondamos o quociente obtido para o inteiro imediatamente inferior. Para executar essa etapa, é preciso analisar os possíveis valores de X. Sabemos que X pode ser 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9.

  Observe que para $X = 0$, que é o menor valor possível, temos:

$$13 + \frac{X}{10} = 13 + \frac{0}{10} = 13$$

  Para $X = 9$, que é o maior valor possível, temos:

$$13 + \frac{X}{10} = 13 + \frac{9}{10} = 13{,}9$$

  Nas duas situações, o arredondamento para o inteiro imediatamente inferior é 13.

- Agora, adicionamos 1 ao resultado.

$$13 + 1 = 14$$

- Multiplicamos por 10.

$$14 \cdot 10 = 140$$

- Subtraindo desse valor a soma obtida inicialmente, correspondente à adição dos produtos de cada um dos dígitos multiplicados por 1 e 3, alternadamente e em sequência, temos:

$$140 - (130 + X)$$

- Como o resultado dessa operação corresponde ao dígito verificador, que é 2, determinamos o valor de X da seguinte maneira:

$$140 - (130 + X) = 2$$

$$X = 8$$

Portanto, o código completo do produto é 761383490948-2.

Não escreva no livro.

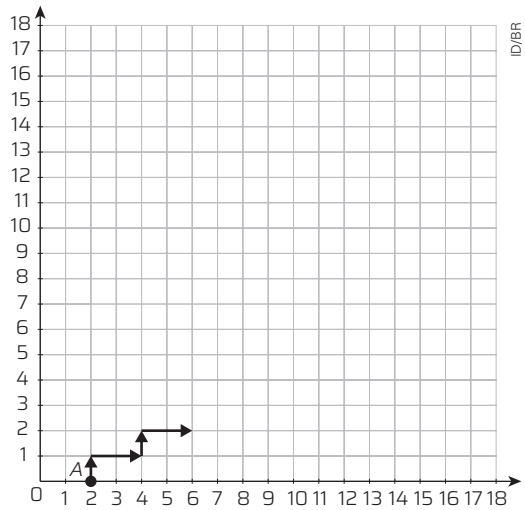
PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

A atividade **10** tem dois objetivos. O primeiro deles é ser um instrumento de avaliação da compreensão dos estudantes sobre o algoritmo que determina o código de barras de um produto. O segundo é promover o diálogo e a argumentação entre os estudantes favorecendo o desenvolvimento das competências gerais **4**, **5** e **9**.

8 Leia a atividade a seguir e indique a alternativa correta no caderno.

(Enem) O gráfico a seguir mostra o início da trajetória de um robô que parte do ponto $A(2; 0)$, movimentando-se para cima ou para a direita, com velocidade de uma unidade de comprimento por segundo no plano cartesiano.

O gráfico exemplifica uma trajetória desse robô durante 6 segundos.



ID/BR

Supondo que esse robô continue essa mesma trajetória, qual será sua coordenada após 18 segundos de caminhada, contando o tempo a partir do ponto A? Alternativa **a**.

a) (14; 6) **c)** (18; 0) **e)** (18; 2)

b) (6; 14) **d)** (0; 18)

9 Com base na atividade anterior, responda: É possível afirmar que a trajetória seguida pelo robô pode ser descrita por um algoritmo? Explique.

Sim. Resposta pessoal.

10 Forme dupla com um colega. Cada integrante deve escolher um produto que apresente um código de barras no formato EAN-13 e informar ao colega os dígitos que compõem o código, em ordem, omitindo o dígito verificador. Cada um deverá descobrir o dígito verificador do código escolhido pelo outro, conferir a resposta do colega e, caso esteja errada, a dupla deverá identificar em qual etapa da verificação ocorreu o erro. Resposta pessoal.

11 Alice inventou o próprio código de barras seguindo praticamente todas as regras dos códigos do tipo EAN-13. A diferença é que o código dela era composto de sete dígitos (incluindo o dígito verificador). Ela também modificou a regra de multiplicar por 1 e por 3, em sequência e começando por 1, para multiplicar cada um dos dígitos, com exceção do dígito verificador, por 1 e por 2, em sequência e começando por 1.

Considerando o sistema de códigos criado por Alice, determine:

a) o dígito verificador x para o código: 111111-x; 1

b) o dígito y do código 53y293-7, no qual 7 é o dígito verificador. 3

Na seção *Tecnologia*, vamos dar continuidade ao trabalho iniciado no capítulo anterior, aprofundando os conhecimentos que envolvem os comandos do Scratch. Se possível, permita que os estudantes explorem livremente o bloco de comandos "Movimento", anotando suas observações. Esse material será importante para a construção seguinte.

TECNOLOGIA

Esta seção contribui para o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT105** e **EM13MAT405**, na medida em que os estudantes usam transformações geométricas e a linguagem de programação para descrever algoritmos, além de mobilizar as competências gerais **2**, **5**, **7** e **9**, uma vez que resolvem problemas e criam soluções tecnológicas, usam tecnologias digitais, defendem suas ideias e exercitam a empatia e a cooperação.

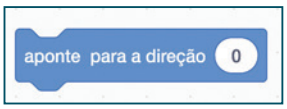
No capítulo anterior, utilizamos o Scratch para desenvolver um jogo de perguntas e respostas (*quiz*). Agora, vamos aprofundar seus conhecimentos em relação a esse *software* e ver como é possível desenhar figuras geométricas planas utilizando essa ferramenta.

Antes de iniciar a programação, é importante saber como as personagens do Scratch se movimentam pela tela. Isso acontece mediante um sistema de coordenadas cartesianas: a posição de um elemento na tela é representada por um par ordenado do tipo (x, y), no qual $-270 < x < 270$ e $-220 < y < 220$.

A seguir, observe alguns comandos que você utilizará para mover uma personagem pela tela.

Comando	Descrição
Mover  Scratch. Fac-símile: ID/BR	Desloca a personagem para a frente e para trás, de acordo com o número de passos indicado. Lembre-se de que o deslocamento depende da posição em que a personagem se encontra.

Não escreva no livro.

Comando	Descrição
Girar no sentido horário 	Rotaciona a personagem no sentido horário, considerando o centro de rotação a posição na qual a personagem se encontra e com o ângulo de rotação de acordo com o indicado.
Girar no sentido anti-horário 	Rotaciona a personagem no sentido anti-horário, considerando o centro de rotação a posição na qual a personagem se encontra e com o ângulo de rotação de acordo com o indicado.
Ir para o ponto indicado 	Transporta a personagem para o ponto correspondente ao par ordenado indicado.
Apontar para uma direção 	Define a direção em que a personagem deve se movimentar. Para isso, deve-se clicar no espaço em branco e escolher o ângulo desejado para a exibição da personagem no palco.

Fotos: Scratch. Fac-símile: ID/BR

Exemplo 1 – Movendo a personagem

Observe as programações a seguir, que utilizam os mesmos blocos de comando para movimentar a personagem pela tela.

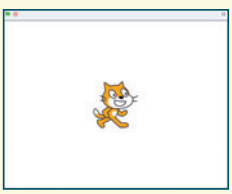
Situação 1

- Comandos



Fotos: Scratch. Fac-símile: ID/BR

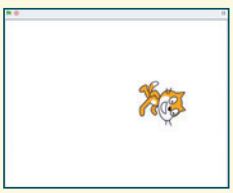
- Sequência realizada pela personagem



Tela inicial, antes de qualquer movimento ser executado pelo gato.



O gato depois de ter se movimentado 100 unidades.



O gato depois de ter girado 90° no sentido horário.

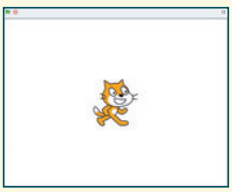
Situação 2

- Comandos

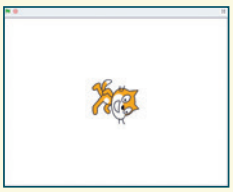


Fotos: Scratch. Fac-símile: ID/BR

- Sequência realizada pela personagem



Tela inicial, antes de qualquer movimento ser executado pelo gato.



O gato depois de ter girado 90° no sentido horário.



O gato depois de ter se movimentado 100 unidades.

Não escreva no livro.

Você vai visualizar na tela a execução do programa quando clicar no comando 

Fotos: Scratch. Fac-símile: ID/BR

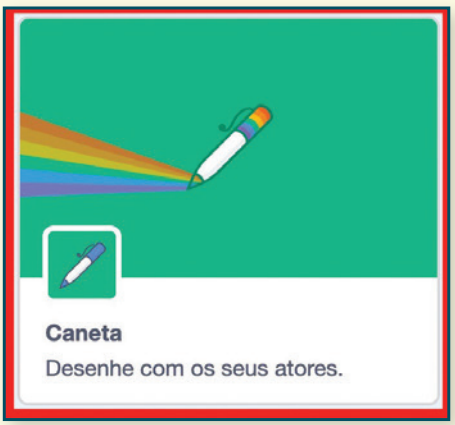
Um conceito elementar das linguagens de programação é que a ordem dos comandos influencia diretamente o resultado obtido. Observe que os comandos utilizados nas situações **1** e **2** são os mesmos, mas estão invertidos, e que a posição final da personagem é diferente em cada um dos casos.

Exemplo 2 – Desenhando um quadrado

No exemplo anterior, você deve ter percebido como a personagem se movimenta pelo palco e, também, que não é possível ver o rastro dessas movimentações. Entretanto, existem alguns comandos que, ao serem acionados, possibilitam visualizar a trajetória feita pela personagem.

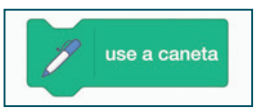
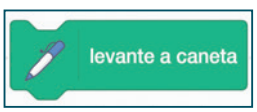
Na configuração padrão do Scratch, esse bloco não está habilitado. Acompanhe as etapas para habilitar essa funcionalidade e, utilizando-a junto com os blocos de comando de movimento, como podemos desenhar um quadrado.

1ª etapa: Vá até a parte inferior do bloco de comandos e clique na opção "Adicionar uma extensão"  . Esse ícone permite que você adicione extensões de comandos. Na tela que aparecer, clique na extensão "Caneta" para adicioná-la ao "Menu principal".



Scratch. Fac-símile: ID/BR

Os comandos dessa categoria permitem que os rastros das movimentações feitas pela personagem sejam vistos. A seguir, analise alguns comandos que utilizaremos nessa construção.

Comando	Descrição
Apagar 	Limpa todas as ações executadas no palco.
Usar a caneta 	Mostra o rastro deixado pela movimentação de uma personagem no palco.
Levantar a caneta 	Desabilita a função anterior, ou seja, quando esse comando for ativado, as movimentações da personagem deixarão de ser exibidas no palco.

Fotos: Scratch. Fac-símile: ID/BR

Vamos explorar um pouco os comandos do bloco “Caneta”.

Observe a sequência de comandos a seguir.



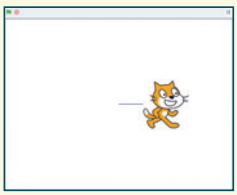
Depois de executar o programa, o gato realizará os seguintes movimentos no palco:



Tela inicial, antes de qualquer movimento ser executado pelo gato.



O gato depois de ter se movimentado 50 unidades usando a caneta.



O gato depois de ter se movimentado 50 unidades usando a caneta e 50 unidades com a caneta levantada.

Fotos: Scratch. Fac-símile: ID/BR

No bloco “Controle”, há o comando “Repita”, que repete as operações indicadas de acordo com a quantidade de vezes colocada no espaço em branco.

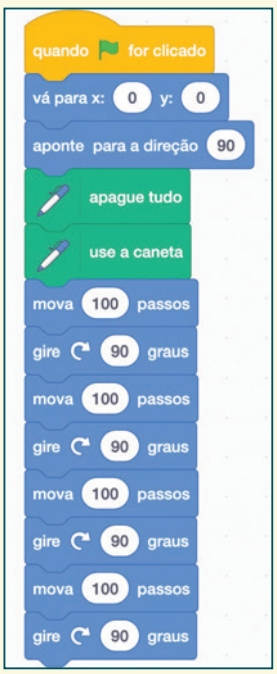
Observe que esse recurso pode ser utilizado para otimizar muitos processos. Em vez de utilizar uma mesma sequência de comandos sucessivamente, podemos inserir a sequência no comando “Repita” uma única vez.

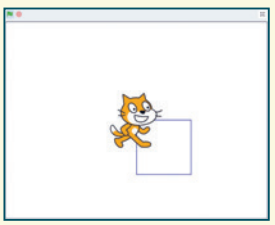
Outro comando que auxilia na construção de um programa é o “Espere” do bloco “Controle”. Como as ações são realizadas rapidamente, esse comando pode ser utilizado para que você consiga, por exemplo, perceber com mais calma os deslocamentos da personagem.

2ª etapa: Com os conhecimentos adquiridos até aqui, vamos construir um quadrado no Scratch. Os lados do quadrado serão construídos usando os rastros deixados pela personagem.

Antes de iniciar a combinação dos comandos, relembre a definição de um quadrado e registre no caderno as principais características dessa figura.

3ª etapa: Imagine como deveria ser a movimentação feita pela personagem para obter um quadrado. Utilize a sequência de passos apresentada e, ao clicar na bandeirinha e o programa executar o que foi programado, você verá no palco algo como mostram as imagens a seguir.





Fotos: Scratch. Fac-símile: ID/BR

ATIVIDADES

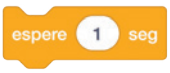
1 No caderno, registre o que faz cada comando apresentado na terceira etapa do **Exemplo 2**.

Consulte a resposta no Manual do Professor.

2 Paula construiu um programa para obter um quadrado usando o Scratch. Porém, diferentemente do **Exemplo 2**, ela utilizou comandos do bloco de comando “Controle”. Observe, a seguir, os comandos que Paula utilizou desse bloco e a programação completa feita por ela, e faça o que se pede.

Consulte a resposta no Manual do Professor.

Não escreva no livro.

Comando	Descrição
Repita 	Esse comando repete as operações indicadas de acordo com a quantidade de vezes especificada.
Espere 	Como as ações são realizadas rapidamente, esse comando pode ser utilizado para que você consiga, por exemplo, perceber com mais calma os deslocamentos da personagem.

Fotos: Scratch. Fac-símile: ID/BR

Scratch. Fac-símile: ID/BR



a) Implemente o código usado por Paula e verifique se o resultado é o mesmo que o obtido na terceira etapa desta seção.

b) O que acontece se o comando "Espere" for retirado do programa feito por Paula?

c) Retome a sequência do programa elaborado por Paula. Existe a possibilidade de ela inverter algum comando e obter o mesmo resultado? Comente.

d) Quais semelhanças e quais diferenças você identifica entre o algoritmo apresentado na terceira etapa do **Exemplo 2** e o elaborado por Paula? Algum deles é mais eficaz que o outro? Justifique sua resposta.

Consulte a resposta no Manual do Professor.

3 **Existe mais de uma possibilidade de combinar os comandos e obter um quadrado no Scratch. Investigue e elabore uma rotina diferente das que foram apresentadas. Depois, troque sua rotina de programação com um colega. Você executará os comandos indicados por ele, e ele executará os seus. Conversem sobre como pensaram para chegar a essa organização de comandos e como vocês podem aprimorar seus comandos considerando a programação feita pelo colega.**

FLUXOGRAMAS

Os textos abordados neste tópico contribuem para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT315**, ao possibilitar que os estudantes investiguem algoritmos como solução de um problema proposto.

Como você descreveria um algoritmo para instalar um aplicativo em um *smartphone*, em um *tablet* ou um computador? Muita gente responderia: é só baixar o aplicativo e instalar!

Se você der uma instrução como essa a um colega, é provável que ele compreenda e consiga realizar a tarefa. Mas e se você desse essa mesma instrução a uma pessoa que não está familiarizada com tecnologia? Agora, imagine que você tivesse de dar essa instrução a uma máquina. Você acha que ela conseguiria interpretá-la?

Sabemos que as máquinas executam exatamente aquilo que lhes é prescrito. Por isso, para obter uma resposta adequada, precisamos detalhar o passo a passo do que queremos. Para detalhar o procedimento para baixar e instalar um aplicativo em um *smartphone* pode ser feita uma lista como a indicada a seguir.

1. Ligar o *smartphone*.
2. Localizar o ícone da loja de aplicativos do celular e clicar nesse ícone.
3. Digitar o nome do aplicativo no local indicado e apertar "buscar".
4. Selecionar o aplicativo desejado.
5. Clicar em "instalar".
6. Autorizar a instalação.

Não escreva no livro.

Também é possível detalhar o procedimento para baixar e instalar um aplicativo em um *smartphone* utilizando uma representação gráfica que você possivelmente já conhece: um fluxograma.

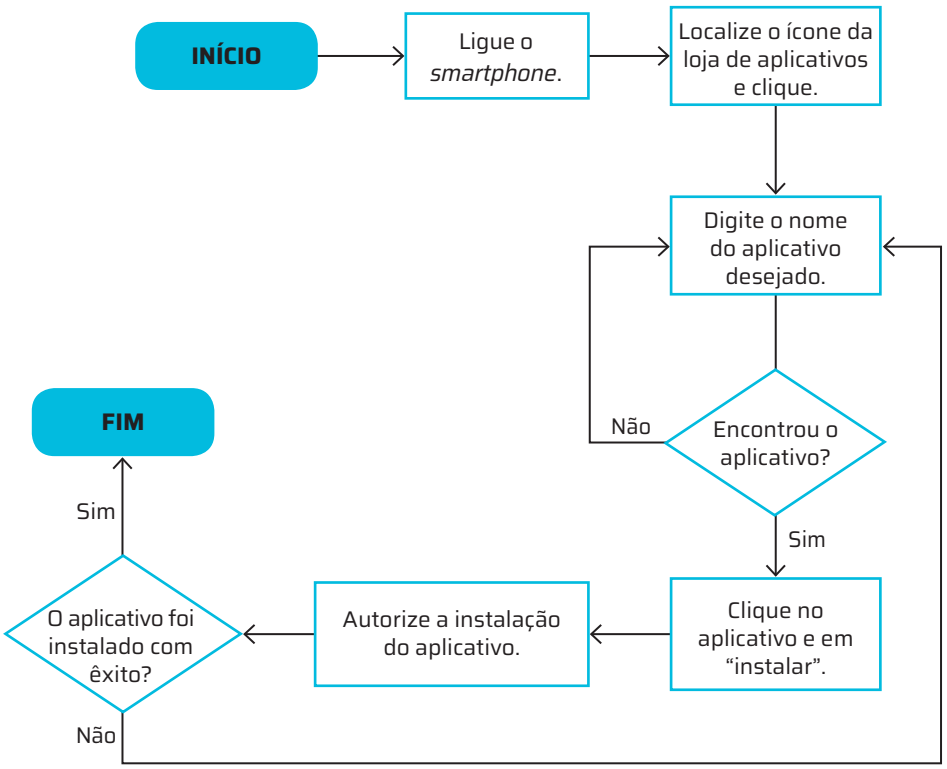
Fluxograma é um diagrama utilizado para representar graficamente a sequência de etapas necessárias para que uma atividade seja realizada, isto é, as etapas de um algoritmo.

Utilizar um fluxograma para representar um algoritmo pode facilitar a compreensão das atividades envolvidas, pois evidencia como esse procedimento está organizado em etapas menores. Essa organização facilita a compreensão tanto de algoritmos complexos quanto de algoritmos mais simples.

Sugerimos que você amplie o trabalho com fluxogramas em parceria com professores da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, com o intuito de explorar a competência específica **3** dessa área e a competência específica **1** da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. Essa pode ser uma oportunidade para que os estudantes percebam que os fluxogramas podem ser aplicados em diferentes situações.

Elementos de um fluxograma

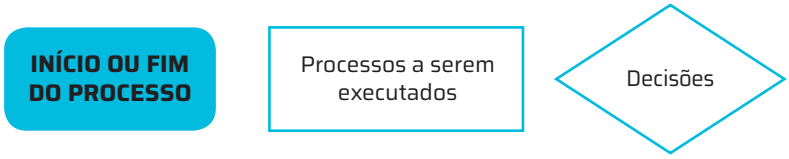
O diagrama a seguir é um exemplo de fluxograma. Observe:



Você conseguiu entender o que esse fluxograma descreve? Mesmo sem haver uma explicação sobre o que cada um dos símbolos utilizados representa, é possível perceber que esse fluxograma constitui um algoritmo para instalar um aplicativo em um celular. Note, no exemplo, que o ordenamento e a disposição dos elementos deve ser organizada para que a mensagem seja compreendida.

Agora, vamos analisar algumas características desse fluxograma.

- Ele tem um início e um fim, que é representado por uma figura que lembra um retângulo, mas de cantos arredondados.
- As setas indicam a direção de leitura e, consequentemente, a ordem dos passos a serem realizados.
- Nos retângulos, estão indicados processos a serem executados.
- Nos losangos, estão descritas situações que exigem uma tomada de decisão.



Além desses, existem ainda vários outros símbolos que podem ser usados em um fluxograma.

Não escreva no livro.

TECNOLOGIA

Em algumas situações, construir fluxogramas manualmente pode ser um pouco trabalhoso. Nesses casos, podemos utilizar *softwares* de desenho gráfico para facilitar essa construção, como o Draw.io. Esse *software* pode ser utilizado *on-line* no navegador ou ser baixado gratuitamente em www.drawio.com/ (acesso em: 22 out. 2024).

Vamos utilizar o Draw.io para construir um fluxograma que represente as etapas que um atendente deve seguir ao receber a ligação de um cliente. Observe as etapas básicas do atendimento:

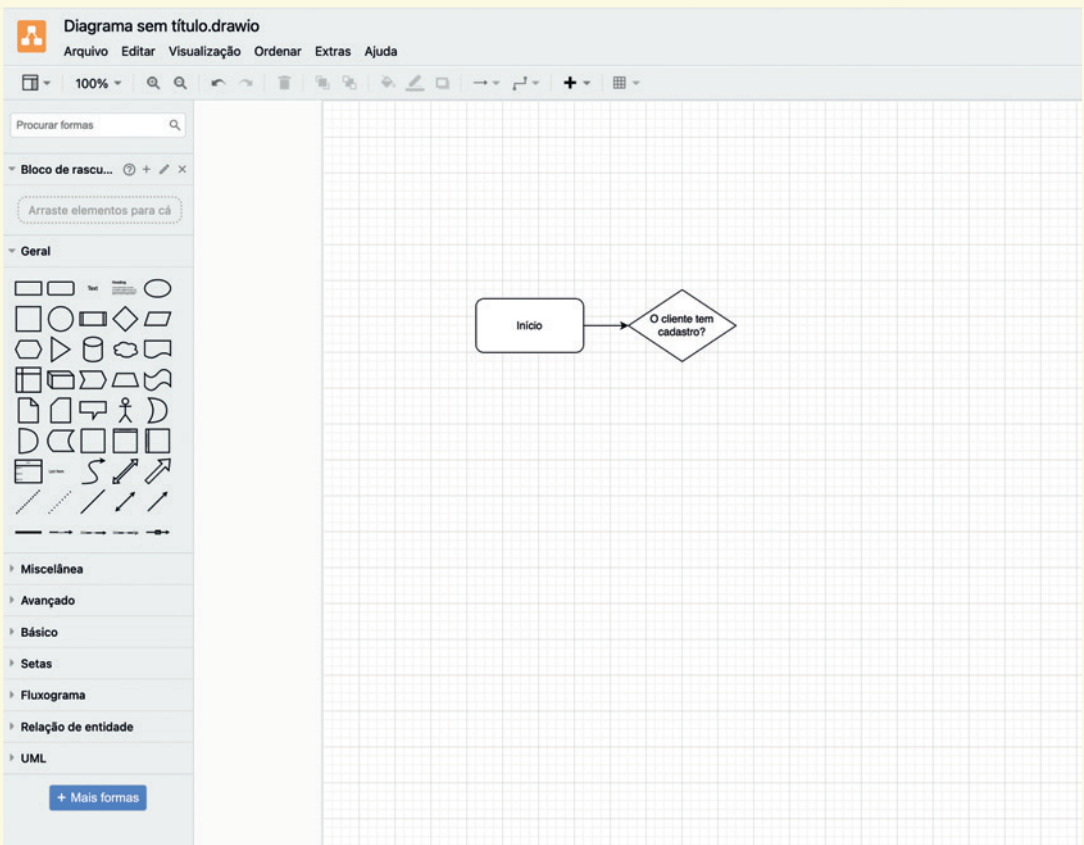
1. Verificar se o cliente tem cadastro.
2. Receber o pedido.
3. Verificar se o produto está disponível.
4. Caso o produto esteja em falta, oferecer um produto alternativo.
5. Receber o pagamento.
6. Processar o pedido.

Para construir o fluxograma no Draw.io, podemos realizar as etapas a seguir.

1ª etapa: Ao abrir o programa, clicamos em "Geral", que é o menu de formas contendo as figuras que vamos utilizar nesse fluxograma.

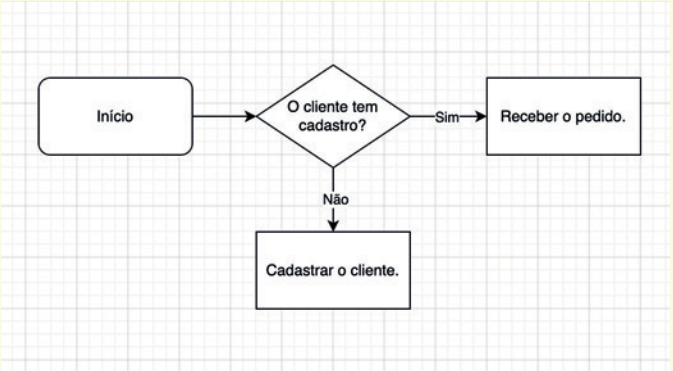
2ª etapa: Clicamos na figura de um retângulo de pontas arredondadas. O retângulo será inserido automaticamente na janela de visualização. Com o retângulo selecionado, digitamos "Início".

3ª etapa: Inserimos um losango para representar a tomada de decisão do cadastro do cliente. Dentro do losango inserimos o texto "O cliente tem cadastro?". Para conectar essas formas, posicionamos o *mouse* sobre as linhas de uma das formas e arrastamos até a posição desejada em relação à outra. A direção da seta indica a ordem das etapas.



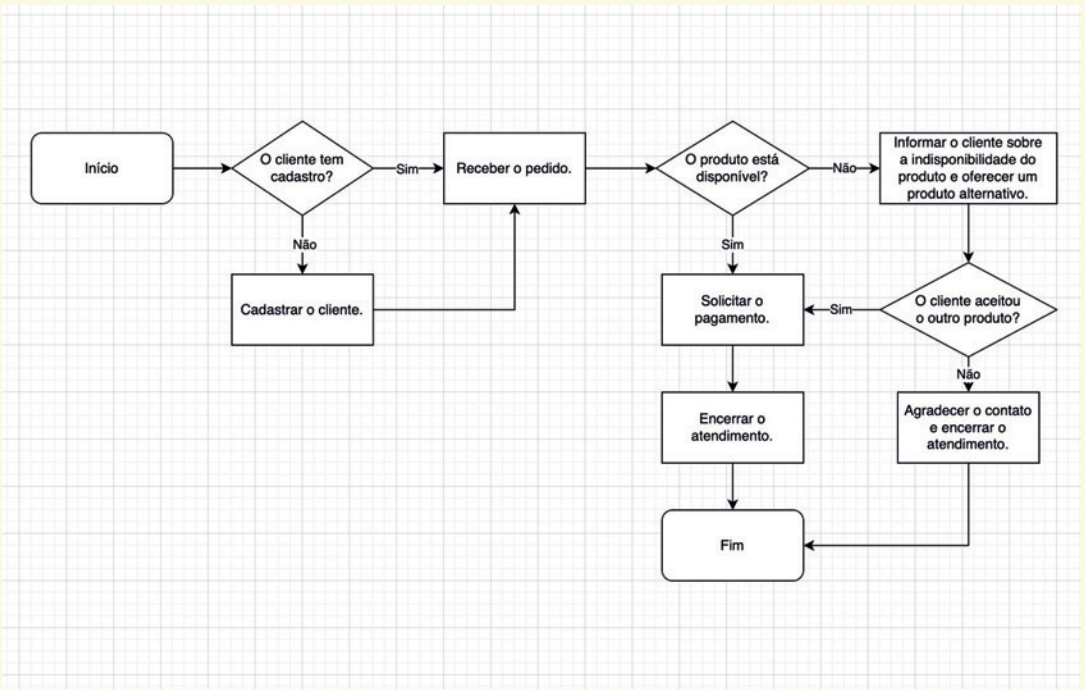
Draw.io. Fac-símile: ID/BR

4ª etapa: Para inserir as possíveis decisões e os processos a serem executados, clicamos na figura de um retângulo e ligamos os retângulos ao losango. Para colocar os textos "Sim" e "Não" nessas ligações, damos um duplo clique com o *mouse* nas setas de ligação para abrir as caixas de texto.



Draw.io. Fac-símile: ID/BR

5ª etapa: De maneira semelhante à realizada na 2ª e na 3ª etapas, inserimos os demais elementos do fluxograma.



Draw.io. Fac-símile: ID/BR

ATIVIDADES

1 **De acordo com o exemplo apresentado, responda às questões a seguir.**

a) Quais são as decisões a serem tomadas pelo vendedor? "O cliente tem cadastro?"; "O produto está disponível?" e "O cliente aceitou o outro produto?".

b) O que o vendedor deve fazer caso o produto pedido pelo cliente não esteja disponível? Informar o cliente sobre a indisponibilidade do produto e oferecer um produto alternativo.

2 **Utilizando o Draw.io, reproduza um fluxograma para representar as etapas necessárias para garantir sua segurança ao perder um celular.** Consulte a resposta no Manual do Professor.

1. Delete os dados contidos no celular por acesso remoto.
2. Faça o bloqueio do aparelho utilizando a Identificação Internacional de Equipamento Móvel (IMEI.)
3. Registre um boletim de ocorrência (B.O.).
4. Avise o banco e demais instituições financeiras.
5. Troque as senhas de aplicativos.

3 **No Draw.io, construa um fluxograma para representar alguma ação que você realiza durante o dia, como ir à escola, algo que faz nas horas livres, ou em um trabalho, entre outras atividades. Esse fluxograma deve ter início e fim, tomadas de decisão e processos a serem executados.** Resposta pessoal.

Na atividade **3**, incentive os estudantes a escolher uma ação cotidiana simples, como ir à escola ou realizar uma tarefa no trabalho. Isso os ajudará a contextualizar o uso dos fluxogramas no dia a dia. Oriente-os a planejar o processo, identificando as etapas principais e onde houver tomadas de decisão. Por exemplo, "pegar o ônibus" pode ter uma decisão: "O ônibus chegou no horário?" com respostas "Sim" ou "Não", levando a diferentes ações. Ao final, peça que revisem os fluxogramas e os compartilhem com a turma, explicando o raciocínio por trás da sequência de processos e decisões, promovendo a reflexão sobre a eficiência do planejamento.

Não escreva no livro.

Linguagem nativa, fluxograma e pseudocódigo

Imagine que você queira comer um pão com manteiga. Para executar essa tarefa, você realiza alguns passos, certo?

Veja uma possibilidade de sequência de ações:

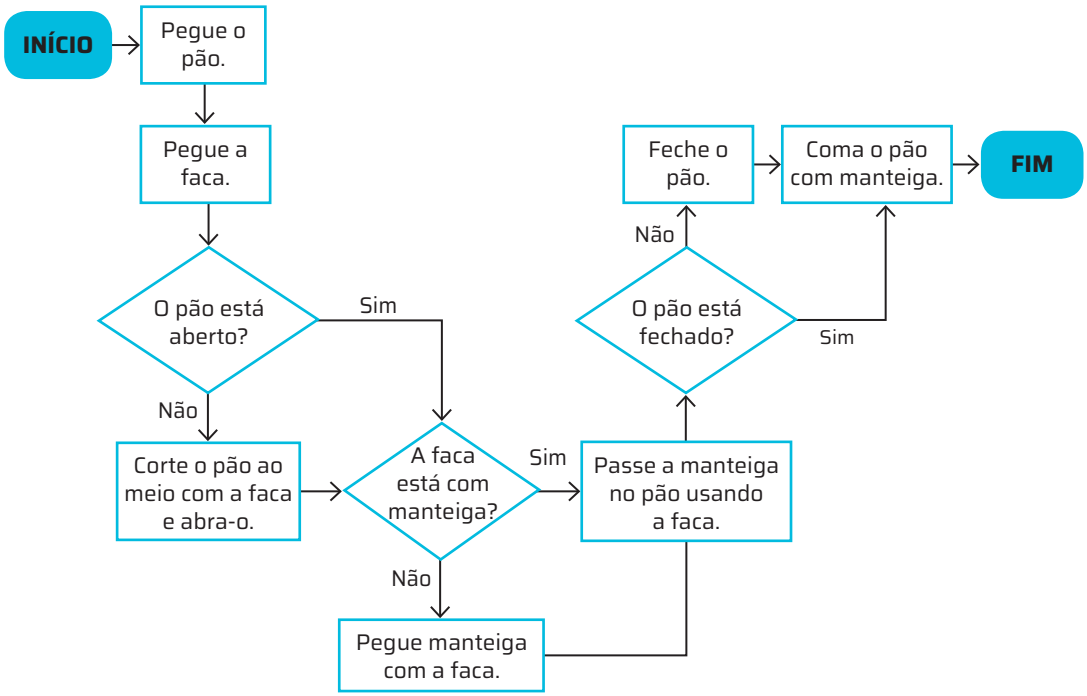
1. Pegar o pão.
2. Pegar a faca.
3. Cortar o pão de maneira a abri-lo.
4. Passar a faca na manteiga.
5. Passar a manteiga no pão usando a faca.
6. Fechar o pão.
7. Comer o pão.



ALFImedia/Shutterstock.com/ID/BR

Perceba que essa sequência de passos corresponde a um algoritmo, pois descreve etapa por etapa como resolver o problema de comer pão com manteiga. Qualquer pessoa que saiba ler português pode compreendê-la e executá-la. Contudo, como vimos anteriormente, para uma máquina como um computador, isso não seria possível, pois essa sequência está descrita na **linguagem nativa** do usuário.

Outra possibilidade para representar o mesmo algoritmo é elaborar um **fluxograma**.



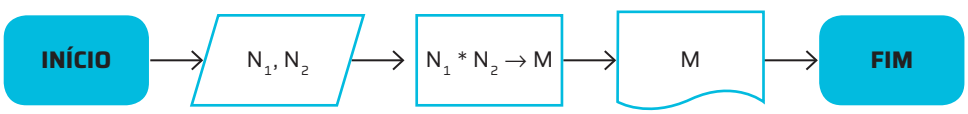
Perceba que, ainda assim, uma máquina não conseguiria interpretar as instruções.

Para escrever um algoritmo que seja executável por uma máquina, é preciso escrevê-lo utilizando uma **linguagem de programação**.

Agora, considere um algoritmo para multiplicar dois números quaisquer. Na linguagem nativa, poderíamos escrever esse algoritmo da seguinte maneira:

1. Considere o primeiro fator.
2. Considere o segundo fator.
3. Multiplique os dois números.
4. Apresente o produto.

Utilizando um fluxograma, teríamos:



Nesse fluxograma, o paralelogramo indica a entrada de dados. No caso, N_1 e N_2 representam os fatores da multiplicação. O retângulo mostra que os fatores devem ser multiplicados e que o produto é chamado de M. O símbolo com a base ondulada é utilizado para indicar uma saída de dados. No caso, ele está apresentando o resultado M da multiplicação.

Não escreva no livro.

Apesar de a máquina não compreender a lista com o passo a passo nem o fluxograma, eles podem ser utilizados para facilitar a escrita em uma linguagem de programação. É como se essas três representações estivessem em idiomas diferentes e fosse possível traduzi-las de um idioma para o outro.

Cada linguagem de programação tem códigos específicos que são interpretados pela máquina. O algoritmo da multiplicação de dois números pode ser escrito da forma apresentada no quadro ao lado.

```
Algoritmo Multiplicacao
   N1, N2, M: inteiros
Inicio
   Escrever ("Digite dois numeros:")
   Leia N1, N2
   M = N1 * N2
   Escrever ("Resultado:", M)
Fim
```

Esse tipo de escrita é chamado de **pseudocódigo**. Trata-se de um modo genérico de escrever um algoritmo.

Você conseguiria explicar o que cada linha desse pseudocódigo representa? Analisando as linhas desse pseudocódigo, podemos concluir que:

- Na primeira linha, foi definido um nome para o algoritmo: Algoritmo Multiplicacao.
- Na segunda linha, foram apresentadas as variáveis utilizadas no algoritmo e o tipo delas. Nesse caso, foram utilizadas três variáveis: N1, N2 e M, e todas elas são números inteiros.
- Depois, foi colocada a palavra "Inicio" para marcar o começo do processo.
- Na quarta linha, foi colocado um comando para instruir o usuário a digitar os fatores a serem multiplicados, isto é, os valores das variáveis N1 e N2.
- Posteriormente, o programa deveria reconhecer os números inseridos pelo usuário para as variáveis ("Leia N1, N2").
- Na sequência, o programa efetua a multiplicação e atribui o produto à variável M.
- Depois, o programa apresenta o valor de M para o usuário.
- Para finalizar o processo, é necessário inserir o comando "Fim".

Com o algoritmo descrito por um pseudocódigo, ele pode ser facilmente traduzido para linguagens de programação.

Portanto, um algoritmo pode ser descrito pela linguagem nativa, por um fluxograma e por pseudocódigos.

TECNOLOGIA

Nesta seção, vamos utilizar o Portugol Webstudio para elaborar um pseudocódigo. Mas o que é pseudocódigo? Ele é o primeiro passo para escrever um algoritmo e transformá-lo em uma programação usando a lógica computacional. O uso de pseudocódigo facilita a interpretação do algoritmo e permite, com facilidade, validar a programação que foi, ou está sendo, desenvolvida.

O Portugol é uma linguagem de programação com comandos que foram desenvolvidos usando a língua portuguesa como base e, por isso, ela também é conhecida como "Português estruturado". O Portugol Webstudio é um ambiente *on-line* e gratuito de aprendizagem de programação, disponível em https://portugol.dev/ (acesso em: 21 out. 2024).

Para escrever um algoritmo em pseudocódigo no Portugol, devemos usar um conjunto de regras que conecta diferentes comandos para atingir um objetivo. Observe alguns exemplos no quadro a seguir.

Comando	Função	Exemplo
escreva(" ")	Pedir ao computador que apresente ao usuário o texto que estiver entre aspas.	escreva("OLÁ") Mostra ao usuário a palavra OLÁ.
leia( )	Pedir ao computador que leia uma informação que o usuário inseriu.	leia(*b*) Atribui à variável *b* o número que o usuário inseriu.
=	Atribuir um valor a uma variável.	$a = b + 1$ Atribui à variável *a* o valor da variável *b* mais 1 unidade.
inteiro	Declara uma variável que é um número inteiro.	inteiro *a* Declara a variável numérica inteira *a*.
real	Declara uma variável que é um número real.	real *b* Declara a variável numérica real *b*.

Não escreva no livro.

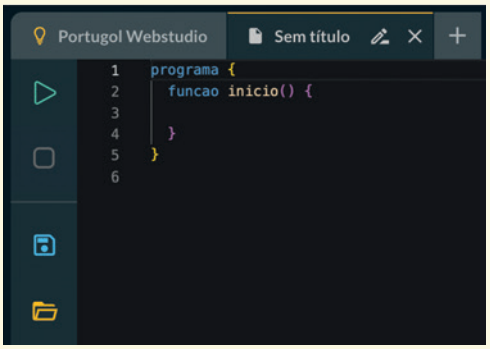
Ao iniciar um novo programa, é preciso informar ao computador todas as variáveis que serão utilizadas. Só assim ele as reconhecerá como parte do programa.

Agora, vamos utilizar o Portugol Webstudio para obter o enésimo termo de uma PA.

1ª etapa: Ao abrir o *site*, clicamos em "Novo Arquivo".



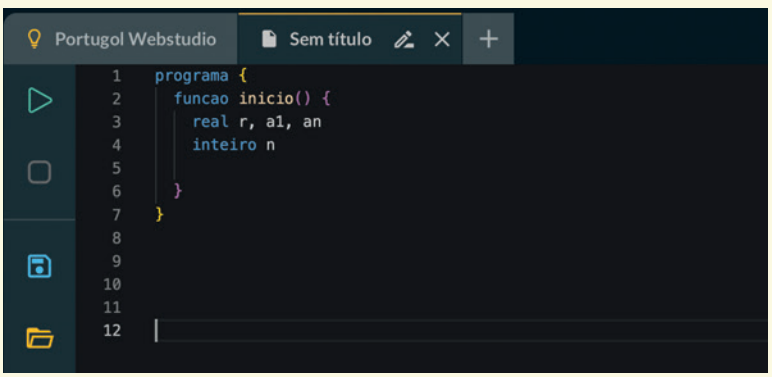
Portugol Webstudio. Fac-símile: ID/BR



Portugol Webstudio. Fac-símile: ID/BR

Inicialmente, devemos declarar as variáveis, indicando o conjunto numérico que vamos utilizar. Em uma P.A., a razão (r), o primeiro termo (a_1) e o enésimo termo (a_n) podem assumir valores reais, e a posição do termo (n) pode assumir valores inteiros. Logo após "função início( ) {", pressionamos a tecla "*Enter*" e escrevemos nas linhas 3 e 4:

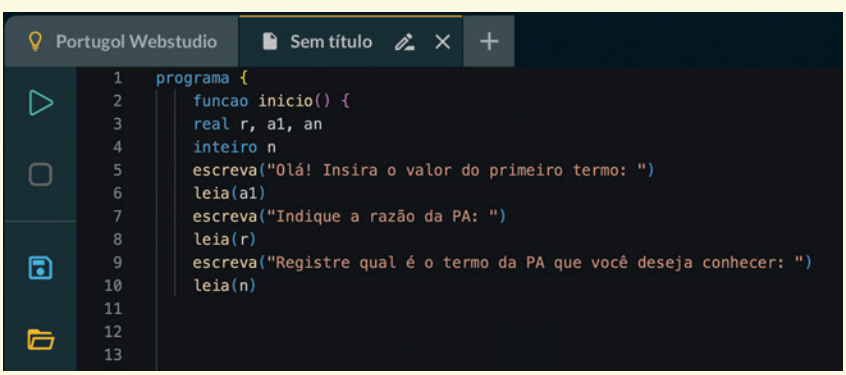
```
real r, a1, an
inteiro n
```



Portugol Webstudio. Fac-símile: ID/BR

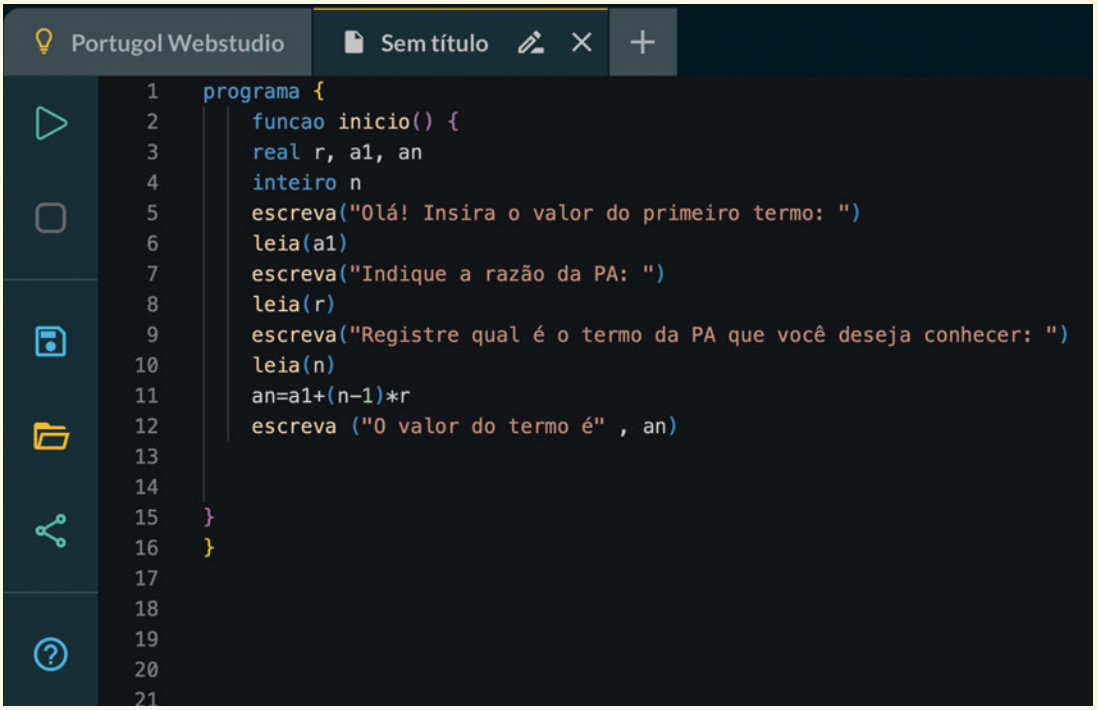
2ª etapa: Inserimos os comandos para que o usuário do programa digite uma informação de cada vez: o primeiro termo da sequência, a razão da P.A. e a posição do termo que ele quer conhecer. Para isso, utilizamos os comandos "Escreva", "Leia" para cada informação. A partir da linha 5, escrevemos:

```
escreva("Olá! Insira o valor do primeiro termo: ")
leia(a1)
escreva("Indique a razão da PA: ")
leia(r)
escreva("Registre qual é o termo da PA que você deseja conhecer: ")
leia(n)
```



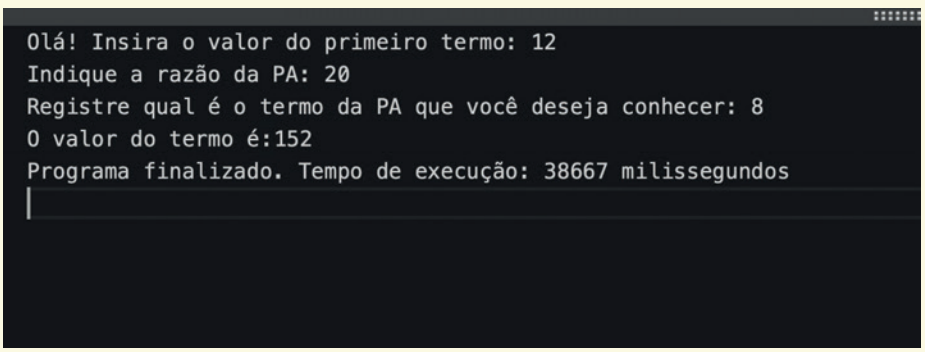
Portugol Webstudio. Fac-símile: ID/BR

3ª etapa: Criamos o algoritmo para processar a informação que desejamos, ou seja, o valor de a_n. Nesse caso, escrevemos a expressão correspondente ao enésimo termo da P.A.: "an=a1+(n−1)*r" e utilizamos novamente o comando "Escreva" para o programa fornecer a resposta. Ao digitarmos uma variável sem as aspas nesse comando, o programa apresenta o valor dela.



Portugol Webstudio. Fac-símile: ID/BR

4ª etapa: Por fim, para rodar o algoritmo criado, clicamos em "Iniciar execução"  e registramos cada informação solicitada. Observe na imagem o resultado apresentado pelo algoritmo após a indicação das variáveis de uma P.A. cujo primeiro termo é 12 e cuja razão é 20 e o pedido para encontrar o 8º termo.



Portugol Webstudio. Fac-símile: ID/BR

ATIVIDADES

1 **De acordo com o exemplo apresentado, faça o que se pede.**

a) Qual foi o valor do 8º termo apresentado pelo programa? 152

b) O valor apresentado pelo programa está correto? Sim.

c) Escreva a expressão numérica que o programa calculou para encontrar esse valor. $12 + 7 \cdot 20$

2 **No Portugol Webstudio, reproduza o algoritmo apresentado e determine os termos indicados de cada P.A. a seguir.**

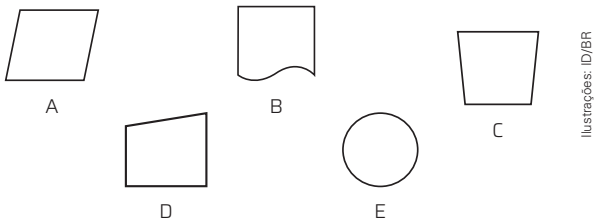
a) a_{50} na P.A. (5, 15, 25, 35, ...) 495

b) a_{29} na P.A. (378, 425, 472, ...) 1 694

Não escreva no livro.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

12 **Pesquise na internet o significado de outros símbolos utilizados em fluxogramas, como os mostrados a seguir.** A: Dados; B: Documento; C: Operação Manual; D: Entrada Manual; E: Conector.



Ilustrações: ID/BR

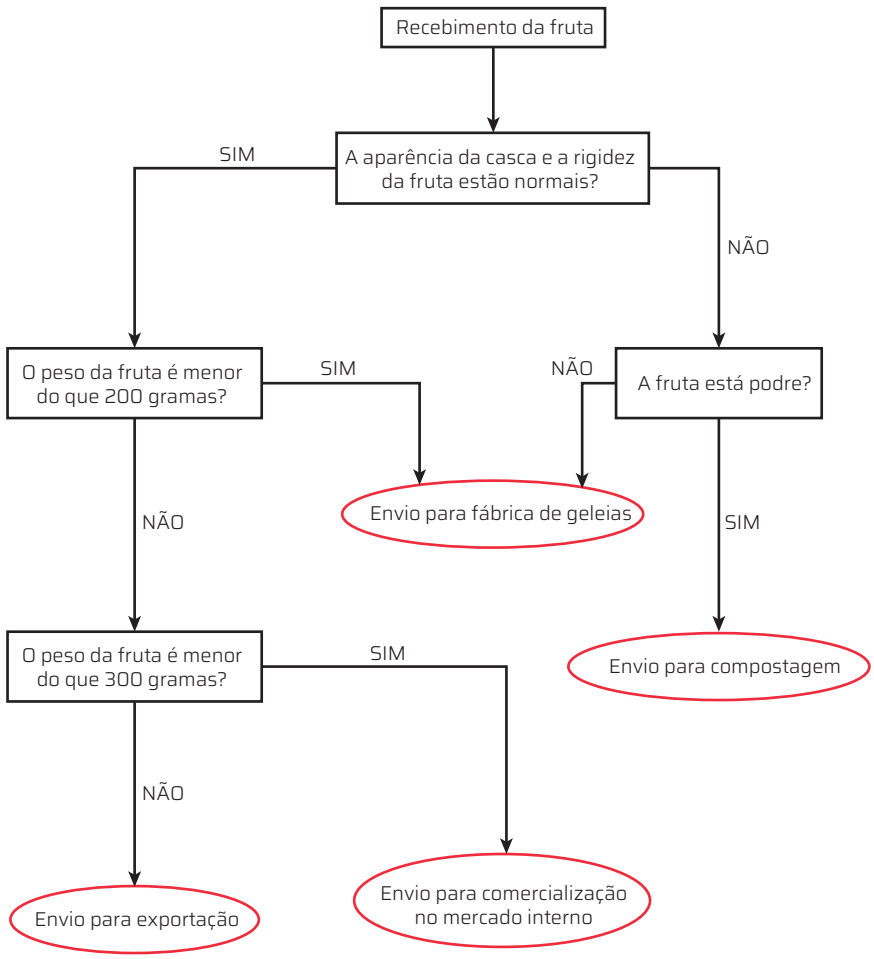
Como na etapa anterior, a atividade **13** pode ser utilizada como instrumento de avaliação, tanto para ter evidências do entendimento dos estudantes sobre fluxogramas, como também das aprendizagens feitas na seção *Tecnologia* em que utilizaram o Scratch para traçar o quadrado.

13 **Elabore um fluxograma para representar a sequência de comandos utilizada no Scratch para desenhar um quadrado. Depois, troque seu fluxograma com o de um colega, para que ambos verifiquem se estão corretos e, caso haja erros, analisem a etapa em que isso ocorreu e façam a correção.**

Resposta pessoal. Consulte a resposta no Manual do Professor.

14 **Indique no caderno a alternativa correta.**

(Insper-SP) A figura abaixo mostra o fluxograma do processo que é utilizado em uma cooperativa agrícola para definir o destino das frutas enviadas a ela pelos produtores da região.



ID/BR

De acordo com o fluxograma, se o peso de uma fruta recebida pela cooperativa é 320 gramas, então essa fruta, necessariamente: Alternativa **c**.

a) será enviada para exportação.

b) será enviada para a fábrica de geleias.

c) não será enviada para comercialização no mercado interno.

d) não será enviada para compostagem.

e) não será enviada para a fábrica de geleias.

15 **Vimos que os fluxogramas são úteis para organizar as etapas de execução de um processo. Agora, com base nessa informação, faça o que se pede em cada item.** Consulte a resposta no Manual do Professor.

a) Relembre quais são as principais características de um polígono regular.

b) Utilizando seus conhecimentos sobre fluxograma e sobre o Scratch, elabore um fluxograma que descreva a construção de um hexágono regular. Se possível, construa seu fluxograma utilizando um aplicativo com essa finalidade ou usando um editor de texto em que seja possível trabalhar com figuras geométricas e setas.

c) A partir do fluxograma, elabore no Scratch o programa que constrói um hexágono regular. Ao executar o programa, verifique se ele retornou o resultado esperado.

16 **Chamamos de diferença entre dois números o módulo da subtração entre eles. Por exemplo, a diferença entre 6 e 2 é 4, pois $|6 - 2| = |4| = 4$. A diferença entre 6 e 10 também é 4, pois $|6 - 10| = |-4| = 4$. Com base nessa informação, elabore um fluxograma que represente o algoritmo para obter a diferença entre dois números.** Consulte a resposta no Manual do Professor.

17 **Resolva a atividade a seguir e registre no caderno a alternativa correta.**

(UEL-PR) Leia o texto e analise a figura a seguir.

Em Geografia é de grande importância o uso de gráficos, mapas e outras formas de representação dos fenômenos. Um fluxograma, por exemplo, é uma representação gráfica de fenômenos cujas etapas são apresentadas de forma encadeada e sequencial, por meio de símbolos geométricos interconectados.



Quino. *Toda Mafalda*. São Paulo: Martins Fontes, 1993. p. 26.

Alternativa **c**.

Com base no texto, na tira e nos conhecimentos sobre representações cartográficas, é correto afirmar:

a) A tira indica que os fluxogramas são instrumentos pouco confiáveis enquanto meio de representação de fenômenos humanos ligados à vida.

b) A tira exalta o uso do fluxograma como instrumento mais adequado no estabelecimento e na representação de projetos complexos, tal como a vida futura das pessoas.

c) O uso do fluxograma possui vantagens e limitações; sua adequada utilização depende dos objetivos do usuário e do fenômeno a ser abordado.

d) A ideia predominante na tira é a negação da possibilidade de se construírem métodos de representação de fenômenos complexos, devido à sua insuficiência.

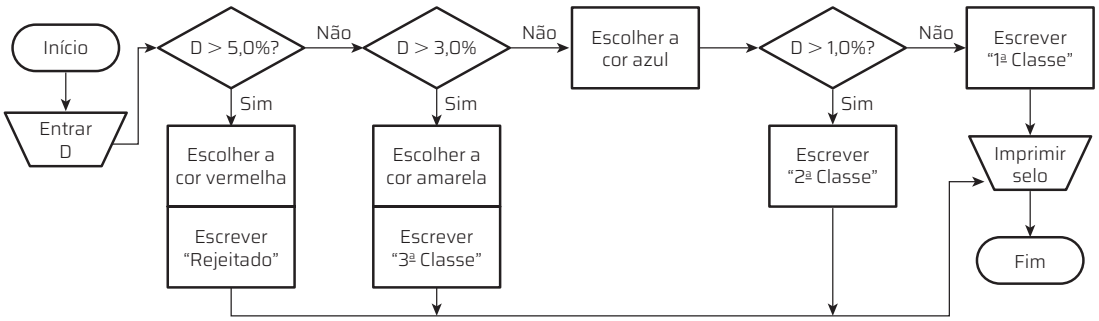
e) As personagens da tira indicam que a beleza da vida é adequadamente representada por fluxogramas, cuja função é prever com exatidão o futuro.

Não escreva no livro.

18 **Resolva a atividade a seguir e registre no caderno a alternativa correta.**

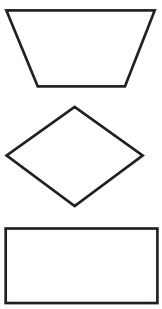
(Enem) Em uma fábrica de equipamentos eletrônicos, cada componente, ao final da linha de montagem, é submetido a um rigoroso controle de qualidade, que mede o desvio percentual (D) de seu desempenho em relação a um padrão ideal. O fluxograma a seguir descreve, passo a passo, os procedimentos executados por um computador para imprimir um selo em cada componente testado, classificando-o de acordo com o resultado do teste:

Enem. Fac-símile: ID/BR



Os símbolos usados no fluxograma têm os seguintes significados:

Ilustrações: Enem. Fac-símile: ID/BR



Entrada e saída de dados

Decisão (testa uma condição, executando operações diferentes caso essa condição seja verdadeira ou falsa)

Operação

Segundo essa rotina, se D = 1,2%, o componente receberá um selo com a classificação: Alternativa **d**.

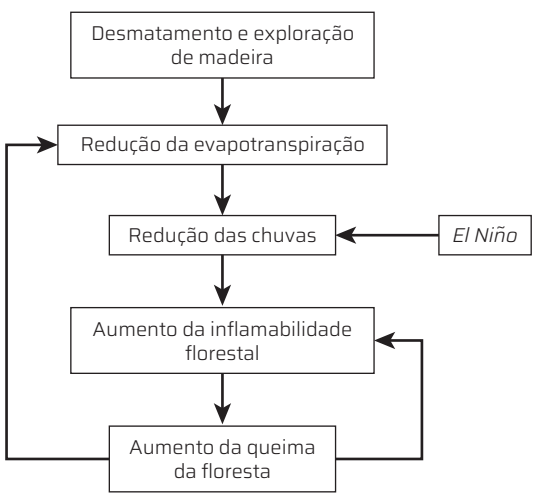
a) "Rejeitado", impresso na cor vermelha.
b) "3ª Classe", impresso na cor amarela.
c) "3ª Classe", impresso na cor azul.
d) "2ª Classe", impresso na cor azul.
e) "1ª Classe", impresso na cor azul.

19 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(UFMG) Analise este fluxograma:

UFMG. Fac-símile: ID/BR

Queimadas na Floresta Amazônica



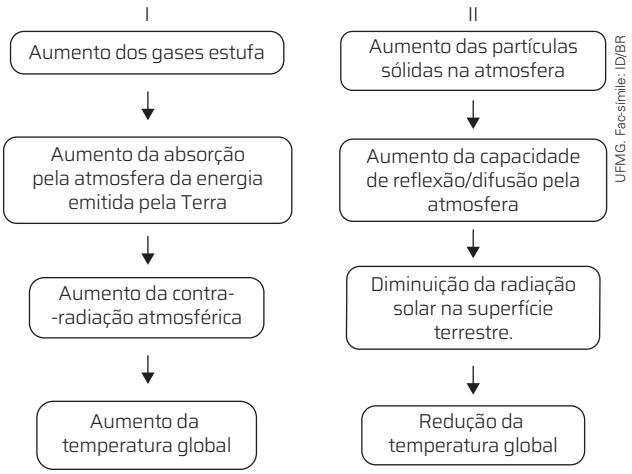
Capobianco, João Paulo Ribeiro (coord.). *Biodiversidade na Amazônia Brasileira*: avaliação e ações prioritárias para conservação, uso sustentável e repartição de benefícios. São Paulo: Estação Liberdade: Instituto Socioambiental, 2001. p. 181.

A partir da análise desse fluxograma e considerando-se outros conhecimentos sobre o assunto, é INCORRETO afirmar que: Alternativa **d**.

a) a inflamabilidade da floresta decorre de ações humanas associadas, direta ou indiretamente, a causas naturais.
b) a redução da cobertura florestal, ao comprometer a evapotranspiração, pode, a longo prazo, acarretar redução das chuvas.
c) o aumento do número e da intensidade das queimadas na Amazônia pode tornar-se, num ciclo vicioso, um processo de retroalimentação.
d) o fenômeno *El Niño* tem relação direta, mas favorável, com a redução das queimadas na Amazônia brasileira.

20 **Escreva no caderno a alternativa correta.**

(UFMG) Analise os fluxogramas I e II, relativos a processos de mudanças climáticas globais.



UFMG. Fac-símile: ID/BR

A partir dessa análise, é INCORRETO afirmar que os dois fluxogramas: Alternativa **b**.

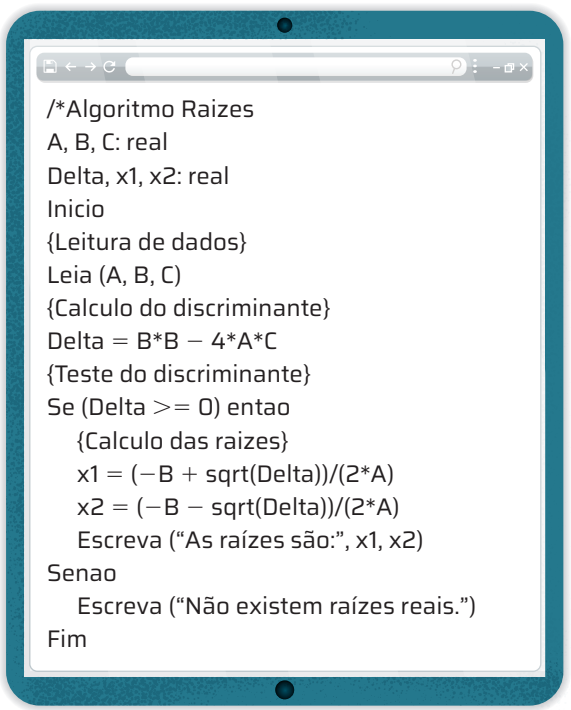
a) comprovam a ocorrência de alterações que, agindo simultaneamente na atmosfera, levam a resultados opostos.

b) contemplam os efeitos resultantes do desmatamento, da rarefação da camada de ozônio e das chuvas ácidas sobre o clima regional.

c) demonstram que as atividades humanas levam a alterações na composição química da atmosfera, o que, por sua vez, implica mudanças no comportamento energético.

d) dificultam, quando analisados em conjunto, a possibilidade de se chegar a conclusões simples sobre o aquecimento global.

21 **O pseudocódigo a seguir descreve um algoritmo que determina as raízes reais de uma equação do 2º grau. Observe.**



```
/*Algoritmo Raizes
A, B, C: real
Delta, x1, x2: real
Inicio
{Leitura de dados}
Leia (A, B, C)
{Calculo do discriminante}
Delta = B*B - 4*A*C
{Teste do discriminante}
Se (Delta >= 0) entao
   {Calculo das raizes}
   x1 = (-B + sqrt(Delta))/(2*A)
   x2 = (-B - sqrt(Delta))/(2*A)
   Escreva ("As raízes são:", x1, x2)
Senao
   Escreva ("Não existem raízes reais.")
Fim
```

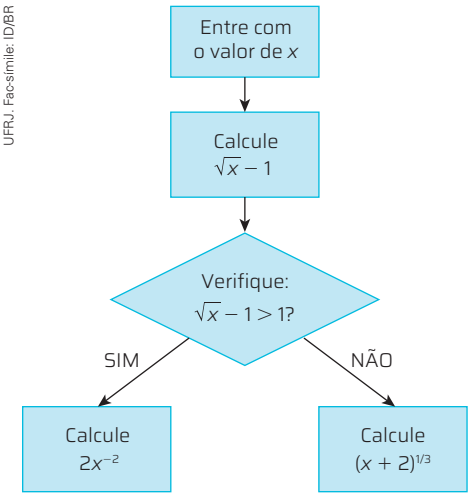
ID/BR

a) Analise cada uma das linhas do pseudocódigo e registre a função de cada comando no algoritmo. Consulte a resposta no Manual do Professor.

b) Com base no pseudocódigo apresentado, elabore um fluxograma que descreva as etapas para a obtenção das raízes de uma equação do 2º grau. Consulte a resposta no Manual do Professor.

Não escreva no livro.

22 (UFRJ) Considere o programa representado pelo seguinte fluxograma:



UFRJ. Fac-símile: ID/BR

a) Determine os valores reais de x para os quais é possível executar esse programa. $x \geqslant 0$

b) Aplique o programa para $x = 0$, $x = 4$ e $x = 9$. $\sqrt[3]{2}; \sqrt[3]{6}; \frac{2}{81}$.

CÁLCULO RÁPIDO

Você tem feito muitos cálculos até aqui. Nesta sequência de atividades, a proposta é checar sua habilidade realizando tudo mentalmente.

1 Calcule:

a) $2{,}25 - 0{,}75$ 1,5

b) $-5{,}9 + 2{,}3$ –3,6

c) $0{,}5 + 0{,}25 - 1{,}25$ –0,5

d) $1 + 0{,}3 - 2 \cdot 0{,}75$ –0,2

e) $-4 \cdot 0{,}25 + 0{,}75$ –0,25

f) $3 \cdot (-0{,}25) + 1{,}75 - 2$ –1

2 Use a relação entre a medida de ângulos em graus e em radianos $\pi = 180°$ para fazer o que se pede em cada item.

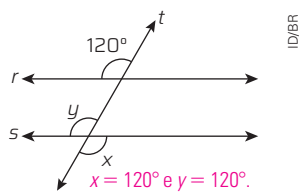
a) Escreva em grau as seguintes medidas em radiano: 45°; 60°; 135°; 120°; 30°; 150°.

$\frac{\pi}{4}$ $\frac{\pi}{3}$ $\frac{3\pi}{4}$ $\frac{2\pi}{3}$ $\frac{\pi}{6}$ $\frac{5\pi}{6}$

b) Escreva em radianos as seguintes medidas em graus: 10°, 15°, 20° e 540°. $\frac{\pi}{18}; \frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{9}; 3\pi$.

3 As retas r, s e u são paralelas, e a reta t é transversal a elas. Sabendo disso, calcule mentalmente as medidas dos ângulos x e y em cada situação.

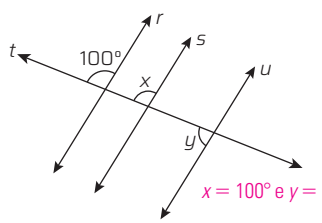
a)



ID/BR

$x = 120°$ e $y = 120°$.

b)

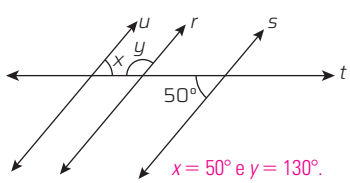


ID/BR

$x = 100°$ e $y = 80°$.

4 As retas r, s e u são paralelas, e a reta t é transversal a elas. Determine as medidas x e y dos ângulos indicados em cada item.

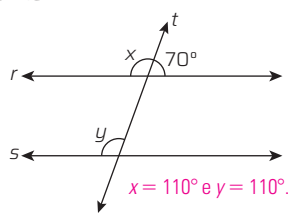
a)



ID/BR

$x = 50°$ e $y = 130°$.

b)



ID/BR

$x = 110°$ e $y = 110°$.

Não escreva no livro.

PARA RECORDAR

1 Observe o gráfico e faça o que se pede. **a)** $f(x) = -\frac{3}{5}x + 3$

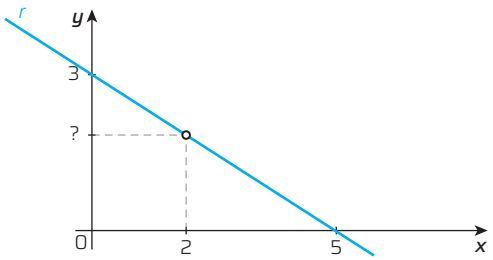
a) Determine a lei da função f cujo gráfico é a reta r.

b) Estude o sinal da função.

c) Dê o domínio e a imagem de f.

b) $\begin{cases} f(x) = 0, \text{ se } x = 5 \\ f(x) > 0, \text{ se } x < 5 \\ f(x) < 0, \text{ se } x > 5 \end{cases}$

c) $D(f) = Im(f) = \mathbb{R}$



ID/BR

2 Um observador do alto da torre de uma plataforma marítima de petróleo, a uma altura de 50 m, avista um barco. Sabendo que o ângulo de depressão em relação à proa do barco é de 60°, a que distância (em metro) da plataforma o barco está? (Considere $\sqrt{3} \simeq 1{,}73$.) 28,9 metros.

3 Registre a alternativa correta no caderno.

(Uerj) Uma família comprou água mineral em embalagens de 20 L, de 10 L e de 2 L. Ao todo, foram comprados 94 L de água, com o custo total de R$ 65,00.

Veja na tabela os preços da água por embalagem:

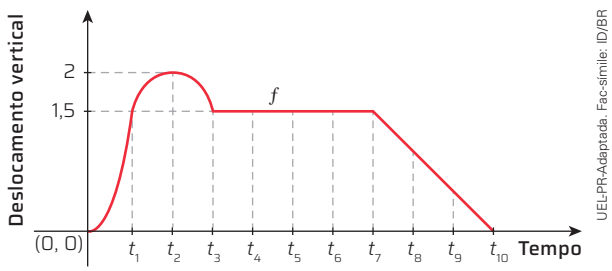
Volume da embalagem (L)	Preço (R$)
20	10,00
10	6,00
2	3,00

Nessa compra, o número de embalagens de 10 L corresponde ao dobro do número de embalagens de 20 L, e a quantidade de embalagens de 2 L corresponde a n.

O valor de n é um divisor de: Alternativa **c**.

a) 32 **b)** 65 **c)** 77 **d)** 81

4 (UEL-PR) O gráfico de uma função f [...] mostra o deslocamento vertical de um surfista sobre uma onda, em função do tempo.



UEL-PR-Adaptada. Fac-símile: ID/BR

Com base no gráfico e nos conhecimentos sobre funções, considere as afirmativas a seguir.

I. Para todo $t \in (t_3, t_7)$, f é constante.

II. Para todo $t \in (0, t_3)$, $f(t) = \cos t + 2$.

III. Para todo $t \in (t_7, t_{10})$, $f(t) = m \cdot t + b$, onde $m > 0$.

IV. A função f assume seu valor máximo em $t = t_2$.

Assinale [no caderno] a alternativa correta. Alternativa **b**.

a) Somente as afirmativas I e III são corretas.

b) Somente as afirmativas I e IV são corretas.

c) Somente as afirmativas II e III são corretas.

d) Somente as afirmativas I, II e IV são corretas.

e) Somente as afirmativas II, III e IV são corretas.

Não escreva no livro.

5 **Indique no caderno a alternativa correta.**

(Insper-SP) Dois faraós do antigo Egito mandaram construir seus túmulos, ambos na forma de pirâmides quadrangulares, num mesmo terreno plano, com os centros de suas bases distando 120 m. As duas pirâmides têm o mesmo volume, mas a área da base de uma delas é o dobro da área da base da outra. Se a pirâmide mais alta tem 100 m de altura, então a distância entre os vértices das duas pirâmides, em metros, é igual a Alternativa **c**.

a) 100 **b)** 120 **c)** 130 **d)** 150 **e)** 160

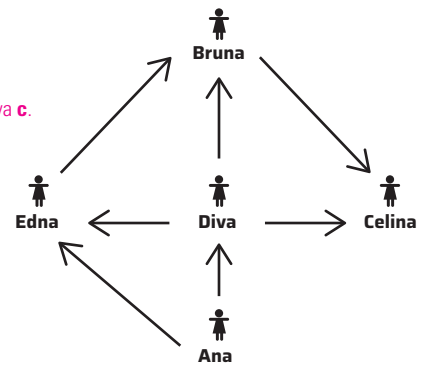
FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO

Os dois problemas a seguir exigem raciocínio e uma boa organização das informações.

1 **Indique no caderno a alternativa correta.**

(Obmep) A figura mostra como comparar as idades de cinco irmãs, usando flechas que partem do nome de uma irmã mais nova para o nome de uma mais velha. Por exemplo, Edna é mais velha que Ana. Qual é a irmã mais velha? Alternativa **c**.

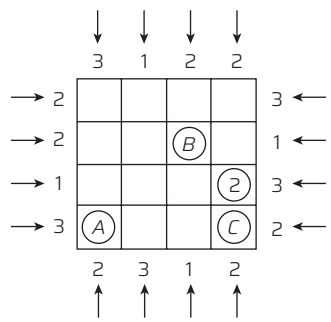
a) Ana
b) Bruna
c) Celina
d) Diva
e) Edna



Obmep. Fac-símile: ID/BR

2 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(Insper-SP) O quadriculado representa uma região de edifícios, sendo que, em cada um dos 16 quadrados, está localizado um único edifício. Em cada linha ou coluna, dois edifícios quaisquer têm números diferentes de pisos, tendo de 1 a 4 andares. Os números que estão na borda externa do quadriculado indicam a quantidade de edifícios que podem ser vistos por alguém que olha frontalmente para o quadriculado, na direção e sentido indicados pela seta. O número 2 circulado indica que o edifício nesse quadrado tem 2 andares. As letras A, B e C, também circuladas, indicam os números de andares dos edifícios nos respectivos quadrados em que estão.



Insper-SP. Fac-símile: ID/BR

Nas condições descritas, $3A + 4B + 2C$ é igual a: Alternativa **b**.

a) 15 **b)** 17 **c)** 18 **d)** 19 **e)** 24

PALAVRAS-CHAVE

Como você já sabe, esta seção auxilia você na síntese dos principais tópicos estudados no capítulo.

Desta vez, a proposta é que você escreva um texto breve para enviar a um colega contando sobre os principais assuntos que aprendeu. Esse texto pode ser enviado por um aplicativo de mensagens instantâneas, por *e-mail* ou até mesmo entregue em papel. Peça ao colega que leia o material e sinalize possíveis melhorias que ele considerar pertinentes. Combine com ele uma data para que ele lhe devolva o texto e, então, verifique se é necessário fazer ajustes para deixar o material completo.

É importante que seu texto contenha palavras e expressões como as listadas a seguir.

- Sistema binário
- Algoritmos
- Fluxogramas
- Linguagem de programação

MATEMÁTICA E TECNOLOGIA

Esta seção favorece o desenvolvimento das competências gerais **1**, **2**, **4**, **5** e **6** propostas pela BNCC com uma abordagem científica, para que os estudantes compreendam o uso de tecnologias digitais de informação e comunicação a partir de conhecimentos historicamente construídos, valorizando a diversidade de saberes. Possibilita, ainda, uma integração com as áreas de Linguagens e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. Além disso, é possível trabalhar com os temas contemporâneos transversais Ciência e Tecnologia e Economia. Também pode ser desenvolvida a habilidade **EM13MAT405**, ao usar a linguagem de programação para construir algoritmos.

Para ampliar os conhecimentos dos estudantes sobre robótica e inteligência artificial, um trabalho integrado com o professor de Língua Portuguesa pode ser proposto para explorar a competência específica **7** da área de Linguagens e suas Tecnologias, ou com o professor de Física, para explorar a competência específica **3** da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, ou ainda com os professores de Sociologia, História ou Geografia, para explorar a competência específica **4** da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Inovações robóticas

O objeto digital apresenta conhecimentos sobre inovações robóticas, mostrando exemplos de como os robôs podem auxiliar os humanos em diferentes contextos.

Robótica e Inteligência Artificial (IA)

Quando falamos em robôs, muitas pessoas imaginam um mecanismo constituído de peças metálicas e com forma humana. Outras, além disso, logo associam a imagem dos robôs a um cenário de filme de ficção científica, no qual eles estão em guerra com os humanos ou mesmo trabalhando juntos para combater um inimigo comum. Essas noções até fazem algum sentido, mas os robôs seriam apenas isso?

Um robô é um dispositivo mecânico, ou um conjunto desses dispositivos, que pode desempenhar funções de maneira autônoma ou pré-programada.

Na literatura, os robôs ficaram conhecidos em 1920, quando o dramaturgo tcheco Karel Capek (1890-1938) utilizou o termo *robota* para representar o trabalho escravo realizado por seres artificiais. Depois disso, muitos escritores de ficção científica e roteiristas de cinema deram asas à imaginação para criar histórias nas quais essas personagens convivem – pacificamente ou não – com os humanos.



Robô BB-8, da série *Star Wars*.

Ciborgue é um super-herói da Liga da Justiça que tem peças robóticas incorporadas ao seu corpo.

Personagem Rosie, da série *Os Jetsons*. A série foi produzida pelos estúdios Hanna-Barbera nos anos 1960 e relançada nos anos 1980.

Personagem Baymax, do filme *Big Hero* 6.

Imagens: Sophia Zengierski/Shutterstock.com/ID/BR; ©Hanna-Barbera Productions. Fotografia: Photofest/Easy Midiabank; DC Comics/Entertainment Pictures/Zumapress.com/Fotoarena; AJ Pics/Alamy/Fotoarena

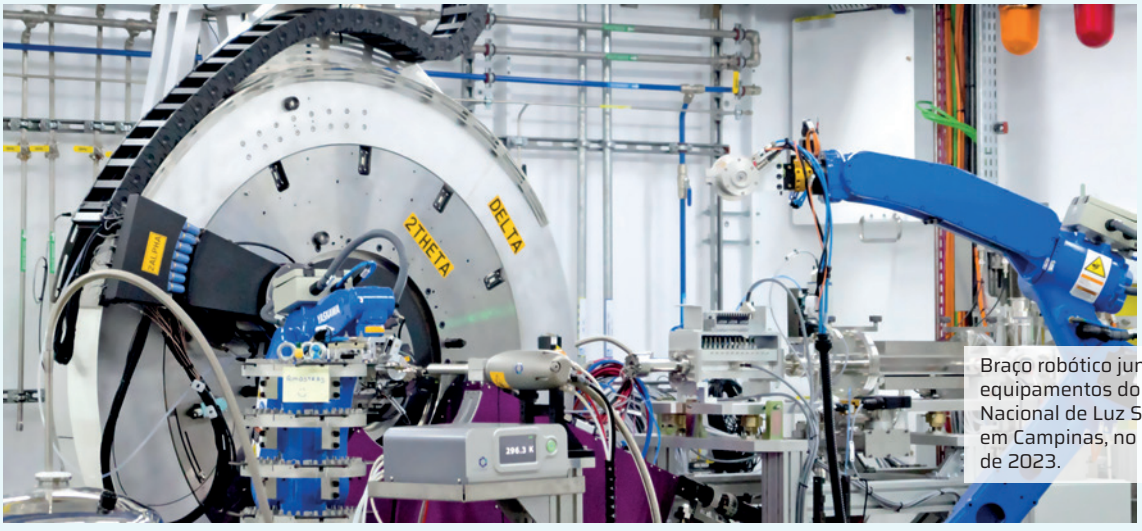
Não escreva no livro.

O que antes era visto apenas em filmes de ficção científica tornou-se cada vez mais comum na realidade. Inicialmente utilizados em linhas de montagem das indústrias, os robôs foram ganhando cada vez mais espaço em diferentes ramos da atividade humana, graças à precisão com que executam os comandos (na área da medicina, por exemplo) e por executarem funções que poderiam colocar a vida de humanos em risco, como na desativação de bombas.



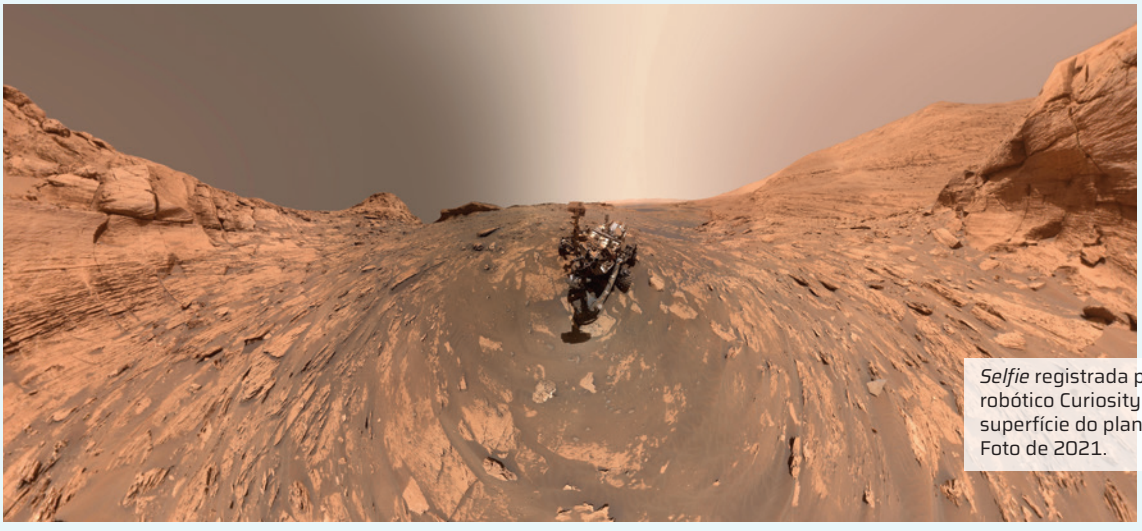
Divulgação Hospital Israelita Albert Einstein. Fotografia: Fábio H. Mendes/E6 Imagens

Em 2024, ocorreu a primeira cirurgia no Brasil realizada com auxílio do robô Mazor, especializado em cirurgias de coluna.



Felipegsb/Shutterstock.com/ID/BR

Braço robótico junto a outros equipamentos do Laboratório Nacional de Luz Síncrotron, em Campinas, no Brasil. Foto de 2023.



NASA/JPL-Caltech/MSSS

Selfie registrada pelo veículo robótico Curiosity na superfície do planeta Marte. Foto de 2021.

Davi Augusto/ID/BR

Ao abordar as inteligências artificiais, em especial *chatbots* mantidos por modelos de linguagem de grande escala, como ChatGPT, os estudantes têm a oportunidade de entender melhor essas tecnologias e refletir sobre seus usos atuais e potenciais.

Os robôs nem sempre têm uma aparência humana, mas há cientistas que estão desenvolvendo robôs humanoides cada vez mais realistas, como o robô Sophia, apresentado em 2023 na Turquia.



Fatih Hepokur/Anadolu Agency/Getty Images

Na realidade, os robôs estão muito mais presentes no nosso dia a dia do que você imagina. Se você já utilizou um *chat* para tirar dúvidas sobre um produto ou ferramentas de inteligência artificial para obter informações ou elaborar textos, então você já teve contato com um robô.

Com base em suas experiências e no texto a seguir, reflita sobre esta questão: Nós, seres humanos, poderemos ser substituídos por máquinas?

Um ano de ChatGPT: qual o futuro das inteligências artificiais?

Ferramenta avançou, mas cresceu a necessidade de uma regulamentação e de um maior letramento popular a respeito do uso adequado dessas tecnologias

A ideia de inteligência artificial (IA) foi inaugurada em 1950, quando Alan Turing [matemático britânico (1912-1954)] questionou, em um artigo científico, se máquinas poderiam pensar. Desde então, esse tipo de tecnologia vem crescendo, ora em fases de muita popularidade, ora em longos períodos de esquecimento. O último *boom* ocorreu há exatamente um ano, em 30 de novembro de 2022, quando a OpenAI lançou o ChatGPT. A ferramenta, mais do que qualquer outra, popularizou as IAs e nos fez questionar o papel que terão em nossas vidas daqui para frente.

O lançamento virou o mundo da tecnologia de cabeça para baixo, fazendo com que a maior parte das gigantes do setor corressem atrás de criar ferramentas generativas – capazes de criar textos, códigos, vídeos e imagens. A promessa foi de uma grande revolução e o salto evolutivo que isso provocou é inquestionável, mas também surgiram problemas novos com os quais ninguém sabe exatamente como lidar. "Essa revolução está acontecendo, mas ainda em nichos", afirma Anderson Rocha, pesquisador e coordenador do Laboratório de Inteligência Artificial da Universidade Estadual de Campinas (Recod.ai – Unicamp).

Isso acontece porque a maioria dos usuários tratam esses robôs como se fossem grandes repositórios de informação [...]. Essa, no entanto, é uma visão equivocada, porque essas ferramentas são treinadas com base em um grande banco de dados público cujo objetivo não é fazer uma curadoria de informações, mas conseguir identificar padrões de linguagem. Não por acaso, um estudo recente mostrou que as ferramentas mais populares dão respostas erradas entre 3 e 27% das vezes.

Por outro lado, quando essa tecnologia é utilizada de maneira especializada, o potencial aparece de maneira bastante clara. "Os principais benefícios dessas tecnologias vêm da utilização das IAs como um copiloto inteligente para realizar atividades técnicas", diz Rocha. No atendimento ao público, por exemplo, a ferramenta é amplamente utilizada para fazer uma triagem do serviço mais apropriado para cada indivíduo; na programação, ela pode resolver os códigos e abrir espaço para uma maior criatividade do trabalhador; na redação de textos, pode ajudar na adequação da linguagem ou do formato, enquanto a curadoria de conteúdo fica nas mãos do redator.

As outras áreas de inteligência artificial também vêm crescendo. [...] [o] aprendizado de máquina e IAs discriminativas vem revolucionando a pesquisa e a medicina, a partir da especialização em processamento de grandes volumes de dados ou do reconhecimento de patologias e fármacos em potencial.

[...]

Apesar das grandes possibilidades em torno das inteligências artificiais, elas também geram receios – muito fundamentados, aliás. Os erros, já citados, quando utilizados para a tomada de decisão, podem ser catastróficos. Além disso, essas ferramentas têm uma grande capacidade de reproduzir os vieses e preconceitos dos seus treinadores, propagando disparidades sociais que já são difíceis por si só. Como se já não fosse o suficiente, ainda existe uma preocupação com a privacidade, com utilização de dados pessoais e com a quebra de direitos intelectuais.

Souza, Luiz Paulo. Um ano de ChatGPT: qual o futuro das inteligências artificiais? *Veja*, 1º dez. 2023. Disponível em: https://veja.abril.com.br/tecnologia/um-ano-de-chatgpt-qual-o-futuro-das-inteligencias-artificiais/. Acesso em: 21 out. 2024.

Não escreva no livro.

IA pode colocar em risco 481 mil empregos numa década

A Inteligência Artificial (IA) poderá levar à perda líquida de mais de 80 mil empregos, através da automatização de 481 mil postos de trabalho, nos próximos dez anos, embora se estime a criação de 400 novos empregos. As conclusões são do mais recente estudo da Randstad Research, "A IA e o Mercado de Trabalho Português", trabalho realizado em três vertentes e que identifica as perspetivas quantitativas e qualitativas da IA no emprego. Esta análise mostra que se espera que o impacto desta tecnologia seja maior nas tarefas com maior utilização da linguagem. Dados da Goldman Sachs mostram que se estima que 18% do trabalho a nível mundial poderia ser automatizado pela IA, sobretudo nas economias mais desenvolvidas, o que levaria a um aumento da produtividade e, logo, do PIB mundial, um crescimento que poderia atingir os 7%.

Neste relatório a Randstad concluiu que TI (Tecnologias de informação), finanças, vendas, *marketing*, recursos humanos, operações, jurídicas e cadeias de abastecimento são as funções que apresentam o mais alto grau de automatização e atualização, logo, a maior exposição.

[...]

Cerca de 62% das empresas portuguesas já experimentaram IA

A análise qualitativa do estudo, realizada por inquéritos a empresas e colaboradores, mostra que mais de metade do universo empresarial – cerca de 62% – já utiliza IA, para várias funções. Por outro lado, é certo que 37,3% das inquiridas, sobretudo grandes empresas, não a utilizem em nenhuma atividade, sobretudo pelo facto de a IA estar num estado de adaptação recente, logo, apresenta ainda problemas. Além disso, os colaboradores não possuem competências necessárias para a sua utilização e a legislação relativa à sua utilização ainda está em desenvolvimento, levantando muita incerteza.

PERALTA, Helena C. IA pode colocar em risco 481 mil empregos numa década. *Forbes*, 15 mar. 2024. Disponível em: https://www.forbespt.com/ia-pode-colocar-em-risco-481-mil-empregos-numa-decada/. Acesso em: 21 out. 2024. Mantida a grafia original.

PARA EXPLORAR

Filme

***Ela* (*Her*). Direção: Spike Jonze. Estados Unidos, 2013 (126 min).**

O filme conta uma história sobre o relacionamento estabelecido entre Theodore e Samantha, a assistente virtual dele.

Conectando ideias

1 **Em uma roda de conversa, troque ideias com os colegas e com o professor sobre o efeito do uso da tecnologia de inteligência artificial no mercado de trabalho, como atendimentos automatizados, criação de textos e de imagens, etc. Comente experiências próprias ou de outras pessoas, pontuando também aspectos relacionados à substituição de mão de obra humana pela inteligência artificial.**

Respostas pessoais.

2 **Você sabe como as tecnologias que você usa em seu dia a dia são feitas? *Chatbots* e diversas outras tecnologias, como aplicativos de *smartphone*, recursos interativos em *sites* e até o *software* da sua TV, são construídos por programação que utiliza linguagens e estruturas específicas a cada caso.**

<u>Como um programa ou aplicativo é construído?</u> Resposta pessoal.

- Acesse o *site* https://studio.code.org/flappy/1 (acesso em: 21 out. 2024) ou o QR Code ao lado para realizar uma atividade *on-line* de criação de um jogo similar ao Flappy Bird utilizando linguagem de programação.
- O *site* tem muitos comandos em inglês, então, recomendamos usar um dicionário de inglês ou utilizar um aplicativo confiável de tradução para sanar eventuais dúvidas com o idioma.
- Siga as etapas indicadas no *site* para construir seu programa.
- Incremente o jogo que criar. É possível, por exemplo, inserir sons diferentes ao bater no obstáculo, alternar cenários e modificar a pontuação. Use a imaginação e a criatividade.
- Reúna-se com um colega para trocar e testar entre vocês os jogos criados. Em seguida, respondam: "Os jogos funcionaram? Vocês encontraram algum erro nos códigos que desenvolveram?". Compartilhem as experiências e formas diferentes de jogar com a turma.

É interessante utilizar o trabalho com esta seção, em especial na atividade **1**, para compreender os impactos de *chatbots* no cotidiano escolar dos estudantes, verificando como eles os utilizam. É provável que haja estudantes que utilizem a IA de maneira ativa em suas experiências escolares. Cabe, então, um diálogo sobre os limites dessas tecnologias e sobre modos éticos de usá-las, evitando plágios e a substituição do raciocínio lógico e crítico incentivado pelas atividades escolares por simples reproduções de respostas de *chatbots*.

O objetivo da atividade **2** é auxiliar os estudantes a compreender o que são linguagens de programação, que são a base da criação de diversas tecnologias digitais como os *chatbots*. Para o desenvolvimento desse projeto, é importante garantir que os estudantes tenham dispositivos com acesso à internet.

A ideia principal por trás do tutorial apresentado é introduzir o condicional "quando" ("when"), utilizado em programação para realizar uma ação quando uma determinada condição ocorrer. Por exemplo, o tutorial mostra condicionais para quando a personagem bate em uma estrutura ou cai no chão (que costuma ser o fim do jogo) e para quando o usuário clica com o botão direito do *mouse* (subir a personagem a uma determinada altura). É pela alteração das consequências de um determinado condicional que os estudantes podem gerar variações do jogo, o que é incentivado nas últimas etapas do tutorial.

Caso julgue necessário, aproveite também o momento para abordar a história do Flappy Bird original, um jogo pequeno criado por um desenvolvedor vietnamita que conseguiu sucesso estrondoso, em 2014, em razão de seu *gameplay* ser viciante. Diante disso, o próprio desenvolvedor o tirou do ar. Para ilustrar essa história, pode-se pedir aos estudantes que leiam, antes ou depois do miniprojeto da atividade, a reportagem disponível em: https://www.uol.com.br/tilt/noticias/redacao/2014/02/11/criador-diz-ter-removido-flappy-bird-porque-usuarios-viciaram-se-no-jogo.htm (acesso em: 21 out. 2024).

POR DENTRO DO ENEM E DOS VESTIBULARES

A leitura é parte fundamental da resolução de problemas. Saber ler e analisar as informações do enunciado e das alternativas apresentadas são habilidades importantes que vão além do conteúdo aprendido. Em problemas que envolvem outras linguagens, como a computacional, é necessário ter ainda mais atenção para entender a proposta. Antes de ler a resolução apresentada para a questão inicial, tente seguir estes passos:

- Leia atentamente a questão e identifique a pergunta.
- Registre as informações necessárias para responder à pergunta e, se achar necessário, esboce um esquema.
- Reflita se compreendeu o que precisa ser feito para responder à questão. Caso contrário, releia o enunciado do problema.
- Resolva o problema passo a passo, organizando a apresentação de seus conhecimentos.
- Analise a resposta comparando-a com as informações da questão para verificar se ela é razoável, ou seja, se é possível no contexto do problema.
- Compare sua resolução com a apresentada em seguida e analise se há semelhanças e diferenças entre essa resolução e a sua.

VESTIBULAR EM CONTEXTO

(UEA-AM) Considere as seguintes funções de uma linguagem de programação e a explicação de seu uso:

- Resto10(y); essa função recebe uma variável y representando um número real, calcula o resto da divisão de y por 10 e armazena o resultado na variável y. Por exemplo, se $y = 23$, após a execução de Resto10(y), o valor da variável y será 3, pois o resto da divisão de 23 por 10 é 3.
- Soma(y, q); essa função recebe uma variável y e um número q e executa a soma $y + q$, armazenando o resultado na variável y. Por exemplo, supondo-se que a variável y esteja armazenando o número 12, após a execução de Soma(y, 3), o valor da variável y passará a ser 15, pois $12 + 3 = 15$.

Nessa linguagem, a instrução Repete n{...} executa todos os comandos entre chaves n vezes, em que n é uma variável que armazena um número inteiro. Considere o seguinte código escrito nessa linguagem:

```
n = 3;
y = 24;
Repete n
{
  Resto10(y);
  Soma(y,12);
}
```

Ao fim da execução desse código, o valor da variável y será

a) 12.
b) 20.
c) 24.
d) 36.
e) 40.

Resolução

De acordo com o enunciado, a instrução **Repete n {...}** indica a quantidade de vezes que uma sequência de comandos deve ser realizada. Como, no código apresentado, $n = 3$, devemos realizar três vezes as funções da linguagem de programação **Resto10(*y*)** e **Soma(*y*,12)**.

Assim, dado $y = 24$, temos três etapas.

1ª etapa: Se $n = 1$.
Resto10(24) = 4, pois :
24 : 10 = 2 e resto 4. (A variável y passa a ser igual 4.)
Soma(4,12) = 16, pois :
4 + 12 = 16. (A variável y passa a ser igual 16.)

2ª etapa: Se $n = 2$.
Resto10(16) = 6, pois:
16 : 10 = 1 e resto 6. (A variável y passa a ser igual 6.)
Soma(6,12) = 18, pois:
6 + 12 = 18. (A variável y passa a ser igual 18.)

3ª etapa: Se $n = 3$.
Resto10(18) = 8, pois:
18 : 10 = 1 e resto 8. (A variável y passa a ser igual 8.)
Soma(8,12) = 20, pois:
8 + 12 = 20. (A variável y passa a ser igual 20.)

Portanto, ao final da execução dos comandos indicados, o valor de y é 20, e a alternativa **b** é a correta.

Não escreva no livro.

Explorando a estratégia

1 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(Ufam) Um estudante tem, em sua residência, internet com velocidade de 20 MB/s. Ele precisa fazer o *download* de uma coletânea de exercícios, cujo arquivo zipado tem 1,5 GB. Considerando que 1 GB = 1024 MB, podemos afirmar que o intervalo de tempo necessário para que o arquivo zipado seja completamente baixado, caso a velocidade da internet se mantenha constante, será de:

Alternativa **c**.

a) 65,0 s **b)** 75,0 s **c)** 76,8 s **d)** 80,8 s **e)** 90,8 s

2 **Resolva a atividade a seguir e registre no caderno a alternativa correta.**

(Enem) Uma das bases mais utilizadas para representar um número é a base decimal. Entretanto, os computadores trabalham com números na base binária. Nessa base, qualquer número natural é representado usando apenas os algarismos 0 e 1. Por exemplo, as representações dos números 9 e 12, na base binária, são 1001 e 1100, respectivamente. A operação de adição, na base binária, segue um algoritmo similar ao utilizado na base decimal, como detalhado no quadro:

a	*b*	*a* + *b*
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	10

Por exemplo, na base binária, a soma dos números 10 e 10 é 100, como apresentado: Alternativa **d**.

$$\begin{array}{r} 10 \\ +\ 10 \\ \hline 100 \end{array}$$

Considerando as informações do texto, o resultado da adição 9 + 12 será representado, na base binária, por

a) 101. **b)** 1101. **c)** 1111. **d)** 10101. **e)** 11001.

3 **Leia a atividade a seguir e indique a alternativa correta no caderno.**

(FMJ-SP) Em muitas linguagens de programação, para se criar uma variável, basta digitar o nome da variável e atribuir um valor a ela usando o sinal de igual. Por exemplo, o comando x = 2 cria uma variável x cujo valor é 2. Para alterar o valor da variável, podemos atribuir um novo valor a ela, que pode ser o resultado de uma operação envolvendo a própria variável.

Veja o seguinte exemplo de código:

```
res = 0; // cria a variável res com o valor zero
res = 5; // altera o valor da variável res para 5
res = res + 2; // altera o valor de res para 5 + 2, ou seja, para 7
res = res * 2; // altera o valor de res para 7 * 2, ou seja, para 14
```

Considere agora o seguinte código escrito em linguagem natural, observando que o símbolo * significa multiplicação:

```
res = 1;
res = 3 * res;
execute todo o código entre chaves, repetidamente,
até que o valor da variável res seja maior do que 20
{
    res = res + 1;
    res = 2 * res;
}
res = res − 5;
```

Após a execução desse código, o valor da variável res é Alternativa **d**.

a) 15. **b)** 25. **c)** 38. **d)** 33. **e)** 16.

SISTEMAS LINEARES E MATRIZES

O desempenho de um supercomputador é medido em *flop*/s, unidade de medida que indica quantas operações matemáticas de ponto flutuante (operações que envolvem números decimais) a máquina é capaz de realizar em um único segundo. No caso do supercomputador Frontier, sua capacidade de processamento é 1,206 *exaflop*/s. Um *exaflop/s* equivale a 10^{18} *flop/s* ou 1 quintilhão de operações matemáticas por segundo.

De acordo com o Projeto Top500, *ranking* dos 500 maiores supercomputadores do mundo, o supercomputador em uso mais potente no Brasil e na América Latina, em 2022, era o Pégaso, da Petrobras, com velocidade de processamento de dados de 21 *petaflop*/s. Para se ter uma ideia, um *petaflop/s* equivale a 10^{15} *flop/s* ou 1 quatrilhão de operações matemáticas por segundo.

Nesta unidade, você vai conhecer novos algoritmos ao estudar sistemas lineares e entender alguns conceitos relacionados ao modo como os supercomputadores executam seus cálculos.

OBJETIVOS

- Resolver sistemas lineares com e sem o apoio das tecnologias digitais.
- Relacionar a noção de matrizes à resolução de sistemas lineares.
- Elaborar argumentos e escrever conclusões.



O supercomputador Frontier tem a capacidade de executar 1,206 *exoflop* por segundo. Essa máquina, que usa aproximadamente 50 mil processadores e consome 20 milhões de watts, foi a primeira a atingir o nível de desempenho de computação conhecido como *exascale*, um limite de um quintilhão de cálculos por segundo. Foto de 2022. ▸

UNIDADE 4

9 Sistemas lineares

10 Matrizes



Oak Ridge National Laboratory/CC-BY

CAPÍTULO 9

SISTEMAS LINEARES

NESTE CAPÍTULO

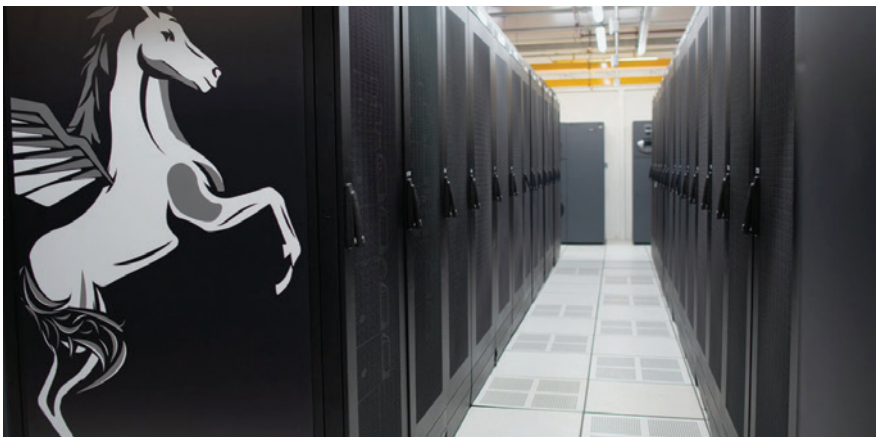
- Sistemas de equações lineares
- Resolução de sistemas lineares
- Classificação de sistemas lineares

Existem basicamente duas maneiras de construir um supercomputador. A primeira delas é conectar um grande número de computadores e reunir o poder de processamento deles. A segunda, e mais frequente, é associar muitos processadores (ou núcleos de processadores) em um único computador.

Por serem extremamente caras e terem alto custo de manutenção, máquinas desse tipo acabam sendo utilizadas apenas por governos ou grandes empresas.

O supercomputador Frontier fica no Laboratório Nacional de Oak Ridge, no Tennessee (Estados Unidos) e, para se ter uma ideia de seu tamanho, ele ocupa o espaço equivalente a duas quadras de tênis. O Frontier foi o primeiro em escala *exaflop/s* do mundo e resolve cálculos cinco vezes mais rápido (acima de 10^{18} cálculos por segundo) que os principais supercomputadores. Isso é possível porque o sistema tem 8 699 904 núcleos combinados de CPUs (Unidades Centrais de Processamento) e GPUs (Unidades de Processamento Gráfico) – combinação usada para maximizar o desempenho em tarefas complexas, como simulações científicas, modelagem climática, inteligência artificial e muito mais.

No Brasil, também há supercomputadores, como o Pégaso, que iniciou suas operações em 2015 e, de acordo com a 63ª edição do *ranking* mundial Top500, divulgado em junho de 2024, ficou na 56ª posição.



Felipe Gaspar/Agência Petrobras

Em 2022, o Pégaso foi o maior e o mais ecoeficiente supercomputador da América Latina. Foto de 2022.

Supercomputadores

O objeto digital acrescenta conhecimentos sobre supercomputadores, explicando como esses dispositivos realizam operações complexas em pesquisas avançadas e mostra a importância deles para o avanço científico e tecnológico.



Paisit Teeraphatsakool/Shutterstock.com/ID/BR

Calculadora simples.

A chegada de Gaia

A infraestrutura de alto desempenho voltada à pesquisa no Brasil também foi reforçada em 2023 com a aquisição por R$ 76 milhões pela Petrobras do supercomputador Gaia, de 7,7 *petaflops*, montado pela Dell. O Gaia entrou em operação em agosto do ano passado [2023] e é utilizado exclusivamente pelo Centro de Pesquisas, Desenvolvimento e Inovação da Petrobras (Cenpes). Seu objetivo é desenvolver e aperfeiçoar tecnologias ligadas à geofísica, entre elas ferramentas de processamento de imagens sísmicas, que usam ondas sonoras refletidas para criar uma espécie de tomografia computadorizada da subsuperfície da Terra.

[...]

Zaparolli, Domingos. Brasil aprimora infraestrutura de supercomputadores. *Pesquisa Fapesp*, n. 337, mar. 2024. Disponível em: https://revistapesquisa.fapesp.br/brasil-aprimora-infraestrutura-de-supercomputadores/. Acesso em: 15 out. 2024.

Você já sabe que os computadores são capazes de realizar muitos cálculos em um intervalo de tempo pequeno. Para representar essa quantidade, que caracteriza o desempenho de um computador, utiliza-se a unidade de medida *flop*/s. Para se ter um critério de comparação com os dados apresentados na abertura, uma calculadora simples tem um desempenho de 10 *flop*/s.

Não escreva no livro.

Neste momento, é possível solicitar aos estudantes que reflitam sobre problemas extremamente complexos que envolvem áreas como saúde, economia, ciências naturais, entre outras. O importante é que a situação mencionada seja demasiadamente complexa para ser respondida prontamente.

Como os dispositivos eletrônicos têm um poder de processamento elevado, costuma-se utilizar múltiplos do *flop*/s para expressar seu desempenho. Por exemplo, um console de *videogame* pode apresentar uma capacidade de processamento de imagens da ordem de 6 *teraflop*/s, ou seja, ele é capaz de gerar gráficos nos quais são processados 6 trilhões de cálculos por segundo. O quadro a seguir mostra os múltiplos do *flop*/s mais utilizados.

Ordem de grandeza	Quantidade (*flop*/s)
megaflop/s	10^6
gigaflop/s	10^9
teraflop/s	10^{12}
petaflop/s	10^{15}
exaflop/s	10^{18}
zettaflop/s	10^{21}
yottaflop/s	10^{24}

Você pode se perguntar: Por que precisamos de computadores com um poder de processamento tão grande? A resposta a essa pergunta está relacionada ao tipo de complexidade dos problemas ou à magnitude dos dados que devem ser processados. De maneira geral, quanto mais complexo for um problema, maior deverá ser a capacidade computacional para poder resolvê-lo.

Atualmente, os supercomputadores são utilizados para diversos fins, como para testar tratamentos contra doenças como alguns tipos de câncer e aids, ou realizar simulações que envolvam fatores de risco, como explosões nucleares e colisões de partículas atômicas. O poder computacional dessas máquinas também pode servir para simular projeções de como os sistemas econômicos de um país podem entrar em colapso dependendo das ações realizadas, ou, ainda, para analisar o impacto ambiental de catástrofes, como derramamento de petróleo nos oceanos, rompimento de barragens, furacões, terremotos e *tsunamis*.

Uma área em que os supercomputadores são bastante utilizados é a meteorologia. Quando verificamos a previsão do tempo para um dia, uma semana ou até mesmo para um mês, estamos observando o resultado de um processo que envolveu centenas de milhares de cálculos sobre milhões de dados coletados por uma rede de sensores globais. Quanto maior o poder de processamento de um supercomputador, mais eficaz a previsão do tempo para a região que ele se dedica a analisar. No Brasil, até 2023, era utilizado o supercomputador Tupã para realizar projeções meteorológicas. Ele ficava no Centro de Estudos e Previsão de Tempo e Estudos Climáticos do Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (Inpe), em Cachoeira Paulista (SP). Na primeira semana de julho de 2024, o Inpe publicou um edital para adquirir um supercomputador novo, com mais capacidade de processamento e armazenamento de dados.

Você já pensou quantas variáveis são consideradas para realizar a previsão do tempo? Quais informações são necessárias para saber se vai, ou não, chover? Suponha que tenhamos de relacionar diferentes variáveis, como velocidade dos ventos, pressão atmosférica, temperatura média local, índice de radiação ultravioleta e umidade relativa do ar, tudo de uma única vez. Como a Matemática pode contribuir para analisar essas variáveis simultaneamente e empregar o resultado em um único modelo meteorológico? Neste capítulo, você vai estudar sistemas lineares, que ajudarão você a entender melhor o estudo simultâneo de diversas variáveis.

PARA EXPLORAR

Vídeo

***O supercomputador e a infraestrutura*. Petrópolis: Unifase, 2015. 1 vídeo (18 min 51s). Série *SDumont: uma porta para o futuro*, canal Unifase. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=Utch-ztvbBk. Acesso em: 15 out. 2024.**

Quer ver a infraestrutura que suporta um supercomputador sendo construída? Então, acesse o *site* ou aponte a câmera do seu celular para o *QR Code* a seguir e assista ao primeiro episódio dessa série, que mostra a instalação do supercomputador Santos Dumont, no Laboratório Nacional de Computação Científica (LNCC) em Petrópolis (RJ).



Mar de Palha/ID/BR

Tela de celular com aplicativo de previsão do tempo em um dia, em Curitiba (PR). Foto de 2024.

Para o fechamento deste tópico, sugerimos realizar um trabalho em parceria com os professores de Biologia, Física e Geografia, a fim de contribuir para o desenvolvimento da competência específica **2**, da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, de modo que os estudantes construam e utilizem interpretações sobre a dinâmica da vida para fundamentar decisões responsáveis, e da competência específica **1**, da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, questionando quais são os fatores (índices) que podem influenciar o tempo localmente – ou seja, analisando processos a partir de procedimentos científicos para compreender e se posicionar criticamente com relação a esses processos. Os estudantes podem, por exemplo, pesquisar se há alguma estação de captação meteorológica próxima à escola, quais instrumentos a compõem e como os dados são transmitidos para as estações que tratam essas informações.

Não escreva no livro.

SISTEMAS LINEARES 2 × 2

Os textos abordados neste tópico contribuem para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT301**, pois os estudantes vão resolver problemas que envolvem equações lineares simultâneas, e da competência específica **7** da área de Linguagens e suas Tecnologias, ao mobilizarem práticas de linguagem no universo digital.

Em anos anteriores, você provavelmente estudou equações e sistemas de equações com duas variáveis. Agora, vamos retomar e ampliar esse estudo para, em seguida, analisar situações que envolvem mais variáveis.

Para começar, acompanhe a situação a seguir.

> Pensando em um projeto de intervenção social destinado à inclusão de tecnologias digitais em comunidades carentes, um estudante orçou com alguns fornecedores o preço de certos componentes para montar dois modelos de computador.
>
> O primeiro modelo, composto de um processador de quatro núcleos e duas memórias de armazenamento, de acordo com o orçamento recebido, terá um custo total de R$ 2 120,00. Já o segundo modelo, com um processador de quatro núcleos associado a outro processador de dois núcleos e uma memória de armazenamento, no mesmo fornecedor, custará R$ 2 160,00.
>
> Em ambos os modelos, os valores dos núcleos são iguais, assim como os das memórias.
>
> Com base nessas informações, responda: Qual é o preço de cada núcleo? E qual é o preço de cada memória?

Para resolver essa situação, vamos representar o valor de cada núcleo por x e o valor de cada memória por y. Assim, a situação proposta pode ser representada por um sistema com duas equações e duas incógnitas:

$$\underbrace{4}_{\text{quantidade de núcleos}} \cdot \underbrace{x}_{\text{valor de cada núcleo}} + \underbrace{2}_{\text{quantidade de memórias}} \cdot \underbrace{y}_{\text{valor de cada memória}} = 2120$$

$$\underbrace{6}_{\text{quantidade de núcleos}} \cdot \underbrace{x}_{\text{valor de cada núcleo}} + \underbrace{1}_{\text{quantidade de memórias}} \cdot \underbrace{y}_{\text{valor de cada memória}} = 2160$$

Logo, podemos escrever o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 4x + 2y = 2120 \\ 6x + y = 2160 \end{cases}$$

As equações que formam esse sistema são do 1º grau e, por esse motivo, são chamadas de **lineares**. Além disso, como esse sistema é formado por duas equações com duas incógnitas, ele é denominado **sistema linear dois por dois (2 × 2)**.

De modo geral:

> **Sistema linear 2 × 2** com as incógnitas x e y é um conjunto de duas equações lineares simultâneas em x e y.
>
> $$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$
>
> Nessas equações, a, b, c, d, e e f são números reais, com a e b não simultaneamente nulos e com d e e também não simultaneamente nulos.

Resolução de sistemas lineares 2 × 2

Resolver um sistema linear significa encontrar os pares de números reais que sejam soluções de todas as equações do sistema simultaneamente. Para isso, existem diferentes maneiras de resolver sistemas lineares 2 × 2. Duas delas

Não escreva no livro.

certamente você já conhece: o método da substituição e o método da adição. No exemplo a seguir, vamos relembrar como utilizar esses métodos.

Considere o sistema linear a seguir.

$$\begin{cases} x + 4y = 100 \\ 2x + 3y = 90 \end{cases}$$

Vamos resolvê-lo utilizando as duas maneiras citadas.

Método da substituição

Essa forma de resolução consiste em isolar uma das incógnitas em uma das equações e substituir esse valor na outra equação. Por exemplo, da primeira equação, temos:

$$x + 4y = 100 \Rightarrow x = 100 - 4y$$

Substituindo x na segunda equação do sistema, obtemos uma equação com apenas uma incógnita:

$$2(100 - 4y) + 3y = 90$$

Resolvendo, obtemos:

$$\begin{aligned} 200 - 8y + 3y &= 90 \\ 200 - 5y &= 90 \\ 200 - 90 &= 5y \\ 110 &= 5y \\ 22 &= y \end{aligned}$$

Como $x = 100 - 4y$, temos:

$$\begin{aligned} x &= 100 - 4 \cdot 22 \\ x &= 100 - 88 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

Logo, a solução do sistema é $x = 12$ e $y = 22$.

Método da adição

Pelo método da adição, devemos adicionar as duas equações de modo a obter uma equação final com apenas uma incógnita.

Como exemplo, vamos eliminar a incógnita x.

Para isso, multiplicamos os dois membros da primeira equação por (-2), o que não altera a igualdade.

$$\begin{cases} x + 4y = 100 \\ 2x + 3y = 90 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (-2) \cdot (x + 4y) = (-2) \cdot 100 \\ 2x + 3y = 90 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x - 8y = -200 \\ 2x + 3y = 90 \end{cases}$$

Agora, adicionamos, termo a termo, as duas equações do sistema.

$$\begin{cases} -2x - 8y = -200 \\ 2x + 3y = 90 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -5y &= -110 \\ 5y &= 110 \\ y &= 22 \end{aligned}$$

Substituímos y por 22 em qualquer uma das equações do sistema inicial para determinar o valor de x.

$$x + 4y = 100 \Rightarrow x + 4 \cdot 22 = 100 \Rightarrow x = 100 - 88 \Rightarrow x = 12$$

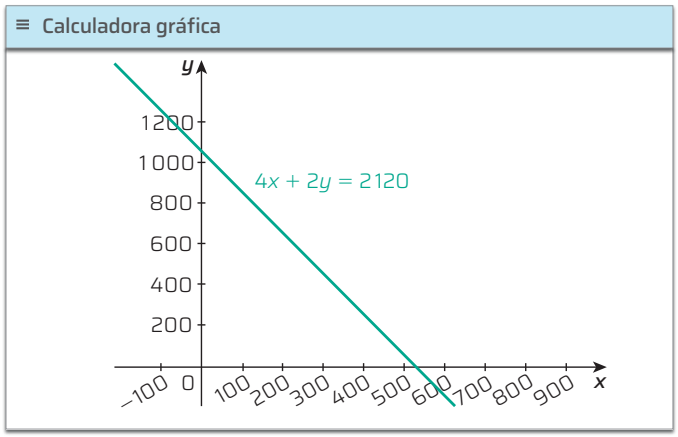
Logo, a solução do sistema é $x = 12$ e $y = 22$.

Agora que você relembrou os dois principais métodos de resolução de sistemas lineares, vamos mostrar mais uma ferramenta que pode ser utilizada para resolvê-los: os *softwares* de Geometria dinâmica.

Utilizando *softwares* desse tipo, é possível representar graficamente as equações de um sistema linear. Como essas equações estão associadas a funções do 1º grau, o gráfico de cada uma delas é uma reta.

Vamos resolver, então, o problema proposto inicialmente neste tópico (determinar o preço do núcleo e o preço da memória do computador) usando um *software* de Geometria dinâmica. Caso não seja possível acessá-lo, você pode traçar os gráficos no caderno.

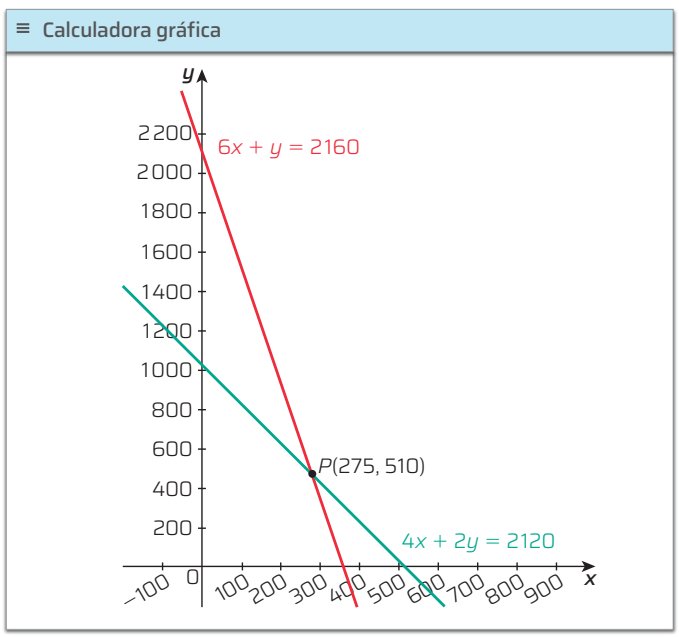
Primeiro, no campo de entrada do *software*, vamos colocar a primeira equação do sistema.



Nelson Matsuda/ID/BR

Depois, colocamos a segunda equação na mesma área de trabalho.

Questione os estudantes sobre o motivo de o preço de cada núcleo não ser R$ 510,00 e o de cada memória não ser R$ 275,00. Observe se eles percebem que o par ordenado (275, 510) é diferente do par (510, 275) e que o primeiro valor do par se refere à abscissa, e o segundo, à ordenada.



Nelson Matsuda/ID/BR

Gráfico que representa o sistema de equações $\begin{cases} 4x + 2y = 2120 \\ 6x + y = 2160 \end{cases}$

As coordenadas de cada um dos pontos de uma reta formam um par ordenado que é solução da equação representada por ela. Perceba que, nesse caso, ao representarmos as duas retas no plano cartesiano, elas se interceptam em um único ponto P, chamado de ponto de intersecção. As coordenadas do ponto P satisfazem simultaneamente tanto a primeira quanto a segunda equação, portanto, correspondem à solução do sistema.

Assim, concluímos que o preço de cada núcleo é R$ 275,00, e o valor de cada memória é R$ 510,00.

Não escreva no livro.

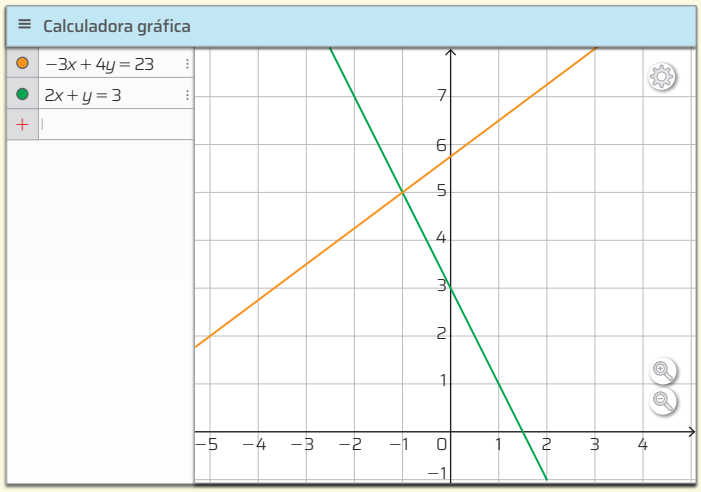
TECNOLOGIA

As etapas indicadas aqui podem ser feitas, por exemplo, no *software* de Geometria dinâmica GeoGebra.

Acompanhe as etapas apresentadas para resolver o sistema linear 2 × 2 a seguir, utilizando um *software* de Geometria dinâmica.

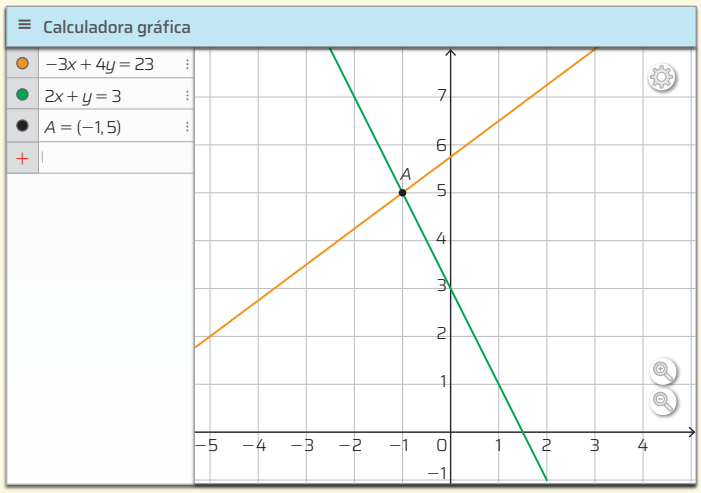
$$\begin{cases} -3x + 4y = 23 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

1ª etapa: Represente cada uma das equações do sistema. Para isso, no campo "Entrada", digite −3x+4y=23 e clique em "*Enter*". Em seguida, digite 2x+y=3 e, novamente, clique em "*Enter*". As retas que representam as equações do sistema são construídas automaticamente na "Janela de visualização".



Nelson Matsuda/ID/BR

2ª etapa: Para determinar as soluções do sistema, verifique o ponto em que as retas construídas se intersectam. Para isso, selecione a ferramenta "Intersecção de dois objetos"  . Depois, clique nas duas retas construídas, assim o *software* marcará o ponto de intersecção entre elas. As coordenadas desse ponto correspondem à solução do sistema. É possível observá-las na "Janela de Álgebra".



Nelson Matsuda/ID/BR

ATIVIDADES

1 De acordo com a construção apresentada, qual é o conjunto solução do sistema obtido com o uso do *software*?

$S = \{(-1, 5)\}$

2 Utilizando um *software* de Geometria dinâmica, resolva os sistemas representados a seguir.

a) $\begin{cases} -2x + 3y = -3 \\ x + 5y = 21 \end{cases}$ $S = \{(6, 3)\}$

b) $\begin{cases} 3x + y = 0 \\ 6x + 2y = 22 \end{cases}$ $S = \varnothing$

c) $\begin{cases} -2x + y = -15 \\ 6x - 3y = 45 \end{cases}$ $S = \varnothing$

d) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 7x + 9y = -13 \end{cases}$ $S = \{(-7, 4)\}$

3 Represente a situação-problema a seguir em um sistema linear 2 × 2.

> Em um caixa eletrônico, Marcos sacou R$ 230,00 em cédulas de R$ 50,00 e R$ 20,00. Sabendo que, no total, ele adquiriu 7 cédulas nesse saque, determine a quantidade de cada cédula que ele recebeu.

Em seguida, utilizando um *software* de Geometria dinâmica, resolva esse sistema e determine a solução dessa situação-problema. $S = \{(3, 4)\}$

Se possível, incentive os estudantes a construir as representações gráficas apresentadas neste tópico utilizando um *software* de Geometria dinâmica, de maneira que possam exercitar o uso de diferentes linguagens (matemática e computacional) e, assim, desenvolver as competências gerais **4** e **5**.

Classificação de sistemas lineares 2 × 2

Vamos retornar ao sistema $\begin{cases} 4x + 2y = 2120 \\ 6x + y = 2160 \end{cases}$ que utilizamos para resolver a situação do primeiro tópico.

Ao resolvê-lo algebricamente, ou ao observar os gráficos correspondentes a cada equação, concluímos que há apenas um par de números que satisfaz simultaneamente as duas equações; portanto, o sistema tem apenas uma solução. Nesse caso, dizemos que o sistema é **possível e determinado**, e as retas que representam suas equações são concorrentes (apresentam um ponto de intersecção). Seu conjunto solução é $S = \{(275, 510)\}$.

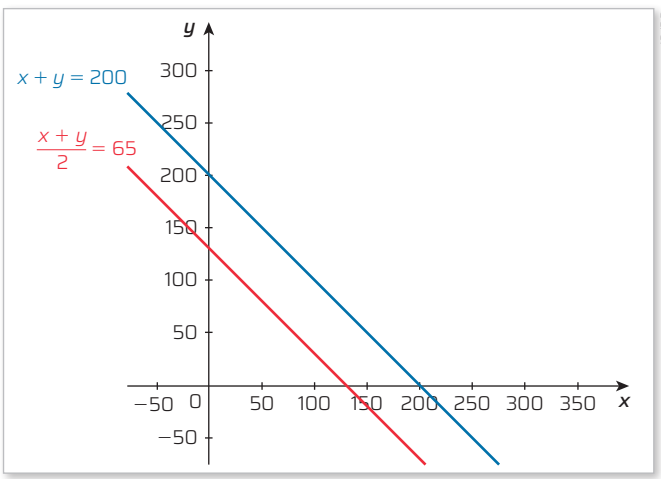
No entanto, nem todo sistema linear 2 × 2 é possível e determinado. Acompanhe outros exemplos.

Exemplo 1

A soma de dois números, x e y, é 200 e a média aritmética entre eles é 65. Determine os números x e y.
O sistema que representa o problema é:

$$\begin{cases} x + y = 200 \\ \dfrac{x + y}{2} = 65 \end{cases}$$

Podemos representar graficamente a solução da maneira ao lado.
As retas que representam as equações do sistema são paralelas e, nesse caso, não apresentam pontos em comum. Isso indica que não há um par ordenado cujas coordenadas satisfaçam simultaneamente as duas equações e, portanto, o sistema é **impossível** e seu conjunto solução é vazio ($S = \varnothing$).
Também é possível verificar esse fato analisando os coeficientes de ambas as equações quando reescritas na forma $y = mx + n$.



ID/BR

$$\begin{cases} x + y = 200 \\ \dfrac{x + y}{2} = 65 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 200 \\ x + y = 130 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1x + 200 \\ y = -1x + 130 \end{cases}$$

Note que os coeficientes m das duas equações são iguais a -1. Isso indica que a inclinação das retas em relação ao eixo das abscissas é a mesma. No entanto, os coeficientes n de cada equação, chamados de coeficientes lineares, são diferentes e indicam o ponto de intersecção das retas com o eixo Oy. Se ambas as retas têm a mesma inclinação com o eixo Ox e intersectam o eixo Oy em pontos diferentes, isso implica que as retas são paralelas distintas. Em outras palavras, não existem dois números com soma 200 e tais que sua média aritmética seja 65.

Exemplo 2

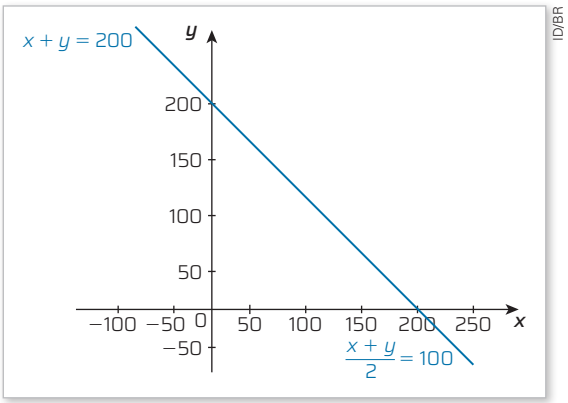
A soma de dois números, x e y, é 200 e a média aritmética entre eles é 100. Quais são esses números?
Nesse caso, o sistema que traduz o problema é:

$$\begin{cases} x + y = 200 \\ \dfrac{x + y}{2} = 100 \end{cases}$$

Não escreva no livro.

Investigar diferentes estratégias para resolver sistemas lineares favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT301**. Incentive os estudantes a resolver as situações propostas algébrica ou geometricamente ou por meio da análise dos coeficientes das equações que compõem o sistema.

Observe a seguir a representação gráfica das duas equações no plano cartesiano.



As retas que representam as equações do sistema são coincidentes, ou seja, todos os seus pontos são comuns. Isso significa que existem infinitos pares ordenados que apresentam coordenadas que satisfazem ao mesmo tempo as duas equações. A solução do sistema são todas as duplas do tipo $(x, 200 - x)$. Portanto, esse sistema é classificado como **possível e indeterminado** e sua solução é $S = \{(x, 200 - x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Agora, vamos analisar os coeficientes das equações quando escritas na forma $y = mx + n$.

$$\begin{cases} x + y = 200 \\ \dfrac{x + y}{2} = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 200 \\ x + y = 200 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1x + 200 \\ y = -1x + 200 \end{cases}$$

Observe que o coeficiente m das duas equações é o mesmo e que o coeficiente n das duas equações também é igual. Isso significa que as retas que representam as equações do sistema apresentam a mesma inclinação em relação ao eixo das abcissas e passam pelo mesmo ponto no eixo Oy. Isso só acontece quando as retas são coincidentes.

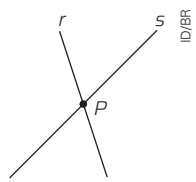
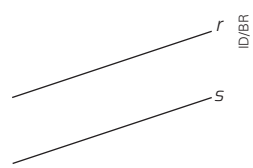
Assim, concluímos que existem infinitos pares de números cuja soma é 200 e cuja média aritmética é 100.

Podemos resumir as definições da seguinte maneira:

Como duas retas no plano só podem ser concorrentes, paralelas ou coincidentes e os sistemas lineares 2×2 correspondem a duas retas no plano, podemos classificá-los quanto à quantidade de soluções.

- Quando há uma única solução, o sistema é **possível e determinado (SPD)** e pode ser representado no plano cartesiano por retas concorrentes. A solução do sistema são as coordenadas do ponto de intersecção das retas.
- Quando há infinitas soluções, o sistema é **possível e indeterminado (SPI)** e pode ser representado por retas coincidentes. A solução do sistema é uma infinidade de pares ordenados, correspondentes às coordenadas dos pontos da reta que representa o sistema.
- Quando não há solução, o sistema é **impossível (SI)** e pode ser representado no plano cartesiano por retas paralelas. O conjunto solução do sistema é vazio ($\varnothing$).

Esquematizando, temos:

Sistema possível e determinado (SPD)	Sistema possível e indeterminado (SPI)	Sistema impossível (SI)
retas concorrentes $r \times s$ 	retas coincidentes $r \equiv s$ 	retas paralelas $r \parallel s$ 
$r \cap s = \{P\}$ uma única solução	$r \cap s = \{r, s\}$ infinitas soluções	$r \cap s = \varnothing$ não há solução

Não escreva no livro.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Incentive a resolução do problema antes da leitura da resolução apresentada no texto do livro. Depois, analise e compare com os estudantes as resoluções algébrica e geométrica para o sistema 2 × 2 correspondente a esta situação.

R1 (Cotil-SP) Em um dos parques da cidade existem duas pistas: uma de caminhada e outra de corrida. Elas possuem uma configuração circular e concêntrica (mesmo centro), como mostra a figura. O atleta Bira, diariamente, caminha e corre nessas pistas. Este, fazendo uso de um podômetro (aparelho utilizado para medir passos), notou, no primeiro dia, que, dando uma volta na pista de caminhada e três na pista de corrida, totalizou 2 600 passos. No segundo dia, foram duas voltas na pista de caminhada e duas na pista de corrida, totalizando 2 000 passos.



Cotil. Fac-símile: ID/BR

Sabendo que um passo de Bira mede 1,5 m, quanto mede a pista de corrida?

a) 200 m
b) 300 m
c) 800 m
d) 1200 m

Resolução

Vamos representar o número de passos na pista de caminhada por x e o número de passos na pista de corrida por y. De acordo com o enunciado, temos as seguintes equações:

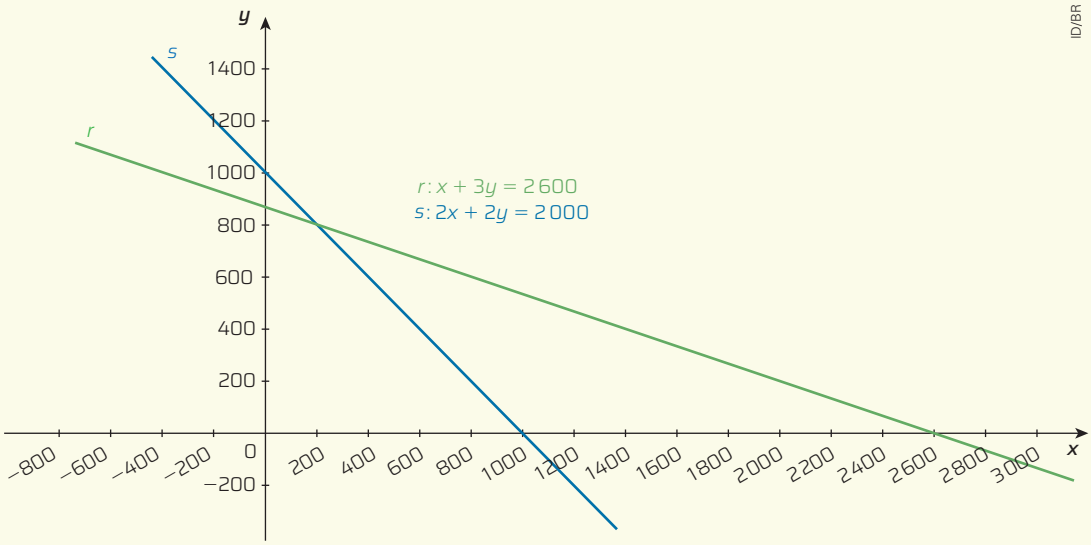
$$\underbrace{1 \cdot x}_{\substack{\text{Número de passos na pista de caminhada no 1º dia}}} + \underbrace{3 \cdot y}_{\substack{\text{Número de passos na pista de corrida no 1º dia}}} = \underbrace{2600}_{\substack{\text{Número total de passos do 1º dia}}}$$

$$\underbrace{2 \cdot x}_{\substack{\text{Número de passos na pista de caminhada no 2º dia}}} + \underbrace{2 \cdot y}_{\substack{\text{Número de passos na pista de corrida no 2º dia}}} = \underbrace{2000}_{\substack{\text{Número total de passos do 2º dia}}}$$

Dessa forma, obtemos o seguinte sistema de equações lineares com duas incógnitas:

$$\begin{cases} x + 3y = 2600 \\ 2x + 2y = 2000 \end{cases}$$

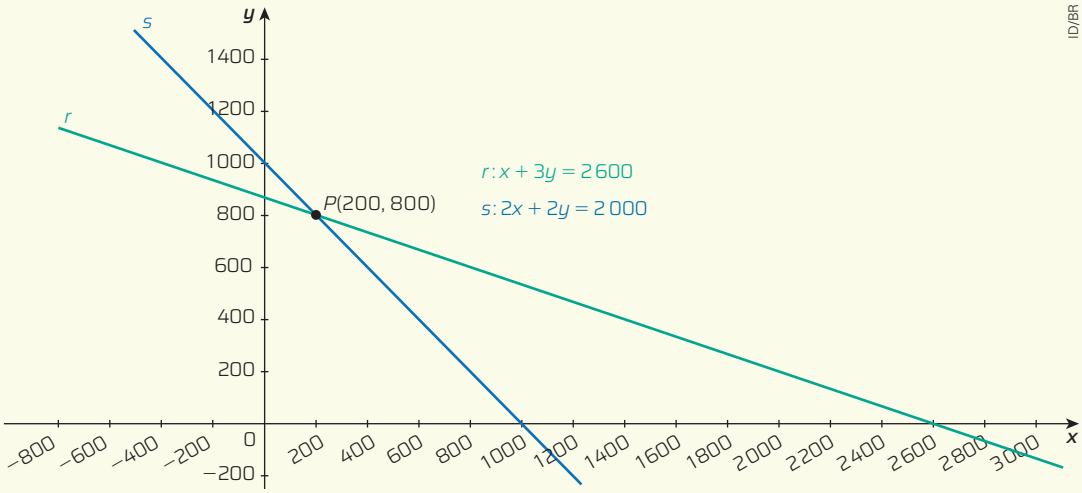
Representando tais equações no plano, obtemos duas retas concorrentes, r e s.



ID/BR

Não escreva no livro.

Determinando o ponto P de intersecção entre as retas r e s e verificando suas coordenadas, obtemos $P(200, 800)$.



ID/BR

Logo, a pista de caminhada tem um comprimento equivalente a 200 passos do atleta, e o comprimento da pista de corrida equivale a 800 passos dele. Como cada passo do atleta mede 1,5 m, temos:

$$800 \cdot 1{,}5 = 1200$$

Portanto, a pista de corrida mede 1200 metros e a alternativa correta é a **d**.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 **Resolva a atividade e escreva a alternativa correta no caderno.**

(Cefet-MG) Uma coleção de doze livros foi distribuída entre Augusto e Bárbara. Se Augusto tivesse recebido três livros a mais do que recebeu dessa coleção, então a quantidade de livros recebida por ele seria igual ao dobro da quantidade de livros recebida por Bárbara. O número de livros que Bárbara recebeu é igual a: Alternativa **c**.

a) 8 **b)** 7 **c)** 5 **d)** 4

2 **Registre a alternativa correta no caderno.**

(IFPE) Uma instituição de caridade arrecadou, durante uma campanha de recebimento de donativos tecnológicos, cerca de 183 equipamentos, entre televisores, computadores e dispositivos eletrônicos portáteis (*tablets* ou celulares). Sabe-se que o número de computadores é uma unidade a mais que o triplo do número de televisores, enquanto que o número de dispositivos eletrônicos portáteis é a metade do número de computadores. Determine o número de televisores doados. Alternativa **a**.

a) 33 **c)** 83 **e)** 57
b) 50 **d)** 61

3 **Indique no caderno a alternativa correta.**

(IFSul-RS) O celular, visto por muitos como um bem essencial no dia a dia, pode ocasionar danos ao corpo humano se usado de modo excessivo. Pesquisas científicas comprovam que dores na cabeça ligadas a tensões na nuca e no pescoço são causadas pelo tempo inclinado em uma posição indevida para visualizar a tela do celular, bem como há indícios de estreita relação entre a radiação do telefone celular e a ocorrência de tumores cerebrais.

Disponível em: http://g1.globo.com/fantastico/noticia/2015/08/estudo-mostra-que-radiacao-de-celulares-pode-ser-prejudicial-saude.html. Acesso em: 26 out. 2015.

Considere que um cientista pretende realizar uma pesquisa sobre os danos causados ao corpo humano devido ao uso excessivo de celulares. Para tanto, ele vai entrevistar 2 438 pacientes, dividindo em dois grupos (x e y), de forma que a soma de 30% do grupo x com 50% do grupo y resulta em 921 pacientes. Nessas condições, a quantidade de pacientes do grupo x e do grupo y é de, respectivamente: Alternativa **d**.

a) 447 e 474 **c)** 948 e 1490
b) 474 e 447 **d)** 1490 e 948

4 **Escreva a resposta correta no caderno.**

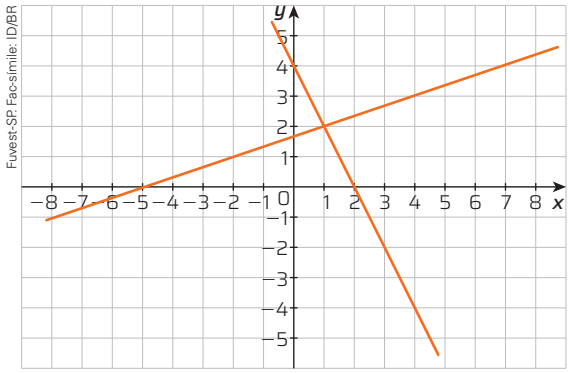
(Famema-SP) Em um grupo de 150 estudantes, 25% das mulheres e 50% dos homens falam espanhol. Sabendo que 34% dos estudantes desse grupo falam espanhol, o número de mulheres desse grupo que falam espanhol é: Alternativa **d**.

a) 38. **c)** 45. **e)** 54.
b) 51. **d)** 24.

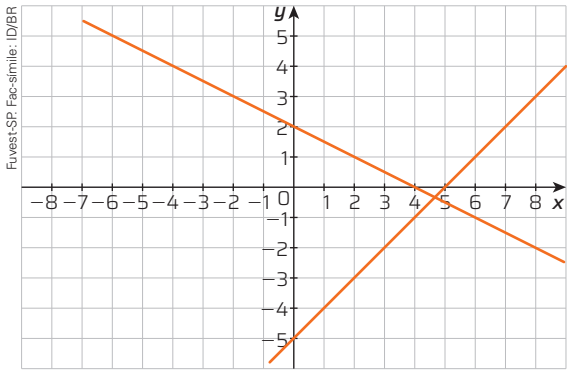
5 (Fuvest-SP) Considere o sistema linear $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$.

Assinale [no caderno] a alternativa que representa graficamente esse sistema. Alternativa **e**.

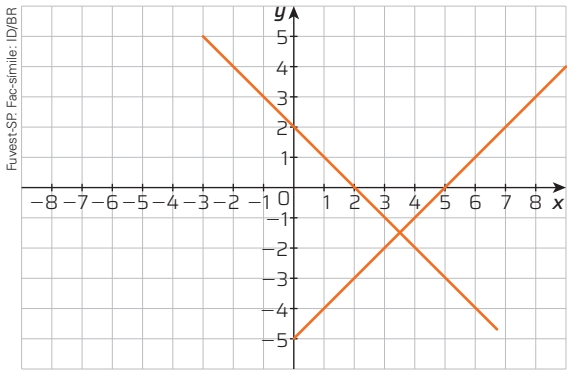
a)



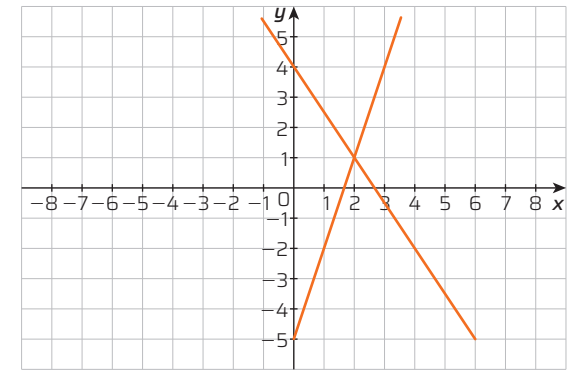
b)



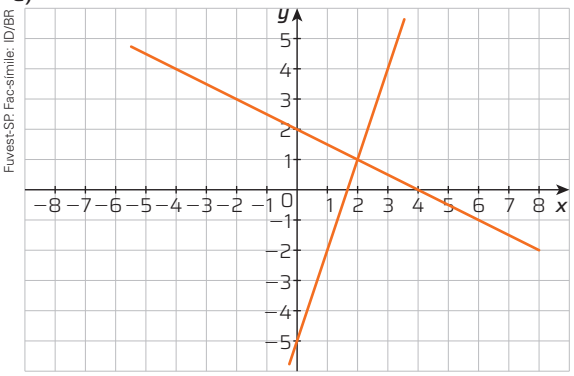
c)



d)



e)



6 Usando um *software* de Geometria dinâmica, trace duas retas concorrentes no plano. Em seguida, utilizando os recursos disponíveis no programa, verifique as equações das retas e elabore um sistema de equações lineares. Resolva o sistema por meio de um dos métodos algébricos que você conhece. Por fim, verifique se as coordenadas do ponto de intersecção entre as retas que você traçou no *software* correspondem à solução do sistema que você obteve.

7 Trace uma reta r qualquer no plano utilizando um *software* de Geometria dinâmica. Com os recursos disponíveis, insira um ponto P sobre a reta e configure-o para que suas coordenadas sejam exibidas. Depois, marque um ponto P', diferente de P e que não pertença a r. Exiba as coordenadas de P'. Determine algebricamente a equação da reta s que passa por P' e por P. Por fim, utilizando os recursos do *software*, verifique se a equação da reta s que você obteve estava correta.

8 Indique a resposta correta no caderno.

(Fuvest-SP) Uma agência de turismo vendeu um total de 78 passagens para os destinos: Lisboa, Paris e Roma. Sabe-se que o número de passagens vendidas para Paris foi o dobro do número de passagens vendidas para os outros dois destinos conjuntamente. Sabe-se também que, para Roma, foram vendidas duas passagens a mais que a metade das vendidas para Lisboa. Qual foi o total de passagens vendidas, conjuntamente, para Paris e Roma? Alternativa **d**.

a) 26 c) 42 e) 68
b) 38 d) 62

9 Indique a alternativa correta no caderno.

(Enem) O metrô de um município oferece dois tipos de tíquetes com colorações diferentes, azul e vermelha, sendo vendidos em cartelas, cada qual com nove tíquetes da mesma cor e mesmo valor unitário. Duas cartelas de tíquetes azuis e uma cartela de tíquetes vermelhos são vendidas por R$ 32,40. Sabe-se que o preço de um tíquete azul menos o preço de um tíquete vermelho é igual ao preço de um tíquete vermelho mais cinco centavos. Qual o preço, em real, de uma cartela de tíquetes vermelhos? Alternativa **b**.

a) 4,68 c) 9,30 e) 10,65
b) 6,30 d) 10,50

Não escreva no livro.

SISTEMAS LINEARES 3 × 3

Este tópico contribui para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT301**, pois os estudantes vão resolver problemas que envolvem equações lineares simultâneas.

Vamos ampliar o que você aprendeu sobre sistemas lineares 2 × 2 para sistemas lineares com mais equações. Para começar, leia o problema a seguir.

> (UEL-PR) Uma mãe, com o intuito de organizar os brinquedos dos seus filhos, teve a ideia de colocá-los em caixas coloridas. Ela classificou os brinquedos em três categorias, de acordo com seus tamanhos, sendo elas: brinquedos pequenos, médios e grandes. Para a organização, a mãe utilizou caixas de acrílico amarelas, verdes e azuis, as quais comportam as seguintes quantidades de brinquedos:
>
> - caixas amarelas: 2 grandes, 8 médios e 10 pequenos;
> - caixas verdes: 2 grandes, 20 médios e 16 pequenos;
> - caixas azuis: 1 grande, 10 médios e 14 pequenos.
>
> Considere que as crianças possuem 12 brinquedos grandes, 72 brinquedos de tamanho médio e 84 pequenos e que foi colocada, em cada caixa, exatamente a quantidade de brinquedos de cada categoria que ela comporta. Quantas caixas de cada cor esta mãe utilizou para acomodar todos os brinquedos de seus filhos? [...]

Vamos representar a quantidade de caixas amarelas por x, a de caixas verdes por y, e a de caixas azuis por z. Para acomodar apenas os brinquedos grandes, serão necessárias:

$\underbrace{2 \cdot x}_{\text{quantidade de caixas amarelas}} + \underbrace{2 \cdot y}_{\text{quantidade de caixas verdes}} + \underbrace{1 \cdot z}_{\text{quantidade de caixas azuis}} = \underbrace{12}_{\text{quantidade de brinquedos grandes}}$

Da mesma forma, podemos determinar a quantidade de caixas para guardar os brinquedos de tamanho médio:

$\underbrace{8 \cdot x}_{\text{quantidade de caixas amarelas}} + \underbrace{20 \cdot y}_{\text{quantidade de caixas verdes}} + \underbrace{10 \cdot z}_{\text{quantidade de caixas azuis}} = \underbrace{72}_{\text{quantidade de brinquedos médios}}$

E, também, para armazenar os brinquedos pequenos:

$\underbrace{10 \cdot x}_{\text{quantidade de caixas amarelas}} + \underbrace{16 \cdot y}_{\text{quantidade de caixas verdes}} + \underbrace{14 \cdot z}_{\text{quantidade de caixas azuis}} = \underbrace{84}_{\text{quantidade de brinquedos pequenos}}$

Logo, para determinar a quantidade de cada caixa de cada cor para armazenar todos os brinquedos, temos de resolver o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 12 \\ 8x + 20y + 10z = 72 \\ 10x + 16y + 14z = 84 \end{cases}$$

As ternas de valores (x, y, z) que tornam as três igualdades verdadeiras formam a solução desse sistema de equações. O sistema que representa o problema é linear três por três (3 × 3) porque é formado por três equações lineares com três incógnitas.

De modo geral:

Sistema linear 3 × 3 com as incógnitas x, y e z é um conjunto de três equações lineares simultâneas em x, y e z.

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ ex + fy + gz = h \\ kx + ly + mz = n \end{cases}$$

Nessas equações, $a, b, c, d, e, f, g, h, k, l, m$ e n são números reais e a, b e c; e, f e g; e k, l e m não são simultaneamente nulos. O conjunto de todas as ternas de números reais (a_1, a_2, a_3) que satisfazem simultaneamente as três equações do sistema será o conjunto solução do sistema.

Resolução de sistemas lineares 3 × 3

Assim como nos sistemas lineares 2 × 2, também é possível resolver sistemas 3 × 3 algebricamente por procedimentos muito parecidos com os métodos da substituição e da adição.

Vamos resolver o sistema proposto comparando as equações, duas a duas, de modo a substituir uma das equações por outra equivalente com menos incógnitas. Acompanhe uma maneira possível de fazer isso.

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 12 & (1) \\ 8x + 20y + 10z = 72 & (2) \\ 10x + 16y + 14z = 84 & (3) \end{cases}$$

Multiplicamos a equação (1) por −10 e a adicionamos à equação (2):

$$+\begin{cases} -20x - 20y - 10z = -120 \\ 8x + 20y + 10z = 72 \end{cases}$$

$$-12x = -48$$

$$x = 4 \quad (4)$$

Multiplicamos a equação (1) por −8 e a adicionamos à equação (3), obtendo:

$$+\begin{cases} -16x - 16y - 8z = -96 \\ 10x + 16y + 14z = 84 \end{cases}$$

$$-6x + 6z = -12 \quad (5)$$

Como $x = 4$, fazendo a substituição na equação (5), temos:

$$-6 \cdot 4 + 6z = -12$$

$$6z = 12$$

$$z = 2$$

Substituindo na equação (1) os valores de $x = 4$ e $z = 2$, obtemos:

$$2 \cdot 4 + 2y + 2 = 12$$

$$8 + 2y + 2 = 12$$

$$2y = 12 - 8 - 2$$

$$2y = 2$$

$$y = 1$$

Portanto, para organizar os brinquedos, essa mãe utilizou quatro caixas amarelas, uma caixa verde e duas caixas azuis.

Algumas considerações importantes:

- Ao resolver um sistema, analise primeiro o que é mais fácil fazer: simplificar e eliminar uma das incógnitas ou substituir uma das incógnitas.
- Dois sistemas lineares são equivalentes quando têm o mesmo conjunto solução. Para transformar um sistema linear em outro mais simples, equivalente ao primeiro, podemos:
  - trocar duas equações de posição;
  - multiplicar ou dividir os dois membros das equações do sistema por um número diferente de zero;
  - adicionar uma equação à outra, membro a membro, multiplicada ou dividida por um número diferente de zero.

Não escreva no livro.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R2 Encontre o conjunto solução e classifique os sistemas quanto às suas soluções.

a) $\begin{cases} x + 3y - z = 2 \\ 2x + 4y + z = 7 \\ 3x + 9y - 3z = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 3y - 4z = 2 \\ 2x - y + 2z = 5 \\ x - 11y + 16z = 4 \end{cases}$

Antes de os estudantes lerem as resoluções propostas para **R2**, proponha que analisem cada um dos sistemas e pensem em estratégias para resolvê-los. A discussão coletiva das ideias iniciais é uma oportunidade para avaliar o que a turma compreendeu até aqui sobre resolução de sistemas e o uso da linguagem específica.

Resolução

a) Vamos resolver o sistema pelo método da adição.

$$\begin{cases} x + 3y - z = 2 & (1) \\ 2x + 4y + z = 7 & (2) \\ 3x + 9y - 3z = 8 & (3) \end{cases}$$

Multiplicando a equação (1) por -3 e adicionando-a à equação (3), temos:

$$+\begin{cases} -3x - 9y + 3z = -6 \\ 3x + 9y - 3z = 8 \end{cases}$$
$$0x + 0y + 0z = 2 \quad (4)$$

Com as equações (2) e (4), podemos formar outro sistema:

$$\begin{cases} 2x + 4y + z = 7 \\ 0x + 0y + 0z = 2 \end{cases}$$

Observe que a segunda equação desse novo sistema não apresenta solução. Logo, o sistema é classificado como **impossível**, e seu conjunto solução é $S = \varnothing$.

b) Vamos resolver o sistema pelo método da adição.

$$\begin{cases} x + 3y - 4z = 2 & (1) \\ 2x - y + 2z = 5 & (2) \\ x - 11y + 16z = 4 & (3) \end{cases}$$

Multiplicando a equação (1) por -2 e adicionando-a à equação (2), temos:

$$+\begin{cases} -2x - 6y + 8z = -4 \\ 2x - y + 2z = 5 \end{cases}$$
$$-7y + 10z = 1 \quad (4)$$

Agora, vamos multiplicar a equação (1) por -1 e adicioná-la à equação (3).

$$+\begin{cases} -x - 3y + 4z = -2 \\ x - 11y + 16z = 4 \end{cases}$$
$$-14y + 20z = 2 \quad (5)$$

Multiplicamos a equação (4) por -2 e a adicionamos à equação (5), obtendo:

$$+\begin{cases} 14y - 20z = -2 \\ -14y + 20z = 2 \end{cases}$$
$$0y + 0z = 0$$

A equação obtida pode ter uma infinidade de soluções. Logo, o sistema é **possível e indeterminado**.

Vamos, então, determinar as infinitas soluções desse sistema.

Da equação (4), temos que: $y = \frac{10z - 1}{7}$.

Substituindo esse valor de y na equação (1), temos: $x = \frac{17 - 2z}{7}$.

Assim, o conjunto solução do sistema é $S = \left\{ \left(\frac{17 - 2z}{7}, \frac{10z - 1}{7}, z \right) \middle| \, z \in \mathbb{R} \right\}$.

R3 Resolva os sistemas a seguir.

a) $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 4x + 3y = 23 \\ 2x + 9y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$

Resolução

a) Temos um sistema linear 3×2 porque ele é formado por três equações e duas incógnitas.

$$\begin{cases} 3x - y = 1 & (1) \\ 4x + 3y = 23 & (2) \\ 2x + 9y = 0 & (3) \end{cases}$$

Para encontrar a solução de um sistema linear desse tipo (com mais equações que incógnitas), usamos um número de equações igual ao número de incógnitas.

Vamos resolver o sistema formado pelas equações (1) e (2):

$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 4x + 3y = 23 \end{cases}$$

De (1), concluímos que $y = 3x - 1$. Substituindo em (2), obtemos:

$$\begin{aligned} 4x + 3(3x - 1) &= 23 \\ 4x + 9x - 3 &= 23 \\ 13x &= 26 \\ x &= \frac{26}{13} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Substituindo o valor de x em $y = 3x - 1$, obtemos $y = 5$.

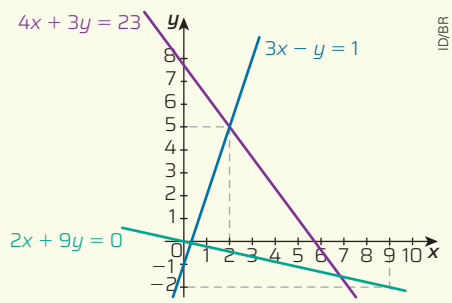
Observe que encontramos valores para x e para y sem utilizar a terceira equação do sistema. Entretanto, a dupla (2, 5) só será solução do sistema se também for solução da equação $2x + 9y = 0$.

Substituindo x por 2 e y por 5 em $2x + 9y = 0$, obtemos:

$$2 \cdot 2 + 9 \cdot 5 = 4 + 45 = 49 \neq 0$$

Logo, o par (2, 5) não é solução do sistema. O conjunto solução é $S = \varnothing$, e o sistema é impossível.

Observe que graficamente as três retas que representam o sistema são concorrentes duas a duas e que não existe um ponto que pertença a todas elas.



b) Temos um sistema linear 2×3 porque ele é formado por duas equações e três incógnitas.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 & (1) \\ x - y - z = 0 & (2) \end{cases}$$

Podemos resolvê-lo adicionando as duas equações:

$$+ \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2x &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Substituindo o valor de x na equação (1), obtemos:

$$\begin{aligned} y + z &= 0 \\ z &= -y \end{aligned}$$

Substituindo x por zero e z por $-y$ na equação (2), obtemos:

$$\begin{aligned} 0 - y + y &= 0 \\ 0y &= 0 \end{aligned}$$

Qualquer valor de y satisfaz essa igualdade. Logo, há infinitas soluções e o sistema é possível e indeterminado, sendo sua solução dada por $S = \{(0, y, -y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

Não escreva no livro.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Ao resolver atividades com sistemas lineares, tenha cuidado com os sinais na resolução.

Discuta com os estudantes as diversas maneiras utilizadas para resolver os sistemas.

10 Resolva e classifique os sistemas a seguir.

a) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + y + z = 7 \\ x + 2y + z = 8 \end{cases}$
$S = \{(1, 2, 3)\}$, SPD

b) $\begin{cases} 2x + 12y + 17z = 53 \\ x + 5y + 7z = 22 \\ 3x + 22y + 19z = 35 \end{cases}$
$S = \{(2, -3, 5)\}$, SPD

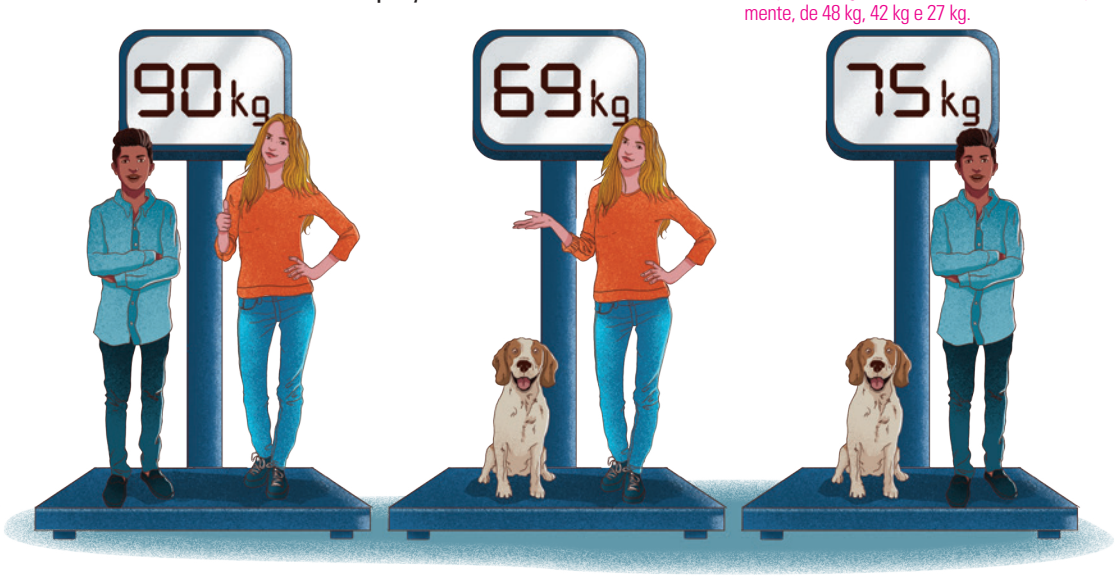
c) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ x - y + 7z = 7 \\ 2x + 4y + 9z = 15 \end{cases}$
$S = \{(1, 1, 1)\}$, SPD

d) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x - 5y + 2z = 1 \\ 4x - y + 8z = 3 \end{cases}$
$S = \varnothing$, SI

e) $\begin{cases} x + 3y - z = 7 \\ 3x + 7y + z = 11 \\ 2x + 7y - 4z = 19 \end{cases}$
$S = \{(-5\alpha - 8, 2\alpha + 5, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$, SPI

f) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = 0 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$
$S = \left\{\left(\frac{1}{16}, \frac{21}{16}, \frac{9}{16}\right)\right\}$, SPD

11 Qual é a massa, em quilograma, do rapaz, da moça e do cachorro? Tente resolver de dois modos: sem utilizar um sistema de equações e utilizando um sistema. O rapaz, a moça e o cachorro têm massa, respectivamente, de 48 kg, 42 kg e 27 kg.



@mickart_/ID/BR

12 As balanças **A** e **B** estão em equilíbrio.


A B C

Davi Augusto/ID/BR

Ao colocar os 4 objetos amarelos no prato da esquerda da balança **C** e, no prato da direita, os 5 objetos azuis e os 2 verdes, ela penderá para a esquerda, para a direita ou ficará em equilíbrio? Justifique sua resposta. Como $\frac{52}{7}x < \frac{53}{7}x$, temos que a balança penderá para a direita.

13 Determine o conjunto solução destes sistemas lineares:

a) $\begin{cases} x + y + z = 12 \\ x + y - 2z = -6 \end{cases}$
$S = \{(\alpha, 6 - \alpha, 6) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

b) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x - 2y = 0 \\ 5x - 3y = 1 \end{cases}$
$S = \{(2, 3)\}$

c) $\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 2x + 3y - z = 10 \end{cases}$
$S = \{(-7 + 5\alpha, 8 - 3\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

14 Mostre graficamente que o sistema a seguir não tem solução. Justifique sua resposta.

$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x + y = 2 \\ -x + 2y = 2 \end{cases}$ Como as retas referentes às equações do sistema linear não se intersectam em um único ponto, o sistema não tem solução. Consulte o gráfico no Manual do Professor.

15 Indique a alternativa correta no caderno.

(Unicamp-SP) As companhias aéreas costumam estabelecer um limite de peso para a bagagem de cada passageiro, cobrando uma taxa por quilograma de excesso de peso. Quando dois passageiros compartilham a bagagem, seus limites são considerados em conjunto. Em um determinado voo, tanto um casal como um senhor que viajava sozinho transportaram 60 kg de bagagem e foram obrigados a pagar pelo excesso de peso. O valor que o senhor pagou correspondeu a 3,5 vezes o valor pago pelo casal.

Para determinar o peso excedente das bagagens do casal (x) e do senhor que viajava sozinho (y), bem como o limite de peso que um passageiro pode transportar sem pagar qualquer taxa (z), pode-se resolver o seguinte sistema linear: Alternativa **a**.

a) $\begin{cases} x + 2z = 60 \\ y + z = 60 \\ 3{,}5x - y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + z = 60 \\ y + 2z = 60 \\ 3{,}5x - y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2z = 60 \\ y + z = 60 \\ 3{,}5x + y = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + z = 60 \\ y + 2z = 60 \\ 3{,}5x + y = 0 \end{cases}$

16 Indique no caderno a alternativa correta.

(Fuvest-SP) Em uma festa com n pessoas, em um dado instante, 31 mulheres se retiraram e restaram convidados na razão de 2 homens para cada mulher. Um pouco mais tarde, 55 homens se retiraram e restaram, a seguir, convidados na razão de 3 mulheres para cada homem. O número n de pessoas presentes inicialmente na festa era igual a: Alternativa **d**.

a) 100
b) 105
c) 115
d) 130
e) 135

17 Considere a atividade a seguir.

O sistema linear $\begin{cases} x + y - z = -1 \\ -3x + y - z = -2 \\ 5x + y - z = 0 \end{cases}$ é:

a) impossível e indeterminado.
b) possível e determinado.
c) impossível e determinado.
d) possível e indeterminado.

Agora, siga as seguintes instruções. Alternativa **d**.

I. Leia o enunciado.
II. Quais alternativas podem ser descartadas imediatamente? Por quê?
III. Resolva o sistema e escreva no caderno a alternativa correta.

18 Ao resolver o sistema linear a seguir, Humberto cometeu um erro. Analise a resolução feita por ele, descubra o erro e corrija-o. Consulte a resposta no Manual do Professor.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \quad (1) \\ x + 2y + 3z = 2 \quad (2) \\ 2x - y + z = 2 \quad (3) \end{cases}$$

Isolo x na equação (1):

$$x + y + 2z = 1$$
$$x = 1 - y - 2z$$

Substituo x por $1 - y - 2z$ nas equações (2) e (3).

Em (2):

$$1 - y - 2z + 2y + 3z = 2$$
$$y + 5z = 1 \quad (4)$$

Em (3):

$$2(1 - y - 2z) - y + z = 2$$
$$3y + 3z = 0 \quad (5)$$

Resolvo o sistema formado pelas equações (4) e (5).

$$\begin{cases} y + 5z = 1 \\ 3y + 3z = 0 \end{cases}$$

Isolando y na equação (4) $(y = 1 - 5z)$ e utilizando o valor encontrado na equação (5), obtenho:

$$3(1 - 5z) + 3z = 0$$
$$3 - 15z + 3z = 0$$
$$12z = -3$$
$$z = \frac{1}{4}$$

Substituo z por $\frac{1}{4}$ em $y = 1 - 5z$ e obtenho:

$$y = 1 - 5z$$
$$y = 1 - \frac{5}{4}$$
$$y = -\frac{1}{4}$$

Como $x = 1 - y - 2z$, faço:

$$x = 1 + \frac{1}{4} - \frac{2}{4}$$
$$x = \frac{4 + 1 - 2}{4}$$
$$x = \frac{3}{4}$$

Portanto, $S = \left\{\left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)\right\}$.

ID/BR

Não escreva no livro.

19 Uma pequena empresa fabrica três tipos de brinquedo: bolas, vendidas a R$ 3,00 cada uma; bonecas, vendidas a R$ 2,50 cada uma; e carrinhos, vendidos a R$ 2,00 cada um. O faturamento dos três primeiros meses do ano foi registrado no quadro a seguir por um funcionário um tanto desatento.

	Faturamento mensal com bolas	Faturamento mensal com bonecas	Faturamento mensal com carrinhos	Total geral
Janeiro	//////////////	//////////////	//////////////	R$ 1 200,00
Fevereiro	R$ 600,00	R$ 100,00 a mais que em janeiro	R$ 800,00	R$ 1 600,00
Março	80% do valor de janeiro	Metade do valor de janeiro	150% do valor de janeiro	R$ 1 560,00

a) Calcule o faturamento de cada brinquedo no mês de janeiro.

b) Qual foi o total de carrinhos vendidos nesses três meses? 1 525 carrinhos.

a) Em janeiro, os faturamentos foram de R$ 200,00 na venda de bolas, R$ 100,00 na venda das bonecas e R$ 900,00 na venda dos carrinhos.

Após a correção das atividades desta seção, solicite aos estudantes que anotem os principais erros de procedimento que cometeram e, então, promova uma conversa a respeito do que fazer para evitá-los.

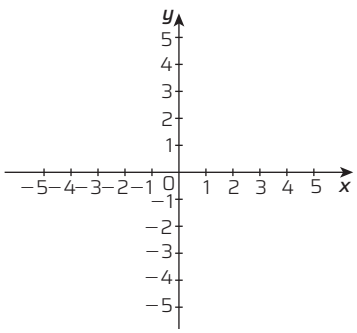
Classificação de sistemas lineares 3 × 3

Até aqui resolvemos sistemas 3 × 3 algebricamente. Agora, vamos analisá-los geometricamente, como fizemos com os sistemas 2 × 2.

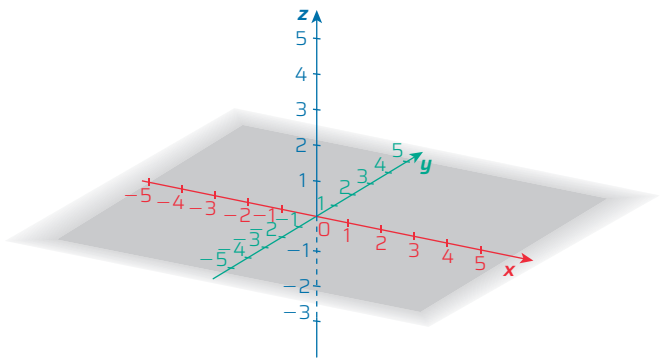
Vimos que a representação geométrica de um sistema de equações lineares 2 × 2 pode ser feita em um plano cartesiano, no qual os pontos que representam os pares ordenados (x, y) que satisfazem as equações podem ser localizados por meio da abscissa x e da ordenada y.

No sistema de equações lineares 3 × 3, existe uma variável a mais: z. Então, precisamos adicionar um eixo para localizar os ternos ordenados (x, y, z) no espaço.

O eixo Oz deve ser perpendicular tanto ao eixo Ox como ao eixo Oy. Observe que ele é ortogonal ao plano que os eixos Ox e Oy determinam.



Representação do plano determinado pelos eixos Ox e Oy.

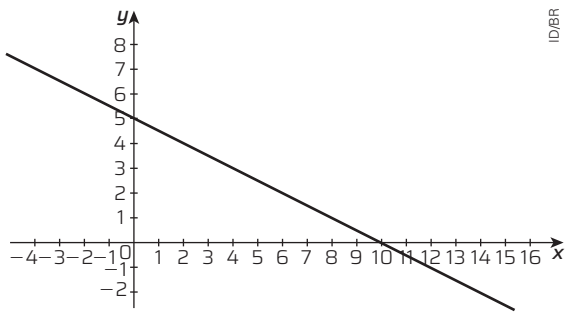


Representação da posição do eixo Oz.

Ilustrações: ID/BR

Agora, acompanhe como podemos representar a equação $x + 2y = 10$ no espaço.

Sabemos que a representação dessa equação no plano cartesiano é uma reta, na qual cada um de seus pontos pode ser representado por um par ordenado (x, y).



ID/BR

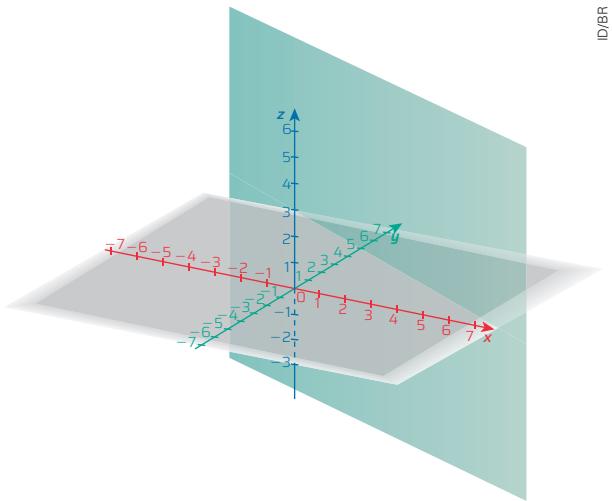
Até aqui, a representação de equações estava sendo feita no plano cartesiano. Neste tópico, vamos representar equações no espaço, inserindo o eixo Oz, ortogonal aos eixos Ox e Oy. Trata-se de uma boa oportunidade para que os estudantes desenvolvam o senso de localização espacial. Para que esse trabalho seja efetivo, sugerimos o uso de materiais manipuláveis, como varetas, cartolinas ou placas de acrílico. Se possível, organize também as aulas utilizando um *software* de Geometria dinâmica para mostrar como o mesmo elemento pode ser representado no plano e no espaço.

Não escreva no livro.

Para representar essa mesma equação no plano, temos de considerar o eixo *Oz*. Assim, na forma geral da equação, devemos indicar o coeficiente da variável *z*, que, nesse caso, é zero. Reescrevendo a equação, temos:

$$x + 2y = 10$$
$$x + 2y + 0z = 10$$

Perceba que a igualdade se mantém inalterada. Ou seja, para qualquer valor de *z*, é válida a igualdade $x + 2y = 10$. O plano que representa a equação $x + 2y + 0z = 10$ corresponde à união de todas as retas que resultam da translação da reta no plano *Oxy* na mesma direção do eixo *Oz*.



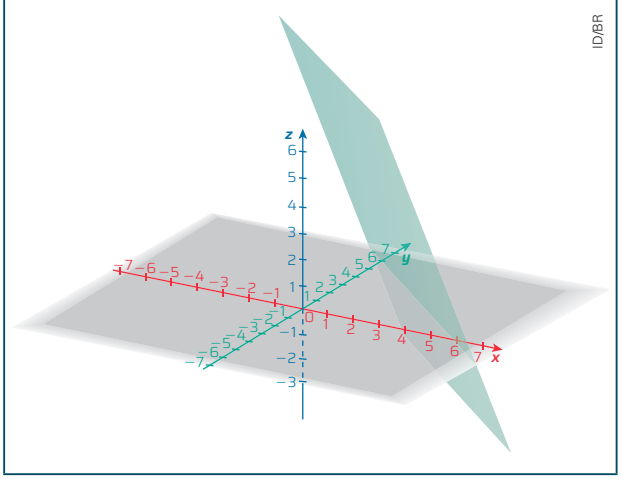
De fato, a representação espacial de uma equação do tipo $ax + by + cz = d$, com *a*, *b* e *c* não simultaneamente nulos, é sempre um plano.

Vamos retornar à situação das caixas coloridas para guardar brinquedos e verificar a representação, no espaço, de cada equação que compõe o sistema.

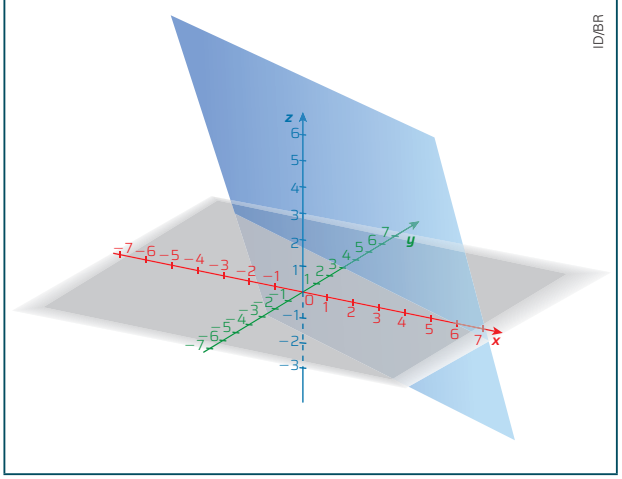
$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 12 & (1) \\ 8x + 20y + 10z = 72 & (2) \\ 10x + 16y + 14z = 84 & (3) \end{cases}$$

Utilizaremos um *software* de Geometria dinâmica para facilitar as representações dos planos. Observe a seguir o plano correspondente a cada uma das equações desse sistema.

(1) $2x + 2y + z = 12$

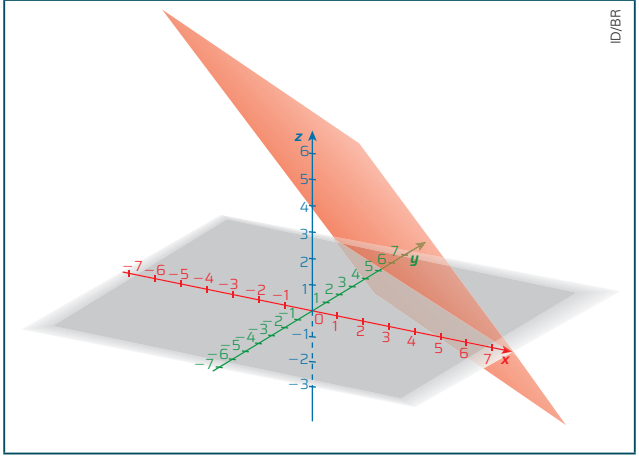


(2) $8x + 20y + 10z = 72$



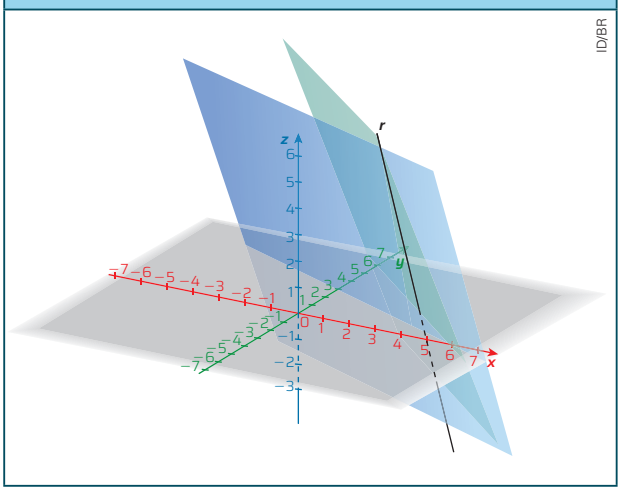
Não escreva no livro.

③ $10x + 16y + 14z = 84$

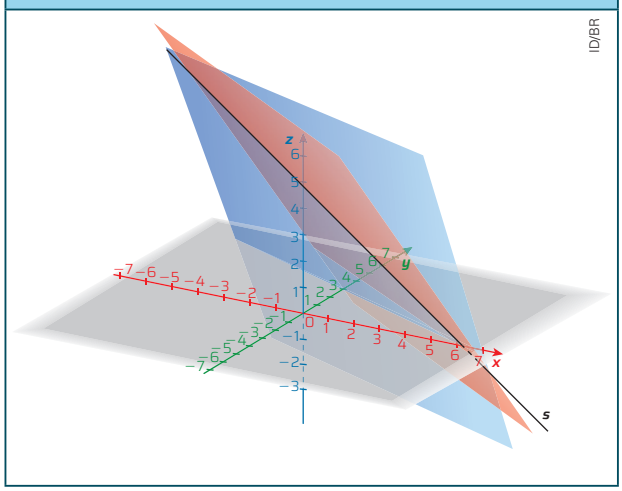


De maneira geral, os *softwares* de Geometria dinâmica têm diversas funcionalidades, e alguns deles apresentam a função "Intersecção entre duas superfícies". Verifique, nas imagens a seguir, como fica a representação das intersecções entre os planos que compõem o sistema, dois a dois.

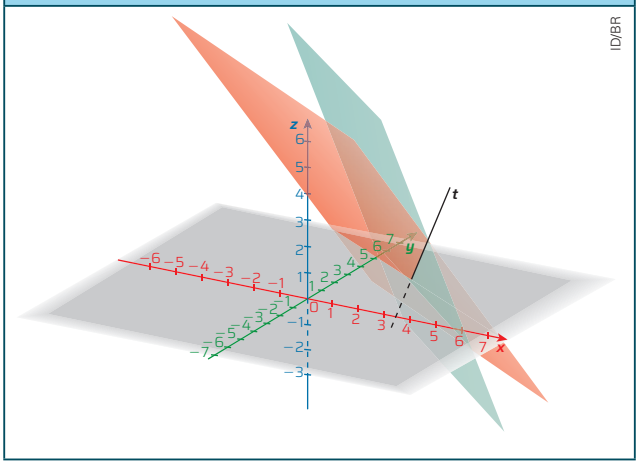
① e ②



② e ③



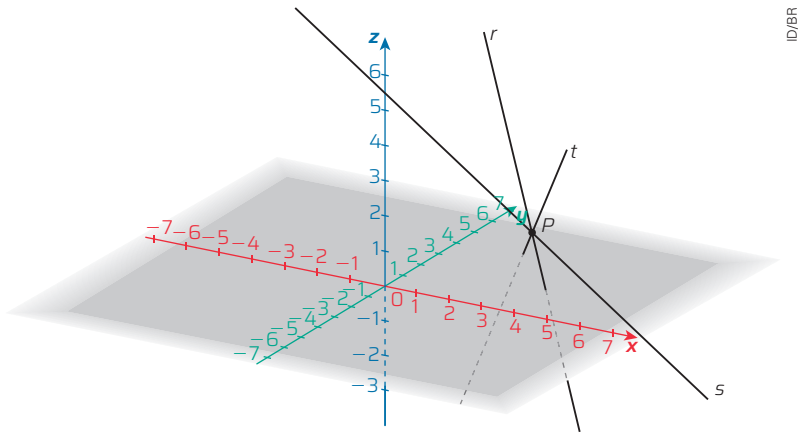
① e ③



Note que as intersecções entre os planos dois a dois resultam em retas. Os pontos que pertencem a cada uma dessas retas têm coordenadas que satisfazem simultaneamente duas equações que compõem o sistema.

Não escreva no livro.

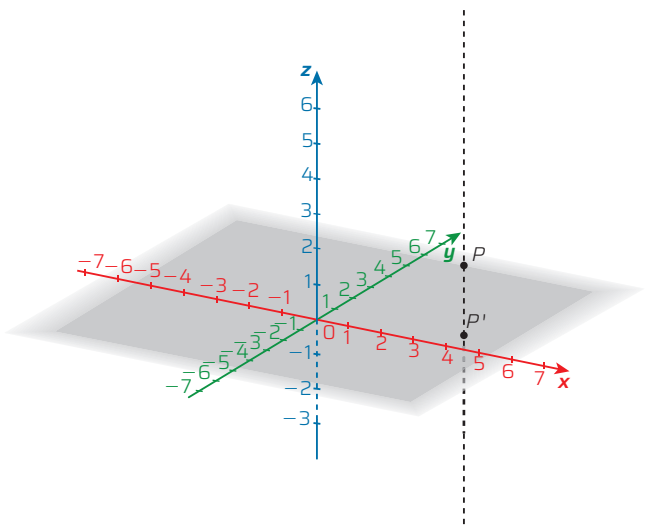
Outra funcionalidade desses *softwares* é determinar a intersecção entre as três retas resultantes das intersecções dos planos dois a dois. Verifique, a seguir, como fica a representação da intersecção entre as retas utilizando o comando "Intersecção":



ID/BR

No *software*, também é possível verificar que as retas r, s e t se cruzam em um único ponto, que chamaremos de P. Dessa forma, o ponto P pertence simultaneamente às três retas. Em outras palavras, as coordenadas do ponto P satisfazem ao mesmo tempo as três equações do sistema linear e, portanto, são a solução do sistema.

Para determinar as coordenadas do ponto P, uma possibilidade é utilizar o comando "Reta perpendicular" do *software*, clicar no ponto P e no plano determinado pelos eixos Ox e Oy, determinando uma reta auxiliar. Usando novamente o comando "Ponto de intersecção" e clicando na reta auxiliar e no plano, definimos o ponto P', que é a projeção ortogonal do ponto P no referido plano.



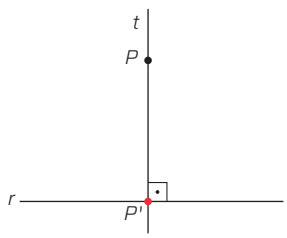
ID/BR

Projeção ortogonal de um ponto sobre uma reta

Considerando uma reta r e um ponto P fora de r, construímos por P a reta t, perpendicular a r.

No cruzamento das retas r e t, obtemos o ponto P'. Dizemos que o ponto P' é a projeção ortogonal de P sobre a reta r.

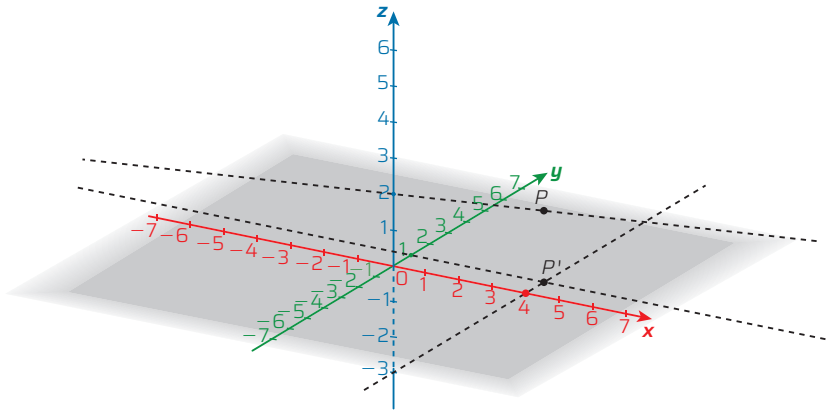
Caso o ponto P pertença à reta r, a projeção de P sobre a reta é o próprio ponto P.



ID/BR

Não escreva no livro.

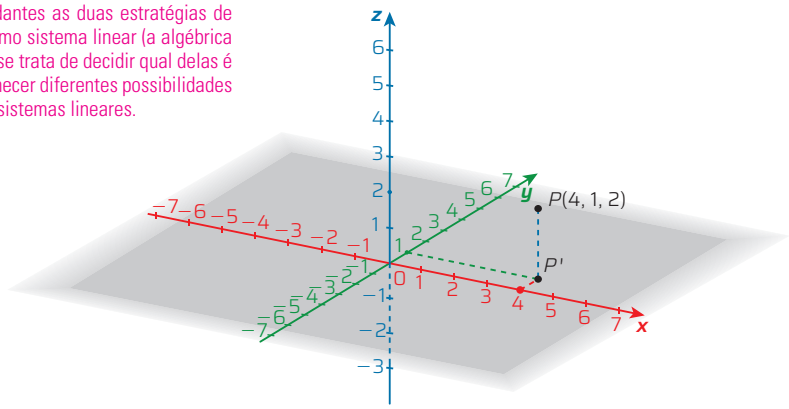
Usando novamente o comando "Reta perpendicular", é possível verificar a abscissa x e a ordenada y do ponto P' e a coordenada z do ponto P.



ID/BR

Também é possível, usando o botão direito do *mouse*, clicar no ponto P e, com o comando "Exibir valor" do menu "Configurações", verificar que as coordenadas do ponto P são (4, 1, 2).

Analise com os estudantes as duas estratégias de resolução para o mesmo sistema linear (a algébrica e a geométrica). Não se trata de decidir qual delas é a melhor, mas de conhecer diferentes possibilidades de resolução para os sistemas lineares.



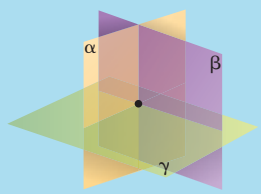
ID/BR

Novamente – agora com o auxílio do *software* – concluímos que a mãe utilizou 4 caixas amarelas, 1 caixa verde e 2 caixas azuis.

A representação das equações de um sistema linear 3×3 no espaço também pode ser útil para classificar esse sistema.

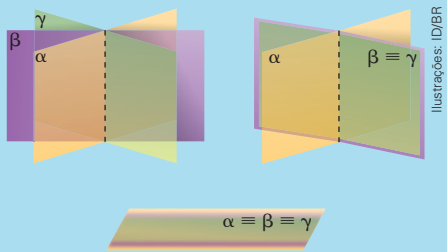
A representação dos sistemas lineares 3×3 corresponde a três planos no espaço, α, β e γ. Dependendo da posição das retas que representam as intersecções desses planos dois a dois, podemos classificá-los quanto ao número de soluções.

- Quando os planos e as retas são concorrentes em um único ponto, o sistema é **possível e determinado** e tem solução única, representada pelas coordenadas do ponto de intersecção dos planos e das retas.



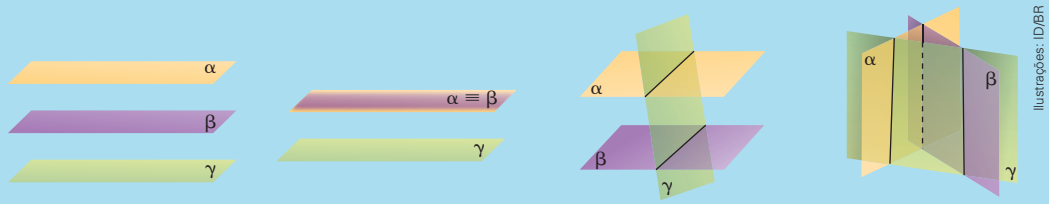
ID/BR

- Quando os planos têm uma reta em comum, isto é, quando as retas que representam a intersecção dos planos dois a dois são coincidentes, o sistema linear é **possível** e **indeterminado**, ou seja, tem infinitas soluções. As coordenadas de qualquer ponto da reta é uma das soluções do sistema.



Ilustrações: ID/BR

- Quando os três planos são paralelos, ou se dois deles são paralelos, ou, ainda, se os planos se encontram dois a dois em retas paralelas distintas, o sistema linear não tem solução e é denominado sistema **impossível**.



Ilustrações: ID/BR

TECNOLOGIA

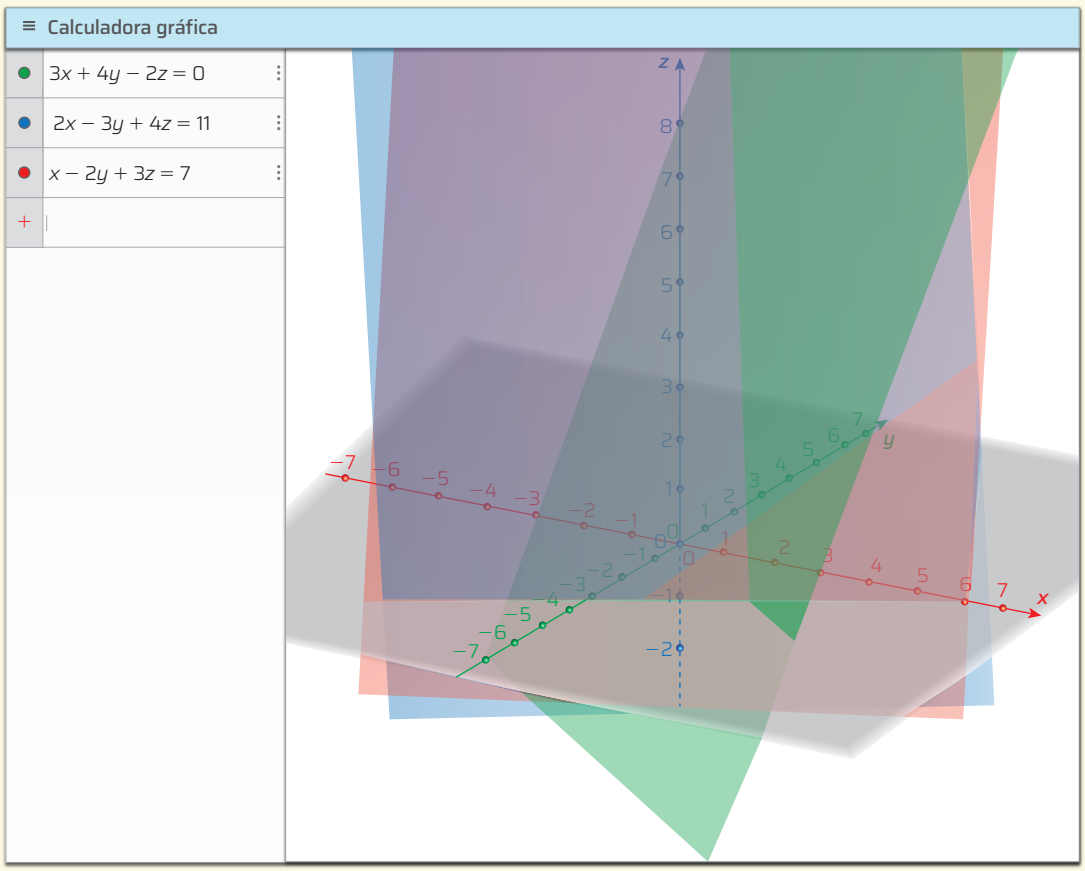
As etapas indicadas podem ser feitas, por exemplo, com o GeoGebra e Desmos.

Anteriormente, vimos que é possível resolver um sistema linear 2×2 utilizando um *software* de geometria dinâmica. De maneira semelhante, também podemos resolver um sistema linear 3×3.

Acompanhe as etapas a seguir para resolver o sistema $\begin{cases} 3x + 4y - 2z = 0 \\ 2x - 3y + 4z = 11 \\ x - 2y + 3z = 7 \end{cases}$.

1ª etapa: Abra a opção de gráfico em 3 dimensões. Em seguida, represente os planos correspondentes a cada equação do sistema. Para isso, na caixa de entrada, digite cada uma das equações do sistema.

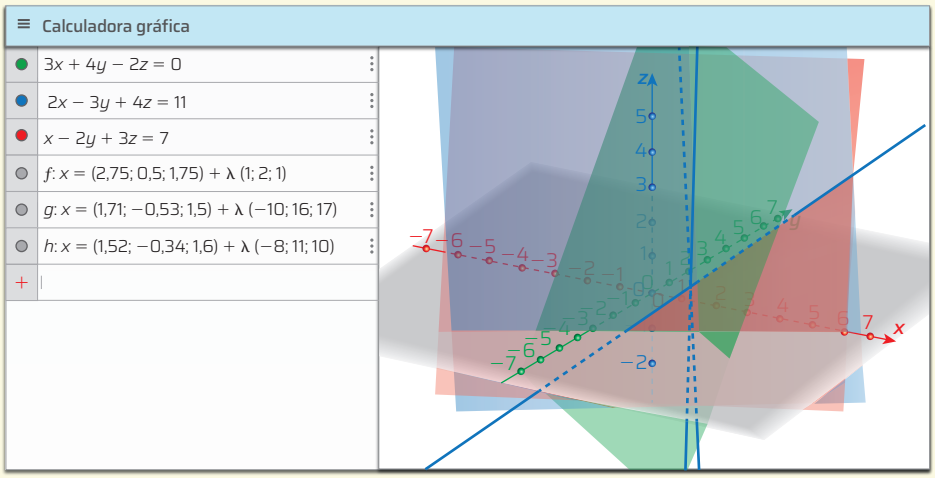
2ª etapa: Para melhorar a visualização dos planos, utilize as propriedades do *software* para mudar a cor de cada um deles. Para isso, busque as opções de configurações e altere a cor de cada plano, deixando-os como preferir. Nas configurações, também é possível alterar outras características de visualização do plano e dos eixos, se desejar.



Nelson Matsuda/ID/BR

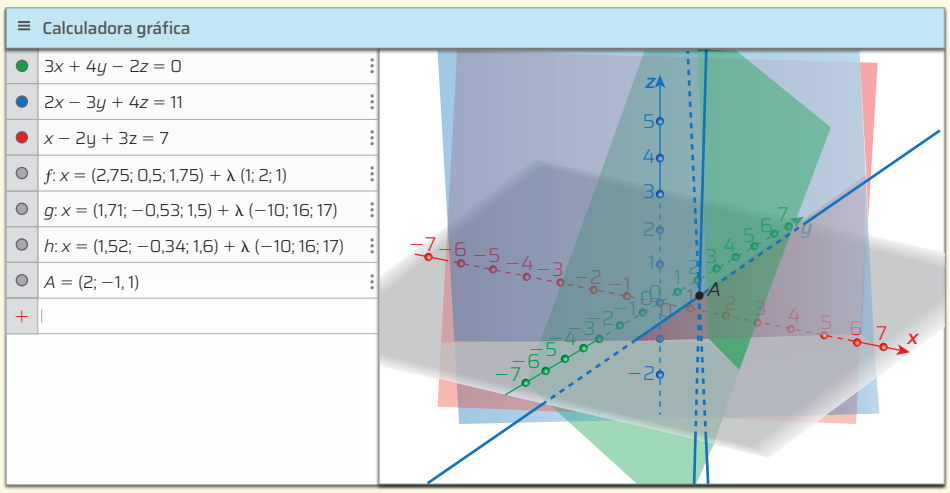
Não escreva no livro.

3ª etapa: Para determinar as soluções do sistema, você deve encontrar o ponto de intersecção entre os três planos. Para isso, inicialmente, com a ferramenta "Intersecção de duas superfícies"  , obtenha as retas correspondentes às intersecções de cada par de planos (1 e 3; 1 e 2; 2 e 3). Para isso, com a ferramenta selecionada, clique em dois dos planos construídos.



Nelson Matsuda/ID/BR

4ª etapa: Como as três retas obtidas na etapa anterior se intersectam no mesmo ponto, você pode obter esse ponto determinando a intersecção entre duas retas. Para isso, selecione a ferramenta "Intersecção de dois objetos"  e clique em duas das retas construídas na etapa anterior para marcar o ponto de intersecção entre elas. As coordenadas desse ponto, correspondentes à solução do sistema, podem ser obtidas no *software*.



Nelson Matsuda/ID/BR

ATIVIDADES

1 **Com base na construção apresentada, responda às questões a seguir.**

a) Qual é o conjunto solução do sistema resolvido com o *software*? $S = \{(2, -1, 1)\}$

b) Classifique o sistema representado em SPD, SPI ou SI. SPD

2 **Utilizando um *software* de geometria dinâmica, resolva o sistema representado a seguir e classifique-o em SPD, SPI ou SI.** $S = \{(2, 1, 3)\}$; SPD

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 4 \\ x + y + z = 6 \\ 3x - y + 2z = 11 \end{cases}$$

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Se possível, utilize um *software* de Geometria dinâmica na representação gráfica das equações de cada sistema da atividade **20** para auxiliar na classificação.

20 **Classifique os sistemas em sistema possível e determinado (SPD), sistema possível e indeterminado (SPI) ou sistema impossível (SI).**

a) $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y - z = 0 \\ 3x - y + 2z = 0 \end{cases}$ SPD

b) $\begin{cases} x + 3y + 2z = 1 \\ -2x + y + z = -2 \\ -x + 4y + 3z = -1 \end{cases}$ SPI

c) $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y - 3z = 4 \\ 3x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$ SI

21 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(ESPM-SP) André comprou uma calça, três camisetas e duas cuecas por R$ 420,00. Se tivesse comprado duas calças e uma cueca teria gasto R$ 285,00. Se ele tivesse comprado apenas uma peça de cada tipo, teria pago a importância de: Alternativa **e**.

a) R$ 195,00 c) R$ 215,00 e) R$ 235,00

b) R$ 200,00 d) R$ 220,00

22 **Resolva a atividade a seguir no caderno, indicando a soma dos itens corretos.**

(UEPG-PR) Numa festa, organizada pelo grupo de assistência social da prefeitura, foram montadas as barracas *A*, *B* e *C*. As três barracas vendiam, pelos mesmos preços, os mesmos tipos de alimentação: cachorro-quente, pastel e milho-verde. No fim da festa, o balanço feito sobre o consumo nas três barracas mostrou que: em *A*, foram consumidos 24 cachorros-quentes, 36 pastéis e 24 milhos-verdes; em *B*, foram consumidos 33 cachorros-quentes, 55 pastéis e 33 milhos-verdes; e em *C*, foram consumidos 20 cachorros-quentes, 40 pastéis e 30 milhos-verdes. As barracas *A*, *B* e *C* venderam R$ 324,00, R$ 462,00 e R$ 350,00, respectivamente. A partir do que foi exposto, assinale o que for correto. 02 + 04 + 08 = 14

01) A soma dos preços de cada pastel e de cada cachorro-quente é o dobro do preço de cada milho-verde.

02) A soma dos preços de cada pastel e cada milho é o dobro do preço de cada cachorro-quente.

04) O preço de cada milho-verde é um número primo.

08) O preço de cada cachorro-quente é R$ 4,00.

16) A soma dos preços de cada pastel, cachorro-quente e milho-verde não é um número inteiro.

23 **Relembre a situação apresentada no tópico "Sistemas lineares 2 × 2". O mesmo grupo de amigos identificou que alguns aplicativos e *softwares* não funcionam adequadamente nos modelos propostos na situação inicial deste capítulo, por isso, decidiram incorporar às configurações algumas placas aceleradoras de vídeo para melhorar o desempenho dos computadores. Consultando o fornecedor, chegaram a três novas configurações:**

- **Modelo A:** Um computador com um processador de quatro núcleos, duas unidades de armazenamento SSD e uma placa aceleradora de vídeo.
- **Modelo B:** Um computador com um processador de oito núcleos, uma unidade de armazenamento SSD e uma placa aceleradora de vídeo.
- **Modelo C:** Um computador com um processador de doze núcleos, três unidades de armazenamento SSD e quatro placas aceleradoras de vídeo.

Eles verificaram que os valores necessários para a compra dos itens indicados nas configurações seriam:

- **Modelo A:** R$ 2 470,00
- **Modelo B:** R$ 2 885,00
- **Modelo C:** R$ 8 355,00

Sabendo que os preços dos núcleos, das unidades SSD e das placas de vídeo são os mesmos para todos os modelos, calcule e responda: 150 (Modelo A: 600; Modelo B: 1 200 e Modelo C: 1 800).

a) Qual é o valor de cada núcleo do processador?

b) Qual é o valor de cada unidade de armazenamento SSD? 185 (Modelo A: 370; Modelo B: 185 e Modelo C: 555).

c) Qual é o valor de cada placa aceleradora de vídeo? 1 500 (Modelo A: 1 500; Modelo B: 1 500 e Modelo C: 6 000).

24 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(EsPCEx-SP) Dado o sistema linear $\begin{cases} x + y + z = a \\ x + 2y + z = 2a \\ 2x + 3y + 2z = a^2 \end{cases}$ os valores do número real ***a***, tais que o sistema linear acima tenha solução, pertencem ao conjunto

a) $(-\infty, -1]$. c) $(4, 8]$. e) $(11, +\infty)$.

b) $(-1, 4]$. d) $(8, 11]$.

Alternativa **b**.

25 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(EsPCEx-SP) Sejam λ um parâmetro real e ξ o sistema linear abaixo, com incógnitas *a*, *b* e *c*,

$$\xi = \begin{cases} \lambda a - b + c = 3 \\ a + \lambda b + c = \lambda \\ a + b + \lambda c = 1 \end{cases}$$

É correto afirmar que Alternativa **c**.

a) ξ será possível e determinado se $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$.

b) ξ será possível e indeterminado se, e somente se, $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$.

c) ξ será impossível se $\lambda = -1$ ou $\lambda = 0$.

d) ξ será possível e indeterminado se $\lambda = -1$ ou $\lambda = 0$.

e) ξ será impossível se, e somente se, $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$.

26 **Reúna-se com um colega e elaborem um problema inspirado no problema da atividade 21. Em seguida, troquem o problema elaborado com outra dupla: vocês respondem ao problema que a dupla elaborou e ela resolve o problema elaborado por vocês.**

Resposta pessoal.

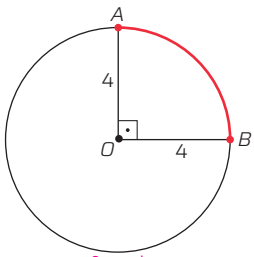
Não escreva no livro.

CÁLCULO RÁPIDO

Saber calcular mentalmente é importante também em problemas de Geometria e que envolvem medidas. Assim, sua atenção pode se voltar mais ao processo de solução que aos cálculos rotineiros. Por isso, propomos algumas atividades que retomam o cálculo do comprimento de arcos de circunferência e o teorema de Pitágoras.

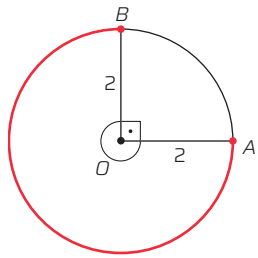
1 Em cada item, qual é a medida do arco *AB*, em radiano, da respectiva circunferência?

a)



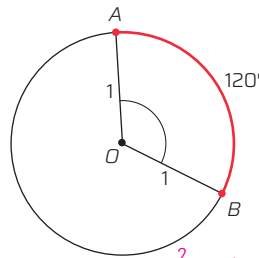
2π rad

b)



3π rad

c)

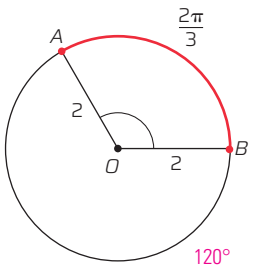


$\frac{2}{3}\pi$ rad

Ilustrações: ID/BR

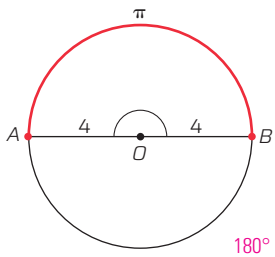
2 Qual é a medida angular, em grau, correspondente aos arcos *AB* em cada circunferência?

a)



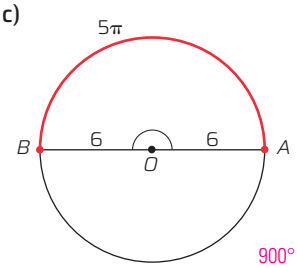
120°

b)



180°

c)

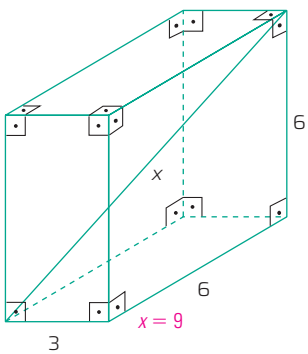


900°

Ilustrações: ID/BR

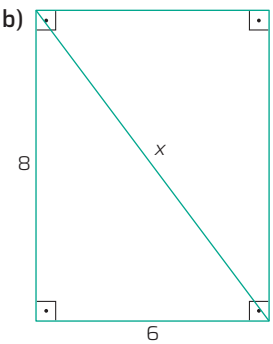
3 Determine o valor de *x* indicado em cada figura.

a)



$x = 9$

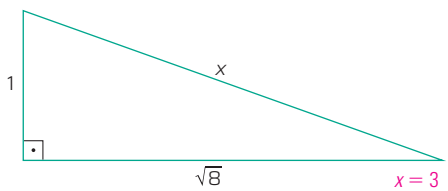
b)



$x = 10$

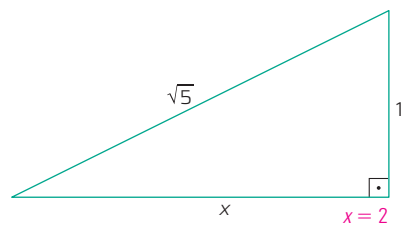
Ilustrações: ID/BR

c)



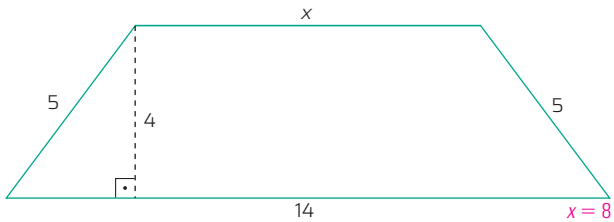
$x = 3$

d)



$x = 2$

e)



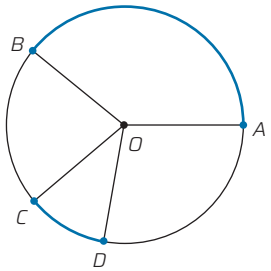
$x = 8$

Não escreva no livro.

PARA RECORDAR

Nesta seção, propomos problemas para que você relembre algumas propriedades geométricas estudadas em capítulos anteriores.

1 Na figura, O é o centro da circunferência de raio 3 cm.



ID/BR

a) Qual é a medida do ângulo central $A\hat{O}B$, em grau, sabendo que o comprimento do arco AB é de 8 cm? Aproximadamente 2,6°.

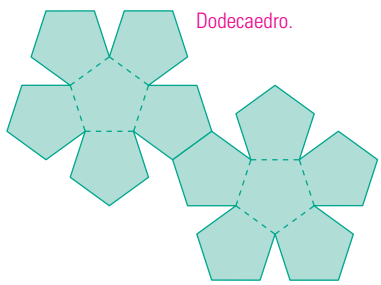
b) Calcule a medida do arco CD, em radiano, sabendo que a medida de $C\hat{O}D$ é de 40°. $y = \frac{2}{3}\pi$ rad.

2 Copie o quadro no caderno e complete-o com os dados de cada poliedro regular. A primeira linha já está preenchida. Consulte a resposta no Manual do Professor.

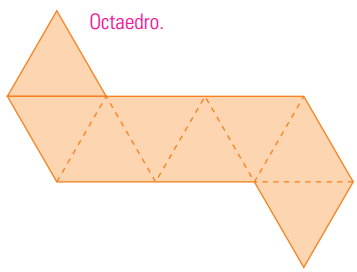
Poliedro regular	Forma das faces	Número de faces	Número de vértices	Número de arestas
Hexaedro (cubo)	quadrado	6	8	12
Tetraedro	//////////	//////////	//////////	//////////
Octaedro	//////////	//////////	//////////	//////////
Dodecaedro	//////////	//////////	//////////	//////////
Icosaedro	//////////	//////////	//////////	//////////

Agora, relacione cada um desses poliedros à respectiva planificação.

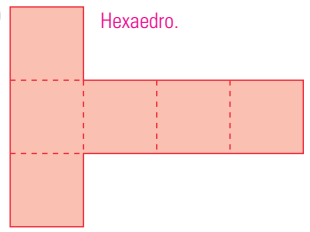
a) Dodecaedro.


Ilustrações: ID/BR

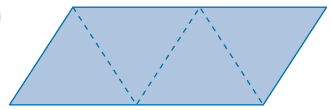
b) Octaedro.



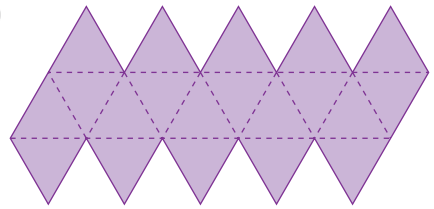
c) Hexaedro.


Ilustrações: ID/BR

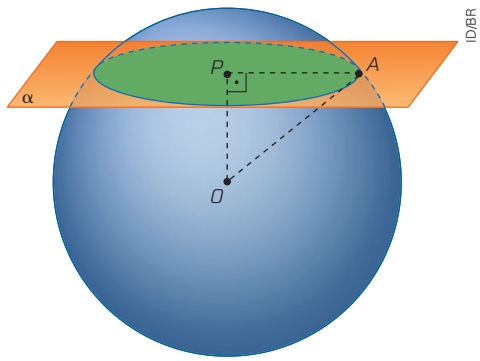
d) Tetraedro.



e) Icosaedro.

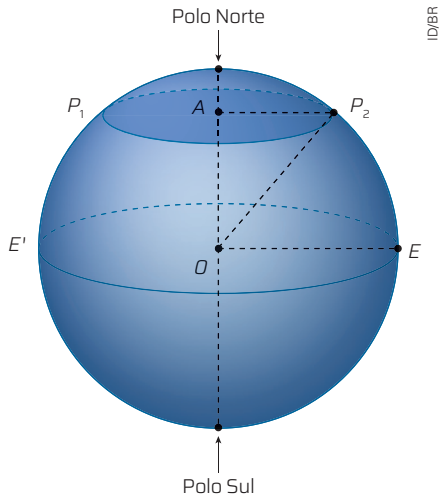


3 A que distância do centro O, em metro, de uma esfera de raio 10 m devemos traçar um plano de modo que a área do círculo verde seja 32π m²? $2\sqrt{17}$ m



ID/BR

4 Considere a Terra uma esfera com cerca de 6 400 km de raio. Qual é o comprimento do paralelo que passa por P_1 e P_2, em quilômetro, sabendo que $\overline{AP_1}$ mede 70% do raio da Terra? $8\,960\pi$ km



ID/BR

Não escreva no livro.

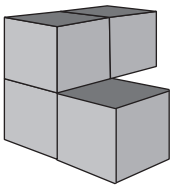
O processo de elaboração do fluxograma solicitado na seção *Palavras-chave* é complexo, pois envolve muitas possibilidades de intersecção de planos e retas no espaço. Nas *Orientações específicas* deste capítulo, você encontra uma sugestão de como completar o fluxograma sugerido aos estudantes. Comparar diferentes fluxogramas é uma boa estratégia para identificar possíveis erros e corrigi-los. Durante o trabalho em equipe, procure avaliar também a postura colaborativa de cada estudante no grupo. Atitudes como saber ouvir, aguardar a vez para expor uma opinião e argumentar contribuem para que os estudantes desenvolvam as competências gerais **2**, **4**, **7** e **9**.

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO

A seguir estão dois problemas que exigem estratégia e raciocínio lógico para serem resolvidos. No primeiro, você vai usar sua percepção espacial e, no segundo, mais elaborado, precisará organizar todas as condições que delimitam a travessia para encontrar uma estratégia de resolução.

1 **Indique a alternativa correta no caderno.**

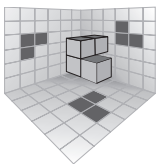
(Enem) Em um jogo desenvolvido para uso no computador, objetos tridimensionais vão descendo do alto da tela até alcançarem o plano da base. O usuário pode mover ou girar cada objeto durante sua descida para posicioná-lo convenientemente no plano horizontal. Um desses objetos é formado pela justaposição de quatro cubos idênticos, formando assim um sólido rígido, como ilustrado na figura.

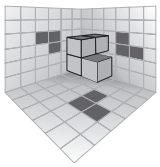


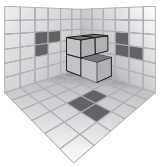
Enem. Fac-símile: ID/BR

Para facilitar a movimentação do objeto pelo usuário, o programa projeta ortogonalmente esse sólido em três planos quadriculados perpendiculares entre si, durante sua descida.

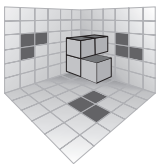
A figura que apresenta uma possível posição desse sólido, com suas respectivas projeções ortogonais sobre os três planos citados, durante sua descida é Alternativa **e**.

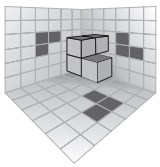
a)


c)


e)


Enem. Fac-símile: ID/BR

b)


d)


2 **Um detetive está investigando um caso em uma vila. Para continuar a investigação, ele precisa dirigir-se à cidade, que fica do outro lado do deserto. Atravessar o deserto leva, no total, 7 dias. O detetive, então, resolveu contratar dois carregadores, responsáveis por levar os suprimentos para a travessia. Cada pessoa (incluindo o detetive) consegue levar 4 pacotes de comida e, por dia, come 1 pacote. Como o detetive conseguiu atravessar o deserto? Observação: Nem os carregadores nem o detetive podem deixar de comer no caminho!** Consulte a resposta no Manual do Professor.

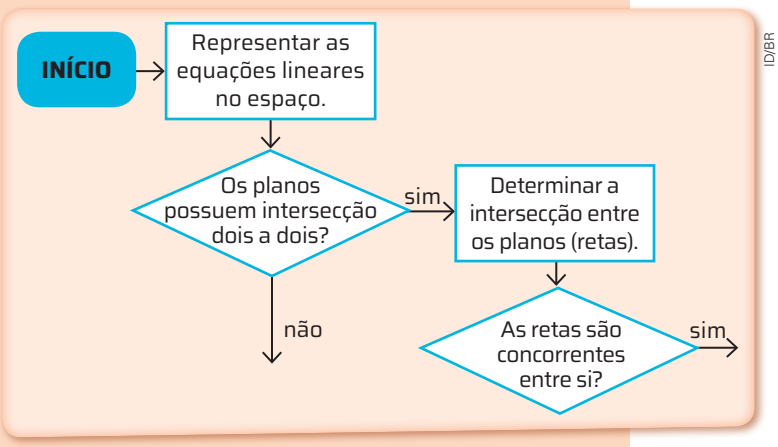
PALAVRAS-CHAVE

O foco deste capítulo foi a aprendizagem de estratégias para resolver e elaborar situações que envolvem sistemas lineares. Vimos que é possível resolver esses sistemas algebricamente e geometricamente, e que, para isso, podemos contar com o auxílio de *softwares* de Geometria dinâmica.

Reúna-se com um ou dois colegas para elaborar um fluxograma mostrando as etapas envolvidas na utilização de um *software* de Geometria dinâmica para resolver um sistema linear 3×3. Considerem as posições de cada um dos planos no espaço, as posições e classificações das retas que indicam a intersecção dos planos e, por fim, a classificação do sistema. Verifique ao lado uma sugestão de como começar esse fluxograma.

A tarefa de vocês agora é completá-lo.

Lembrem-se de que trabalhar em grupo envolve momentos de propor ideias, ouvir atentamente o que os colegas têm a dizer e, juntos, discutir a melhor estratégia para resolver o problema.



ID/BR

MATEMÁTICA E INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL (IA)

O objetivo desta seção é ampliar a formação geral dos estudantes, desenvolver habilidades de leitura de textos informativos que relacionam a Matemática a outras áreas do conhecimento e propor a eles que vivenciem um processo investigativo. Esta seção favorece o trabalho com as competências gerais **1** e **4**, na medida em que os estudantes utilizam conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo digital e partilham experiências e informações. Além disso, esta seção possibilita uma integração com a área de Linguagens e suas Tecnologias, visto que os estudantes usam diferentes linguagens, como a digital.

Sistemas de equações e IA

A inteligência artificial (IA) está se tornando cada vez mais presente em diversas esferas da sociedade. Podemos notar a presença da IA na recomendação de compras e conteúdos feita em anúncios *on-line*; na previsão de duração de uma viagem ou de quanto tempo um pedido feito por um aplicativo levará para chegar ao destino; na medicina, ao agilizar o processo de análise de imagens de raios X e de ressonância magnética para identificar doenças precocemente; no reconhecimento de voz e assim possibilitar que assistentes virtuais entendam com alta precisão os comandos dados; no transporte, a IA permite que carros autônomos identifiquem pedestres e outros veículos, evitando acidentes de trânsito.



Scharfsinn/Shutterstock.com/ID/BR

Vista interna de carro autônomo em uma estrada. Foto de 2023.

Em todos os conceitos matemáticos existentes por trás dessa ferramenta tão importante, estão os sistemas de equações lineares. Vamos descobrir como esse conceito matemático, aparentemente simples, constitui a base das inovações que estão mudando nossa vida.

A inteligência artificial é amplamente impulsionada pelo *Machine Learning* (ML) – em português, Aprendizado de Máquina –, uma técnica em que os computadores aprendem a realizar tarefas analisando grandes quantidades de dados.

Considere, por exemplo, que precisamos programar um computador para reconhecer imagens de gatos. Será necessário fornecer a esse computador milhares de imagens desses felinos para que ele possa aprender a identificar características comuns desses animais, como o formato das orelhas e padrões de pelagem, por exemplo.

Não escreva no livro.

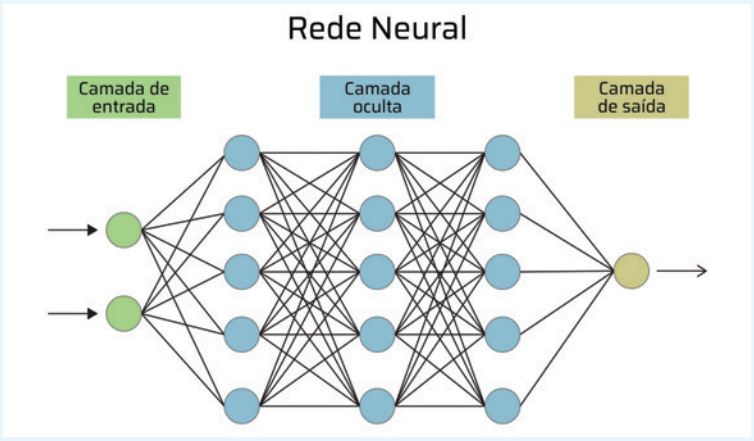
E é nessa parte que os sistemas de equações lineares entram em ação. No nosso caso aqui, durante o aprendizado, o computador ajusta parâmetros (números) dentro de um modelo matemático para minimizar a ocorrência de erros na identificação dos gatos. Esse ajuste é feito pela resolução de um sistema de equações lineares que descrevem a relação entre os dados de entrada (imagens) e as saídas desejadas ("gato" ou "não gato").

Nesse processo de identificação de imagens está o conceito de redes neurais, que são estruturas inspiradas no cérebro humano, compostas de "neurônios" artificiais que processam informações. Esses neurônios são organizados em camadas, e cada camada realiza cálculos matemáticos para transformar as entradas (como imagens ou sons) em saídas significativas (como reconhecimento de objetos ou palavras).



Seregraff/Shutterstock.com/ID/BR

Diferentes imagens que um computador pode identificar como "gato".



Maxime Vandegar/Shutterstock.com/ID/BR

Exemplo de rede neural.

Em uma rede neural, cada neurônio realiza uma operação que pode ser descrita por uma equação linear. Por exemplo, um neurônio pode calcular uma equação como:

$$y = w_1x_1 + w_2x_2 + b.$$

Nessa equação, x_1 e x_2 são entradas, w_1 e w_2 são pesos (parâmetros ajustáveis) e b é um valor de viés (que envolve um tipo de ajuste). Para treinar uma rede neural, é necessário resolver um gigantesco sistema de equações lineares para encontrar os melhores valores para esses pesos e vieses, de modo que a rede produza resultados precisos.

Sistemas de equações lineares é um dos conceitos matemáticos mais importantes sobre os quais a inteligência artificial moderna é construída. Eles transformam enormes quantidades de dados em textos, imagens, sons e vídeos, permitindo que tecnologias avançadas funcionem de maneira eficiente e precisa. Da próxima vez que você usar seu assistente virtual ou desfrutar de recomendações personalizadas de filmes, lembre-se que, por trás dessa experiência, há um complexo mundo matemático trabalhando incansavelmente para facilitar sua vida.

Conectando ideias

1 **Você faz uso da inteligência artificial em seu dia a dia? Quais são as vantagens e as desvantagens do uso dessa ferramenta? Compartilhe as respostas com os colegas e o professor.**

Resposta pessoal. Consulte a resposta no Manual do Professor.

2 **Em grupos, façam uma pesquisa na internet sobre os temas a seguir e, depois, com a orientação do professor, compartilhem, em uma roda de conversa, os resultados obtidos.**

Resposta pessoal. Consulte as respostas no Manual do Professor.

- Inteligência artificial: histórico e aplicações.
- Inverno da IA: o que foi e por que ocorreu?
- Redes neurais: qual foi a primeira rede neural desenvolvida e como são atualmente.
- *Chatbot*: o que é, como é utilizado e qual é o mais atual?
- Preocupações com o uso e o futuro da IA.

Não escreva no livro.

CAPÍTULO 10 CAPÍTULO 10 CAPÍTULO 10

MATRIZES

NESTE CAPÍTULO

- Matrizes
- Operações entre matrizes
- Matrizes e sistemas lineares

Como é possível saber se existe um voo direto entre dois municípios? De Manaus ao Rio de Janeiro, por exemplo, será que é necessário fazer conexões em outras cidades? Quais as rotas de voo que existem entre esses dois municípios?



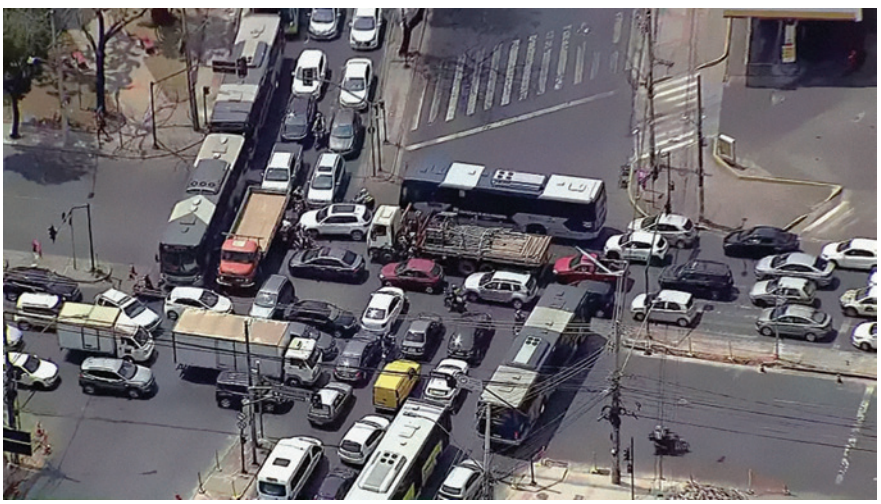
renatopmeireles/Shutterstock.com/ID/BR

Avião comercial pousando no Aeroporto Santos Dumont, no Rio de Janeiro (RJ). Foto de 2020.

Em uma situação assim, você certamente pode consultar um *site* de buscas para tentar obter essa informação. Mas como será que essa informação está armazenada no banco de dados desse buscador? Você já pensou nisso?

Como é determinado o tempo de abertura ou de fechamento dos semáforos de um cruzamento? Esse tempo é o mesmo independentemente do fluxo de veículos em uma direção ou em outra?

Além do risco de acidentes, a falta ou a falha na sinalização pode causar problemas no trânsito. Em 19 de setembro de 2024, por exemplo, a falha em um semáforo causou um nó no trânsito em um cruzamento de avenidas movimentadas de Belo Horizonte.



Globocop/G1

Cruzamento das avenidas Amazonas e Contorno travado por volta das 12 horas do dia 19 de setembro de 2024.

Neste capítulo, você vai conhecer um modelo matemático utilizado para responder a essas questões iniciais e a muitas outras, ainda mais complexas, de diferentes áreas, como na logística de distribuição de mercadorias entre cidades ou regiões, no armazenamento de produtos em grandes distribuidoras, na tomada de decisões de um investidor em função da variação de valores de ações, e muitas outras situações em que é preciso organizar dados relacionados entre si.

Essa maneira de modelar situações-problema envolve conceitos matemáticos relacionados às **matrizes**.

Não escreva no livro.

MATRIZES

Você já sabe que as tabelas são uma maneira de organizar informações e que, em algumas situações, são mais eficientes que um texto. A situação a seguir é um bom exemplo disso. Acompanhe.

O gerente de uma loja de eletrônicos usou uma tabela para organizar a quantidade de celulares vendidos durante os dias úteis de uma semana, para que a análise e a comparação dos dados fossem mais precisas:

Quantidade de celulares vendidos durante uma semana					
Modelo \ Dia da semana	Segunda-feira	Terça-feira	Quarta-feira	Quinta-feira	Sexta-feira
I	20	3	10	5	7
II	1	0	4	9	6
III	11	7	8	2	13

Dados obtidos pelo gerente da loja de eletrônicos.

Analisando a tabela, é possível saber, por exemplo, a quantidade de celulares do Modelo II vendidos na quarta-feira. Para isso, basta localizar o número que está na linha correspondente ao Modelo II e na coluna correspondente à quarta-feira para verificar que foram vendidos 4 celulares do Modelo II nesse dia.

Lidamos frequentemente com elementos dispostos em **linhas** (filas horizontais) e em **colunas** (filas verticais), formando uma tabela retangular. As tabelas permitem uma visualização rápida da relação de duas ou mais informações. Mas podemos reescrever os números da tabela anterior em uma **matriz**, com os números dispostos em 3 linhas e 5 colunas, que denominamos matriz 3×5 (lemos: "três por cinco"), da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} 20 & 3 & 10 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 4 & 9 & 6 \\ 11 & 7 & 8 & 2 & 13 \end{pmatrix}$$

As matrizes em que $m = n$, ou seja, em que o número de linhas é igual ao número de colunas, são chamadas de **matrizes quadradas**. Sejam m e n números naturais maiores ou iguais a 1, definimos:

> Matriz do tipo $m \times n$ (lê-se "m por n") é toda tabela retangular formada por números reais distribuídos em m linhas e n colunas.

Podemos representar uma matriz colocando os valores da tabela entre parênteses ou entre colchetes ou, ainda, ladeados à esquerda e à direita por duas barras verticais.

Exemplos

- $\begin{pmatrix} 300 & 950 & 5\,200 \\ 18 & 47,5 & 260 \\ 0 & 1 & -10 \end{pmatrix}$, matriz 3×3, isto é, tem 3 linhas e 3 colunas.
- $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, sendo x, y e z números reais, temos uma matriz 3×1, isto é, tem 3 linhas e 1 coluna. Esse é um exemplo de matriz coluna.
- $\begin{Vmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \sqrt{2} \\ 3,8 & -3,24 & 5,78 \end{Vmatrix}$, matriz 2×3, isto é, tem 2 linhas e 3 colunas.

Os textos abordados neste tópico contribuem para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT301**, na medida em que o estudante interpreta os textos, mobiliza conhecimentos na resolução e registra a solução usando a linguagem matemática de maneira adequada. Por sua vez, os objetos de conhecimento, aliados à forma de investigar e de resolver problemas, favorecem o desenvolvimento das competências gerais **2** e **4** ao exercitar a curiosidade intelectual e a utilização da linguagem matemática e da tecnologia para expressar e produzir sentido na comunicação de informações e ideias.

Não escreva no livro.

Indicamos uma matriz por letra maiúscula e um elemento qualquer dela por letra minúscula acompanhada de dois índices naturais e não nulos:

- o primeiro indica a linha em que está o elemento;
- o segundo, a coluna à qual o elemento pertence.

Assim, se um elemento de uma matriz estiver indicado por a_{12}, então ele está na linha 1 e na coluna 2.

Convencionando que as linhas sejam numeradas de cima para baixo e as colunas da esquerda para a direita, observe como podemos representar, de forma geral, uma matriz A do tipo $m \times n$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Auxilie os estudantes na interpretação dessa simbologia e no modo como ela deve ser lida.

Em notação abreviada, essa matriz pode ser escrita deste modo:

$A = (a_{ij})_{m \times n}$ ou $A = (a_{ij});\ 1 \leqslant i \leqslant m;\ 1 \leqslant j \leqslant n$, com $i, j \in \mathbb{N}^*$

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R1 Obtenha a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$, sendo $a_{ij} = 2i - j$.

Resolução

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$.

Substituindo os valores de i e de j no termo geral da matriz, obtemos:

$$a_{11} = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$
$$a_{12} = 2 \cdot 1 - 2 = 0$$
$$a_{13} = 2 \cdot 1 - 3 = -1$$
$$a_{21} = 2 \cdot 2 - 1 = 3$$
$$a_{22} = 2 \cdot 2 - 2 = 2$$
$$a_{23} = 2 \cdot 2 - 3 = 1$$

Logo, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

R2 Determine x e y de modo que se tenha $A = B$.

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -x+1 \\ 3 & y+2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 2x-1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} x+1 & -1 \\ 2 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3{,}75 & -1 \\ -2 & y+1 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 3-\sqrt{3} \\ \frac{1}{5}x \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \frac{x-2\sqrt{3}}{2} \\ 2y \end{bmatrix}$

Resolução

a) Para que duas matrizes sejam iguais, elas devem ter o mesmo número de linhas e o mesmo número de colunas. Além disso, os elementos que se situam na mesma posição devem apresentar o mesmo valor. Assim, temos:

$$\begin{cases} a_{11} = b_{11} \Leftrightarrow 2 = 2 \\ a_{12} = b_{12} \Leftrightarrow -x + 1 = 2x - 1 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \\ a_{21} = b_{21} \Leftrightarrow 3 = 3 \\ a_{22} = b_{22} \Leftrightarrow y + 2 = 1 \Rightarrow y = -1 \end{cases}$$

Portanto, $x = 2$ e $y = -1$.

b) Nesse caso, a igualdade é impossível, pois $a_{21} \neq b_{21}$.

c) Igualando os elementos que se situam na mesma posição, temos:

$$\begin{cases} 3 - \sqrt{3} = \frac{x - 2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = 6 \\ \frac{1}{5}x = 2y \Rightarrow y = \frac{x}{10} \Rightarrow y = 0{,}6 \end{cases}$$

Portanto, $x = 6$ e $y = 0{,}6$.

Não escreva no livro.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 Obtenha a matriz A em cada caso.

a) $A = (a_{ij})_{2\times 2}$, em que $a_{ij} = i^2 - 3j$. $A = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

b) $A = (a_{ij})_{3\times 2}$, em que $a_{ij} = (-1)^i \cdot (2i - 3j)$. $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

2 Registre a alternativa correta no caderno.

(Fatec-SP) Qualquer elemento de uma matriz M pode ser representado por m_{ij}, em que "i" representa a linha e "j", a coluna em que esse elemento se localiza.

Dada a matriz M, considere que cada elemento m_{ij} da matriz apresentada indica a quantidade, em quilogramas, da hortaliça h_i (h_1 = agrião, h_2 = almeirão e h_3 = alface) produzida pela fazenda vertical f_j (f_1, f_2 e f_3). Assim, cada elemento dessa matriz representa a quantidade de um tipo de hortaliça produzida em média, semanalmente, para cada fazenda.

$$M = \begin{bmatrix} 250 & 580 & 640 \\ 160 & 110 & 80 \\ 900 & 620 & 590 \end{bmatrix}$$

A análise dos dados apresentados na matriz permite concluir corretamente que, em média, a produção semanal, Alternativa **c**.

a) do total de hortaliças da fazenda f_3 foi maior do que a da fazenda f_1.

b) de alface da fazenda f_2 foi menor do que nas demais.

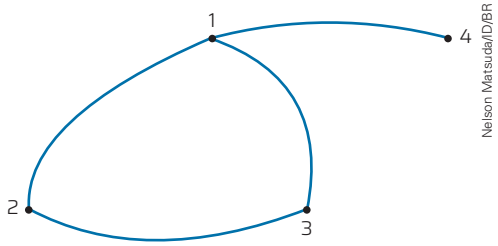
c) de almeirão da fazenda f_1 é o dobro da fazenda f_3.

d) de agrião da fazenda f_2 foi maior do que nas demais.

e) do total de hortaliças da fazenda f_1 foi maior do que a da fazenda f_3.

Matrizes e redes de comunicação

Vamos supor que dos aeroportos de quatro cidades partam voos diários. No esquema a seguir, 1, 2, 3 e 4 representam essas cidades, e as linhas representam os voos existentes entre elas.



Nelson Matsuda/ID/BR

Podemos associar a essa situação uma matriz $A = (a)_{4\times 4}$, que estabelece se há ou não voo direto entre as cidades, de modo que:

- se as cidades possuem ligação entre elas, ou seja, se há voo direto entre uma e outra, definimos $a_{ij} = 1$;
- se as cidades não se ligam diretamente, o que na situação descrita significa que não há voo direto entre elas, consideramos $a_{ij} = 0$;
- como todo ponto da rede se liga a ele mesmo, por convenção adotamos para esses casos $a_{ij} = 1$.

Em nosso exemplo, para montar a matriz A devemos "combinar" os pontos dois a dois, incluindo a "combinação" de cada ponto com ele mesmo. Assim, na matriz A:

- a_{11}, a_{22}, a_{33} e a_{44} são iguais a 1, pois convencionamos assim pelo fato de os pontos 1, 2, 3 e 4 estarem ligados a si mesmos;
- a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{21}, a_{23}, a_{31}, a_{32} e a_{41} são iguais a 1, pois representam pontos ligados entre si;
- a_{24}, a_{34}, a_{42} e a_{43} são iguais a zero porque representam pontos que não estão diretamente ligados entre si. Portanto, a matriz procurada é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A princípio, o desenho pode parecer mais simples que a matriz, mas pense no que aconteceria se tivéssemos 200 ou mesmo 1 000 cidades para analisar.

Nesses casos, consultar as matrizes provavelmente seria mais fácil. Observe que essas matrizes teriam tamanho 200×200 ou $1\,000 \times 1\,000$ e poderiam estar armazenadas em computadores que permitissem uma consulta rápida para sabermos se duas cidades possuem ou não uma rota aérea direta entre elas e até mesmo quais conexões são possíveis para ir de uma cidade a outra.

Retome as questões iniciais deste capítulo e reflita sobre o tamanho da matriz que representa todas as ligações aéreas entre as cidades brasileiras, considerando também as cidades que possuem mais de um aeroporto.

Para orientar os estudantes sobre essa reflexão, proponha que pesquisem o número de aeroportos que operavam voos comerciais no Brasil em 2024. Eles devem descobrir que eram 172 aeroportos.

OPERAÇÕES ENTRE MATRIZES

Os elementos de duas ou mais matrizes distintas podem ser adicionados ou multiplicados, determinando novas matrizes, como veremos a seguir.

Adição de matrizes

As matrizes são usadas em diversas situações para registrar informações. Empresas, por exemplo, podem organizar dados de produção e de vendas em tabelas retangulares. Acompanhe a situação a seguir.

Ana é responsável pelo controle da produção de *smartphones* de uma empresa. Ela organizou os dados em tabelas, uma para cada mês, que mostram a fabricação de dois modelos de *smartphone* produzidos em três cores diferentes. Observe.

Produção de janeiro		
Cor \ Modelo	64 GB	128 GB
Rosa	2 350	1 270
Prata	3 240	2 860
Preto	4 120	3 080

Dados obtidos por Ana.

Produção de fevereiro		
Cor \ Modelo	64 GB	128 GB
Rosa	1 980	1 270
Prata	2 360	2 090
Preto	3 970	3 450

Dados obtidos por Ana.

O diretor da empresa solicitou dados sobre a produção do primeiro bimestre de cada modelo nas três cores. Para apresentar as informações agrupadas, Ana adicionou os dados das duas tabelas, obtendo uma tabela referente à produção do bimestre.

Produção do primeiro bimestre		
Cor \ Modelo	64 GB	128 GB
Rosa	4 330	2 540
Prata	5 600	4 950
Preto	8 090	6 530

Dados obtidos por Ana.

Essa situação pode ser representada por uma adição de matrizes:

$$\begin{bmatrix} 2\,350 & 1\,270 \\ 3\,240 & 2\,860 \\ 4\,120 & 3\,080 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1\,980 & 1\,270 \\ 2\,360 & 2\,090 \\ 3\,970 & 3\,450 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\,350 + 1\,980 & 1\,270 + 1\,270 \\ 3\,240 + 2\,360 & 2\,860 + 2\,090 \\ 4\,120 + 3\,970 & 3\,080 + 3\,450 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\,330 & 2\,540 \\ 5\,600 & 4\,950 \\ 8\,090 & 6\,530 \end{bmatrix}$$

Não escreva no livro.

A soma das matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ de mesmo tipo $m \times n$ é a matriz $C = (c_{ij})$, também do tipo $m \times n$, em que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

Simbolicamente, indicamos por:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R3 Determine x, y e z, sabendo que:

$$\begin{bmatrix} x-2 & 4 \\ y+1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2z-3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & z \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Resolução

Adicionando as matrizes do 1º membro, temos a seguinte igualdade entre matrizes:

$$\begin{bmatrix} x-1 & 2z+1 \\ y-2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & z \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Igualando os termos que se encontram na mesma posição, temos:

$$\begin{cases} x - 1 = 3 \Rightarrow x = 4 \\ 2z + 1 = z \Rightarrow z = -1 \\ y - 2 = 2 \Rightarrow y = 4 \\ 4 = 4 \end{cases}$$

Portanto, $x = 4$, $y = 4$ e $z = -1$.

R4 Determine a matriz B sabendo que $A = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & 0 \end{bmatrix}$ e $3A = -\frac{1}{2}B$.

Resolução

Para obter a matriz B é necessário que ela tenha o mesmo número de linhas e o mesmo número de colunas da matriz A. Assim, vamos considerar que $B = [p \quad q]$.

Como $3A = A + A + A$, temos que a matriz $3A$ é a matriz obtida multiplicando-se cada um dos elementos da matriz A por 3. Analogamente, $-\frac{1}{2}B$ é a matriz obtida multiplicando-se cada um dos elementos da matriz B por $-\frac{1}{2}$. Assim:

$$3\left[\frac{3}{8} \quad 0\right] = -\frac{1}{2}[p \quad q] \Leftrightarrow \left[\frac{9}{8} \quad 0\right] = \left[-\frac{1}{2}p \quad -\frac{1}{2}q\right]$$

Igualando os termos que se encontram na mesma posição, temos:

$$\begin{cases} \frac{9}{8} = -\frac{1}{2}p \Rightarrow p = -\frac{9}{4} \\ 0 = -\frac{1}{2}q \Rightarrow q = 0 \end{cases}$$

Portanto, $B = \left[-\frac{9}{4} \quad 0\right]$.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

3 Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, calcule $A + B + C$. $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 9 & 14 \end{bmatrix}$

A matriz $-B$ é a matriz obtida multiplicando-se cada um dos elementos da matriz B por -1.

4 Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, determine a matriz X tal que $X + A - B = 0$. $X = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

5 Registre a alternativa correta no caderno. Alternativa **b**.

Sendo as matrizes $X = (x_{ij})$ e $Y = (y_{ij})$, quadradas de ordem 2 com $x_{ij} = i^2 + j^2$ e $y_{ij} = -i^2 + j^2$, o valor de $X + Y$ é

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 2 & -8 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ -8 & 2 \end{bmatrix}$

Multiplicar matrizes não é uma operação intuitiva. Assim, caso julgue oportuno, incentive os estudantes a ler sozinhos o texto deste tópico e oriente-os a registrar as possíveis dúvidas que surgirem. Depois, leia o texto coletivamente com o intuito de solucionar as dúvidas que surgirem e assegurar que eles tenham compreendido o processo.

Multiplicação de matrizes

Acompanhe a situação a seguir para entender como efetuar a multiplicação de matrizes.

O dono de uma rede de lojas de eletrônicos fez um levantamento dos valores gastos com a compra de quatro modelos de *tablet* de duas marcas diferentes e organizou os dados em uma tabela.

Preço dos *tablets*

Marca \ Modelo	8 GB	16 GB	32 GB	64 GB
X	R$ 500,00	R$ 700,00	R$ 900,00	R$ 1 000,00
Y	R$ 300,00	R$ 400,00	R$ 600,00	R$ 900,00

Dados obtidos pelo dono da rede de lojas.

Essas informações podem ser representadas por uma matriz A do tipo 2×4, em que cada elemento a_{ij} corresponde ao valor de cada modelo de *tablet* j de cada marca i.

$$A = \begin{bmatrix} 500 & 700 & 900 & 1\,000 \\ 300 & 400 & 600 & 900 \end{bmatrix}$$

Depois, o dono das lojas montou outra tabela, com a quantidade de *tablets* de cada modelo adquiridos pelas três filiais. Observe.

Quantidade de *tablets* adquiridos pelas filiais

Modelo \ Filial	D	E	F
8 GB	2	3	1
16 GB	3	1	1
32 GB	1	2	2
64 GB	1	1	2

Dados obtidos pelo dono da rede de lojas.

Esses dados podem ser representados por uma matriz B do tipo 4×3, em que cada elemento b_{ij} corresponde à quantidade adquirida de cada modelo i pela filial j.

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Agora, reflita: como é possível calcular o valor gasto com cada marca de *tablet* em cada filial?

Observando as tabelas, é possível verificar que:

Incentive os estudantes a responder a essa pergunta, que favorece o exercício da investigação e permite que eles elaborem hipóteses sobre como resolver o problema, contribuindo, assim, para a aquisição da competência geral **2**.

- Para a marca X, temos:

$$\begin{cases} 500 \cdot 2 + 700 \cdot 3 + 900 \cdot 1 + 1\,000 \cdot 1 = 5\,000 \\ 500 \cdot 3 + 700 \cdot 1 + 900 \cdot 2 + 1\,000 \cdot 1 = 5\,000 \\ 500 \cdot 1 + 700 \cdot 1 + 900 \cdot 2 + 1\,000 \cdot 2 = 5\,000 \end{cases}$$

- Para a marca Y, temos:

$$\begin{cases} 300 \cdot 2 + 400 \cdot 3 + 600 \cdot 1 + 900 \cdot 1 = 3\,300 \\ 300 \cdot 3 + 400 \cdot 1 + 600 \cdot 2 + 900 \cdot 1 = 3\,400 \\ 300 \cdot 1 + 400 \cdot 1 + 600 \cdot 2 + 900 \cdot 2 = 3\,700 \end{cases}$$

Organizando esses dados em uma tabela, temos:

Valores gastos com os *tablet* em cada filial

Marca \ Filial	D	E	F
X	R$ 5 000,00	R$ 5 000,00	R$ 5 000,00
Y	R$ 3 300,00	R$ 3 400,00	R$ 3 700,00

Dados obtidos pelo dono da rede de lojas.

Não escreva no livro.

Esses dados podem ser representados por uma matriz C do tipo 2×3, em que cada elemento c_{ij} indica o valor gasto com cada marca i em cada filial j:

$$C = \begin{bmatrix} 5\,000 & 5\,000 & 5\,000 \\ 3\,300 & 3\,400 & 3\,700 \end{bmatrix}$$

A matriz C representa a **matriz produto** das matrizes A e B, nessa ordem. Podemos representar essa multiplicação por $A \cdot B = C$. Assim, é possível escrever:

$$\begin{bmatrix} 500 & 700 & 900 & 1\,000 \\ 300 & 400 & 600 & 900 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\,000 & 5\,000 & 5\,000 \\ 3\,300 & 3\,400 & 3\,700 \end{bmatrix}$$

Observe que existe uma relação entre as linhas e as colunas das matrizes envolvidas.

$$A_{2 \times 4} \cdot B_{4 \times 3} = C_{2 \times 3}$$

Para determinar cada elemento da matriz C, multiplicamos ordenadamente os elementos da linha i da matriz A pelos elementos da coluna j da matriz B e adicionamos esses produtos.

$$\begin{bmatrix} 500 & 700 & 900 & 1\,000 \\ 300 & 400 & 600 & 900 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 500 \cdot 2 + 700 \cdot 3 + 900 \cdot 1 + 1\,000 \cdot 1 & 500 \cdot 3 + 700 \cdot 1 + 900 \cdot 2 + 1\,000 \cdot 1 & 500 \cdot 1 + 700 \cdot 1 + 900 \cdot 2 + 1\,000 \cdot 2 \\ 300 \cdot 2 + 400 \cdot 3 + 600 \cdot 1 + 900 \cdot 1 & 300 \cdot 3 + 400 \cdot 1 + 600 \cdot 2 + 900 \cdot 1 & 300 \cdot 1 + 400 \cdot 1 + 600 \cdot 2 + 900 \cdot 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 5\,000 & 5\,000 & 5\,000 \\ 3\,300 & 3\,400 & 3\,700 \end{bmatrix}$$

Sejam as matrizes $A = (a_{ij})$ do tipo $m \times n$ e $B = (b_{jk})$ do tipo $n \times p$. O produto de A por B (notação: $A \cdot B$ ou AB) é a matriz $C = (c_{ik})$ do tipo $m \times p$, em que cada c_{ik} é a soma dos produtos da multiplicação dos elementos da linha i de A pelos correspondentes elementos da coluna k de B.

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + a_{i3} \cdot b_{3k} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nk}$$

Podemos observar que:

- existe o produto AB somente quando o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B;
- o número de linhas da matriz produto C é igual ao número de linhas de A, e o número de colunas de C é igual ao número de colunas de B.

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

Exemplo 1

Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 10 & 5 & -2 \end{bmatrix}$, então:

- existe AB, pois o número de colunas de A (do tipo 3×2) é igual ao número de linhas de B (do tipo 2×3). Assim, AB é do tipo 3×3.

$$AB = \begin{bmatrix} 2 \cdot 7 + 1 \cdot 10 & 2 \cdot 8 + 1 \cdot 5 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) \\ 3 \cdot 7 + 4 \cdot 10 & 3 \cdot 8 + 4 \cdot 5 & 3 \cdot 0 + 4 \cdot (-2) \\ 5 \cdot 7 + 6 \cdot 10 & 5 \cdot 8 + 6 \cdot 5 & 5 \cdot 0 + 6 \cdot (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 21 & -2 \\ 61 & 44 & -8 \\ 95 & 70 & -12 \end{bmatrix}$$

Não escreva no livro.

- existe BA, pois o número de colunas de B é igual ao número de linhas de A. Assim, BA é do tipo 2×2.

$$BA = \begin{bmatrix} 7 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 0 \cdot 5 & 7 \cdot 1 + 8 \cdot 4 + 0 \cdot 6 \\ 10 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + (-2) \cdot 5 & 10 \cdot 1 + 5 \cdot 4 + (-2) \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38 & 39 \\ 25 & 18 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2

Se $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix}$, então:

- existe AB, pois o número de colunas de A (do tipo 2×2) é igual ao número de linhas de B (do tipo 2×3). Assim, AB é do tipo 2×3.

$$AB = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 & 3 \cdot 6 + 1 \cdot 7 & 3 \cdot (-2) + 1 \cdot 5 \\ 0 \cdot 2 + 4 \cdot 3 & 0 \cdot 6 + 4 \cdot 7 & 0 \cdot (-2) + 4 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 25 & -1 \\ 12 & 28 & 20 \end{bmatrix}$$

- não existe BA, pois o número de colunas de B é diferente do número de linhas de A.

Após a leitura dos dois modos de resolução do problema **R5** com os estudantes, analise com eles as diferenças desses procedimentos e verifique se eles percebem que no 1º modo é realizada uma multiplicação de matrizes.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R5 **Uma indústria fabrica três modelos diferentes de rádios: *P*, *Q* e *R*. A tabela I mostra o número de teclas e alto-falantes usados em cada modelo, e a tabela II mostra a produção que a fábrica pretende atingir nos meses de novembro e dezembro.**

Tabela I

Peça \ Modelo	*P*	*Q*	*R*
Teclas	10	12	15
Alto-falantes	2	2	4

Dados fornecidos pela indústria.

Tabela II

Modelo \ Mês	Novembro	Dezembro
P	800	2000
Q	1000	1500
R	500	1000

Dados fornecidos pela indústria.

Quantas teclas e quantos alto-falantes serão necessários para a produção nesses dois meses?

Resolução

Para resolver o problema, podemos proceder de dois modos.

1º modo: multiplicar os elementos da primeira linha da tabela I pelos elementos da primeira coluna da tabela II e adicionar os produtos, obtendo os dados referentes ao uso de teclas no mês de novembro.

$$10 \cdot 800 + 12 \cdot 1000 + 15 \cdot 500 = 27500$$

Portanto, serão usadas 27500 teclas no mês de novembro.

Para os alto-falantes, temos:

$$2 \cdot 800 + 2 \cdot 1000 + 4 \cdot 500 = 5600$$

Logo, serão usados 5600 alto-falantes na produção de rádios no mês de novembro.

Da mesma maneira, calculamos os dados referentes a dezembro.

$$10 \cdot 2000 + 12 \cdot 1500 + 15 \cdot 1000 = 53000$$
$$2 \cdot 2000 + 2 \cdot 1500 + 4 \cdot 1000 = 11000$$

Portanto, serão usadas 53000 teclas e 11000 alto-falantes no mês de dezembro.

Assim, para os meses de novembro e dezembro, a fábrica deverá utilizar 80500 teclas e 16600 alto-falantes.

2º modo: Podemos também resolver esse problema utilizando o produto de matrizes.

Primeiro, representamos os dados das tabelas I e II pelas matrizes A e B, respectivamente.

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 12 & 15 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 800 & 2000 \\ 1000 & 1500 \\ 500 & 1000 \end{bmatrix}$$

Em seguida, determinamos o produto $A \cdot B$.

$$\begin{bmatrix} 10 & 12 & 15 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 800 & 2000 \\ 1000 & 1500 \\ 500 & 1000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27500 & 53000 \\ 5600 & 11000 \end{bmatrix}$$

O produto $A \cdot B$ pode ser representado pela tabela III, que apresenta os componentes necessários para cada mês.

Tabela III

Peça \ Mês	Novembro	Dezembro
Teclas	27500	53000
Alto-falantes	5600	11000

Dados fornecidos pela indústria.

Pela tabela III, é possível concluir que a fábrica precisará de 80500 teclas e 16600 alto-falantes para a produção do último bimestre do ano.

Não escreva no livro.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

6 Determine os produtos.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 12 & 3 \\ -4 & -8 & -2 \\ 8 & 16 & 4 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 6 & 5 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 15 & 11 \\ -5 & 27 & 30 \end{bmatrix}$

7 Uma montadora de carretas precisa de eixos e rodas para os três modelos que produz. A tabela I mostra a quantidade de eixos e de rodas de cada um dos modelos, e a tabela II mostra uma previsão de quantas carretas a fábrica deverá produzir em julho e agosto.

Tabela I

Peça \ Modelo	*A*	*B*	*C*
Eixo	3	4	4
Roda	6	8	16

Dados fornecidos pela montadora.

Tabela II

Modelo \ Mês	Julho	Agosto
A	15	25
B	30	20
C	18	15

Dados fornecidos pela montadora.

a) Quantos eixos e quantas rodas serão necessários em cada um dos meses para que a montadora atinja a produção desejada? O número de eixos necessários para o mês de julho é 237 e para o mês de agosto é 215. O número de rodas necessárias para o mês de julho é 618 e para o mês de agosto é 550.

b) Se a produção a cada mês, de agosto a dezembro, for igual à de agosto, quantas rodas a montadora utilizará no segundo semestre inteiro? 2 750 rodas.

c) Que modificações devem ser feitas neste problema a fim de obter as respostas dos itens anteriores caso a empresa deseje fabricar uma nova carreta com 5 eixos e 10 rodas?
Acrescentar uma coluna na tabela peça/modelo e uma linha na tabela modelo/mês.

Matriz identidade

Matriz identidade de ordem $n \geqslant 1$ (notação: I_n) é uma matriz quadrada $n \times n$ na qual os elementos da forma a_{ii} de sua diagonal principal são iguais a 1 e os demais elementos são iguais a zero.

Exemplos 3

- $I_1 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$ é a matriz identidade de ordem 1.
- $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz identidade de ordem 2.
- $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz identidade de ordem 3.

Observe que, se A é uma matriz do tipo $m \times n$ com $m \neq n$, então:

- $I_m \cdot A = A$ e não existe $A \cdot I_m$;
- $A \cdot I_n = A$ e não existe $I_n \cdot A$.

Exemplo 4

Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$. Nesse caso, temos:

- $I_2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 & 1 \cdot 5 + 0 \cdot 4 & 1 \cdot 7 + 0 \cdot 6 \\ 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 & 0 \cdot 5 + 1 \cdot 4 & 0 \cdot 7 + 1 \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} = A$

Não existe $A \cdot I_2$, pois o número de colunas de A não é igual ao número de linhas de I_2.

- $A \cdot I_3 = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 5 \cdot 0 + 7 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 5 \cdot 1 + 7 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 7 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 6 \cdot 0 & 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 0 & 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 6 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} = A$$

Não existe $I_3 \cdot A$, pois o número de colunas de I_3 não é igual ao número de linhas de A.

Matriz inversa

Sejam A uma matriz quadrada de ordem m e I a matriz identidade de mesma ordem que A. Temos que a matriz A é considerada invertível quando existe outra matriz, chamada de **inversa** e indicada por A^{-1}, tal que:

$$A^{-1} \cdot A = I \text{ e } A \cdot A^{-1} = I$$

Para obter a matriz inversa de uma matriz quadrada, basta verificar uma dessas igualdades.

O processo de obtenção de uma matriz inversa consiste em utilizar uma matriz genérica que, ao ser multiplicada pela matriz original, resulta na matriz identidade.

Acompanhe um exemplo.

Para obter a matriz A^{-1}, inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, dado que $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, fazemos:

$$A \cdot A^{-1} = I \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolvendo a multiplicação entre as matrizes A e A^{-1}, temos:

$$\begin{bmatrix} 2 \cdot a + 1 \cdot c & 2 \cdot b + 1 \cdot d \\ 4 \cdot a + 3 \cdot c & 4 \cdot b + 3 \cdot d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2a + c & 2b + d \\ 4a + 3c & 4b + 3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como duas matrizes de mesma ordem são iguais apenas se os elementos que se encontram na mesma posição em cada uma delas apresentam o mesmo valor, obtemos o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 2a + c = 1 & (1) \\ 4a + 3c = 0 & (2) \\ 2b + d = 0 & (3) \\ 4b + 3d = 1 & (4) \end{cases}$$

Das equações (1) e (2), temos um sistema com as incógnitas a e c. Multiplicando a primeira linha desse sistema por -2 e adicionando-a à segunda linha, obtemos:

$$\begin{cases} 2a + c = 1 \\ 4a + 3c = 0 \end{cases} \Rightarrow + \begin{cases} -4a - 2c = -2 \\ 4a + 3c = 0 \end{cases}$$

$$c = -2$$

Substituindo o valor de c em uma das equações, encontramos $a = \frac{3}{2}$.

De maneira análoga, analisando as equações (3) e (4), determinamos que $d = 1$ e $b = -\frac{1}{2}$. Logo, a matriz inversa de A é:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Não escreva no livro.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R6 (Cefet-MG) A matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & x \end{bmatrix}$ é a inversa de $B = \begin{bmatrix} 3 & y \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Pode-se afirmar, corretamente, que a diferença $(x - y)$ é igual a:

a) -8
b) -2
c) 2
d) 6
e) 8

Resolução

Sabemos que o produto de uma matriz pela sua inversa resulta na matriz identidade. Logo, temos:

$$A \cdot B = I \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & y \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Efetuando a multiplicação das matrizes e igualando os valores obtidos aos respectivos termos na matriz identidade, temos:

$$\begin{cases} 2 \cdot 3 + 5 \cdot (-1) = 1 \Rightarrow 1 = 1 \\ 2 \cdot y + 5 \cdot 2 = 0 \Rightarrow y = -5 \\ 1 \cdot 3 + x \cdot (-1) = 0 \Rightarrow x = 3 \\ 1 \cdot y + x \cdot 2 = 1 \Rightarrow 1 = 1 \end{cases}$$

Assim, a diferença $(x - y)$ é dada por:

$$3 - (-5) = 3 + 5 = 8$$

Portanto, a alternativa **e** é a correta.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Conscientize os estudantes de que o objetivo da atividade **8** é verificar se eles são capazes de ler a simbologia específica relativa a matrizes. Isso pode favorecer a persistência na busca da resposta de uma questão técnica.

8 Indique a alternativa correta no caderno.

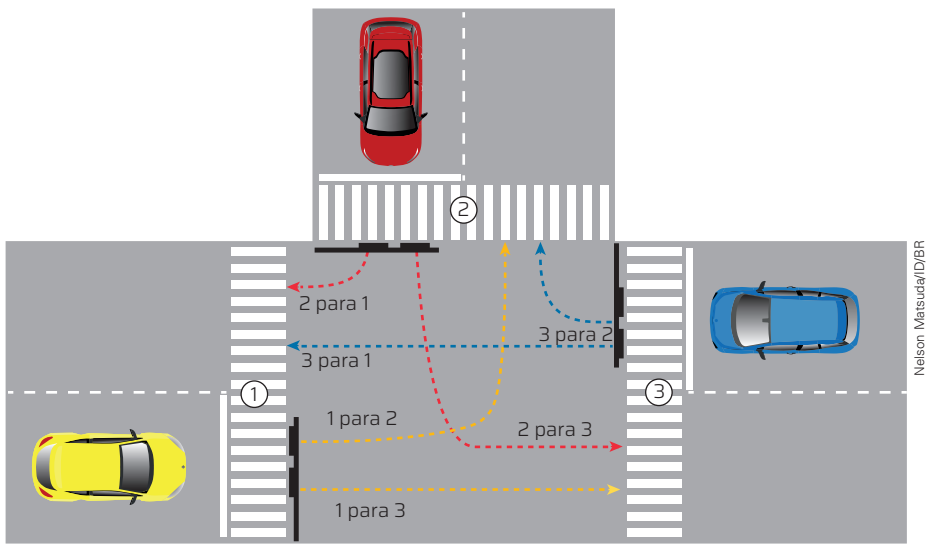
(Uesb-BA) Seja $A = (a_{ij})_{2\times2}$, tal que $a_{ij} = 1$ se $i = j$, $a_{ij} = 2$, se $i < j$ e $a_{ij} = 0$, se $i > j$ e seja A^{-1} a sua inversa. Sabendo que a e b são números reais não nulos, tais que $A^2 = aA^{-1} + bI$, em que I é a matriz identidade de ordem 2, podemos afirmar que $a^2 - 2b + 1$ é igual a Alternativa **a**.

a) -1.
b) -2.
c) 0.
d) 1.
e) 2.

Matrizes e controle de tráfego

Vamos observar mais um exemplo de como as matrizes podem servir de modelo para descrever situações do dia a dia.

A ilustração a seguir representa o "cruzamento" de duas ruas de mão dupla, cujo fluxo de automóveis nos pontos 1, 2 e 3 é organizado por três conjuntos de semáforos.



Nelson Matsuda/ID/BR

Não escreva no livro.

As matrizes M_1, M_2 e M_3 indicam o tempo, em minuto, durante o qual alguns semáforos se mantêm simultaneamente abertos segundo a sequência dada.

Inicialmente, durante 1 minuto, ficam verdes os semáforos de 1 para 2, de 1 para 3 e de 2 para 1.

$$M_1 = \begin{matrix}\text{De}\\ ①\\ ②\\ ③\\ \text{para}\end{matrix}\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ ① \ ② \ ③\end{matrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Em seguida, durante meio minuto, ficam verdes os semáforos de 2 para 1, de 2 para 3 e de 3 para 2.

$$M_2 = \begin{matrix}\text{De}\\ ①\\ ②\\ ③\\ \text{para}\end{matrix}\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ ① \ ② \ ③\end{matrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}$$

Por fim, durante meio minuto, ficam verdes os semáforos de 3 para 1, de 3 para 2 e de 1 para 3.

$$M_3 = \begin{matrix}\text{De}\\ ①\\ ②\\ ③\\ \text{para}\end{matrix}\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ ① \ ② \ ③\end{matrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}$$

A matriz M, obtida adicionando-se M_1, M_2 e M_3, termo a termo, mostra o tempo que cada semáforo fica aberto em cada sentido no período de 2 minutos.

$$M = \begin{matrix}\text{De}\\ ①\\ ②\\ ③\\ \text{para}\end{matrix}\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ ① \ ② \ ③\end{matrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\frac{1}{2}\\ 1\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1 & 0\end{bmatrix}$$

Por essa matriz, observamos, por exemplo, que o semáforo de 2 para 1 fica aberto durante 1 minuto e meio a cada período de 2 minutos.

Se multiplicarmos todos os termos da matriz M por 30, obteremos o tempo, em minuto, que cada semáforo fica aberto durante 1 hora.

$$30 \cdot M = \begin{bmatrix}0 & 30 & 45\\ 45 & 0 & 15\\ 15 & 30 & 0\end{bmatrix}$$

No caso dessas ruas, sabe-se que é possível passar até 20 carros por minuto cada vez que os semáforos abrem. Então, se multiplicarmos por 20 todos os termos da matriz anterior, teremos a quantidade máxima de carros que podem passar por esse "cruzamento" no período de 1 hora.

$$20 \cdot 30 \cdot M = \begin{bmatrix}0 & 600 & 900\\ 900 & 0 & 300\\ 300 & 600 & 0\end{bmatrix}$$

Se o número de carros em alguma das direções for maior que a quantidade máxima possível, teremos um engarrafamento, que poderá ou não ser resolvido alterando-se os tempos de abertura dos semáforos, isto é, modificando-se os valores nas matrizes M_1, M_2 e M_3.

Retome as questões iniciais deste capítulo e reflita sobre a complexidade do sistema que controla o cruzamento de várias vias de uma cidade.

PARA EXPLORAR

Vídeo

Cardoso, William. Vídeo: veja como funcionam os semáforos inteligentes instalados em SP. *Metrópoles*, São Paulo, 21 set. 2023. Disponível em: https://www.metropoles.com/sao-paulo/semaforos-inteligentes-em-sao-paulo. Acesso em: 17 out. 2024.

Este vídeo traz uma visão da complexidade de controlar parte dos semáforos inteligentes da cidade de São Paulo.

Não escreva no livro.

MATRIZES E SISTEMAS LINEARES

Pense em problemas complexos que podem envolver diversas variáveis, como os que foram propostos no texto de abertura deste capítulo. Os recursos que utilizamos para resolver os sistemas que estudamos até aqui não permitem resolver sistemas 4×4, 5×5, ... , 200×200, ... Por isso, é preciso conhecer outra forma de representar sistemas lineares e de resolvê-los. As matrizes nos auxiliaram na construção dessa nova maneira de resolver sistemas lineares com muitas variáveis e que pode ser reproduzida por máquinas.

Vamos analisar o problema do quadro a seguir.

(Ficsae-SP) Fabiana é representante de vendas de um fabricante de glicerina. A tabela descreve as formas de fornecimento do produto, o preço e a comissão de Fabiana.

Tipo de embalagem	Quantidade	Preço	Comissão
Bombona pequena	50 L	R$ 300,00	R$ 18,00
Bombona grande	200 L	R$ 950,00	R$ 47,50
Container	1 000 L	R$ 5 200,00	R$ 260,00

Na segunda quinzena de novembro, as vendas feitas por Fabiana totalizaram R$ 50 100,00, gerando uma comissão de R$ 2 656,00. Dado que, nessa quinzena, o número de bombonas grandes vendidas foi dez vezes o número de *containers* vendidos, a quantidade total de glicerina vendida nessa quinzena foi igual a:

a) 9 600 L **b)** 10 000 L **c)** 9 000 L **d)** 31 000 L **e)** 31 600 L

Para resolver esse problema, podemos usar o que estudamos de sistemas lineares ou utilizar matrizes.

Vamos representar a quantidade vendida de bombonas pequenas por x, a de bombonas grandes por y e a de *containers* por z. Podemos, assim, elaborar o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 300x + 950y + 5\,200z = 50\,100 \\ 18x + 47{,}5y + 260z = 2\,565 \\ y = 10z \end{cases}$$

Agora, observe como esse sistema pode ser escrito usando-se o produto de matrizes:

$$\begin{cases} 300x + 950y + 5\,200z = 50\,100 \\ 18x + 47{,}5y + 260z = 2\,565 \\ 0x + 1y - 10z = 0 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 300 & 950 & 5\,200 \\ 18 & 47{,}5 & 260 \\ 0 & 1 & -10 \end{bmatrix}}_{\text{matriz dos coeficientes}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\text{matriz das incógnitas}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 50\,100 \\ 2\,565 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{matriz dos termos independentes}}$$

Semelhantemente ao que fazemos para resolver uma equação, para resolver esse problema usando matrizes, vamos isolar a matriz com as incógnitas em um dos membros da igualdade.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 300 & 950 & 5\,200 \\ 18 & 47{,}5 & 260 \\ 0 & 1 & -10 \end{bmatrix}}_{\text{matriz } A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\text{matriz } B} = \underbrace{\begin{bmatrix} 50\,100 \\ 2\,565 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{matriz } C}$$

Para isso, multiplicamos os dois membros da igualdade pela matriz inversa da matriz dos coeficientes. Utilizando as propriedades que vimos anteriormente e a linguagem algébrica, temos:

$$A^{-1} \cdot A \cdot B = A^{-1} \cdot C$$
$$I \cdot B = A^{-1} \cdot C$$
$$B = A^{-1} \cdot C$$

Observe que, para resolver o problema utilizando matrizes, devemos multiplicar a matriz inversa de A pela matriz C, dos termos independentes.

Não escreva no livro.

Esses cálculos, apesar de serem simples, são trabalhosos e demandam tempo. Entretanto, com o auxílio da tecnologia, isso pode ser realizado de modo fácil e rápido.

Você deve estar se perguntando o motivo de se resolver um problema usando matrizes se ele pode ser resolvido utilizando os conhecimentos de sistemas lineares. A ideia é que você entenda o processo e, ao trabalhar a seção *Tecnologia*, perceba que esses conhecimentos podem ser ampliados para sistemas com n equações lineares e n incógnitas, não importa qual seja o valor de n.

TECNOLOGIA

O trabalho realizado nesta seção permite desenvolver as competências gerais **2**, **4** e **5** e as habilidades **EM13MAT301**, **EM13MAT315** e **EM13MAT405**, uma vez que o estudante é solicitado a registrar a solução de um problema proposto usando a linguagem matemática adequada (linguagem de programação), ao descrever e analisar o algoritmo solução.

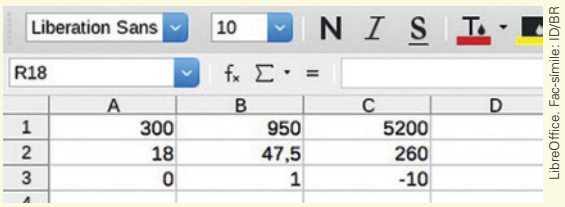
Nesta seção, você vai utilizar uma planilha eletrônica para resolver problemas que envolvem sistemas lineares e matrizes. Para isso, você pode usar o LibreOffice, *software* com o qual você já trabalhou em capítulos anteriores.

Lembre-se de que o objetivo é resolver a seguinte equação:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\text{matriz } B} = \underbrace{\begin{bmatrix} 300 & 950 & 5\,200 \\ 18 & 47{,}5 & 260 \\ 0 & 1 & -10 \end{bmatrix}^{-1}}_{\text{matriz } A^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 50\,100 \\ 2\,565 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{matriz } C}$$

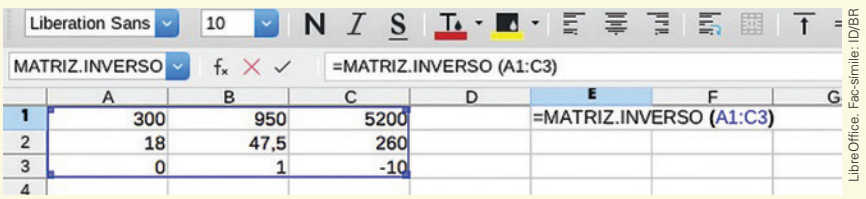
Primeiro, vamos determinar a matriz A^{-1} e, em seguida, a multiplicação $A^{-1} \cdot C$. Para isso, acompanhe as etapas a seguir.

1ª etapa: Na planilha, escreva a matriz $A = \begin{bmatrix} 300 & 950 & 5\,200 \\ 18 & 47{,}5 & 260 \\ 0 & 1 & -10 \end{bmatrix}$.

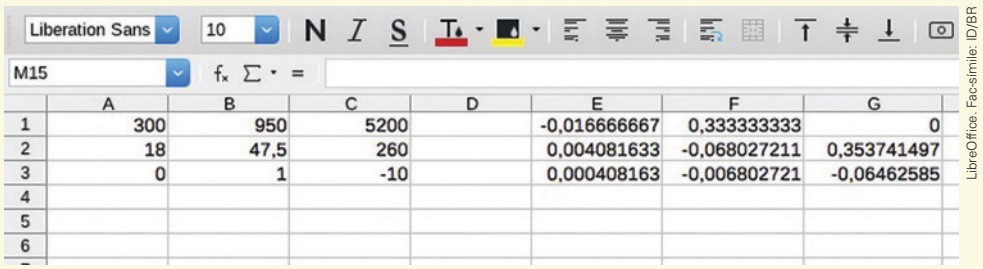


2ª etapa: Para determinar a matriz A^{-1}, você vai utilizar uma função da planilha eletrônica: "MATRIZ.INVERSO". Selecione as células onde vão entrar os elementos da matriz inversa. Como se trata de uma matriz 3×3, é preciso que você selecione nove células. Para digitar o comando, aperte a tecla F2 e, então, na célula E1, digite:

=MATRIZ.INVERSO(A1:C3)

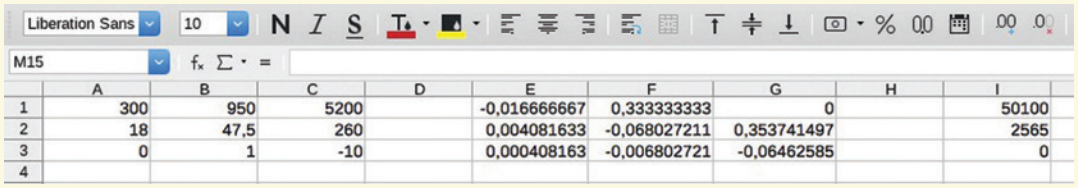


3ª etapa: Aperte a combinação das teclas "Ctrl + Shift + Enter", e a matriz inversa é calculada imediatamente. Pode ocorrer de os elementos da matriz inversa serem números racionais expressos na forma decimal (dízima periódica).



Não escreva no livro.

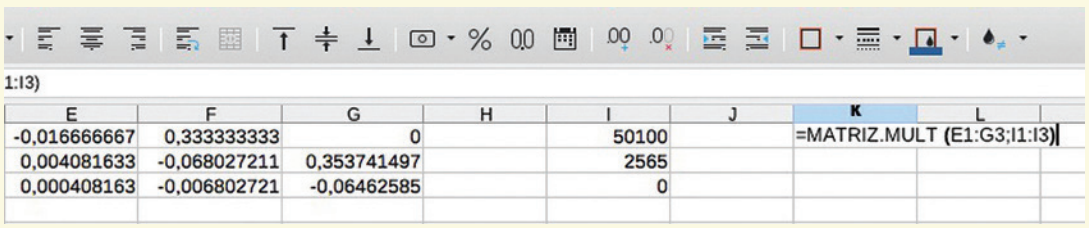
4ª etapa: Digite a matriz C nas células I1, I2 e I3.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	300	950	5200		-0,016666667	0,333333333	0		50100
2	18	47,5	260		0,004081633	-0,068027211	0,353741497		2565
3	0	1	-10		0,000408163	-0,006802721	-0,06462585		0
4									

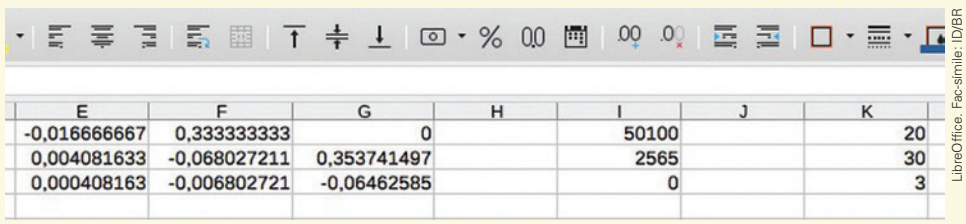
5ª etapa: Agora, multiplique a matriz A^{-1} pela matriz C. Para isso, você vai utilizar outra função da planilha eletrônica: "MATRIZ.MULT". Como você está multiplicando uma matriz 3×3 por uma matriz 3×1, o resultado será uma matriz 3×1. Assim, é necessário selecionar três células da mesma coluna. Para digitar o comando, aperte a tecla F2 e, então, na célula K1, digite:

=MATRIZ.MULT(E1:G3;I1:I3)



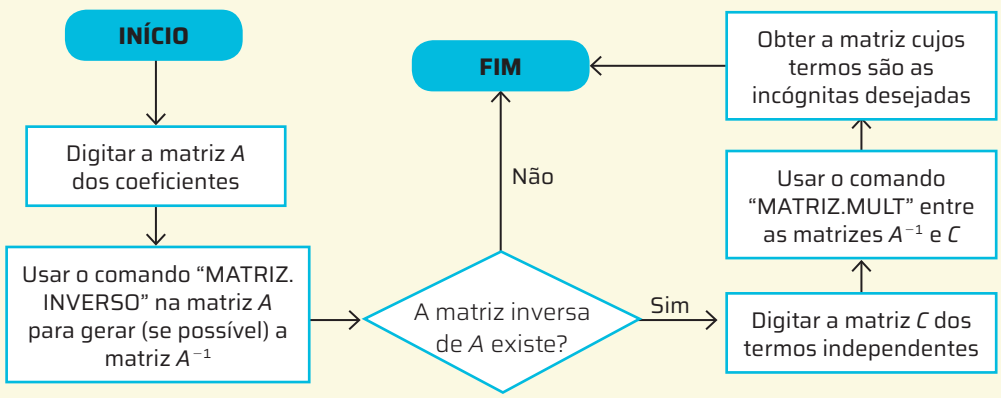
E	F	G	H	I	J	K	L
-0,016666667	0,333333333	0		50100		=MATRIZ.MULT (E1:G3;I1:I3)	
0,004081633	-0,068027211	0,353741497		2565			
0,000408163	-0,006802721	-0,06462585		0			

6ª etapa: Aperte as teclas "Ctrl + Shift + Enter", e o produto $A^{-1} \cdot C$ é calculado imediatamente.



E	F	G	H	I	J	K
-0,016666667	0,333333333	0		50100		20
0,004081633	-0,068027211	0,353741497		2565		30
0,000408163	-0,006802721	-0,06462585		0		3

Como você deve ter observado, o processo de resolução de um sistema com a utilização de uma planilha eletrônica consiste em um conjunto de etapas que devem seguir determinada ordem, ou seja, um algoritmo de resolução de sistemas. Esse algoritmo pode ser representado pelo fluxograma a seguir.



Perceba que esse fluxograma corresponde a um algoritmo que pode ser utilizado para resolver sistemas $n \times n$. Por exemplo, ao longo deste capítulo, você pode refletir sobre a quantidade de variáveis envolvidas para identificar se há voo direto entre duas cidades e no controle do tempo dos semáforos de uma cidade. Além desses exemplos, há outros fenômenos e situações que envolvem muitas variáveis, e alguns deles podem ser modelados usando-se sistemas lineares. O processo que estudamos nesta seção para resolver um sistema linear 3×3 é um caso parecido com aqueles que os supercomputadores executam. A diferença é que os supercomputadores lidam com problemas mais complexos e, consequentemente, com algoritmos muito mais complexos.

Não escreva no livro.

ATIVIDADES

1 De acordo com a resolução apresentada, qual é a alternativa correta para o problema proposto na página 277? Alternativa **b**.

2 Com o auxílio de uma planilha eletrônica e utilizando o comando "MATRIZ.MULT", verifique que o produto da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ pela sua inversa é igual à matriz identidade de ordem 3.

Consulte a resposta no Manual do Professor.

3 Com o auxílio de uma planilha eletrônica e dos passos mostrados no fluxograma, verifique se é possível resolver os sistemas a seguir.

a) $\begin{cases} 3x - y + z = 7 \\ x + y + z = 9 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}$ Sim, é possível resolver o sistema, obtendo $x = 2$, $y = 3$ e $z = 4$.

b) $\begin{cases} x + 3y - z = 2 \\ 2x + 4y + z = 7 \\ 3x + 9y - 3z = 8 \end{cases}$ Não é possível resolver o sistema.

c) $\begin{cases} x + 3y - 4z = 2 \\ 2x - y + 2z = 5 \\ x - 11y + 16z = 4 \end{cases}$ Não é possível resolver o sistema.

d) $\begin{cases} -x - 4y + 2z + w = -32 \\ 2x - y + 7z - 9w = 14 \\ -x + y + 3z + w = 11 \\ x - 2y + z - 4w = -4 \end{cases}$ Sim, é possível resolver o sistema, obtendo $x = -20{,}2$; $y = 9{,}2$; $z = -3$ e $w = -9{,}4$.

e) $\begin{cases} 3x + 2y - z + w + t = 10 \\ 4x + 7y - 8z + 5w + 3t = 17 \\ 7x + 13y - 4z + 11w + 13t = 45 \\ x + 2y + z - 17w - t = 57 \\ 4x + 15y + 5z - 19w + 2t = 89 \end{cases}$ **e)** Sim, é possível resolver o sistema, obtendo $x = 2{,}306849$; $y = 0{,}744624$; $z = -0{,}92778$; $w = -3{,}42463$ e $t = 4{,}087061$.

4 Alguns itens da atividade anterior não podem ser resolvidos com uma planilha eletrônica. Reúna-se com um colega para tentar explicar por que isso acontece. Depois, discutam, pensem e pesquisem outras ferramentas tecnológicas que poderiam ser utilizadas para resolver esses sistemas.

Resposta pessoal.

O objetivo da atividade **3** é levar os estudantes a relacionar as técnicas de resolução de sistemas lineares com a rotina de programação executada por um supercomputador para solucionar uma situação complexa. O importante é que eles percebam que a resolução de um sistema de equações lineares 3×3 é um caso particular de resolução e que há outros tipos de sistemas lineares que podem ter um número maior de equações e de variáveis.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

As questões a seguir podem ser resolvidas sem o auxílio de um computador. No entanto, a proposta é exercitar o conhecimento que você adquiriu sobre o uso da planilha eletrônica e seus comandos para resolver sistemas lineares.

9 Escreva a resposta correta no caderno.

(IFPE) Com a proximidade do final do ano, uma papelaria quis antecipar as promoções de material didático para o ano letivo de 2012. Foram colocados em promoção caneta, caderno e lápis.

As três ofertas eram:

1ª) 5 canetas, 4 cadernos e 10 lápis por R$ 62,00;

2ª) 3 canetas, 5 cadernos e 3 lápis por R$ 66,00;

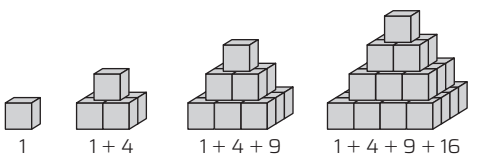
3ª) 2 canetas, 3 cadernos e 7 lápis por R$ 44,00.

Para comparar os preços unitários dessa papelaria com outras do comércio, o Sr. Ricardo calculou os preços de uma caneta, um caderno e um lápis. A soma desses preços é: Alternativa **d**.

a) R$ 20,00
b) R$ 18,00
c) R$ 16,00
d) R$ 14,00
e) R$ 12,00

10 Indique a resposta correta no caderno.

(Famerp-SP) As figuras indicam uma sequência de empilhamentos de cubos de 1 cm³. Da primeira pilha em diante, os volumes das pilhas, em cm³, são iguais a 1, 5, 14, 30, 55, e assim sucessivamente.



Famerp. Fac-símile: ID/BR

Sabe-se que a soma $1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \ldots + x^2$ é um polinômio do terceiro grau, dado por $P(x) = mx^3 + nx^2 + px$, com m, n e p racionais. Portanto, $P(1) = 1$, $P(2) = 5$, $P(3) = 15$, $P(4) = 30$ e assim por diante. Nas condições dadas, m é igual a:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{5}{6}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{1}{6}$ e) $\frac{1}{3}$

11 Registre a resposta correta no caderno. Alternativa **a**.

(Ficsae-SP) Um parque tem 3 pistas para caminhada, X, Y e Z. Ana deu 2 voltas na pista X, 3 voltas na pista Y e 1 volta na pista Z, tendo caminhado um total de 8 420 m. João deu 1 volta na pista X, 2 voltas na pista Y e 2 voltas na pista Z, num total de 7 940 m. Marcela deu 4 voltas na pista X e 3 voltas na pista Y, num total de 8 110 m. O comprimento da maior dessas pistas excede o comprimento da menor pista em: Alternativa **a**.

a) 1130 m
b) 1350 m
c) 1570 m
d) 1790 m

12 Indique a resposta correta no caderno.

(Ifal) Em um determinado momento, um estacionamento possui 50 veículos, entre carros, motos e

Não escreva no livro.

triciclos. Um garoto curioso sai contando o total de rodas em contato com o chão no estacionamento e encontra 165, percebendo também que a quantidade de rodas dos carros era o quádruplo do número de rodas das motos.

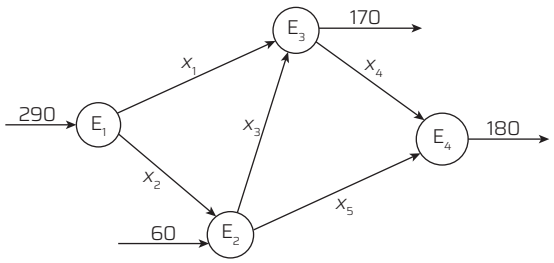
Considerando as informações como corretas, podemos dizer que o estacionamento possui:

a) 30 motos.
b) 15 carros.
c) 15 triciclos.
d) O número de carros igual ao dobro de triciclos.
e) O número de motos igual ao triplo de triciclos.

Alternativa **e**.

13 **Escreva a alternativa correta no caderno.**

(FPP-PR) Uma rede pode ser representada por um conjunto de elementos denominados vértices interligados por retas, conhecidas como arestas. Tais sistemas de redes são utilizados para modelar diversas situações, como tráfego de veículo, sinal de telefone e modelos em engenharia elétrica. Conseguinte, considere o fluxo dado pela figura abaixo.



FPP-PR. Fac-símile: ID/BR

Dado que o fluxo total de veículos de entrada (por hora) é igual ao fluxo total de saída (por exemplo, para o vértice $E1$, $290 = x_1 + x_2$), é CORRETO afirmar que o modelo matemático do fluxo acima:

a) não tem solução.
b) tem solução única.
c) admite apenas duas soluções.
d) admite apenas três soluções.
e) tem infinitas soluções.

Alternativa **e**.

CÁLCULO RÁPIDO

Depois de realizar os cálculos ao longo dos capítulos deste livro, a proposta aqui é retomar alguns deles, mas agora mentalmente. Vamos lá!

1 **Efetue mentalmente os cálculos de cada um dos sistemas lineares e, em seguida, escreva se ele tem uma, nenhuma ou infinitas soluções.**

a) $\begin{cases} 2x - 3y = -16 \\ 5x + 3y = 2 \end{cases}$ $S = \{(-2, 4)\}$. Possui uma única solução (SPD).

b) $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 4x - 6y = 5 \end{cases}$ $S = \varnothing$. Não existe nenhuma solução (SI).

c) $\begin{cases} 3x + y = 0 \\ 11x - y = 42 \end{cases}$ $S = \{(-9, 3)\}$. Possui uma única solução (SPD).

d) $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - y = -4 \end{cases}$ $S = \{(-1, 2)\}$. Possui uma única solução (SPD).

e) $\begin{cases} -3x + y = 7 \\ 9x - 3y = -21 \end{cases}$ $S = \left\{\left(\frac{\alpha - 7}{3}, \alpha\right) \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}$. Possui infinitas soluções (SPI).

f) $\begin{cases} 5x + 2y = 8 \\ 10x + 4y = 5 \end{cases}$ $S = \varnothing$. Não existe nenhuma solução (SI).

2 **Determine o valor de x em cada igualdade:**

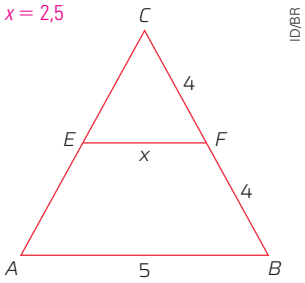
a) $2^x = 8$ $x = 3$
b) $3^x = 27$ $x = 3$
c) $(-3)^3 = x$ $x = -27$
d) $(2)^{-3} = x$ $x = \frac{1}{8}$
e) $(-5)^{-1} = x$ $x = -\frac{1}{5}$
f) $x^{-2} = 16$ $x = \pm\frac{1}{4}$

3 **Para que valores de x no intervalo $[0, 2\pi]$ as equações trigonométricas são verdadeiras?**

a) $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$
b) $\cos x = \frac{1}{2}$ $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$
c) $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$
d) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$
e) $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $S = \left\{\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$
f) $\cos x = -1$ $S = \{\pi\}$

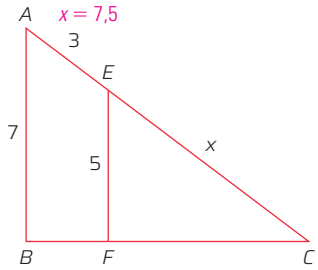
4 Em cada um dos triângulos, determine o valor de x sabendo que os lados $\overline{AB}$ e $\overline{EF}$ são paralelos.

a) $x = 2{,}5$



ID/BR

b) $x = 7{,}5$



ID/BR

PARA RECORDAR

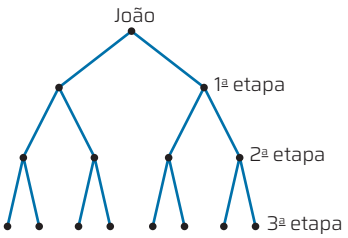
1 Sendo x e y números reais positivos quaisquer, responda às questões.

a) É correto afirmar que, se $x < y$, então $x^2 < y$? Não.

b) É correto afirmar que $-x < 0$? Sim.

c) É correto afirmar que $\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y^2} = x \cdot y$? Sim.

2 João iniciou uma campanha para arrecadar alimentos. Em uma 1ª etapa, convidou dois amigos, que deveriam doar 1 kg de alimentos cada um. Em uma 2ª etapa, cada um desses amigos convidou mais dois amigos, que deveriam doar 1 kg de alimentos cada um, e assim por diante, conforme o esquema ao lado. Supondo que, das pessoas chamadas, nenhuma deixou de convidar mais duas e que todas fizeram a doação, esse sistema de arrecadação poderia ser ilustrado (nas primeiras etapas) como no esquema apresentado.



ID/BR

a) É possível afirmar que, a cada etapa, o número de pessoas envolvidas na campanha cresce em progressão geométrica? Sim.

b) Quantas pessoas, ao todo, participaram dessa campanha até a 5ª etapa? 32 pessoas.

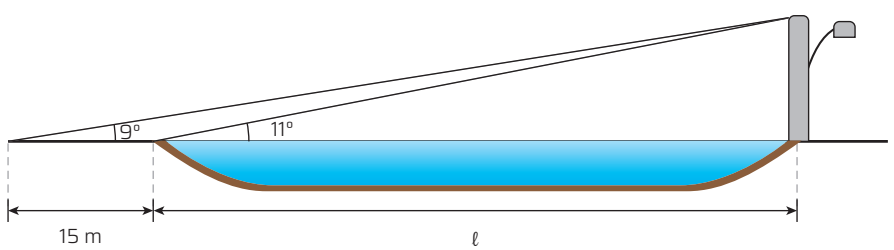
c) Quantos quilogramas de alimento João conseguiu arrecadar até a 8ª etapa da campanha? 510 kg

d) João guarda os alimentos em caixas com capacidade de 128 kg. Em que etapa ele encheu a primeira caixa? 6ª etapa.

3 Um eletricista vai fazer um ajuste na rede elétrica de uma residência. A parte que ele precisa acessar está em curto com 5 fios expostos e eletrizados. Para desfazer o curto, o eletricista precisa desligar 2 fios específicos, um de cada vez, em determinada ordem. Se desligar um fio errado ou na ordem errada, pode ocorrer um superaquecimento que causaria um princípio de incêndio. Se o eletricista escolher aleatoriamente 2 fios para desligar, em determinada ordem, qual é a probabilidade de ele desativar o curto? $\frac{1}{20}$

4 Um homem deseja determinar a largura de um rio. Então, de um ponto da margem, mede o ângulo de elevação do topo de um poste situado na margem oposta, obtendo 11°. Afastando-se 15 m, ele obtém um novo ângulo, agora de 9°. Calcule a largura ℓ do rio.

Considere $tg\ 9° \simeq 0{,}16$ e $tg\ 11° \simeq 0{,}19$. 0,45 m



ID/BR

Não escreva no livro.

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO

Você conhece a Obmep? Trata-se da Olimpíada Brasileira de Matemática para as Escolas Públicas, que acontece todos os anos, desde 2006. Aqui estão três problemas que foram propostos em diferentes anos. Todos eles exigem o raciocínio lógico para sua resolução.

1 **Indique a resposta no caderno.**

(Obmep) Alice, Beatriz, Cláudia e Daniela estão vestidas de azul, branco, vermelho e preto, cada uma de uma única cor. Elas conversam sentadas em círculo. A menina de azul, que não é nem Alice nem Cláudia, está entre a menina de branco e Daniela. A menina de preto está entre a menina de vermelho e Cláudia. Quais são as cores que Alice, Beatriz, Cláudia e Daniela estão usando, nessa ordem? Alternativa **e**.

a) preto, azul, vermelho e branco

b) preto, vermelho, branco e azul

c) vermelho, preto, azul e branco

d) vermelho, azul, branco e preto

e) preto, azul, branco e vermelho

2 **Escreva a alternativa correta no caderno.** Alternativa **d**.

(Obmep) Ana, Bernardo, Célia e Danilo repararam que Danilo é mais alto que Célia e que a diferença entre as alturas de Célia e Ana é igual à diferença entre as alturas de Ana e Danilo. Observaram também que a soma das alturas dos dois rapazes é igual à soma das alturas das duas garotas. Qual das alternativas a seguir é verdadeira?

a) Célia é mais alta que Ana.

b) A diferença entre as alturas dos meninos é igual à diferença entre as alturas das meninas.

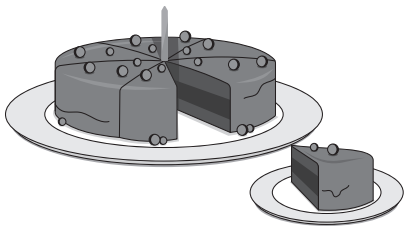
c) Célia é a mais baixa do grupo.

d) A diferença entre as alturas de Danilo e Célia é igual à diferença entre as alturas de Ana e Bernardo.

e) Ana é a mais alta de todos.

3 **Registre a alternativa correta no caderno.** Alternativa **e**.

(Obmep) Nove amigos compraram três bolos, cada um deles cortado em oito fatias. Todos comeram bolo e não sobrou nenhum pedaço. Sabendo que cada um só comeu fatias inteiras do bolo, podemos ter certeza de que:



Obmep. Fac-símile: ID/BR

a) alguém comeu quatro fatias;

b) um deles comeu somente uma fatia;

c) todos comeram duas fatias, pelo menos;

d) uns comeram duas fatias e os demais comeram três fatias;

e) um deles comeu, no mínimo, três fatias.

Acompanhe a produção da síntese feita pelos estudantes e, ao final, proponha-lhes que troquem suas produções para que um avalie o trabalho do outro e traga contribuições para a melhoria da produção do colega.

PALAVRAS-CHAVE

As principais ideias estudadas neste capítulo foram organizadas no quadro a seguir.

Temas centrais do capítulo	Como definir ou explicar o que é?	Existem operações associadas? Quais e como são feitas?	Uma aplicação desse tema é...	Por que esse tema é importante para a Matemática?	Por que esse tema é importante para o desenvolvimento tecnológico?
Matrizes	////////////	////////////	////////////	////////////	////////////
Adição de matrizes	////////////	////////////	////////////	////////////	////////////
Multiplicação de matrizes	////////////	////////////	////////////	////////////	////////////
Matriz inversa	////////////	////////////	////////////	////////////	////////////
Matrizes na resolução de sistemas lineares	////////////	////////////	////////////	////////////	////////////

Retome cada uma delas em suas anotações e no livro. Depois, copie este quadro no caderno e complete-o com o que você aprendeu e com bons argumentos para as perguntas das duas últimas colunas.

MATEMÁTICA E TECNOLOGIA

Matrizes e imagens digitais

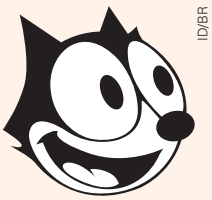
Esta seção favorece o trabalho com as competências gerais **3** e **4** da Educação Básica propostas pela BNCC, na medida em que os estudantes usam e valorizam manifestações artísticas e participam de práticas de produção artístico-cultural, usam diferentes linguagens, como a visual, e conhecimentos das linguagens artística e matemática. Além disso, é possível trabalhar com os temas contemporâneos transversais Ciência e Tecnologia e Multiculturalismo.

Para ampliar os conhecimentos dos estudantes sobre imagens digitais, convide um professor de Arte para participar das discussões. Com isso, é possível explorar a competência específica **7** de Linguagens e suas Tecnologias, pois os estudantes vão considerar as esferas técnicas, criativas e estéticas para mobilizar práticas de linguagem do universo digital e engajar-se em práticas autorais e coletivas.

Você já reparou na quantidade de telas com as quais interagimos no dia a dia? Ao conferir a hora no celular, ao assistir a uma transmissão na televisão, ao ver um filme ou foto no *tablet*, você já se perguntou como essas imagens se formaram na tela? Leia os textos a seguir e saiba mais sobre o assunto.

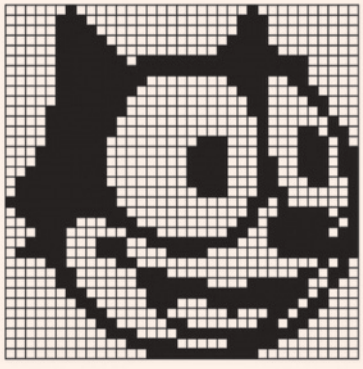
Matrizes e imagens binárias

As imagens que você vê em uma página na internet e as fotos que você tira com sua máquina fotográfica digital podem ser representadas usando-se matrizes. Por exemplo, a pequena imagem do Gato Félix [...] pode ser representada por uma matriz 35×35 cujos elementos são os números 0 e 1, que especificam a cor do *pixel*. O número 0 indica a cor preta e o número 1 indica a cor branca. Imagens digitais que usam apenas duas cores (em geral, preta e branca) são denominadas **imagens binárias** (ou **imagens booleanas**).



ID/BR

A figura (estática) [...] [a seguir] apresenta uma versão ampliada da imagem do Gato Félix, onde cada quadrado representa um *pixel*. A matriz correspondente é apresentada ao lado.





Arquivo UFF/Acervo do cedente

Matrizes e imagens binárias. *In*: *Conteúdos digitais para o ensino e aprendizagem de Matemática e Estatística. Matrizes e imagens binárias*. Universidade Federal Fluminense, Niterói, RJ, [20--]. Disponível em: http://www.cdme.im-uff.mat.br/matrix/matrix-html/matrix_boolean/matrix_boolean_br.html. Acesso em: 17 out. 2024.

Matrizes e imagens coloridas

Imagens coloridas podem ser representadas por três matrizes. Cada matriz especifica a quantidade de vermelho (*Red* em inglês), verde (*Green* em inglês) e azul (*Blue* em inglês) que compõem a imagem. Este sistema de cores é conhecido como RGB. Os elementos destas matrizes determinam a intensidade do *pixel* referente à cor da matriz. Por conveniência, a maioria dos arquivos digitais atuais usa o número 0 para indicar ausência de intensidade e o número 255 para indicar intensidade máxima.

[...]

Matrizes e imagens coloridas. *In*: *Conteúdos digitais: para o ensino aprendizagem de Matemática e Estatística. Matrizes e imagens coloridas*. Universidade Federal Fluminense, Niterói, RJ, [20--]. Disponível em: http://www.cdme.im-uff.mat.br/matrix/matrix-html/matrix_color/matrix_color_br.html. Acesso em: 17 out. 2024.

Comente com os estudantes que, dependendo do tipo de *software* utilizado, existem diferentes padrões de codificação (RGB, HEX, CMYK, etc.). Para converter um padrão em outro, é possível escrever em um buscador da internet, por exemplo, os termos "RGB to HEX" e modificar, com o cursor, a cor e a tonalidade desejadas para conhecer seu respectivo código.

Não escreva no livro.

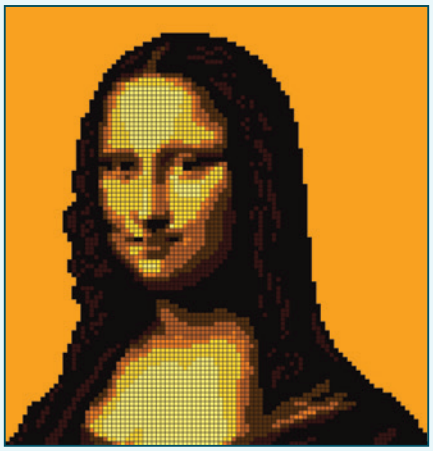
Você já ouviu falar em *pixel art*? É um tipo de arte digital na qual as imagens são editadas a partir de seus *pixels*, um por um. O processo pode render imagens extremamente detalhadas e interessantes, com um resultado artístico surpreendente.

Não se sabe exatamente quem foi o primeiro artista que produziu gráficos com essa técnica, mas, na década de 1980, houve um grande avanço entre os produtores de *games* que a usavam. Atualmente, muitos nomes da arte digital mundial utilizam essa técnica como base de sua produção.



Patinya_P_ang/Shutterstock.com/ID/BR

Personagens elaboradas com a técnica da *pixel art*.



Dmytro Demianenko/Shutterstock.com/ID/BR

Releitura da obra *La Gioconda*, de Leonardo da Vinci, utilizando a técnica da *pixel art*.

Conectando ideias

1 **Que tal elaborar imagens utilizando a técnica da *pixel art*? Para isso, execute as instruções a seguir. Use a criatividade!** Resposta pessoal.

I. Em uma folha de papel quadriculado, elabore uma imagem considerando que cada um dos quadrinhos seja um *pixel*. Você pode começar, por exemplo, criando imagens em preto e branco.

II. Em outra folha de papel quadriculada, codifique cada um dos *pixels* escrevendo 0 para a cor preta e 1 para a cor branca no quadrinho que corresponde ao quadrinho de mesma posição em seu desenho.

III. Troque sua folha codificada com a de um colega. O desafio de vocês será decodificar os zeros e as marcações 1 para descobrir qual foi a imagem desenhada inicialmente.

IV. Realize a brincadeira novamente, mas, dessa vez, crie uma imagem colorida. Lembre-se de que agora será necessário definir uma paleta de cores e os respectivos códigos para cada uma delas. Por exemplo, você pode fazer um desenho usando vermelho (0), amarelo (1) e azul (2).

2 **Trabalhar com *pixel art* no papel mobilizou não só seus conhecimentos matemáticos e geométricos como também suas habilidades de resolução de problemas. Que tal agora utilizar essa técnica para criar uma imagem digital?** Resposta pessoal.

Produzir uma imagem digital, com base na técnica da *pixel art*, apresentará novos desafios para você?

- Inicialmente, pesquise sobre telas, fotografias, desenhos e outras imagens de artistas que trabalham com *pixel art* para servir de inspiração para você.
- Escolha um editor de imagem gratuito para criar uma imagem digital e use a imaginação para produzir obras de arte digitais.
- Combine com o professor e os colegas uma data para compartilhar as imagens criadas e, especialmente, relate sua experiência durante o desenvolvimento desse projeto destacando as diferenças entre as duas produções: a realizada no papel e a digital.

Você se preparou para as aulas relacionadas a estas atividades?

Não escreva no livro.

Oriente os estudantes durante a realização desta atividade. Devido à sua complexidade, é uma tarefa a ser desenvolvida além da sala de aula, mas reserve momentos no dia a dia escolar para tirar as dúvidas dos estudantes e orientá-los na execução da tarefa. Se necessário, compartilhe exemplos de artistas que trabalham com *pixel art* em formato digital, como 8-Bit Football, disponível em https://8bit-football.com/ (acesso em: 17 out. 2024).

Oriente os estudantes a encontrar um tema para sua arte. Permita que eles o escolham livremente, mas evite a manifestação de temas polêmicos ou que possam ofender outras pessoas. Assim, a atividade mobiliza a criatividade dos estudantes e trabalha intencionalmente o desenvolvimento das competências gerais **5**, **6** e **9**, valorizando a diversidade de saberes e vivências culturais e utilizando tecnologias digitais para se comunicar.

Além disso, ajude-os a encontrar um editor de imagem gratuito para a elaboração da *pixel art*. Há alguns *softwares* disponíveis para esse tipo de edição. Um deles é o PixilArt, disponível em https://www.pixilart.com/ (acesso em: 29 out. 2024). Esse *site* está em inglês, portanto, pode ser necessária a sua mediação ou de outro adulto responsável para o uso dessa ferramenta.

Como as imagens elaboradoras pelos estudantes serão em formato digital, em vez de organizar uma exposição impressa, oriente-os a compartilhar as imagens nos meios digitais, como aplicativos de mensagens instantâneas ou *e-mails*. É possível combinar um dia, em sala de aula, para conversar sobre o processo de criação das imagens e a apreciação dos desenhos elaborados

As respostas dos estudantes ao último item apresentam evidências da competência socioemocional autogestão.

POR DENTRO DO ENEM E DOS VESTIBULARES

Para resolver algumas questões de processos seletivos, além de fazer uma leitura cuidadosa, interpretar os textos e aplicar conceitos específicos de cada área do conhecimento, é preciso saber relacionar os diversos aprendizados e utilizar conhecimentos do cotidiano.

Nesse tipo de prova ou exame, são exigidas muitas habilidades. Uma parte da estratégia de resolução é não se deixar impressionar com o texto ou com a quantidade de informações presentes no enunciado.

A seguir, selecionamos problemas que permitem que você pratique a leitura e maneiras de identificar a pergunta, selecionando os dados que interessam para a resolução, e construa uma estratégia de resolução.

VESTIBULAR EM CONTEXTO

(PUC-GO) Um nutricionista prepara uma dieta a partir de três alimentos. Sabe que o alimento I produz uma unidade de vitamina A, duas unidades de vitamina B e três unidades de vitamina C. O alimento II produz uma unidade de vitamina A, uma unidade de vitamina B e duas unidades de vitamina C. Já o alimento III produz duas unidades de vitamina A, nenhuma de vitamina B e duas unidades de vitamina C.

Esse nutricionista sabe também que a dieta que está preparando deve conter dezesseis unidades de vitamina A, doze unidades de vitamina B e vinte e oito unidades de vitamina C.

Consideradas essas informações, marque a única alternativa que indica a quantidade de soluções inteiras existentes para o problema apresentado:

a) 4. b) 1. c) 3. d) 2.

Resolução

Considere x, y e z a quantidade dos alimentos **I**, **II** e **III**, respectivamente. Para resolver o problema, devemos determinar a quantidade de cada um desses tipos de alimento que podem compor a dieta do nutricionista, de maneira que sejam obtidas as quantidades predeterminadas de vitaminas.

De acordo com as quantidades de vitaminas indicadas para a dieta, podemos escrever o sistema linear:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 16 \\ 2x + y = 12 \\ 3x + 2y + 2z = 8 \end{cases}$$

Escalonando esse sistema, obtemos:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 16 \quad \cdot(-2) \cdot(-3) \\ 2x + y = 12 \quad \leftarrow (+) \\ 3x + 2y + 2z = 8 \quad \leftarrow (+) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 16 \\ -y - 4z = -20 \quad \cdot(-1) \\ -y - 4z = -20 \quad \leftarrow (+) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 16 \\ -y - 4z = -20 \\ 0y + 0z = 0 \end{cases}$$

Note que, na terceira equação, o coeficiente de cada incógnita é igual a zero, e o termo independente também é igual a zero. Então, essa equação é válida para quaisquer valores de x, y e z, ou seja, o sistema é SPI e possui infinitas soluções.

Como x, y e z representam quantidades de alimento, eles devem assumir valores superiores ou iguais a zero. Sendo assim, vamos analisar algumas das soluções possíveis para esse sistema:

- para $z = 0$, obtemos $y = 20$ e $x = -4$.
- para $z = 1$, obtemos $y = 16$ e $x = -2$.
- para $z = 2$, obtemos $y = 12$ e $x = 0$.
- para $z = 3$, obtemos $y = 8$ e $x = 2$.
- para $z = 4$, obtemos $y = 4$ e $x = 4$.
- para $z = 5$, obtemos $y = 0$ e $x = 6$.
- para $z = 6$, obtemos $y = -4$ e $x = 8$.

Portanto, esse sistema possui quatro soluções inteiras existentes e a alternativa **a** é a correta.

Não escreva no livro.

Explorando a estratégia

1 **Escreva a alternativa correta no caderno.**

(UPF-RS) A criptografia é constituída por [um] conjunto de técnicas para proteger, de forma segura, uma informação de modo que apenas o emissor e o receptor consigam compreendê-la. É utilizada em comunicações digitais, como na troca de mensagens ou em pagamentos *online*. Uma das técnicas de se criptografar consiste em identificar cada letra do alfabeto com um determinado número e escrever a mensagem na forma de uma matriz. O remetente codifica essa matriz de mensagem usando uma matriz de codificação, enquanto o destinatário consegue ler a mensagem usando uma matriz de decodificação. Esse processo é validado em razão de que as matrizes de codificação e decodificação são inversas uma da outra.

Seja C a matriz de codificação e D a matriz de decodificação, tem-se que $D \cdot C = C \cdot D = I$, onde I é a matriz identidade. Suponha que o remetente codifica uma mensagem com a seguinte matriz de codificação $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$.

A matriz de decodificação D que o destinatário deverá usar para ler a mensagem será: Alternativa **e**.

a) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

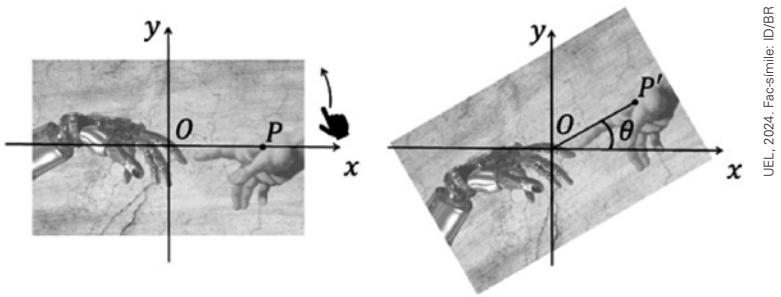
d) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

2 **Escreva a alternativa correta no caderno.**

(UEL-PR) Com a criação da tela sensível ao toque e sensores de movimento, foi possível utilizar gestos humanos como interface de comunicação com a máquina. Por conta disso, pode-se girar uma imagem em um celular.

Admita que um aplicativo receba o gesto para girar a ilustração de Emil Lendof, que faz uma releitura do fragmento **A Criação de Adão** de Michelangelo, por um ângulo $\theta = \frac{\pi}{6}$ radianos no sentido anti-horário. O aplicativo considera a imagem em um plano cartesiano de origem O de modo que cada ponto P é rotacionado até um ponto P' no mesmo sistema de coordenadas, conforme imagens a seguir. Alternativa **e**.



UEL, 2024. Fac-símile: ID/BR

Sabendo que $P = (a, b)$, $P' = (a', b')$ e $M = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, então $\begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} = M \times \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, assinale a alternativa que apresenta, corretamente, as coordenadas do ponto P'.

a) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{1}{2}b, \frac{1}{2}a - \frac{\sqrt{3}}{2}b\right)$

b) $\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b, \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right)$

c) $\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b, \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b\right)$

d) $\left(\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b, \frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{1}{2}b\right)$

e) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{1}{2}b, \frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b\right)$

RESPOSTAS DAS ATIVIDADES DE CÁLCULO

UNIDADE 1 – Probabilidade e Estatística

CAPÍTULO 1 – Estatística: medidas de dispersão

Problemas e exercícios propostos (p. 12)

1. b) 72,4%
   c) Sim.
2. a) De 1940 a 2022.
   b) 56%, em 1940; 7%, em 2022.
   c) 1950.
4. a) Sudeste; 10,5 milhões.

Problemas e exercícios propostos (p. 15)

7. a)

Número de erros de impressão cometidos na primeira página do jornal em 30 dias	
Erros	Frequência
[4, 8[	5
[8, 12[	6
[12, 16[	3
[16, 20[	5
[20, 24[	5
[24, 28[	2
[28, 32[	1
[32, 36[	2
[36, 40[	0
[40, 44[	1

Dados fictícios.

Problemas e exercícios propostos (p. 17)

8. a) De 3 a 7 salários.
   b) Até 3 salários.
   c) Até 3 salários.
9. a) 16,5 anos.
   b) 50%

Problemas e exercícios propostos (p. 21)

10. a) 5; 1
    b) 5; 2
11. 5; aproximadamente 2,16.
12. a) Atleta A: $\overline{X} = 470$; Me = 469. Atleta B: $\overline{X} = 470{,}25$; Me = 470,5. O coordenador deve escolher o atleta A.
13. a) Atleta A: 12 s; Atleta B: 6 s.
14. a) A nota média de todos os estudantes é igual a 10.
    b) Amplitude – Estudante A: 0; Estudante B: 4; Estudante C: 20; Estudante D: 20.
    Variância – Estudante A: 0; Estudante B: 4; Estudante C: 52; Estudante D: 100.
    Desvio-padrão – Estudante A: 0; Estudante B: 2; Estudante C: aproximadamente 7,21; Estudante D: 10.
15. a) $\overline{X} = 12$; DP $\simeq 5{,}74$
16. a) Equipe A: DP = 10,7. Equipe B: DP $\simeq 5{,}95$. A dispersão de massas é maior na equipe A.
18. Alternativa **c**.
19. a)

Medida de massa dos estudantes do 6º ano A	
Massa (kg)	f
32 ⊢ 36	1
36 ⊢ 40	4
40 ⊢ 44	10
44 ⊢ 48	7
48 ⊢ 52	2

Dados fornecidos pelo professor.

   b) $\overline{X} \simeq 43$; V $\simeq 15$
   c) DP $\simeq 4$

Tecnologia (p. 22)

1. a) $\overline{X} \simeq 42{,}08$; Mo = 38; Me = 42; V $\simeq 14{,}82$.
3. $\overline{X} \simeq 1{,}86$ m; Mo = 1,85 m; Me $\simeq 1{,}86$ m; V $\simeq 0{,}003$ m.

Problemas e exercícios propostos (p. 25)

23. a) 75 estudantes.
    b) 11
    c) $Q_1 = 9$ e $Q_3 = 12$.
    d) Aproximadamente 22,7%.

Problemas e exercícios propostos (p. 29)

27. Alternativa **b**.

Tecnologia (p. 30)

1. c) Sim.

Cálculo rápido (p. 31)

1. a) 49
   b) 9
   c) 1 000 000
   d) 0
   e) 1
   f) 1
   g) −64
   h) 81
   i) −128
   j) 64
2. a) 5
   b) 15
   c) 120
   d) 190
   e) 161 700

Para recordar (p. 31)

2. a) $\frac{5}{3}$; 10.
   b)

x	10	25	45	60
y	6	15	27	36

s	6	7	8	9
t	0,6	0,7	0,8	0,9

3. Decréscimo de 25%.
4. Redução de 27,5%.

Não escreva no livro.

Foco no raciocínio lógico (p. 31)

1. Ativam-se as ampulhetas ao mesmo tempo. Quando a de 7 minutos finalizar, restarão 4 minutos na ampulheta de 11 minutos. Neste momento, reinicia-se a de 7 minutos e, quando os remanescentes 4 minutos da de 11 minutos acabarem, a ampulheta de 7 minutos terá 3 minutos em cima e 4 minutos embaixo.
2. R$ 0,05

Matemática e vacinação (p. 32)

1. a) 129 crianças.
   b) Sala de vacinação 1: 50; Sala de vacinação 2: 60; Sala de vacinação 3: 19.

CAPÍTULO 2 – Probabilidade e Estatística

Problemas e exercícios propostos (p. 38)

1. b) Aproximadamente 5,6%.
   c) Menor probabilidade: 1, 9, 16, 25 e 36.
   Maior probabilidade: 6 e 12.

2. b)

Evento	Probabilidade
0	$\frac{1}{16} = 6{,}25\%$
1	$\frac{1}{8} = 12{,}5\%$
2	$\frac{3}{16} = 18{,}75\%$
3	$\frac{1}{4} = 25\%$
4	$\frac{3}{16} = 18{,}75\%$
5	$\frac{1}{8} = 12{,}5\%$
6	$\frac{1}{16} = 6{,}25\%$

3. b) 26,7% c) 1
   d)

Diferença	Probabilidade
1	$\frac{1}{3} \simeq 33{,}3\%$
2	$\frac{4}{15} \simeq 26{,}7\%$
3	$\frac{1}{5} = 20\%$
4	$\frac{2}{15} \simeq 13{,}3\%$
5	$\frac{1}{15} \simeq 6{,}7\%$

4. a) 16
   b)

Soma	Probabilidade
3	$\frac{1}{216} \simeq 0{,}5\%$
4	$\frac{1}{72} \simeq 1{,}4\%$
5	$\frac{1}{36} \simeq 2{,}8\%$
6	$\frac{5}{108} \simeq 4{,}6\%$
7	$\frac{5}{72} \simeq 6{,}9\%$
8	$\frac{7}{72} \simeq 9{,}7\%$
9	$\frac{25}{216} \simeq 11{,}6\%$
10	$\frac{1}{8} = 12{,}5\%$
11	$\frac{1}{8} = 12{,}5\%$
12	$\frac{25}{216} \simeq 11{,}6\%$
13	$\frac{7}{72} \simeq 9{,}7\%$
14	$\frac{5}{72} \simeq 6{,}9\%$
15	$\frac{5}{108} \simeq 4{,}6\%$
16	$\frac{1}{36} \simeq 2{,}8\%$
17	$\frac{1}{72} \simeq 1{,}4\%$
18	$\frac{1}{216} \simeq 0{,}5\%$

   c) O jogador A, porque a probabilidade de ocorrerem somas favoráveis a ele é 57,9%.

Problemas e exercícios propostos (p. 45)

6. a)

Idade	Número de pessoas	fr
0 ⊢ 9	1 569 000	15%
10 ⊢ 19	1 778 200	17%
20 ⊢ 29	1 663 140	15,9%
30 ⊢ 39	1 349 340	12,9%
40 ⊢ 49	1 171 520	11,2%
50 ⊢ 59	1 161 060	11,1%
60 ⊢ 69	920 480	8,8%
Maior que 70	847 260	8,1%
Total	**10 460 000**	**100%**

   b) 10 320; 38 320
7. a) 10%; 13%
   b) 10 h 48 min
8. a) 80
   b) 10%
9. Alternativa **e**.

Problemas e exercícios propostos (p. 51)

10. a) Aproximadamente 16 anos.
    b) Aproximadamente 1,1.
11. Alternativa **b**.
12. a) Aproximadamente 4 lâmpadas.
    b) Aproximadamente 1,81 lâmpada.
    c) Aproximadamente 68%.
13. 14%
14. a) 3; aproximadamente 2.
    b) 60%
    c) 13,3%; 33,3%
15.]68, 92[;]56, 104[

Não escreva no livro.

16. a)

Valores obtidos dos gráficos de teste das lâmpadas					
Empresa	**Número de testes**	**Intervalo dos dados**	**Média**	**Mediana**	**Desvio-padrão**
A	30	[27, 99]	69,33	73,5	22,13
B	30	[54, 91]	69,33	68,5	8,74
C	30	[37, 93]	69,33	66,5	14,08

Dados fornecidos pela administração das empresas.

17. a) Maior que 14% e menor que 68%.
b) Menor que 14%.
c) Menor que 14%.
d) Empresas A e C.

19. Na primeira, pois há menor concentração dos dados em torno da média.

20. a) 45
b) 15

Tecnologia (p. 53)

1. a) 6,22; 1,54

2. b) 6,5; 6,25; 2,374

4. a) 1,714; 0,087
b)]1,627; 1,801[

Cálculo rápido (p. 55)

1. a) R$ 1128,00
b) R$ 832,00
c) R$ 577,50

2. a) 25%
b) 70%
c) 5%

Para recordar (p. 55)

1. a) 15 km
b) Às 14 horas.
c) Às 15 horas.
d) Às 14 horas.

2. 18 clubes.

3. 8 maneiras diferentes.

Foco no raciocínio lógico (p. 55)

1. 3 jogadas.

2. 49 meninas.

Por dentro do Enem e dos vestibulares (p. 58)

1. Alternativa **e**.

2. Alternativa **c**.

UNIDADE 2 – Geometria espacial

CAPÍTULO 3 – Sólidos geométricos: poliedros

Problemas e exercícios propostos (p. 65)

4. a) 5 faces.
b) 6 vértices.
c) 9 arestas.
d) $\overline{CF}$ e $\overline{BE}$.
e) $\overline{AD}$ e $\overline{CF}$.

5. Cubo: 12 arestas, 8 vértices e 6 faces. Sólido: 16 arestas, 9 vértices e 9 faces.

6. Itens **c** e **d**.

8. c) 18 pares.

Problemas e exercícios propostos (p. 69)

10. Os poliedros representados nos itens **a** e **f** não são prismas.

	Polígono da base	Faces	Vértices	Arestas
b)	Triângulo	5	6	9
c)	Quadrilátero	6	8	12
d)	Hexágono	8	12	18
e)	Quadrilátero	6	8	12

14. a) $n + 2$ faces, n faces laterais e as 2 bases.
b) $2n$ vértices, n vértices em cada base.
c) $3n$ arestas, n arestas laterais e n arestas em cada base.

15. a)

Base do prisma	Lados do polígono da base	Faces	Vértices	Arestas
Triangular	3	5	6	9
Quadrangular	4	6	8	12
Pentagonal	5	7	10	15
Hexagonal	6	8	12	18
Heptagonal	7	9	14	21

b) O número de faces é igual ao número de lados do polígono da base mais 2.
c) O número de vértices é igual a duas vezes o número de lados do polígono da base.
d) O número de arestas é igual a três vezes o número de lados do polígono da base.

16. b) A menor quantidade de arestas e de vértices que um prisma pode ter são, respectivamente, 9 e 6.

17. c) 7 faces, 10 vértices e 15 arestas.

Problemas e exercícios propostos (p. 72)

21. e) 6 faces, 6 vértices e 10 arestas.

22. a)

Base da pirâmide	Lados do polígono da base	Vértices	Faces	Arestas
Triangular	3	4	4	5
Quadrangular	4	5	5	8
Pentagonal	5	6	6	10
Hexagonal	6	7	7	12
Heptagonal	7	8	8	14

b) O número de faces é igual ao número de lados do polígono da base mais 1.
c) O número de arestas é igual ao dobro do número de lados do polígono da base.

23. Alternativa **a**.

25. a) $(n + 1)$ faces, n faces laterais e a base.
b) $(n + 1)$ vértices, n vértices na base mais o vértice formado pelas arestas laterais.
c) $2n$ arestas, n arestas na base mais n arestas laterais.

26. b) 5 faces, 5 vértices e 8 arestas.

Não escreva no livro.

Problemas e exercícios propostos (p. 74)

35. **b)** 7 faces, 10 vértices e 15 arestas.

38. Alternativa **c**.

41. $2\sqrt{3}$ cm

Tecnologia (p. 75)

1. **a)** 5 vértices, 5 faces e 8 arestas.

Problemas e exercícios propostos (p. 79)

42. 6 faces.

43. 4 vértices.

44. **a)** 9 vértices e 14 arestas.
b) 9 vértices e 16 arestas.

45. Alternativa **e**.

46. 6 vértices.

47. **a)** 20 vértices.
b) 30 arestas.

48. Alternativa **b**.

Cálculo rápido (p. 81)

1. **a)** 205
b) 310
c) 18
d) 15,5
e) 37
f) 157,5

2. **a)** 42
b) 32
c) 54
d) 10,8
e) 22
f) 20,8
g) 31,5
h) 15,6
i) 65,6

4. **a)** 4,5 cm^2
b) 6 cm^2
c) 2,25 cm^2
d) 6 000 cm^2 ou 0,6 m^2.

Para recordar (p. 82)

1. **a)** R$ 40 000,00.
b) 800 funcionários.

2. **a)** Não. O valor R$ 284,20 é inferior a R$ 400,00, o que inviabiliza o pagamento da segunda parcela.
b) $x = 0{,}74$

3. Alternativa **a**.

5. 16 maneiras diferentes.

Foco no raciocínio lógico (p. 83)

1. Alternativa **c**.

2. Alternativa **c**.

3. **a)** 24

Matemática e edificações (p. 84)

1. 2 402,4 m^2

CAPÍTULO 4 – Sólidos geométricos: corpos redondos

Problemas e exercícios propostos (p. 92)

7. Alternativa **e**.

Problemas e exercícios propostos (p. 95)

13. 6,8 cm

Cálculo rápido (p. 98)

1. **a)** $12\sqrt{2}$ cm
b) $5\sqrt{3}$ cm
c) $8\sqrt{2}$ cm
d) $10\sqrt{2}$ cm
e) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm
f) 36 m; 81 m^2
g) 18 cm; $9\sqrt{3}$ cm^2

Para recordar (p. 98)

1. A afirmação está errada, pois houve erro na colocação da vírgula.

2. 56,25 km^2

3. $8\sqrt{3}$ km^2

4. **a)** Não é possível construir um triângulo.
b) Entre 4 cm e 10 cm.
c) Não, ele poderá andar no máximo 24 km.

Foco no raciocínio lógico (p. 99)

1. Alternativa **d**.

2. Fernando.

3. Envelope **C**.

CAPÍTULO 5 – Geometria métrica espacial

Problemas e exercícios propostos (p. 110)

2.

Cubo / Medida	A	B	C	D	E
Aresta	5	9	6	12	7
Área da base	25	81	36	144	49
Área lateral	100	324	144	576	196
Área total	150	486	216	864	294
Volume	125	729	216	1 728	343

3. 11

4. **b)** $CH = 5\sqrt{2}$ cm e $BH = 5\sqrt{3}$ cm

5. **a)** $x = 13$
b) $x = 9$
c) $x = 5$
d) $x = 11$

6. **a)** $8\sqrt{3}$ cm^2
b) $2\sqrt{3}$ cm^2

7. 20 dm^3; 44 cubos.

8. **a)** 3 paralelepípedos.
b) As áreas totais dos paralelepípedos medem 34, 28 e 24 unidades de área.
c) Todos têm o mesmo volume.

9. **a)** A área lateral do prisma *A* é maior que a área lateral do prisma *B*.

b) O volume do prisma *A* é menor que o volume do prisma *B*.

10. Alternativa **e**.

11. $60\ m^3$

12. **a)** $480\ m^3$

b) $10\sqrt{2}\ m$

c) $10\ m$, $2\sqrt{34}\ m$ e $2\sqrt{41}\ m$.

13. $816\ cm^3$

14. $12(6+\sqrt{3})\ cm^2$; $36\sqrt{3}\ cm^3$

15. $120 + 12{,}5\sqrt{3}$

16. **c)** $A_t = 32\ cm^2$; $V = 12\ cm^3$

17. $A_{t_1} = 24a^2$; $A_{t_2} = 54a^2$; $V_1 = 8a^3$; $V_2 = 27a^3$

a) A área total é multiplicada por 4 e o volume por 8.

b) A área total é multiplicada por 9 e o volume por 27.

18. 60°

19. **b)** $875\ m^2$; $925\ m^2$, respectivamente.

c) $7875\ m^3$

20. 10 m e 5 m.

21. **a)** Projeto A.

b) $229\,500\ cm^3$

22. $\frac{3a^2\sqrt{11}}{4}$

23. $684\ m^2$; $1080\ m^3$

24. **a)** Área da seção 1: $32\sqrt{3}\ cm^2$. Área da seção 2: $64\ cm^2$. Área da seção 3: $48\sqrt{3}\ cm^2$.

25. $CX = \frac{a}{7}$

26. **a)** $d = a\sqrt{3}$; $A = a^2\sqrt{2}$

27. **a)** $\frac{a^3}{2}$

b) $\frac{a^3}{2}$

28. Alternativa **e**.

29. **a)** $1980\ cm^3$

b) $1650\ cm^3$

30. Alternativa **e**.

Problemas e exercícios propostos (p. 121)

32. **a)** $A_\ell = \frac{75\sqrt{3}}{4}$; $A_t = 25\sqrt{3}$

b) $A_\ell = \frac{105}{2}$; $A_t = \frac{5(42+5\sqrt{3})}{4}$

c) $A_\ell = 70$; $A_t = 95$

33. **b)** $36\ cm^3$

34. $\sqrt[3]{100}\ cm$

35. $200\ cm^3$

36. $6\ cm^3$

37. 80

38. $96\ m^3$

39. **a)** $48\sqrt{3}\ m^3$

b) $72\sqrt{3}\ m^2$

40. $2\sqrt{6}\ m$; $18\sqrt{2}\ m^3$

41. $\frac{2\sqrt{6}}{3}\ m$; $\sqrt{3}\ m^2$

42. $9\sqrt{3}\ m^2$; $\frac{9\sqrt{2}}{4}\ m^3$

43. **a)** $V = \frac{a^3 \cdot \sqrt{15}}{6}$

b) $A_t = 5a^2$

c) $\frac{V}{V_o} = \frac{\sqrt{15}}{12}$

d) $\frac{A_t}{A_o} = \frac{1}{2}$

44. 60°

45. 7,7 m

46. $36\ cm^3$

47. $2{,}6 \cdot 10^6\ m^3$

48. 800 000 000 tijolos.

Problemas e exercícios propostos (p. 127)

50. 3 m

51. $1248\ m^3$

52. $A_\ell = 528\ cm^2$; $A_t = 820\ cm^2$

53. **a)** $a_\ell \simeq 5{,}67$ cm e $a_b \simeq 4{,}62$ cm

b) Aproximadamente $9{,}24\ cm^2$.

c) Aproximadamente $15{,}40\ cm^3$.

d) Aproximadamente $400{,}30\ cm^3$.

54. **a)** 2,5 cm

b) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ cm

c) $189\ cm^3$

55. **a)** $1{,}92\ cm^2$

b) $56{,}16\ cm^3$

56. **a)** 3 cm

b) $\sqrt{6}$ cm

c) $9\sqrt{3}\ cm^2$

d) $\frac{9\sqrt{2}}{4}\ cm^3$

e) $\frac{63\sqrt{2}}{4}\ cm^3$

f) $\frac{63\sqrt{3}}{2}\ cm^2$

57. $\frac{V_p}{V_{pir.}} = 3\sqrt{3}$

Problemas e exercícios propostos (p. 129)

59. **a)** 10π cm e $25\pi\ cm^2$.

b) 16π cm e $64\pi\ cm^2$.

60. 12π cm

61. $100\pi\ cm^2$

62. $33\pi\ m^2$

63. $64\pi\ m^2$

Não escreva no livro.

64. a) 2π cm²

b) 6 cm²

c) $\frac{81\pi}{8}$ m²

d) 20 m²

65. a) $3(4\pi - 3\sqrt{3})$ m²

b) $9(\pi - 2)$ m²

c) $12(2\pi - 3\sqrt{3})$ cm²

Problemas e exercícios propostos (p. 132)

66. a)

Altura do cilindro	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Volume	1,5	3	4,5	6	7,5	9	10,5	12	13,5

c) A afirmação está correta, pois $V = 1{,}5 \cdot h$.

67. a) $A_{\ell_1} = 0{,}2\pi$ cm²; $A_{\ell_2} = 0{,}4\pi$ cm²; $A_{\ell_2} = 2A_{\ell_1}$

b) $A_{t_1} = 0{,}22\pi$ m²; $A_{t_2} = 0{,}48\pi$ m²

68. $\frac{2\sqrt{\pi}}{\pi}$ cm

69. a) $A_\ell = 2\pi \cdot r \cdot h$

b) $A_t = 2\pi r \cdot (h + r)$; $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$

70. $V_{prisma} = 800$ e $V_{cilindro} \simeq 1571$.

Na embalagem cilíndrica cabe mais suco.

71. 54π m²

72. 40π m²

73. a) 100π cm²

b) 400π cm²

c) 600π cm²

d) 2000π cm³

74. a) 150π m²

b) 100 m²

75. 24π cm³; 32π cm²

76. a) 48π m³

b) 36π m³

77. a) 20 bolachas.

b) R$ 7,60, R$ 11,40 e R$ 22,80.

78. a) $V = 6\pi a^2 b$

b) $V_C = 24a^2 b$

c) Aproximadamente 79%.

79. 2 m

80. 12,8 m²

81. a) 8 horas.

b) 90π m³; 2,5 m

82. Alternativa **d**.

83. Alternativa **b**.

84. a) Aproximadamente 27%.

85. Alternativa **a**.

86. 283 cm³; 245 cm²

87. 170 cm³; 170 cm²

88. a)

Altura	0,5	1	1,5	2	...	h
Volume	1,57	3,14	4,71	6,28	...	$3{,}14h$

b) Sim, $V = 3{,}14 \cdot h$.

c) Aproximadamente 3,5.

89. Aproximadamente 1474 cm³ ou 1042 cm³.

90. 2 cm/s

Problemas e exercícios propostos (p. 136)

92. a) Cone A: 5π cm e $6{,}25\pi$ cm². Cone B: 10π cm e 25π cm².

93. a) $A_{\ell_A} = 180\pi$ cm² e $A_{\ell_B} = 720\pi$ cm².

b) $A_{t_A} = 280\pi$ cm² e $A_{t_B} = 1120\pi$ cm².

94. a) 544π m²

b) 800π m²

c) 2560π m³

95. 100π cm³

96. 250π cm³ e $100\sqrt{3}\pi$ cm².

97. 108π dm³ e 120π dm².

98. a) 510π m²

b) 272π m²

99. 128π m³; 88π m²

100. π m

101. a) 75π cm³

b) 150π cm³

102. $h_{cone} = 3 \cdot h_{cilindro}$ ou $3 \cdot h_{cilindro} = h_{cone}$

103. a) $V = \frac{4\pi h}{3} \cdot r^2$

b) $V = \frac{4\pi r^2}{3} \cdot h$

104. $V = \frac{2\pi h}{3} \cdot r^2$; $V = \frac{2\pi r^2}{3} \cdot h$

105. a) 180π cm²

b) 324π cm²

c) 432π cm³

106. a) 128π m³; 144π m²

b) 96π m³; 96π m²

107. 1607,68 m³; 1299,52 m²

Problemas e exercícios propostos (p. 142)

108. a) $4\pi x^2$ e $16\pi x^2$

b) $V = \frac{4}{3}\pi x^3$ e $V = \frac{32}{3}\pi x^3$

c) Área quadruplica e o volume octuplica.

109. 25π cm²

110. 12 cm

111. a) 36π cm³

b) 36π cm²

c) 9π cm²

112. a) 972π cm³

b) 18π cm

113. a) $\frac{2}{3}r^3$

b) $2\pi r^2$

c) $3\pi r^2$

114. a) $\frac{250\pi}{3}$ cm³; 50π cm²; 75π cm²

b) $\frac{1024\pi}{3}$ cm³; 128π cm²; 192π cm²

115. a) $V_{cone} = \frac{2\pi a^3}{3}$

b) $V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi \cdot a^3$

c) $V_{esfera} > V_{cone}$ ou $V_{esfera} = 2V_{cone}$

116. a) $A_{esfera} = \pi a^2$

b) $A_{cubo} = 6a^2$

c) $\frac{A_{esfera}}{A_{cubo}} = \frac{\pi}{6}$

d) $V_{esfera} = \frac{\pi a^3}{6}$

e) $V_{cubo} = a^3$

f) $\frac{V_{esfera}}{V_{cubo}} = \frac{\pi}{6}$

117. a) O volume passa a ser $\frac{1}{8}$ do volume inicial.

b) A área da sua superfície passa a ser $\frac{1}{4}$ da área inicial.

118. $\frac{256\pi}{3}$ cm³; 64π cm²

119. $4\pi\sqrt{3}$ cm³; 12π cm²

120. $64\pi\sqrt{6}$ cm³; 96π cm²

121. $\frac{32\pi}{3}$ dm³; 16π dm²

122. Alternativa **e**.

123. a) 40 212 km

b) $5{,}15 \cdot 10^8$ km²

c) $1{,}10 \cdot 10^{12}$ km³

d) $3{,}43 \cdot 10^8$ km²

124. $R \simeq 1600$ km; $V \simeq 1{,}72 \cdot 10^{10}$ km³; $A \simeq 3{,}22 \cdot 10^7$ km²

Cálculo rápido (p. 143)

1. a) $x = -2$ ou $x = -8$

b) $x = 5$ ou $x = -3$

c) $x = 5$

d) $x = 1$ ou $x = 3$

e) $y = 9$ ou $y = -3$

f) $a = -6$

2. a) $x = \pm 4$

b) $x = \pm\frac{1}{3}$

c) $S = \varnothing$

d) $x = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}$

e) $S = \varnothing$

f) $S = \varnothing$

3. a) 3 000 cm²

b) 25 cm²

c) 11 m

d) 12 m

e) 10,5 cm²

4. a) 42 cm

b) 147 cm²

c) 192 m²

d) 54 mm

e) 54 m²

f) 84 cm²

g) 12,5 dm

h) 5 m

5. a) 0,5 L

b) 5 000 L

c) 1,1 L

d) 50 000 L

6.

a	5 cm	3 m	0,07 m	0,5 m
b	6 cm	150 cm	Aproximadamente 9,2 cm	78 cm
c	7,7 cm	Aproximadamente 152 cm	6 cm	1,2 m
h	10 cm	50 cm	9,6 cm	1,5 m
Área da base	Aproximadamente 15 cm²	2 600 cm²	21 cm²	Aproximadamente 1 300 cm²
Volume	150 cm³	130 000 cm³	201,6 cm³	195 000 cm³

Para recordar (p. 144)

1. 100°

2. a) $AC = 10$ km e $BC = 5\sqrt{3}$ km

b) O barco A.

3. (4, 4)

4. Alternativa **e**.

5. Alternativa **a**.

Foco no raciocínio lógico (p. 145)

1. 20 fechaduras.

2. Alternativa **a**.

3. Alternativa **a**.

CAPÍTULO 6 – Projeções cartográficas

Problemas e exercícios propostos (p. 162)

2. Alternativa **d**.

3. Alternativa **e**.

4. Alternativa **c**.

5. Alternativa **c**.

6. Alternativa **a**.

7. Alternativa **d**.

Cálculo rápido (p. 167)

1. a) 10^6 cm; $2{,}5 \cdot 10^6$ cm; $2{,}4 \cdot 10^5$ cm

b) 50 km; 2,3 km; 1400 km

2. a) 10 km

b) 15 km

c) 24 km

d) 2,4 km

3. a) 73°

b) 145°

c) 67°

d) 137°

e) 45°

f) 122°

Para recordar (p. 168)

1. a) $f(x) = -2x + 4$

b) $f(x) = x - 1$

2. 48 cm²

3. 9 dm; 3 dm

4. a) Comprimento 110 m e largura 60 m.

b) Comprimento 120 m e largura 60 m.

Foco no raciocínio lógico (p. 169)

1. Alternativa **b**.

2. Alternativa **e**.

3. Alternativa **e**.

Por dentro do Enem e dos vestibulares (p. 172)

1. Alternativa **c**.

2. Alternativa **c**.

3. Alternativa **d**.

UNIDADE 3 – Programação e pensamento computacional

CAPÍTULO 7 – Pensamento computacional

Problemas e exercícios propostos (p. 188)

1. Roxo, vermelho e laranja.

2. a) Vermelho, laranja e roxo.

b) Laranja, vermelho e roxo.

c) Laranja, preto e azul.

3. Alternativa **d**.

4. Alternativa **b**.

Não escreva no livro.

Cálculo rápido (p. 189)

1. a) 3
   b) -3
   c) 5
   d) -5
   e) 3
   f) 5
   g) -3
   h) 1
2. a) 30°
   b) 50°
   c) 20°
   d) 50°

Para recordar (p. 190)

1. Alternativa **d**.
2. a) A figura 5 será formada por 5 hexágonos regulares.
   b) 6; 10; 14; 18.
   c) 42
   e) 27
3. b) $Q_n = 3n - 2$
   c) $Q_n = 3(n-1) + 1$; $Q_n = n(2n-1) - 2(n-1)^2$
4. a) $P_n = n + 2$
   b) $S_n = 2n + 1$
5. a) $\frac{5}{3}; \left(\frac{5}{3}\right)^2; \left(\frac{5}{3}\right)^3$
   b) $C(n) = \left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}$

Foco no raciocínio lógico (p. 191)

1. Ana é neta de Daniel, ou Daniel é avô de Ana.
2. Pedro.
3. Alternativa **b**.

Matemática e tecnologia (p. 192)

2. a) 27,7%
3. R$ 18,76

CAPÍTULO 8 – Algoritmos e fluxogramas

Problemas e exercícios propostos (p. 200)

2. Alternativa **a**.
3. Alternativa **d**.
4. Alternativa **d**.

Problemas e exercícios propostos (p. 203)

5. a) 8192 s ou 2 h 16 min 32 s.
   b) 1024 s ou 17 min 4 s.
6. 22,5 GB
7. 1 s

Problemas e exercícios propostos (p. 207)

8. Alternativa **a**.
11. a) 1
    b) 3

Tecnologia (p. 216)

1. a) 152
   b) Sim.
   c) $12 + 7 \cdot 20$
2. a) 495
   b) 1694

Problemas e exercícios propostos (p. 219)

14. Alternativa **c**.
17. Alternativa **c**.
18. Alternativa **d**.
19. Alternativa **d**.
20. Alternativa **b**.
22. a) $x \geqslant 0$
    b) $\sqrt[3]{2}; \sqrt[3]{6}; \frac{2}{81}$

Cálculo rápido (p. 223)

1. a) 1,5
   b) $-3,6$
   c) $-0,5$
   d) $-0,2$
   e) $-0,25$
   f) -1
2. a) 45°; 60°; 135°; 120°; 30°; 150°
   b) $\frac{\pi}{18}; \frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{9}; 3\pi$
3. a) $x = 120°$ e $y = 120°$.
   b) $x = 100°$ e $y = 80°$.
4. a) $x = 50°$ e $y = 130°$.
   b) $x = 110°$ e $y = 110°$.

Para recordar (p. 224)

1. a) $f(x) = -\frac{3}{5}x + 3$
   b) $\begin{cases} f(x) = 0, \text{ se } x = 5 \\ f(x) > 0, \text{ se } x < 5 \\ f(x) < 0, \text{ se } x > 5 \end{cases}$
   c) $D(f) = \text{Im}(f) = \mathbb{R}$
2. Aproximadamente 28,9 metros.
3. Alternativa **c**.
4. Alternativa **b**.
5. Alternativa **c**.

Foco no raciocínio lógico (p. 225)

1. Alternativa **c**.
2. Alternativa **b**.

Por dentro do Enem e dos vestibulares (p. 230)

1. Alternativa **c**.
2. Alternativa **d**.
3. Alternativa **d**.

UNIDADE 4 – Sistemas lineares e matrizes

CAPÍTULO 9 – Sistemas lineares

Tecnologia (p. 239)

1. $S = \{(-1, 5)\}$
2. a) $S = \{(6, 3)\}$
   b) $S = \varnothing$
   c) $S = \varnothing$
   d) $S = \{(-7, 4)\}$

Não escreva no livro.

3. $S = \{(3, 4)\}$

Problemas e exercícios propostos (p. 243)

1. Alternativa **c**.
2. Alternativa **a**.
3. Alternativa **d**.
4. Alternativa **d**.
5. Alternativa **e**.
8. Alternativa **d**.
9. Alternativa **b**.

Problemas e exercícios propostos (p. 249)

10. a) $S = \{(1, 2, 3)\}$, SPD
    b) $S = \{(2, -3, 5)\}$, SPD
    c) $S = \{(1, 1, 1)\}$, SPD
    d) $S = \varnothing$, SI
    e) $S = \{(-5\alpha - 8, 2\alpha + 5, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$, SPI
    f) $S = \left\{\left(\frac{1}{16}, \frac{21}{16}, \frac{9}{16}\right)\right\}$, SPD
11. O rapaz, a moça e o cachorro têm massa, respectivamente, de 48 kg, 42 kg e 27 kg.
12. Como $\frac{52}{7}x < \frac{53}{7}x$, a balança penderá para a direita.
13. a) $S = \{(\alpha, 6 - \alpha, 6) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$
    b) $S = \{(2, 3)\}$
    c) $S = \{(-7 + 5\alpha, 8 - 3\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$
15. Alternativa **a**.
16. Alternativa **d**.
17. Alternativa **d**.
18. O erro está na obtenção da equação (4).
19. a) Em janeiro, os faturamentos foram: R$ 200,00 com a venda de bolas, R$ 100,00 com a venda de bonecas e R$ 900,00 com a venda de carrinhos.
    b) 1525 carrinhos.

Tecnologia (p. 256)

1. a) $S = \{(2, -1, 1)\}$
   b) SPD
2. $S = \{(2, 1, 3)\}$; SPD

Problemas e exercícios propostos (p. 258)

20. a) SPD
    b) SPI
    c) SI
21. Alternativa **e**.
22. 14
23. a) 150 (Modelo A: 600; Modelo B: 1200 e Modelo C: 1800).
    b) 185 (Modelo A: 370; Modelo B: 185 e Modelo C: 555).
    c) 1500 (Modelo A: 1500; Modelo B: 1500 e Modelo C: 6000).
24. Alternativa **b**.
25. Alternativa **c**.

Cálculo rápido (p. 259)

1. a) 2π rad
   b) 3π rad
   c) $\frac{2}{3}\pi$ rad
2. a) 120°
   b) 180°
   c) 900°
3. a) $x = 9$
   b) $x = 10$
   c) $x = 3$
   d) $x = 2$
   e) $x = 8$

Para recordar (p. 260)

1. a) Aproximadamente 2,6°.
   b) $y = \frac{2}{3}\pi$ rad
2.

Poliedro regular	Forma das faces	Número de faces	Número de vértices	Número de arestas
Hexaedro (cubo)	quadrado	6	8	12
Tetraedro	triângulo	4	4	6
Octaedro	triângulo	8	6	12
Dodecaedro	pentágono	12	20	30
Icosaedro	triângulo	20	12	30

   a) dodecaedro
   b) octaedro
   c) hexaedro
   d) tetraedro
   e) icosaedro
3. $2\sqrt{17}$ m
4. $8\,960\pi$ km

Foco no raciocínio lógico (p. 261)

1. Alternativa **e**.

CAPÍTULO 10 – Matrizes

Problemas e exercícios propostos (p. 267)

1. a) $A = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$
   b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$
2. Alternativa **c**.

Problemas e exercícios propostos (p. 269)

3. $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 9 & 14 \end{bmatrix}$
4. $X = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$
5. Alternativa **b**.

Não escreva no livro.

Problemas e exercícios propostos (p. 273)

6. a) $\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$

   b) $\begin{bmatrix} 6 & 12 & 3 \\ -4 & -8 & -2 \\ 8 & 16 & 4 \end{bmatrix}$

   c) $\begin{bmatrix} 1 & 15 & 11 \\ -5 & 27 & 30 \end{bmatrix}$

7. a) O número de eixos necessários para o mês de julho é 237 e para o mês de agosto é 215. O número de rodas necessárias para o mês de julho é 618 e para o mês de agosto é 550.
   b) 2750 rodas.
   c) Acrescentar uma coluna na tabela peça/modelo e uma linha na tabela modelo/mês.

Problemas e exercícios propostos (p. 275)

8. Alternativa **a**.

Tecnologia (p. 278)

1. Alternativa **b**.
3. a) Sim, é possível resolver o sistema, obtendo $x = 2$, $y = 3$ e $z = 4$.
   b) Não é possível resolver o sistema.
   c) Não é possível resolver o sistema.
   d) Sim, é possível resolver o sistema, obtendo: $x = -20{,}2$; $y = 9{,}2$; $z = -3$ e $w = -9{,}4$.
   e) Sim, é possível resolver o sistema, obtendo: $x = 2{,}306849$; $y = 0{,}744624$; $z = -0{,}92778$; $w = -3{,}42463$ e $t = 4{,}087061$.

Problemas e exercícios propostos (p. 280)

9. Alternativa **d**.
10. Alternativa **a**.
11. Alternativa **a**.
12. Alternativa **e**.
13. Alternativa **e**.

Cálculo rápido (p. 281)

1. a) $S = \{(-2, 4)\}$. Possui uma única solução (SPD).
   b) $S = \varnothing$. Não existe nenhuma solução (SI).
   c) $S = \{(-9, 3)\}$. Possui uma única solução (SPD).
   d) $S = \{(-1, 2)\}$. Possui uma única solução (SPD).
   e) $S = \left\{\left(\frac{\alpha - 7}{3}, \alpha \,\middle|\, \alpha \in \mathbb{R}\right)\right\}$. Possui infinitas soluções (SPI).
   f) $S = \varnothing$. Não existe nenhuma solução (SI).
2. a) $x = 3$
   b) $x = 3$
   c) $x = -27$
   d) $x = \frac{1}{8}$
   e) $x = -\frac{1}{5}$
   f) $x = \pm\frac{1}{4}$
3. a) $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$
   b) $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$
   c) $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$
   d) $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$
   e) $S = \left\{\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$
   f) $S = \{\pi\}$
4. a) $x = 2{,}5$
   b) $x = 7{,}5$

Para recordar (p. 282)

1. a) Não.
   b) Sim.
   c) Sim.
2. a) Sim, uma P.G. com razão 2.
   b) 32 pessoas.
   c) 510 kg
   d) 6ª etapa.
3. $\frac{1}{20}$
4. 0,45 m

Foco no raciocínio lógico (p. 283)

1. Alternativa **e**.
2. Alternativa **d**.
3. Alternativa **e**.

Por dentro do Enem e dos vestibulares (p. 286)

1. Alternativa **e**.
2. Alternativa **e**.

TRANSCRIÇÃO DOS ÁUDIOS

UNIDADE 1

Podcast – Família Bernoulli e suas contribuições para a Matemática

Página 40

Narradora: Olá! Bem-vindos ao nosso *podcast*! Hoje vamos conhecer a fascinante história da família Bernoulli e suas incríveis contribuições para a Matemática. Preparem-se para uma jornada cheia de descobertas e curiosidades.

É sabido que ninguém nasce com uma inclinação específica para "Exatas" ou "Humanas". Esses fatores são amplamente determinados pela educação e pelo ambiente em que crescemos. No entanto, nessa família em particular, há algo realmente curioso e notável: a quantidade impressionante de matemáticos célebres que ela produziu. Entre seus membros, cerca de doze foram matemáticos notáveis.

Isso mesmo: Uma dúzia!

Já ouviu falar sobre algum Bernoulli? Se não, você está prestes a descobrir uma das histórias mais fascinantes da história da Matemática.

Essa história começa na segunda metade do século XVII com Nicolaus Bernoulli, o primeiro matemático dessa família extraordinária. Ele foi obrigado a deixar seu país de origem, a Bélgica, e se mudar para a cidade de Basileia, na Suíça.

Essa mudança foi um ponto de virada não apenas para ele mas para toda a sua descendência.

Em Basileia, Nicolaus se casou com a filha de um banqueiro local e essa união foi extremamente frutífera para a comunidade científica matemática. Dois de seus filhos, Jacques e Jean, seguiram os passos do pai e se tornaram matemáticos de renome.

Na nossa história, vamos chamar o Jacques de Jacques I, porque logo vamos contar sobre outro Jacques dessa família. Combinado?

Jacques I se formou aos 17 anos mestre em Filosofia e, posteriormente, mestre em Teologia. Mas ele percebeu que essa não era sua verdadeira inclinação acadêmica.

Para a nossa sorte, ele gostava mesmo era de Matemática!

Jacques fez várias descobertas, como a lei dos grandes números, usada na teoria de probabilidades, e deu contribuições importantes para a teoria de cálculo infinitesimal, com aplicações na Física, na Química e na própria Matemática.

Ele também descobriu uma importante constante matemática, conhecida como número "e", além dos números de Bernoulli, que têm aplicação tanto na Matemática quanto na programação.

Ufa! Esse Bernoulli era realmente brilhante!

Jean foi o décimo filho da família e, por desejo de seu pai, deveria seguir a carreira de médico ou de comerciante. Mais uma vez, no entanto, a comunidade matemática teve sorte, porque, logo depois de concluir o doutorado em Medicina, Jean se apaixonou pelo cálculo infinitesimal, assim como seu irmão.

Ele também fez muitas descobertas nesse tema, de modo que, após a morte de Jacques I, Jean assumiu o cargo do irmão na coordenação do curso de Matemática da Universidade de Basileia.

Nem tudo, porém, foi fácil, pois Jacques I e Jean vivenciaram momentos de rivalidade e de hostilidade em suas descobertas.

Parece que essa competição os incentivou a pesquisar cada vez mais, ajudando-os em suas brilhantes carreiras e nas pesquisas matemáticas.

Nicolaus I não foi um pesquisador matemático como os irmãos, mas contribuiu para a fama da família porque seu filho, Nicolaus II, também se tornou matemático e a sua contribuição para a pesquisa está registrada em mais de 500 cartas trocadas com outros matemáticos europeus.

Será que acabou? Não! Até agora, só falamos de um terço desses matemáticos notáveis.

Jean se casou com Marie Euler, neta do grande matemático Euler, e eles tiveram três filhos: Nicolaus III, Daniel I e Jean II. Todos também se tornaram grandes matemáticos, mas Daniel I foi o mais talentoso. Ele trabalhou com hidrodinâmica e probabilidade, além de outros tópicos de Matemática e Física.

Jean II teve três filhos: Jean III, Daniel II e Jacques II, e todos seguiram a carreira na Matemática, continuando a tradição da família. Cada um deles contribuiu de forma significativa para diferentes áreas da Matemática. Jean III trabalhou em Álgebra e Geometria; Daniel II fez avanços na teoria dos números; e Jacques II se destacou na análise matemática.

Essa família tornou-se uma verdadeira dinastia de matemáticos.

Por fim, mais dois matemáticos surgiram na família: Christoph e Jean Gustave, filho e neto de Daniel II.

Doze! Doze membros de uma mesma família que experimentaram a Matemática intensamente! É realmente impressionante pensar em como uma única família pôde contribuir tanto para o avanço dessa área do conhecimento, cada um deles com suas próprias descobertas e inovações.

E, assim, chegamos ao fim deste episódio! Foi uma verdadeira viagem no tempo e na história da Matemática, não é mesmo?

Muito obrigada por nos acompanhar até aqui.

Até o próximo episódio!

Podcast criado para fins didáticos. Produção de Audioman.

Para compor as informações deste *podcast*, foram consultados os livros *Introdução à história da Matemática*, de Howard Eves; o livro *História da Matemática*, de Carl Boyer, e o texto do matemático Marcelo Viana, publicado na *Folha de S.Paulo*.

Fontes de pesquisa:

Boyer, Carl B. *História da Matemática*. Tradução: Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo: Blucher, 1996.

Eves, Howard. *Introdução à história da Matemática*. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. da Unicamp, 2004.

Viana, Marcelo. Os Bernoulli são a família real da Matemática. *Folha de S.Paulo*, São Paulo, 15 maio 2019. Disponível em: https://impa.br/noticias/os-bernoulli-sao-a-familia-real-da-matematica/. Acesso em: 21 jul. 2024.

UNIDADE 2

Podcast – Cavalieri

Página 106

Narrador: Oi, pessoal! Bem-vindos a mais um episódio do nosso *podcast*! Hoje, a gente tem uma história fascinante para compartilhar com vocês. Essa história é sobre um matemático italiano que deixou uma marca permanente na história da ciência: Bonaventura Cavalieri!

Cavalieri nasceu em 1598, na cidade de Milão. Ainda adolescente, ingressou em uma ordem religiosa para se tornar frei jesuíta.

Não escreva no livro.

Cavalieri começou sua jornada no mundo da Matemática enquanto estudava em um mosteiro. Foi lá que ele conheceu os trabalhos do matemático grego Euclides, que despertaram seu profundo interesse pela Matemática.

Imaginem estar em um mosteiro e descobrir um novo mundo por meio dos escritos de Euclides!

Mas as surpresas não param por aí. Enquanto ainda estava no mosteiro, Cavalieri teve a oportunidade de ser aluno de ninguém menos que... Galileu Galilei! Isso mesmo, o próprio Galileu! Dá para acreditar?! Ter aulas com um dos maiores cientistas de todos os tempos certamente foi uma experiência transformadora.

Após se tornar diácono, Cavalieri passou a dar aulas de Teologia, mas, algum tempo depois, surgiu a oportunidade de lecionar Matemática em Bolonha.

Apesar de Cavalieri não ter recebido o reconhecimento merecido em vida, seu trabalho foi crucial para o desenvolvimento de conceitos matemáticos que usamos até hoje, especialmente no campo da Geometria. Suas ideias e descobertas seguem influenciando a Matemática moderna e inspirando novas gerações de cientistas e matemáticos.

Então, preparem-se para uma viagem no tempo, enquanto exploramos a vida e as contribuições de Bonaventura Cavalieri. Tenho certeza de que vocês vão se surpreender e se inspirar com essa história incrível!

Você sabia que Cavalieri desenvolveu técnicas pioneiras de cálculo de integrais usando sua teoria dos "indivisíveis"? Pois é, essas técnicas foram revolucionárias! Embora alguns de seus contemporâneos tenham contestado essas ideias, por não apresentarem o rigor matemático esperado para a época, elas se tornaram fundamentais para a construção do que hoje conhecemos como "cálculo".

É fascinante pensar que, mesmo enfrentando críticas, as ideias de Cavalieri abriram caminho para avanços significativos na Matemática. Sua teoria dos "indivisíveis" foi uma peça-chave para o cálculo moderno, ferramenta essencial que usamos em várias áreas da ciência e da Engenharia.

Agora, vamos falar um pouco sobre uma dessas contribuições.

Problemas que envolvem o cálculo de áreas e de volumes são antigos e sempre apareceram na história da Matemática, por terem inúmeras aplicações na sociedade.

E é aí que entra uma das maiores contribuições de Cavalieri!

Antes dele, os problemas envolvendo cálculos de áreas de figuras planas ou o volume de sólidos geométricos eram resolvidos com métodos tradicionais, baseados em princípios geométricos de Euclides e Arquimedes. No entanto, esses métodos, além de trabalhosos, muitas vezes eram limitados ao lidar com figuras mais complexas.

Olha só como Cavalieri pensava fora da caixinha!

Ele propôs que figuras geométricas poderiam ser divididas em um número infinito de seções paralelas e infinitamente pequenas – os tais "indivisíveis" – e que a soma das áreas dessas seções daria a área total da figura. Muito legal, não é?!

E tem mais! Cavalieri aplicou o mesmo princípio para calcular o volume de sólidos geométricos. Desse modo, surgiu o famoso princípio de Cavalieri. Lembra dele?

Essa nova abordagem foi revolucionária porque permitiu que problemas complexos, como o cálculo do volume de sólidos irregulares ou a área de superfícies curvas, fossem resolvidos de maneira mais simples e precisa. Genial!

Mas ele não parou por aí!

Além de contribuições na Geometria, Cavalieri se destacou em áreas como a Óptica e a Astronomia. Ele publicou obras importantes, expandindo seu olhar muito além das fronteiras da Geometria e mostrando que a inovação não conhece limites.

Na Óptica, Cavalieri estudou a propagação da luz e a formação de imagens, explorando os princípios de refração e reflexão. Seus estudos ajudaram a fundamentar conceitos que seriam desenvolvidos por cientistas posteriores, contribuindo para o avanço do entendimento sobre como a luz interage com diferentes superfícies e meios.

Na Astronomia, Cavalieri aplicou seus conhecimentos matemáticos para compreender os movimentos celestes. Ele utilizou métodos geométricos para estudar as órbitas dos planetas e a disposição das estrelas, demonstrando como a Matemática e a observação podem ser combinadas para desvendar os mistérios do Universo. Seu trabalho nesse campo foi parte de um movimento maior da época que buscava explicar os fenômenos astronômicos com base em leis naturais, em vez de interpretações místicas ou sobrenaturais.

Embora Cavalieri não tenha sido amplamente reconhecido por muito tempo, sua obra continua sendo um marco importante no desenvolvimento da Matemática moderna.

Isso mesmo, pessoal! A história de Cavalieri nos mostra que ele foi um verdadeiro visionário, com ideias muito à frente de seu tempo. Suas contribuições continuam a ressoar nas aulas de Matemática e nas pesquisas científicas até hoje.

Então, da próxima vez que você estiver resolvendo um problema matemático, lembre-se de que está seguindo os passos de gigantes como Cavalieri.

E, assim, chegamos ao fim deste episódio! Muito obrigada por nos acompanhar até aqui. Espero que você tenha gostado e aprendido algo novo! Até o próximo episódio!

Podcast criado para fins didáticos, produção de Audioman.

Para compor as informações deste *podcast*, foi consultado o livro *Introdução à história da Matemática*, de Howard Eves.

Fonte de pesquisa:

Eves, Howard. *Introdução à história da Matemática*. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. da Unicamp, 2004.

UNIDADE 3

Podcast – Pensamento computacional: O superpoder que você não sabia que tinha!

Página 185

Narrador: Olá! Bem-vindos a mais um episódio do nosso *podcast*. No episódio de hoje, vamos mostrar como você pode melhorar sua capacidade de resolver problemas utilizando o pensamento computacional: um superpoder que você não sabia que tinha!

Vamos desvendar esse conceito espetacular, que parece estar ligado apenas à computação, mas que na verdade está ao alcance de todos nós, permitindo ampliar nossa compreensão sobre diversos processos em áreas bem distintas.

O pensamento computacional é uma habilidade que pode transformar a maneira como você aborda os desafios diários, tornando-os mais gerenciáveis e menos intimidantes.

Você também vai entender o que é, por que ele é tão importante e como ele pode ajudar você a resolver problemas de forma mais eficiente.

Você já se sentiu perdido diante de um desafio, sem saber por onde começar? Ou teve a sensação de estar dando voltas, sem chegar a lugar nenhum quando precisava resolver uma situação? Esses sentimentos são comuns, mas o pensamento computacional pode ser a chave para superá-los.

Ele oferece uma abordagem estruturada e lógica para enfrentar problemas, ajudando você a encontrar soluções de maneira mais estratégica e eficiente. Muitas pessoas o associam apenas à programação e ao trabalho com computadores, mas ele vai muito além disso!

Pensamento computacional é uma forma de abordar problemas e tarefas de maneira lógica e estruturada, semelhante ao modo como os computadores processam informações.

E mais! Pode ser aplicado em qualquer área da sua vida!

Vamos imaginar o pensamento computacional como um *kit* de ferramentas mentais que permitem decompor, reconhecer padrões, abstrair e criar algoritmos.

Você sabe em que, e como, cada uma dessas ferramentas pode ajudá-lo? Não se preocupe, vou falar um pouco sobre cada uma delas!

A primeira ferramenta é a decomposição, que consiste em dividir um problema, que parece complexo e muito difícil de resolver, em partes menores e mais gerenciáveis. Ao fazer isso, você pode focar em resolver cada parte individualmente.

Já o reconhecimento de padrões consiste em observar o mundo ao seu redor e identificar características semelhantes em diferentes problemas, o que pode ajudar a solucionar outros de modo mais eficaz. Ao reconhecer padrões, você pode aplicar soluções que funcionaram em situações anteriores a novos problemas, economizando tempo e esforço.

A abstração é a capacidade de focar nos detalhes importantes para determinada situação e ignorar os que não forem relevantes para resolvê-la. Isso permite que você se concentre no que realmente importa, sem se distrair com informações desnecessárias. A abstração é uma habilidade crucial para simplificar problemas complexos.

Por fim, a ferramenta criação de algoritmos permite desenvolver uma sequência passo a passo de como determinada tarefa pode ser feita. Criar algoritmos é como escrever um manual de instruções para resolver um problema.

Em um mundo cada vez mais digital, compreender e aplicar essas ferramentas pode nos ajudar na resolução de problemas do dia a dia!

Quer ver um exemplo disso?

Para organizar um trabalho, você pode usar a decomposição para dividir as tarefas entre os membros da equipe; utilizar o reconhecimento de padrões para prever problemas que já ocorreram e se antecipar a eles; aplicar a abstração para se concentrar no que realmente importa, deixando de lado o que não é relevante; e criar algoritmos para planejar a sequência de atividades necessárias para concluir o trabalho.

Não é incrível?!

E não para por aí! O pensamento computacional pode ajudá-lo a ser mais criativo na hora de escrever uma redação, mais estratégico ao planejar um trabalho em grupo e até mais eficiente na organização das suas atividades diárias.

Você não precisa ser um programador para pensar como um! Pensar como um programador é, na verdade, sobre como desenvolver uma mentalidade lógica e sistemática para resolver problemas. Isso envolve quebrar um problema em partes menores e mais gerenciáveis, identificando padrões, criando soluções passo a passo e refinando essas soluções para maior eficiência.

Além de ser aplicado em qualquer área de estudo, o pensamento computacional pode ser útil em diversas profissões e está cada vez mais valorizado no mercado de trabalho. Os profissionais que dominam esse modo de pensar lidam muito melhor com problemas complexos e desenvolvem soluções inovadoras com mais agilidade. Eles são capazes de enfrentar desafios de maneira mais eficiente, o que os torna valiosos em qualquer campo.

E aí, gostou do episódio de hoje? Espero que você incorpore o pensamento computacional na sua vida acadêmica, profissional e pessoal.

E, assim, chegamos ao fim desse episódio! Muito obrigada por nos acompanhar até aqui.

Espero que você tenha gostado e aprendido algo novo! Até o próximo episódio!

Podcast criado para fins didáticos, produção de Audioman.

Para compor as informações deste *podcast* foi consultada a tese “Pensamento computacional na Educação Básica: desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas”, de Christian Puhlmann Brackmann.

Fonte de pesquisa:

Brackmann, Christian Puhlmann. *Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na Educação Básica*. 2017. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017. Disponível em: https://lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/172208/001054290.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 15 out. 2024.

Não escreva no livro.

LISTA DE SIGLAS

Cefet-MG: Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Cefet-RJ: Centro Federal de Educação Tecnológica do Rio de Janeiro

Cotil-SP: Colégio Técnico de Limeira

CP2-RJ: Colégio Pedro II

Enem: Exame Nacional do Ensino Médio

EsPCEx-SP: Escola Preparatória de Cadetes do Exército

ESPM-SP: Escola Superior de Propaganda e Marketing de São Paulo

Facisb-SP: Faculdade de Ciências da Saúde de Barretos Dr. Paulo Prata

Famema-SP: Faculdade de Medicina de Marília

Famerp-SP: Faculdade de Medicina de São José do Rio Preto

Fatec-SP: Faculdade de Tecnologia de São Paulo

Fempar-PR: Fundação Escola do Ministério Público do Paraná

FGV-SP: Fundação Getúlio Vargas

Ficsae-SP: Faculdade Israelita de Ciências da Saúde Albert Einstein

FMJ-SP: Faculdade de Medicina de Jundiaí

FPP-PR: Faculdades Pequeno Príncipe

Fuvest-SP: Fundação Universitária para o Vestibular

Ifal: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Alagoas

IFPE: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Pernambuco

IFSul-RS: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Sul-rio-grandense

Insper-SP: Instituto de Ensino e Pesquisa

Mackenzie-SP: Universidade Presbiteriana Mackenzie

Obmep: Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

PUC-GO: Pontifícia Universidade Católica de Goiás

PUC-MG: Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

Udesc: Universidade do Estado de Santa Catarina

UEA-AM: Universidade do Estado do Amazonas

Uece: Universidade Estadual do Ceará

UEL-PR: Universidade Estadual de Londrina

UEPB: Universidade Estadual da Paraíba

UEPG-PR: Universidade Estadual de Ponta Grossa

Uerj: Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Uesb-BA: Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

Ufam: Universidade Federal do Amazonas

UFGD-MS: Universidade Federal da Grande Dourados

UFJF-MG: Universidade Federal de Juiz de Fora

UFMG: Universidade Federal de Minas Gerais

UFMT: Universidade Federal de Mato Grosso

UFPE: Universidade Federal de Pernambuco

UFPR: Universidade Federal do Paraná

UFRJ: Universidade Federal do Rio de Janeiro

UFSM-RS: Universidade Federal de Santa Maria

Unesp: Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho

Unicamp-SP: Universidade Estadual de Campinas

Unifesp: Universidade Federal de São Paulo

Unip-SP: Universidade Paulista

UPF-RS: Universidade de Passo Fundo

BIBLIOGRAFIA COMENTADA

Berlinghoff, William P.; Gouvêa, Fernando Q. *A matemática através dos tempos*: um guia fácil e prático para professores e entusiastas. Tradução: Elza F. Gomide; Helena Castro. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2012.

A obra apresenta 25 textos curtos que contam a história da Matemática, enriquecidos com questões e projetos que possibilitam saber mais dessa área do conhecimento. Esse conteúdo inspirou a concepção deste volume em diversos momentos em que a história da Matemática é abordada no estudo de determinados conceitos.

Bittencourt, L. F. As programadoras do Eniac apagadas da história da computação. *In*: LF Bittencourt. [*s. l.*], 16 out. 2016. Disponível em: https://lfbittencourt.com/mulheres-programadoras-eniac-b68503ef05f6/. Acesso em: 25 set. 2024.

Esse blogue relata a história do computador Eniac e as contribuições das mulheres no projeto e na programação. Muitas dessas informações foram utilizadas na elaboração do capítulo 7 deste volume.

Borba, Marcelo de C.; Penteado, Miriam G. *Informática e educação matemática*. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010 (Coleção Tendências em Educação Matemática).

Nesse livro, encontram-se exemplos do uso da informática para fins educativos. Muitas dessas abordagens serviram de inspiração para a concepção das seções *Tecnologia* desta coleção.

Boyer, Carl B. *História da matemática*. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Blucher, 1996.

Esse livro apresenta a história da relação da humanidade com números, formas e padrões. As informações nele contidas contribuíram para a concepção de várias partes deste volume.

Brasil. [Constituição (1988)]. *Emenda constitucional n. 59, de 11 de novembro de 2009*. [...] dá nova redação aos incisos I e VII do art. 208, de forma a prever a obrigatoriedade do ensino de quatro a dezessete anos [...]. Brasília, DF: Presidência da República, [2009]. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/Emendas/Emc/emc59.htm. Acesso em: 12 set. 2024.

A emenda constitucional determina a Educação Básica obrigatória e gratuita às crianças a partir de 4 anos de idade e aos jovens até 17 anos.

Brasil. *Lei n. 13 415, de 16 de fevereiro de 2017*. [...] institui a Política de Fomento à Implementação de Escolas de Ensino Médio em Tempo Integral. *Diário Oficial da União*: seção 1, Brasília, DF, ano 154, n. 35, p. 1-3, 17 fev. 2017.

Essa lei implementou reformas no Ensino Médio, como a ampliação progressiva da carga horária anual, visando à implantação do período integral nas escolas.

Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular*: educação é a base. Brasília, DF: MEC/SEB, 2018a. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em: 12 set. 2024.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem desenvolver ao longo das etapas e das modalidades da Educação Básica.

Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Currículos e Educação Integral. *Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica*. Brasília, DF: MEC/SEB/DICEI, 2013. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/media/etnico_racial/pdf/diretrizes_curriculares_nacionais_para_educacao_basica_diversidade_e_inclusao_2013.pdf. Acesso em 12 set. 2024.

O documento traz as diretrizes que estabelecem a base nacional comum, responsável por orientar a organização, a articulação, o desenvolvimento e a avaliação das propostas pedagógicas das redes de ensino brasileiras.

Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Temas contemporâneos transversais na BNCC*: proposta de práticas de implementação. Brasília, DF: MEC/SEB, 2019. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/guia_pratico_temas_contemporaneos.pdf. Acesso em: 12 set. 2024.

Esse documento explicita a relação entre os diferentes componentes curriculares de maneira integrada com situações vivenciadas pelos estudantes. O texto considera os contextos escolar e social tendo em vista a formação dos jovens para o trabalho, a cidadania e a democracia, respeitando as características regionais e locais de tais contextos.

Bushaw, Donald *et al*. *Aplicações da matemática escolar*. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1997.

Coletânea de artigos de especialistas na área da educação matemática, que tratam de exemplos de aplicação da Matemática em diferentes áreas do conhecimento. Alguns desses exemplos foram utilizados na elaboração de problemas e exercícios deste volume.

Cartografia: sebenta de apoio às aulas teóricas da disciplina de Cartografia. Licenciatura em Engenharia Geoespacial. Departamento de Engenharia Geográfica, Geofísica e Energia. Lisboa: Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 2018/2019.

Essa apostila apresenta uma compilação de estudos teóricos sobre cartografia. Os temas abordados sobre representação cartográfica contribuíram para a composição do capítulo 6 deste volume.

Cartografia sistemática: projeções cartográficas – exercícios. [São Paulo]: Universidade de São Paulo, [20--]. Disponível em: http://moodle.stoa.usp.br/mod/resource/view.php?id=44856. Acesso em: 23 set. 2024.

Disponível no ambiente virtual Stoa, essa apostila traz atividades para desenhar o mundo em projeções cartográficas diferentes com o uso de *softwares* de projeções cartográficas. Esse material contribuiu para a elaboração do capítulo 6 deste volume.

Coxford, Arthur F.; Shulte, Albert P. (org.). *As ideias da álgebra*. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

Esse livro apresenta diversos conceitos algébricos e problemas com resoluções, além de abordar o uso de computadores e de calculadoras no aprendizado da álgebra. Os conteúdos dessa obra serviram de base para a concepção de muitos temas tratados neste volume.

Dornelles, Nemora. As 15 principais linguagens de programação do mundo! *Becode*. Disponível em: https://becode.com.br/principais-linguagens-de-programacao/. Acesso em: 25 set. 2024.

Esse artigo apresenta um breve resumo das quinze principais linguagens de programação do mundo e aborda a diferença entre as linguagens de programação de alto e de baixo nível. Parte das informações foram utilizadas na elaboração da unidade 3 deste volume.

Dreyer-Eimbcke, Oswald. *O descobrimento da Terra*: história e histórias da aventura cartográfica. São Paulo: Melhoramentos: Edusp, 1992.

O autor narra a história de descobertas que deram origem a surpreendentes representações cartográficas ao longo do tempo e desmistifica a ideia de que as expedições a terras longínquas não foram um empreendimento marítimo e comercial bem planejado pelas grandes potências europeias da época. Esse material contribuiu para a concepção do capítulo 6 deste volume.

Eniac Programmers Project. The Computers. Direção: Kathy Kleiman. [*S. l.*]: WMM, 2016. 1 vídeo (20 min). Disponível em: http://eniacprogrammers.org/see-the-film/. Acesso em: 4 nov. 2024.

Nesse *site*, criado por Kathy Kleiman, que pesquisou a história do Eniac e das mulheres que contribuíram para o

Não escreva no livro.

desenvolvimento desse computador, é possível assistir ao documentário de 20 minutos, em inglês, que relata essa história. Essas referências foram utilizadas na elaboração do início do capítulo 7 deste volume.

Firkowski, Henrique; Sluter, Claudia R. Projeções cartográficas. Curso de especialização em geotecnologias. *In*: *Cartografia geral e projeções cartográficas*. Curitiba: Departamento de Geomática, Universidade Federal do Paraná (UFPR), 2008. Disponível em: https://docs.ufpr.br/~firk/pessoal/projcart/Cap%204%20ProjCart.pdf. Acesso em: 23 set. 2024.

Esse trabalho apresenta a definição de projeção cartográfica, os métodos (planejamento, coleta, representação e dados geográficos) e os processos de abstração e de generalização cartográfica que devem ser aplicados em um mapa para se obter uma representação simplificada e/ou aproximada do mundo. Essas informações foram utilizadas para a elaboração do capítulo 6 deste volume.

Fonseca, Fernanda P.; Oliva, Jaime. *Cartografia*. São Paulo: Melhoramentos, 2013 (Coleção Como Eu Ensino).

Os autores propõem uma nova reflexão sobre o estudo de mapas na Educação Básica com base em uma metodologia de desnaturalização do mapa e de expressão cartográfica, de interpretação de mapas de ordem cultural e de imagens produzidas por satélites.

Fonseca, Maria da Conceição F. R. (org.). *Letramento no Brasil*: habilidades matemáticas. São Paulo: Ação Educativa: Global, 2004.

O livro apresenta um levantamento de dados sobre habilidades de leitura e escrita matemática da população brasileira. O conteúdo fundamentou a escolha de metodologias utilizadas neste volume e em outros livros desta coleção.

Gardner, Howard. *Inteligências múltiplas*: a teoria na prática. Tradução: Maria Adriana V. Veronese. Porto Alegre: Artmed, 1995.

A obra explica as principais ideias relacionadas à aprendizagem e evidencia como elas podem ser aplicadas em sala de aula. Muitas das propostas desse livro consideram as diferentes maneiras de aprender correspondentes às múltiplas formas da inteligência humana.

Howard, Eves. *Introdução à história da matemática*. Tradução: Hygino H. Domingues. 4. ed. Campinas: Ed. da Unicamp, 2004.

Esse livro apresenta a história da Matemática, da Antiguidade aos dias atuais, contextualizada pela observação da cultura de cada época retratada.

Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). *Atlas geográfico escolar*. Disponível em: https://atlasescolar.ibge.gov.br/# . Acesso em: 4 nov. 2024.

Esse *site* contém ilustrações animadas de geografia e de cartografia, com mapas do Brasil e do mundo, que abrangem temas sobre população, clima, política, indicadores sociais, etc. As informações desse material contribuíram para explorar a história da cartografia no capítulo 6 deste volume.

Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). Coordenação de Cartografia. Centro de Documentação e Disseminação de Informações. *Acesso e uso de dados geoespaciais*. Rio de Janeiro: IBGE, 2019 (Manuais Técnicos em Geociências, n. 14). Disponível em: https://biblioteca.ibge.gov.br/index.php/biblioteca-catalogo?view=detalhes&id=2101675. Acesso em: 23 set. 2024.

Essa publicação apresenta metodologias para a utilização de dados geoespaciais, mediante os *softwares* SIG e QGIS, na manipulação, análise, edição, elaboração, impressão de mapas e cartogramas. Essas informações contribuíram para a composição do capítulo 6 deste volume.

Iezzi, Gelson; Murakami, Carlos. *Fundamentos de matemática elementar*: combinatória e probabilidade. 10. ed. São Paulo: Atual, 2013. v. 5.

Esse livro traz diversas definições e demonstrações que contribuíram para a fundamentação e para a construção dos conceitos desenvolvidos neste volume.

Iezzi, Gelson; Murakami, Carlos. *Fundamentos de matemática elementar*: geometria espacial. São Paulo: Atual, 2013. v. 10.

Esse livro traz diversas definições e demonstrações que contribuíram para a fundamentação e para a construção dos conceitos desenvolvidos neste volume.

Iezzi, Gelson; Murakami, Carlos. *Fundamentos de matemática elementar*: geometria plana. São Paulo: Atual, 2013. v. 9.

Esse livro apresenta a história da relação da humanidade com números, formas e padrões. As informações nele contidas contribuíram para a fundamentação e a construção de diversos conceitos desenvolvidos neste volume.

Kleina, Nilton. A história do Eniac, um dos pais dos computadores [vídeo]. *Tecmundo*, [*s. l.*], 30 out. 2018. Disponível em: https://www.tecmundo.com.br/mercado/135693-historia-eniac-pais-dos-computadores-video.htm. Acesso em: 4 nov. 2024.

Nessa matéria, é possível encontrar informações a respeito da história dos computadores, que foram utilizadas como referência no início do capítulo 7 deste volume.

Krulik, Stephen; Reys, Robert E. (org.). *A resolução de problemas na matemática escolar*. Tradução: Hygino H. Domingues; Olga Corbo. São Paulo: Atual, 2012.

Coletânea de artigos que discutem metodologias de ensino da Matemática. Algumas ideias apresentadas nesse livro contribuíram para a concepção deste volume.

Lima, Roberto F. de. *Introdução à geometria diferencial*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016.

Destaque para o capítulo 4, sobre a Geometria intrínseca, desenvolvida por Carl Friederich Gauss, que descreve as superfícies e suas curvaturas, a soma dos ângulos internos de um triângulo no plano e no espaço e as geodésicas. O estudo desenvolvido nessa obra auxiliou no desenvolvimento do capítulo 6 deste volume.

Lindquist, Mary M.; Shulte, Albert P. (org.). *Aprendendo e ensinando geometria*. São Paulo: Atual, 1994.

Esse livro traz vinte artigos de especialistas da área sobre a metodologia do ensino de Matemática. Esses textos contribuíram para a fundamentação e para a construção de conceitos desenvolvidos neste volume.

MANKIEWICZ, Richard. *The story of mathematics*. New Jersey: Princeton University Press, 2000.

Esse livro apresenta a história da Matemática e propicia o contato com reproduções de imagens da Pré-História, da Idade Média, das tábuas de barro babilônicas, além de imagens computacionais.

MARTINS, Amilton R. de Q.; ELOY, Adelmo A. da S. (org.). *Educação integral por meio do pensamento computacional*: Letramento em programação: relatos de experiência e artigos científicos. Curitiba: Appris, 2019. Disponível em: https://institutoayrtonsenna.org.br/app/uploads/2022/11/instituto-ayrton-senna-educacao-integral-por-meio-do-pensamento-computacional.pdf. Acesso em: 25 set. 2024.

Compilado de artigos científicos que detalham as características do pensamento computacional e apresentam experiências realizadas em salas de aula brasileiras envolvendo atividades voltadas ao desenvolvimento dessa modalidade de raciocínio. As atividades sugeridas nessa obra serviram de inspiração para os capítulos 7 e 8 deste volume na utilização da ferramenta *Scratch*.

MATARIC, Maja J. *Introdução à robótica*. São Paulo: Ed. da Unesp: Blucher, 2014.

Esse livro apresenta desde os conceitos básicos da robótica até as novas aplicações na área – como robôs humanoides, robôs que mudam de forma e a robótica espacial –, incluindo conhecimentos para criar robôs de comportamento autônomo e inteligente. As informações sobre robótica serviram para a concepção do uso da palavra "robô" na literatura abordada na seção *Matemática e tecnologia* do capítulo 8 deste volume.

NEVES, Iara C. B. (org.). *Ler e escrever:* compromisso de todas as áreas. Porto Alegre: Ed. da UFRGS, 2011.

Esse livro foi estruturado coletivamente para propor situações direcionadas ao trabalho integrado de professores de diversas áreas do conhecimento. As ideias e os saberes apresentados nessa obra fundamentaram a concepção de algumas atividades sugeridas neste volume.

POWELL, Arthur; BAIRRAL, Marcelo. *A escrita e o pensamento matemático*: interações e potencialidades. Campinas: Papirus, 2014 (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

Nesse livro, os autores trabalham a importância da escrita na exploração de ideias e raciocínios matemáticos. A contribuição desse material foi utilizada na concepção deste volume, bem como das seções *Matemática e...*.

POZO, Juan Ignacio. (org.). *A solução de problemas*: aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: Artmed, 1998.

O autor defende a ideia de que a resolução orientada de problemas promove o ensino de procedimentos para esse fim e ressalta o papel fundamental do docente ao incentivar os estudantes a criar estratégias para essa tarefa. Essa reflexão contribuiu para a concepção geral deste volume.

SEU SMARTPHONE seria poderoso o suficiente para te levar até a Lua? *Canaltech*, [*s. l.*], 20 jul. 2019. Disponível em: https://canaltech.com.br/espaco/seu-smartphone-seria-poderoso-o-suficiente-para-te-levar-ate-a-lua-144515/. Acesso em: 25 set. 2024.

Esse artigo compara a capacidade de armazenamento dos computadores utilizados na época em que o homem foi à Lua com a de computadores e de *smartphones* que usamos nos dias atuais e destaca os prefixos utilizados no processamento de dados. Essas informações contribuíram para o desenvolvimento do tema do capítulo 8.

SMOLE, Kátia S.; DINIZ, Maria Ignez (org.). *Ler, escrever e resolver problemas*: habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed. 2001.

A obra levanta reflexões com base nas diferentes teorias contemporâneas de ensino e aprendizagem, com propostas pedagógicas inovadoras e exemplos de produções de estudantes. As informações desse livro contribuíram para a concepção geral deste volume.

TIMBÓ, Marcos A. *Elementos de cartografia*. Belo Horizonte: Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)/Departamento de Cartografia, 2001. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4522618/mod_resource/content/1/elementoscartografia_timbo.pdf. Acesso em: 4 nov. 2024.

O material aborda conhecimentos básicos de cartografia para pesquisadores e profissionais que atuam na área de geoprocessamento. Essas informações contribuíram para a elaboração do capítulo 6 deste volume.

TOMAZ, Vanessa S.; DAVID, Maria Manuela M. S. *Interdisciplinaridade e aprendizagem da matemática em sala de aula*. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2021 (Coleção Tendências em Educação Matemática).

Essa obra apresenta algumas vivências em sala de aula para contextualizar diferentes abordagens interdisciplinares no ensino da Matemática. O conteúdo foi utilizado na criação de muitas atividades e na concepção de algumas seções deste volume.

TRIBUNAL SUPERIOR ELEITORAL (TSE). Divulgação de resultados das eleições. [Brasília, DF]: TSE, [20--]. Disponível em: https://resultados.tse.jus.br/oficial/app/index.html# /eleicao/resultados. Acesso em: 25 set. 2024.

Esse *site* permite o acesso a informações sobre o resultado das eleições realizadas no Brasil entre 2022 e 2024. Alguns desses dados foram utilizados na elaboração de atividades deste volume.

WING, Jeannette. Pensamento computacional: um conjunto de atitudes e habilidades que todos, não só cientistas da computação, ficaram ansiosos para aprender e usar. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, Ponta Grossa, v. 9, n. 2, p. 110, maio/ago. 2016. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/4711. Acesso em: 25 set. 2024.

Precursora dos estudos relativos ao pensamento computacional, a pesquisadora estadunidense discorre sobre a importância de desenvolver essa modalidade de raciocínio e distingue o pensamento computacional de outras vertentes que hoje conhecemos como programação e letramento digital. Os estudos desenvolvidos nesse artigo serviram de base para os conceitos sobre pensamento computacional presentes no capítulo 7 deste volume.

Não escreva no livro.

MANUAL DO PROFESSOR

APRESENTAÇÃO

OLÁ, PROFESSOR. BEM-VINDO!
OLÁ, PROFESSORA. BEM-VINDA!

Escrevemos estas orientações com o objetivo de apresentar a você como pensamos ao desenvolver esta coleção e como ela pode contribuir para que os estudantes aprendam mais e melhor.

Sabemos que o livro didático é apenas um recurso no processo dinâmico e complexo que envolve o ensino. Acreditamos que ele pode orientar um percurso e dar apoio com atividades que conduzam os estudantes ao longo dessa caminhada para a aprendizagem.

Com foco no desenvolvimento de competências e de habilidades preciosas para a vida dos estudantes tanto na escola quanto fora dela, os temas e os conceitos apresentados nesta coleção compõem um cenário de significados intencionalmente elaborados dentro de uma lógica de sentidos que pode facilitar conexões entre ideias e, assim, favorecer a formação matemática dos jovens em sua última etapa da Educação Básica.

Por outro lado, temos consciência de que esse desenvolvimento depende não apenas do livro em si, mas também da maneira como ele é trabalhado em sala de aula. Por isso, as orientações a seguir apresentam sugestões didáticas e metodológicas – testadas e aprimoradas por nós ao longo de muitos anos de pesquisa em sala de aula – que constroem a relação entre o conhecimento específico e a formação integral dos estudantes.

Esperamos que a leitura dessas orientações colabore com seu trabalho, não só no sentido da sua formação profissional, mas especialmente para que o estudo da Matemática que idealizamos se torne instrumento transformador para os jovens, proporcionando a eles modos valiosos e potentes de pensar, além de posturas críticas, determinadas e reflexivas acerca da vida e do mundo.

Bom trabalho!

Os autores

SUMÁRIO

PARTE 1 - FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICO-METODOLÓGICA E ORGANIZAÇÃO DA OBRA

O jovem do Ensino Médio 308
O jovem na escola do Ensino Médio: seus projetos e sua individualidade 308
Inclusão de estudantes com deficiência 309
A Base Nacional Comum Curricular 309
As competências gerais da Educação Básica 310
Competências específicas e habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias 311
Conexão entre as competências gerais e as competências específicas e as habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias 311
Conexão entre as competências específicas da área de Ciências da Natureza e a área de Matemática e suas Tecnologias 312
A área de Matemática e suas Tecnologias 312
Orientações didático-metodológicas para a área de Matemática e suas Tecnologias 313
Tecnologia e pensamento computacional 316
Argumentação e níveis inferenciais de leitura 317
O papel privilegiado do professor 317
Planejar e avaliar em Matemática 318
Avaliação em uma perspectiva ampla 319
Sobre os instrumentos e as maneiras de avaliar 320
Modelos avaliativos 321
Estrutura da coleção 322
Estrutura do Livro do Estudante 323

PARTE 2 - ORIENTAÇÕES ESPECÍFICAS 327

Unidade 1 Probabilidade e Estatística 330
Capítulo 1 – Estatística: medidas de dispersão 330
Capítulo 2 – Probabilidade e Estatística 332
Por dentro do Enem e dos vestibulares 333
Unidade 2 Geometria espacial 333
Capítulo 3 – Sólidos geométricos: poliedros 333
Capítulo 4 – Sólidos geométricos: corpos redondos 336
Capítulo 5 – Geometria métrica espacial 336
Capítulo 6 – Projeções cartográficas 338
Por dentro do Enem e dos vestibulares 340
Unidade 3 Programação e pensamento computacional 340
Capítulo 7 – Pensamento computacional 340
Capítulo 8 – Algoritmos e fluxogramas 343
Por dentro do Enem e dos vestibulares 344
Unidade 4 Sistemas lineares e matrizes 345
Capítulo 9 – Sistemas lineares 345
Capítulo 10 – Matrizes 347
Por dentro do Enem e dos vestibulares 347

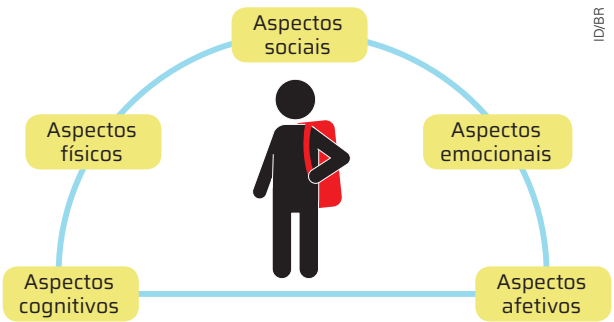
PARTE 3 - RESOLUÇÕES COMENTADAS 348

Unidade 1 Probabilidade e Estatística 348
Capítulo 1 – Estatística: medidas de dispersão 348
Capítulo 2 – Probabilidade e Estatística 351
Por dentro do Enem e dos vestibulares 355
Unidade 2 Geometria espacial 355
Capítulo 3 – Sólidos geométricos: poliedros 355
Capítulo 4 – Sólidos geométricos: corpos redondos 359
Capítulo 5 – Geometria métrica espacial 361
Capítulo 6 – Projeções cartográficas 367
Por dentro do Enem e dos vestibulares 369
Unidade 3 Programação e pensamento computacional 369
Capítulo 7 – Pensamento computacional 369
Capítulo 8 – Algoritmos e fluxogramas 374
Por dentro do Enem e dos vestibulares 381
Unidade 4 Sistemas lineares e matrizes 381
Capítulo 9 – Sistemas lineares 381
Capítulo 10 – Matrizes 389
Por dentro do Enem e dos vestibulares 395
Bibliografia comentada 396

PARTE 1 • FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICO-METODOLÓGICA E ORGANIZAÇÃO DA OBRA

Esta coleção se insere como uma proposta para assegurar uma das principais premissas da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018a) para a etapa do Ensino Médio: o protagonismo do jovem em fazer escolhas e ter voz ativa e responsável na construção de sua formação nesta fase final da Educação Básica.

Alguns princípios da BNCC, presentes também nas Diretrizes Curriculares Nacionais do Ensino Médio (DCNEM) (DCNEM/2011), orientaram a construção dessa proposta de ensino, tanto em seu conteúdo, quanto no modo como foi estruturada. Um desses princípios é a formação integral do estudante, a qual abrange valores e aspectos físicos, cognitivos e socioemocionais. O jovem do século XXI deve ser considerado por inteiro, em especial no que diz respeito a seu direito, assegurado por lei, de ter formação ampla. Assim, a escola se constitui como espaço privilegiado de aprendizado, no qual ele tem acesso a novos conhecimentos, com a possibilidade de ampliar seus horizontes e vivenciar um mundo de descobertas. Ou seja, a escola deve ser o lugar para pensar, projetar, questionar, fazer-se ouvir, aprender a argumentar, a conviver e a desenhar seu futuro, como indivíduo e como parte da coletividade.



ID/BR

Um outro princípio se fundamenta na concepção da juventude como fase importante da vida, percebe os jovens como sujeitos sociais, reconhece a diversidade entre eles como valor e cria condições para que construam sua identidade e estruturem seu projeto de vida. Por isso, esta obra busca propiciar o desenvolvimento de jovens protagonistas que conheçam seus interesses e anseios e se posicionem com fundamento em suas escolhas, decisões e ações, tanto no ambiente escolar quanto fora dele.

Nesta coleção, deu-se também atenção ao contexto educacional contemporâneo, com suas características e seus desafios, levando em consideração as seguintes questões: Como garantir aprendizagens significativas, promover o desenvolvimento de competências e, ao mesmo tempo, dialogar com os interesses dos jovens estudantes, de modo a proporcionar uma relação positiva com o conhecimento? Como construir uma coleção que responda de maneira não fragmentada aos princípios estabelecidos? Como preparar as novas gerações para conduzir com autonomia situações de grande complexidade, seja no contexto escolar, seja em outros âmbitos da vida?

A inserção dos jovens do Ensino Médio no espaço e no tempo da vida social implica permitir que eles vivenciem situações próximas da realidade e do mundo do trabalho. Isso ultrapassa o conjunto de competências da cognição, uma vez que inclui a oportunidade de aprender a se colocar de modo participativo, em cenários intencionalmente planejados para seu desenvolvimento integral. Também é importante que esse desenvolvimento ocorra em um ambiente em que errar, tentar novamente e rever decisões façam parte do processo de aprender e de se preparar para o futuro, com conhecimento e espírito crítico.

O JOVEM DO ENSINO MÉDIO

Considerando as diferentes culturas juvenis, é interessante destacar que o princípio para a concepção desta obra visa compreender o jovem em suas peculiaridades para desenvolver um trabalho pedagógico cujo propósito é a formação integral dos estudantes do Ensino Médio.

> A juventude é, ao mesmo tempo, uma condição social e um tipo de representação. De um lado há um caráter universal, dado pelas transformações do indivíduo numa determinada faixa etária. De outro, há diferentes construções históricas e sociais relacionadas a esse tempo/ciclo da vida (Dayrell; Carrano; Maia, 2014, p. 111).

É preciso considerar cada jovem como sujeito de direitos (muitas vezes negligenciados tanto pela escola quanto pela sociedade), com identidade própria, levando em conta suas diferentes vivências, trajetórias familiares, escolares e comunitárias, moradias, experiências e rotinas. E tudo isso faz parte do que planejamos para sua formação, de modo que os estudantes consigam lidar com a complexidade da vida contemporânea, com todas as incertezas próprias do futuro para o qual precisam se preparar.

Ao longo do Livro do Estudante e das orientações deste manual, o professor conta com orientações práticas para o ensino direcionado a esse jovem. Sempre que pertinente, recomenda-se que o estudante participe de atividades nas quais ele se encontre cognitivamente ativo e integralmente mobilizado, para que se perceba como produtor de conhecimentos e bens culturais, deixando de ser apenas um consumidor de informações.

O JOVEM NA ESCOLA DO ENSINO MÉDIO: SEUS PROJETOS E SUA INDIVIDUALIDADE

A área de Matemática não pode considerar o estudante apenas do ponto de vista deste componente. Uma visão mais ampla nos mostra que, para os jovens brasileiros, a escola ganha diferentes sentidos em função da diversidade de juventudes. Para alguns, ela é parte das expectativas e do planejamento familiar: percebem-na como um passo essencial para acessar a universidade e o mundo do trabalho. Para outros, estar na escola é um desafio cotidiano, em razão de demandas pessoais e familiares, como trabalhar para produzir renda e ajudar a sustentar a família. Há também os que buscam na escola uma possibilidade de ter acesso a outros direitos, como a alimentação e a segurança. Esses e outros tantos sentidos marcam a heterogeneidade de projetos e de posturas dentro da vivência escolar.

Reconhecer as tensões e os desafios presentes nas relações e nas expectativas entre os jovens e deles com seus professores e demais integrantes da comunidade escolar é o primeiro passo para construir pontes entre os interesses juvenis e a própria escola. Trata-se de repensar a escola e seus sujeitos, considerando o contexto contemporâneo, com suas complexidades, possibilidades, limitações e dilemas.

Um caminho apontado pelas DCNEM e pela BNCC refere-se à promoção da participação significativa dos jovens na escola, de modo que eles possam expressar conhecimentos, anseios e necessidades e fazer escolhas. Isso significa romper com a visão de que cabe aos estudantes o exclusivo papel de assistir às aulas e realizar as tarefas propostas, a fim de percebê-los como protagonistas nos processos de tomada de decisão e do processo educativo.

Em relação ao ensino de Matemática, é preciso observar que cada uma das competências específicas e muitas das habilidades associadas a elas apontam para o estudante que se espera formar ao longo do Ensino Médio, não apenas no sentido cognitivo, mas também como indivíduo com um projeto de vida em construção, conquistando saberes para o exercício consciente da cidadania, o que inclui a possibilidade de avançar em seus estudos após o Ensino Médio. A Matemática, especificamente, traz um conjunto importante de saberes e de maneiras de pensar que tanto capacita o estudante para aprender em diferentes áreas quanto favorece a autoconfiança e a determinação para enfrentar os desafios da vida e a realização de seus projetos pessoais.

Por tudo isso, as escolhas metodológicas são essenciais para promover o aprendizado de estudantes com diferentes perfis e modos de aprender, propiciando várias oportunidades para que eles assumam o papel de protagonistas na aquisição de conhecimentos.

Nesta coleção, as orientações apresentadas para o desenvolvimento das atividades e as propostas das seções proporcionam aos estudantes a vivência de diferentes situações e permitem que o professor identifique potencialidades, dificuldades, repertórios prévios e preferências em sua turma. Desse modo, torna-se possível que todos os estudantes sejam valorizados e acolhidos em suas particularidades, tendo o professor como mediador de seu processo de aprendizagem e os colegas como parceiros nessa construção.

As propostas didáticas da problematização e da comunicação favorecem a integração de estudantes com diferentes perfis, pois todos podem contribuir com o que sabem, com o que entenderam e até mesmo com suas incompreensões para rodas de conversa produtivas e colaborativas. Assim, cada um pode contribuir com as capacidades de que já dispõe (uns são bons oradores; outros, bons produtores de texto; outros lidam bem com tecnologias; outros gostam de pesquisar; outros preferem construir esquemas e desenhar) e tem a oportunidade de desenvolver outras capacidades à medida que participa de trabalhos colaborativos e integrados.

Cada livro desta coleção foi idealizado para ser lido pelo estudante. O texto fala com ele e traz atividades com diferentes níveis de complexidade, de modo que todos possam participar. E, por meio da **avaliação formativa**, os estudantes podem ser acolhidos em suas diferenças, personalidades, interesses, estilos e ritmos, sendo encaminhados para saber atuar no mundo, interagindo com outras pessoas e aprendendo na relação que estabelecem com elas, sempre de maneira respeitosa e ética.

INCLUSÃO DE ESTUDANTES COM DEFICIÊNCIA

Para aprofundar as percepções sobre a múltipla diversidade de condições dos estudantes do Ensino Médio, é importante identificar as especificidades das deficiências e dos transtornos. De acordo com o artigo 2º da Lei n. 13 146, de julho de 2015, que instituiu o Estatuto da Pessoa com Deficiência, "Considera-se pessoa com deficiência aquela que tem impedimento de longo prazo de natureza física, mental, intelectual ou sensorial".

Por sua vez, aqueles com transtornos do neurodesenvolvimento podem apresentar alterações no desenvolvimento psicomotor, movimentos estereotipados, além de apresentar dificuldades relativas à comunicação e à interação social. Esses transtornos englobam uma diversidade de condições que podem variar em nível e em grau, como ocorre com o transtorno do espectro autista (TEA), a deficiência intelectual (DI), o transtorno do déficit de atenção e hiperatividade (TDAH) e os transtornos de aprendizagem, dos quais os mais comuns são a dislexia, a discalculia e a disgrafia.

É necessário compreender os desafios enfrentados pelos jovens que têm transtornos dessa ordem. Muitos também podem apresentar dificuldades relativas à compreensão das emoções dos outros e ao aprendizado acadêmico, além de dificuldades comportamentais, o que demanda a adoção de abordagens pedagógicas específicas para atender às necessidades de cada um.

Outra estratégia eficaz é trabalhar com os jovens habilidades de resolução de problemas e conflitos. Aqueles que apresentam tais transtornos podem se sentir desafiados em situações de conflito, o que pode ser sanado ou amenizado mediante o ensino de habilidades de negociação, escuta e empatia.

Por outro lado, as deficiências agrupam grande diversidade de condições humanas e podem se apresentar em diferentes dimensões, como a intelectual e a física (no caso de pessoas com deficiência auditiva ou visual, de pessoas em cadeiras de rodas, etc.).

Assim como ocorre com os transtornos, é importante garantir ambientes que possam receber estudantes em tais condições e preparar-se para incentivá-los de maneira específica, adaptando propostas pedagógicas e ampliando o repertório escolar relacionado a esse cenário. Desse modo, a arquitetura inclusiva é essencial para facilitar o acesso à escola não só aos estudantes com condições físicas específicas, mas também a outras pessoas que tenham dificuldade de locomoção.

A inclusão desses jovens requer uma política de gestão escolar que garanta a formação deles de acordo com seus direitos e suas possibilidades. É preciso incluir a disponibilização de material didático adaptado, a implementação de estratégias de ensino diferenciadas, como currículo individualizado, o suporte emocional e comportamental (se necessário), a tutoria e o uso de recursos digitais e até mesmo visuais (como cartões de emoções, que ajudam a identificar os próprios sentimentos e compartilhá-los com outras pessoas).

Especificamente em relação à Matemática, pautada na problematização e na comunicação, é preciso destacar que algumas das orientações vão ao encontro das necessidades desses jovens, como é o caso das propostas de trabalho colaborativo, em duplas ou em grupos; a expressão oral ou a dramatização como recursos para entender ou explicar o pensamento; e ainda, o painel de soluções (descrito mais adiante), no qual diferentes formas de pensar e de registrar são válidas e valorizadas.

No entanto, não bastam as estratégias de ensino: é necessário repensar o que ensinar a esse jovem em função de suas possibilidades, estabelecendo um currículo individualizado em relação a todos os componentes. Algumas orientações que podem auxiliar seu planejamento para esses estudantes são:

- **Organizar o trabalho**, de modo que todos saibam o que se espera de cada um. Comece a aula combinando com a turma o que será feito, as tarefas e, se for o caso, as expectativas específicas para os estudantes com deficiência.
- **Selecionar conteúdos** relacionando os conceitos matemáticos ao contexto e às experiências dos estudantes.
- **Utilizar recursos digitais e ferramentas *on-line*** que os estudantes possam acessar de qualquer lugar, inclusive permitindo retomadas ou preparação prévia. As plataformas de aprendizagem *on-line*, os vídeos educativos e os aplicativos interativos podem ser muito úteis.
- **Planejar o ensino colaborativo** por meio do trabalho em grupo e a aprendizagem colaborativa. Diferentes estudantes podem se beneficiar ao compartilhar seus conhecimentos e habilidades.

Por fim, para a real inclusão de estudantes com deficiência, deve-se ter sempre em mente que a ideia é evidenciar, bem como assegurar e promover, em condições de igualdade, que a pessoa com deficiência faz parte do grupo social e deve ser aceita do modo como se apresenta e que o território escolar deve ser um espaço de acolhimento e de cidadania.

A BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR

No contexto da educação integral, de acordo com a BNCC, competência pode ser entendida como:

> [...] a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho (Brasil, 2018a, p. 8).

Isso significa que o desenvolvimento de competências envolve a articulação dos conhecimentos aprendidos, das habilidades desenvolvidas, das atitudes praticadas e dos valores assimilados, tendo em vista os aspectos pessoais, sociais e profissionais de cada indivíduo. Tais competências abrangem as dimensões cognitivas e socioemocionais, entre outras.

Cabe explicitar os múltiplos aspectos relacionados à dimensão socioemocional mencionada pela BNCC:

Dimensão socioemocional

- **Relacionar-se consigo mesmo, desenvolvendo o autoconhecimento e aprendendo a lidar com emoções.**
- **Colaborar com o outro (colegas, professores, etc.), aprendendo conhecimentos significativos.**
- **Fazer escolhas com base em valores e em seu projeto de vida.**
- **Resolver problemas de modo criativo, relacionando conhecimentos, pontos de vista, ideias e contextos diversos.**
- **Definir objetivos e persistir em alcançá-los, em um exercício de projetar-se no futuro e seguir na direção desejada.**
- **Abrir-se para o novo, com curiosidade.**
- **Conectar-se com outros, sejam eles pares, adultos, grupos ou coletivos.**

Ao relacionar as competências cognitivas e socioemocionais à formação integral do sujeito ao longo de toda a Educação Básica, a BNCC formaliza e legitima uma educação comprometida em integrar esses conhecimentos. Eles devem ultrapassar os muros escolares e dialogar com a realidade e a vida de cada estudante, para que – com base em princípios éticos, estéticos e políticos – ele participe da construção de uma sociedade mais justa, democrática e inclusiva.

A BNCC menciona, ainda, a necessidade de a escola do Ensino Médio garantir aos jovens "a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática" (Brasil, 2018a, p. 467). Para isso, é importante:

- perceber a aprendizagem como um trabalho contínuo, a ser aprimorado permanentemente;
- promover situações que possibilitem aos estudantes "compreender e utilizar os conceitos e teorias que compõem a base do conhecimento científico-tecnológico, bem como os procedimentos metodológicos e suas lógicas" (Brasil, 2018a, p. 467);
- conhecer e utilizar as linguagens científicas, de modo a compreender e compartilhar conhecimentos;
- aprender e praticar múltiplos usos de tecnologias digitais.

AS COMPETÊNCIAS GERAIS DA EDUCAÇÃO BÁSICA

Esta coleção cumpre a função de assegurar que o Ensino Médio não descuide do desenvolvimento das dez competências gerais correspondentes às demandas da Educação Básica (Brasil, 2018a). Essas competências gerais resumem os conhecimentos, as habilidades, as atitudes e os valores essenciais que devem ser garantidos na formação escolar dos estudantes, a fim de que eles se desenvolvam como pessoas éticas e justas, respeitando os direitos humanos e promovendo a sustentabilidade ambiental.

Espera-se, assim, que os estudantes sejam capazes de refletir e de buscar soluções para desafios individuais e coletivos, construindo novos saberes e novas formas de pensar e de atuar. Nesse sentido, essas competências sinalizam não apenas o que os estudantes devem aprender na escola do ponto vista cognitivo, mas qual perfil de estudante se pretende formar nas escolas brasileiras, com capacidades cognitivas, sociais e emocionais importantes para a construção de seu projeto de vida e para sua atuação como cidadão.

De fato, são essas dez competências, apresentadas a seguir, que geram a **interdisciplinaridade** em toda a Educação Básica, quando os componentes curriculares e as áreas de conhecimento têm como meta o desenvolvimento de todos os estudantes em direção a essas competências.

Competências gerais da Educação Básica

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.
8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.

10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

(Brasil, 2018a, p. 9-10.)

A concepção de educação preconizada pela BNCC acarreta algumas questões importantes para a organização dos currículos e da escola, e é nesse cenário que esta coleção se insere com intencionalidade e metodologia que vão ao encontro do jovem do século XXI, colocando-o como centro das escolhas curriculares e do planejamento. Nesse contexto, as competências cognitivas e socioemocionais são inseparáveis, do ponto de vista da aprendizagem, em todas as áreas do conhecimento.

Esta coleção privilegia a aquisição das competências gerais, com a certeza de que são particularmente adequadas ao desenvolvimento do pensamento crítico, da argumentação, da criatividade, da colaboração e da capacidade de resolver problemas. Desse modo, temos como objetivo e entendemos:

- o pensamento crítico como a capacidade de analisar, relacionar e sintetizar ideias, fatos e situações, assumindo posicionamentos fundamentados. Saber posicionar-se e assumir a decisão tomada pressupõe o conhecimento, mas não se confunde com ele;
- a argumentação como parte da comunicação em toda atividade humana e nas práticas socioculturais. Isso significa ser capaz de exteriorizar o pensamento para se fazer entender pelo outro. A troca recíproca de argumentos consistentes permite o avanço e a construção de ideias, ações e emoções novas e mais bem estruturadas;
- a criatividade como a capacidade de conectar de modo diferente conhecimentos anteriores ou de buscar soluções novas para situações diversas, ou, ainda, a habilidade de relacionar fatos, ideias e processos na elaboração de algo inédito. A criatividade não deve ser confundida com a genialidade nem com a criação a partir do zero. Trata-se de um esforço interno para pensar de forma diferente do que já está estabelecido, visando alcançar um objetivo;
- a colaboração, essencial no século XXI, como a capacidade de atuar em sinergia com os outros, de modo respeitoso e responsável. Ser colaborativo envolve a empatia e o respeito às diferenças, assim como saber ceder, liderar e ser liderado;
- a capacidade de resolver problemas como a prática de identificar situações que merecem ou precisam ser resolvidas nos mais diversos aspectos, dentro e fora do espaço escolar. A resolução de problemas exige conhecimentos e maneiras de pensar na construção de estratégias e na busca de soluções, assim como o aprendizado no processo de resolução e de transposição e adaptação desses saberes a outros contextos e situações.

COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS E HABILIDADES DA ÁREA DE MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

Além de possibilitar o trabalho com as competências gerais da BNCC, a coleção contribui para o desenvolvimento das competências específicas e das habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias.

Indicamos para o professor as competências específicas e as habilidades que serão desenvolvidas ao trabalhar cada capítulo, bem como as competências específicas das outras áreas de conhecimento que também serão favorecidas.

A seguir, estão as competências específicas relativas à área de Matemática e suas Tecnologias previstas na BNCC.

Competências específicas de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

(Brasil, 2018a, p. 531.)

CONEXÃO ENTRE AS COMPETÊNCIAS GERAIS E AS COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS E AS HABILIDADES DA ÁREA DE MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

Quando se assume uma concepção de ensino e aprendizagem pautada no desenvolvimento de competências e habilidades, adota-se uma nova maneira de olhar para como se ensina e para como se aprende. Assim, o "como fazer" possibilita o desenvolvimento de processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas.

No contexto das competências e habilidades, a atuação pedagógica não pode ser meramente transmissiva e restrita a um conjunto de conteúdos tradicionalmente estabelecidos desde o século XX. Ao contrário, é preciso que ela seja uma prática orgânica, dinâmica, interativa, colaborativa, em que os estudantes atuem como protagonistas, considerando que o desenvolvimento das competências é, em última instância, o objetivo da Educação Básica.

A prática pedagógica que se espera do professor, portanto, não pode ser meramente instrucional; ela deve se pautar em situações de aprendizagem nas quais os objetos de conhecimento, objetivos de aprendizagem e conteúdos específicos da área estejam relacionados e a serviço das habilidades que devem ser desenvolvidas pelos estudantes, favorecendo a construção de novos saberes por meio da apropriação ativa e da transferência dos conhecimentos.

As habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias são desenvolvidas ao longo dos três volumes por meio da compreensão de determinados conceitos, do entendimento e da análise de como se dá a resolução de uma atividade e da resolução efetiva de atividades de diferentes tipos. Dessa forma, os estudantes expandem suas opiniões, confrontando-as com o que professores e outros estudantes pensam. A situação conflituosa passa a contar com ferramentas científicas que favorecem a reflexão e podem ser fatores de mediação, diálogo e respeito para com o diferente.

A maneira de ensinar é o ponto-chave para o desenvolvimento das competências gerais e específicas propostas pela BNCC. A metodologia de ensino é o elo entre as diversas habilidades e a

formação integral dos estudantes. Por exemplo, ao propor a aprendizagem colaborativa em atividades em duplas ou em grupos, trabalhamos especificamente as competências gerais **8** e **9**, ajudando o jovem a conhecer a si mesmo e ao outro e a lidar com o diferente de modo respeitoso e colaborativo, independentemente de qual seja a habilidade específica da área que é o foco da atividade. Por outro lado, no desenvolvimento de competências específicas, como a **1** e a **2**, propícias a contextos mais significativos, ao conhecimento matemático relacionado a ciências em geral e também a questões socioeconômicas, de saúde ou sustentabilidade, favorecemos a pesquisa e a ampliação de conhecimentos dos jovens, fomentando também o desenvolvimento da competência geral **2** ao levá-los a investigar e se posicionar diante de diferentes questões do mundo atual. Ou, ainda, nas atividades com apoio ou investigação de um recurso tecnológico, os estudantes têm oportunidade de desenvolver as competências gerais **5** e **6** ao utilizar procedimentos e conceitos matemáticos para interpretar e construir modelos e ao utilizar diferentes representações e linguagens da Matemática para buscar ou comunicar soluções para determinadas situações.

Para isso, a coleção propõe o uso de **metodologias ativas**, como a aprendizagem colaborativa e entre pares e a aprendizagem a partir de problemas, não apenas para o desenvolvimento de habilidades, mas também para integrar saberes e promover uma atitude crítica, reflexiva e positiva diante do conhecimento, envolvendo atividades que coloquem os estudantes em situações de cooperação, interação, diversidade e responsabilidade pelo que fazem e pelo que aprendem.

CONEXÃO ENTRE AS COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS DA ÁREA DE CIÊNCIAS DA NATUREZA E A ÁREA DE MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

Entre outras ações voltadas à promoção de uma educação global e abrangente, que envolva educadores, familiares e comunidade escolar, a BNCC propõe:

> [...] decidir sobre formas de organização interdisciplinar dos componentes curriculares e fortalecer a competência pedagógica das equipes escolares para adotar estratégias mais dinâmicas, interativas e colaborativas em relação à gestão do ensino e da aprendizagem (Brasil, 2018a, p. 16).

No contexto da formação integral dos jovens e da promoção de habilidades, a interdisciplinaridade vai além, construindo oportunidades para que o estudante mobilize aprendizados de múltiplas áreas para desenvolver novas formas de pensar e resolver problemas, sem que cada tema ou procedimento fique restrito a um único componente curricular.

Especificamente na área de Matemática e suas Tecnologias, os temas e os contextos abordados ao longo desta coleção propiciam uma integração com as competências específicas da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. As ciências, ao utilizar a linguagem matemática para descrever e interpretar fenômenos naturais e sociais, apresentam maneiras de pensar e habilidades que se assemelham às da Matemática, como análise crítica, interpretação de dados e de textos verbais, a investigação e o posicionamento diante de questões e fenômenos em diversos contextos.

A implementação dessa importante perspectiva de atuação interdisciplinar envolve, assim, a colaboração entre professores de diferentes áreas visando a uma abordagem mais ampla e integrada do aprendizado, sempre com o objetivo comum de fomentar nos estudantes habilidades como pensamento crítico, argumentação, criatividade e resolução de situações-problema e de capacitá-los a aplicar conhecimentos diversos para analisar e enfrentar desafios do mundo real de maneira eficiente e inovadora.

A ÁREA DE MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

O reconhecimento da relação entre a Matemática e a formação integral dos estudantes implica propostas de ensino, atividades e planejamento das aulas com intencionalidade, de modo a contemplar toda a complexidade de aprendizagens que essa área pode promover.

O ensino da Matemática, visando a uma formação integral ao longo da Educação Básica, deve considerar o tempo em que vivemos e responder às questões que a sociedade nos coloca, o que impõe uma mudança significativa no modo de ensinar. Isso requer escolhas metodológicas que considerem um mundo sem fronteiras para o conhecimento, no qual a aprendizagem só pode ocorrer de modo colaborativo.

Nesse cenário, a comunicação e o enfrentamento de situações-problema complexas mostram-se comprovadamente eficazes para o desenvolvimento de múltiplas capacidades cognitivas e de posturas mais críticas e criativas. Do mesmo modo, a possibilidade de vivenciar diferentes maneiras de ver, dizer e compreender conceitos e ideias abre caminho para o convívio respeitoso e o autoconhecimento, tão necessários na construção de cada identidade e nas escolhas para a vida.

Considerando que as competências cognitivas e socioemocionais são indissociáveis na aprendizagem de Matemática, as metodologias sugeridas e que integram esta coleção foram selecionadas exatamente por sua potencialidade para a formação integral. O objetivo é dar consistência a essa proposta unindo todas as áreas e promover a aprendizagem dos conceitos e das ideias importantes de cada área do conhecimento, inclusive da Matemática.

Na escola, a Matemática passa a ser entendida também como uma ciência com características próprias de pensar e de investigar a realidade e com linguagem específica para descrevê-la. Ao mesmo tempo, colabora com as demais áreas de conhecimento, como a de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e a de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, para que, juntas, possam desenvolver seus modelos e analisar informações.

A Matemática aplicada e também como ciência pura utiliza, em sua linguagem, códigos e símbolos, desenhos, algoritmos, fórmulas e gráficos desenvolvidos ao longo da história. Esse caráter a aproxima da área de Linguagens quando se torna ferramenta para a representação de fenômenos e informações e a quantificação de dados em diferentes áreas do conhecimento.

Ao analisar a BNCC e as facetas da Matemática na escola, é preciso destacar que essa área assume o compromisso com o **letramento matemático** na seguinte perspectiva:

> Letramento matemático é a capacidade individual de formular, empregar e interpretar a Matemática em uma variedade de contextos. Isso inclui raciocinar matematicamente e utilizar conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas para descrever, explicar e predizer fenômenos. Isso auxilia os indivíduos a reconhecer o papel que a Matemática exerce no mundo e para que cidadãos construtivos, engajados e reflexivos possam fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões necessárias (Brasil, 2012, p. 1).

Por isso, o ensino de Matemática deve ir além dos objetos de conhecimento e das habilidades estabelecidas pela BNCC e assumir, por meio de escolhas metodológicas, a meta de ensinar a linguagem, os conceitos e os procedimentos da Matemática para a resolução de situações-problema nos mais diversos contextos e campos do conhecimento humano.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICO-METODOLÓGICAS PARA A ÁREA DE MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

A BNCC traz orientações importantes sobre processos de ensino mais adequados para o letramento matemático dos estudantes no Ensino Médio. São eles: a problematização, a modelagem, a investigação e os projetos.

> **[...] Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem** podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental. Esses processos de aprendizagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional (Brasil, 2018a, p. 266, grifo nosso).

Essas orientações devem ser entendidas como uma possível proposta para o ensino coerente com os processos de resolução de problemas e de investigação na forma da problematização; o desenvolvimento de projetos, presente em propostas que ampliam o livro-texto; e a utilização da linguagem matemática para expressar ideias, conceitos e procedimentos, parte importante da formação de leitores e produtores de texto nessa área.

As abordagens metodológicas que inspiraram a concepção desta coleção fundamentam-se na finalidade de contribuir para o processo de ensino-aprendizagem de Matemática numa perspectiva problematizadora, que busca favorecer o trabalho coletivo e colaborativo, bem como promover a autonomia dos estudantes estimulando o constante exercício de reflexão sobre suas aprendizagens.

Algumas dessas abordagens metodológicas para a formação integral dos estudantes podem ser descritas da maneira que se segue.

Problematização: aulas problematizadoras

O desenvolvimento da resolução de problemas depende de as aulas de Matemática serem planejadas intencionalmente para constituir um ambiente repleto de situações-problema, ou seja, uma aula problematizadora – uma aula em que o desafio é constante, na qual experimentar, formular hipóteses, investigar e até mesmo errar são ações frequentes. Esse tipo de ambiente pedagógico possibilita integrar todos os estudantes, convidando-os a usar a Matemática para conhecer a si mesmos, enquanto desenvolvem suas capacidades intelectuais, bem como as habilidades de observação, exploração, análise e reflexão. Além disso, os estudantes com baixa motivação para a Matemática perdem o medo de enfrentar matematicamente situações que lhes são propostas e se tornam mais capazes de controlar os próprios mecanismos de pensamento.

De acordo com Vila e Callejo (2007), são três os fatores que influem em maior grau na efetividade do raciocínio matemático: o conhecimento dos conteúdos matemáticos, a competência no uso dos processos de investigação matemática e a confiança na capacidade de enfrentar e vencer os desafios propostos.

A confiança é fruto da experiência constante de resolver problemas, da presença pedagógica dos professores e de uma avaliação formativa que acompanha e intervém sempre no sentido de promover a aprendizagem.

Raciocinar matematicamente permite desenvolver algumas maneiras de pensar muito próprias da Matemática, entre as quais destacamos o pensar indutivo, o dedutivo, o espacial e o não determinístico. Os jovens aprendem a raciocinar nessas diversas modalidades a partir das evidências que encontram em suas explorações e investigações, baseando-se no que já sabem que é verdade. Aprendem, ainda, a reconhecer as características de um argumento aceitável em Matemática.

Eles desenvolvem raciocínios cada vez mais elaborados, envolvendo análise, comprovação, avaliação, explicação, inferência, justificativa e generalização, se expostos a um ambiente que valoriza a comunicação matemática. Esse ambiente, propício ao desenvolvimento, é criado quando os estudantes têm a oportunidade de debater pontos de vista, explicar e justificar a resolução de um problema, uma inferência ou uma regularidade identificada; deduzir e justificar estratégias usadas e conclusões obtidas; adaptar o conhecido ao desconhecido; transferir uma aprendizagem de um contexto para outro; provar que algo é verdadeiro ou refutar uma hipótese, buscando um contraexemplo para uma conclusão falsa; entre outras possibilidades.

Mobilizar a turma propondo problemas e questões não é o suficiente para o desenvolvimento integral. Essa formação depende também do respeito à diversidade dos estudantes e de suas formas de aprender. Daí a necessidade de complementar ou de utilizar as propostas do livro didático de modo diversificado, promovendo a aprendizagem colaborativa por meio de pesquisas e projetos, com apoio da tecnologia e de textos complementares que podem despertar o interesse de estudantes com diferentes perfis. Alguns exemplos podem ser identificados nas orientações de cada capítulo e nas seções ***Para explorar*** e ***Matemática e...*** presentes no Livro do Estudante. A aula problematizadora se completa com uma estratégia de ensino muito efetiva para a aprendizagem, parte integrante da metodologia ativa de aprendizagem entre pares, denominada painel de soluções.

Painel de soluções

No painel de soluções, os estudantes apresentam diferentes soluções para um problema ou apenas parte delas, com estratégias de resolução. Fisicamente, esse painel pode ser feito na lousa, de modo coletivo, promovendo um debate entre o estudante que apresenta sua solução e os demais colegas. Assim, o painel de soluções é um espaço de discussão no qual os estudantes podem contar aos colegas as escolhas que fizeram para resolver um problema e a maneira que utilizaram para representar suas ideias. Podem também analisar em profundidade duas ou três resoluções com estratégias diferentes para verificar características comuns e diferenças entre elas, posicionando-se em relação a cada resolução.

Assegurar esse espaço é uma maneira de intervenção didática que contribui para a formação integral dos jovens e para o desenvolvimento das habilidades de argumentação e colaboração. Com isso, é possível que a turma conheça diferentes caminhos para a resolução de uma situação e vivencie um momento valioso no qual as estratégias incorretas podem ser discutidas de modo que todos percebam em que erraram e como podem avançar.

Cabe ao professor, como mediador e coordenador da atividade, incentivar a argumentação e o respeito por opiniões diferentes. Isso pode ser feito pela problematização, levantando questões como: Como os dados foram organizados? Todos resolveram da mesma maneira? Quais semelhanças e diferenças vocês identificam nas resoluções?

A problematização, portanto, pode ser feita também no caso de incorreções. Não se trata de detectar erros, mas de aprender com eles, orientando os estudantes para que investiguem e reflitam em um ambiente de confiança, sem julgamentos. Nesse sentido, esse recurso é muito inclusivo, pois nele todos podem colaborar e os erros são bem-vindos como oportunidades de reflexão e de novas aprendizagens.

Para o professor, o painel de soluções é um recurso que permite a observação e o registro das aprendizagens e de eventuais dificuldades de cada estudante, à medida que maneiras diversas de pensar ou de registrar ideias são expostas e discutidas.

Apesar do destaque dado à problematização como forma específica e central das aulas de Matemática, ela se potencializa e se complementa com os demais processos matemáticos para o ensino, uma vez que são eles que estabelecem o ambiente e o conjunto de relações pessoais que favorecem o desenvolvimento de todas as habilidades socioemocionais. Merece especial atenção a metodologia ativa denominada aprendizagem colaborativa.

Aprendizagem colaborativa: o eu e o outro

Aprender com o outro é essencial para a formação do jovem em direção às competências gerais presentes na BNCC, necessárias para as demandas complexas da vida cotidiana ou para o pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho. A interação entre os estudantes desempenha papel fundamental no desenvolvimento das capacidades cognitivas, afetivas e de inserção social.

A aprendizagem colaborativa exige a comunicação entre estudantes e entre eles e o professor, o que pode implicar inclusive rever a organização do espaço na sala de aula.

Ao participar de atividades em grupo ou com toda a turma, como sugerido nas orientações ao professor contidas no Livro do Estudante, é natural que o jovem encontre interlocutores com linguagem próxima à sua, mas com habilidades e conhecimentos que podem ser diferentes dos seus. A comunicação e a vivência com o diverso e o semelhante permitem o exercício constante da análise e da reflexão, essenciais à aprendizagem efetiva.

Por isso, o trabalho em grupo, mais do que um tipo de metodologia ativa para o ensino, pode ser considerado um fator imprescindível na relação entre as interações sociais e o desenvolvimento cognitivo; no exercício da postura crítica; na exigência da reflexão por parte do estudante, envolvendo a análise cuidadosa de seus erros; no respeito ao pensamento de outras pessoas que podem divergir de seu raciocínio ou complementá-lo.

Principais contribuições do trabalho em grupo

- **Promover a interação entre os jovens do grupo e entre os grupos.**
- **Favorecer a construção do conhecimento.**
- **Evidenciar diferentes modos de pensar presentes nas ideias matemáticas.**
- **Desenvolver habilidades de raciocínio como investigação, inferência, reflexão e exploração.**

Toda tarefa ou atividade complexa em que um estudante não consegue, individualmente, obter todas as informações e/ou analisá-las, favorece a aprendizagem colaborativa. Como exemplos propostos no livro estão a leitura e a discussão de textos, a resolução de situações-problema, pesquisas sobre a história e a utilização atual de determinado conceito ou a exploração dos recursos e usos de um aplicativo ou de um *software*.

A comunicação e a modelagem matemática

Segundo a *Matriz de avaliação de Matemática: Pisa 2012*, o letramento matemático estabelecido como meta para a formação dos estudantes inclui "utilizar conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas para descrever, explicar e predizer fenômenos" (Brasil, 2012, p. 1).

Por sua vez, entende-se por modelagem matemática o processo de fazer Matemática aplicada, ou seja, partindo-se de um problema complexo, construir uma representação matemática (modelo matemático) capaz de gerar uma solução. Há, ainda, a compreensão da modelagem matemática como a construção de modelos que descrevam situações e fenômenos para explicá-los e fazer previsões ou inferências.

Percebe-se que, no letramento matemático, a modelagem está interligada com a problematização e com a aquisição da linguagem matemática em um sentido amplo. Isso significa que a linguagem e os textos próprios dessa área precisam ser aprendidos nas aulas do componente curricular. Ler e construir gráficos, tabelas, desenhos de objetos em perspectiva ou em forma de desenhos técnicos, como aparecem nos livros didáticos, e ler fórmulas e símbolos de modo correto, assim como produzir textos utilizando esses recursos da linguagem matemática, devem fazer parte do planejamento das aulas e das atividades propostas aos estudantes. A linguagem no sentido completo precisa fazer parte da aprendizagem, e isso se dá pela forma de exposição e pela variedade de textos apresentados e analisados com os estudantes.

Para romper com a prática pedagógica tradicional, pautada pela oralidade do professor e pela escrita do estudante como únicas estratégias de aquisição da linguagem, é necessário trabalhar com os estudantes textos de divulgação científica, manuais técnicos, textos didáticos, vídeos e obras de arte, como será destacado mais adiante na descrição da estrutura do Livro do Estudante.

Além disso, nos momentos de trabalho colaborativo e no painel de soluções, os estudantes têm a oportunidade de (e podem ser incentivados a) desenvolver a comunicação por meio da linguagem oral e escrita, explorando as habilidades de descrição, explicação e questionamento. Isso possibilita melhor organização do pensamento para o desenvolvimento de estruturas conceituais com base nas relações entre os diversos significados de um mesmo conceito. Adicionalmente, há o aprimoramento da capacidade de compreensão de representações e de textos variados, bem como o progressivo incremento das habilidades relacionadas à produção textual.

A construção de modelos exige a linguagem, mas não se restringe a ela. Construir exige repertório, compreensão e oportunidade para exercer esse tipo de produção. Nesse sentido, os livros desta coleção trazem propostas diversificadas como:

- propor problemas de diferentes tipos e níveis de complexidade, de modo que o estudante se sinta confiante para enfrentar desafios maiores;
- trabalhar com problemas abertos, como aqueles que dão origem a pesquisas e projetos, sugeridos ao longo dos capítulos. Esse tipo de proposta solicita do estudante a análise da situação e a elaboração de perguntas possíveis e razoáveis para serem respondidas;
- envolver os estudantes na criação de problemas para determinada situação, ainda que, de início, suas produções sejam imprecisas ou mal formuladas. Essa é uma tarefa que envolve a linguagem e o raciocínio matemático, além dos conhecimentos específicos que podem estar relacionados àquela situação;
- utilizar a abertura de cada unidade como maneira de mobilizar os estudantes para o tema. Propiciar que todos apresentem suas ideias iniciais, seus conhecimentos prévios e até mesmo o que sabem do senso comum, criando condições para que os estudantes valorizem o conhecimento matemático presente em cada capítulo como ferramenta para se posicionar de modo fundamentado nos diversos temas abordados ao mesmo tempo que o professor faz uma avaliação diagnóstica de sua turma.

Ainda como sugestão para a prática pedagógica que visa favorecer o desenvolvimento da comunicação e da modelagem, propomos substituir a ação de responder imediatamente aos estudantes pela ação de fazer novas questões, como: Você pode me explicar como pensou? Como você pode ter certeza de que sua resposta está correta? Será que o que vimos na aula ou o que está no livro-texto pode ajudar você? Que tal escrever do seu modo e depois discutirmos como escrever com a linguagem matemática? Isso desloca o estudante da posição passiva para a responsabilidade de pensar de novo, argumentar e avançar, partindo de questões mais simples que o levem a encontrar as respostas para questões mais complexas.

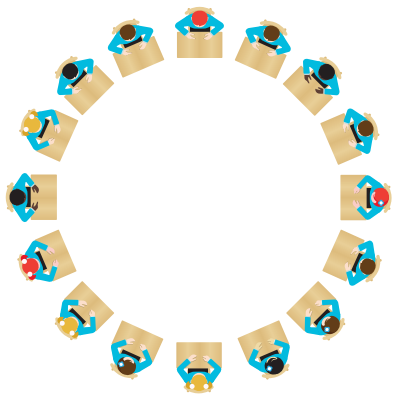
Maneiras de organizar a turma

A aula problematizadora e a aprendizagem colaborativa requerem pensar a organização do espaço na sala de aula, o que, segundo Miguel Arroyo (2004, p. 207), é "a materialização das concepções e práticas inovadoras de educar". Pensar a escola é pensar em um espaço, pois é por meio das relações, reações, vivências e convivências nesses ambientes que professores e estudantes se formam juntos. A organização das carteiras de maneiras distintas em sala de aula tem como objetivo melhor atender às necessidades diversas dos estudantes, promover interações mais significativas e facilitar métodos de ensino mais dinâmicos e participativos.

Organizar as carteiras em círculo ou em U, por exemplo, permite que todos os estudantes se vejam e se ouçam bem, facilitando discussões em grupo e a colaboração e o compartilhamento de ideias. Isso não apenas enriquece a experiência de aprendizagem, mas também ajuda a desenvolver habilidades sociais e comunicativas essenciais para o sucesso dentro e fora da sala de aula. Outra opção para trabalhos em grupo ou para projetos colaborativos com mais de quatro estudantes é organizar as carteiras em ilhas ou em grupos menores, para fomentar um ambiente mais cooperativo. Para atividades que exigem foco individual, como testes ou tarefas de escrita, a organização das carteiras em filas ou em L pode ser mais adequada para reduzir distrações e aumentar a concentração. Observe a seguir a representação de algumas dessas disposições.

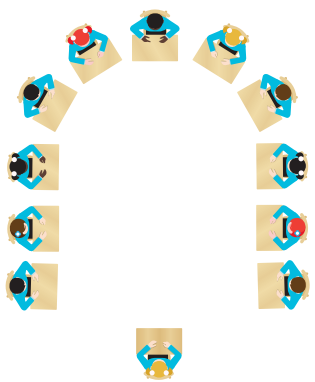
Em círculo

É adequada para debates, discussões em grupo e atividades de compartilhamento.


ID/BR

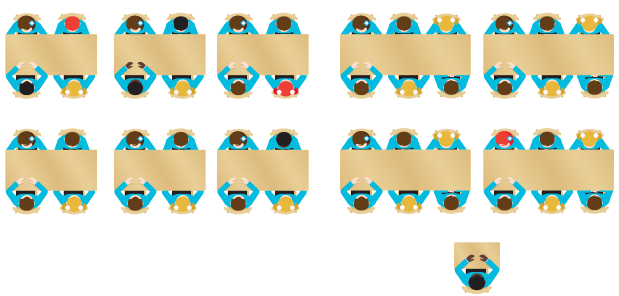
Em forma de U

É apropriada para aulas expositivas, discussões e apresentações, permitindo uma boa interação com o professor.


ID/BR

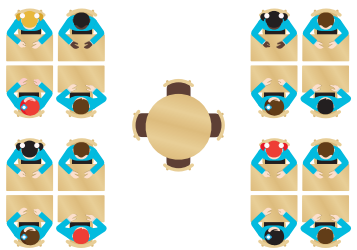
Em grupos ou ilhas

Facilita a realização de projetos e atividades em grupo.


ID/BR

Em estações

É indicada para a aprendizagem baseada em centros de interesse, projetos e rotação por estações.


ID/BR

A flexibilidade na organização das carteiras permite que os professores adaptem o ambiente de acordo com os objetivos específicos de cada aula ou atividade. Essa adaptabilidade é crucial em um mundo educacional em constante mudança, onde as metodologias e as abordagens pedagógicas estão sempre evoluindo para melhor atender às necessidades dos estudantes.

Há, ainda, a possibilidade de utilizar espaços externos à sala de aula, de modo que os estudantes possam experimentar diferentes arranjos em um ambiente mais dinâmico e inclusivo.

A modelagem e a linguagem matemática no Ensino Médio

A aquisição da linguagem matemática é parte importante da construção de modelos para explicar fenômenos ou para estudar ou aplicar uma propriedade.

Uma das competências que se esperam dos estudantes que terminam o Ensino Médio é o domínio das linguagens. Em Matemática, a meta é que o estudante seja capaz de ler, interpretar e produzir textos específicos dessa área. De fato, se tomarmos como propósito que o estudante continue aprendendo após a escola básica, que utilize o que aprendeu para enfrentar situações e problemas da vida real e que produza conhecimentos, a capacidade de comunicar-se matematicamente é um fator que adquire cada vez mais importância ao longo desse percurso.

A Matemática dispõe de um sistema notacional próprio, construído ao longo da história para representar ideias e conceitos. Assim, quando escrevemos algo como $\text{sen}x = 1$ ou $\text{sen}x > 1$, para compreender o que as frases significam não basta lê-las em língua materna ("seno de x é igual a um" ou "seno de x é maior que um"), visto que há noções, conceitos e procedimentos implicados nessa escrita:

- saber o que exatamente significa $\text{sen}x$;
- entender que o símbolo x representa um valor desconhecido ou indeterminado;
- compreender que o sinal de igualdade ou de desigualdade nessas expressões indica que há algo a ser calculado, mas que, ainda que haja alguma "semelhança" entre as escritas, o uso de $=$ ou $>$ modifica significativamente a natureza da resposta que se busca;
- realizar os cálculos indicados;
- saber interpretar os resultados em um contexto específico e expressar a resolução encontrada seguindo as regras que norteiam a escrita matemática.

Pelo exemplo, é possível perceber que um componente essencial da linguagem matemática é que ela apresenta terminologia e simbologia próprias, que, especialmente no Ensino Médio, são de uso quase exclusivo da escola e da ciência. Certamente, para ler os textos em Matemática e para falar sobre essa área do conhecimento, nos valemos da Língua Portuguesa. No entanto, até mesmo essa leitura não implica uma transposição imediata, uma vez que há termos que, no dia a dia, têm sentidos bem diferentes de seu uso em Matemática, como é o caso de agudo, plano, módulo, grau, diferença, expoente, função ou total. Isso sem falar nas palavras que quase não são mencionadas fora da escola, como cotangente, polinômio e subtraendo.

É comum considerar que, ao ingressar no Ensino Médio, o estudante já tenha fluência na representação e na comunicação matemática por ter cursado o Ensino Fundamental. Também é frequente que se atribuam as dificuldades sentidas pelo estudante para ler e interpretar textos de Matemática a uma baixa fluência na leitura e na interpretação de textos em Língua Portuguesa. Mas, de maneira geral, não é isso que ocorre.

Por outro lado, por melhores que tenham sido as aulas de Matemática no Ensino Fundamental, elas não terão sido suficientes para desenvolver no estudante a competência da comunicação matemática. Ainda que uma parte dessa compreensão tenha se iniciado nos anos escolares anteriores, o estudante precisará do tempo do Ensino Médio para continuar aprendendo a se comunicar matematicamente e ampliar seu repertório.

Considerando que, de modo geral, o contato dos estudantes com a linguagem matemática se dá primariamente na escola e que essa linguagem tem características muito particulares, dominá-la não é simples, e as aulas de Matemática precisam ter espaço para que o estudante se aproprie cada vez mais das formas específicas de expressão nessa área do conhecimento. Para isso, é importante que:

- haja análise e discussão de diferentes representações matemáticas (convencionais ou criadas pelos estudantes), o que é possível, por exemplo, com a elaboração de um painel com diferentes representações para uma dada situação-problema;
- ocorram momentos para discutir os diferentes significados de um símbolo matemático, nos quais o professor – usuário fluente da comunicação matemática – interaja com os estudantes e seja exemplo para eles;
- sejam analisados erros nas escritas produzidas em sala de aula, de modo que os estudantes percebam o que é válido, ou não, em uma escrita matemática;
- haja momentos de leitura de textos matemáticos, para que os estudantes tenham contato com uma escrita matemática produzida por um escritor mais experiente;
- ocorram discussões com base no que os estudantes sabem de expressões matemáticas, para ampliar a compreensão a partir desse levantamento inicial;
- sejam usados dicionários nas aulas de Matemática;
- haja rodas de conversa sobre enunciados de problemas ou termos matemáticos sobre os quais os estudantes tenham dúvidas;
- os estudantes sejam incentivados a escrever uma explicação para um termo ou uma expressão da Matemática;
- haja análise do uso de uma mesma palavra em Matemática e em um contexto não matemático (por exemplo: Onde mais você já ouviu a palavra "domínio"? Que outros significados você conhece para a palavra "diferença" que não seja o da subtração? O que significa "face" em Geometria e fora dela?);
- os estudantes sejam incentivados a identificar em que contextos não matemáticos utilizam certas ideias matemáticas, como a ideia de função.

Essas estratégias favorecem a criação de um ambiente de comunicação matemática e contribuem para o aprimoramento do estudante com relação às regras que orientam as representações matemáticas. Afinal, como se sabe, o domínio de uma linguagem implica saber pensar nessa linguagem, e isso só ocorre quando vivemos em um ambiente que propicia e demanda tal forma de pensamento.

Atividades de pesquisa: investigação e integração

Trabalhos relacionados à pesquisa e à investigação favorecem novas aprendizagens; permitem que os estudantes ordenem conceitos e habilidades previamente dominados de modo a atingir um objetivo; possibilitam ações de planejamento e o desenvolvimento de estratégias de execução; requerem organização, gestão de tempo, análise de limites e possibilidades de ação, tratamento de informações e avaliação das ações empreendidas. Exigem, ainda, cooperação e esforço pessoal, constituindo-se em um verdadeiro exercício de autonomia.

A seção ***Matemática e...*** apresenta a maioria das propostas de pesquisa para a formação integral dos estudantes. Diferentemente da pesquisa acadêmica, que tem por objetivo a produção de novos conhecimentos, a pesquisa escolar até pode gerar novos conhecimentos, mas trabalha também com a reconstrução de conhecimentos já disponíveis e sempre visa à aprendizagem de procedimentos e ao desenvolvimento de habilidades. Buscar, selecionar, tratar, analisar, (re)publicar, redistribuir e remixar informações e conceitos são algumas das muitas habilidades necessárias para o desenvolvimento desse processo.

A pesquisa envolve o acesso a uma diversidade de fontes e à leitura de gêneros variados. Em breves orientações ao longo do Livro do Estudante, e em especial na seção ***Palavras-chave***, esta coleção propõe o uso de comandos como grifar, anotar e fazer sínteses, resumos, mapas mentais, entre outros, de tal maneira que os estudantes possam determinar, registrar e organizar ideias, informações, propriedades e outros pontos de interesse. Nesse processo, espera-se que eles aprendam procedimentos de paráfrase e de citação/menção ao discurso do outro (no caso, o discurso presente no texto de cada capítulo).

Tudo isso compõe um conjunto de ações didáticas e de expectativas de aprendizagem que não combina com o simples "recorta e cola" ou a cópia, mas, sim, com a formação do estudante como produtor de conhecimentos com autonomia e confiança em sua capacidade de aprender.

Ao longo da coleção, por exemplo, em algumas das seções ***Matemática e...***, ***Tecnologia*** e ***Palavras-chave***, bem como em algumas atividades, há sugestões e orientações de projetos de criação ou de construção, pesquisas de opinião, pesquisas visando à melhoria de condições ou à resolução de problemas na escola ou na comunidade, além de propostas que visam analisar como modelos matemáticos podem ajudar a resolver problemas cotidianos. Essas propostas permitem integração com as áreas de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. A área de Linguagens pode contribuir com a adequação e a qualidade da produção dos estudantes, dependendo de como essa produção deva ser apresentada.

TECNOLOGIA E PENSAMENTO COMPUTACIONAL

Na BNCC, encontramos uma referência explícita e aprofundada à participação cada vez maior das tecnologias digitais e da computação na vida de todos – no ambiente de trabalho, na escola, em casa, etc. Considerando as diferentes dimensões que caracterizam a computação e as tecnologias digitais – pensamento computacional, mundo digital, cultura digital (Brasil, 2018a) –, a BNCC descreve os conhecimentos, as habilidades, as atitudes e os valores esperados em cada uma dessas perspectivas, desde as competências gerais até os desdobramentos em habilidades em cada área do conhecimento.

Assim, em Matemática é preciso considerar o valor dos recursos tecnológicos para uma formação mais alinhada ao que se espera dos estudantes do século XXI. Celulares, calculadoras, computadores, com todos os seus recursos, inclusive os de Inteligência Artificial, podem ser incorporados às estratégias didáticas nas aulas de Matemática com os seguintes objetivos: favorecer a participação ativa dos estudantes; permitir fácil e rápido acesso a diversas fontes de informação; possibilitar a articulação do texto escrito com imagem, som e movimento; facilitar a simulação de situações e o desenvolvimento de habilidades, como selecionar, organizar e analisar as informações, para utilizá-las adequadamente; auxiliar na abordagem de novas ideias e conceitos; entre outros. A seção ***Tecnologia*** deste livro assume o compromisso de trazer as máquinas e alguns de seus recursos para a aprendizagem de Matemática, visando à maior inserção dos jovens do Ensino Médio no mundo digital, com suas maneiras de acessar, produzir e comunicar informações.

No Livro do Estudante, está presente também o boxe ***Para explorar***, que amplia as possibilidades de abordagem com sugestões de textos, *sites* e vídeos para que o estudante vivencie diferentes tecnologias e os conteúdos de diversas manifestações culturais relacionados ao tema em estudo, de modo que ele possa se posicionar em relação a esses conteúdos de modo fundamentado, tendo como ferramentas os conhecimentos adquiridos no próprio livro.

No entanto, tratando-se da área de Matemática, é preciso ir além. A tecnologia pode desenvolver algumas maneiras próprias de pensar, marcadas pelo raciocínio algorítmico e pela linguagem específica da tecnologia computacional utilizada para descrever processos regrados por etapas bem definidas. Entre esses recursos de linguagem estão os fluxogramas e os algoritmos destacados nas habilidades da BNCC para descrever o processo de resolução de problemas. Ou seja, o desenvolvimento do pensamento computacional extrapola o uso de quaisquer aparelhos. Como esclarece a pesquisadora Jeannette Wing:

> é o processo de pensamento envolvido na formulação de um problema e na expressão de sua(s) solução(ões) de tal forma que um computador – humano ou máquina – possa executá-la(s) (Wing, 2014, tradução nossa).

Em outras palavras, o pensamento computacional pode ser entendido como uma habilidade e um processo para identificar e resolver problemas, de modo que a solução proposta possa ser executada por um computador. Para isso, são utilizados conceitos e práticas comuns à computação (mas não restritos a ela), como a simplificação de situações-problema a partir da identificação de seus elementos essenciais e de similaridades com contextos anteriores (também definida como abstração), a decomposição de problemas em partes menores e a definição de sequência de ações para a realização e automação de tarefas (Grover; Pea, 2013).

Nesse sentido, lembrando que a problematização é a metodologia que favorece diferentes maneiras de pensar, compreender e analisar um mesmo problema, a aliança entre tecnologia e resolução de problemas colabora para o desenvolvimento das seguintes habilidades que compõem o pensar computacional:

- formulação de problemas;
- análise de dados de forma lógica e organizada;
- representação da realidade por meio de abstrações;
- proposição de soluções por meio de identificações e análises críticas dos problemas;
- transferência da solução encontrada para a resolução de problemas análogos.

Compreendendo a lógica que aproxima a resolução de problemas ao pensamento computacional, esta coleção assume intencionalmente experiências didáticas para que esse modo de pensar possa cada vez mais integrar a formação dos estudantes do Ensino Médio, tornando-os aptos a intervir de forma cidadã no meio em que vivem. Como exemplos dessas práticas, temos: a análise necessária para identificar padrões em situações-problema, estabelecendo relações entre os exemplos dados na seção ***Problemas e exercícios resolvidos*** e as atividades da seção ***Problemas e exercícios propostos***; a identificação de características de problemas na ***seção Por dentro do Enem e dos vestibulares***; e o encadeamento de processos como o de construção de gráficos de funções ou estatísticos.

ARGUMENTAÇÃO E NÍVEIS INFERENCIAIS DE LEITURA

Compreender a linguagem é entender as relações entre o que está explícito no texto e aquilo que o leitor pensa, conclui e infere por conta própria, com base em seu conhecimento de mundo e em suas experiências de vida. Fazer inferências possibilita ao leitor refletir e gerar novos conhecimentos com base em informações presentes no texto, que passam a fazer parte do conjunto de saberes desse leitor e se tornam a base para suas argumentações. A capacidade de realizar uma leitura em níveis inferenciais é uma característica essencial para a compreensão da linguagem, pois assim, do mesmo modo que o leitor memoriza as informações óbvias no texto, ele também incorpora em si as informações inferidas.

A inferência é um processo cognitivo que vai além da leitura e passa pelo entendimento ou pela suposição de algo desconhecido, fundamentado na observação e no repertório cultural do leitor. Trata-se, então, da conclusão de um raciocínio ou do levantamento de um indício com base no estabelecimento de relações.

A compreensão de um texto depende da qualidade e da quantidade de inferências geradas durante a leitura, visto que os textos contêm informações explícitas e implícitas, sempre deixando lacunas a ser preenchidas pelo leitor. Ao associar informações explícitas a seus conhecimentos prévios, o estudante dá sentido ao que está sendo dito no texto e pratica a apreensão de detalhes, sequências e relações de causa e efeito. Portanto, a inferência ocorre com a interação do leitor com o texto, ou seja, por meio da leitura.

As capacidades de concluir, deduzir, levantar hipóteses, ressignificar informações, formular novos sentidos e argumentar de modo consistente são essenciais para a atuação consciente e responsável do jovem na sociedade, já que assim ele estará preparado para entender contextos históricos, compreender o que está por trás de uma disputa política ou mesmo projetar soluções para problemas reais e cotidianos. Ao gerar uma nova informação partindo de uma anterior, o estudante desenvolve sua capacidade de "ler" os diversos pontos de uma situação e de propor resoluções factíveis que beneficiem a maioria dos envolvidos.

Em sala de aula, o exercício da leitura inferencial e o desenvolvimento da argumentação podem ser feitos de diversas maneiras, tanto na abordagem dos conteúdos como na execução das atividades. É possível formular perguntas que motivem o estudante a antecipar informações e verificar se suas hipóteses são plausíveis, instigando-o a acessar seus conhecimentos prévios nesse processo. Pode-se levar o estudante a explicar o que está implícito em um texto, a preencher lacunas de informação com base em pistas já dadas e a excluir ou confirmar hipóteses levantadas durante a leitura.

Por isso, em diversas seções e textos nas orientações no Livro do Estudante, sugerimos a leitura individual pelo estudante, seguida de discussão com os colegas e o professor do que foi compreendido, o que inclui sanar dúvidas. Assim, propomos o trabalho colaborativo, o painel de soluções e as apresentações das conclusões de pequenos projetos em Matemática como estratégias privilegiadas para o exercício da argumentação.

O PAPEL PRIVILEGIADO DO PROFESSOR

Para que todos os pressupostos apresentados aqui atinjam o propósito de garantir a formação integral dos estudantes enquanto aprendem Matemática, é essencial a ação do professor com uma adequada gestão da aula. Afinal, é no espaço escolar que todas as intenções pedagógicas têm a chance de se tornarem realidade. A mediação focada na aprendizagem de todos vê a aula como processo de interação em que todos devem ser acolhidos e participantes. Por isso, o planejamento das aulas é fundamental para que a escolha das atividades propicie boas experiências de aprendizagem aos estudantes.

No livro *Mentalidades matemáticas* (Boaler, 2018), ao apresentar os resultados de um trabalho de pesquisa prolongado com estudantes em risco de fracasso escolar em Matemática, a pesquisadora estadunidense Jo Boaler afirma que, depois do professor, as tarefas propostas na aula são o recurso mais importante para que os estudantes aprendam Matemática.

As pesquisas conduzidas por Boaler mostram que as propostas didáticas de uma aula ajudam a desenvolver mentalidades matemáticas de crescimento e a criar condições para uma compreensão profunda dos conceitos e dos procedimentos matemáticos.

Para saber se a atividade que se está propondo vai ajudar o estudante a aprender, é preciso compreender o que se deseja

ensinar. Então, um bom planejamento, com objetivos bem definidos, é essencial. Um segundo ponto a ser levado em consideração é que a atividade proposta combine duas ou mais das seguintes características: possibilidade de despertar curiosidade e engajamento intelectual; permitir conexões entre temas próprios de Matemática (por exemplo, entre Álgebra e Geometria); envolver colaboração entre pares; e ser desafiadora.

Jo Boaler afirma ainda que **desafio**, **engajamento**, **curiosidade**, **criatividade** e **colaboração** são elementos essenciais para aulas produtivas em Matemática.

Propostas mais elaboradas, como o desenvolvimento de um projeto ou até mesmo a aprendizagem de um novo conceito ou procedimento, não podem ser feitas sem o devido cuidado do professor, desde a escolha do conteúdo até a maneira como a proposta será apresentada aos estudantes, considerando as particularidades e capacidades encontradas em sua turma. O olhar do professor para cada estudante e a escuta atenta do que lhe é dito, buscando entender a razão de cada pergunta, de cada desvio de rota e de cada erro, evidenciam a presença de um educador que busca a formação de pessoas reais, sem idealizações (que em nada contribuem para a aprendizagem efetiva).

O professor preparado para as demandas geradas para a formação integral dos estudantes precisa, assim como eles, estar aberto para aprender e se posicionar criticamente em relação ao que se sabe hoje sobre currículo, aprendizagem, natureza e ensino do conhecimento matemático e de sua aplicabilidade, bem como sobre políticas educacionais do país e de sua região. Nesta coleção, nossa contribuição está nas seções deste manual e na ***Bibliografia comentada*** ao fim deste volume, que buscam explicitar as razões das escolhas e a melhor maneira de utilizar este livro com seus estudantes.

PLANEJAR E AVALIAR EM MATEMÁTICA

O trabalho nos diferentes espaços e momentos de ensino na escola está diretamente associado à gestão do complexo ambiente da sala de aula. Ele exige planejamento e saber lidar com imprevistos que surgem na dinâmica de cada turma. Gerenciar essas questões com sabedoria para resolver impasses transforma cada aula em um momento de aprendizagem tanto para o estudante quanto para o professor.

Embora o planejamento seja fundamental para a aprendizagem efetiva e para o processo de avaliação, ele não pode ser rígido, mas, sim, um instrumento orientador da gestão da aula. Deve ser um norte que sinalize os conhecimentos que serão trabalhados, as diferentes habilidades a serem desenvolvidas pelos estudantes, as atividades idealizadas e os instrumentos para avaliar o que foi de fato construído na realização das atividades propostas.

A base para o planejamento das aulas é o currículo da rede em que cada unidade escolar está inserida. É ele que apresenta a fundamentação para um processo educacional que será vivenciado na escola, visando à formação integral dos estudantes. Tendo-o como norteador, o professor detalha a rota, estabelece objetivos de ensino, determina tempos, espaços e processos. Planejar significa, portanto, organizar e racionalizar a ação docente visando à articulação entre a prática da sala de aula e as problemáticas inerentes ao contexto social e cultural em que a escola está inserida.

É importante que, para cada caso, o professor considere em seu planejamento de aula pontos como: O que se quer ensinar? O que se espera que os estudantes aprendam na aula? Que recursos serão utilizados? Quanto tempo de aula deve estar disponível? Como será feita a organização dos estudantes no espaço da sala? Como iniciar a aula? O que os estudantes farão durante a aula? Como os estudantes vão elaborar seus registros? Como será a finalização da aula? O que será feito como avaliação da aprendizagem dessa aula?

Um aspecto que precisa ser cuidadosamente considerado no planejamento é a escolha das habilidades de aprendizagem que estarão no foco de cada aula, pois são elas que orientam aonde se quer chegar com o processo planejado e, consequentemente, a avaliação da aprendizagem.

Outro desafio é o ensino em salas de aula com muitos estudantes, onde é provável que haja grupos com necessidades e características diversas, sendo necessário planejar uma mesma atividade, ou atividades específicas para cada um desses grupos.

Esta coleção procura auxiliar nessa tarefa de gestão da aula com comentários direcionados ao professor ao longo do Livro do Estudante, propondo:

- a leitura de textos introdutórios e dos problemas resolvidos de cada capítulo de diferentes maneiras: leitura individual e discussão coletiva ou em grupos; leitura compartilhada, em que cada estudante lê uma parte do texto e outro explica o que compreendeu; leitura pelo professor como modelo de leitura de texto matemático; leitura com destaque das ideias centrais ou anotação dessas ideias com as palavras dos estudantes;
- a resolução dos problemas propostos em grupos produtivos, organizados em função de seus conhecimentos ou dificuldades, de modo que o professor possa acompanhar mais de perto um ou dois desses grupos;
- o uso do painel de soluções, que, como descrito anteriormente, é um recurso valioso para a aprendizagem de estratégias, maneiras diversas de registro e de pensamento, que ocorre pela análise coletiva da resolução ou produção de um colega, e pode ser proposto na análise das resoluções dos estudantes em cada seção ***Problemas e exercícios propostos***;
- pesquisas em grupo, com diferentes contribuições e níveis de aprofundamento, de acordo com os conhecimentos dos estudantes, como proposto na seção ***Matemática e...***;
- a abordagem da seção ***Para recordar*** não só como um momento de retomada, mas também como um roteiro de estudo em função das dificuldades apresentadas por alguns estudantes;
- a motivação dos estudantes que têm em seu projeto de vida o Ensino Superior, investigando algumas propostas de questões de provas seletivas de universidades e aplicando os conhecimentos deles na seção ***Por dentro do Enem e dos vestibulares***;
- indicações no boxe ***Para explorar***, que traz uma diversidade de possibilidades para os estudantes ampliarem seus conhecimentos;
- as propostas da seção ***Tecnologia***, em que todos, independentemente de seus saberes, podem rever ou aprofundar a Matemática ao aprender a utilizar planilha eletrônica, calculadora, *software* de geometria dinâmica e outros recursos.

Outra função importante do planejamento é apoiar o professor na avaliação de sua gestão da aula. Após a implementação do que foi pensado, o professor pode reconhecer os pontos positivos e os que precisam ser mais bem elaborados, como: O planejamento proposto abrangeu todas as questões relevantes? Os recursos providenciados foram adequados? Os objetivos da aula e as expectativas em relação aos estudantes foram explicitados? Foram feitas perguntas que mobilizaram aprendizagens? Algumas perguntas deveriam ser alteradas? Se sim, quais? Esses registros permitirão reflexões sobre o planejamento proposto e como foi desenvolvido. A análise é essencial para a qualificação de outros momentos de ensino-aprendizagem no decorrer das aulas em cada turma.

Ainda em relação à Matemática no Ensino Médio, a quantidade de aulas e o tempo mais prolongado podem ser utilizados para o alcance de cada habilidade, em uma crescente de aprendizagem a cada série. Isso significa que o planejamento para o desenvolvimento de cada competência e suas habilidades pressupõe um processo de aprendizagem sem a limitação usual de um bimestre ou um trimestre de ensino.

Além disso, não existe uma ordem de prioridade para o desenvolvimento das competências específicas e das correspondentes habilidades. Essa ordem será estabelecida pelo planejamento do professor, de acordo com os propósitos de seu plano ou das situações didáticas desenvolvidas com os estudantes e, de preferência, em **planejamento integrado** com todos os professores de Matemática e até mesmo com docentes das demais áreas, especialmente das áreas de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Ainda assim, há que considerar que alguns temas ou objetos de conhecimento são prévios a outros, servindo de ferramentas para aprendizagens mais complexas. Um exemplo disso são as funções do 1º grau e a geometria plana. Não se trata de uma ordem rígida, mas de uma sequência lógica, para que os conceitos e procedimentos se construam sobre bases sólidas e coerentes para novas aprendizagens. Apesar de alguns temas, como Estatística e Probabilidade, permitirem maior flexibilidade, eles não devem ser vistos como independentes de outras unidades temáticas, pois as funções, os números e algumas operações entre conjuntos também estão presentes nesses temas, embora pertençam a outra unidade temática. A percepção dessas relações não traz implicações apenas para o planejamento do professor: deve corresponder também à aprendizagem dos estudantes, uma vez que o estabelecimento de conexões entre conceitos, representações e procedimentos constitui aprendizagem mais aprofundada e desejável, como descrito nas competências específicas **3** e **4** da área de Matemática e suas Tecnologias.

Nas orientações para este livro, para as atividades do capítulo ou uma atividade específica estão descritos os objetos de conhecimento, as habilidades que se pretende desenvolver, as competências específicas da área de Matemática e suas Tecnologias e as competências gerais propostas pela BNCC. Encontram-se também as **expectativas de aprendizagem**, ou seja, o que se espera dos estudantes e que pode orientar a forma de ensino e a avaliação de cada um deles. Além disso, há uma sugestão de cronograma para um planejamento bimestral, trimestral e semestral, que pode ser adequado de acordo com a quantidade de aulas estabelecidas no ano letivo para a área de Matemática e suas Tecnologias. Todas essas indicações visam auxiliar na elaboração do planejamento das aulas com apoio deste material.

AVALIAÇÃO EM UMA PERSPECTIVA AMPLA

Planejar e avaliar são faces de uma mesma moeda, indissociáveis. A avaliação é, sem dúvida, um dos aspectos mais sensíveis e complexos de qualquer planejamento. Na perspectiva da formação integral, a avaliação passa a ser um instrumento de comunicação com o estudante, com os demais professores, com as equipes da escola responsáveis pela formação do jovem e até mesmo com a família.

A avaliação assume o papel de dialogar com o estudante, fornecendo-lhe informações como "isso é o que você sabe agora" ou "isso é o que você ainda não sabe", construindo com ele um projeto de progressão por meio de respostas a questões como: Como vamos seguir daqui para a frente? Com o que e como você se compromete? Como eu, professor, me comprometo e pretendo contribuir para isso? Esse diálogo estabelece um pacto de compromisso recíproco que desvia o foco da nota para o conhecimento e para o autoconhecimento, visto que cada jovem passa a ter consciência do que aprendeu e do que falta aprender, das competências que já desenvolveu e daquelas que serão foco de trabalho, em um ambiente de confiança, e não de mera cobrança.

Quando a avaliação é entendida como parte importante da formação integral dos estudantes, ela deixa de ser considerada uma simples nota atribuída ao final de um período de ensino (um bimestre ou um trimestre, por exemplo), quando cada estudante recebe um número ou um conceito como medida de aprendizagem. A nota, por si só, exclui muitos dos fatores determinantes do processo de aprender. O jovem, sua história, o momento das avaliações, os recursos e o tempo para o estudo individual e até mesmo o instrumento de avaliação utilizado podem ser fatores decisivos para uma nota, sem necessariamente corresponder ao que o estudante aprendeu de fato.

Além disso, um currículo alinhado com a BNCC, ou seja, pautado pelo desenvolvimento de competências e habilidades, visando ao aprofundamento e à consolidação das aprendizagens, não pode se sustentar em processos de avaliação pontuais e meramente numéricos. Ainda que gere uma nota, a avaliação deve corresponder ao projeto da escola no sentido da formação do estudante. Se há um projeto de educação e a escola assume seu papel formador, a avaliação deve sinalizar se o estudante está, ou não, alinhado ao projeto traçado para ele. Nesse sentido, a avaliação deve corresponder aos efeitos da escola na formação do jovem.

Na perspectiva da formação integral dos estudantes, a avaliação é o processo de coletar, organizar, sistematizar e interpretar dados e informações que ajudam a acompanhar o ensino e a aprendizagem e a tomar decisões a respeito do que fazer para planejar ou replanejar as ações do ensino para a aprendizagem. Esse processo se divide em três etapas: **diagnóstico**, **análise** e **intervenção**.

Um processo avaliativo efetivo da aprendizagem começa com a coleta de dados, ou seja, com um diagnóstico proveniente da observação e do registro do professor, além das diversas produções dos estudantes. Antes de atribuir uma nota ou de emitir qualquer parecer sobre o que o estudante aprendeu, ou não, o professor prossegue com a avaliação realizando a análise das informações coletadas, pautada pela reflexão sobre as aprendizagens esperadas, a atividade proposta e seu desenvolvimento. Essa análise possibilita o terceiro passo da avaliação, que corresponde à tomada de decisão sobre como continuar, o que retomar e como agir em face das aprendizagens dos estudantes. É a fase da intervenção. Completa-se, assim, o ciclo avaliativo.

A intervenção pode ser imediata, quando se identifica algo que os estudantes deveriam saber e essa lacuna pode impedir a continuidade de seu percurso de aprendizagem. Outras vezes, a análise e o planejamento permitem antever que o conhecimento ausente nesse momento pode ser retomado mais adiante em outro tema, tempo ou situação. Nesses casos, a intervenção é pensada e planejada, sem ser imediata. Algumas vezes a intervenção precisa ser realizada com toda a turma; em outras, deve ser aplicada a um grupo específico. Pode-se realizar uma retomada utilizando novos recursos ou elaborando planos de estudo para pequenos grupos, aproveitando recursos da tecnologia (como vídeos), tarefas e leituras.

A intervenção derivada da análise corresponde à recuperação em processo, entendida como um conjunto de ações necessárias para que o estudante se aproprie do conhecimento, e não para simplesmente recuperar o conteúdo. Essa abordagem da recuperação da aprendizagem é formativa no sentido de respeitar o fato de que nem tudo que se ensina é realmente aprendido e muito menos pode ser avaliado de imediato. Na perspectiva da formação integral, é preciso respeitar o tempo do estudante, uma vez que o tempo do ensino pode não ter sido suficiente para que ele aprendesse tudo o que precisava. Portanto, o professor precisa decidir se a avaliação do conteúdo, naquele momento, é justificável. O que não foi aprendido deve ser registrado e incorporado ao planejamento do professor nos próximos períodos de ensino.

Cada intervenção requer nova coleta de dados, um novo diagnóstico e a consequente análise de informações para determinar se a intervenção realizada foi efetiva ou precisa ser repensada. Dessa forma, completa-se o ciclo avaliativo, em constante retroalimentação em direção à aprendizagem de cada estudante.



Quando a avaliação visa à formação integral do estudante, as situações de **erro** são vistas como etapas do processo de aprendizagem. É essencial pensar a intervenção a partir dos erros: pesquisar o percurso que levou a um erro; analisar com o estudante o que falta aprender; ou os cuidados necessários para evitar novos enganos são ações que devem permear o processo de avaliação, uma vez que errar é inerente ao processo de aprender, tanto na escola

quanto na vida. O erro é corrigido quando se reflete sobre ele, e não pela simples eliminação da dúvida ou pela punição por algo que ainda não foi aprendido. Na proposta metodológica deste livro, evidenciamos o painel de soluções como um importante aliado para o trabalho consistente com o erro e para a construção de um ambiente propício à aprendizagem.

PARA EXPLORAR

Vídeo

A relação entre currículo e avaliação para promoção da aprendizagem. [*S. l.*: *s. n.*], 2021. 1 vídeo (18 min 17 s). Publicado pelo canal Instituto Reúna. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=V9jJREEjhfE&list=PLYVu0c7CEIRHvH_0N_VX0zfpI_37YydjR&index=6. Acesso em: 27 set. 2024.

No vídeo em inglês legendado em português, o especialista australiano Philip Lambert aborda a relação entre currículo e avaliação, aprofundando a reflexão sobre como construir estruturas avaliativas a partir dos currículos, evitando que elas se tornem instrumentos isolados das práticas pedagógicas.

SOBRE OS INSTRUMENTOS E AS MANEIRAS DE AVALIAR

Não existe processo de avaliação sem a coleta de dados para serem analisados; daí a importância dos instrumentos de avaliação, sua escolha e seus critérios de uso. A seleção e a elaboração de um instrumento de avaliação começam ainda durante o planejamento, quando o professor questiona: O que ensino? Por que ensino? Os estudantes podem aprender isso? Tais questionamentos já apontam para a necessidade de refletir sobre as ações didáticas a fim de garantir o aprendizado dos estudantes.

É importante que a avaliação forneça dados que possibilitem ao professor compreender o que foi aprendido, ou não, e fazer intervenções que permitam ao estudante avançar. Dessa forma, os instrumentos de avaliação podem guiar o olhar do professor nesse sentido. A variedade de instrumentos de avaliação favorece a individualização do processo de ensino e aprendizagem, permitindo que esta seja uma experiência que, embora se realize no coletivo, se torne única para cada estudante.

Há instrumentos a serem utilizados que estão mais diretamente relacionados à obtenção de dados pelo professor. Embora o estudante seja chamado a colaborar, é o professor que centraliza as ações de coleta e análise de dados. É o caso da observação e do registro, da análise da produção dos estudantes, das provas e da análise de erros, instrumentos que podem ser usados em vários momentos.

Na correção de uma tarefa ou de um trabalho em grupo, por exemplo, é possível observar e registrar o que os estudantes aprenderam e permitir que eles apresentem aos colegas suas resoluções, suas dúvidas ou suas imprecisões de linguagem. Essa dinâmica pode ser um bom contexto para uma intervenção ou um acompanhamento desses estudantes nas próximas atividades.

Há situações no próprio Livro do Estudante – quando se propõe ao estudante que organize o que aprendeu, elabore problemas, produza textos após atividades e analise problemas e exercícios com erros na resolução – que podem ser utilizadas com finalidade avaliativa, não necessariamente para que lhe seja atribuída uma nota, mas para obter dados e planejar intervenções. Nessa análise, a oralidade, os desenhos, os gráficos, os esquemas e as escritas pessoais são importantes para acompanhar as percepções e os avanços de cada um. Relembrando que o letramento matemático é uma meta na Educação Básica, avaliar a leitura, a escrita e a utilização da linguagem em diferentes contextos é tão importante quanto assegurar os objetos de conhecimento específicos.

A **autoavaliação** é outro instrumento que pode ser usado com a finalidade de atribuir ao estudante a responsabilidade de avaliar a si mesmo, incentivando a reflexão sobre sua participação e aprendizagem. Cabe ao professor garantir as condições para que esse instrumento cumpra seu objetivo, o que certamente gerará dados valiosos sobre os estudantes e o processo de ensino.

A autoavaliação pode começar de modo muito simples, e até mesmo com salas de aula com muitos estudantes, na forma de uma lista feita pelos estudantes ao final da aula, registrando o que consideram importante em suas aprendizagens. Essa lista pode ser lida por aqueles que o desejarem fazer, como aquecimento para a aula seguinte. O que for mencionado pelos estudantes pode ser registrado como aprendido, e o que não constar das listas precisa ser retomado.

Outro recurso é a **caixa de dúvidas**: os estudantes escrevem suas dúvidas em uma folha de papel e depositam-nas em uma caixa. De posse dessas informações, o professor pode fazer intervenções com a turma ou com alguns estudantes, dependendo do que considera melhor retomar. Esse tipo de instrumento fornece indícios da aprendizagem em processo, sem que seja preciso esperar uma prova, em um momento pontual, para identificar dúvidas e só então intervir.

Com o tempo, é possível propor autoavaliações mais estruturadas, incluindo as habilidades para o século XXI, mas não sem antes construir um ambiente de confiança, no qual os jovens possam falar de si, sem julgamento de valor.

O professor pode, por exemplo, planejar com a turma os itens que devem compor uma autoavaliação ou utilizar propostas do Livro do Estudante que têm essa função, como a seção ***Palavras-chave***.

A seção ***Por dentro do Enem e dos vestibulares*** também pode ser utilizada como instrumento de avaliação. O trabalho com essa seção será explicado mais adiante. Nela, são apresentados diferentes procedimentos de resolução de atividades de exames oficiais e, em seguida, propostas outras atividades que podem ser resolvidas com o uso da estratégia apresentada. Os registros feitos pelos estudantes podem servir de instrumento de avaliação de caráter preparatório para os exames de larga escala. Além disso, vale observar com atenção se os estudantes conseguem aplicar os conhecimentos adquiridos nessa seção na resolução das outras questões desse tipo distribuídas ao longo do volume nas seções ***Problemas e exercícios propostos***.

Esse trabalho pode ser complementado com simulados organizados pelo professor para que os estudantes estejam preparados não apenas em termos de conteúdo, mas também para que eles vivenciem o ambiente e o clima em que essas provas acontecem. No primeiro momento em que os estudantes forem viver uma experiência como essa, transmita a eles orientações como as indicadas a seguir e, sempre que possível, reforce-as.

- Identifique e resolva as questões mais fáceis primeiro. Dessa maneira, você resolve o maior número possível de atividades no tempo estipulado.
- Identifique as questões médias e difíceis para voltar a elas depois.
- Não perca muito tempo tentando resolver uma questão que exige um conceito do qual você não se recorda no momento. Passe para outra atividade e, depois, retome as questões que ficaram para trás. Ao lidar com outras atividades, você pode se lembrar dos conteúdos necessários para resolver essas questões.
- Se as questões exigirem a leitura de textos, primeiro leia a pergunta e, depois, leia o texto com o olhar direcionado. Dessa maneira, você consegue identificar as respostas enquanto realiza a leitura e interpreta o texto.
- Controle o tempo de resolução das questões para que, se você considerar necessário, possa fazer uma pausa e voltar renovado para resolver as demais questões.

O último instrumento é o **portfólio**, uma maneira de documentar os trabalhos realizados pelo estudante, como pesquisas, gráficos, textos, problemas resolvidos, etc., e arquivá-los em uma pasta. O portfólio pode ser entendido como um articulador dos demais instrumentos de avaliação, pois sua organização, realização e utilização o tornam o representante mais adequado para fazer da avaliação um processo compartilhado entre professor e estudante.

Em outra direção, é preciso reconhecer que todo professor deve observar seus estudantes. Trata-se, então, de validar essa **observação** em um instrumento concreto. Um caderno físico ou um arquivo virtual pode conter essas observações, para ser utilizado em momentos de análise pelo professor ou para confrontar

suas percepções com as dos estudantes em suas autoavaliações, produções e provas. Breves anotações e comentários sobre a aula podem apoiar intervenções mais assertivas e intencionais.

Nessa perspectiva, o essencial é a decisão de colocar a avaliação a serviço do processo de aprendizagem. Isso faz com que os diversos instrumentos utilizados se organizem em torno de atividades que tenham sentido e relevância para o estudante, em detrimento de exercícios pontuais e artificiais. Dessa maneira, a avaliação se torna, simultaneamente, uma situação de ensino e de aprendizagem.

A meta desse processo de planejamento e avaliação é que os registros do professor, em conjunto com os de seus estudantes, componham a trajetória do trabalho realizado, iluminem o caminhar, criem a memória da vida do grupo e de cada estudante em particular e legitimem as decisões tomadas para a aprendizagem de todos.

Vale ressaltar que grupos numerosos de estudantes podem apresentar desafios para diagnósticos e acompanhamentos individuais, mas favorecem o debate e a troca de ideias. Nesse caso, é proveitoso que os estudantes participem da organização das discussões coletivas ou em grupo em diversos momentos ao longo da coleção. Durante essas vivências, é possível avaliar a interação entre os estudantes e o empenho e o comportamento de cada um deles.

Além disso, é importante promover e favorecer a aprendizagem de estudantes com diferentes perfis e modos de aprender – uma vez que eles são o centro da ação pedagógica – com várias oportunidades para serem protagonistas na aquisição de seus conhecimentos. Os estudantes vivenciam situações diversas que permitem identificar suas potencialidades, suas dificuldades, seus repertórios prévios e suas preferências. Nesse contexto, é possível que todos os estudantes sejam valorizados e acolhidos, porque podem experimentar os fazeres propostos, tendo o professor como mediador de seu processo de aprendizagem e os colegas como parceiros nessa construção.

É fundamental realizar uma avaliação continuada dos estudantes e promover a colaboração entre educadores e educandos, incentivando-se uma postura ativa de ambas as partes no processo de ensino e aprendizagem. Assim, criam-se condições para que o professor possa identificar, combater e, principalmente, prevenir comportamentos que coloquem em risco a saúde mental dos estudantes, como mediador em ocorrências de *bullying* e em ações de prevenção à violência autoprovocada. Além de promover discussões sobre o assunto, é fundamental que os educadores saibam identificar situações de calúnia, constrangimento e ameaça verbal ou física, incentivando o respeito mútuo, a empatia entre os estudantes, o autocuidado e a valorização da vida. Os estudantes precisam se sentir amparados pelos adultos, ter seus problemas reconhecidos e ouvidos e, se necessário, ser encaminhados a um profissional da área da saúde.

O papel do educador é estar alerta, ser empático e contribuir para que os estudantes se sintam emocionalmente confiantes e preparados para lidar com os desafios. Também pode desempenhar um papel na resolução dos conflitos e na conciliação dos envolvidos. Ao proporcionar um ambiente emocionalmente seguro, respeitoso e de confiança entre os estudantes, os educadores podem promover a convivência pautada pela ética e por atitudes e valores essenciais para a vida em sociedade. Com isso em mente, é possível orientá-los sobre a importância do autorrespeito, do respeito ao próximo, da consciência e da responsabilidade em relação aos próprios atos, bem como da necessidade de se colocar no lugar do outro.

Para obter mais informações sobre como prevenir e mediar o *bullying* na escola e evitar ações de violência autoprovocada, os educadores podem procurar cartilhas elaboradas pela Organização Mundial da Saúde (OMS), pela Ordem dos Advogados do Brasil (OAB) e pelo Centro de Valorização da Vida (CVV).

MODELOS AVALIATIVOS

Como foi apresentado anteriormente, a avaliação é o processo de coletar, organizar, sistematizar e interpretar dados e informações que ajudam a acompanhar o processo de ensino e aprendizagem e a tomar decisões sobre o que será necessário fazer para planejar e replanejar as ações de ensino e aprendizagem. Em estreita relação com o que se deseja que os estudantes aprendam, a avaliação tem diferentes funções e é um importante instrumento de regulação das relações entre estudantes e educadores e do processo de ensinar e aprender e um poderoso instrumento de comunicação. A finalidade do processo avaliativo é sempre garantir que as aprendizagens aconteçam. Toda avaliação tem caráter orientador e deve estar associada à garantia de que os estudantes avancem em sua trajetória escolar aprendendo o que se espera no ano em que se encontram.

Há diferentes tipos de avaliação com finalidades distintas e complementares, visando apoiar o professor a tomar suas decisões. Vamos tratar dos modelos diagnóstico, formativo, somativo, comparativo e ipsativo.

Avaliação diagnóstica ou inicial

A **avaliação diagnóstica ou inicial** é utilizada antes do início do processo de ensino para identificar os conhecimentos prévios, as habilidades e as necessidades dos estudantes. Ela costuma ser aplicada no início do ano, mas conceitualmente toda avaliação pode ser considerada diagnóstica e, em essência, todo processo de ensino que se inicia deveria ter um momento em que os estudantes pudessem utilizar seus conhecimentos prévios e reconhecer o que sabem a respeito daquilo que aprenderão.

Esse tipo de avaliação tem como objetivo identificar pontos fortes e fracos dos estudantes antes de se iniciar um novo ano, uma unidade do livro ou um conceito, permitindo um planejamento mais eficaz do ensino. Por exemplo, se o professor vai iniciar um capítulo que trata de Estatística, é interessante propor aos estudantes que escrevam o que sabem a respeito de gráficos e tabelas, uma vez que esses elementos são essenciais para o estudo. Isso servirá para eles como "aquecimento" e dará ao professor uma ideia do que precisará retomar e quão profunda, ou não, deverá ser essa retomada. Os estudantes podem fazer isso em grupo ou produzir uma apresentação de *slides* ou, ainda, citar exemplos.

A avaliação diagnóstica não precisa ser longa e pode ser realizada por meio dos seguintes recursos:

- **Entrevistas individuais** com os estudantes, para discutir seus conhecimentos prévios e identificar áreas de dificuldade.
- **Questionários**, com a utilização de plataformas *on-line*, para diagnosticar as habilidades e os conhecimentos da turma antes de iniciar uma nova unidade do Livro do Estudante.

Prefira avaliações diagnósticas mais curtas, porém frequentes, considerando apenas os conhecimentos pregressos necessários para trabalhar um tema de um mês ou do primeiro trimestre letivo, por exemplo. Isso permite fazer um plano mais focado do conteúdo que precisa ser retomado de imediato. Muitas vezes, o aquecimento inicial e as aulas posteriores tornam desnecessárias grandes revisões iniciais. O texto introdutório e as primeiras atividades do Livro do Estudante podem servir para criar um teste diagnóstico. Elabore questionários com base em tópicos principais do Livro do Estudante dos quais a turma já deveria ter se apropriado.

Avaliação formativa

A **avaliação formativa** é realizada durante o processo de ensino e aprendizagem e tem como objetivo acompanhar o progresso dos estudantes, fornecendo *feedback* contínuo que possibilite melhorar esse processo. Essa avaliação é feita pelo professor e pelos estudantes, pode contar com diversos instrumentos e redireciona continuamente o planejamento. As informações obtidas pela avaliação formativa, portanto, ajudam o professor e os estudantes a identificar áreas que necessitam de melhoria e ajustar o ensino e a aprendizagem em tempo real.

Os instrumentos da avaliação formativa podem incluir, por exemplo: a própria produção dos estudantes durante a aula; pequenas atividades ao final da aula para verificar se a principal ideia desenvolvida foi aprendida, ou não (e, assim, identificar o que eventualmente é necessário retomar na aula seguinte); momentos de autoavaliação dos estudantes. Os instrumentos de avaliação podem divididos em algumas categorias:

- **Observação e registro** – Consiste no registro das observações constantes que o professor faz dos estudantes nas situações de aula, bem como de suas próprias impressões sobre as aulas. Em um caderno, o professor pode organizar um diário de bordo e fazer anotações que o ajudem na tomada de decisões a respeito de suas aulas e apoiem o aprendizado de seus estudantes.
- **Avaliação entre pares** – Constituem sessões de revisão entre pares, nas quais os estudantes avaliam o trabalho dos colegas e fornecem *feedback* sobre isso, por exemplo, com a troca de cadernos entre eles, para que corrijam as atividades uns dos outros, ou pela leitura da seção ***Palavras-chave***.
- **Provas** – Esse instrumento é adequado para avaliar procedimentos específicos, a capacidade do estudante de organizar ideias, sua capacidade de expressão e sua habilidade de apresentar soluções originais. É possível propor provas com consulta ou sem consulta, em duplas ou em grupos maiores, etc. A prova pode ser dissertativa, de múltipla escolha, com itens de resposta construída ou uma combinação de todos esses formatos. As provas, porém, têm suas limitações quando se quer, por exemplo, analisar como os estudantes utilizam conhecimentos em situações em que precisam argumentar com outras pessoas, como em debates ou outras circunstâncias de discussão de ideias.
- **O que aprendi sobre** – Um incentivo para que os estudantes mantenham registros escritos de aprendizagem sobre o que estudaram, sobre dúvidas que tiverem e sobre como se sentem em relação ao próprio progresso. Isso pode ser feito em forma de lista, história em quadrinhos, pequenos textos, tanto em papel quanto em meios digitais.
- **Livro didático** – Os problemas e exercícios de cada seção propostos no Livro do Estudante podem orientar a avaliação formativa se os estudantes, juntamente com o professor, analisarem erros cometidos durante a resolução. A seção ***Palavras-chave***, pensada como um momento de síntese e autoavaliação, pode ser discutida ou realizada em duplas, e o professor pode recolher e ler as produções, dando aos estudantes um retorno sobre erros e acertos, retomando com eles o que julgar necessário. Essa seção pode, ainda, ser uma ferramenta interessante para um portfólio. Também pode ser reservada uma aula quinzenal para que os estudantes se dediquem a revisar o que aprenderam ou pode ser realizado um *quiz* semanal em que eles criem sessões de revisão entre pares, usando a seção ***Para recordar*** do Livro do Estudante.

Avaliação somativa

A **avaliação somativa** ocorre ao fim de um período de ensino, como um bimestre, um semestre ou um ano letivo, e tem o intuito de consolidar o aprendizado dos estudantes em relação aos objetivos estabelecidos. De modo geral, essa avaliação pode ser uma síntese feita com base na avaliação formativa.

O objetivo da avaliação somativa, portanto, é indicar o nível de conhecimento adquirido pelos estudantes ao final de um período de instrução, contendo aspectos burocráticos como atribuição de nota ou conceito exigidos pelo sistema, que são geralmente usados para certificar a conclusão de um curso. Alguns diferentes instrumentos podem ser usados como avaliação somativa:

- **Simulados** – É possível organizar testes que simulem processos seletivos (como os do Enem e de vestibulares) com questões de múltipla escolha, abrangendo noções e conceitos estudados em determinado período do ano letivo. Os estudantes precisam aprender a lidar com esse tipo de processo, com regras mais rígidas de realização, e assim é possível analisar a autonomia e o preparo deles para esse tipo de avaliação. Devemos frisar que é importante que esse não seja o único tipo de instrumento avaliativo do período.
- **Projetos finais** – Projeto final a ser realizado pelos estudantes que englobe diversos conceitos aprendidos ao longo do semestre, como a criação de um modelo matemático, a resolução de um problema complexo ou a aplicação de conceitos matemáticos em um contexto real.
- **Portfólios** – Consistem em um conjunto (físico ou digital) de atividades e trabalhos realizados ao longo do período letivo, incluindo trabalhos corrigidos, reflexões sobre o aprendizado e autoavaliações. Os portfólios devem ser organizados e mantidos pelos estudantes.
- **Livro didático** – As atividades propostas ao longo de cada capítulo do Livro do Estudante podem compor pequenos testes quinzenais mais abrangentes e ter um fechamento conjunto com outros instrumentos de avaliação ao final de um período letivo.

Avaliação comparativa

A **avaliação comparativa** é utilizada para comparar o desempenho de diferentes grupos de estudantes ou de um mesmo grupo de estudantes em diferentes momentos. Ou seja, o objetivo da avaliação comparativa é analisar diferenças no desempenho entre grupos de estudantes (como turmas ou mesmo escolas) ou, ao longo do tempo, buscar entender tendências e efetividade de métodos de ensino.

Em Matemática, o professor pode aplicar os mesmos testes da avaliação somativa em todas as turmas de uma mesma série. Após a aplicação dos testes, é indispensável que sejam realizadas as seguintes etapas:

- **Análise de dados** – Prevê a utilização de ferramentas de análise de dados, como planilhas e gráficos, para comparar os resultados das avaliações (entre diferentes turmas ou períodos letivos) e entender o desempenho dos estudantes.
- **Produção de gráficos de progresso** – Servem para gerar uma visualização eficaz de melhorias ou de declínios no desempenho dos estudantes ao longo do tempo.

Caso sua rede já conte com avaliações comparativas, não há necessidade de criar outra; utilize os dados já existentes para essa comparação e análise.

Avaliação ipsativa

A **avaliação ipsativa** compara o desempenho atual de um estudante com o próprio desempenho anterior, em vez de compará-lo com o desempenho dos colegas. Esse tipo de avaliação pode ser utilizado em Matemática para manter registros das avaliações dos estudantes ou pedir a eles que façam autoavaliações e estabeleçam metas de aprendizagem, revisando essas metas periodicamente para monitorar seu progresso pessoal.

O objetivo principal da avaliação ipsativa é acompanhar o progresso individual e a melhoria contínua dos estudantes, incentivando o desenvolvimento pessoal.

Tanto nas avaliações comparativas quanto nas ipsativas é importante o registro do professor, por meio de anotações constantes ou de gráficos ou mapas, para obter uma visão mais holística do aprendizado dos estudantes/das turmas, o que lhe permitirá fazer ajustes mais precisos no ensino, promovendo um ambiente de aprendizagem mais eficaz e personalizado.

ESTRUTURA DA COLEÇÃO

Esta coleção é composta de três volumes da área de Matemática e suas Tecnologias destinados ao Ensino Médio. Cada volume está organizado em quatro unidades, que, por sua vez, estão divididas em capítulos. Na concepção de cada volume, cuidamos para que os conteúdos fossem distribuídos de maneira organizada e equilibrada, de modo que fossem contempladas todas as unidades temáticas da Matemática previstas na BNCC: Números e Álgebra; Grandezas e Medidas; Estatística e Probabilidade.

Organização geral da obra

Cada volume é composto de quatro unidades e cada volume aborda todas as áreas da Matemática (números e áreas, geometria e medidas, probabilidade e estatística).

VOLUME 1

Unidade 1: Números, análise de dados e funções

- Capítulo 1 – Conjuntos numéricos e intervalos na reta real
- Capítulo 2 – Estatística: dados, variáveis e gráficos
- Capítulo 3 – Relações entre grandezas: funções
- Capítulo 4 – Função afim
- Capítulo 5 – Função quadrática

Unidade 2: Grandezas em geral e áreas

- Capítulo 6 – Grandezas e medidas
- Capítulo 7 – Áreas de figuras planas

Unidade 3: Sequências e progressões

- Capítulo 8 – Sequências numéricas
- Capítulo 9 – Progressões

Unidade 4: Educação financeira e noções de Estatística

- Capítulo 10 – Estatística: amostragem e medidas de tendência central
- Capítulo 11 – Educação financeira e projeto de vida

VOLUME 2

Unidade 1: Matemática Financeira e funções: exponencial e logarítmica

- Capítulo 1 – Função exponencial
- Capítulo 2 – Logaritmo e função logarítmica
- Capítulo 3 – Matemática Financeira

Unidade 2: Geometria plana

- Capítulo 4 – Geometria euclidiana
- Capítulo 5 – Geometria das transformações

Unidade 3: Trigonometria

- Capítulo 6 – Relações trigonométricas no triângulo retângulo
- Capítulo 7 – Relações trigonométricas em um triângulo qualquer
- Capítulo 8 – Arcos de circunferência e ciclo trigonométrico
- Capítulo 9 – Funções trigonométricas

Unidade 4: Análise combinatória e probabilidade

- Capítulo 10 – Análise combinatória
- Capítulo 11 – Probabilidade

VOLUME 3

Unidade 1: Probabilidade e Estatística

- Capítulo 1 – Estatística: medidas de dispersão
- Capítulo 2 – Probabilidade e Estatística

Unidade 2: Geometria espacial

- Capítulo 3 – Sólidos geométricos: poliedros
- Capítulo 4 – Sólidos geométricos: corpos redondos
- Capítulo 5 – Geometria métrica espacial
- Capítulo 6 – Projeções cartográficas

Unidade 3: Programação e pensamento computacional

- Capítulo 7 – Pensamento computacional
- Capítulo 8 – Algoritmos e fluxogramas

Unidade 4: Sistemas lineares e matrizes

- Capítulo 9 – Sistemas lineares
- Capítulo 10 – Matrizes

ESTRUTURA DO LIVRO DO ESTUDANTE

Cada volume da coleção está organizado em unidades e capítulos. Os textos e as atividades foram idealizados para auxiliar o professor no desenvolvimento das aulas, especialmente no que diz respeito à fundamentação teórica de cada tema e também para permitir que o estudante desenvolva autonomia em relação à leitura e à compreensão dos assuntos abordados. Para isso, o texto tem uma linguagem precisa, sem formalismos excessivos. Os exemplos e as atividades resolvidas complementam as explicações e permitem que o estudante reflita sobre a teoria apresentada.

Ao planejar as aulas, o professor pode analisar as orientações que são direcionadas a ele e também aquelas que se destinam ao estudante; assim, poderá compreender melhor e otimizar a proposta pedagógica desta coleção.

Como sugestão, o professor pode diversificar sua aula organizando a turma em duplas ou em grupos e pedindo aos estudantes que leiam o texto sobre o assunto que será abordado. Eles devem procurar entender o que o material explica sobre o tema, discutir o texto, anotar dúvidas e procurar no dicionário palavras cujo significado desconheçam. Além disso, podem produzir, em grupo ou individualmente, um pequeno relatório de leitura, que será apresentado à turma para uma discussão final mediada pelo professor, que pode realizar intervenções necessárias para sanar dúvidas e complementar informações.

A seguir, apresentamos como cada item do Livro do Estudante está organizado.

Abertura de unidade

A abertura de unidade é o primeiro contato dos estudantes com os temas a serem abordados na unidade e com os capítulos que dela fazem parte. Uma imagem e um texto introdutório instigam os estudantes a refletir sobre os temas em questão e a resgatar o que já sabem desses temas. Dessa maneira, o trabalho com a abertura é uma oportunidade de explorar as expectativas e os conhecimentos prévios dos estudantes, tornando-se um primeiro momento de avaliação diagnóstica.

Sempre que possível, é interessante perguntar aos estudantes o que eles conhecem e entendem sobre os temas propostos e o que a imagem lhes sugere. Com base nas respostas, é possível ter os primeiros indícios dos conhecimentos prévios deles e de sua motivação. Esses dados iniciais permitem rever ou aprimorar o planejamento para o trabalho com os objetos de conhecimento de cada capítulo.

Abertura de capítulo

A abertura de cada capítulo foi idealizada tendo como base a metodologia ativa da aprendizagem baseada em problemas (ABP). O texto se inicia com uma questão instigadora cuja resolução nem sempre é possível com o conhecimento matemático anterior. Essa mobilização para aprender se completa com a retomada da questão inicial no próprio texto do estudante. A decisão dessa retomada depende do planejamento do professor, mas há sempre uma sugestão de como fazer isso no texto do estudante.

Um painel de soluções pode ser feito nessa retomada permitindo que o estudante perceba se seu conhecimento de matemática é suficiente para a resolução eficaz do problema, e para que o professor possa avaliar a aprendizagem dos estudantes.

Problemas e exercícios resolvidos

As atividades resolvidas permitem que os estudantes ampliem o repertório de estratégias utilizadas na resolução de problemas e analisem a escrita na linguagem da Matemática, explorando mais de um registro de representação, para que, assim, se apropriem da linguagem e da modelagem matemática e possam se preparar para realizar as atividades propostas.

Problemas e exercícios propostos

Para que os estudantes desenvolvam habilidades que lhes permitam resolver uma variedade de problemas, essa seção traz diversas atividades que os levam a refletir sobre os temas abordados, a praticar o que aprenderam e a estabelecer relações entre os diferentes assuntos tratados no Livro do Estudante e, progressivamente, desenvolver raciocínios mais elaborados.

A quantidade de problemas e exercícios propostos pode variar dependendo da complexidade e das habilidades a serem desenvolvidas por meio do estudo do tema de cada etapa do capítulo. Sempre que o tema permite, o material apresenta problemas relacionados com outras áreas do conhecimento ou com assuntos do dia a dia.

Em alguns momentos, ao longo das atividades propostas, os estudantes são incentivados a:

- retomar um exercício resolvido que possa auxiliá-los na resolução de um problema proposto, de modo a desenvolver o raciocínio por analogia;
- relacionar dois ou mais exercícios, buscando alguma regularidade entre eles;
- deter-se em um exercício por sua complexidade ou por permitir alguma aplicação interessante.

Nesse processo, exigem-se dos estudantes reflexões mais profundas, a fim de que adquiram ferramentas mais valiosas que a simples busca da resposta correta.

O professor pode propor à turma que as atividades sejam resolvidas individualmente, ou colaborativamente em duplas ou em grupos, selecionando algumas para serem feitas em sala de aula, sob sua supervisão, e outras como tarefa extraclasse, a fim de que os estudantes ganhem autonomia.

Como citado anteriormente, o painel de soluções é um importante recurso para a socialização das resoluções de um mesmo problema, com discussão de diferentes estratégias ou maneiras de registro, incentivando-se, assim, a troca de pontos de vista, a construção de argumentos consistentes e o respeito ao outro. Também é importante incluir a análise e a verificação da razoabilidade das respostas obtidas.

O planejamento das aulas e as características de cada turma determinarão se será realizada a resolução de todos os problemas e exercícios propostos ou a seleção de uma parte deles. Além disso, a distribuição das atividades em diferentes aulas é uma estratégia que pode facilitar a manutenção de ideias importantes e centrais e ajudar na recuperação de eventuais dificuldades.

Um aspecto que merece atenção é a proposta de que o estudante, sozinho ou em grupos, elabore problemas. Essa é uma habilidade mais complexa e é solicitada algumas vezes ao longo da coleção, em geral entre os últimos problemas de cada série. Ela está presente na BNCC repetidas vezes entre as habilidades relacionadas à competência específica **3** – "Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente" (Brasil, 2018a, p. 531) – sempre relacionada com a resolução de problemas ligados aos temas e aos conceitos matemáticos explicitados em cada habilidade.

Desse modo, o estudante não só deve se tornar capaz de resolver os problemas propostos no Livro do Estudante ou pelo professor, mas também deve desenvolver a habilidade de elaborar exercícios. Por meio desse procedimento, ele se percebe em um processo criativo do fazer matemático e adquire noções sobre a maneira de utilizar a linguagem matemática, reflete acerca de seus procedimentos e escreve sobre o que é significativo para ele. O professor, por sua vez, obtém elementos para avaliar dúvidas, progressos e necessidades do estudante.

As atividades propostas no Livro do Estudante são diversificadas para que o estudante elabore problemas parecidos com outros já resolvidos por ele, tendo como base uma expressão, uma pergunta, uma resposta ou uma imagem, por exemplo. Esse tipo de atividade permite também que o estudante perceba a relação entre dados, perguntas e respostas, bem como a maneira de articular esses três elementos em um problema.

Certamente, com o objetivo de desenvolvimento da linguagem do letramento matemático é preciso planejar também o que fazer com os problemas elaborados pelos estudantes. Algumas possibilidades são:

- sortear alguns problemas formulados e propor à turma que os resolva;
- distribuir os problemas entre os estudantes de modo que cada um resolva um problema elaborado por um colega;
- organizar uma lista com todos os problemas para que os estudantes os resolvam;
- escolher um problema cuja formulação esteja incompleta ou malfeita para trabalhar como texto a ser reelaborado em conjunto com a turma.

Se os problemas produzidos forem expressos em uma linguagem confusa, não tiverem perguntas ou não apresentarem dados suficientes para a resolução, isso será percebido quando outro estudante for resolvê-lo, e o professor poderá discutir cada problema com a turma, tratando-o como um texto que necessita de reformulação. O mais importante nesse processo é que o estudante sinta que escreve para qualquer leitor, e não apenas para o professor, pois isso incentiva o aperfeiçoamento das produções.

A elaboração de problemas pelo estudante pode compor a avaliação formativa.

Tecnologia

Faz parte da formação em Matemática contribuir para um uso refletido da tecnologia da comunicação e informação, a fim de que o jovem utilize esse recurso como ferramenta de investigação, pesquisa, aprendizagem colaborativa e, muito particularmente, na resolução de problemas.

Ao longo dos volumes desta coleção, sempre que necessário e possível, propusemos atividades variadas que utilizam recursos diversos do computador e da rede mundial de informações (*web*), de modo a favorecer simultaneamente a aprendizagem da Matemática e dos recursos tecnológicos.

A ideia é utilizar as novas mídias e tecnologias educacionais para favorecer as aprendizagens. Optamos por recomendar recursos que são de acesso gratuito ou de distribuição gratuita na internet, de modo que não haja impedimento para resolver os problemas propostos. Assim, buscamos evitar dificuldades para aqueles que não têm familiaridade com o computador.

Nessa seção, o estudante tem contato com textos semelhantes ao de manuais técnicos, na medida em que conhece e explora os recursos de um aplicativo, de um *software* e até, de uma calculadora. O uso da calculadora nesta coleção busca tanto aumentar a eficácia do ensino quanto desenvolver no estudante o senso crítico, o pensamento hipotético e dedutivo, a capacidade de observação e de pesquisa e as estratégias de comunicação. Nossa experiência indica que, quando usada de modo planejado, a calculadora não inibe o pensamento matemático; pelo contrário, tem efeito motivador na resolução de problemas, mobiliza processos de estimativa e cálculo mental, dá aos professores a chance de propor problemas com dados mais reais e auxilia na elaboração de conceitos e na percepção de regularidades.

O emprego da calculadora humaniza e atualiza as aulas e permite que o estudante ganhe mais confiança para trabalhar com problemas e buscar novas experiências de aprendizagem. Portanto, o letramento matemático no âmbito da tecnologia se amplia com a utilização da calculadora, não para que o estudante faça cálculos rotineiros, mas para que domine minimamente as tecnologias presentes em sua realidade cotidiana. Por isso, é importante que as atividades propostas que envolvem o uso de calculadora sejam analisadas pelo professor, para que perceba que o foco são as relações apresentadas e não os cálculos em si, que, em sua maioria, são complexos, envolvem muitos números e podem desviar a atenção do estudante do real objetivo da atividade.

Finalmente, ao professor cabe ainda a tarefa de propor outras situações nas quais as máquinas possam ser úteis, elaborando atividades cujo objetivo seja que o estudante se concentre nos conceitos e nas estratégias, e não nos cálculos propriamente ditos. Ao professor preocupado com o estudante que não tem calculadora, lembramos que uma por grupo de quatro ou cinco estudantes é suficiente para a realização do trabalho e que hoje existem calculadoras nos celulares e nos computadores.

Para explorar

Com foco no letramento no sentido amplo e não apenas matemático, mas também nessa área, ao longo do Livro do Estudante, esse boxe traz sugestões complementares de textos, vídeos, filmes ou *sites*. Os materiais selecionados são apresentados como complementos, e os estudantes podem se organizar para buscá-los em momentos diversos, e não necessariamente em aula. A ideia é despertar no estudante o prazer de conhecer e aprofundar um assunto, bem como para ampliar o conhecimento matemático.

Os livros e os textos curtos (como artigos) sugeridos são de natureza diversa: há textos jornalísticos, narrativos, de divulgação científica, de livros paradidáticos, entre outros. Eles têm a intenção de valorizar a leitura nas aulas de Matemática.

Os vídeos e os filmes, geralmente disponíveis na internet, têm praticamente o mesmo objetivo dos textos, mas ampliam o repertório do estudante ao apresentar novos espaços do mundo digital além dos que ele usualmente acessa.

Os *sites* indicados são sempre de fontes confiáveis e podem se tornar uma ferramenta de aprofundamento autônomo do estudante em determinados assuntos e um meio de descoberta de novos conteúdos correlacionados, uma vez que muitos *sites* contêm *links* e indicações para outros textos e outras páginas da internet que podem expandir ainda mais esse processo de busca de informação de qualidade.

A utilização dessas sugestões pode ser incentivada de diferentes maneiras:

- o professor faz comentários sobre os materiais sugeridos, de modo a instigar a curiosidade dos estudantes para conhecer esses conteúdos;
- os estudantes buscam os materiais individualmente, sem que haja necessidade de qualquer outra intenção pedagógica além de levá-los a conhecer essas sugestões;
- os estudantes podem, em uma data previamente combinada com o professor, conversar sobre as aprendizagens, as dúvidas e as impressões a respeito do material que exploraram;
- os estudantes podem escrever um comentário sobre o que aprenderam ou sobre suas impressões, no jornal ou no blogue da escola, por *e-mail* ou até mesmo por um aplicativo de mensagens. Eles podem emitir suas opiniões críticas sobre o material indicado, inclusive recomendando, ou não, esse material para outras pessoas;
- a turma pode criar um perfil em uma rede social para registrar resenhas ou críticas aos conteúdos sugeridos que eles exploraram;
- ao longo de um semestre, a turma pode criar um jornal de resenhas de textos e vídeos que envolvam a Matemática.

Uma observação importante é que essa ampliação de horizontes com as leituras e os vídeos não seja utilizada para elaborar provas ou para premiar os estudantes com acréscimos nas notas. A intenção é que essa proposta seja vista como opção para saber mais, como forma de a Matemática contribuir para a cultura geral do estudante e que, portanto, seja valorizada pelo conhecimento que propicia.

Cálculo rápido

Ao longo da Educação Básica, os estudantes precisam adquirir habilidades em diferentes modalidades de cálculo: estimativa, com algoritmos pessoais ou convencionais, uso de calculadora e cálculo mental. Para que eles desenvolvam habilidades com cálculo mental e possam perceber seu valor, é preciso que se reserve um tempo da aula para essa finalidade.

É importante compreender que o cálculo mental, como habilidade pessoal, desenvolve-se progressivamente, muitas vezes utilizando o apoio do cálculo escrito para etapas intermediárias até obter o resultado final. À medida que essa habilidade se aprimora, as etapas escritas se abreviam até que ele seja feito quase exclusivamente "de cabeça". Mesmo que os procedimentos apresentados e vivenciados pelo estudante não sejam totalmente incorporados como ferramentas mentais, eles conferem maior flexibilidade para lidar com números, grandezas e operações, além de aumentar a confiança na própria maneira de pensar.

Para recordar

Uma vez que o objetivo maior do ensino de Matemática é contribuir para o desenvolvimento autônomo dos estudantes, entendemos que não basta que aprendam os conceitos presentes em cada capítulo; é preciso que eles mobilizem conhecimentos diversos a qualquer tempo, em função de situações-problema que devam ou desejem enfrentar. Por isso, as atividades propostas nessa seção têm como objetivo fundamental manter vivas as principais ideias já estudadas, como maneira de aprender a estudar e aprender o que é mais relevante em relação a objetos, procedimentos e maneiras de pensar que foram explorados nos capítulos e até em anos anteriores.

Essa seção pode também acolher dificuldades em turmas heterogêneas, uma vez que esses problemas podem ser resolvidos em duplas ou em grupos produtivos. Além disso, na retomada de ideias centrais já estudadas, os estudantes têm a oportunidade de recuperação em processo.

No planejamento das aulas, é aconselhável verificar se há problemas que envolvem habilidades que serão necessárias na abordagem do próximo capítulo a ser trabalhado ou se há problemas que possam servir para o estudante sanar dúvidas identificadas pelo professor em suas observações.

Foco no raciocínio lógico

Essa seção tem como propósito levar os estudantes a resolver problemas não convencionais. De maneira geral, esses problemas não estão relacionados diretamente ao tema do capítulo em que se encontram e não podem ser resolvidos com a aplicação direta de uma equação ou outro processo algorítmico, exigindo sempre do estudante dose considerável de reflexão, criatividade e originalidade.

Os problemas propostos envolvem as mais diversas habilidades e estratégias de resolução, como: tentativa e erro; resolução com apoio de tabelas, diagramas ou desenhos; busca de regularidades; conjectura e levantamento de hipóteses.

Nos três volumes, há uma grande variedade de problemas para o estudante resolver, entre os quais destacamos os chamados problemas de lógica e os de estratégia, cuja resolução requer raciocínio dedutivo e depende do levantamento de hipóteses e de sua checagem imediata. Sugerimos que os problemas sejam trabalhados em duplas.

Mais do que em outros momentos, o **painel de soluções** pode ser usado para a análise dos enunciados, pois a confrontação das soluções e a discussão das possibilidades de resolução são elementos essenciais na abordagem dos problemas.

Inicialmente, os estudantes podem estranhar resolver problemas tão diferentes, especialmente aqueles que não envolvem números. No entanto, com o incentivo e o auxílio do professor, eles podem se desafiar, e é comum que passem a resolver os problemas dessa seção antes mesmo que o professor lhes sugira.

O trabalho com esses problemas torna-se mais eficaz se for constante; por isso, eles não precisam ser propostos todos de uma vez, mas podem ser explorados ao longo do estudo do capítulo. O professor pode, por exemplo, selecionar algum dentre os mais complexos como o "problema da semana" e desafiar os estudantes a resolvê-lo no prazo de uma semana, ao longo da qual podem entregar soluções parciais, consultar os colegas e buscar diferentes estratégias. Em uma data combinada, os estudantes apresentam seus registros e analisam as diversas soluções.

Palavras-chave

Essa seção foi concebida para levar os estudantes a tomar consciência de fatos, conceitos e procedimentos aprendidos ao longo do capítulo, ensinando-os a estudar. Para isso, os estudantes precisam revisar o tema, identificar as ideias centrais e explicá-las com as próprias palavras, acompanhadas de exemplos.

Individualmente, em duplas ou em pequenos grupos, é proposto que os estudantes resumam as principais ideias do capítulo, ilustrem seus resumos com exemplos e outras informações relevantes e façam um balanço de seus conhecimentos.

Eles podem ser incentivados a fazer o resumo ao longo do desenvolvimento do capítulo ou ao final dele. Esse resumo pode ser estruturado como um texto, um quadro-síntese ou uma tabela de dupla entrada que relacione as palavras-chave com suas definições e exemplos correspondentes. Essa atividade pode ser realizada de maneira interdisciplinar com a área de Linguagens para que os estudantes compreendam o que é e como se faz um resumo, um quadro-síntese, um texto informativo, um mapa mental e outros gêneros textuais propostos em cada uma dessas seções.

Essa seção serve também como instrumento ao qual o professor pode recorrer para compor a avaliação formativa e ipsativa, analisando as necessidades e o progresso dos estudantes: ao ler os resumos, poderá identificar dúvidas e incompreensões, conhecimentos adquiridos e extrapolações que cada estudante conseguiu fazer, o que lhe fornecerá uma visão das conquistas e das dificuldades de sua turma.

Matemática e...

O foco dessa seção é levar os estudantes a perceber a Matemática em contextos significativos, relacionando o que está sendo estudado no capítulo com outras áreas do conhecimento e com temas contemporâneos transversais. Ao final de cada capítulo, por meio de um breve artigo de divulgação científica ou um texto informativo, pretendemos estabelecer relações entre a Matemática e diversas situações do dia a dia, outras áreas do conhecimento e alguns dos temas contemporâneos transversais, como educação ambiental, educação financeira e educação para o consumo, educação alimentar e nutricional, educação em direitos humanos, ciência e tecnologia (Brasil, 2018a). A leitura dessa seção precisa ser incentivada para posterior discussão sobre o que foi lido. O eventual interesse dos jovens – ou de um grupo em especial – pode levar ao aprofundamento do tema, com novas pesquisas e produções.

Após o texto principal dessa seção, no item "Conectando ideias", há propostas para que os estudantes explorem situações ou realizem pesquisas para intervenção em sua realidade próxima ou, ainda, se engajem em processos criativos e colaborativos de produção de objetos, textos, imagens e outras formas de comunicação de ideias e aprendizagens.

Com isso, espera-se fomentar neles a curiosidade e a motivação para querer aprender mais, compartilhando suas descobertas e discutindo sobre elas com os colegas. Os estudantes podem ser incentivados a se posicionar sobre o tema, trazendo suas próprias opiniões e conclusões, exercendo sua postura crítica, mas sempre de modo fundamentado e ético.

Todo esse material pode ser divulgado em outras turmas da escola ou em eventos para a comunidade escolar. Também pode ser aproveitado em artigos para o jornal da escola ou em pequenas monografias que alguns professores solicitam aos estudantes.

Essa seção, assim como as demais, exige planejamento, para que os estudantes tenham tempo de refletir e, se necessário, buscar mais informações para se posicionar quanto às questões nela propostas.

Por dentro do Enem e dos vestibulares

Essa seção está localizada ao fim de cada unidade e traz diferentes propostas com orientações e estratégias de como resolver questões de provas oficiais do Enem e de vestibulares, para que os estudantes possam praticar o que aprenderam e mobilizar diversos conhecimentos que foram explorados nos capítulos e até mesmo em outras unidades ou em anos anteriores.

As questões selecionadas para essa seção exigem a leitura de diferentes formas textuais – verbais ou gráficas – e permitem que o estudante aplique diferentes estratégias de resolução apresentadas ao longo do volume.

Antes de demonstrar uma questão resolvida, são apresentadas orientações que podem auxiliar na busca da resolução. Em seguida, o estudante encontra a solução completa da questão inicial, podendo compará-la com a estratégia que utilizou para chegar à resposta. Ao final, são propostas questões parecidas, seja no enunciado, seja na maneira de resolver, para que o estudante aplique o que aprendeu.

As questões finais dessa seção podem ser utilizadas como instrumento de avaliação ou como tarefas extraclasse ou, ainda, serem discutidas em sala de aula, em duplas, em pequenos grupos ou em um painel de soluções, com a contribuição de todos, de modo a trazer mais evidências da turma e de cada estudante para compor a avaliação formativa, comparativa ou ipsativa, de acordo com o planejamento do professor.

É importante ressaltar que, ao longo do volume, é possível encontrar informações adicionais e complementares ao conteúdo. Esse trabalho é feito no Livro do Estudante com o uso de boxes semelhantes a esse.

Recursos digitais

A obra apresenta, em sua versão digital, 12 objetos digitais para cada volume, totalizando 36 objetos, entre *podcasts*, vídeos, carrosséis de imagens, mapas clicáveis e infográficos clicáveis.

As indicações desses objetos visam valorizar de maneira significativa a apresentação de informações, acrescentando conhecimentos sobre o conteúdo abordado. Esses objetos podem ser localizados no sumário presente no início do Livro do Estudante ou ao longo dos capítulos, por este ícone:



Além disso, as transcrições de todos os áudios estão disponíveis no fim do Livro do Estudante.

PARTE 2 • ORIENTAÇÕES ESPECÍFICAS

Este livro tem como principal objetivo o letramento matemático dos estudantes do Ensino Médio, tendo em vista que essa etapa da Educação Básica deve:

> Garantir a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental [...]. Além de possibilitar o prosseguimento dos estudos a todos aqueles que assim o desejarem, o Ensino Médio deve atender às necessidades de formação geral indispensáveis ao exercício da cidadania e construir "aprendizagens sintonizadas com as necessidades, as possibilidades e os interesses dos estudantes e, também, com os desafios da sociedade contemporânea", como definido na Introdução desta BNCC [...].
>
> (Brasil, 2018a, p. 464-465)

Considerando esse cenário, estas orientações didáticas têm como objetivo compartilhar com você sugestões que explicitam, com algum detalhamento, a metodologia proposta e as possibilidades de ampliação de um conteúdo que, embora limitado pelas páginas de um livro, pode ser complementado pelo dinamismo de uma sala de aula com estudantes com diferentes perfis e aperfeiçoado com seu conhecimento como profissional da educação.

Na elaboração deste livro, em estreita relação com os fundamentos da BNCC, foi feita a escolha de alguns objetos de conhecimento usuais dos currículos para o Ensino Médio, sempre na perspectiva do desenvolvimento de competências, e não apenas na aquisição do conhecimento em si. Daí a importância da maneira como o livro será utilizado, para que ele possa de fato contribuir para a formação integral dos estudantes.

Para cumprir esse propósito, este manual é parte integrante do Livro do Estudante e precisa ser explorado de modo a colaborar efetivamente para o melhor uso do livro com os estudantes.

O ENSINO ARTICULADO PARA A FORMAÇÃO INTEGRAL DOS ESTUDANTES

Os pressupostos descritos nas orientações gerais deste manual buscaram mostrar que a formação integral é um processo dinâmico e complexo, diferenciado e único para cada estudante. No ensino em turma, no entanto, essa individualização é praticamente impossível; por isso, compreender como se articulam as competências e habilidades selecionadas para cada aula e os objetivos que se deseja alcançar pode ser a resposta para que todos os jovens consigam aprender, ainda que em seu tempo e ritmo próprios.

Na **parte 1** deste manual, destacamos propostas didático-metodológicas que favorecem o trabalho simultâneo com objetos de conhecimento e com o desenvolvimento de competências e habilidades, ressaltando, sempre que possível, a interdisciplinaridade orientada pelo planejamento integrado com os professores das áreas de Ciências da Natureza e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Por isso, a proposta é que, durante a leitura destas orientações, você, ciente do objeto de conhecimento tema do capítulo e dos objetivos de aprendizagem que devem ser acompanhados pela avaliação, perceba, nas sugestões metodológicas, como as habilidades e as competências estão interligadas em um processo contínuo e progressivo.

O trabalho com a leitura de textos e de partes da teoria pelos estudantes ou com eles e a solicitação de que eles elaborem situações-problema, pesquisem, desenvolvam estratégias de resolução para problemas mais complexos e discutam em grupos ou em duplas, construindo argumentações consistentes para que se comuniquem com o uso adequado da linguagem, são marcas desta proposta para desenvolver tanto as competências e as habilidades da área de Matemática quanto as competências gerais da BNCC.

ORGANIZAÇÃO GERAL DOS CONTEÚDOS DO VOLUME

O objetivo principal do quadro apresentado a seguir é descrever e organizar os principais objetos de conhecimento, habilidades e expectativas de aprendizagem previstas para o final do estudo apoiado no material deste livro didático. Conforme orientações da BNCC, a forma de ensino e os temas selecionados nas diferentes seções propostas nesta obra permitem a interdisciplinaridade e o desenvolvimento de habilidades de outras áreas do conhecimento. Além disso, apresenta uma sugestão de organização dos conteúdos deste volume em cronogramas de distribuição bimestral, trimestral e semestral. A sequência lógica e progressiva do ensino depende do planejamento do professor, por isso a indicação do número de aulas é apenas uma sugestão para organizar o planejamento e não significa necessariamente que as aulas sejam sucessivas, uma vez que a cada semana ou mês, de acordo com o planejado, mais de um tema/capítulo pode ser trabalhado.

Na coluna das expectativas de aprendizagem estão os pontos de chegada esperados na aprendizagem, que são, portanto, indicadores para a elaboração de instrumentos de avaliação e orientadores da análise do professor sobre o que cada estudante alcançou em relação às habilidades previstas para sua formação em Matemática.

SUGESTÃO DE CRONOGRAMA			CAPÍTULO	Nº DE AULAS	COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS E HABILIDADES DA BNCC	OBJETOS DE CONHECIMENTO
1º semestre	1º bimestre	1º trimestre	1	14	• CE 2 EM13MAT202 • CE 3 EM13MAT316 • CE 4 EM13MAT407	• Medidas de tendência central • Agrupamentos em classes • Diagramas e gráficos • Medidas de dispersão • Quartis
			2	14	• CE 1 EM13MAT106 • CE 3 EM13MAT310 EM13MAT311 EM13MAT312 EM13MAT316	• Função de probabilidade • Probabilidade frequentista • Lei dos grandes números • Média e desvio-padrão • Curva normal de distribuição de dados (curva de Gauss) • Propriedades da distribuição normal
			3	14	• CE 3 EM13MAT309	• Poliedros: prismas e pirâmides • Planificações de superfícies de poliedros • Relação de Euler • Poliedros de Platão • Poliedros regulares
	2º bimestre		4	14	• CE 3 EM13MAT309	• Corpos redondos: cilindro, cone e esfera • Planificação de cilindro e cone • Tangência no plano e no espaço • Inscrição e circunscrição de sólidos geométricos
		2º trimestre	5	20	• CE 3 EM13MAT309 • CE 5 EM13MAT504	• Grandezas e medidas: comprimento, área e volume • Área da superfície de poliedros e de corpos redondos • Volume de poliedros e de corpos redondos • Princípio de Cavalieri
2º semestre	3º bimestre		6	15	• CE 5 EM13MAT509	• Cartografia, representação do espaço e geoprocessamento • Geometria na esfera • Posições relativas entre plano e esfera • Projeções cartográficas • Marcadores de Tissot
			7	16	• CE 4 EM13MAT405	• Linguagem de programação • Pensamento computacional • Reconhecimento de padrões • Abstração • Decomposição • Algoritmo
			8	16	• CE 1 EM13MAT103 EM13MAT105 • CE 3 EM13MAT314 EM13MAT315 • CE 4 EM13MAT405	• Base binária • Armazenamento de dados • Linguagem de programação • Algoritmos • Fluxogramas
	4º bimestre	3º trimestre	9	12	• CE 3 EM13MAT301	• Sistemas de equações lineares • Classificação de sistemas lineares • Representação geométrica de sistemas lineares
			10	12	• CE 3 EM13MAT301 EM13MAT315 • CE 4 EM13MAT405	• Definição de matriz • Operações básicas com matrizes • Matriz inversa • Matrizes e sistemas lineares

CE – Competência específica de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio
LGG – Linguagens e suas Tecnologias
CHSA – Ciências Humanas e Sociais Aplicadas
CN – Ciências da Natureza e suas Tecnologias

	OBJETIVOS E EXPECTATIVAS DE APRENDIZAGEM/ INDICADORES PARA AVALIAÇÃO	COMPETÊNCIAS GERAIS DA BNCC	INTERDISCIPLINARIDADE COMPETÊNCIAS DE OUTRAS ÁREAS DA BNCC
	• Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados. • Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos. • Calcular quartis. • Utilizar conhecimentos de Estatística para construir argumentação e avaliar dados em contextos da realidade. • Propor e realizar uma pesquisa estatística.	4, 7, 9 e 10	ÁREA DE CN • Competência específica 8
	• Utilizar informações expressas em gráficos ou quadros para fazer inferências. • Calcular medidas de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências ou em gráficos. • Utilizar conhecimentos de Estatística para a construção de argumentação e avaliar dados em contextos da realidade. • Interpretar informações de natureza científica e social expressas em gráficos e tabelas, realizando previsão de tendências, extrapolação, interpolação e interpretação.	2, 6, 9 e 10	ÁREA DE CHSA • Competência específica 2
	• Identificar características de poliedros. • Descrever propriedades de prismas e de pirâmides. • Interpretar diferentes representações de poliedros, inclusive nas planificações de suas superfícies. • Utilizar a relação de Euler na resolução de situações-problema. • Resolver situações-problema que envolvam conhecimentos geométricos de poliedros.	1, 2, 3, 7 e 9	ÁREA DE LGG • Competência específica 6 ÁREA DE CHSA • Competência específica 4
	• Identificar características dos corpos redondos. • Relacionar propriedades de figuras planas a elementos de sólidos geométricos. • Associar um corpo redondo às suas representações. • Resolver problemas que envolvam corpos redondos e utilizar os conhecimentos construídos para justificar resoluções.	2, 4, 7 e 9	ÁREA LGG • Competências específicas 3 e 6 ÁREA DE CHSA • Competências específicas 3 e 6 ÁREA DE CN • Competência específica 3
	• Ler e representar figuras geométricas, utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas. • Resolver situações-problema que envolvam medidas de grandezas (área, perímetro e volume). • Utilizar os conhecimentos construídos para elaborar argumentações e justificar resoluções.	1, 2, 4, 7 e 9	ÁREA DE CN • Competências específicas 1 e 3 ÁREA DE CHSA • Competência específica 1
	• Conhecer noções básicas de cartografia e de geoprocessamento. • Entender o conceito de curvatura e algumas aplicações em superfícies esféricas, como a soma dos ângulos internos de um triângulo em uma superfície esférica. • Distinguir medições realizadas em mapas representados em diferentes tipos de superfícies, como cartas geográficas e globo terrestre. • Compreender as deformações geradas na representação de superfície esférica em um plano. • Classificar as projeções cartográficas de acordo com o tipo de superfície de projeção. • Conhecer os tipos mais comuns de projeções cartográficas. • Conhecer os marcadores de Tissot como referenciais para verificar as regiões de um mapa onde ocorre maior deformação.	1, 2, 4, 5, 7 e 10	ÁREA DE CN • Competência específica 3 ÁREA DE CHSA • Competência específica 2
	• Reconhecer padrões em situações que demandam o desenvolvimento de um algoritmo. • Decompor adequadamente uma situação complexa em situações mais simples para resolvê-la de modo assertivo e eficaz. • Ordenar as etapas envolvidas na resolução de um processo a fim de obter um resultado desejado. • Escrever um algoritmo específico utilizando comandos de uma linguagem de programação. • Adaptar algoritmos prontos para situações semelhantes. • Combinar os comandos da linguagem de programação na produção de um algoritmo executável.	1, 2, 4, 5, 6, 7 e 9	ÁREA DE CHSA • Competência específica 4 ÁREA DE LGG • Competência específica 7
	• Converter números do sistema de numeração decimal para o sistema binário e vice-versa. • Identificar algoritmos em situações-problema. • Interpretar valores de armazenamento e de velocidade de transferência de dados. • Construir fluxogramas para algoritmos simples. • Interpretar fluxogramas.	1, 2, 4, 5, 6, 7 e 9	ÁREA DE CHSA • Competências específicas 1, 3 e 4 ÁREA DE LGG • Competência específica 7 ÁREA DE CN • Competência específica 3
	• Modelar e resolver situações-problemas que envolvem sistemas lineares 2×2 e 3×3 com ou sem o uso de recursos tecnológicos, utilizando estratégias variadas. • Utilizar *software* de geometria dinâmica para representar equações de sistemas lineares 2×2 (no plano) e 3×3 (no espaço).	2, 3, 4, 5, 7 e 9	ÁREA DE CN • Competência específica 2 ÁREA DE CHSA • Competência específica 1 ÁREA DE LGG • Competência específica 7
	• Identificar matrizes como representações de situações cotidianas. • Utilizar operações com matrizes na resolução de problemas em diferentes contextos. • Usar alguns comandos de planilhas eletrônicas para efetuar operações com matrizes. • Representar por meio de fluxogramas as etapas da resolução de sistemas lineares com apoio de recursos tecnológicos (*softwares* de geometria dinâmica e/ou planilhas eletrônicas)	2, 3, 4, 5, 6 e 9	ÁREA DE LGG • Competência específica 7

ORIENTAÇÕES PARA OS CAPÍTULOS

É importante lembrar que as orientações específicas para cada capítulo funcionam apenas como um roteiro didático. O desenvolvimento das competências que contribuem para a formação integral dos estudantes depende da maneira como você vai conectar essas orientações com outras metodologias.

A problematização, a leitura e a escrita em Matemática são essenciais para esse desenvolvimento. Daí a importância de elas estarem sempre presentes no planejamento de suas aulas, como parte do letramento e da formação do pensar em Matemática.

Assim, é fundamental compreender como se dá a organização dos objetos de conhecimento neste volume.

No início das orientações específicas das unidades, convidamos os estudantes a ler o texto de apresentação do Livro do Estudante para que externem suas percepções sobre a Matemática, que, muitas vezes, é vista como difícil e sem utilidade. Com esse texto, buscamos mostrar a principal contribuição dessa área para a formação de cada estudante, que é aprender a resolver problemas. As técnicas e os conceitos específicos, aliados a uma maneira de pensar característica da Matemática, precisam ser vistos pelos estudantes como ferramentas cognitivas que podem ser transpostas para outras situações na escola e, especialmente, para a vida imediata e futura.

Saber organizar uma situação-problema e elaborar estratégias para resolvê-la, bem como avaliar se a resposta obtida é de fato adequada, são habilidades que se desenvolvem com o estudo da Matemática. Aliado a uma metodologia que favorece a formação integral, o conhecimento matemático será o contexto para muitas situações em que o estudante terá de argumentar, trocar conhecimentos com outros, utilizar a linguagem matemática e tomar decisões.

Por isso, sugerimos que a capacidade de resolver problemas seja um objetivo central do planejamento das aulas, acompanhada de observação e registros dos avanços de cada estudante ao longo das aulas e da utilização deste livro.

Todo o material foi estruturado de modo a possibilitar que, ao final do volume, os estudantes tenham desenvolvido parte das competências específicas da área e algumas das competências gerais da BNCC.

UNIDADE 11

PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

CAPÍTULO 1 ESTATÍSTICA: MEDIDAS DE DISPERSÃO

Por ser o primeiro capítulo do livro, é importante prever, no planejamento das aulas, um tempo maior para que os estudantes se familiarizem com a estrutura do livro e com sua linguagem.

Sugerimos que você proponha a eles a produção de pequenos textos cada vez que trabalharem um ou dois tópicos, seja na forma de lista, seja usando esquemas. Desse modo, ao final do capítulo, eles terão conteúdo para realizar o que propõe a seção ***Palavras-chave***. Esses textos e a síntese final são valiosos instrumentos de avaliação em processos que podem orientar seu planejamento em eventuais retomadas, aprofundamentos e propostas mais individualizadas para os estudantes que quiserem saber mais.

Este capítulo começa recordando alguns tipos de gráficos e suas características e, na sequência, faz uma retomada do que os estudantes já devem ter visto sobre as medidas de tendência central – média, moda e mediana –, de modo que os conhecimentos prévios sirvam como base para a ampliação que será feita dessas medidas para dados agrupados em classes e a representação por histogramas e por polígonos de frequências.

O tópico "Recordando Estatística" tem como objetivo discutir algumas ideias básicas da Estatística estudadas em anos anteriores, favorecendo a leitura, a interpretação e a construção de gráficos.

Ao trabalhar com o gráfico de setores apresentado no exemplo 1, aproveite a temática e explique aos estudantes que, segundo a Escala Brasileira de Medida Domiciliar de Insegurança Alimentar (Ebia), a insegurança alimentar grave é caracterizada pela quebra do padrão usual da alimentação com comprometimento da qualidade e redução da quantidade de alimentos de todos os membros da família, inclusive das crianças residentes no domicílio, podendo ainda incluir a experiência de fome. Para complementar, se julgar conveniente, peça aos estudantes que pesquisem o que é soberania alimentar e insegurança alimentar. Em seguida, promova um debate, a fim de que eles proponham medidas para garantir a segurança alimentar a toda população brasileira.

Ao explorar o gráfico de linhas do exemplo 2, explique aos estudantes que, embora nas últimas décadas tenha sido registrada, em nosso país, uma queda nas taxas de analfabetismo, ainda há muitos brasileiros que não sabem ler e escrever. Para ajudá-los nessa compreensão, proponha que façam uma pesquisa sobre a população brasileira em 2022 para verificar a quantidade de analfabetos naquele ano.

No exemplo 3, ao analisar o gráfico de barras verticais múltiplas apresentado, converse com a turma sobre o fato de que, historicamente, pessoas negras são as maiores vítimas de violência no Brasil e que isso também se aplica quando tratamos de violência contra as mulheres. Comente que alguns fatores contribuem para esse cenário, como razões econômicas, discriminação racial e de gênero no mercado de trabalho, entre outros. Se julgar oportuno, peça aos estudantes que realizem nesse momento a atividade 3 proposta na primeira seção ***Problemas e exercícios propostos***.

Se julgar conveniente, informe aos estudantes que, para construir o pictograma apresentado no exemplo 4, foram feitas aproximações com os dados obtidos na fonte de pesquisa.

Antes de propor a resolução das atividades, verifique se os estudantes identificam com facilidade os elementos dos gráficos trabalhados até o momento, como título, fonte e legenda, entre outros.

Neste capítulo, ao resolver as atividades, é esperado que os estudantes possam perceber diferentes formas de resolução, bem como construir argumentações consistentes com o uso da linguagem matemática. Há ainda propostas para que os estudantes criem problemas ou questões para serem respondidas pelos colegas. Essas produções são valiosos instrumentos de avaliação das aprendizagens e de apropriação da linguagem específica da Matemática. Além disso, nas discussões em dupla ou em grupo, concordando ou não com a proposta ou com a resolução do colega, os estudantes exercitam a habilidade de argumentação, que também pode ser acompanhada e registrada por você.

O tópico "Medidas de dispersão" tem como objetivo apresentar as medidas estatísticas variância e desvio-padrão. Para isso, optamos por trabalhar a partir de exemplos simples, antes de apresentar as expressões que definem esses conceitos. Apesar de a compreensão do significado dessas medidas ser mais importante que seu cálculo, vamos nos deter nele para que, no próximo capítulo, com o apoio do estudo da Probabilidade, seja possível dar maior significado às medidas de dispersão.

Na seção ***Tecnologia***, são apresentadas etapas de como calcular a média, a moda, a mediana e a variância utilizando a planilha eletrônica Calc. O desenvolvimento das etapas dessa seção e das atividades propostas deve ser realizado de acordo com a realidade na qual a escola estiver inserida. Se houver essa disponibilidade, leve os estudantes ao laboratório de informática; se isso não for possível, traga para a sala de aula um projetor para que a turma acompanhe cada etapa executada por você, ou, ainda, proponha o trabalho com essa seção como uma atividade extraclasse.

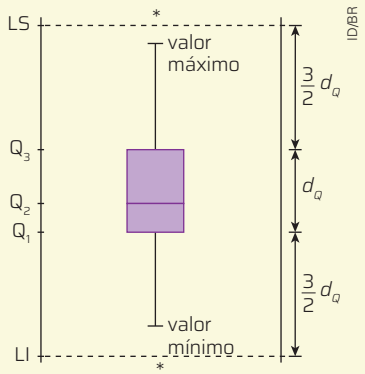
Nos tópicos "Quartis" e "Um pouco mais sobre representação gráfica", os estudantes vão conhecer representações gráficas diferentes das que foram exploradas anteriormente, ampliando, assim, a capacidade de análise e de interpretação deles. A seguir, uma breve explicação sobre esses diagramas e gráficos.

A criação do **diagrama de caixa**, ou ***boxplot***, em 1977, é atribuída ao estatístico estadunidense John Tukey (1915-2000). Esse diagrama é uma imagem que resume cinco medidas de um conjunto de dados: o valor mínimo, o primeiro quartil, o segundo quartil (ou mediana), o terceiro quartil e o valor máximo. Uma vez que os valores do primeiro e do terceiro quartis correspondem às medianas da primeira e da segunda metade dos dados, respectivamente, em cada trecho do diagrama estão representados 25% dos dados.

Um pouco mais sobre *boxplot* e *outliers*

Em um diagrama de caixa, podemos optar por representar também o limite inferior e o limite superior. O limite inferior é dado por $LI = Q_1 - 1{,}5 \cdot d_Q$, e o limite superior é dado por $LS = Q_3 + 1{,}5 \cdot d_Q$. Os valores que estão entre esses dois limites são chamados de valores adjacentes. Os valores que estiverem abaixo do limite inferior ou acima do limite superior são chamados de pontos exteriores e são representados por asteriscos. Esses são os valores destoantes dos demais e são chamados de *outliers*.

Calculados os limites inferior e superior, desenhamos um retângulo no qual são representados a mediana e os quartis. A partir do retângulo, para cima, segue uma linha que vai até o valor mais alto do conjunto de dados, ou o valor máximo do conjunto, desde que não ultrapasse o limite superior. Do mesmo modo, a partir do retângulo, para baixo, segue uma linha que vai até o valor mais baixo do conjunto de dados, ou o valor mínimo do conjunto, desde que não ultrapasse o limite inferior.



Repare que há dois asteriscos no diagrama, um abaixo do limite inferior e outro acima do limite superior. Eles representam os valores que são considerados *outliers* desse conjunto de dados. Se houvesse mais dados abaixo do limite inferior ou acima do limite superior, cada um desses dados seria representado por um asterisco.

O **diagrama de ramos e folhas** se caracteriza pela ordenação dos dados de uma maneira visual e pode ser um substituto do gráfico de barras simples ou múltiplas. Esse tipo de diagrama não é adequado quando houver uma quantidade de dados muito grande ou muito pequena, ou quando os dados forem muito dispersos. Além disso, devido a seu formato, só podem ser representados no máximo dois tipos de variáveis, ficando um tipo de cada lado do ramo.

O **gráfico de radar** (ou gráfico de aranha ou, ainda, gráfico de estrela) também pode ser um substituto do gráfico de barras simples ou múltiplas. O gráfico de radar foi usado pela primeira vez pelo estatístico alemão Georg von Mayr (1807-1890), em 1877, um grande questionador da Estatística do século XIX que contribuiu para o avanço dessa área.

Na seção ***Cálculo rápido*** deste capítulo, o foco são os diversos procedimentos para tornar mais ágil o cálculo de potência e de fatorial.

Na seção ***Para recordar***, apresentamos problemas para que os estudantes retomem ideias e conteúdos já trabalhados.

A seção ***Foco no raciocínio lógico*** traz dois problemas que envolvem estratégias distintas. Propomos que as atividades sejam realizadas em duplas e que depois sejam organizados painéis de discussão sobre os problemas. O importante é que todos resolvam os problemas, ou pelo menos tentem resolvê-los, para que os pontos de vista sejam socializados com toda a turma.

Sugerimos que a seção ***Palavras-chave*** seja utilizada para avaliação. Em uma primeira etapa, ela pode ser trabalhada coletivamente, para que se tenha uma dimensão de como os estudantes apresentam os temas estudados, quais aspectos foram mais lembrados, etc. Feita a lista coletiva, os estudantes podem completar o resumo em duplas. Peça a eles que troquem os resumos para serem lidos com um roteiro crítico: As ideias estão explícitas? Há sugestões de acréscimo? Os conceitos precisam ser revistos? Por fim, os resumos podem ser destrocados e revisados.

Outra sugestão é que os estudantes usem os resumos em uma avaliação com consulta. Assim, eles verão que os resumos são fontes importantes de estudo e passarão a valorizar cada vez mais essa prática, que é importante como procedimento de estudo para toda a vida, e não apenas para aprender Matemática.

Como sugestão de avaliação, propomos que você auxilie os estudantes a realizar uma pesquisa em livros e em *sites* de universidades, em provas do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) e da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (Obmep), entre outros, para identificar questões de Matemática, ou mesmo de outras áreas, que envolvam os temas estudados neste capítulo. Com as atividades coletadas, organiza-se um banco de propostas. Depois de escolhidas as questões, peça aos estudantes que, antes de solucioná-las, analisem cada uma, em duplas ou individualmente, para identificar o(s) conceito(s) envolvido(s), os conhecimentos necessários para resolvê-la, etc.

Matemática e vacinação

Esta seção contempla as competências gerais **7** e **10** propostas pela BNCC e possibilita uma integração com a área de Ciências da Natureza e com o tema contemporâneo transversal Saúde. Trabalhos com o professor de Biologia podem ser propostos a fim de explorar a competência específica **8** da área de Ciências da Natureza.

Após a leitura do texto, converse com os estudantes sobre a importância da vacinação, explicando-lhes a importância do monitoramento para garantir que o número de crianças vacinadas seja o esperado. Para que um monitoramento seja efetivo, é fundamental definir uma amostra realmente significativa. Aproveite a temática para enfatizar para a turma a importância da vacinação para prevenir e evitar a disseminação de doenças.

Para a resolução do item **b**, da atividade **2**, se possível, oriente os estudantes a construir o gráfico com o auxilio de um *software*.

PARA EXPLORAR

Sites

Brasil. Ministério da Saúde. Vacinação. Disponível em: https://www.gov.br/saude/pt-br/vacinacao. Acesso em: 31 out. 2024.

O texto traz um pouco da história da vacinação no Brasil, além de calendário de vacinação, doenças que podem ser prevenidas por meio de vacinas, além de dados sobre campanhas de vacinação.

PUCRS. Saúde. Dia Nacional da Vacinação: por que se vacinar é importante para a saúde coletiva. 17 out. 2024. Disponível em: https://portal.pucrs.br/blog/importancia-vacinacao/. Acesso em: 31 out. 2024.

Esse texto breve traz dados históricos para mostrar a importância da vacinação para a saúde coletiva da sociedade.

CAPÍTULO 2 PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

Este capítulo completa o estudo de Probabilidade e Estatística esperado ao final da Educação Básica, de modo que os estudantes reconheçam que, em fenômenos aleatórios e eventos naturais, tecnocientíficos ou sociais, o estudo da probabilidade permite prever resultados e ajuda em possíveis tomadas de decisão.

No entanto, é preciso lembrar que não se trata de um curso formal e aprofundado de Estatística e que o objetivo é possibilitar que os estudantes entendam como essa área do conhecimento pode organizar e orientar análises com base em dados.

Os conhecimentos dos capítulos anteriores se conectam agora como recursos para análises mais complexas de situações em que dados e medidas estatísticas permitem prever resultados pelo cálculo de probabilidades.

Após a contextualização proposta no início do capítulo, passamos diretamente à relação entre conceitos da probabilidade e as medidas estatísticas.

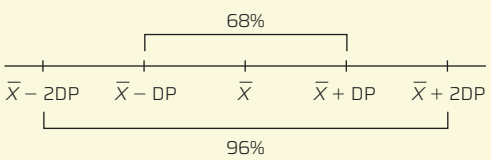
No tópico "Função ou distribuição de probabilidade", encontra-se a essência desta unidade, pois nele são articulados os diversos conceitos aprendidos pelos estudantes sobre Estatística e Probabilidade. É importante que eles percebam como as medidas estatísticas podem auxiliar na tomada de decisões.

Proponha aos estudantes a leitura individual da seção ***Problemas e exercícios resolvidos***, para posterior discussão em pequenos grupos sobre as resoluções e eventuais dúvidas que surgirem.

Nos tópicos "Curva normal" e "Propriedades da distribuição normal", os estudantes têm contato com as curvas de frequência sem nenhum formalismo, mas de modo que possam visualizar o significado das medidas de tendência central nesse tipo de gráfico. No boxe a seguir, apresentamos algumas informações complementares em relação a esse assunto.

A importância da média e do desvio-padrão de uma amostra de dados aleatórios, com média $\overline{X}$ e desvio-padrão DP, é que, em geral, 68% dos dados se concentram no intervalo $]\overline{X} - DP, \overline{X} + DP[$. Esse intervalo define a zona de normalidade da distribuição de dados.

Há outras informações estatísticas relacionadas a $\overline{X}$ e DP, que vamos sintetizar no seguinte esquema:



Em uma distribuição normal de dados aleatórios, 68% dos dados devem ficar entre $\overline{X} - DP$ e $\overline{X} + DP$, enquanto 96% dos dados se agrupam entre $\overline{X} - 2DP$ e $\overline{X} + 2DP$.

Dessa última informação, obtemos que 14% dos valores da variável pesquisada estão entre $\overline{X} - 2DP$ e $\overline{X} - DP$ e outros 14% entre $\overline{X} + DP$ e $\overline{X} + 2DP$. Além disso, os valores menores que $\overline{X} - 2DP$ ou maiores que $\overline{X} + 2DP$ têm apenas 2% de probabilidade de ocorrer.

Isso significa que o **desvio-padrão** é uma medida da dispersão dos dados. Um grande desvio mostra que há maior espalhamento dos dados, e um desvio com valor menor indica que há menor dispersão dos dados, uma vez que 68% dos valores ficam no intervalo entre $\overline{X} - DP$ e $\overline{X} + DP$.

Como já foi estudado, o desvio-padrão é calculado como a raiz quadrada da média dos quadrados das distâncias de cada valor em relação à média de todos os valores. Por isso, ele considera a distância de cada valor até a média, ou seja, considera todos os valores comparados com sua média.

Observe, ainda, que $68\% \simeq \frac{2}{3}$, ou seja, praticamente $\frac{2}{3}$ dos valores da variável têm probabilidade de estar no intervalo de $\overline{X} - DP$ a $\overline{X} + DP$.

Portanto, o desvio-padrão é um valor médio dos desvios de cada valor em relação à sua média. Assim, um desvio-padrão grande indica uma grande variabilidade de valores, pois indica o valor médio dos desvios de cada observação em relação à média. Quanto menor for o desvio-padrão, mais homogêneo será o conjunto de dados, isto é, os valores estarão mais concentrados em torno da média.

Na seção final de ***Problemas e exercícios propostos***, vale destacar a importância do trabalho com amostras, uma vez que boa parte das pesquisas não pode ser feita de modo censitário, como se torna evidente na atividade **16**, que mostra ser inviável testar a duração de todas as lâmpadas para observar em quanto tempo elas queimam.

As atividades **16**, **17** e **18** podem ser resolvidas individualmente ou em duplas. Depois de um tempo adequado, solicite a troca das resoluções dessas atividades entre os estudantes ou entre as duplas, para que corrijam a produção dos colegas e, em caso de discordância, escrevam seus motivos para tal. Finalmente, os estudantes recebem sua resolução de volta e procuram pelos pares para esclarecer dúvidas ou se reúnem em pequenos grupos para que expliquem suas estratégias de resolução.

Na segunda seção ***Tecnologia***, é proposto o uso de planilha eletrônica para o cálculo de desvio-padrão. Dê um tempo um pouco maior para que os estudantes consigam realizar a atividade sugerida.

Na seção ***Para recordar***, optamos por retomar funções afins e contagem, além de favorecer as habilidades de leitura, de escrita e de argumentação.

Na seção ***Foco no raciocínio lógico***, trabalhamos novamente com lógica e organização de informações. Aproveite para verificar se os estudantes estão com mais facilidade para resolver problemas desse tipo e permita que socializem as estratégias de resolução adotadas.

Como instrumento de avaliação, sugerimos promover a correção em sala de aula dos exemplos criados pelos estudantes para o resumo proposto na seção ***Palavras-chave***. Os textos podem ser trocados entre os estudantes para que cada um confira e sugira aperfeiçoamentos no texto do colega. Essas produções são registros para sua avaliação, analisando o avanço dos estudantes do texto original para o texto aperfeiçoado.

Matemática e eleição

Esta seção contempla as competências gerais **2**, **6**, **9** e **10** propostas pela BNCC e possibilita uma integração com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e com o tema contemporâneo transversal Cidadania e Civismo. Trabalhos com os professores de História, Filosofia e Sociologia podem ser propostos, a fim de explorar a competência específica **2** da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Após a leitura do texto, converse com os estudantes sobre as pesquisas de opinião e os levantamentos estatísticos e probabilísticos. Você pode perguntar a eles, por exemplo, se já responderam a alguma pesquisa, se já foram entrevistados em situações assim ou se conhecem os elementos de questionários, formulários e perguntas utilizados em levantamentos amostrais, para depois mencionar como são feitas as pesquisas de intenção de voto, tema do texto-base da seção. No dia da eleição, os eleitores devem escolher entre vários candidatos para cargos do Executivo e do Legislativo, como vereadores, deputados estaduais, governador, prefeito, etc., dependendo da eleição. Nesse sentido, a pesquisa eleitoral tem como objetivo construir um intervalo de confiança em que esse resultado esteja contido, por meio de entrevistas com pessoas de determinado universo amostral, para que se verifique, por exemplo, qual candidato tem maior ou menor intenção de votos em determinado momento. A quantidade de pessoas que serão entrevistadas é determinada e calculada como explicado no texto.

Na atividade **1**, oriente os estudantes na escolha da variável quantitativa de interesse e organize a coleta dos dados na escola. Após a resolução da atividade **2**, é importante promover uma socialização entre os estudantes, a fim de que discutam os resultados obtidos. Se julgar oportuno, comente com a turma que, nas eleições municipais de 2024, o Tribunal Superior Eleitoral (TSE) realizou uma série de alterações na resolução n. 23 610/2019, que trata de propaganda eleitoral, entre elas:

[...]

- Proibição de *deepfakes* [conteúdo em áudio ou vídeo digitalmente manipulado por IA];
- Obrigação de aviso sobre o uso de IA na propaganda eleitoral;
- Restrição do emprego de robôs para intermediar contato com o eleitor (a campanha não pode simular diálogo com candidato ou qualquer outra pessoa);
- Responsabilização das *big techs* que não retirarem do ar, imediatamente, conteúdos com desinformação, discurso de ódio, ideologia nazista e fascista, além dos antidemocráticos, racistas e homofóbicos.

[...]

Zagoto, Vinicius. Como denunciar *fake news* ao TSE e nas redes sociais no período eleitoral. *A Gazeta*, 25 set. 2024. Disponível em: https://www.agazeta.com.br/es/politica/como-denunciar-fake-news-ao-tse-e-nas-redes-sociais-no-periodo-eleitoral-0924. Acesso em: 31 out. 2024.

PARA EXPLORAR

Sites

Jesus, Maurício Brito de. *A matemática no sistema eleitoral brasileiro.* 2018. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Vitória da Conquista, 2018. Disponível em: http://www2.uesb.br/ppg/profmat/wp-content/uploads/2018/11/Dissertacao_MAURICIO_BRITO_DE_JESUS.pdf. Acesso em: 31 out. 2024.

Essa dissertação discute como a Matemática pode ser aplicada no sistema eleitoral brasileiro explicando coeficientes, simulando pesquisas e analisando cenários.

Paes, Janiere Portela Leite. O sufrágio e o voto no Brasil: direito ou obrigação? *Revista eletrônica da EJE*, ano 3, n. 3. Disponível em: https://www.tse.jus.br/institucional/escola-judiciaria-eleitoral/publicacoes/revistas-da-eje/artigos/revista-eletronica-eje-n.-3-ano-3/o-sufragio-e-o-voto-no-brasil-direito-ou-obrigacao. Acesso em: 31 out. 2024.

Esse texto apresenta informações sobre o sufrágio e o voto no Brasil.

POR DENTRO DO ENEM E DOS VESTIBULARES

Apesar de esta seção ter sido apresentada na parte geral deste manual, vale lembrar que ela tem como objetivos principais desenvolver a habilidade de leitura e ampliar o repertório dos estudantes com estratégias importantes para a resolução de questões que são frequentes em provas de processos seletivos. Assim, ao final de cada unidade, apresentamos propostas diferentes cuja ênfase está mais na reflexão sobre o processo de ler e de resolver as questões que na resolução em si.

O texto inicial, que deve ser lido atentamente, sempre traz algumas pistas dos pontos principais que devem ser analisados nas questões propostas, e os estudantes são desafiados a encontrar no problema resolvido aquilo que se quer destacar como nova aprendizagem de leitura ou de processo de resolução.

Ao final, são propostas duas questões parecidas na forma textual e no processo de resolução, nas quais os estudantes podem aplicar o que aprenderam. Essas questões envolvem diferentes tipos de texto com foco na leitura de tabelas e de gráficos e, por isso, podem ser utilizadas como instrumento de avaliação. De qualquer maneira, elas merecem ser discutidas coletivamente para que todos possam aprender com as estratégias e com os registros utilizados pelos colegas.

UNIDADE 2 GEOMETRIA ESPACIAL

CAPÍTULO 3 SÓLIDOS GEOMÉTRICOS: POLIEDROS

Os capítulos desta unidade buscam desenvolver a percepção espacial. Isso significa a apropriação da habilidade de visualizar mentalmente objetos e relações espaciais – de girar algo mentalmente, sem a necessidade do objeto real no campo visual. Isso inclui a capacidade de perceber e de compreender um objeto geométrico pela descrição de suas propriedades e de sua posição.

Pessoas com senso espacial apreciam formas geométricas na arte, na natureza e na arquitetura. Elas são capazes de usar ideias geométricas para descrever e analisar o mundo em que vivem. A percepção espacial pode ser desenvolvida também em propostas de trabalho com a Geometria feitas nas aulas de Matemática e envolve conhecimentos ligados ao espaço e à forma.

Neste capítulo, enquanto cuidamos do desenvolvimento do pensamento espacial, avançamos com propostas para que os estudantes conheçam melhor os poliedros e suas propriedades. Para auxiliar nessa tarefa, você pode providenciar com antecedência alguns moldes de sólidos geométricos (que podem ser reproduzidos e montados) para que os estudantes os manuseiem.

Nos tópicos "Prismas", "Elementos de um prisma", "Classificação de um prisma", "Nomenclatura de um prisma", "Pirâmides", "Elementos de uma pirâmide", "Nomenclatura de uma pirâmide" e "Pirâmide regular" são apresentados os conceitos e a terminologia relativa a esses sólidos geométricos. Para não tornar cansativo o estudo desses sólidos, você pode propor aos estudantes que, enquanto leem, elaborem um resumo ou uma ficha com os termos em estudo, explicando-os com as próprias palavras ou desenhando-os. Eles poderão consultar esse resumo ao realizar as atividades ou, se for combinado previamente, durante uma avaliação formal desse conteúdo.

No tópico "Planificação de prismas e de pirâmides", discutimos de maneira simplificada o significado das planificações de suas superfícies como representações planas dos poliedros. As atividades de **28** a **32**, **37** e **40** solicitam construções mais precisas com régua, transferidor e compasso. A retomada desses conhecimentos é mais uma oportunidade para que os estudantes revejam as propriedades de triângulos e quadriláteros, a fim de avançar nas aprendizagens esperadas do tópico. Na atividade **41**, destacamos a importância da leitura de uma planificação para a resolução de um problema, habilidade que faz parte do letramento matemático.

Consideramos que os jogos de tabuleiro ou de cartas criam situações que exigem soluções originais e rápidas. Nos jogos voltados ao processo de aprendizagem, o planejamento, a busca por melhores jogadas e a utilização de conhecimentos adquiridos propiciam o surgimento de novas ideias e a aquisição de novos conhecimentos, bem como o desenvolvimento de habilidades de raciocínio lógico que estão envolvidas no processo de jogar. Os jogos exigem tempo e precisam ser realizados mais de uma vez, até que os estudantes pensem sobre as propriedades matemáticas que são os objetivos dessas atividades.

Algumas sugestões para o trabalho com esses jogos:

- Reservar um tempo para que os estudantes leiam, interpretem e discutam as regras do jogo.
- Realizar o jogo algumas vezes, em dias diferentes, para que os estudantes tenham tempo para aprender Matemática com ele.
- Pedir a eles que produzam algum registro escrito após o jogo ou que resolvam problemas com base no jogo.
- Propor aos estudantes que, em grupos, após essas tarefas sugeridas, criem jogos que envolvam os conceitos aprendidos.

Jogo Capturando poliedros

Este jogo tem como objetivo retomar com os estudantes o que foi aprendido até aqui e relacionar diversas propriedades dos poliedros, especialmente aquelas que permitem a diferenciação entre prismas e pirâmides. Tem também o intuito de levar os estudantes a aprimorar a utilização da linguagem geométrica relacionada com as propriedades estudadas.

Leia a seguir algumas dicas do que pode ser explorado neste jogo.

1. **Análise das cartas**

   Organize os estudantes em grupos de três ou quatro participantes e peça a eles que leiam as regras e analisem as cartas. De acordo com o número de grupos, distribua duas ou mais cartas para cada um deles, de modo que todas as cartas de poliedros sejam distribuídas.

   Peça aos estudantes que escrevam no caderno todas as características desses poliedros e que, depois, verifiquem no Livro do Estudante se existe alguma característica que deixou de ser descrita. Nesse caso, oriente-os a acrescentá-la em suas anotações. Socialize as informações entre os grupos.

2. **O jogo**

   Entregue as regras do jogo aos grupos e dê um tempo para que todos leiam as instruções e tentem jogar. Comente que, durante o jogo, fica livre a consulta das informações que organizaram.

3. **Proposta de problemas**

   Deixe os estudantes jogarem novamente. Depois, solicite a resolução de algumas situações.

   Observe alguns exemplos.

   - Se eu escolher as cartas "Todas as arestas têm mesma medida." e "Todas as faces são quadrangulares.", qual(is) carta(s) de poliedros posso pegar?
   - Se eu escolher as cartas "Algumas faces são triangulares." e "Algumas faces são congruentes.", qual(is) carta(s) de poliedros posso pegar?
   - E se eu pegar a carta de poliedro "Octaedro regular", qual(is) propriedade(s) posso escolher?
   - E se eu pegar a carta de poliedro "Prisma reto de base pentagonal", qual(is) propriedade(s) posso escolher?
   - Se eu pegar a carta "Pirâmide reta de base triangular", qual(is) carta(s) de propriedades não devo pegar no jogo?

- **Número de participantes**

  3 ou 4 jogadores

- **Material necessário**

  Uma cópia do baralho (conjunto de 12 cartas de propriedades e 18 cartas de poliedros) (ver modelos de cartas).

- **Regras**

  - No centro de uma carteira são colocadas as cartas de propriedades embaralhadas e com as faces voltadas para baixo. As cartas de poliedros são espalhadas pela carteira, de modo que possam ser vistas por todos os jogadores.
  - Os jogadores decidem a ordem que vão jogar.
  - Na sua vez, cada jogador pega duas cartas de propriedades e captura todas as cartas de poliedros que satisfaçam as duas propriedades simultaneamente. Por exemplo, suponha que um jogador tenha tirado as cartas a seguir.

    Todas as faces são congruentes.

    Pelo menos um par de faces paralelas.

    Com essas propriedades, é possível capturar o cubo e o octaedro regular. Os poliedros capturados ficam à frente do jogador, de modo que os demais participantes possam vê-los.

  - Se o jogador capturar uma carta cujo poliedro não satisfaça as propriedades, o próximo jogador pode capturar essa carta antes de iniciar sua jogada.
  - Se o jogador retirar a carta "Coringa de propriedades", ele não precisa usar a outra carta. Nesse caso, deverá dizer duas propriedades quaisquer de poliedros e capturar todos os poliedros que satisfaçam as duas propriedades enunciadas por ele. Por exemplo, se na mesa estiverem muitos poliedros oblíquos, o jogador pode enunciar a propriedade "Algumas das faces não são perpendiculares." e "Algumas das faces não são congruentes." e, assim, capturar vários poliedros. O jogador pode valer-se tanto de propriedades que constam nas cartas como de outras, desde que sejam propriedades dos poliedros que ele deseja capturar. Os demais jogadores devem concordar com as propriedades enunciadas e com a captura dos poliedros.
  - Quando as cartas de propriedades terminarem, os jogadores poderão devolver as cartas de propriedades que pegaram, embaralhá-las e colocá-las de volta no centro da mesa para continuar o jogo.
  - O jogo termina quando acabarem as cartas de poliedros.
  - Vence o jogador que, ao final, tiver o maior número de cartas de poliedros capturadas.

- **Modelos de cartas**

  Cubo

  Octaedro regular

  Tetraedro regular

  Pirâmide reta de base quadrada

  Pirâmide reta de base retangular

Pirâmide reta de base pentagonal
Pirâmide reta de base hexagonal
Prisma reto de base quadrada
Prisma reto de base triangular
Prisma reto de base pentagonal
Prisma reto de base hexagonal
Prisma oblíquo de base quadrada
Prisma oblíquo de base triangular
Pirâmide oblíqua de base quadrada
Pirâmide oblíqua de base triangular
Paralelepípedo reto-retângulo
Pirâmide oblíqua de base hexagonal
Prisma oblíquo de base hexagonal
Coringa de propriedades
Todas as arestas têm mesma medida.
Algumas arestas têm mesma medida.
Todas as faces são congruentes.
Algumas faces são congruentes.
Pelo menos um par de arestas paralelas.
Pelo menos um par de arestas perpendiculares.
Pelo menos um par de faces paralelas.
Pelo menos um par de faces perpendiculares.
Todas as faces são triangulares.
Todas as faces são quadrangulares.
Algumas faces são triangulares.

O trabalho com a seção ***Tecnologia*** traz aos estudantes uma visão tridimensional dos sólidos que serão construídos em um *software* de geometria dinâmica. O estudante é convidado a acompanhar a construção de uma pirâmide regular e sua planificação e a de um prisma regular e sua planificação. No final, ele é desafiado a escolher um poliedro e construí-lo com o uso de um *software*. A criatividade aqui é o foco, de modo que os estudantes percebam que podem criar a partir do que conhecem; ao fazer isso, eles analisam profundamente a figura geométrica espacial em estudo e suas propriedades.

Na seção ***Cálculo rápido***, o enfoque é dado às operações com decimais e medidas. Uma sugestão é que os estudantes pensem em outras estratégias, similares às exploradas nas atividades **1** e **2**, e criem suas próprias atividades para fazer em outras aulas.

A seção ***Para recordar*** apresenta alguns problemas que solicitam dos estudantes uma leitura competente. O excesso de informações precisa ser reconhecido pelo leitor de modo que ele extraia do texto os dados que lhe podem ser úteis para responder à questão proposta. Essa habilidade deve ser explicitada por você aos estudantes, uma vez que ela é central na resolução de problemas e, em especial, nos testes de processos seletivos.

As atividades da seção ***Foco no raciocínio lógico*** têm como meta a percepção espacial, mas agora em situações não convencionais. Socialize os diversos modos de resolução dos estudantes, pois, muito provavelmente, surgirão na turma estratégias e registros bem diversos uns dos outros.

Sugerimos que você utilize a seção ***Palavras-chave*** para realizar uma avaliação em dois tempos. Os estudantes organizam o resumo proposto para que seja avaliado por você e escrevem o que aprenderam, as dúvidas que têm e os pontos em que precisam de ajuda. Em seguida, você faz comentários aos textos produzidos por eles e os devolve, para que cada estudante possa rever seu próprio texto e reorganizá-lo, se necessário. Esse procedimento avaliativo em dois tempos é um recurso interessante para que os estudantes avaliem a própria aprendizagem, reflitam sobre seus erros e ampliem a compreensão dos conceitos estudados.

Matemática e edificações

Esta seção contempla as competências gerais **1**, **2**, **3** e **9** propostas pela BNCC e trabalha a habilidade **EM13MAT309**, além de explorar uma integração com a área de Linguagens e suas Tecnologias, com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e com o tema contemporâneo transversal Multiculturalismo, especificamente no que se refere à diversidade cultural e à educação para a valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras. Podem ser propostos trabalhos com os professores de Arte e de História a fim de explorar a competência específica **6** da área de Linguagens e suas Tecnologias e a competência específica **4** da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

O texto traz algumas curiosidades sobre o Museu de Arte de São Paulo (Masp) e sua importância para a cultura brasileira e para a arquitetura moderna dentro e fora do país. Depois de finalizar a leitura do texto principal, você pode solicitar à turma que analise e descreva os elementos da foto do Masp, destacando as formas presentes no edifício. Pergunte aos estudantes se eles reconhecem as estruturas de poliedros que constituem o projeto. A leitura da imagem também é importante para que eles consigam visualizar quais áreas e partes dos paralelepípedos devem, ou não, ser consideradas ao calcular a área na atividade **1**.

Para a pesquisa solicitada na atividade **2**, oriente os estudantes sobre quais aspectos podem ser mais ou menos relevantes para que produzam trabalhos bem fundamentados e diversificados. Oriente-os para que, além de decidirem qual monumento será representado, verifiquem se existem informações suficientes para a reprodução e qual será a escala utilizada. Nesse momento, sugerimos que seja feita uma roda de conversa ou um debate com os professores de História e de Arte para que os estudantes conheçam mais sobre os estilos arquitetônicos, inclusive com exemplos. A ideia não é, necessariamente, fazer projetos grandiosos ou muito elaborados, e, sim, que os estudantes se apropriem do patrimônio histórico e artístico do Brasil e do mundo, ao mesmo tempo que reconhecem os diferentes estilos arquitetônicos, exercitam a criatividade e o protagonismo e identificam os poliedros (e eventualmente outros sólidos geométricos) em estruturas e construções humanas.

PARA EXPLORAR

Livro

Cárdenas, Alexandra Silva. *Masp*: estrutura, proporção e forma. São Paulo: Ed. da Cidade, 2015. Disponível em: https://www.causp.gov.br/wp-content/uploads/2015/12/LivroMaspEstrutura6.pdf. Acesso em: 31 out. 2024.

O livro traz outras informações sobre o Masp e relata como o museu foi pensado e estruturado.

Sites

Como fazer maquetes? Passo a passo. Disponível em: https://www.tudoconstrucao.com/como-fazer-maquetes-passo-passo/. Acesso em: 31 out. 2024.

Essa página traz dicas de como montar uma maquete. Também apresenta modelos que podem inspirar as construções dos estudantes. Você pode sugerir que eles acessem o endereço ou busquem novas informações na internet durante a confecção do projeto.

Museusbr. Disponível em: http://museus.cultura.gov.br/. Acesso em: 31 out. 2024.

No portal, é possível encontrar um mapa com os endereços de equipamentos culturais do Brasil. Pode ser utilizado como um ponto de partida para a pesquisa das construções que serão reproduzidas, bem como para ampliar o conhecimento dos estudantes acerca de espaços como esses da cidade ou da região onde moram.

CAPÍTULO 4 SÓLIDOS GEOMÉTRICOS: CORPOS REDONDOS

Dando continuidade ao estudo de sólidos geométricos, vamos explorar os corpos redondos. Esse tema permite retomar aprendizagens e eventuais dúvidas que os estudantes tenham com relação aos poliedros e às propriedades das figuras geométricas planas.

O boxe "Posições relativas entre reta e circunferência" apresenta, de maneira simplificada, a caracterização de tangência entre uma reta e uma circunferência. É importante que os estudantes compreendam e registrem essa propriedade, que é central para a resolução de várias atividades propostas neste capítulo e para a construção da planificação de superfície de cilindros.

No tópico "Posições relativas entre plano e esfera", os estudantes podem analisar as posições relativas entre um plano e uma esfera, de modo a definir a tangência entre essas figuras.

O tópico "Sólidos inscritos ou circunscritos" apresenta conceitos mais complexos que envolvem sólidos geométricos, especialmente na resolução de situações-problema. Nele, os estudantes terão a oportunidade de conhecer o significado de um sólido estar inscrito em ou circunscrito a outro sólido, tema que facilitará a realização de atividades relacionadas a medidas, propostas no próximo capítulo.

A seção ***Cálculo rápido*** traz atividades relacionadas a medidas.

A proposta da seção ***Palavras-chave*** deste capítulo é semelhante à do capítulo anterior. Juntas, elas podem compor um registro interessante e pessoal que os estudantes poderão consultar para a resolução de situações-problema.

Como sugestão de avaliação, propomos que planeje com os estudantes a organização das ideias da seção ***Palavras-chave*** para a produção de uma história em quadrinhos sobre poliedros e corpos redondos. Depois de revisar com a turma as histórias produzidas, proponha que façam a montagem de um gibi, que poderá ficar disponível a todos os estudantes na biblioteca da escola. Se houver condições, sugira a eles que utilizem algum tipo de mídia digital para essa montagem. Mangás e outros estilos de quadrinhos são parte da linguagem do jovem e, portanto, podem ser grandes aliados na organização das aprendizagens em Matemática.

Matemática e reciclagem

Os estudantes vêm refletindo sobre a importância da reciclagem e da mudança nas dinâmicas de consumo sustentável desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Por isso, incentive a turma a dar exemplos em casa e na comunidade em que vivem sobre o descarte de materiais recicláveis.

A atividade **1** exige o cálculo da área da superfície lateral da lata, que, quando planificada, tem o formato de um retângulo com dimensões conhecidas, e a comparação dessa medida de área com a da chapa de alumínio utilizada na produção dessas latas. Dê liberdade aos estudantes para modelarem os cálculos da maneira que acharem melhor, sem limitá-los, porque o processo de erro e acerto pode ajudá-los a compreender o formato da lata.

Para a elaboração do esboço dos objetos na atividade **2**, eles podem solicitar o auxílio do professor de Arte, que também poderá indicar possibilidades de reutilização variadas, como na moda, na criação de acessórios e na decoração de ambientes. Comente que essas medidas contribuem para a reutilização de recursos, que é um dos pilares do consumo sustentável. Atividades como essa também contribuem para que os estudantes repensem hábitos de consumo, exercitem a criatividade e descubram novos modos de prolongar a vida útil de alguns materiais.

PARA EXPLORAR

Vídeo

O *design* engenhoso da lata de alumínio para bebidas. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=hUhisi2FBuw&t=0s. Acesso em: 31 out. 2024.

No vídeo (em inglês, com possibilidade de legendas em língua portuguesa), o engenheiro Bill Hammack discute a escolha do formato cilíndrico e do material das latas de alumínio. Pode ser utilizado como fonte de pesquisa para a atividade **1**.

Sites

O passo a passo na fabricação da lata de alumínio. Associação Brasileira dos Fabricantes de Latas de Alumínio (Abralatas). Disponível em: http://www.abralatas.org.br/o-passo-a-passo-na-fabricacao-da-lata-de-aluminio/. Acesso em: 31 out. 2024

Nessa página do portal da Abralatas, é possível conhecer muitas informações sobre latas de alumínio, como a história do produto, como é produzido, entre outras.

Portal da Associação Brasileira do Alumínio (Abal). Disponível em: http://abal.org.br/. Acesso em: 31 out. 2024.

No portal da Abal, é possível conhecer como o mineral primário é extraído, as relações de sustentabilidade e o comércio do alumínio.

Portal eCycle. Disponível em: https://www.ecycle.com.br. Acesso em: 31 out. 2024.

Nesse *site*, são indicados pontos de coleta seletiva em todo o Brasil, bem como medidas para o descarte adequado de resíduos e outras informações importantes sobre reciclagem e reutilização de resíduos sólidos. Indique-o aos estudantes como fonte de pesquisa para a elaboração do projeto na atividade **2**.

CAPÍTULO 5 GEOMETRIA MÉTRICA ESPACIAL

Neste capítulo, será dado destaque às medidas de área de superfícies e de volume de poliedros e corpos redondos.

Sabemos que utilizar as figuras geométricas para representar ou visualizar partes do mundo real é uma capacidade importante para a compreensão e a construção de modelos para resolução de questões da Matemática e de outras áreas do conhecimento, assim como para apreciar as produções humanas nas artes, na arquitetura, nos

objetos do cotidiano, etc. Esse tema favorece o desenvolvimento de habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e aplicação de estratégias na busca de soluções para problemas. Considerando, então, que parte das situações que envolvem as figuras geométricas está relacionada a medidas, este capítulo traz as propriedades métricas que envolvem cálculos de distâncias, de áreas e de volumes para associá-las às relações e representações geométricas já vistas.

As propriedades métricas de figuras planas estudadas anteriormente são essenciais para o entendimento da métrica nos sólidos. Dessa maneira, aproveite para avaliar as aprendizagens esperadas sobre geometria plana e retomar conhecimentos necessários para que todos os estudantes avancem.

A primeira ideia nova e importante deste capítulo é o princípio de Cavalieri, foco do tópico "Volume de sólidos: princípio de Cavalieri". Considere a sugestão para mostrar que esse princípio é razoável, uma vez que sua demonstração não é compatível com o conteúdo conhecido pelos estudantes do Ensino Médio.

Durante o estudo das primeiras atividades da seção ***Problemas e exercícios resolvidos***, destaque para os estudantes a importância de um esboço da situação descrita no problema e a identificação das figuras geométricas planas que permitam relacionar os dados fornecidos no texto do problema. A habilidade de visualização espacial é essencial para a boa escolha dessas figuras no interior do sólido ou em sua superfície.

Sempre que os estudantes apresentarem dúvidas na resolução das atividades da seção ***Problemas e exercícios propostos***, oriente-os a consultar novamente os problemas resolvidos. A leitura de textos de Matemática é parte da formação dos estudantes e deve ser incentivada para ser desenvolvida. Lembre-se de que as propostas finais de algumas dessas seções incentivam os estudantes a elaborar problemas, como as atividades **31**, **49**, **58** e **91**, permitindo a você avaliar as aprendizagens deles e a eventual necessidade de intervenção, seja no uso da linguagem matemática, seja em relação aos objetos de conhecimento em estudo.

No desenvolvimento dos itens que descrevem o cálculo de áreas e de volumes dos principais sólidos, sugerimos que se evitem fórmulas em excesso; o importante é entender o que elas expressam e como são obtidas.

Para complementar, realize a experimentação indicada na página 114, em comentário ao professor. Problematize: Será que essa mesma relação existe entre os volumes do cilindro e do cone que tenham a mesma altura e bases de mesma medida de área? Como vocês poderiam verificar isso? Peça aos estudantes que elaborem um esquema ou roteiro e produzam um relato escrito, definindo o problema a ser investigado, suas hipóteses, os passos de execução, os cálculos, os desenhos e a conclusão.

Se julgar conveniente, proponha aos estudantes que explorem o conteúdo do *software* indicado a seguir, em *Para explorar*, antes de realizarem a atividade proposta no tópico "Volume de um cilindro".

PARA EXPLORAR

Software

Superfícies e sólidos de revolução. Conteúdos digitais para o ensino e aprendizagem de matemática e estatística. Disponível em: http://www.cdme.im-uff.mat.br/ssr/ssr-html/ssr-br.html. Acesso em: 31 out. 2026.

Nesse *link*, você encontra o *software* Superfícies e Sólidos de Revolução, que traz sugestões de atividades com sólidos de revolução para explorar com os estudantes.

Em seu planejamento, considere a inclusão, ou não, do tratamento detalhado do cálculo de volume de troncos de pirâmides, pois as atividades que apresentam esse sólido podem ser resolvidas utilizando o conceito de proporcionalidade e a semelhança de figuras, sem a necessidade de fórmulas.

Antes de trabalhar o tópico "Volume de uma esfera", se julgar conveniente, leia com os estudantes dois artigos publicados pela *Revista do Professor de Matemática* sobre as descobertas de Arquimedes: um deles é "Arquimedes, a esfera e o cilindro", de Geraldo Ávila, da revista n. 10 (disponível em: http://www.rpm.org.br/cdrpm/10/3.htm); e o outro, "Arquimedes, as alavancas e o volume da esfera", de Fabiano de Araújo Pinto, da revista n. 58 (disponível em: http://www.rpm.org.br/cdrpm/58/3.htm) – acessos em: 31 out. 2024.

A seção ***Para recordar*** permite a retomada de diversas ideias e procedimentos estudados em anos anteriores e neste volume. Organize os estudantes para que tenham tempo de realizar os exercícios e, ao final, proponha uma breve autoavaliação, de modo que cada estudante possa se conscientizar do que sabe e do que falta aprender.

Na seção ***Palavras-chave***, propomos novamente um mapa das aprendizagens deste capítulo. Além disso, é interessante que os estudantes realizem uma prova em dois tempos.

Prova em dois tempos

Em um primeiro tempo, a prova é realizada na sala e sem consulta, durante um período previamente combinado com os estudantes. Terminado esse tempo, recolha as provas e avise-os que, no máximo em duas aulas, vai devolvê-las para que refaçam o que desejarem.

Em um segundo tempo, os estudantes receberão novamente a prova, com uma folha anexa grampeada, na qual deverão completar o que não foram capazes de fazer antes ou refazer o que acharem necessário nesse momento. Você já terá analisado cada uma das provas e feito, ou não, comentários com pistas e sugestões de como cada um pode aprimorar o trabalho realizado no primeiro tempo. Os estudantes não podem alterar a primeira versão da prova. As duas versões devem ser corrigidas, e valerá sempre a resolução correta.

Embora essa modalidade de prova seja trabalhosa, vale a pena realizá-la, porque favorece a troca de ideias entre os estudantes, o professor e as famílias, levando-os à busca de informações em outros materiais, o que mobiliza a aprendizagem.

Matemática e meteorologia

A proposta de estudo desta seção tem como principal objetivo fazer com que os estudantes, pela leitura do texto, possam refletir sobre a importância da pluviosidade para a dinâmica de um lugar. Você pode destacar, entre outros pontos, a relevância do acompanhamento do índice pluviométrico para estabelecer medidas de prevenção e gerenciamento de crises causadas pela falta ou pelo excesso de chuvas em determinada região, e o papel dos órgãos públicos e de setores da iniciativa privada para corrigir e evitar problemas para a população. Portanto, é importante conscientizá-los sobre a leitura adequada do índice pluviométrico, para perceberem, por exemplo, o quanto de chuva pode ser considerado muito ou pouco e por quê. Para isso, reforce o trabalho com as conversões entre as medidas apresentadas, desenhando no quadro a representação de um cubo com lados medindo 1 m e o preenchimento com um 1 L de água, o que fará com que o nível da água esteja a 1 mm de altura, como feito em um dos vídeos sugeridos no boxe *Para explorar* a seguir.

PARA EXPLORAR

Vídeos

Como fazer um pluviômetro, o medidor de chuvas (experiência). Canal Manual do Mundo. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=XdVCuGnVDXc. Acesso em: 31 out. 2024.

Nesse vídeo, Iberê Thenório ensina como construir um pluviômetro caseiro.

Saiba como se mede a chuva. Climatempo Meteorologia. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=gZSCrirZ5c4. Acesso em: 31 out. 2024.

O vídeo, com apresentação de Maria Clara Machado, explica visualmente como é feita a medição e quais são os aspectos levados em consideração para a medida da pluviosidade de uma região, além de mostrar como funciona um pluviômetro.

Na resolução das atividades **1** e **2**, acompanhe os estudantes na compreensão das razões e das conversões. Se for preciso, oriente-os para que ampliem os conhecimentos que já têm e resolvam possíveis dúvidas que surgirem ao manipular as medidas fornecidas.

Para a elaboração do infográfico, solicite aos estudantes que compartilhem vivências do dia a dia e o que observam no regime pluviométrico da região onde moram (Chove muito? Chove pouco? Com que frequência? Sempre foi assim ou mudou com o passar do tempo? – entre outras informações). Em seguida, problematize, por exemplo, questões atuais como a impermeabilização do solo devido à expansão urbana ou a produção de lixo e seu descarte inadequado. Assim, é possível que os estudantes reflitam sobre como o clima e fatores como a quantidade e o volume de chuva também podem ser afetados pelas mudanças climáticas do planeta.

Nesse momento, se julgar necessário, realize uma roda de conversa com a presença dos professores de História, Geografia ou Biologia, para que sejam discutidos aspectos relevantes para a criação do infográfico e para o conhecimento geral dos estudantes.

O trabalho com professores de outras áreas pode ser bastante proveitoso, levando em consideração as relações entre a ocupação das cidades, o consumo excessivo ou com base em materiais não renováveis e o impacto ambiental causado pelos seres humanos.

CAPÍTULO 6 PROJEÇÕES CARTOGRÁFICAS

O intuito deste capítulo não é propriamente estudar o que são e como são feitas essas projeções, e, sim, compreender e analisar as deformações provocadas pelas diferentes projeções cartográficas. Espera-se que os estudantes percebam que, ao realizarmos a representação dos pontos de uma superfície esférica em um plano, ocorrem deformações de diferentes naturezas, por exemplo, em relação às distâncias e aos ângulos ou às áreas delimitadas por figuras contidas na superfície da esfera.

Compor um panorama histórico mostrando diferentes documentos cartográficos aos estudantes poderá auxiliá-los na compreensão de como a percepção espacial de um indivíduo ou um grupo social pode se modificar dependendo de sua época e/ou contexto.

O boxe "Cartografia e geoprocessamento" apresenta um breve panorama da evolução cartográfica que pode ser ampliado de acordo com o interesse dos próprios estudantes.

A temática do geoprocessamento vai permear a discussão apresentada neste capítulo. Espera-se que os estudantes compreendam que as representações dos pontos da superfície terrestre nos mapas não preservam todas as características da realidade. Para iniciar, sugerimos uma roda de conversa sobre geoprocessamento e cartografia, propondo algumas questões: Qual seria a área de atuação envolvendo esses termos? O que tais palavras suscitam nos estudantes? Que tipos de aplicação no cotidiano eles acreditam que possam ser realizadas nessas áreas? Ao final da leitura do texto, retome a conversa inicial com os estudantes para que possam rever suas ideias e complementá-las, agora com informações mais precisas.

Durante a discussão sobre o tema, aborde a questão do avanço da geolocalização por GPS, do aumento da resolução das câmeras digitais e do poder de processamento dos computadores, que permitiram a modernização das técnicas cartográficas, fazendo com que seus subprodutos estejam em nosso cotidiano, como nos navegadores presentes em automóveis e em *smartphones*.

PARA EXPLORAR

Vídeo

Como se faz um mapa? IBGE Institucional. Disponível em: https://youtu.be/IusAgSY2OwM. Acesso em: 31 out. 2024.

Para você conhecer mais sobre as técnicas de geoprocessamento de dados e imagens, recomendamos assistir a esse vídeo do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística.

Da medição do diâmetro terrestre por Eratóstenes de Cirene até o surgimento das geometrias não euclidianas (no caso, a geometria esférica), a humanidade produziu argumentos matemáticos que auxiliaram na representação aproximada da superfície terrestre em um plano.

Incentive os estudantes a realizar o experimento proposto na página 152. Reserve um tempo para que eles realizem a atividade e oriente-os a registrar no caderno as observações que fizerem, antes de dar continuidade à leitura do texto apresentado no Livro do Estudante. Essa proposta retoma um resultado importante da Geometria euclidiana plana e mostra que ele não é válido para a Geometria não euclidiana.

A atividade **1** da seção ***Problemas e exercícios propostos*** envolve a medição entre duas localidades (no mapa e no globo terrestre). Ela pode ser desenvolvida por grupos distintos de estudantes, cada um realizando as mesmas medições, mas usando instrumentos diferentes, como régua, fita métrica ou pedaços de barbante, para que, ao final, comparem seus resultados e elaborem justificativas plausíveis sobre as diferenças obtidas.

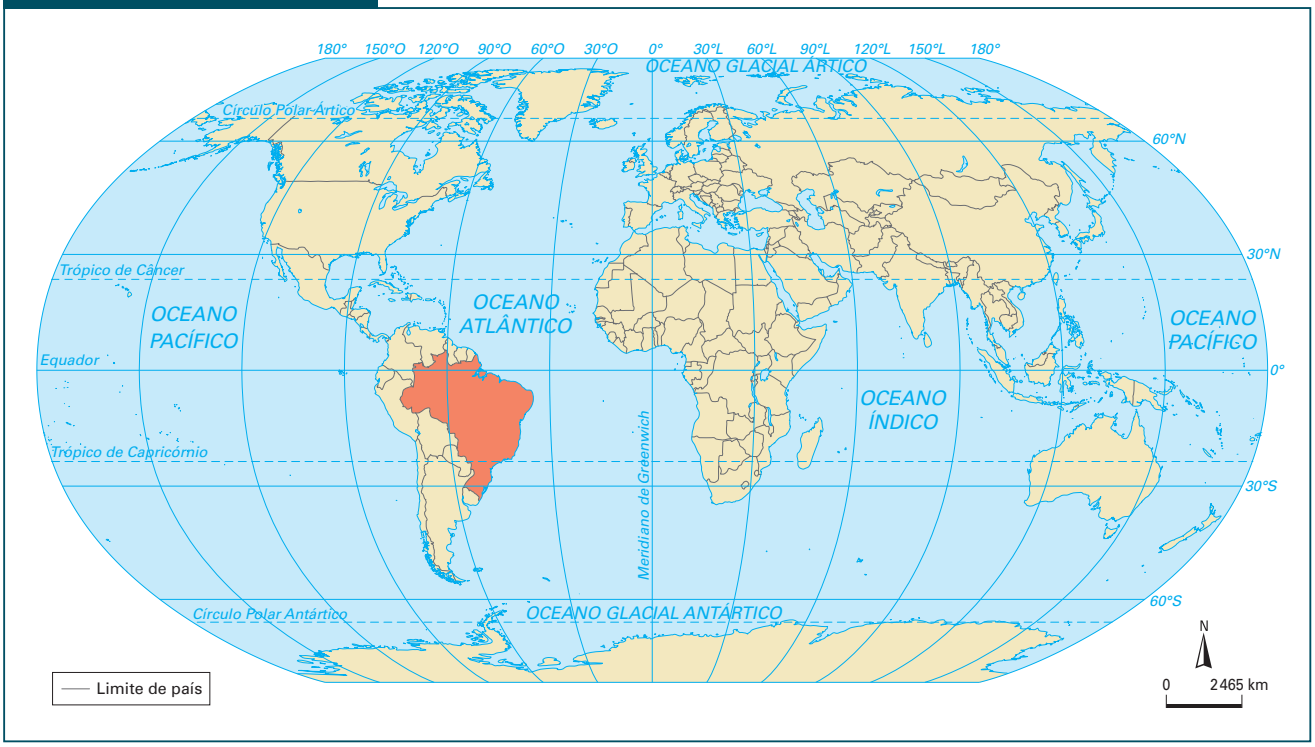
No tópico "Projeções cartográficas", mais importante do que classificar as projeções é propiciar aos estudantes a compreensão sobre a gênese de cada uma delas, seja de acordo com o tipo de superfície utilizada (cilíndrica, cônica, etc.), seja de acordo com as propriedades que se deseja preservar no mapa (tamanho, formato, área).

Se considerar oportuno, amplie o estudo apresentando aos estudantes as projeções do tipo afiláticas, ou seja, aquelas que não mantêm nem a equivalência nem a conformidade, mas conseguem uma boa representação, minimizando erros de proporção. Comente também que uma projeção desse tipo bastante conhecida e difundida é a projeção de Robinson e mostre a eles um exemplo como o apresentado na próxima página.

Os recursos visuais disponíveis no tópico "Classificação e características das projeções cartográficas" podem favorecer a compreensão de como os tipos de projeção alteram a representação dos pontos da superfície terrestre no plano.

É evidente a relação que esse tema mantém com o componente curricular Geografia, da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. Esse contato permite o desenvolvimento de trabalhos nos quais sejam analisadas as concepções econômicas, filosóficas e políticas que permearam o processo de elaboração de cada tipo de projeção cartográfica. Exemplos desse caso envolvem a deformação apresentada por mapas que representam os países do hemisfério Norte com áreas maiores do que realmente têm, no intuito de valorizar esses países em relação aos demais. Uma possibilidade de desenvolver conceitos relativos ao componente curricular Geografia simultaneamente aos tipos de projeção estudados em Matemática é utilizar as seções ***Problemas e exercícios propostos*** deste capítulo, pois as atividades propõem diferentes representações e contextos em que as projeções cartográficas permitem um diálogo significativo entre essas áreas do conhecimento.

Mapa-múndi (Projeção de Robinson)



João Miguel A. Moreira/ID/BR

Fonte de pesquisa: *Atlas geográfico escolar*. 7. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2016. p. 32. Adaptado.

PARA EXPLORAR

Site

IBGE. *Atlas geográfico escolar*. As projeções cartográficas. Disponível em: https://atlasescolar.ibge.gov.br/cartografia/21733-as-projecoes-cartograficas.html. Acesso em: 31 out. 2024.

Nesse *site*, encontram-se diferentes projeções cartográficas que permitem explorar a representação da esfericidade terrestre em um plano.

A seção ***Cálculo rápido*** retoma a conversão de unidades de medida de comprimento e o cálculo de ângulos, pois esses temas são importantes em questões de geolocalização e muito frequentes em questões de provas e exames seletivos.

A seção ***Para recordar*** apresenta atividades que trabalham com conteúdos que precisam estar sempre à disposição dos estudantes: funções, circunferência e grandezas e medidas.

Novamente, a seção ***Foco no raciocínio lógico*** traz sugestões de atividades que aprimoram as características do pensamento computacional. Por exemplo, na atividade **1**, busca-se verificar: se os estudantes reconhecem o padrão formado pelos triângulos retângulos na malha mostrada, decompõem a figura em triângulos, abstraem a distância a ser percorrida pela formiga como a hipotenusa do triângulo retângulo para, finalmente, aplicarem o teorema de Pitágoras.

Na seção ***Palavras-chave***, a sugestão para a síntese dos conceitos desenvolvidos é a elaboração de diagramas, nos quais os estudantes podem fazer composições de tipos de projeção cartográfica. Dessa maneira, possibilita-se uma revisitação ao que foi estudado no capítulo, favorecendo conexões entre ideias e procedimentos que foram apresentados separadamente por razões didáticas.

O conhecimento organizado pelos estudantes vai exprimir a compreensão das projeções cartográficas estudadas. Essa síntese pode ser comparada com as ideias iniciais da turma discutidas na primeira roda de conversa sugerida no início deste capítulo.

Matemática e tecnologia

O estudo iniciado e o vínculo com o uso de recursos tecnológicos que esse tema apresenta podem ir além da utilização dos aplicativos, *sites* e vídeos sugeridos, que exploram as características de cada tipo de projeção estudado.

Em um mundo altamente tecnológico e globalizado, compreender por meio dos conceitos matemáticos como os recursos de geolocalização funcionam é atribuir um valor maior à relação entre a ciência matemática e suas aplicações no ramo da tecnologia.

Pesquisas sobre a divulgação de dados georreferenciados e a utilização de aplicativos de navegação podem desencadear boas discussões que envolvam a divulgação de dados para intervir positivamente em sua realidade local e/ou global.

Por esse motivo, vale destacar esta seção do livro que mostra como o Sistema de Posicionamento Global via satélite (GPS) foi concebido, detalhando a utilização de localização de coordenadas geográficas, sua conversão para as coordenadas no espaço, a modelagem que envolve as equações das superfícies esféricas associadas à posição de cada satélite e, finalmente, a determinação da localização do usuário.

A proposta que acompanha esta seção configura um bom exemplo de como utilizar os recursos tecnológicos para uma aprendizagem significativa em sala de aula, desenvolvendo múltiplos conceitos da área de Matemática e de outras áreas do conhecimento.

Antes de iniciar a leitura do texto, pode-se convidar os estudantes a realizar uma roda de conversa sobre os diferentes instrumentos utilizados ao longo do tempo para orientação espacial na superfície do globo terrestre. Bússola, astrolábio, cartas geográficas e, atualmente, navegadores digitais (GPS) têm estreita relação com muitos conceitos matemáticos. Daí, pode-se questionar os estudantes sobre a relação entre o desenvolvimento dos conceitos matemáticos e suas aplicações tecnológicas, em função das exigências de cada época.

Uma discussão em conjunto com o professor de Física sobre os conceitos gravitacionais necessários para manter um satélite em órbita geoestacionária seria interessante, pois mostraria algumas correlações existentes entre diferentes áreas do conhecimento humano. Com esse debate, pretendemos exemplificar que os avanços tecnológicos necessitam de vários elementos de diferentes componentes e áreas do conhecimento para que possam ser postos em prática.

Após a leitura do texto, sugerimos exibir aos estudantes o vídeo "Como funciona o GPS?", disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=H-VhzCEGp8k (acesso em: 31 out. 2024), que explica o funcionamento do Sistema de Posicionamento Global (GPS), para solucionar eventuais dúvidas.

PARA EXPLORAR

Aplicativo

Clément, Patrick. Satellites GPS. GeoGebra. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/jhprsQkC. Acesso em: 31 out. 2024.

Nessa plataforma, em francês, é possível simular o posicionamento de quatro satélites, suas respectivas superfícies esféricas e a determinação da intersecção entre si para a localização de um ponto na superfície terrestre.

Dissertação

Scannavino, Fernando Foresto. *A matemática e o GPS*. 2015. 33 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista (Unesp), São José do Rio Preto, 2015. Disponível em: http://www.athena.biblioteca.unesp.br/exlibris/bd/cathedra/14-09-2015/000845909.pdf. Acesso em: 31 out. 2024.

A dissertação explora, em linguagem simples, o funcionamento do Sistema de Posicionamento Global e os principais conceitos matemáticos envolvidos em seu funcionamento.

POR DENTRO DO ENEM E DOS VESTIBULARES

Nesta seção, os estudantes se deparam com uma situação-problema que, aparentemente, pode causar impressão negativa no momento de um exame com tempo limitado. O que se deseja mostrar a eles, evitando que abandonem rapidamente questões com textos mais elaborados, é que compreendam que, muitas vezes, a resolução de questões desse tipo demanda somente a leitura cuidadosa e o reconhecimento de conceitos matemáticos elementares.

Solicite aos estudantes que resolvam as questões propostas aplicando o que aprenderam. Elas podem ser utilizadas como instrumento de avaliação, tarefa extraclasse ou, ainda, como objeto de discussão na sala de aula, em duplas ou em pequenos grupos.

UNIDADE 3

PROGRAMAÇÃO E PENSAMENTO COMPUTACIONAL

CAPÍTULO 7 PENSAMENTO COMPUTACIONAL

Para instigar a curiosidade dos estudantes, recomendamos que você faça algumas perguntas sobre a foto apresentada na abertura da unidade. Essa pode ser uma boa oportunidade para sondar os conhecimentos prévios da turma e levar os estudantes a elaborar conjecturas. Algumas sugestões de perguntas são:

- Você faz ideia de quando surgiu o primeiro computador eletrônico?
- Como deveria ser a aparência dessa máquina?
- Entre as funções que ele exercia, qual era a principal?
- Como você imagina que serão os computadores no futuro?
- Que características tais máquinas terão?

No início do capítulo, os estudantes são convidados a conhecer um pouco da história da computação moderna e algumas das personagens envolvidas nessa história. Espera-se, com isso, que o conhecimento ganhe significado.

Apresentar o Eniac, considerado o primeiro computador eletrônico, e falar um pouco de alguns conceitos relativos à programação é uma maneira de os estudantes perceberem que, apesar de a tecnologia ter evoluído consideravelmente, algumas ideias básicas são utilizadas até hoje, como é o caso do sistema binário, dos algoritmos, da necessidade de sensores de entradas e saídas de dados, etc.

Ainda no início do capítulo, sugerimos que você explore as minibiografias das mulheres que participaram da programação do Eniac. Se possível, e se você considerar oportuno, organize uma roda de conversa para discutir a participação das mulheres nas ciências exatas e nos campos relativos à tecnologia. Evidenciar às estudantes suas potencialidades e valorizar o papel da mulher nesses campos de atuação pode auxiliar na construção de uma autoimagem positiva e na elaboração dos próprios projetos de vida.

PARA EXPLORAR

Site

Academia Brasileira de Ciências (ABC). Por que as meninas não querem fazer ciências exatas? Mulheres na ciência, 8 mar. 2019. Disponível em: http://www.abc.org.br/2019/03/08/por-que-as-meninas-nao-querem-fazer-ciencias-exatas/. Acesso em: 31 out. 2024.

Esse texto traz uma reflexão sobre a participação feminina nas ciências exatas. De acordo com o censo de 2016, entre os estudantes matriculados no Ensino Superior, 57,2% eram mulheres. Apesar disso, o número de mulheres nas ciências exatas e na engenharia ainda é muito menor que o de homens.

No tópico "Scratch", os estudantes farão experiências com programação em uma plataforma gratuita e de uso bastante intuitivo. A programação utilizada no Scratch é simples, o que permite aos estudantes adquirir mais intimidade com as características do pensamento computacional à medida que se familiarizam com as ferramentas e com os comandos que compõem essa plataforma.

O objetivo desse tópico é mostrar a eles que, por trás da confecção de um produto, seja ele físico, seja ele virtual, há um processo. Especificamente nesse caso, o que precede a confecção de um programa é a compreensão das características do pensamento computacional.

No primeiro contato dos estudantes com o Scratch, incentive-os a explorar as funcionalidades do *software*. Solicite-lhes que façam alguns experimentos e investiguem livremente os blocos de comandos. Caso não os descubram sozinhos, explique que, para testar algum comando, basta clicar sobre ele uma única vez na área de *scripts*.

A exploração livre é uma etapa importante para um indivíduo conhecer um novo recurso, independentemente de ele ser material ou virtual, pois favorece o desenvolvimento da autonomia e da criatividade. Nessa fase, não se preocupe com erros, pois se trata apenas de um levantamento prévio de hipóteses sobre o funcionamento dos comandos do Scratch.

Sabemos que boa parte dos jovens são investigadores natos de aplicativos; por isso, depois de um tempo dessa pesquisa livre, peça que comentem as descobertas feitas e registre-as no quadro. Depois, incentive-os a estabelecer um comparativo entre as hipóteses feitas e o conteúdo apresentado no Livro do Estudante.

Acompanhe-os na leitura e na produção da seção ***Tecnologia***, na qual eles são convidados a criar um jogo de perguntas e respostas (*quiz*). Essa atividade pode ser feita em duplas ou trios, de maneira que todos possam manipular o programa para se familiarizar com os movimentos e encaixes dos blocos de comandos. Desde a escolha do cenário até a seleção do tema e das perguntas e respostas, há muito trabalho a ser feito, o que pode ocupar algumas aulas. Por isso, o registro do que foi feito e do que falta fazer, ao final de cada aula, é importante para garantir a continuidade do processo de programação sem que seja preciso recomeçar do zero a cada interrupção. De maneira geral, os estudantes se interessam por atividades desse tipo. Assim, se julgar conveniente, aproveite a oportunidade para motivá-los a compreender a importância da tecnologia e reforce como o Scratch pode ser útil em outras situações.

Outra questão importante em relação a esta seção diz respeito ao desenvolvimento do pensamento computacional, pois, simultaneamente à elaboração do jogo, espera-se que os estudantes trabalhem, ainda que sem o conhecimento explícito, características do pensamento computacional, como decomposição, abstração e a elaboração do próprio algoritmo.

O desafio proposto na atividade **4** desta seção pode tornar-se um projeto. Perceba que essa é uma atividade que exige tempo para ser executada, e que o resultado pode ser compartilhado com os demais colegas ou, ainda, com a comunidade escolar. Esta atividade é realmente um desafio para os estudantes, pois eles terão de utilizar comandos que não lhes foram apresentados. Sugerimos que ela seja realizada em mais de uma aula e que você incentive o compartilhamento de ideias entre os estudantes. Aproveite para observar como eles exploram a ferramenta e analisam possíveis soluções para eventuais dificuldades.

O tópico "Pensamento computacional" pode ser lido pelos estudantes individualmente e, ao final, recomendamos organizar uma roda de conversa, na qual eles possam expressar o que entenderam sobre o assunto e esclarecer dúvidas uns dos outros, que, porventura, tenham surgido durante a leitura.

Mais importante do que identificar as características do pensamento computacional é compreender como elas se relacionam. É essencial que os estudantes percebam que essa maneira de pensar pode ser utilizada para resolver uma infinidade de problemas, não só os relacionados à Matemática, mas, também, a problemas cotidianos. Dessa maneira, entendemos que o desenvolvimento do pensamento computacional é parte da formação integral dos estudantes.

Depois de apresentar as características do pensamento computacional, é possível verificar se os estudantes se dão conta de que já fizeram uso desse raciocínio anteriormente, por exemplo, na seção ***Tecnologia***, quando tiveram de criar um jogo *quiz*.

Apesar de o pensamento computacional ser utilizado em diversas situações, apresentamos muitas contextualizações na área da Matemática. Assim, proporcionamos o desenvolvimento do pensamento computacional e, simultaneamente, potencializamos a aprendizagem matemática.

Nossa intenção, ao organizar os conteúdos desse modo, é permitir que os estudantes explorem e investiguem algumas ideias relativas à linguagem de programação, para depois formalizar o conhecimento elaborado por eles.

Reserve um tempo para explicitar o conceito de algoritmo, pois trata-se de um pilar importante desta unidade. Permita que os estudantes identifiquem alguns algoritmos que utilizam diariamente, como o procedimento para escovar os dentes, colocar os calçados e ir de casa para a escola. Aproveite os exemplos dados no texto para explorar também os algoritmos das operações ou os utilizados para resolver uma equação. Observe se eles compreendem que, em todas essas situações, existe a ideia de sequência ordenada para se obter um resultado.

O texto do boxe "Biometria" permite ampliar as ideias relacionadas a uma das características do pensamento computacional (reconhecimento de padrões). Além disso, sua parte final favorece uma discussão integrada com temas da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, como identificação por DNA, e da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, como privacidade e compartilhamento de dados. É possível explorar também temas como segurança digital. A seguir, apresentamos algumas perguntas que podem contribuir para essa articulação.

- O que torna cada indivíduo único?
- Como distinguir dois gêmeos idênticos?
- Quais implicações (positivas e negativas) os sistemas biométricos impõem à sociedade contemporânea?

Na seção ***Problemas e exercícios propostos***, apresentamos atividades que permitem aos estudantes utilizar o pensamento computacional, na medida em que precisam identificar a regra ou o padrão de funcionamento de jogos, decompor o problema em partes menores, de acordo com as informações disponíveis, utilizar um algoritmo de resolução e, ao final, abstrair os procedimentos para compreender que o processo utilizado na resolução pode ser generalizado para problemas semelhantes.

Na seção ***Cálculo rápido***, os estudantes vão se deparar com diversas atividades que exercitam estratégias de cálculo mental.

Sugerimos que você escolha apenas uma atividade a cada aula, de modo que os estudantes possam conversar sobre as diferentes maneiras de resolver cada um dos itens e, assim, possam aprender uns com os outros e ampliar o próprio repertório de estratégias de cálculo mental.

Os problemas da seção ***Para recordar***, apesar de tratarem de objetos de conhecimento diferentes, têm em comum a regularidade. Ou seja, os estudantes devem identificar um padrão e generalizá-lo, utilizando propriedades numéricas, algébricas e geométricas. Isso colabora para o desenvolvimento de habilidade para resolver problemas e do pensamento computacional, ao mesmo tempo que os jovens têm a oportunidade de recordar diversos objetos de conhecimento da Matemática.

Nessas duas últimas seções, você pode identificar alguns conhecimentos que precisam de mais atenção, seja na forma de uma retomada, seja com um plano de estudo mais individualizado, que você pode acompanhar no decorrer das aulas.

A seção ***Foco no raciocínio lógico***, como foi dito na parte geral deste manual, é muito instigante e motivadora para os estudantes. Nessa proposta, encontram-se três problemas que exigem raciocínio lógico-dedutivo, porém, com estratégias distintas de resolução. O registro organizado das informações é essencial para que seja possível responder a cada um deles. Os estudantes não precisam resolver todos os problemas de uma só vez, mas devem compará-los ao final, para que possam ampliar a análise sobre as características comuns dos problemas, em termos de estratégias e de maneira de registro.

Muitos estudos indicam que a aprendizagem torna-se mais eficaz quando o estudante pode refletir sobre as ações realizadas na elaboração do próprio conhecimento. Esse processo é chamado de metacognitivo. Por esse motivo, a seção ***Palavras-chave*** configura uma excelente oportunidade para levar o estudante a reelaborar suas hipóteses sobre determinando assunto utilizando estratégias diversas. Como fechamento deste capítulo, solicita-se aos estudantes que elaborem um mapa mental sobre as principais características do pensamento computacional. Isso significa construir um recurso visual com o objetivo de sintetizar os principais tópicos abordados. Há um exemplo de como fazer isso no Livro do Estudante; assim, os estudantes podem criar os próprios mapas mentais, de modo que lhes sejam mais significativos para a aprendizagem do que receber algo pronto.

Matemática e tecnologia

Esta seção detalha o funcionamento do QR Code, um tipo de codificação bidimensional que propicia o armazenamento de dados em quantidade superior à de um código de barras tradicional. Além de especificar as variantes desse tipo de código, a seção propõe aos estudantes a leitura das informações contidas em notas fiscais que apresentam essa codificação, com o intuito de quantificar a tributação estadual/federal incidente sobre os produtos adquiridos.

O foco da proposta é utilizar a leitura do QR Code, presente em notas fiscais, como subsídio para investigar as diferentes modalidades de tributação que incidem sobre produtos adquiridos. Sugerimos uma leitura compartilhada do texto sobre o funcionamento do QR Code e uma roda de conversa sobre as diferentes ocasiões nas quais os estudantes tiveram contato com esse recurso. Trata-se de um momento de sondagem dos conhecimentos prévios e, também, de uma oportunidade para verificar o tipo de interação que os estudantes mantêm com a tecnologia.

Finalizada essa etapa, verifique se entre os estudantes há alguma incompreensão sobre o tipo de representação usada pelo QR Code (binária e bidimensional) e, caso julgue necessário, explique-lhes que esse tipo de marcador armazena dados e informações em forma de linhas e colunas. Uma proposta interessante é realizar um painel com todas as situações nas quais os estudantes tiveram contato com esse tipo de representação, explicitando também o modo como efetuaram sua leitura.

Solicite-lhes, então, que tragam para a próxima aula um exemplo de nota fiscal com QR Code para que seja feita a análise das informações armazenadas nesse código.

Como medida de precaução, sugerimos que você providencie algumas notas fiscais com esse recurso para ceder aos estudantes que não as trouxerem na data combinada. É importante que eles não se sintam constrangidos com os tipos e a quantidade de produtos adquiridos e, para isso, reforce que o foco do trabalho será sobre os impostos incidentes nos produtos. Se considerar oportuno, aproveite o momento para incentivá-los a pesquisar os produtos sobre os quais mais incidem tributos e aqueles que recebem isenções e incentivos fiscais para uma menor tributação, buscando entender o porquê da existência de tributações diferenciadas.

Se você souber com antecedência que, no momento da leitura dos QR Codes, poderá não haver conexão com a internet, providencie telas impressas das respectivas notas fiscais para exemplificar como o recurso tecnológico auxilia na transparência dos dados para o consumidor. Uma sugestão é organizar os estudantes em pequenos grupos, distribuir a cada um deles uma nota fiscal com QR Code e solicitar a um dos integrantes do grupo que efetue a leitura do código e compartilhe as informações com os demais, para que todos anotem-nas no caderno.

Espera-se que os estudantes avaliem que o preço total a pagar e o total dos tributos são os itens mais significativos. Assim, para a discussão, pode-se solicitar que determinem o percentual da compra efetuada que os impostos representam. Inicialmente, esse percentual pode ser calculado mentalmente ou ser estimado; em outro momento, eles podem efetuar os cálculos utilizando papel e lápis ou uma calculadora, para validar o resultado obtido anteriormente.

No item **b** da atividade **2**, espera-se que os estudantes encontrem que os tributos que devem ser informados ao consumidor na emissão da nota fiscal são:

- Imposto sobre Operações relativas à Circulação de Mercadorias e sobre Prestações de Serviços de Transporte Interestadual e Intermunicipal e de Comunicação (ICMS);
- Imposto sobre Serviços de Qualquer Natureza (ISS);
- Imposto sobre Produtos Industrializados (IPI);
- Imposto sobre Operações de Crédito, Câmbio e Seguro, ou relativas a Títulos ou Valores Mobiliários (IOF);
- Contribuição para o Programa de Integração Social (PIS) e para o Programa de Formação do Patrimônio do Servidor Público (Pasep);
- Contribuição para o Financiamento da Seguridade Social (Cofins);
- Contribuição de Intervenção no Domínio Econômico, incidente sobre a importação e a comercialização de petróleo e seus derivados, gás natural e seus derivados e álcool etílico combustível (Cide).

PARA EXPLORAR

Lei

Brasil. *Lei Federal n. 12741, de 8 de dezembro de 2012*. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2011-2014/2012/Lei/L12741.htm. Acesso em: 31 out. 2024.

Lei que regulamenta o esclarecimento ao consumidor dos tributos pagos por ele, previsto na Constituição Federal e no Código de Defesa do Consumidor.

Você pode organizar os estudantes em grupos, de modo que cada um se aprofunde em um tributo, para que depois os grupos compartilhem suas descobertas com a turma. Em parceria com um professor da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, a turma pode promover um debate sobre diferentes temáticas a respeito da tributação pesquisada. Designar grupos para pesquisar previamente os assuntos e elaborar recursos audiovisuais, como *slides* e gráficos, para comunicar ideias e conclusões no momento da apresentação, são ações que ajudam os estudantes a desenvolver o pensamento crítico e múltiplas habilidades.

Recomendamos que a avaliação do trabalho desenvolvido seja contínua, para que você analise, entre outros pontos:

- a interação entre os estudantes durante a execução dos trabalhos em grupo, identificando suas posturas em relação às atividades propostas;
- a colaboração entre os pares nos momentos de análise, discussão, conclusões e exposição dos resultados obtidos;
- a prática que envolve a utilização dos recursos tecnológicos para a leitura dos dados impressos no QR Code;
- a leitura e identificação das informações mais significativas para a análise dos tributos apresentados na nota fiscal;
- a proatividade na busca de informações complementares sobre os impostos e tributos estudados;
- a organização, a apresentação e a argumentação dos dados para a realização do debate proposto.

CAPÍTULO 8 ALGORITMOS E FLUXOGRAMAS

O foco deste capítulo é garantir que os estudantes compreendam os conceitos matemáticos envolvidos na leitura e no armazenamento de dados de equipamentos eletrônicos e que se apropriem da representação de algoritmos em fluxogramas.

No tópico "Sistema binário", os estudantes aprendem como representar números nesse sistema, estabelecendo a conversão na escrita de um mesmo valor do sistema decimal para o binário, e vice-versa. É importante ressaltar que, ao conhecer a representação numérica do mesmo valor em base diferente da decimal, os estudantes se aprofundam na estrutura do próprio sistema de numeração decimal.

Se possível, amplie a análise das atividades **R1** e **R2** para que os estudantes observem a quantidade de zeros e de números 1 utilizados para representar cada número e incentive-os a relacionar essa quantidade com a passagem da corrente elétrica em um computador.

Na seção ***Problemas e exercícios propostos***, observe como os estudantes leem o diagrama da atividade **2**, que exemplifica a obtenção da escrita binária do número 23. Aproveite para comparar essa forma de escrita com o processo de conversão apresentado nas páginas 197 e 198.

O tópico "Armazenamento de dados" tem como objetivo apresentar aos estudantes as principais unidades de medida para armazenamento e transmissão de dados. Converse com eles sobre a importância desse conhecimento no mundo atual, no qual muitas informações são transmitidas digitalmente. Destaque também a capacidade de armazenamento dos dispositivos e reforce a necessidade de conhecer e saber comparar as diversas unidades de medida de informática.

Após a leitura do texto pelos estudantes, incentive a comparação entre instrumentos antigos, como o computador da espaçonave Apollo 11, e aqueles com os quais os jovens convivem atualmente, como celulares e *tablets*. Outro ponto a ser destacado é a diferenciação entre a capacidade de armazenamento de um dispositivo eletrônico e a velocidade de transferência de informações.

Após essa exploração, retome o estudo dos algoritmos. No item "Código de barras", do tópico "Outros exemplos de algoritmos", os estudantes têm oportunidade de entender o significado e a regra de composição de um código do tipo EAN-13, o mais utilizado mundialmente. A escolha do código de barras justifica-se por ser um tipo de código com que os estudantes têm fácil contato, que pode ser encontrado na embalagem de praticamente qualquer produto e em boletos e contas de água e de energia elétrica, por exemplo. Explique que as regras que definem as partes de um código de barras bem como o dígito verificador constituem um algoritmo, ou seja, um processo dividido em etapas bem definidas para a obtenção do resultado, que é identificar a empresa, os valores, a procedência, entre outras informações. As atividades de determinação do dígito verificador são oportunidades para que os estudantes efetuem cálculos simples, mas de modo organizado, de acordo com o algoritmo que define o código de barras no sistema EAN-13.

A primeira seção ***Tecnologia*** deste capítulo retoma o trabalho iniciado no capítulo **7**. As explorações com o Scratch são relevantes para que os estudantes compreendam, na prática, a importância de os comandos estarem ordenados na construção de um algoritmo. Além disso, a organização da seção foi pensada para que eles desenvolvam simultaneamente ideias relativas à programação e à elaboração de algoritmos. Conhecimentos sobre figuras planas e suas propriedades podem ser retomados e aprofundados com a proposta de movimentações e traçados na tela do Scratch. Na atividade final, promova um painel de soluções para que diferentes algoritmos sejam comparados e analisados pela turma.

Mais do que a mera representação dos passos de um procedimento, no tópico "Fluxogramas", essa representação é compreendida como um instrumento que orienta o processo cognitivo do programador na obtenção do algoritmo, para que, depois, esse algoritmo seja transferido para a máquina ou para outra pessoa, e a sequência seja executada com a obtenção do resultado esperado.

Visto que os estudantes já têm alguma familiaridade com fluxogramas desde o Ensino Fundamental, sugerimos que você faça uma sondagem a fim de verificar os conhecimentos que eles têm em relação a esse objeto de conhecimento. Ao compartilhar diferentes fluxogramas entre si, os estudantes têm a possibilidade de analisar uma diversidade de percursos possíveis na busca de um caminho mínimo para executar uma tarefa. Finalmente, outra característica que pode ser explorada no trabalho com fluxogramas é o monitoramento das etapas envolvidas em um processo, seja ele da área de Matemática ou não.

É interessante conversar com os estudantes sobre a vantagem do uso dos fluxogramas na elaboração de programas e as relações que eles mantêm com o pensamento computacional. O importante é levá-los a compreender que um fluxograma nada mais é do que uma maneira de representar as etapas de construção de um algoritmo. Por ser uma linguagem visual, o fluxograma permite compreender com mais facilidade cada etapa a ser executada. Além disso, é possível visualizar outras maneiras de obter o mesmo resultado final e, com isso, expandir as estratégias de resolução para um mesmo problema.

Na segunda seção ***Tecnologia***, trabalhamos com um *software* de desenho gráfico para a construção de um fluxograma. Sugerimos que você realize previamente as etapas e as atividades sugeridas e, caso seja necessário, realize adaptações de acordo com a realidade da turma.

Visando ampliar o repertório dos estudantes em relação às representações mais habituais que envolvem os algoritmos, o boxe "Linguagem nativa, fluxograma e pseudocódigo" mostra mais do que uma diferenciação entre essas representações, permitindo que os estudantes realizem uma leitura fundamentada dessas estruturas ao notá-las em seu cotidiano.

As atividades propostas na última seção ***Problemas e exercícios propostos*** do capítulo favorecem conexões com componentes curriculares de outras áreas do conhecimento, como Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. Não se trata de tornar os estudantes especialistas na escrita de fluxogramas, mas propiciar que conheçam essa linguagem e entendam que ela pode ser utilizada em diferentes contextos para a organização de processos.

Nas atividades **3** e **4** da seção ***Cálculo rápido***, são propostas atividades relativas a ângulos formados por retas paralelas e uma transversal. Na discussão das estratégias de cálculo, note se os estudantes se recordam das propriedades dos ângulos entre as retas.

A seção ***Para recordar*** traz problemas que envolvem o estudo de representações gráficas de funções e problemas que envolvem grandezas e medidas.

A seção ***Foco no raciocínio lógico*** propõe dois problemas que têm em comum a necessidade da leitura de um esquema. Embora o primeiro seja mais simples que o segundo, a interpretação correta das imagens é essencial para a resolução das duas situações. Destaque essa habilidade para que os estudantes percebam que ler é uma habilidade ampla que envolve diferentes conexões, como decodificação de palavras, contextualização e interpretação.

A seção ***Palavras-chave*** coloca novamente os estudantes diante de uma atividade metacognitiva. A proposta é fazer com que eles sintetizem o conhecimento adquirido no decorrer deste capítulo na forma de uma mensagem eletrônica ou em papel, que será compartilhada com os colegas da turma. Nesse processo, muitas habilidades linguísticas são mobilizadas, como a escolha de argumentos sólidos que justifiquem os principais tópicos abordados sobre determinado tema e o uso adequado da língua portuguesa e da linguagem matemática.

Matemática e tecnologia

O trabalho inicial com linguagem de programação e tecnologias digitais para executar um algoritmo pode ser um grande aliado da aprendizagem no século XXI. Ao utilizar recursos como jogos, *chatbots* ou mesmo robôs articulados, os estudantes podem aprender novas maneiras de resolver um problema com o auxílio da linguagem matemática e de programação em diversas situações, contribuindo, entre outros aspectos, para as escolhas alinhadas ao projeto de vida e às amplas possibilidades de carreira para o futuro profissional.

Antes de iniciar o trabalho com a seção propriamente dita, pode-se elaborar um painel de ideias mostrando as concepções que os estudantes trazem consigo em relação à robótica e à inteligência artificial. Caso você considere oportuno, disponibilize um tempo para que os estudantes elaborem textos breves sobre os questionamentos levantados e, depois, socializem-nos com os colegas. Você pode identificar os principais pontos nas falas dos estudantes e registrá-los no quadro, compondo, assim, uma visão geral desses recursos tecnológicos.

Assim que o painel estiver composto, uma estratégia interessante é solicitar aos estudantes que reorganizem as ideias listadas no caderno, classificando-as de acordo com a área de atuação de cada uma delas. Algumas sugestões de áreas para realizar essa classificação podem ser: Indústria, Comércio, Telecomunicações, Medicina, Casa, Segurança, Pesquisa, etc. Por exemplo, caso os estudantes tenham levantado inicialmente que os robôs e a inteligência artificial estão presentes na produção de automóveis e na realização de cirurgias, esses itens devem ser categorizados, respectivamente, nas áreas Indústria e Medicina.

Após a categorização ter sido concluída, os estudantes podem realizar a leitura individual da primeira parte do texto para conferir se as hipóteses levantadas inicialmente condizem com a exposição de ideias feita no texto.

É possível que o trecho destinado à presença de robôs e inteligência artificial em filmes desperte a curiosidade entre os estudantes. Perguntar se algum deles pode fazer algum breve relato sobre séries e filmes que envolvem essa temática contribui para a ampliação do repertório cultural de todos.

A leitura do texto "IA pode colocar em risco 481 mil empregos numa década" pode ser realizada de maneira conjunta ou intercalada pelos estudantes. Esse material pode ser subsídio para um debate que envolva a temática da manutenção dos postos de trabalho e sua relação com o avanço da tecnologia. Questionar se os estudantes conhecem algum caso que exemplifique esse tipo de reestruturação das relações de trabalho pode favorecer o amadurecimento do senso crítico deles e contribuir para o desenvolvimento da competência geral **6**. Outra sugestão é aprofundar a discussão, convidando o professor de Sociologia para auxiliar nas questões relativas à qualificação de mão de obra especializada e seu constante aperfeiçoamento.

Na resolução das atividades, garanta que o ambiente seja favorável ao debate e ao desenvolvimento da empatia, da resiliência, do respeito e da cultura de paz. Por ainda ser um tipo de atividade pouco comum em sala de aula, é possível que muitos estudantes demonstrem dificuldades na elaboração do jogo, uma vez que, mesmo simples e acessível em língua portuguesa, utiliza elementos específicos da linguagem de programação que podem não ser de domínio de todos. Portanto, nesse momento, a turma pode discutir o assunto e tirar o máximo proveito das possibilidades apresentadas nesta seção, favorecendo, se adequado, o protagonismo dos estudantes que dominam melhor esses processos. Você pode retomar o questionamento feito antes da leitura do texto-base da seção, a respeito das experiências prévias com robôs, atendimento automatizado ou qualquer outro relato relevante para o contexto, principalmente em relação às opiniões sobre o futuro do trabalho, seja ele automatizado ou não. Com isso, espera-se que os estudantes compartilhem repertórios e aumentem as possibilidades de resposta para a atividade **1**.

Para a atividade **2**, incentive-os a retomar as características do pensamento computacional e destaque a importância de analisar cada etapa de criação do jogo, como os elementos podem ser conectados e quais são as possibilidades de combinação dos blocos para a execução das mais variadas atividades pela personagem, que também pode ter o formato escolhido. Questione-os, entre outros aspectos, de que maneira o jogo pode ser facilitado ou dificultado, por quem pode ser acessado, em que plataforma, quais são as limitações ou as potencialidades desse tipo de linguagem, se sentiram alguma dificuldade ou se têm vontade de testar novos jogos desse tipo.

Recomendamos que a avaliação do trabalho desenvolvido nesta seção seja contínua, de modo que você verifique, por exemplo:

- a proatividade no momento da composição do painel de ideias que antecede a leitura do texto da seção;
- a adequada identificação dos tópicos listados no painel de ideias nas categorias propostas;
- a flexibilidade ao modificar/ampliar as classificações inadequadas em suas produções;
- os argumentos utilizados pelos estudantes para justificar suas percepções sobre as relações de trabalho e o avanço tecnológico;
- a pertinência dos contextos propostos pelos estudantes em relação à temática abordada;
- a criatividade na construção do algoritmo do jogo;
- a coesão entre os comandos utilizados para a definição do algoritmo.

PARA EXPLORAR

Livros

Matarić, Maja J. *Introdução à robótica*. São Paulo: Blücher: Ed. da Unesp, 2014.

Essa obra traz a definição e o histórico da robótica, quais são os componentes de um robô e como organizar seus sensores para executar as rotinas de programação previstas. Em alguns capítulos, explora-se a aprendizagem da robótica em sala de aula e propõem-se reflexões sobre o uso da robótica no futuro.

Silva, Rodrigo B.; Blikstein, Paulo. Robótica e computação física na educação brasileira. *In*: Silva, Rodrigo B.; Blikstein, Paulo (org). *Robótica educacional*: experiências inovadores na educação brasileira. Porto Alegre: Penso, 2020.

Nesse livro, os autores discorrem sobre a utilização da robótica em diferentes espaços escolares no Brasil e contribuem com relatos de experiências do uso de robótica em sala de aula.

POR DENTRO DO ENEM E DOS VESTIBULARES

Nesta seção, o foco está na leitura de enunciados. Antes de iniciar o trabalho com as atividades resolvidas, incentive os estudantes a ler o texto inicial e certifique-se de que eles compreenderam os passos indicados.

A temática das atividades da seção favorece o aprofundamento de tópicos desenvolvidos nos capítulos, como a representação binária de números e as unidades de armazenamento de dados. Na resolução dessas atividades, o foco deve ser a estratégia, e não apenas a resposta correta, pois é ela que pode ser transposta para outros problemas.

Solicite aos estudantes que resolvam as questões propostas aplicando o que aprenderam. Elas podem ser utilizadas como instrumento de avaliação, tarefa extraclasse ou, ainda, como objeto de discussão na sala de aula, em duplas ou em pequenos grupos.

UNIDADE 4

SISTEMAS LINEARES E MATRIZES

CAPÍTULO 9 SISTEMAS LINEARES

A imagem de abertura desta unidade apresenta o supercomputador Frontier, que poderá causar certa estranheza aos estudantes, pois muitos deles podem pensar que são diversos computadores interconectados. Sugerimos que faça algumas perguntas para realizar uma sondagem inicial dos conhecimentos relativos ao assunto para introduzir essa temática e iniciar a exploração com os sistemas lineares. Alguns possíveis questionamentos: Você saberia explicar a uma pessoa o que é um supercomputador? Como você imagina o(a)aspecto/aparência de um supercomputador? Quais funções um supercomputador pode executar? Com qual finalidade os supercomputadores são construídos? Quais características são analisadas para determinar qual máquina ou equipamento eletrônico é mais potente que outro?

No início do capítulo, apresentamos um texto que explica parte do funcionamento e da construção de um supercomputador. Dessa maneira, cria-se um contexto para discutir as unidades de medidas de desempenho de diferentes equipamentos eletrônicos, visto que, no mundo contemporâneo, os consumidores devem ter subsídios para realizar uma tomada de decisão consciente que envolve, inclusive, as especificações técnicas descritas em manuais. Além disso, o exemplo das rotinas de computação sofisticadas realizadas por esse tipo de máquina constrói um cenário em que diversas restrições devem ser atendidas simultaneamente, ou seja, um grande conjunto de variáveis interdependentes, assim como acontece em um sistema de equações.

Caso julgue pertinente, assista, previamente, ao vídeo indicado no boxe *Para explorar,* da página 235 do Livro do Estudante, para verificar do que ele trata e quais intervenções você pode realizar ao apresentá-lo à turma. Se preferir, comente que também é possível ceder o poder de processamento de computadores de uso pessoal para auxiliar na pesquisa da cura de doenças (sequenciamento genético, por exemplo), nas simulações de condições meteorológicas e, inclusive, na busca de números primos muito grandes, com o intuito de aprimorar os sistemas de criptografia na internet.

A leitura e a interpretação das informações sobre o desempenho do supercomputador podem render uma boa discussão em sala de aula a respeito do poder de processamento de diferentes equipamentos eletrônicos. Os estudantes podem, por exemplo, consultar manuais técnicos ou especificações técnicas de diferentes produtos em lojas virtuais a fim de descobrir qual *videogame* é capaz de gerar melhores gráficos ou o modelo de *smartphone* mais avançado ao comparar suas respectivas especificações. A compreensão dos conceitos matemáticos aqui envolvidos (prefixos, potências de base 10, etc.) é essencial para realizar uma comparação adequada entre tais produtos.

A discussão sobre a utilização de supercomputadores para resolver múltiplas equações simultaneamente no contexto da previsão do clima pode ser aproveitada para questionar os estudantes sobre qual é a principal característica de um sistema de equações. O importante é eles perceberem que elaborar diferentes critérios que devem ser atendidos concomitantemente para resolver determinada situação configura a essência de sistemas de equações simultâneos, apesar de a proposta, nesta etapa da escolaridade, ser a de analisar sistemas mais simples.

A abordagem metodológica neste capítulo explora a resolução de sistemas lineares do tipo 2×2 com o auxílio de *softwares* de geometria dinâmica. Dessa maneira, os estudantes realizam uma análise prévia do tipo de sistema que deve ser resolvido e, posteriormente, verificam como obter suas soluções, quando possíveis. Essa proposta envolve uma lógica inversa, uma vez que eles devem primeiro pensar sobre a classificação do sistema (e para isso eles podem, ou não, se valer do recurso tecnológico) e, depois, validar sua hipótese e determinar a solução se ela existir, otimizando o tempo envolvido na resolução. Outro aspecto importante é a contextualização presente nas atividades resolvidas e propostas, que apresentam aos estudantes diferentes situações que podem ser modeladas por sistemas lineares, com alternância entre as representações algébricas e geométricas.

Nos tópicos "Sistemas lineares 2×2", "Resolução de sistemas lineares 2×2" e "Classificação de sistemas lineares 2×2", a utilização de um *software* de geometria dinâmica é altamente recomendável, pois, com esse recurso, os estudantes podem realizar explorações nem sempre possíveis com lápis e papel, uma vez que a rigidez da construção não pode ser modificada posteriormente.

PARA EXPLORAR

Sites

Desmos. Desmos Studio. Disponível em: https://www.desmos.com/?lang=pt-BR. Acesso em 31 out. 2024.

Esse *site* disponibiliza uma calculadora gráfica que pode ser utilizada *on-line*.

Graphmatica. Disponível em: http://www.graphmatica.com. Acesso em: 31 out. 2024.

Nesse *site*, é possível encontrar as diferentes versões do aplicativo Graphmatica, que é um gerador de gráficos de funções.

GeoGebra. Disponível em: https://www.geogebra.org/. Acesso em: 31 out. 2024.

Nesse *site*, é possível encontrar diferentes aplicativos matemáticos para trabalhar, por exemplo, com figuras geométricas ou com gráficos de funções.

Régua e compasso. Disponível em: http://www.professores.im-uff.mat.br/hjbortol/car/index.html. Acesso em: 31 out. 2024.

Nesse *link*, encontram-se os arquivos para a instalação do *software* de geometria dinâmica "Régua e compasso" dependendo do sistema operacional usado.

Caso exista alguma dificuldade em relação ao acesso à internet, é possível baixar o arquivo executável correspondente a cada um desses aplicativos e, depois, instalar nas máquinas, ou, ainda, solicitar aos estudantes que instalem esses aplicativos previamente no próprio *smartphone*, atribuindo, assim, uma funcionalidade pedagógica a esse aparelho. Caso a utilização de recursos tecnológicos não seja viável, é possível desenvolver os conceitos previstos nas seções apenas utilizando construções que possam ser feitas com lápis e régua, já que o foco da proposta está nas discussões relativas às posições das retas no plano. Um material que pode auxiliar os estudantes nesse caso é a malha quadriculada.

Note que, na seção ***Problemas e exercícios propostos***, muitas das situações são elaboradas com a intenção de favorecer a modelagem matemática por parte dos estudantes, que podem resolvê-las algebricamente por cálculo mental ou cálculo estimado, ou, ainda, com o auxílio de *softwares* de geometria dinâmica. Uma proposta interessante é propor a diferentes grupos de estudantes que resolvam a mesma situação utilizando estratégias diferentes. Assim, ao comparar as resoluções, é possível discutir a vantagem de se escolher certa estratégia para resolver um tipo específico de sistema linear 2×2.

De maneira geral, os comandos dos *softwares* de Geometria são intuitivos. Além disso, os estudantes dessa faixa etária costumam apresentar um grande senso de curiosidade. É provável que eles não tenham dificuldade em descobrir como realizar as

instruções solicitadas nas atividades **6** e **7**. Se for necessário, reserve um tempo para auxiliá-los, orientando-os a compartilhar conhecimentos entre si.

Ampliando os conhecimentos desenvolvidos nas seções iniciais, os estudantes se deparam com situações que envolvem sistemas lineares do tipo 3×3, que, para serem compreendidas, exigem que eles realizem uma transposição dos conceitos aprendidos no plano para o espaço. Essa transposição pode ser facilitada com o uso de um *software* de geometria dinâmica, que propicia aos estudantes a visualização da representação das equações que compõem um sistema na forma de planos no espaço. A análise da posição relativa desses planos e de suas intersecções orienta a classificação dos sistemas 3×3 em relação à sua resolução. Incentive os estudantes a perceber que o movimento de construção é parecido ao desenvolvido previamente por eles em relação aos sistemas lineares 2×2, possibilitando, assim, que realizem uma comparação com aquilo que já conhecem para a construção de novos conhecimentos.

Sugerimos que inicie o tópico "Sistemas lineares 3×3" com a leitura compartilhada da situação-problema proposta e incentive os estudantes a apontar as semelhanças e diferenças que eles observam entre essa situação e as estudadas anteriormente. É possível que muitos afirmem que será necessária a inserção de mais uma incógnita e de mais uma equação ao sistema. Após a conclusão dos estudantes, sugere-se que seja feita a formalização do conceito expondo a definição de sistema linear 3×3. Nesse caso, sugerimos acompanhar as hipóteses formuladas por eles e intervir adequadamente com perguntas sempre que houver necessidade.

Como estratégia de resolução algébrica, o tópico "Resolução de sistemas lineares 3×3" apresenta o método da adição, um recurso já conhecido pelos estudantes nos Anos Finais do Ensino Fundamental, que pode ser ampliado nessa etapa. As considerações ao final do tópico podem auxiliar os estudantes que apresentarem dificuldade no momento de identificar qual incógnita pode ser simplificada e/ou substituída na aplicação dessa técnica.

No tópico "Classificação de sistemas lineares 3×3", o uso de um *software* de geometria dinâmica é fundamental para a representação de equações que envolvem três variáveis no espaço. Na impossibilidade de utilização desse recurso metodológico, recomenda-se a leitura compartilhada do texto pelos estudantes, com sua intervenção em cada etapa, solicitando a eles que descrevam as imagens presentes no Livro do Estudante.

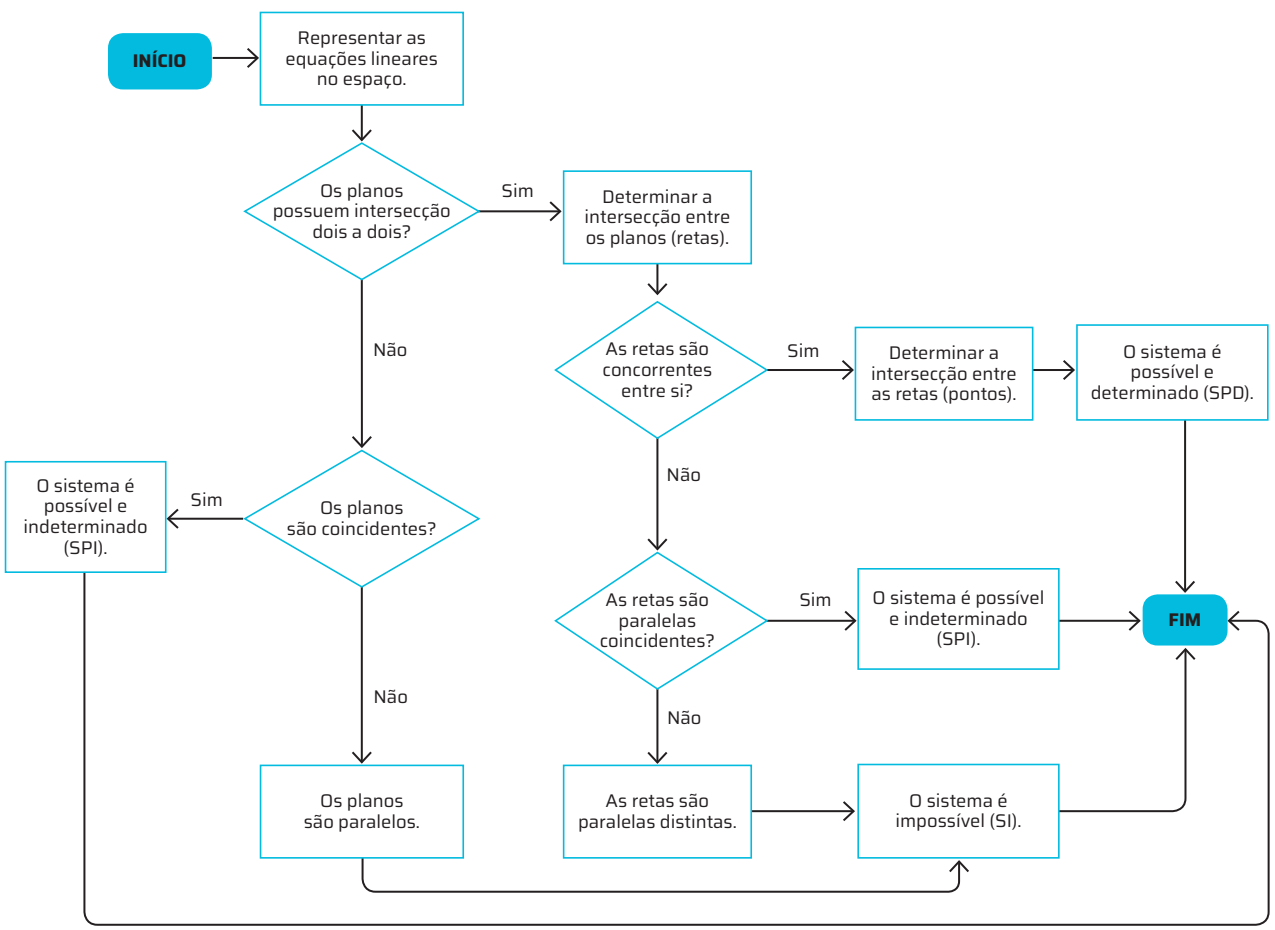
Utilizar materiais diversificados, como cartolinas, papelão e placas de acrílico, pode auxiliar os estudantes que tenham dificuldade de visualizar os planos no espaço. Também é possível organizar os estudantes em pequenos grupos para que mostrem, com apoio desses materiais, quais são as posições relativas entre os planos no espaço (dois a dois) e como são representadas suas intersecções (quando houver). Uma síntese dessas posições, parecida à exposta no boxe no final do tópico, pode ser elaborada no caderno.

Nas atividades **1** e **2** da seção ***Cálculo rápido*** é explorada a determinação dos ângulos delimitados pelas extremidades de arcos.

A seção ***Para recordar*** explora conceitos que envolvem propriedades geométricas estudadas em capítulos anteriores, e, na seção ***Foco no raciocínio lógico***, os estudantes se deparam com duas atividades: a primeira trabalha o desenvolvimento da percepção espacial, e a segunda, a decomposição da solução em etapas, retomando a importância do pensamento computacional.

Sabemos que todo processo, simples ou complexo, pode ser representado por fluxogramas. A seção ***Palavras-chave*** deste capítulo solicita aos estudantes que, em pequenos grupos, elaborem uma representação, na forma de um fluxograma, da classificação dos sistemas lineares do tipo 3×3 com base nas representações de suas equações no espaço. Apesar de, aparentemente, ser uma atividade com alto grau de complexidade, seu objetivo é permitir aos estudantes que, ao elaborar as diferentes conexões possíveis, repensem o processo de construção de conhecimento desenvolvido no capítulo.

A seguir, apresentamos um possível fluxograma que relaciona as diferentes posições dos planos no espaço, que representam as equações de um sistema linear 3×3, para classificar os tipos de sistema.



Matemática e inteligência artificial (IA)

Promova um debate sobre as aplicações da Matemática no campo da inteligência artificial. Por exemplo, a álgebra é usada para resolver sistemas de equações lineares e determinar a relação entre diferentes conjuntos de dados. Na IA, ela é usada para a criação de modelos de aprendizado de máquinas e para a análise de dados.

Após a resolução das atividades propostas, organize uma roda de conversa, a fim de que a turma socialize suas descobertas.

PARA EXPLORAR

Artigo

5 maneiras de usar a Inteligência Artificial na educação. Disponível em: https://www.fundacaotelefonicavivo.org.br/noticias/uso-da-inteligencia-artificial-na-educacao/. Acesso em: 31 out. 2024

Esse artigo traz algumas informações sobre maneiras de usar a inteligência artificial na educação.

CAPÍTULO 10 MATRIZES

A apresentação dos principais conceitos que envolvem matrizes tem dois objetivos: possibilitar aos estudantes conhecerem mais uma forma algébrica de representação e resolução de sistemas lineares e ampliar o repertório deles de estratégias de resolução de sistemas lineares com a utilização de planilhas eletrônicas. As matrizes evidenciam o processo de resolução de sistemas lineares como um algoritmo, e as planilhas eletrônicas permitem que os estudantes, por meio dos comandos que elas dispõem, transformem esse algoritmo em uma programação e tenham, assim, uma ferramenta tecnológica para resolver sistemas lineares de qualquer ordem. Assim, faremos um estudo de matrizes no que é essencial para atingir esses objetivos.

Sugerimos começar a exploração do tópico "Matrizes" solicitando aos estudantes que leiam a tabela apresentada e identifiquem o número de celulares de cada modelo vendido em cada dia da semana. Caso considere oportuno, questione-os sobre outras circunstâncias da vida diária em que os dados podem ser distribuídos na forma tabular. Muitas das atividades propostas nesse tópico auxiliam os estudantes a assimilar os conceitos associados às matrizes e, também, as operações de adição e de multiplicação que envolvem matrizes. As situações propostas estão alinhadas à temática tecnológica, apresentando contextos relacionados à manufatura de determinados equipamentos, sejam eles eletrônicos ou não. É possível utilizar, também, as atividades relativas à matriz identidade e à matriz inversa como sistematização desses conceitos.

No tópico "Matrizes e sistemas lineares", peça aos estudantes que representem algebricamente no caderno a situação-problema proposta no início do tópico e que identifiquem os coeficientes das matrizes envolvidas no sistema de equações de maneira análoga à mostrada no Livro do Estudante.

Sabe-se que as planilhas eletrônicas estão cada vez mais presentes na vida das pessoas como forma de organização e tratamento de dados; portanto, o uso desse recurso tecnológico favorece o desenvolvimento simultâneo dos conceitos matemáticos associados a matrizes e a resoluções de sistemas lineares, necessários para o bom desempenho no âmbito da escola e do mercado de trabalho. Com a popularização dos recursos informáticos, várias planilhas eletrônicas podem ser acessadas por computadores e aparelhos remotos.

Solicitar aos estudantes que multipliquem matrizes com o número de colunas da primeira diferente do número de linhas da segunda é uma boa oportunidade para fixar a condição necessária para a multiplicação entre matrizes, bem como tentar obter a matriz inversa de determinadas matrizes não invertíveis pode gerar uma discussão significativa relacionada a sistemas possíveis e indeterminados e sistemas impossíveis.

O recurso da resolução de sistemas lineares 3×3 com o uso de planilhas eletrônicas, abordado na seção ***Tecnologia***, apresenta-se como uma estratégia auxiliar e complementar aos demais processos explorados no Livro do Estudante (cálculo algébrico, representação geométrica, análise dos coeficientes, uso de *softwares* de geometria dinâmica) e amplia de maneira significativa o repertório de resoluções dos estudantes, possibilitando-lhes compreender os pressupostos matemáticos necessários para o desenvolvimento de algoritmos e de *softwares* de ampla utilização.

Na seção ***Cálculo rápido***, retomam-se as ideias de sistemas lineares, equações e o teorema de Tales.

Na seção ***Palavras-chave***, verifique se os estudantes têm alguma dúvida em relação aos conceitos trabalhados no capítulo. Se for necessário, retome-os com eles para sanar as dúvidas.

Matemática e tecnologia

Esta seção favorece o trabalho com as competências gerais **3** e **4** propostas pela BNCC e possibilita integração com a área de Linguagens e suas Tecnologias. Além disso, é possível trabalhar com os temas contemporâneos transversais Ciência e tecnologia e Multiculturalismo. Um trabalho com o professor de Arte pode ser proposto a fim de explorar a competência **7** de Linguagens e suas Tecnologias. O conhecimento relativo à formação de imagens digitais nas telas dos aparelhos é de fundamental importância no mundo contemporâneo e possibilita a fruição, a leitura e a criação de imagens utilizando a técnica sugerida, o que desenvolve a criatividade e amplia o repertório cultural dos estudantes.

PARA EXPLORAR

Artigo

Mannara, Barbara. O que é *pixel art* e como fazer. *Techtudo*, 18 ago. 2016. Disponível em: https://www.techtudo.com.br/noticias/2016/08/o-que-e-pixel-art-e-como-fazer.ghtml. Acesso em: 31 out. 2024.

Esse artigo traz algumas informações sobre *pixel art* e indica alguns programas gratuitos para a criação desse tipo de arte.

POR DENTRO DO ENEM E DOS VESTIBULARES

Nesta seção, antes de os estudantes iniciarem a leitura e a resolução das atividades propostas, converse com eles sobre a importância dos estudos de sistemas lineares e de matrizes. São temas frequentes em questões do Enem e de vestibulares, pois permitem uma abordagem em diferentes contextos de muitas áreas do conhecimento. Além disso, a resolução de problemas que envolvem sistemas lineares e matrizes exigem dos estudantes o desenvolvimento de habilidades analíticas e de raciocínio lógico, essenciais para a solução de problemas complexos.

Ao selecionar essas questões para a seção, buscamos não apenas preparar os estudantes para os exames, mas também ajudá-los a se tornar pensadores críticos e capazes de enfrentar desafios práticos do cotidiano e de futuras carreiras.

Proponha aos estudantes que realizem as questões aplicando o que aprenderam. Elas podem ser utilizadas como instrumento de avaliação, tarefa extraclasse ou, ainda, como objeto de discussão na sala de aula, em duplas ou em pequenos grupos.

PARTE 3 • RESOLUÇÕES COMENTADAS

UNIDADE 1 PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

CAPÍTULO 1 ESTATÍSTICA: MEDIDAS DE DISPERSÃO

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 12)

1. a) O setor verde tem área maior que o alaranjado. Isso indica que há um percentual maior de domicílios particulares brasileiros em situação de segurança alimentar em relação aos domicílios em situação de insegurança alimentar leve.

b) O percentual de municípios brasileiros, em 2023, em que prevalecia a segurança alimentar era 72,4%.

c) Sabendo-se que foram entrevistados 78 322 000 domicílios e que o percentual referente à insegurança alimentar grave obtida no gráfico é 4,1%, tem-se:

$4{,}1\% \cdot 78\,322\,000 = 3\,211\,202$

Portanto, a afirmação está correta.

2. a) O gráfico abrange a taxa de alfabetização e de analfabetismo das pessoas de 15 anos ou mais, no Brasil, de 1940 a 2022.

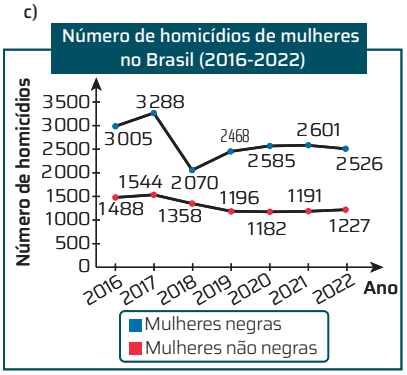
b) Em 1940, a taxa de analfabetismo foi 56%, diminuindo para 7% em 2022.

c) A partir de 1950, a taxa de alfabetização ultrapassou a taxa de analfabetismo e a diferença entre as duas seguiu aumentando até 2022.

3. a) Os dados apresentados nas barras azuis são o número de homicídios de mulheres negras no Brasil, de 2016 a 2022, enquanto aqueles representados nas barras laranjas são o número de homicídios registrados de mulheres não negras.

b)
- Verdadeira
- Falsa. Sugestão: O número de homicídios registrados de mulheres negras é superior ao de mulheres não negras em todos os anos do período apresentado.
- Falsa. Sugestão: No ano de 2022, foram registrados 1 227 homicídios de mulheres não negras.

c)



ID/BR

Cerqueira, Daniel; Bueno, Samira (coord.). *Atlas da Violência 2024*. Brasília, DF: Ipea; FBSP, 2024. Disponível em: https://www.ipea.gov.br/atlasviolencia/publicacoes. Acesso em: 30 ago. 2024.

d) Resposta pessoal. Orientação: Incentive os estudantes a analisar o gráfico com atenção, observando as diferenças entre os índices de homicídios de mulheres negras e não negras. Destaque a importância do argumento com base em evidências, alinhado às competências da BNCC que orientam o uso de dados para análise e reflexão crítica de problemas sociais. Promova uma discussão em sala sobre a importância de políticas públicas específicas para a proteção de mulheres negras, incentivando o desenvolvimento de um pensamento crítico e socialmente consciente.

4. a) Sudeste; $500\,000 \cdot 21 = 10\,500\,000$.

b) Resposta pessoal. Exemplos: capacetes, rodas de motocicleta.

c) Resposta pessoal. Exemplos: Qual é a região com a menor frota de motocicletas? Quantas motocicletas existem nessa região? Qual é a diferença entre a quantidade de motocicletas das regiões Norte e Sudeste?

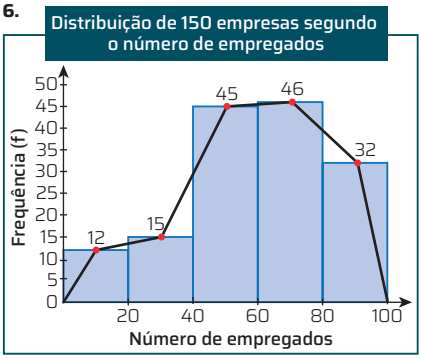
5. a) Resposta pessoal. Exemplo: Em São Paulo, no ano de 2022, a população quilombola era de 10 999 pessoas.

b) A região com maior população quilombola no Brasil é a Região Nordeste, com 68,2% de pessoas.

c) Resposta pessoal. Sugestão: Analisando os dados do infográfico, vemos a distribuição da população quilombola em várias regiões do Brasil. A maior concentração está no Nordeste, especialmente na Bahia, no Maranhão e em Minas Gerais. A partir dessa análise, um gráfico de barras horizontais seria uma boa escolha para representar esses dados. Esse tipo de gráfico facilita a comparação direta das populações em cada estado, permitindo visualizar com clareza onde estão as maiores concentrações. Outra opção seria um gráfico de setores para ilustrar a distribuição percentual da população quilombola por região, como mostrado na parte inferior do infográfico, facilitando a compreensão do peso de cada região no total.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 15)

6.



ID/BR

Dados fictícios.

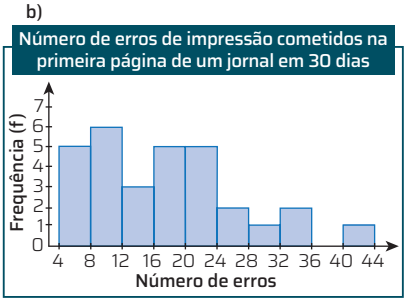
7. a)

Número de erros de impressão cometidos na primeira página de um jornal em 30 dias	
Erros	Frequência
[4, 8[	5
[8, 12[	6
[12, 16[	3

Número de erros de impressão cometidos na primeira página de um jornal em 30 dias	
Erros	Frequência
[16, 20[	5
[20, 24[	5
[24, 28[	2
[28, 32[	1
[32, 36[	2
[36, 40[	0
[40, 44[	1

Dados fictícios.

b)



ID/BR

Dados fictícios.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 17)

8. a) $\overline{X} = \dfrac{67{,}1 \cdot 2 + 22{,}4 \cdot 5 + 7{,}7 \cdot 9 + 2{,}8 \cdot 13}{100}$

$\overline{X} = 3{,}5$

Portanto, a faixa da média aritmética dos salários é de 3 a 7 salários.

b) Até 3 salários.

c) Até 3 salários.

9. a) $\overline{X} = \dfrac{2 \cdot 0{,}2 + 6 \cdot 0{,}15 + 10 \cdot 0{,}05 + 14 \cdot 0{,}1 + 18 \cdot 0{,}05 + 22 \cdot 0 + 26 \cdot 0{,}3 + 30 \cdot 0{,}1 + 34 \cdot 0{,}05}{100} = 16{,}6$

A média das idades desse grupo de pessoas é 16,5 anos.

b) 5% + 30% + 10% + 5% = 50%

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 21)

10. a) $\overline{X} = \dfrac{4+4+6+6}{4} = 5$

$V = \dfrac{2 \cdot (4-5)^2 + 2 \cdot (6-5)^2}{4} = 1$

$DP = \sqrt{V} = \sqrt{1} = 1$

b) $\overline{X} = \dfrac{3+3+7+7}{4} = 5$

$V = \dfrac{2 \cdot (3-5)^2 + 2 \cdot (7-5)^2}{4} = 4$

$DP = \sqrt{V} = \sqrt{4} = 2$

11. $\overline{X} = \dfrac{2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 7 + 2 \cdot 8}{12} = 5$

$V = \dfrac{2 \cdot (2-5)^2 + 2 \cdot (3-5)^2 + 2 \cdot (4-5)^2 + 2 \cdot (6-5)^2 + 2 \cdot (7-5)^2 + 2 \cdot (8-5)^2}{12} \simeq 4{,}67$

$DP = \sqrt{V} = \sqrt{4{,}67} \simeq 2{,}16$

12. a) Atleta A:

$\overline{X} = \dfrac{464 + 467 + 469 + 474 + 476}{5} = 470$

Me = 469

Atleta B:

$\overline{X} = \frac{467 + 469 + 472 + 473}{4} = 470{,}25$; Me = 470,5

O coordenador deve escolher o atleta A, que tem média e mediana menores que as do atleta B.

b) Resposta pessoal. O atleta B tem maior regularidade nos resultados e seu rendimento parece ter caído menos que o do atleta A, porém, ele nunca atingiu a marca de 464 décimos de segundo do atleta A.

c) Não, pois o desempenho de um atleta depende de diversos fatores, como suas condições física e psicológica.

13. **a)** Atleta A: 12 s (476 − 464 = 12); atleta B: 6 s (473 − 467 = 6).

b) Sim, porque, embora o atleta A tenha melhor desempenho, ele é menos "constante" em seus resultados.

14. **a)** Estudante A: $\overline{X} = \frac{10 + 10 + 10 + 10}{4} = 10$

Estudante B: $\overline{X} = \frac{8 + 12 + 8 + 12}{4} = 10$

Estudante C: $\overline{X} = \frac{0 + 8 + 12 + 20}{4} = 10$

Estudante D: $\overline{X} = \frac{0 + 0 + 20 + 20}{4} = 10$

b) Amplitude das notas do:

- estudante A: 10 − 10 = 0
- estudante B: 12 − 8 = 4
- estudante C: 20 − 0 = 20
- estudante D: 20 − 0 = 20

Variância das notas do:

- estudante A: $V = \frac{4 \cdot (10 - 10)^2}{4} = 0$
- estudante B: $V = \frac{2 \cdot (8 - 10)^2 + 2 \cdot (12 - 10)^2}{4} = 4$
- estudante C: $V = \frac{(0 - 10)^2 + (8 - 10)^2 + (12 - 10)^2 + (20 - 10)^2}{4} = 52$
- estudante D: $V = \frac{2 \cdot (0 - 10)^2 + 2 \cdot (20 - 10)^2}{4} = 100$

Desvio-padrão das notas do:

- estudante A: $DP = \sqrt{0} = 0$
- estudante B: $DP = \sqrt{4} = 2$
- estudante C: $DP = \sqrt{52} \simeq 7{,}21$
- estudante D: $DP = \sqrt{100} = 10$

c) Resposta pessoal. Sugestão:

O estudante A tem maior regularidade nas notas, e o estudante D é o mais irregular, apesar de todos apresentarem a mesma média.

15. **a)** $\overline{X} = \frac{2 + 6 + 10 + 10 + 14 + 16 + 18 + 20}{8} = 12$

$V = \frac{(2 - 12)^2 + (6 - 12)^2 + 2 \cdot (10 - 12)^2 + (14 - 12)^2 + (16 - 12)^2 + (18 - 12)^2 + (20 - 12)^2}{8} = 33$

$DP = \sqrt{V} = \sqrt{33} \simeq 5{,}74$

b) A comparação que se pode fazer é a de que as notas dos dez estudantes são mais próximas da média, ou seja, são mais regulares.

c) Resposta pessoal. Sugestão:

meninas → 2; 6; 10; 10; 14; 16; 18; 20

meninos → 8; 8; 8; 8; 8; 10; 10; 10; 10; 10

16. **a)** Equipe A:

$\overline{X} = \frac{83 + 74 + 66 + 64 + 92 + 56 + 77 + 60 + 79 + 65}{10} = 71{,}6$

$V = \frac{(83 - 71{,}6)^2 + (74 - 71{,}6)^2 + (66 - 71{,}6)^2 + (64 - 71{,}6)^2 + (92 - 71{,}6)^2 + (56 - 71{,}6)^2 + (77 - 71{,}6)^2 + (60 - 71{,}6)^2 + (79 - 71{,}6)^2 + (65 - 71{,}6)^2}{10} = 114{,}64$

$DP = \sqrt{V} = \sqrt{114{,}64} = 10{,}7$

Equipe B:

$\overline{X} = \frac{60 + 57 + 71 + 49 + 62 + 58 + 57 + 54 + 65 + 65}{10} = 59{,}8$

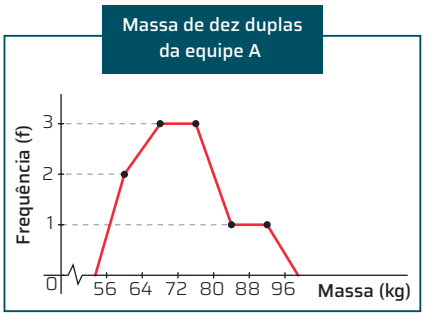
$V = \frac{(60 - 59{,}8)^2 + (57 - 59{,}8)^2 + (71 - 59{,}8)^2 + (49 - 59{,}8)^2 + (62 - 59{,}8)^2 + (58 - 59{,}8)^2 + (57 - 59{,}8)^2 + (54 - 59{,}8)^2 + (65 - 59{,}8)^2 + (65 - 59{,}8)^2}{10} = 35{,}36$

$DP = \sqrt{V} = \sqrt{35{,}36} \simeq 5{,}95$

Logo, a maior dispersão ocorre na distribuição das medidas de massa da equipe A.

b) Resposta possível:

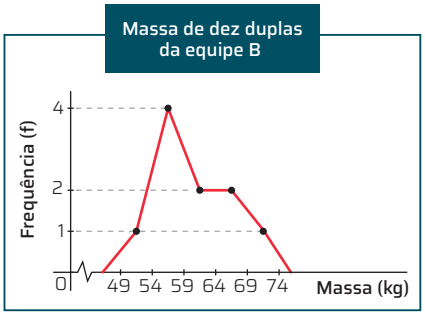
Equipe A – massa (kg)	f
56 ⊢ 64	2
64 ⊢ 72	3
72 ⊢ 80	3
80 ⊢ 88	1
88 ⊢ 96	1



ID/BR

Dados fictícios.

Equipe B – massa (kg)	f
49 ⊢ 54	1
54 ⊢ 59	4
59 ⊢ 64	2
64 ⊢ 69	2
69 ⊢ 74	1



ID/BR

Dados fictícios.

c) A equipe B tem o conjunto de dados mais homogêneo, pois há menor dispersão em relação à média.

17. Resposta pessoal.

18. $\overline{X} = \frac{64 + 57 + 62}{3} = 61$

$V = \frac{(64 - 61)^2 + (57 - 61)^2 + (62 - 61)^2}{3} = \frac{26}{3} \simeq 8{,}67$

$DP = \sqrt{8{,}67}$

Alternativa **c**.

19. **a)**

Medida de massa dos estudantes do 6º ano A	
Massa (kg)	f
32 ⊢ 36	1
36 ⊢ 40	4
40 ⊢ 44	10
44 ⊢ 48	7
48 ⊢ 52	2

Dados fornecidos pelo professor.

b) $\overline{X} = \frac{1 \cdot 34 + 4 \cdot 38 + 10 \cdot 42 + 7 \cdot 46 + 2 \cdot 50}{24} \simeq 42{,}8$

$V = \frac{(34 - 42{,}8)^2 + 4 \cdot (38 - 42{,}8)^2 + 10 \cdot (42 - 42{,}8)^2 + 7 \cdot (46 - 42{,}8)^2 + 2 \cdot (50 - 42{,}8)^2}{24} = 14{,}64$

Portanto, $\overline{X} \simeq 43$; $V \simeq 15$.

c) $DP = \sqrt{V} = \sqrt{15} \simeq 4$.

20. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes pesquisem um tema de seu interesse, que deve ser apresentado aos colegas, e elaborem perguntas para verificar se todos compreenderam os resultados da pesquisa.

TECNOLOGIA (P. 22)

1. **a)** $\overline{X} \simeq 42{,}08$; Mo = 38; Me = 42; $V \simeq 14{,}82$.

b) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes declarem maior facilidade em obter os dados com a planilha eletrônica.

2. **a)** A moda e a mediana foram mantidas. A média e a variância aumentaram.

b) A moda e a mediana foram mantidas. A média e a variância diminuíram.

c) Todas as medidas aumentaram, exceto a moda, que foi mantida.

d) Ao aumentar o maior dado ou diminuir o menor dado, a moda e a mediana são mantidas e a média e a variância aumentam ou diminuem. Essa relação não se mantém ao alterar o menor dado em maior.

3. A seleção brasileira feminina de volêi convocada para os Jogos Olímpicos Paris 2024 foi formada pelas jogadoras: Gabi Guimarães, Julia

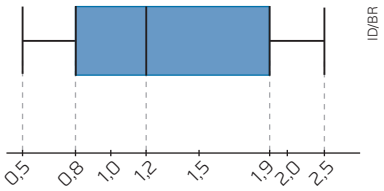
Bergmann, Ana Cristina, Rosamaria, Tainara, Lorenne, Thaísa, Carol, Diana, Macris, Roberta e Nyeme. De acordo com as medidas das alturas dessas atletas (disponível em: https://olympics.com/pt/noticias/volei-feminino-jogadora-mais-alta--selecao; acesso em: 2 nov. 2024), temos: $\overline{X} \simeq 1{,}86$ m; Mo $\simeq 1{,}85$ m; Me $\simeq 1{,}86$ m; V $\simeq 0{,}003$ m.

Resposta pessoal. Resposta pessoal.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 25)

21. **a)** Falsa. Correção possível: 50% dos participantes do sexo masculino têm medida de massa superior a 90 kg.
b) Verdadeira.
c) Falsa. Correção possível: 25% das mulheres têm menos de 55 kg.
d) Verdadeira.
e) Falsa. Correção possível: 25% dos homens têm menos de 70 kg.
f) Falsa. Correção possível: O primeiro quartil das medidas de massa dos homens coincide com o terceiro quartil das medidas de massa das mulheres.
g) Verdadeira.
h) Verdadeira.
i) Falsa. Correção possível: A medida de massa mínima das participantes dessa pesquisa é 40 kg.

22.



ID/BR

23. **a)** $1 + 1 + 2 + 6 + 10 + 16 + 13 + 9 + 8 + 5 + 2 + 1 + 1 = 75$
b) A mediana das notas é 11.
c) $Q_1 = 9$ e $Q_3 = 12$
d) Aproximadamente 22,7% dos estudantes conseguiram mais que 12 pontos.

24. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes analisem o diagrama de caixa e criem afirmações verdadeiras e falsas sobre o salário dos engenheiros e técnicos em informática.

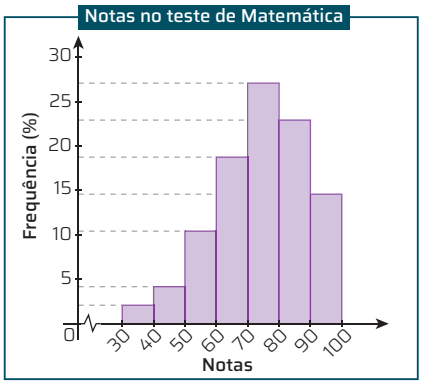
PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 29)

25. **a)**

3	7
4	2 9
5	3 5 7 8 9
6	0 2 2 3 4 5 6 8 9
7	0 1 3 4 5 5 6 7 7 8 8 9 9
8	0 0 1 3 4 4 5 6 7 8 9
9	0 0 2 3 5 8 9

Legenda: 3 | 7 representa a nota 37 de um estudante.

b)



ID/BR

Dados obtidos pelo professor de Matemática.

c) Resposta pessoal. Sugestão:
A maioria das notas varia de 70 a 89 pontos. A mediana das notas é igual a 75 pontos.

26. **a)**

Carlos							Pedro																						
					7	4																							
	9	9	8	6	3	5																							
9	7	6	6	5	3	0	6	2	2	2	4	6																	
	9	7	6	4	3	7	1	1	1	1	1	4	4	5	5	5	6	6	7	8	9	9							
		9	7	7	6	8	1	2	3	4	5	6	7	8															
	9	6	4	4	3	0	9	5																					
					1	0	10																						

Legenda: | 6 | 2 representa a nota 6,2.

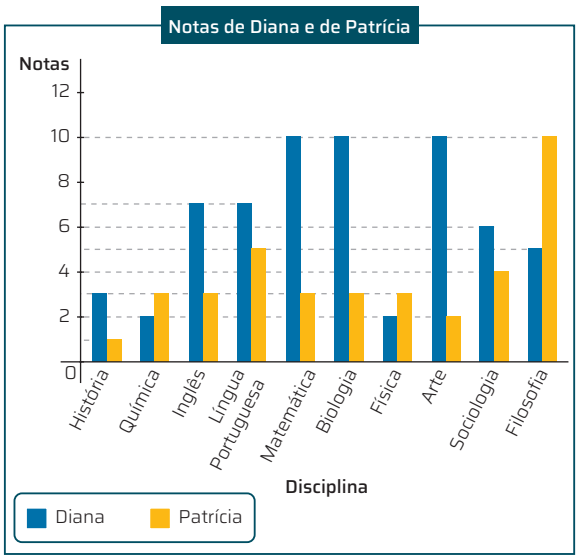
b) Resposta pessoal. Espera-se que o estudante identifique que Pedro realizou vendas com valores mais estáveis, concentrados entre 7 mil e 8 mil reais.

27.

	S	T	Q	Q	S	S	D	Total
Refrigerante	4	4	5	8	8	8	7	44
Caldo de cana	3	1	2	4	7	7	4	28
Total	7	5	7	12	15	15	11	72

Como ele vendeu 45 pastéis ($2 + 4 + 4 + 7 + 8 + 10 + 10 = 45$) na última semana, a quantidade a mais de pastéis que esse comerciante deve vender na próxima semana é 27 ($72 - 45 = 27$).
Alternativa **b**.

28. **a)** Observando o polígono de resultados de Diana, os eixos em que sua nota é inferior a 5 são os que correspondem a História, Química e Física.
b) Os eixos em que o ponto da nota de Patrícia é maior que a nota de Diana correspondem a Filosofia, Química e Física.
c)



ID/BR

Dados fornecidos pela escola.

d) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes identifiquem o gráfico de barras duplas como mais simples para ser produzido e para comparar as notas de Diana e Patrícia.

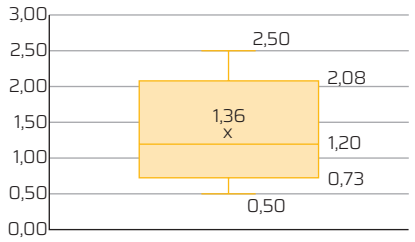
TECNOLOGIA (P. 30)

1. **a)**
- =QUARTIL(A1:N1;1): Essa fórmula calcula o valor do 1º quartil do conjunto de dados.
- =MÁXIMO(A1:N1): Essa fórmula retorna o maior valor do conjunto de dados.
- =MÍNIMO(A1:N1): Essa fórmula retorna o menor valor do conjunto de dados.
- =QUARTIL(A1:N1;3): Essa fórmula calcula o valor do 3º quartil do conjunto de dados
- =MED(A1:N1): Essa fórmula calcula o valor da mediana do conjunto de dados.

b) Resposta pessoal. É provável que o estudante perceba que é mais fácil calcular os valores pela planilha.

c) Sim, pois o 1º quartil divide o conjunto de dados em duas partes: 25% dos valores de um lado e 75% dos valores do outro. Nesse caso, o valor 1,28 é aquele que divide o conjunto de dados nessa proporção. Assim, os valores maiores que 1,28 correspondem a 75% dos dados.

2.



ID/BR

CÁLCULO RÁPIDO (P. 31)

1. **a)** $7^2 = 49$ **b)** $9^1 = 9$ **c)** $10^6 = 1\,000\,000$ **d)** $0^3 = 0$ **e)** $20^0 = 1$ **f)** $1^4 = 1$ **g)** $(-4)^3 = -64$ **h)** $(-3)^4 = 81$ **i)** $-2^7 = -128$ **j)** $(-8)^2 = 64$

2. **a)** $\frac{5!}{4!\cdot 1!} = \frac{5\cdot 4!}{4!\cdot 1} = 5$

b) $\frac{6!}{2!\cdot 4!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4!}{2\cdot 4!} = 3\cdot 5 = 15$

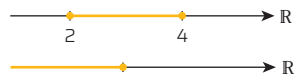
c) $\frac{10!}{7!\cdot 3!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7!}{3\cdot 2\cdot 7!} = 5\cdot 3\cdot 8 = 120$

d) $\frac{20!}{2!\cdot 18!} = \frac{20\cdot 19\cdot 18!}{2\cdot 18!} = 10\cdot 19 = 190$

e) $\frac{100!}{3!\cdot 97!} = \frac{100\cdot 99\cdot 98\cdot 97!}{3\cdot 2\cdot 97!} =$
$= 50\cdot 33\cdot 98 = 161\,700$

PARA RECORDAR (P. 31)

1. **a)**



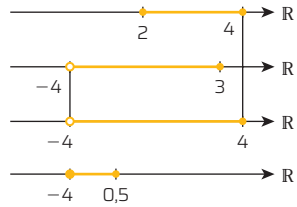
b)



c)



d)



e)

Ilustrações: ID/BR

2. **a)** $k = \frac{x}{y} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$

$k' = \frac{s}{t} = \frac{6}{0{,}6} = 10$

b) Na primeira tabela tem-se:

$\frac{25}{y} = \frac{5}{3} \Rightarrow y = \frac{25\cdot 3}{5} = 5\cdot 3 = 15$

$\frac{x}{27} = \frac{5}{3} \Rightarrow x = \frac{27\cdot 5}{3} = 9\cdot 5 = 45$

Então:

x	10	25	45	60
y	6	15	27	36

Na segunda tabela:

$\frac{7}{t} = 10 \Rightarrow t = \frac{7}{10} = 0{,}7$

$\frac{8}{t} = 10 \Rightarrow t = \frac{8}{10} = 0{,}8$

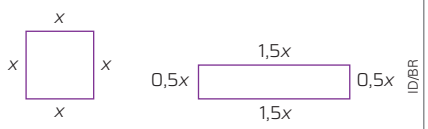
$\frac{s}{0{,}9} = 10 \Rightarrow s = 0{,}9\cdot 10 = 9$

s	6	7	8	9
t	0,6	0,7	0,8	0,9

3. Seja x o lado do quadrado. Um aumento de 50% em dois lados opostos significa que cada um vale 1,5x. Um decréscimo de 50% para outros dois lados, cada um vale 0,5x.

$x + 0{,}5x = 1{,}5x$

$x - 0{,}5x = 0{,}5x$



ID/BR

A área do quadrado era:

$$A = x^2$$

A área do quadrilátero (note que se trata de um retângulo) é:

$$A' = 0{,}5x\cdot 1{,}5x = 0{,}75x$$

Logo, a área do quadrilátero diminui em 25%.

$$x - 0{,}75x = 0{,}25x$$

4. Para o cálculo de variação percentual, pode-se aplicar a seguinte fórmula:

$$\Delta\% = \frac{Vf - Vi}{Vi}\cdot 100\%$$

$\Delta\%$ = variação percentual; Vf = valor final; Vi = valor inicial

Como $Vf = 58\%$ e $Vi = 80\%$, então:

$\Delta\% = \frac{58\% - 80\%}{80\%}\cdot 100\% =$

$= \frac{-22\%}{80\%}\cdot 100\% = -0{,}275\cdot 100\% = -27{,}5\%$

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO (P. 31)

1. Depois de "zerar" as ampulhetas, ativam-se as duas ao mesmo tempo. Quando a de 7 minutos finalizar, restarão 4 minutos na ampulheta de 11 minutos. Neste momento, reinicia-se a de 7 minutos e, quando os remanescentes 4 minutos da ampulheta de 11 minutos acabarem (note que já se vão 11 minutos), a ampulheta de 7 minutos terá 3 minutos em cima e 4 minutos embaixo.

Assim, inverte-se essa ampulheta até que acabe o último grão dos 4 minutos e complete os 15 minutos.

2. Ao representar as informações do enunciado em sistema de equações, em que g representa o preço da garrafa, e t, o preço da tampa, temos:

$$\begin{cases} g + t = 2{,}10 \\ g = 2 + t \end{cases}$$

Ao resolver o sistema, concluímos que o preço da tampa é R$ 0,05 e o da garrafa, R$ 2,05.

MATEMÁTICA E VACINAÇÃO (P. 32)

Conectando ideias

1. **a)** $\frac{2\,580}{100}\cdot 5 = 129$

b) Sala de vacinação 1:

$n_1 = \frac{1000}{100}\cdot 5 = 50$;

Sala de vacinação 2:

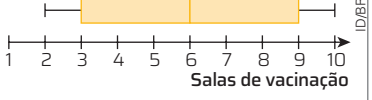
$n_2 = \frac{1\,200}{100}\cdot 5 = 60$;

Sala de vacinação 3:

$n_3 = \frac{380}{100}\cdot 5 = 19$.

2. **a)** Não é possível determinar a mediana do número de salas de vacinação, mas é possível concluir que esse número está entre 3 e 9 salas de vacinação.

b)



ID/BR

3. Resposta pessoal.

CAPÍTULO 2 PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

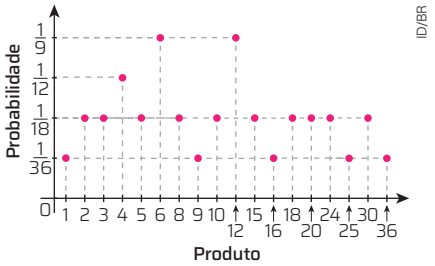
PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 38)

1. **a)**

×	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

b) Observando o quadro, verificamos que a probabilidade de o produto dessa multiplicação ser 15 é $\frac{2}{36} \simeq 0{,}056$ ou 5,6%.

c)



ID/BR

Produtos com a menor probabilidade de sair: 1, 9, 16, 25 e 36. Produtos com a maior probabilidade de sair: 6 e 12.

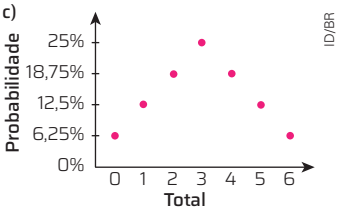
2. **a)**

1º jogador	2º jogador	Total
0	0	0
0	1	1
1	0	1
0	2	2
1	1	2
2	0	2
0	3	3
1	2	3
2	1	3
3	0	3
1	3	4
2	2	4
3	1	4
2	3	5
3	2	5
3	3	6

b)

Evento	Probabilidade
0	$\frac{1}{16} = 6{,}25\%$
1	$\frac{1}{8} = 12{,}5\%$
2	$\frac{3}{16} = 18{,}75\%$
3	$\frac{1}{4} = 25\%$
4	$\frac{3}{16} = 18{,}75\%$
5	$\frac{1}{8} = 12{,}5\%$
6	$\frac{1}{16} = 6{,}25\%$

c)



3. a)

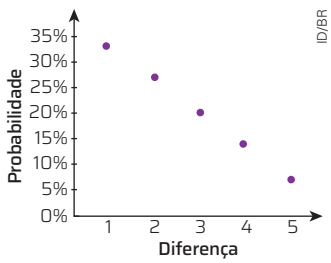
–	1	2	3	4	5	6
1		1	2	3	4	5
2	1		1	2	3	4
3	2	1		1	2	3
4	3	2	1		1	2
5	4	3	2	1		1
6	5	4	3	2	1	

b) Observando o quadro, verificamos que a probabilidade de a diferença ser 2 é $\frac{8}{30} \simeq 0{,}267$ ou 26,7%.

c) 1

d)

Diferença	Probabilidade
1	$\frac{1}{3} \simeq 33{,}3\%$
2	$\frac{4}{15} \simeq 26{,}7\%$
3	$\frac{1}{5} = 20\%$
4	$\frac{2}{15} \simeq 13{,}3\%$
5	$\frac{1}{15} \simeq 6{,}7\%$

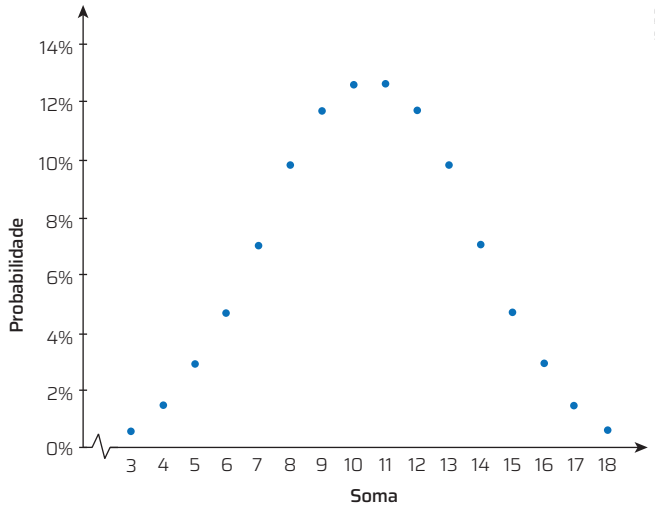


4. a) 16

b)

Soma	Probabilidade
3	$\frac{1}{216} \simeq 0{,}5\%$
4	$\frac{1}{72} \simeq 1{,}4\%$
5	$\frac{1}{36} \simeq 2{,}8\%$
6	$\frac{5}{108} \simeq 4{,}6\%$
7	$\frac{5}{72} \simeq 6{,}9\%$
8	$\frac{7}{72} \simeq 9{,}7\%$
9	$\frac{25}{216} \simeq 11{,}6\%$
10	$\frac{1}{8} = 12{,}5\%$

Soma	Probabilidade
11	$\frac{1}{8} = 12{,}5\%$
12	$\frac{25}{216} \simeq 11{,}6\%$
13	$\frac{7}{72} \simeq 9{,}7\%$
14	$\frac{5}{72} \simeq 6{,}9\%$
15	$\frac{5}{108} \simeq 4{,}6\%$
16	$\frac{1}{36} \simeq 2{,}8\%$
17	$\frac{1}{72} \simeq 1{,}4\%$
18	$\frac{1}{216} \simeq 0{,}5\%$



c) O jogador A, porque a probabilidade de ocorrerem somas favoráveis a ele é 57,9%.

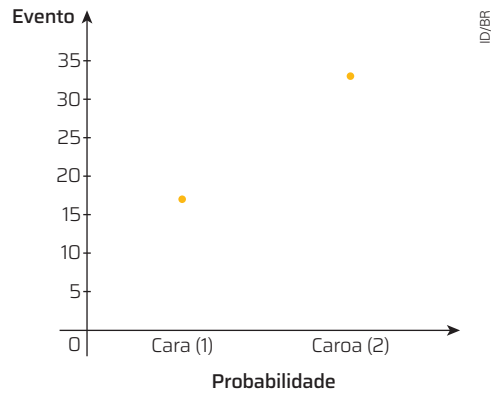
d) Resposta pessoal. Exemplo de resposta:
O jogador A vence quando a soma for de 3 a 10, e o jogador B vence quando a soma for de 11 a 18; ou o jogador A vence quando a soma for 5, 6, 8, 11, 12 ou 13, e o jogador B ganha nos outros casos.

5. Respostas pessoais. Exemplo de perguntas:
Qual é a probabilidade de o produto dessa multiplicação ser 20? (Resposta: $\frac{2}{36}$); Qual é a probabilidade de o produto dessa multiplicação ser divisível por 6? (Resposta: $\frac{15}{36}$).

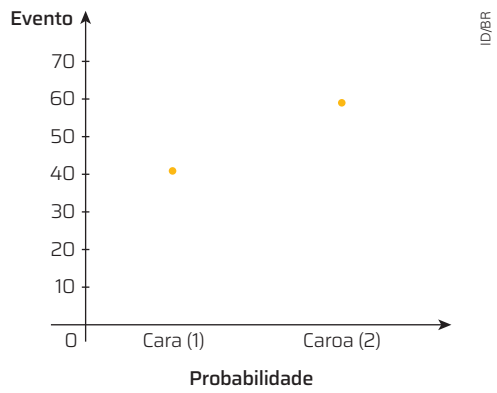
TECNOLOGIA (P. 41)

1. Resposta pessoal. Seguem exemplos de gráficos que podem ser obtidos.

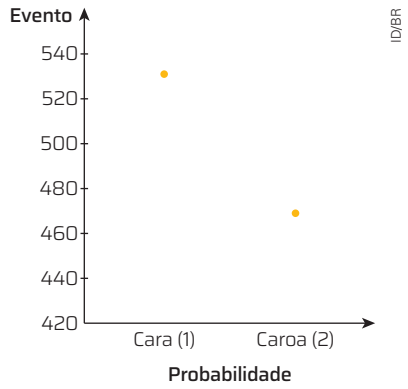
a)



b)



c)



Probabilidade

2. Respostas pessoais. Espera-se que os estudantes percebam que a quantidade de caras e coroas se aproxima de 50% quando a quantidade de lançamentos aumentar.

3. Respostas pessoais. Um simulador que os estudantes podem explorar está disponível em http://digfir-published.macmillanusa.com/stats_applet/stats_applet_10_prob.html (acesso em: 23 out. 2024).

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 45)

6. a)

Idade	Número de pessoas	fr
0 ⊢ 9	1 569 000	15%
10 ⊢ 19	1 778 200	17%
20 ⊢ 29	1 663 140	15,9%
30 ⊢ 39	1 349 340	12,9%
40 ⊢ 49	1 171 520	11,2%
50 ⊢ 59	1 161 060	11,1%
60 ⊢ 69	920 480	8,8%
Maior de 70	847 260	8,1%
Total	**10 460 000**	**100%**

b) Para o município considerado, temos que: $12{,}9\% \cdot 80\,000 = 10\,320$, ou seja, há 10 320 pessoas entre 30 e 39 anos. Além disso: $47{,}9\% \cdot 80\,000 = 38\,320$, ou seja, há 38 320 pessoas com menos de 30 anos.

7. a) A probabilidade de ouvir pagode é 10%; e tecno, 13%.

b) $45\% \cdot 24\text{ h} = 10{,}8\text{ h} = 10\text{ h }48\text{ min}$

8. a) Tem-se: $25\% + 20\% - 5\% = 40\%$ (lesões no joelho ou no pescoço).
Logo: $0{,}4 \cdot 200 = 80$ (total de nadadores com lesões no joelho ou no pescoço).

b) Considere:
A: "nadador teve dor no ombro"
B: "nadador teve dor na coluna"
Como os eventos são independentes, a probabilidade é:
$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = 0{,}2 \cdot 0{,}5 = 10\%$

9. $P = \frac{3}{4}$
Alternativa **e**.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 51)

10. a) $\overline{X} = \frac{15 \cdot 38 + 16 \cdot 31 + 17 \cdot 18 + 18 \cdot 10 + 19 \cdot 3}{100} \simeq 16$
A média aritmética das idades é aproximadamente 16 anos.

b) $V = \frac{38 \cdot (15-16)^2 + 31 \cdot (16-16)^2 + 3 \cdot (19-16)^2 +}{100}$
$\frac{+ 18 \cdot (17-16)^2 + 10 \cdot (18-16)^2 + 3 \cdot (19-16)^2}{100} \Rightarrow V = 1{,}23$
$DP = \sqrt{V} \Rightarrow DP \simeq 1{,}1$
O desvio-padrão é aproximadamente 1,1.

11. Em uma distribuição cujos valores são iguais, a média será o próprio valor e, portanto, o desvio-padrão será 0.
Alternativa **b**.

12. a) $\overline{X} = \frac{3 \cdot 0 + 16 \cdot 1 + 59 \cdot 2 +}{300}$
$\frac{+ 75 \cdot 3 + 68 \cdot 4 + 31 \cdot 5 + 22 \cdot 6 + 15 \cdot 7 + 7 \cdot 8 + 3 \cdot 9 + 1 \cdot 10}{300}$
$\overline{X} = 3{,}75$
Portanto, aproximadamente 4 lâmpadas são jogadas fora.

b) $V = \frac{3 \cdot (0-4)^2 + 16 \cdot (1-4)^2 + 59 \cdot (2-4)^2 +}{300}$
$\frac{+ 75 \cdot (3-4)^2 + 68 \cdot (4-4)^2 +}{300}$
$\frac{+ 31 \cdot (5-4)^2 + 22 \cdot (6-4)^2 + 15 \cdot (7-4)^2 +}{300}$
$\frac{+ 7 \cdot (8-4)^2 + 3 \cdot (9-4)^2 + 1 \cdot (10-4)^2}{300}$
$V = 3{,}26$
$DP \simeq 1{,}807$
O desvio-padrão é aproximadamente 1,81 lâmpada.

c) Utilizando a curva de Gauss:
$P\left[\overline{X} - DP,\ \overline{X} + DP\right] \simeq 68\%$

d) Resposta pessoal. Sugestão: Qual é o intervalo de normalidade da distribuição de lâmpadas defeituosas ao longo desses trezentos dias?; Qual é a probabilidade de que se tenham 10 lâmpadas defeituosas em um dia?

13. $\overline{X} = 45$
$DP = 15$
Intervalo de normalidade:
$]45 - 1DP, 45 + 1DP[=]30, 60[\rightarrow 68\%$ da distribuição
$]\overline{X} - 2DP, \overline{X} + 2DP[=]45 - 2 \cdot 15, 45 + 2 \cdot 15[=]15{,}75[\rightarrow 96\%$ da distribuição
$\frac{96}{2} - \frac{68}{2} = \frac{28}{2} = 14$
$]60, 75[\rightarrow 14\%$ da distribuição
A probabilidade é 14%.

14. a) $\overline{X} = \frac{0 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 1 + 8 \cdot 1}{30} = 3$
ou
$\overline{X} = 0 \cdot 0{,}033 + 1 \cdot 0{,}133 + 2 \cdot 0{,}167 + 3 \cdot 0{,}233 + 4 \cdot 0{,}2 + 5 \cdot 0{,}1 + + 6 \cdot 0{,}067 + 7 \cdot 0{,}033 + 8 \cdot 0{,}033$
$\overline{X} = 3$
$DP^2 = 3{,}567$
$DP \simeq 1{,}889$ ou $DP \simeq 2$
A média aritmética é 3 e o desvio-padrão é aproximadamente 2.

Número de filhos dos casais					
Número de filhos	Número de casais	fr	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$	fr, $(x_i - \overline{x})^2$
0	1	0,033	−3	9	0,300
1	4	0,133	−2	4	0,533
2	5	0,167	−1	1	0,167
3	7	0,233	0	0	0,000
4	6	0,200	1	1	0,200
5	3	0,100	2	4	0,400
6	2	0,067	3	9	0,600
7	1	0,033	4	16	0,533
8	1	0,033	5	25	0,833
Total	**30**	**0,999**	—	—	—

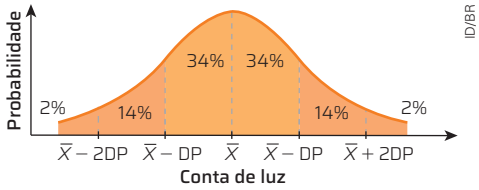
Dados fictícios.

b) Para calcular a porcentagem relativa ao intervalo, fazemos:
$]\overline{X} - DP, \overline{X} + DP[=]3 - 2, 3 + 2[=]1, 5[$
$0{,}167 + 0{,}233 + 0{,}200 = 0{,}6 = 60\%$

c) Para calcular as probabilidades solicitadas, fazemos:
P(mais de 5 filhos) $= 0{,}067 + 0{,}033 + 0{,}033 = 0{,}133 = 13{,}3\%$
P(menos de 3 filhos) $= 0{,}033 + 0{,}133 + 0{,}167 = 0{,}333 = 33{,}3\%$

d) Para responder ao que se pede, fazemos:
P(mais de 4 filhos) $= 0{,}1 + 0{,}067 + 0{,}033 + 0{,}033 = 0{,}233 = 23{,}3\%$
P(menos de 4 filhos) $= 0{,}033 + 0{,}133 + 0{,}167 + 0{,}233 = 0{,}566 = = 56{,}6\%$
Assim, vemos que, nessa amostra, é mais provável um casal ter menos de 4 filhos.

15. Em uma distribuição normal, temos:



ID/BR

Sabemos que, aproximadamente, 68% das contas estão no intervalo $]\overline{X} - DP, \overline{X} + DP[$, ou seja, $]80 - 12, 80 + 12[=]68, 92[$.

E que 96% das contas estão no intervalo $]\overline{X} - 2DP, \overline{X} + 2DP[$; então, temos: $]80 - 2 \cdot 12,\ 80 + 2 \cdot 12[=]56, 104[$.

16. **a)** Verificamos que a soma dos tempos em cada uma das amostras é igual a 2080; logo:

$\overline{X} = \frac{2080}{30} \Rightarrow \overline{X} \approx 69,33$

Empresa A:

$Me = \frac{73 + 74}{2} = 73,5$

Empresa B:

$Me = \frac{68 + 69}{2} = 68,5$

Empresa C:

$Me = \frac{65 + 68}{2} = 66,5$

Empresa A:

$DP = \sqrt{\frac{14690,667}{30}} \approx 22,13$

Empresa B:

$DP = \sqrt{\frac{2292,667}{30}} \approx 8,74$

Empresa C:

$DP = \sqrt{\frac{5946,667}{30}} \approx 14,08$

Valores obtidos dos gráficos de teste das lâmpadas					
Empresa	**Número de testes**	**Intervalo dos dados**	**Média**	**Mediana**	**Desvio-padrão**
A	30	[27, 99]	69,33	73,5	22,13
B	30	[54, 91]	69,33	68,5	8,74
C	30	[37, 93]	69,33	66,5	14,08

b) As três empresas têm a mesma média.

c) Empresa B, pois, apesar de as médias serem todas iguais, a empresa apresenta maior valor mínimo, mediana mais próxima à média e menor desvio-padrão, sendo, assim, a empresa mais vantajosa.

17. **a)** Apenas para a empresa A, o valor 50 horas está dentro do intervalo de normalidade; por isso, a probabilidade de que uma lâmpada dessa empresa dure 50 horas é maior que 14% e menor que 68%.

b) Escolhendo uma lâmpada da empresa B, a probabilidade de que ela dure 50 horas é menor que 14%.

c) Escolhendo uma lâmpada da empresa C, a probabilidade de que ela dure 50 horas é menor que 14%.

d) Nas empresas A e C, o valor 80 fica dentro do intervalo de normalidade com probabilidade maior que 68% de duração; enquanto para a empresa B, o valor 80 fica fora do intervalo de normalidade, e a probabilidade de escolher uma lâmpada da empresa B com essa duração é inferior a 14%.

18. **a)** Uma vez que a máquina não aceitaria esferas com diâmetro menor que 67 ou maior que 71 mm, deve ser escolhida a empresa B, porque a maioria das esferas teria diâmetro próximo do valor 69 mm.

b) Respostas pessoais. Na empresa A, os salários altos são mais prováveis de serem alcançados do que nas empresas B e C. Por outro lado, os salários mais baixos também são mais prováveis na empresa A. Já na empresa B, os salários estão mais concentrados, embora não alcancem valores tão altos como em A. Nesse caso, tudo depende do candidato à vaga por um alto cargo executivo: se ele estiver convicto de que tem capacidade para salário maior que 69 mil, deverá escolher a empresa A; se tiver dúvidas de suas capacidades ou preferir estabilidade, deverá optar pela empresa B.

c) O time B tem desempenho mais homogêneo de bons resultados, já o time A oscila entre resultados bons e ruins. Então, a opção mais segura é ser um jogador do time B e jogar contra os times A ou C.

19. Na primeira, pois há menor concentração dos dados em torno da média.

20. **a)** 45, pois é o ponto central da distribuição (ponto médio).

b) O intervalo]30, 60[parece corresponder ao intervalo $]\overline{X} - DP, \overline{X} + DP[$ com 68% da distribuição. Desse modo, temos $]45 - 15, 45 + 15[$, ou seja, o desvio-padrão parece ser 15.

TECNOLOGIA (P. 53)

1. **a)** A média calculada é 6,22, e o desvio-padrão é 1,54.

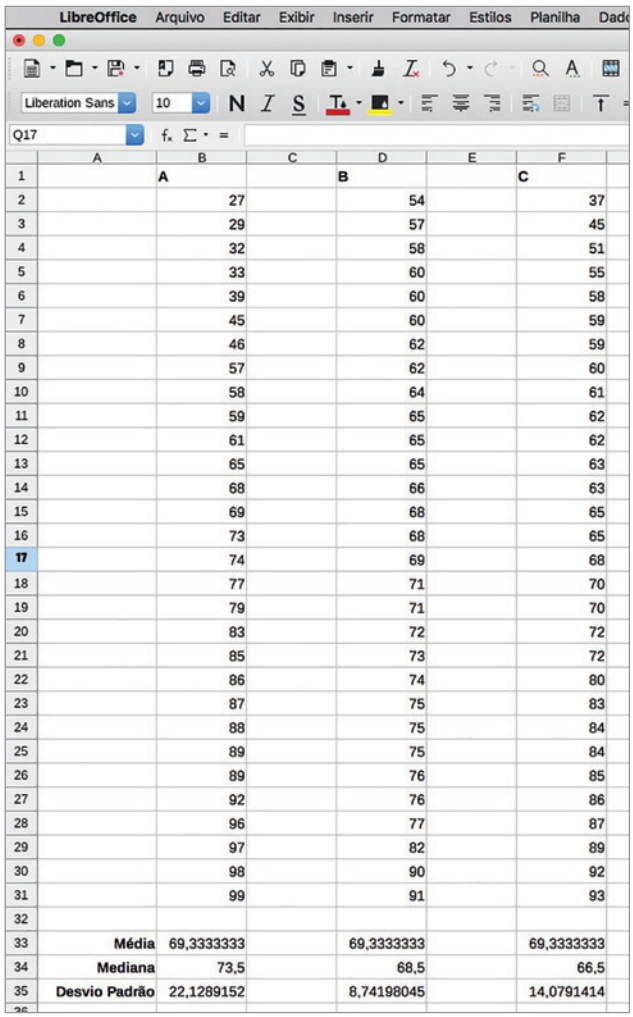
b) Resposta pessoal. É possível digitar as fórmulas para calcular os valores solicitados.

2. **a)** Resposta pessoal. É possível que o estudante identifique média, mediana, moda, variância, desvio médio, valor máximo, valor mínimo, quartil, percentil, etc.

b) A moda é igual a 6,5; a mediana, igual a 6,25; e a variância, igual a 2,374.

3. Resposta pessoal. Exemplo de resposta:

Os estudantes podem organizar os dados da atividade **16**, por exemplo, em uma tabela e obter os dados das empresas A, B e C pela planilha eletrônica de modo muito mais rápido que calcular manualmente.



	A	B	C	D	E	F
1		A		B		C
2		27		54		37
3		29		57		45
4		32		58		51
5		33		60		55
6		39		60		58
7		45		60		59
8		46		62		59
9		57		62		60
10		58		64		61
11		59		65		62
12		61		65		62
13		65		65		63
14		68		66		63
15		69		68		65
16		73		68		65
17		74		69		68
18		77		71		70
19		79		71		70
20		83		72		72
21		85		73		72
22		86		74		80
23		87		75		83
24		88		75		84
25		89		75		84
26		89		76		85
27		92		76		86
28		96		77		87
29		97		82		89
30		98		90		92
31		99		91		93
32						
33	Média	69,3333333		69,3333333		69,3333333
34	Mediana	73,5		68,5		66,5
35	Desvio Padrão	22,1289152		8,74198045		14,0791414

LibreOffice. Fac-símile: ID/BR

4. **a)** A média é aproximadamente 1,714 e o desvio-padrão, 0,087.

b) A zona de normalidade é da por]média − DP; média + DP[. Então, tem-se:]1,714-0,087; 1,714+0,087[=]1,627; 1,801[

CÁLCULO RÁPIDO (P. 55)

1. **a)** $94\% \cdot 1200 = 0,94 \cdot 1200 = 1128$

Logo, R$ 1 128,00.

b) $1,04\% \cdot 800 = 0,04 \cdot 800 = 832$

Logo, R$ 832,00.

c) $1,05\% \cdot 550 = 1,05 \cdot 550 = 577,5$

Logo, R$ 577,50.

2. **a)** $\frac{9000}{36000} \cdot 100\% = 25\%$

b) $\frac{420}{600} \cdot 100\% = 70\%$

c) $\frac{15}{300} \cdot 100\% = 5\%$

PARA RECORDAR (P. 55)

1. **a)** d_1: distância percorrida pelo 1º ciclista no instante t após às 10 h

d_2: distância percorrida pelo 2º ciclista no instante t após às 11 h

1º ciclista: $d_1(t) = 20t$

2º ciclista: $d_2(t) = 25(t - 1)$

$d_1(2) = 20 \cdot 2 = 40$

$d_2(2) = 25(2 - 1) = 25$

$d_1(2) - d_2(2) = 15$

Logo, a distância entre os dois ciclistas ao meio-dia é 15 km.

b) $20t - 25(t-1) = 5 \Rightarrow 20t - 25t + 25 = 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow -5t = -20 \Rightarrow t = 4$

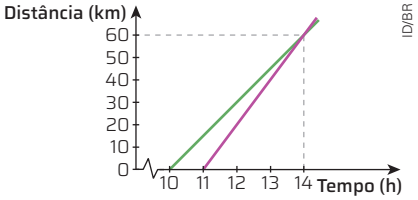
Portanto, os ciclistas estavam a uma distância de 5 km um do outro às 14 h, pois $10 + 4 = 14$.

c) $20t = 25(t-1) \Rightarrow 20t = 25t - 25 \Rightarrow$
$\Rightarrow 5t = 25 \Rightarrow t = 5$

Portanto, o segundo ciclista alcançou o primeiro às 15 h, pois $10 + 5 = 15$.

d) $d = 20(t-1) \Rightarrow 15t = 20(t-1) \Rightarrow$
$\Rightarrow 15t = 20t - 20 \Rightarrow t = 4$

Portanto, o segundo ciclista alcançou o primeiro às 14 h, pois $10 + 4 = 14$. O que pode ser observado pela intersecção no gráfico a seguir.



ID/BR

2. Considerando que temos x clubes e o número de partidas de um turno é 153, podemos calcular o número de clubes fazendo uma combinação de x elementos agrupados de 2 em 2. Assim, $C_{x,2} = 153$ e, então:

$$\frac{x!}{2!(x-2)!} = 153 \Rightarrow \frac{x(x-1)(x-2)!}{2(x-2)!} = 153 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x(x-1) = 306 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 - x - 306 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 1224}}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1225}}{2} \Rightarrow x = \frac{1 \pm 35}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1+35}{2} = \frac{36}{2} = 18 \\ x_2 = \frac{1-35}{2} = \frac{-34}{2} = -17 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

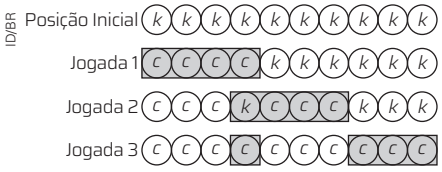
Portanto, 18 clubes participarão do campeonato.

3. Pedro ficará junto de Júlia e Luís ficará junto de Ana de 8 maneiras diferentes. São elas:

- Pedro, Júlia, Luís e Ana.
- Pedro, Júlia, Ana e Luís.
- Júlia, Pedro, Luís e Ana.
- Júlia, Pedro, Ana e Luís.
- Luís, Ana, Pedro e Júlia.
- Ana, Luís, Pedro e Júlia.
- Luís, Ana, Júlia e Pedro.
- Ana, Luís, Júlia e Pedro.

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO (P. 55)

1. Para que todas estejam com "coroa" voltada para cima, não é possível com apenas 2 jogadas, pois conseguimos mudar apenas $2 \cdot 4 = 8$ moedas e precisamos alterar 10. Isso é só possível com 3 jogadas, como observa-se na sequência da figura, na qual k representa cara e C, coroa.



ID/BR

2. Já que existe pelo menos um menino, seja João o menino da turma. Para cada par formado com João, pelo menos um é menina, ou seja, qualquer estudante que fizer par com João será menina. Portanto, há 49 meninas nessa sala.

MATEMÁTICA E ELEIÇÃO (P. 56)

Conectando ideias

1. Inicialmente, os grupos devem escolher uma variável quantitativa e entrevistar uma quantidade predefinida de pessoas. No caso de ser a altura, eles devem verificar a altura, em centímetro, dos estudantes da turma e calcular a estimativa da média das alturas.

Para isso, vamos supor que a turma apresente um total de 49 pessoas. Com isso, calcula-se o desvio-padrão amostral $S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\overline{x} - x_i)^2}{n-1}}$.

Sejam uma amostra com $n = 3$ e os valores $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ e $x_3 = 3$ e média $\overline{x} = 2$, temos:

$$S = \sqrt{\frac{(2-1)^2 + (2-2)^2 + (2-3)^2}{2}} = 1$$

Agora, vamos supor que o desvio-padrão amostral calculado é $S = 12$ cm, e a média é $\overline{X} = 170$ cm. Basta, então, calcular E e construir o intervalo de confiança:

$$49 = \left(\frac{1{,}96 \cdot 12}{E}\right)^2 \Rightarrow 7 = \frac{23{,}52}{E} \Rightarrow E =$$
$$= 3{,}36\ cm \text{ e } (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (170 \cdot 3{,}36;$$
$$170 + 3{,}36) = (166{,}64 \text{ cm}; 173{,}36 \text{ cm}).$$

Logo, a média da altura dos estudantes da turma pode estar no intervalo (166,64 cm; 173,36 cm). Com o nível de confiança igual a 95%, entre os intervalos de confiança criados por esse método, a média real dos estudantes da turma estará dentro do intervalo em 95% dos intervalos construídos.

Desse modo, E equivale a, aproximadamente, 2% $\left(\frac{3{,}36}{170}\right)$, um valor aceitável para uma pesquisa. Além disso, como E foi calculado, e não escolhido, o valor obtido é dado em centímetro no lugar de porcentagem. Assim, para criar o intervalo de confiança, utiliza-se $(\overline{X} - E; \overline{X} + E)$ no lugar de $(\overline{X} - E \cdot \overline{X}; \overline{X} + E \cdot \overline{X})$.

2. Espera-se que os estudantes compreendam que elementos da Matemática podem ser aplicados em diversas situações do sistema eleitoral. Eles podem citar, além da elaboração de questionários e de pesquisas estatísticas, o cálculo do coeficiente eleitoral e a própria contagem dos votos (incluindo os brancos e nulos), por exemplo.

Resposta pessoal.

POR DENTRO DO ENEM E DOS VESTIBULARES (P. 58)

1. $CV = \frac{s}{\overline{X}} = \frac{1}{10} = 0{,}1 \Rightarrow 0{,}1 = \frac{1{,}5}{\overline{X}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \overline{X} = \frac{1{,}5}{0{,}1} = 15$$

Logo, se a média for superior a 15, ocorrerá a substituição da ração.

Alternativa **e**.

2. Se cada valor da variável em questão vai diminuir em 20%, então pode-se dizer que todos os valores dessa variável são multiplicados por 0,8.

A variância de um conjunto de dados tem uma propriedade importante: se todos os valores de um conjunto são multiplicados por uma constante k, a variância resultante é multiplicada por k^2.

$V(0{,}8X) = 0{,}8^2 X = 0{,}64X = 64\%\ de\ X$

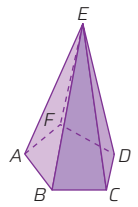
Alternativa **c**.

UNIDADE 2 GEOMETRIA ESPACIAL

CAPÍTULO 3 SÓLIDOS GEOMÉTRICOS: POLIEDROS

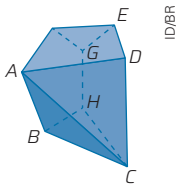
PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 65)

1. Exemplos:



ID/BR

Há três arestas que concorrem no vértice A, enquanto há cinco arestas que concorrem no vértice E.



ID/BR

Há três arestas que concorrem no vértice B, enquanto há quatro arestas que concorrem no vértice C.

2. Respostas possíveis. Por exemplo:

a) Cubo.
b) Bloco retangular.
c) Pirâmide de base quadrada.
d) Pirâmide de base triangular.
e) Cubo.
f) Pirâmide de base quadrada.

3. Resposta possível: Pirâmide de base triangular.

4. **a)** 5 faces.
b) 6 vértices.
c) 9 arestas.
d) As arestas $\overline{CF}$ e $\overline{BE}$ são paralelas a $\overline{AD}$.
e) As arestas $\overline{AD}$ e $\overline{CF}$ são perpendiculares a $\overline{DF}$.

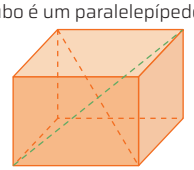
5.

	Cubo	Sólido
Arestas	12	16
Vértices	8	9
Faces	6	9

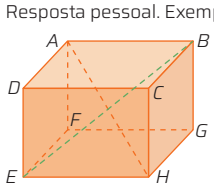
6. São paralelepípedos retângulos os sólidos dos itens **c** e **d**.

7. Sim. Como todo quadrado é um retângulo, o cubo é um paralelepípedo retângulo.

8. **a)**


ID/BR

b) Resposta pessoal. Exemplo de resposta:



ID/BR

c) $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$, $\overline{AB}$ e $\overline{FG}$, $\overline{AB}$ e $\overline{EH}$, $\overline{DE}$ e $\overline{CH}$, $\overline{DE}$ e $\overline{AF}$, $\overline{DE}$ e $\overline{BG}$, $\overline{AF}$ e $\overline{BG}$, $\overline{AF}$ e $\overline{CH}$, $\overline{DC}$ e $\overline{DH}$, $\overline{DC}$ e $\overline{FG}$, $\overline{CH}$ e $\overline{BG}$, $\overline{DE}$ e $\overline{CH}$, $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$, $\overline{AD}$ e $\overline{GH}$, $\overline{AD}$ e $\overline{EF}$, $\overline{BC}$ e $\overline{GH}$, $\overline{BC}$ e $\overline{EF}$, $\overline{GH}$ e $\overline{EF}$. Portanto, 18 pares.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 69)

9. Resposta pessoal. Exemplos de resposta: caixa de sapato, dado, caixa de sabonete, caixa de creme dental, aquário, cubo mágico, etc.

10. Os poliedros representados nos itens **a** e **f** não são prismas.

	Polígono da base	Faces	Vértices	Arestas
b)	Triângulo	5	6	9
c)	Quadrilátero	6	8	12
d)	Hexágono	8	12	18
e)	Quadrilátero	6	8	12

11. a) Não. Prismas são somente os poliedros com duas bases paralelas e congruentes.
b) Sim, porque todo prisma é um poliedro particular.

12. a) As outras arestas laterais são: $\overline{BN}$, $\overline{CO}$, $\overline{DP}$, $\overline{EQ}$.
b) As outras faces laterais do prisma são: *BCON*, *CDPO*, *DEQP*, *EAMQ*.

13. Resposta pessoal. No prisma apresentado:
a) $\overline{OS}$ é uma aresta lateral. Indique as outras arestas laterais. (Resposta: As outras arestas laterais são $\overline{UT}$, $\overline{AM}$, $\overline{EN}$, $\overline{IP}$.)
b) Uma das faces laterais é o retângulo *IPSO*. Indique as outras faces laterais. (Resposta: As outras faces laterais são *OSTU*, *UTMA*, *AMNE*, *ENPI*.)

14. a) $n + 2$ faces, n faces laterais e as 2 bases.
b) $2n$ vértices, n vértices em cada base.
c) $3n$ arestas, n arestas laterais e n arestas em cada base.

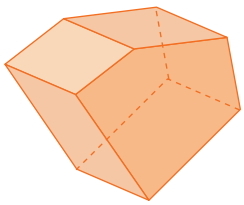
15. a)

Base do prisma	Lados do polígono da base	Faces	Vértices	Arestas
Triangular	3	5	6	9
Quadrangular	4	6	8	12
Pentagonal	5	7	10	15
Hexagonal	6	8	12	18
Heptagonal	7	9	14	21

b) O número de faces é igual ao número de lados do polígono da base mais 2.
c) O número de vértices é igual a duas vezes o número de lados do polígono da base.
d) O número de arestas é igual a três vezes o número de lados do polígono da base.

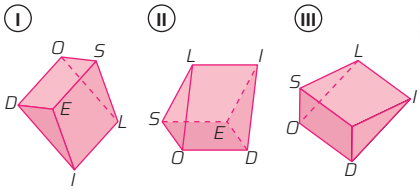
16. a) Carol está correta. O menor número de faces que um prisma pode ter é 5.
b) A menor quantidade de arestas e de vértices que um prisma pode ter são, respectivamente, 9 e 6.

17. a) Espera-se que os estudantes completem a figura desenhando o seguinte prisma:


ID/BR

b) A figura representa um prisma de base pentagonal.
c) Esse prisma tem 7 faces, 10 vértices e 15 arestas.

18. Os desenhos completos são:



Ilustrações: ID/BR

19. a) $\overline{OE}$ e $\overline{SD}$ têm o mesmo comprimento e se cruzam no meio porque são diagonais de um retângulo.
b) Pode-se afirmar que o $\triangle LSO$ é isósceles, pois tem dois lados de mesma medida (lados de quadrados congruentes).

20. Resposta pessoal. Exemplo de resposta: Qual é a forma da base de cada um dos prismas representados? (As bases têm, respectivamente, forma quadrangular e pentagonal.) Quantas faces, vértices e arestas têm cada um dos prismas representados? (O prisma de base quadrangular tem 6 faces, 8 vértices e 12 arestas, e o prisma de base pentagonal tem 7 faces, 10 vértices e 15 arestas.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 72)

21. a) O vértice da pirâmide representada é *F*.
b) A altura da pirâmide representada é $\overline{FG}$.
c) As faces laterais da pirâmide representada são: $\triangle FEA$, $\triangle FED$, $\triangle FCD$, $\triangle FBC$, $\triangle FAB$.
d) A base da pirâmide representada é pentagonal.
e) A pirâmide representada tem 6 faces, 6 vértices e 10 arestas.

22. a)

Base da pirâmide	Lados do polígono da base	Vértices	Faces	Arestas
Triangular	3	4	4	6
Quadrangular	4	5	5	8
Pentagonal	5	6	6	10
Hexagonal	6	7	7	12
Heptagonal	7	8	8	14

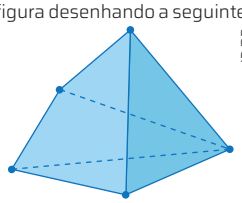
b) O número de faces é igual ao número de lados do polígono da base mais 1.
c) O número de arestas é igual ao dobro do número de lados do polígono da base.

23. Analisando a figura, há 5 faces quadrangulares, 2 faces pentagonais e 10 faces hexagonais. Alternativa **a**.

24. a) Pirâmide de base pentagonal.
b) Pirâmide de base pentagonal.
c) Pirâmide de base octogonal.

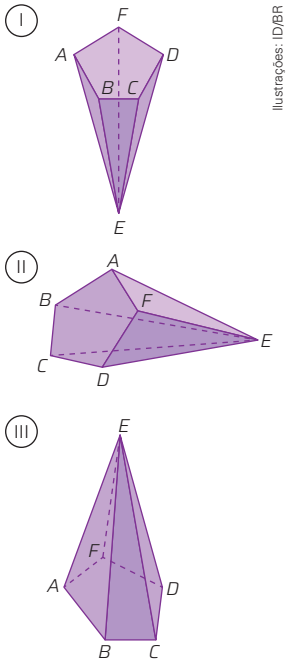
25. a) $(n + 1)$ faces, n faces laterais e a base.
b) $(n + 1)$ vértices, n vértices na base mais o vértice formado pelas arestas laterais.
c) $2n$ arestas, n arestas na base mais n arestas laterais.

26. a) Espera-se que os estudantes completem a figura desenhando a seguinte pirâmide:


ID/BR

b) A pirâmide representada tem 5 faces, 5 vértices e 8 arestas.

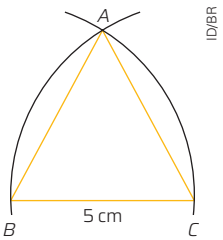
27. Os desenhos completos são:



Ilustrações: ID/BR

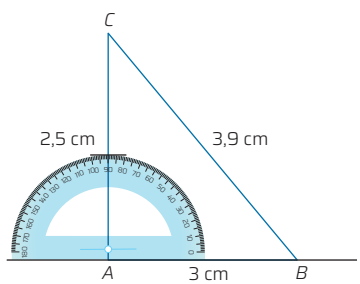
PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 74)

28. Acompanhe, a seguir, uma construção possível.
Com o auxílio da régua, trace um segmento de reta que meça 5 cm. Em seguida, com a ponta-seca do compasso em uma das extremidades desse segmento, trace um arco de circunferência. Na sequência, coloque a ponta-seca sobre a outra extremidade desse segmento e trace outro arco de circunferência. Na intersecção dos arcos formados, estará o terceiro vértice do triângulo equilátero cujos lados medem 5 cm. Depois, com o auxílio de uma régua, trace o triângulo *ABC*.



ID/BR

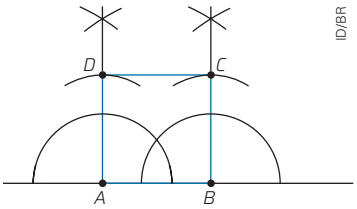
29. Acompanhe, a seguir, uma construção possível.
Com a régua, trace uma reta. Sobre essa reta, trace um segmento de reta que meça 3 cm. Em seguida, com o auxílio de um transferidor, partindo de uma das extremidades do segmento, forme um ângulo de 90° e trace um segmento de reta perpendicular à reta que meça 2,5 cm. Depois, trace outro segmento de reta para formar o triângulo retângulo. Após construir o triângulo retângulo, nomeie como *A* o vértice que tem o ângulo reto, como *B*, a outra extremidade sobre a reta e como *C*, o terceiro vértice.



ID/BR

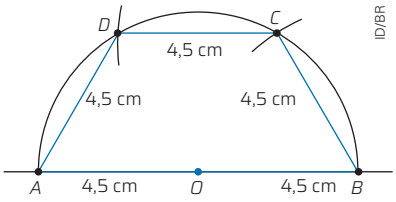
30. Acompanhe, a seguir, uma construção possível.

Com a régua, trace uma reta. Sobre essa reta, trace um segmento de reta que meça 2 cm. Em seguida, com o auxílio do compasso, trace uma semicircunferência em cada uma das extremidades do segmento *AB*. Depois, construa dois arcos centrados em cada intersecção da reta com a semicircunferência e com raio maior que o da semicircunferência. Marque a intersecção desses arcos e trace uma semirreta, que sai da extremidade *A* e passa pela intersecção dos arcos acima de *A*. Faça o mesmo para a extremidade *B*. Com a ponta-seca em *A*, abra o compasso até *B* e trace um arco sobre a perpendicular que passa por *A*, encontrando o ponto *D*. Com a ponta-seca em *A* e mesma abertura, trace um arco sobre a perpendicular que passa por *B*, encontrando o ponto *C*. Com o auxílio da régua, trace o quadrado *ABCD*.



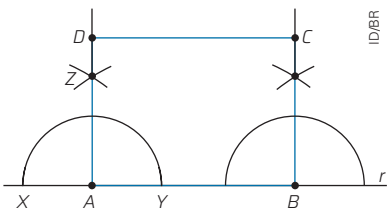
ID/BR

31. Trace uma reta com o auxílio de uma régua e marque um ponto *O* sobre a reta. Com a ponta-seca do compasso sobre o ponto *O*, construa uma semicircunferência de raio 4,5 cm e marque os pontos *A* e *B* nas intersecções da reta com a semicircunferência. Com a ponta-seca em *B* e mesma abertura, marque o ponto *C* na semicircunferência. Em seguida, com a ponta-seca em *C* e mesma abertura, marque o ponto *D* na semicircunferência. Finalmente, com o auxílio de uma régua, trace o trapézio isósceles *ABCD*.



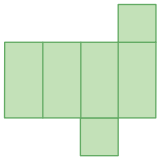
ID/BR

32. **a)** Traçamos uma reta *r* com o auxílio de uma régua e marcamos o ponto *A* sobre a reta. Com a ponta-seca do compasso em *A*, e com um raio qualquer, traçamos uma semicircunferência, obtendo os pontos *X* e *Y*. Com a ponta-seca em *X*, e com raio maior que a medida do segmento *AX*, traçamos um arco acima do ponto *A*. Com a ponta-seca em *Y*, e com o mesmo raio anterior, traçamos um arco que cruza com o arco anteriormente traçado, encontrando o ponto *Z*. Em seguida, traçamos a semirreta *AZ*. Na semirreta *AZ*, marcamos a medida do lado *AD*, encontrando o ponto *D*. Na reta *r*, marcamos a medida do lado *AB*, encontrando o ponto *B*, e, com os mesmos procedimentos para obter o ponto *D*, construímos o lado *BC*. Finalmente, com o auxílio de uma régua, traçamos o retângulo *ABCD*.



ID/BR

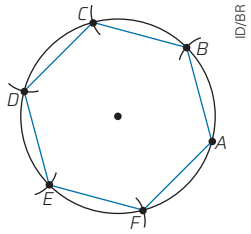
Esse procedimento pode ser repetido para todas as faces da planificação do paralelepípedo de modo a obter a figura a seguir.


ID/BR

b) Para construir uma planificação de um prisma de base hexagonal com régua e compasso, podemos utilizar a construção do retângulo para as faces laterais como no item **a**, e a construção do hexágono para as bases.

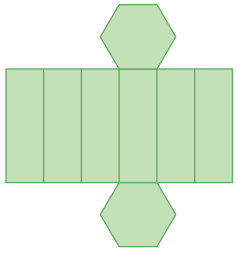
Podemos construir um hexágono da seguinte forma:

Traçamos uma circunferência com raio *r* de medida igual à medida do lado do hexágono que desejamos construir. Escolhemos um ponto *A* qualquer da circunferência e nele colocamos a ponta-seca do compasso. Com raio *r*, marcamos um ponto *B* na circunferência. Com a ponta-seca em *B* e raio *r*, marcamos o ponto *C*; repetimos o processo e marcamos *D*, *E* e *F*. Com o auxílio de uma régua, traçamos o hexágono *ABCDEF*.



ID/BR

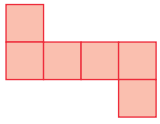
Esse procedimento pode ser repetido para a outra base do prisma, de modo a obter a figura a seguir.


ID/BR

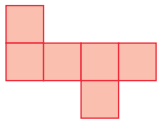
33. As planificações corrigidas devem ser:

Ilustrações: ID/BR

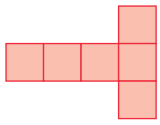
a)



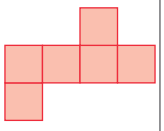
b)



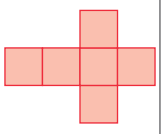
c)



d)



e)



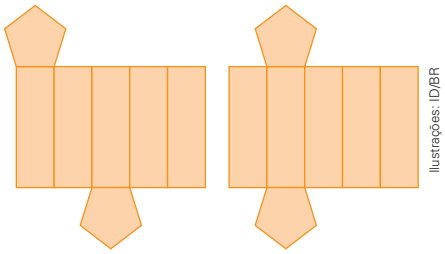
34. **a)** São pares de faces paralelas: *B* e *D*; *C* e *E*; *A* e *F*.

b) São pares de faces paralelas: *A* e *C*; *B* e *D*; *E* e *F*.

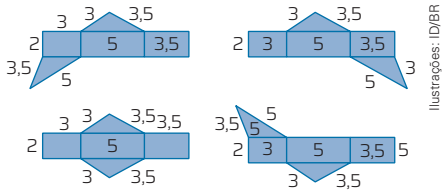
35. **a)** É um prisma reto de base pentagonal.

b) Esse prisma tem 7 faces, 10 vértices e 15 arestas.

c) Desenho pessoal. Duas planificações possíveis são:

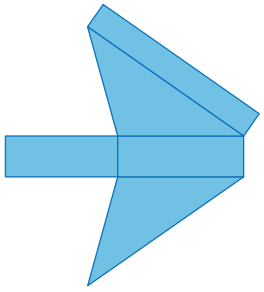

Ilustrações: ID/BR

36. Desenho pessoal. Exemplo de quatro diferentes planificações possíveis:

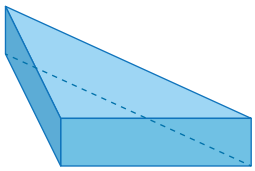


Ilustrações: ID/BR

37. **a)** Espera-se que os estudantes percebam que, na planificação, faltam uma base e uma face lateral. A seguir, apresentamos um esboço possível.


ID/BR

b) Depois de fazer o esboço da planificação do prisma, espera-se que os estudantes façam o seguinte desenho para representá-lo.


ID/BR

38. Colocando a face *ABC* sobre a face *EFG*, de modo que os dois triângulos fiquem completamente sobrepostos, o sólido resultante terá 7 faces (4 + 5 − 2 = 7).

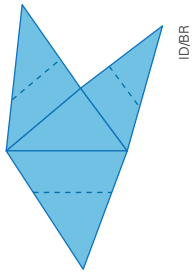
Alternativa **c**.

39. **a)** Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes respondam 9, pois é a soma das faces de cada uma das pirâmides (4 + 5).

b) Resposta pessoal.

40. **a)** Trapézio, porque $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$.

b) Espera-se que os estudantes indiquem no esboço os seguintes cortes.

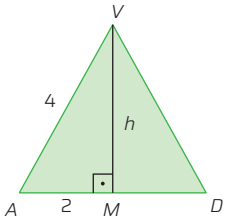

ID/BR

41. O plano do $\triangle AVD$ é perpendicular ao plano da base quadrada da pirâmide; então, o segmento VM, que é a altura do triângulo equilátero AVD, é perpendicular ao plano da base da pirâmide. Logo, $VM = h$ (altura da pirâmide).

No $\triangle AVD$ equilátero, de lado 4 cm, temos:

$h = \sqrt{4^2 - 2^2} \Rightarrow h = 2\sqrt{3}$

Portanto, a altura dessa pirâmide é $2\sqrt{3}$ cm.



ID/BR

TECNOLOGIA (P. 75)

1. **a)** 5 vértices, 5 faces e 8 arestas.

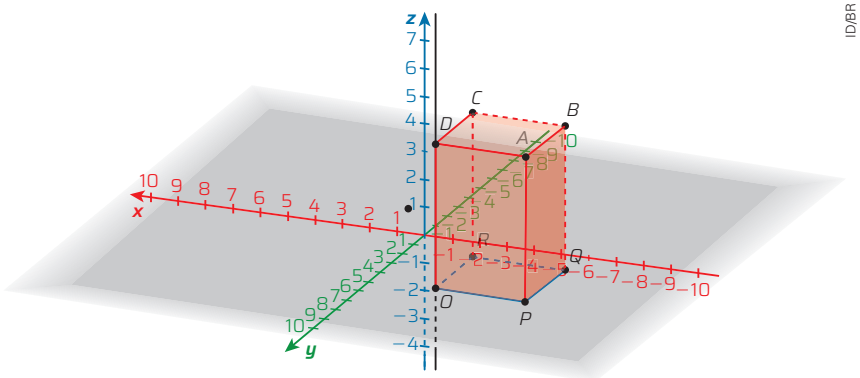
b) Um quadrado e quatro triângulos.

2. **a)** Ao movimentar um dos vértices da base, a pirâmide permanece com suas propriedades, alterando apenas o tamanho da base quadrada.

b) Ao movimentar o vértice fora da base, a pirâmide permanece com suas propriedades, alterando apenas sua altura.

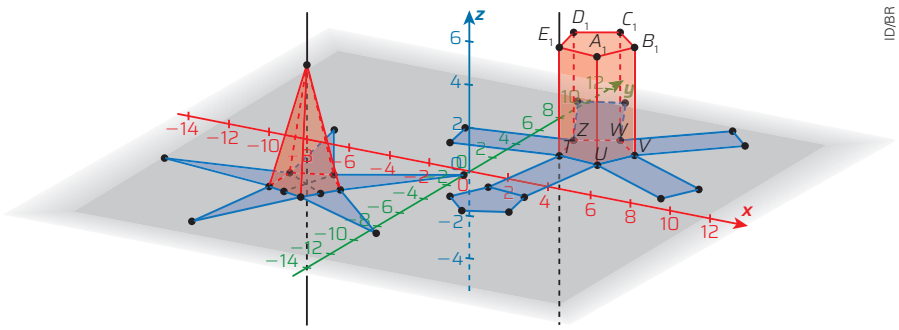
c) Ao movimentar um dos vértices da planificação, ela se fecha, formando novamente a pirâmide, ou se abre para planificação novamente.

3. Espera-se que os estudantes construam um prisma de base quadrada semelhante ao exemplo a seguir.



ID/BR

4. A resposta depende da construção dos estudantes. Para a construção de uma pirâmide de base pentagonal e de um prisma com base pentagonal, a construção deve ficar semelhante ao exemplo a seguir.



ID/BR

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 79)

42. Substituindo V por 8 e A por 12 em $V - A + F = 2$, temos: $8 - 12 + F = 2 \Rightarrow F = 6$

O poliedro tem 6 faces.

43. Substituindo F por V e A por 6 em $V - A + F = 2$, temos: $V - 6 + V = 2 \Rightarrow V = 4$

O poliedro tem 4 vértices.

44. **a)** 3 faces quadrangulares $\rightarrow 3 \cdot 4$ arestas $= 12$ arestas

2 faces triangulares $\rightarrow 2 \cdot 3$ arestas $= 6$ arestas $\oplus$

2 faces pentagonais $\rightarrow 2 \cdot 5$ arestas $= 10$ arestas

soma $\rightarrow 28$ arestas

Como cada aresta foi contada duas vezes (cada aresta é comum somente a duas faces), temos:

$A = \frac{28}{2} = 14$ e $F = 3 + 2 + 2 = 7$

Substituindo F por 7 e A por 14 em $V - A + F = 2$, para obter o número de vértices, temos:

$V - 14 + 7 = 2 \Rightarrow V = 2 + 7 = 9$

Portanto, o poliedro tem 9 vértices e 14 arestas.

b) 5 faces quadrangulares $\rightarrow 5 \cdot 4$ arestas $= 20$ arestas $\oplus$

4 faces triangulares $\rightarrow 4 \cdot 3$ arestas $= 12$ arestas

soma $\rightarrow 32$ arestas

Como cada aresta foi contada duas vezes (cada aresta é comum somente a duas faces), temos:

$A = \frac{32}{2} = 16$ e $F = 5 + 4 = 9$

Substituindo F por 9 e A por 16 em $V - A + F = 2$, temos:

Portanto, o poliedro tem 9 vértices e 16 arestas.

45. $V = 8$ vértices

Usando a relação de Euler, temos que:

$V - A + F = 2 \Rightarrow 8 - A + F = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow -A + F = 2 - 8 \Rightarrow -A + F = -6$

Analisando os dados do problema, temos que:

$A = \frac{3 \cdot F}{2}$

Substituindo A na equação, temos que:

$-A + F = -6 \Rightarrow -\frac{3F}{2} + F = -6 \Rightarrow F = 12$

Alternativa **e**.

46. 8 faces triangulares $\rightarrow 8 \cdot 3$ arestas $= 24$ arestas

$A = \frac{24}{2} = 12$

Substituindo F por 8 e A por 12 em $V - A + F = 2$, temos:

$V - 12 + 8 = 2 \Rightarrow V = 6$

O octaedro cujas faces são triangulares tem 6 vértices.

47. **a)** Se um dodecaedro tem 12 faces e 30 arestas, substituindo F por 12 e A por 30 em $V - A + F = 2$, temos:

$V - 30 + 12 = 2 \Rightarrow V = 20$

Ele tem 20 vértices.

b) Se um icosaedro tem 20 faces e 12 vértices, substituindo F por 20 e V por 12 em $V - A + F = 2$, temos:

$12 - A + 20 = 2 \Rightarrow A = 30$

Ele tem 30 arestas.

48. De acordo com o enunciado, $A = 30$ e $V = 20$. Utilizando a relação de Euler, temos:

$20 - 30 + F = 2 \Rightarrow F = 12$

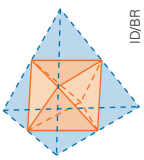
Alternativa **b**.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 81)

49. Resposta pessoal.

Espera-se que os estudantes mencionem um poliedro que seja apenas convexo, por exemplo, uma pirâmide de base quadrada, ou ainda, um poliedro com uma face poligonal não regular.

50. **a)** Um tetraedro regular é um poliedro composto de 4 faces triangulares com lados de mesma medida. Retirando um tetraedro regular de 2 cm de aresta de cada um dos vértices do tetraedro regular cujas arestas medem 4 cm, o sólido resultante é o seguinte:


ID/BR

b) Sim, o sólido resultante é um octaedro regular de aresta 2 cm.

51. **a)** Verdadeira.

b) Falsa. Exemplo de correção: Todo poliedro de Platão é convexo.

c) Falsa. Exemplo de correção: Todo poliedro regular é de Platão.

d) Falsa. Exemplo de correção: Nem todo poliedro de Platão é poliedro regular.

e) Falsa. Exemplo de correção: O hexaedro tem faces quadrangulares.

CÁLCULO RÁPIDO (P. 81)

1. **a)** 205 **b)** 310 **c)** 18 **d)** 15,5 **e)** 37 **f)** 157,5

2. **a)** $60 \cdot 0{,}7 = 60 \cdot 7 : 10 = 42$

b) $80 \cdot 0{,}4 = 80 \cdot 4 : 10 = 32$

c) $90 \cdot 0{,}6 = 90 \cdot 6 : 10 = 54$

d) $36 \cdot 0{,}3 = 36 \cdot 3 : 10 = 10{,}8$

e) $55 \cdot 0{,}4 = 55 \cdot 4 : 10 = 22$

f) $26 \cdot 0{,}8 = 26 \cdot 8 : 10 = 20{,}8$

g) $45 \cdot 0{,}7 = 45 \cdot 7 : 10 = 31{,}5$

h) $26 \cdot 0{,}6 = 26 \cdot 6 : 10 = 15{,}6$

i) $82 \cdot 0{,}8 = 82 \cdot 8 : 10 = 65{,}6$

3. Respostas pessoais. Exemplos de resposta:

a) A espessura de uma folha de papel sulfite.

b) A espessura de um tampo de vidro de uma mesa.

c) A largura de uma porta.

d) O comprimento de um viaduto.

4. **a)** 4,5 cm^2

b) 6 cm^2

c) 2,25 cm^2

d) 6 000 cm^2 ou 0,6 m^2

PARA RECORDAR (P. 82)

1. **a)** $D(200) = 20 + \frac{200}{10} = 40$

Como a despesa da empresa é dada em milhares de reais, quando tiver 200 funcionários, a despesa será de R$ 40 000,00.

b) $100 = 20 + \frac{n}{10} \Rightarrow n = 800$

Quando a despesa da empresa for de R$ 100 000,00, o número de funcionários dela será 800.

2. Formas de pagamento:

- R$ 800,00 à vista, com desconto de x% (I)
- 2 parcelas de R$ 400,00: 1ª parcela no ato; 2ª parcela um mês depois (II)

a) Para $x = 15$:

(I): $800 - \frac{15}{100} \cdot 800 = 680$

(II): 1ª parcela $\rightarrow$ 400

Paga a primeira parcela, restam

$680 - 400 = 280$, que são aplicados por um mês a juros de 1,5%, resultando em:

$280 + \frac{1,5}{100} \cdot 280 = 280 + 4,20 = 284,20$

O valor de R$ 284,20 é inferior a R$ 400,00, o que inviabiliza o pagamento da segunda parcela.

A compra à vista é a única possibilidade para esse comprador.

b) (I): $800 - \frac{x}{100} \cdot 800 = 800\left(1 - \frac{x}{100}\right)$

(II): $\left[800\left(1 - \frac{x}{100}\right) - 400\right] \cdot \left(1 + \frac{1,5}{100}\right) = 400$

$-812x = -600 \Rightarrow x \approx 0,74$

Para $x = 0,74$ de desconto, é indiferente pagar à vista ou a prazo.

3. Empresa A: $P_A = 100n + 350$

Empresa B: $P_B = 120n + 150$

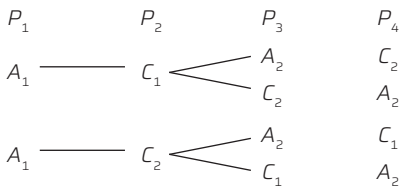
Fazendo $P_A = P_B$, temos:

$100n + 350 = 120n + 150$

Alternativa **a**.

4. Como os triângulos são congruentes (dois lados e o ângulo entre eles são congruentes), os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{Y}$ devem ter a mesma medida.

5. A ordem de sentar nas poltronas (P) influi na contagem. Se A_1 e A_2 são os adultos e C_1 e C_2 são as crianças, temos:



Para cada pessoa sentada na poltrona 1, há 4 possibilidades de outros 3 se sentarem. Logo, há, ao todo, 16 maneiras diferentes.

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO (P. 83)

1. Por meio de cortes paralelos em cada uma das faces e tendo 3 cm de aresta em cada um dos cubos menores, o cubo de 9 cm de aresta resulta 27 cubos menores.

A sequência proposta indica que devemos ter 6 cubos com apenas uma face pintada de verde (os cubos ao centro de cada face pintada de verde); 8 cubos terão três faces pintadas de verde (os cubos menores localizados nos vértices do cubo maior); e apenas o cubo central não terá faces pintadas de verde.

Alternativa **c**.

2. Como 5 + 8 = 13, o número 5 deve ser oposto ao 6. Observe que 13 não pertence ao intervalo. Para que as somas pertençam ao intervalo dado, o número 2 deverá ser oposto ao 8 e o número 3 deve ser oposto ao 4. Assim, o maior produto é $5 \cdot 6 = 30$.

Alternativa **c**.

3. **a)** O octaedro tem 6 vértices, e com essa planificação podemos obter as seguintes somas:

$4 + 5 + 6 + 7 = 22$

$8 + 3 + 2 + 1 = 14$

$8 + 3 + 6 + 7 = 24$

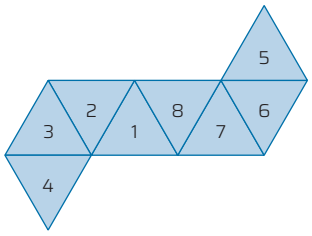
$3 + 2 + 5 + 6 = 16$

$5 + 4 + 2 + 1 = 12$

$4 + 7 + 8 + 1 = 20$

O valor máximo é 24.

b)



ID/BR

Reorganizando os números na planificação, temos as seguintes somas:

$4 + 3 + 6 + 7 = 20$

$3 + 2 + 5 + 6 = 16$

$2 + 1 + 8 + 5 = 16$

$5 + 6 + 7 + 8 = 26$

$1 + 2 + 3 + 4 = 10$

$1 + 8 + 7 + 4 = 20$

Neste caso, o valor máximo é 26.

MATEMÁTICA E EDIFICAÇÕES (P. 84)

Conectando ideias

1. Para facilitar, decompoha as estruturas em vermelho em dois paralelepípedos: quatro pilares, com medidas de 17,7 m · 4 m · 2,5 m, e duas vigas, com medidas de 78 m · 3,5 m · 2,5 m. Dessa maneira, a área dos quatro pilares é:

$4 \cdot (2 \cdot 4 \cdot 17,7 + 2 \cdot 2,5 \cdot 17,7) = 920,4$

Considerando que a viga não é pintada na parte em que encosta no teto superior, nem na emenda com as colunas, temos que a área das duas vigas é:

$2 \cdot (2 \cdot 78 \cdot 3,5 + 78 \cdot 2,5) = 1\,482$

Assim, a área da superfície vermelha é igual a 2 402,4 m^2, pois 920,4 + 1 482 = 2 402,4.

2. Resposta pessoal.

O intuito dessa atividade é fazer com que os estudantes pesquisem a história, o contexto de construção e a relevância de outros museus, centros históricos, equipamentos culturais, etc., evidenciando sua importância para a dinâmica da cidade ou da região. Com isso em mente, eles devem considerar como foi pensado o projeto arquitetônico do equipamento escolhido, quais materiais foram utilizados, em que ano foi construído, quem é a pessoa responsável pela obra e qual é seu estilo, bem como a relevância desse espaço para a comunidade, de que maneira ele foi preservado ao longo do tempo, como é feito o investimento no lugar e como ele pode ser acessado e visitado.

Por fim, inspirados pelas medidas do Masp mostradas na imagem da seção e com as pesquisas feitas, os grupos devem construir uma maquete em escala de algum prédio, equipamento cultural, ponto turístico ou outro empreendimento científico e cultural da cidade ou região onde moram. A produção das maquetes pode ser iniciada em sala de aula, para que haja discussão das melhores formas de construí-las. Essa proposta pode ser simplificada com a maquete expondo apenas os sólidos geométricos encontrados na construção original, com as medidas em escala.

CAPÍTULO 4 SÓLIDOS GEOMÉTRICOS: CORPOS REDONDOS

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 92)

1. **a)** Tanto o prisma quanto o cilindro são formados a partir de retas paralelas a uma reta que intersecta dois planos paralelos e distintos. No prisma, elas formam um polígono em cada plano e, no cilindro, um círculo.

b) Trocar o termo "polígono" por "círculo".

2. **a)** Tanto a pirâmide quanto o cone são formados pela reunião de todos os segmentos de reta com uma extremidade em um plano e a outra em um mesmo ponto fora desse plano. Na pirâmide, eles formam um polígono no plano e, no cone, um círculo.

b) Trocar o termo "polígono" por "círculo".

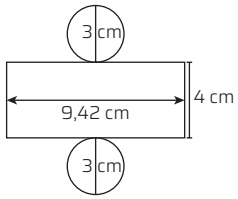
3. Não, pois devemos ter:

$C = 2\pi r \Rightarrow C = 2 \cdot 3,14 \cdot 1,5 \Rightarrow C = 9,42$

A medida da face lateral do cilindro deve ser maior, igual a 9,42 cm.

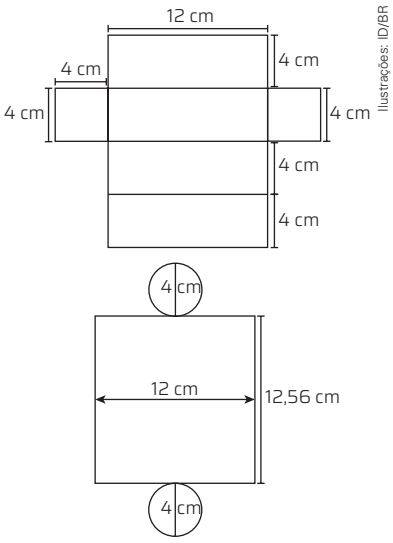
4. $C = 2\pi r \Rightarrow C = 2 \cdot 3,14 \cdot 1,5 \Rightarrow C = 9,42$

Logo, a planificação desse cilindro é a seguinte:



ID/BR

5. Resposta pessoal.



Ilustrações: ID/BR

6. Resposta pessoal. Exemplo de resposta: Desejamos construir uma caixa em forma de paralelepípedo que sirva de embalagem para um objeto com a forma de um cilindro reto de 3 cm de raio da base e 18 cm de altura.

7. Com as informações dadas no enunciado, a parte da superfície lateral a ser revestida corresponde à superfície de um tronco de um cone.

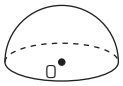
Alternativa **e**.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 95)

8. **a)** Uma circunferência, pois, ao rotacionar o círculo em torno do eixo e, M manterá sempre a mesma distância do centro O do círculo.

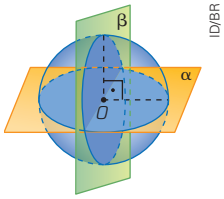
b) Um círculo de raio PQ, com $PQ \geqslant OM$.

9. Segundo o *Dicionário eletrônico Houaiss da língua portuguesa 3.0*, **hemisfério** é "cada uma das metades de uma esfera determinadas por um plano que passa por seu centro".



ID/BR

10. Desenho pessoal. Exemplo de resposta:



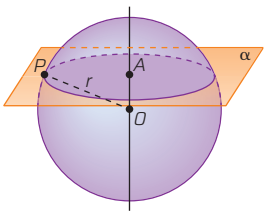
ID/BR

11. **a)** Porque $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ são raios da esfera.

b) $\triangle OMA$ e $\triangle OMB$ são retângulos, com hipotenusa e um cateto congruentes.

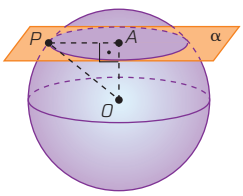
c) Da congruência dos triângulos OMA e OMB, segue que $MA = MB$ e, consequentemente, são raios do círculo contido em α.

12. **a)**



ID/BR

b)



ID/BR

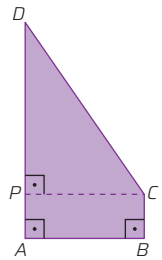
c) $OP = r$, porque O é o centro da esfera de raio r e P é um ponto da esfera.

d) A é ponto da reta que passa por O e é perpendicular a qualquer reta de α que passa por A; daí $\overleftrightarrow{OA}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{AP}$ e o ângulo $O\hat{A}P$ é reto. Portanto, o $\triangle OAP$ é retângulo em A.

e) $OP^2 = OA^2 + AP^2$

$AP^2 = OP^2 - OA^2 = r^2 - OA^2$

13. Como as esferas são tangentes ao plano que contém a reta AB e A e B são os pontos de tangência, vamos considerar o quadrilátero $ABCD$, sendo C e D os centros das esferas.



ID/BR

$ABCP$ é um retângulo. Se considerarmos o $\triangle PCD$ com $\overline{PC}$ paralelo a $\overline{AB}$, temos que $\triangle PCD$ é retângulo. Portanto:

$PC = AB$

$CD = r_1 + r_2 = 5{,}75 + 2 = 7{,}75$

$PD = AD - BC = 5{,}75 - 2 = 3{,}75$

Pelo teorema de Pitágoras, no $\triangle PCD$, temos:

$AB = PC = \sqrt{CD^2 - PD^2}$

$AB = \sqrt{(7{,}75)^2 - (3{,}75)^2} \Rightarrow AB \simeq 6{,}8$

Portanto, a distância aproximada entre os pontos A e B é 6,8 cm.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 97)

14. As respostas são pessoais, mas espera-se que os estudantes identifiquem que os sólidos dos desenhos **a** e **c** são inscritos em função da relação de vértices na esfera e de tangência de faces.

15. Resposta pessoal. Exemplo: Em qual dos desenhos a esfera está inscrita? E em qual ela está circunscrita? (Resposta: A esfera está inscrita no cubo e circunscrita ao cilindro.)

CÁLCULO RÁPIDO (P. 98)

1. Aplicando o teorema de Pitágoras no quadrado, temos:

$x^2 = 2\ell^2 \Rightarrow x = \sqrt{2\ell^2} \Rightarrow x = \ell\sqrt{2}$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo equilátero, temos:

$x^2 = \ell^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4} \Rightarrow x^2 = \frac{3\ell^2}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{3\ell^2}{4}} \Rightarrow x = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$

a) Se $\ell = 12$, então $d = 12\sqrt{2}$. Portanto, a diagonal desse quadrado mede $12\sqrt{2}$ cm.

b) Se $\ell = 10$, então $h = 5\sqrt{3}$. Portanto, a altura desse triângulo mede $5\sqrt{3}$ cm.

c) Se $p = 32$, então $\ell = \frac{32}{4} = 8$. Portanto, a diagonal desse quadrado mede $8\sqrt{2}$ cm.

d) Se $\ell^2 = 100$, então $\ell = \sqrt{100} = 10$ e $d = 10\sqrt{2}$. Portanto, a diagonal desse quadrado mede $10\sqrt{2}$ cm.

e) Se $p = 15$, então $\ell = \frac{15}{3} = 5$ e $h = \frac{5\sqrt{3}}{2}$. Portanto, a altura desse triângulo mede $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm.

f) Se $d = 9\sqrt{2}$, então $\ell = 9$. Logo, $p = 4 \cdot 9 = 36$ e $A = 9^2 = 81$. Portanto, o perímetro é 36 m, e a área, 81 m^2.

g) Se $h = 3\sqrt{3}$, então $\ell = 6$. Logo, $p = 3 \cdot 6 = 18$ e $A = 6 \cdot 3\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$. Portanto, o perímetro é 18 cm, e a área, $9\sqrt{3}$ cm^2.

2. **a)** Respectivamente: cm, cm, m, m, m, km.

b) Respectivamente: mg, arroba (ou kg), kg, g.

3. Respostas pessoais. Exemplo de respostas: Respectivamente: uma pitada de sal, uma colher de chá de fermento em pó, um *smartphone*, 2 litros de água.

PARA RECORDAR (P. 98)

1. Se 1 mm equivale a 17 km, então:

0,185 m = 185 mm

Assim, na escala, 185 mm corresponde a: $185 \cdot 17 = 3145$. Ou seja, 3145 km.

Portanto, a afirmação está errada, pois houve erro na colocação da vírgula.

2. No mapa, 2 cm correspondem a 5 km. Então, 1 cm corresponde a 2,5 km.

Assim, 3 cm equivalem a: $3 \cdot 2{,}5 = 7{,}5$. Ou seja, 7,5 km.

Portanto: $A = 7{,}5^2 = 56{,}25$.

A área é 56,25 km^2.

3. No losango, temos quatro triângulos retângulos congruentes.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo, temos:

$4^2 = x^2 + 2^2 \Rightarrow 16 = x^2 + 4 \Rightarrow x^2 = 12 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 2\sqrt{3}$

Então, a área desse triângulo, em cm^2, é:

$A = \frac{2 \cdot 2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A = 2\sqrt{3}$

Portanto, a área total da figura, em centímetro quadrado, é:

$A = 4 \cdot 2\sqrt{3} \Rightarrow A = 8\sqrt{3}$

A escala 1 : 100 000 representa que cada 1 cm no desenho equivale a 100 000 cm na medida real, ou seja, 1 km. Portanto, a área do terreno é $8\sqrt{3}$ km^2.

4. **a)** Não. Com base na informação, com segmentos de reta medindo 1, 2 e 3, por exemplo, não é possível construir um triângulo.

b) O outro lado pode variar entre 4 cm ($3 < 4 < 7$) e 10 cm ($3 + 7$).

c) Não, ele poderá andar, no máximo, 24 km. Devemos ter: $BD < 8$ (menor que a soma de AB com AD), $CD < 9$ (menor que a soma de AC com AD), $BC < 7$ (menor que a soma de AB com AC). Logo, a soma não passa de 24 km.

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO (P. 99)

1. Vamos começar pela última informação: Roberto é amigo de Paulo.

Com base na informação (II), deduzimos que José não é amigo de Roberto.

Da informação (III), temos que Mário não é amigo de José.

Assim, de (I), concluímos que Mário não é amigo de João.

Alternativa **d**.

2. Se apenas um dos amigos mentiu e Gabriel e João fazem afirmações contrárias, um deles é o mentiroso. Então, Rodrigo e Tiago dizem a verdade. Com base na afirmação verdadeira de Tiago, concluímos que o penetra era Fernando.

3. Vamos supor que os ingressos estivessem em A. Nesse caso, a afirmação em A seria verdadeira, assim como as afirmações em B e em C. Como apenas uma delas é verdadeira, os ingressos não podem estar em A.

Supondo que os ingressos estivessem em B, todas as afirmações dos três envelopes seriam falsas, o que também não pode ocorrer.

Para ter certeza, vamos supor que os ingressos estejam em C. Nesse caso, as afirmações em C e em A seriam falsas, mas a afirmação em B é verdadeira. Portanto, essa é a única alternativa possível, e os ingressos estão no envelope C.

MATEMÁTICA E RECICLAGEM (P. 100)

Conectando ideias

1. Vamos calcular a área de superfície retangular de medidas $6{,}5\pi$ e 13 centímetros. Considerando 3,14 o valor para π, temos área de 265,3 cm^2.

A área da chapa da bobina corresponde a um retângulo de dimensões 1,7 m $\times$ 1 km (1 000 m), portanto, com área de 1 700 m^2.

Para saber quantas latas podem ser feitas com essa chapa, é preciso reduzir as medidas das áreas a uma mesma unidade, cm^2 ou m^2. Usando o centímetro quadrado, temos que 17 000 000 cm^2 divididos por 265,3 cm^2 correspondem a aproximadamente 64 078 latas.

Resposta pessoal. Entre as vantagens da lata de alumínio e do formato cilíndrico estão a otimização do envasamento, a distribuição das forças internas e externas, a facilidade de armazenamento e estoque em prateleiras de supermercado, o fato de o alumínio permitir que a bebida do interior gele mais rapidamente e o alto nível de aproveitamento com baixo custo na reciclagem da lata de alumínio.

2. Resposta pessoal. Peça aos estudantes que encontrem um objeto que desejem elaborar e avalie seus esboços com atenção. Permita que eles escolham livremente, mas chame

a atenção para a viabilidade do projeto em um curto prazo de tempo. Ajude-os a selecionar projetos factíveis e ressalte a necessidade da supervisão de um adulto durante a execução da atividade, especialmente se houver o uso de objetos cortantes.

Peça aos estudantes que expliquem, por exemplo, quais materiais foram utilizados, por que escolheram esse objeto para construir e como esse tipo de ação pode colaborar para o consumo sustentável.

CAPÍTULO 5 GEOMETRIA MÉTRICA ESPACIAL

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 110)

1. **a)** Poderia cortá-la, em um plano paralelo à base, à metade da altura do prisma, ou cortar a embalagem por um plano inclinado em relação à base, de modo que contenha as diagonais de duas faces opostas do prisma.

b) Cortar em um plano paralelo à base na medida correspondente às frações desejadas.

c) Cortaria em um plano paralelo à base na metade da altura do prisma.

2. • Cubo A: $a = 5$
$A_b = 5^2 = 25$
$A_\ell = 4 \cdot 25 = 100$
$A_t = 6 \cdot 25 = 150$
$V = 5^3 = 125$

• Cubo B: $a = \sqrt{81} = 9$
$A_b = 81$
$A_\ell = 4 \cdot 81 = 324$
$A_t = 6 \cdot 81 = 486$
$V = 9^3 = 729$

• Cubo C: $a = \sqrt{36} = 6$
$A_b = \frac{144}{4} = 36$
$A_\ell = 144$
$A_t = 6 \cdot 36 = 216$
$V = 6^3 = 216$

• Cubo D: $a = \sqrt{144} = 12$
$A_b = \frac{864}{6} = 144$
$A_\ell = 4 \cdot 144 = 576$
$A_t = 864$
$V = 12^3 = 1\,728$

• Cubo E: $a = \sqrt[3]{343} = 7$
$A_b = 7^2 = 49$
$A_\ell = 4 \cdot 49 = 196$
$A_t = 6 \cdot 49 = 294$
$V = 343$

3. $726 = 6 \cdot a^2 \Rightarrow a = 11$

4. **a)** $\overline{BH}$

b) $CH = \ell\sqrt{2} \Rightarrow CH = 5\sqrt{2}$
$BH = a\sqrt{3} \Rightarrow BH = 5\sqrt{3}$
Portanto, os segmentos CH e BH medem, respectivamente, $5\sqrt{2}$ cm e $5\sqrt{3}$ cm.

5. **a)** $x^2 = 5^2 + 12^2 \Rightarrow x = 13$

b) A diagonal do quadrado de lado de medida 6 mede $6\sqrt{2}$.
$x^2 = 3^2 + (6\sqrt{2})^2 \Rightarrow x = 9$

c) $\cos 60° = \frac{x}{10} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{10} \Rightarrow x = 5$

d) A diagonal do quadrado de lado de medida 6 mede $6\sqrt{2}$.
$x^2 = 7^2 + (6\sqrt{2})^2 \Rightarrow x = 11$

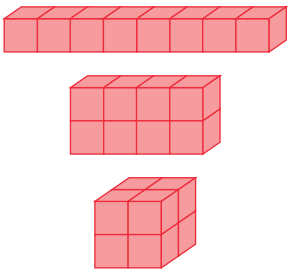
6. $AH = a\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$
Então, $a = 4$ e $BD = 4\sqrt{2}$.

a) $A_{BDH} = \frac{1}{2} \cdot (4\sqrt{2})^2 \cdot \operatorname{sen} 60° \Rightarrow$
$\Rightarrow A_{BDH} = \frac{(4\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_{BDH} = 8\sqrt{3}$
Portanto, a área do triângulo BDH é $8\sqrt{3}$ cm².

b) O triângulo MNP é semelhante ao triângulo BDH com razão de proporcionalidade $\frac{1}{2}$, então:
$A_{MNP} = \frac{A_{BDH}}{4} = \frac{8\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_{MNP} = 2\sqrt{3}$
Portanto, a área do triângulo MNP é $2\sqrt{3}$ cm².

7. $V = 4 + 6 + 6 + 4 = 20$
Número de cubos faltantes: $4^3 - 20 = 44$.
Logo, o volume é 20 dm³ e é necessário acrescentar, no mínimo, 44 cubos para formar um cubo maior.

8. **a)** 3 paralelepípedos ($1 \times 2 \times 4$; $1 \times 1 \times 8$; $2 \times 2 \times 2$).


Ilustrações: ID/BR

b) $A_1 = 34$; $A_2 = 28$; $A_3 = 24$

c) Todos têm o mesmo volume.

9. **a)** $A_{t_A} = 27 \cdot 10 = 270$
$A_{t_B} = 24 \cdot 10 = 240$
Portanto, $A_{t_A} > A_{t_B}$.

b) $V_A = 28 \cdot 10 = 280$
$V_B = 36 \cdot 10 = 360$
Portanto, $V_A < V_B$.

10. Considere P o ponto de intersecção da reta pelo ponto A perpendicular a BH. Cálculo de AH:
$AH^2 = DH^2 + AD^2 \Rightarrow AH = a\sqrt{5}$
Como a base do paralelepípedo é um quadrado de lado a, temos $BD = a\sqrt{2}$. Cálculo de BH:
$BH = \sqrt{DH^2 + BD^2} = \sqrt{(2a)^2 + 2a^2} = a\sqrt{6}$
No $\triangle ABH$, temos:
$BH \cdot AP = AB \cdot AH \Rightarrow a\sqrt{6} \cdot AP = a \cdot a\sqrt{5} \Rightarrow$
$\Rightarrow AP = \frac{a\sqrt{30}}{6}$
Alternativa **e**.

11. Considerando x, $x + 1$ e $x + 2$ as medidas das arestas do paralelepípedo, temos:
$2x(x + 1) + 2x(x + 2) + 2(x + 1)(x + 2) = 94$
$x = \frac{-2 \pm 8}{2}$
$x = 3$ ou $x = -5$ (Não convém)
Assim, os lados medem 3 m, 4 m e 5 m. O volume, em m³, é dado por:
$V = x \cdot (x + 1)(x + 2) = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$

12. **a)** Dimensões do paralelepípedo: a, b e c.
$a = 3x \qquad b = 4x \qquad c = 5x$
Área total: $A_t = 2(ab + ac + bc) \Rightarrow$
$\Rightarrow 376 = 2(3x \cdot 4x + 3x \cdot 5x + 4x \cdot 5x) \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 = \frac{188}{47} \Rightarrow x = 2$
$a = 3x \Rightarrow a = 3 \cdot 2 \Rightarrow a = 6$ m
$b = 4x \Rightarrow b = 4 \cdot 2 \Rightarrow b = 8$ m
$c = 5x \Rightarrow c = 5 \cdot 2 \Rightarrow c = 10$ m
Volume, em m³: $V = a \cdot b \cdot c \Rightarrow$
$\Rightarrow V = 6 \cdot 8 \cdot 10 \Rightarrow V = 480$

b) Diagonal, em metro: $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \Rightarrow$
$\Rightarrow d = \sqrt{6^2 + 8^2 + 10^2} \Rightarrow d = 10\sqrt{2}$

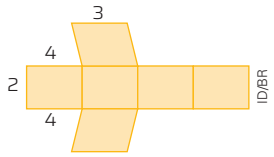
c) As medidas das diagonais de cada face, em metro, são:
$d_1^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow d_1 = 10$
$d_2^2 = 6^2 + 10^2 \Rightarrow d_2 = 2\sqrt{34}$
$d_3^2 = 8^2 + 10^2 \Rightarrow d_3 = 2\sqrt{41}$

13. $13^2 = h^2 + 5^2 \Rightarrow h = 12$
$A_{base} = \frac{(11 + 6) \cdot 12}{2} = 102$
$V = 102 \cdot 8 = 816$
Portanto, o volume do prisma é 816 cm³.

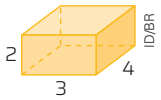
14. $A_t = 6 \cdot 6 \cdot 2 + 2 \cdot 6 \cdot \frac{2^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_t = 12(6 + \sqrt{3})$
$V = 6\sqrt{3} \cdot 6 \Rightarrow V = 36\sqrt{3}$
Portanto, a área total e o volume do prisma são, respectivamente, $12(6 + \sqrt{3})$ cm² e $36\sqrt{3}$ cm³.

15. Área lateral: $A_\ell = 3 \cdot 8 \cdot 5 \Rightarrow A_\ell = 120$
Área das bases: $A_b = \frac{5 \cdot 5\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} \Rightarrow A_b = \frac{25\sqrt{3}}{4}$
Duas bases: $2 \cdot \frac{25\sqrt{3}}{4} = 12{,}5\sqrt{3}$
Área total do prisma: $A_t = 120 + 12{,}5\sqrt{3}$

16. **a)** Resposta pessoal. Exemplo de desenho:



b) Resposta pessoal. Exemplo de desenho:



c) $A_t = 2 \cdot \frac{3 \cdot 4}{2} + 4 \cdot 2 \cdot 2{,}5 \Rightarrow A_t = 32$
$V = 6 \cdot 2 \Rightarrow V = 12$
Portanto, a área total e o volume do prisma são, respectivamente, 32 cm² e 12 cm³.

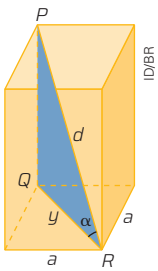
d) Resposta pessoal.

17. Cálculo da área total e do volume do cubo de aresta de medida $2a$:
$A_{t_1} = 6 \cdot (2a)^2 = 24a^2$
$V_1 = (2a)^3 = 8a^3$
Cálculo da área total e do volume do cubo de aresta de medida $3a$:
$A_{t_2} = 6 \cdot (3a)^2 = 54a^2$
$V_2 = (3a)^3 = 27a^3$

a) A área total é multiplicada por 4 e o volume por 8.

b) A área total é multiplicada por 9 e o volume por 27.

18.



A base é um quadrado de lado de medida a e tem 150 m² de área. Assim:
$a^2 = 150 \Rightarrow a = 5\sqrt{6}$
y é diagonal do quadrado de lado de medida a, daí temos:
$y = a\sqrt{2} \Rightarrow y = 10\sqrt{3}$
No $\triangle PQR$, temos:
$\cos \alpha = \frac{y}{d} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{10\sqrt{3}}{20\sqrt{3}} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2}$
Portanto, $\alpha = 60°$.

19. **a)** Prisma de base trapezoidal ou hexaedro.

b) $A_{superfície} = 35 \cdot 25 \Rightarrow A_{superfície} = 875$

$GH^2 = 35^2 + 12^2 \Rightarrow GH = 37$

$A_{fundo} = 25 \cdot 37 \Rightarrow A_{fundo} = 925$

Portanto, a área da superfície é 875 m² e a área do fundo é 925 m².

c) $V = 25 \cdot \frac{(3 + 15) \cdot 35}{2} \Rightarrow V = 7875$

Portanto, o volume da piscina é 7875 m³.

20. $V = 60 \cdot 3 = 180$

Considerando x e $2x$ as dimensões da sala, temos:

$180 = 3{,}60 \cdot x \cdot 2x \Rightarrow x = 5$

Portanto, as dimensões do chão da sala são 10 m e 5 m.

21. **a)** Projeto A: Área da base: $A_b = \frac{30 \cdot 17}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_b = 255$

Volume de um degrau: $V = \frac{255 \cdot 80}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow V = 10\,200$

Volume total necessário:

$V = 10\,200 \cdot 18 \Rightarrow V = 183\,600$

Projeto B: Área da base: $A_b = \frac{28 \cdot 20}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_b = 280$

Volume de um degrau: $V = \frac{280 \cdot 70}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow V = 9800$

Volume total necessário: $V = 9800 \cdot 18 \Rightarrow$

$\Rightarrow V = 176\,400$

Portanto, deverá ser escolhido para a construção o Projeto A.

b) Projeto A: Área da base: $A_b = \frac{30 \cdot 17}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_b = 255$

Volume de um degrau: $V = \frac{255 \cdot 100}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow V = 12\,750$

Volume total necessário:

$V = 12\,750 \cdot 18 \Rightarrow V = 229\,500$

Logo, o volume de cimento necessário para construir a escada de 18 degraus é 229 500 cm³.

22. Ligando os pontos M, N, E e G, formamos um trapézio isósceles.

A base maior (o segmento $\overline{EG}$) é a diagonal do quadrado de lado $a\sqrt{2}$. Logo:

$EG = \ell\sqrt{2} \Rightarrow EG = a\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \Rightarrow EG = 2a$

A base menor (o segmento $\overline{MN}$) é a hipotenusa do triângulo retângulo cujos catetos medem $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Temos que:

$MN^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow MN = a$

Agora, para calcular a altura h, temos que:

$y^2 = \left(a\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow y = \frac{a\sqrt{10}}{2}$

$x = \frac{EG - MN}{2} \Rightarrow x = \frac{2a - a}{2} \Rightarrow x = \frac{a}{2}$

Logo, $h^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow h^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 +$

$+ \left(\frac{a\sqrt{10}}{2}\right)^2 \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{11}}{2}$

Então, a área do quadrilátero $EGMN$ é:

$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2} \Rightarrow A = \frac{(2a + a) \cdot \frac{a\sqrt{11}}{2}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow A = \frac{3a^2\sqrt{11}}{4}$

23. Considerando a, b e c as medidas das arestas desse paralelepípedo, temos:

$\frac{a}{2} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5}$

$b = 2a$ e $c = \frac{5}{2}a$

$d = 9\sqrt{5}$

$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$

$81 \cdot 5 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 81 \cdot 5 = a^2 + 4a^2 + \frac{25}{4}a^2 \Rightarrow 6 = a$

Daí, temos:

$b = 2 \cdot 6 = 12$

$c = \frac{5}{2} \cdot 6 = 15$

$A = 2(6 \cdot 12 + 6 \cdot 15 + 12 \cdot 15) \Rightarrow A = 684$

$V = 6 \cdot 12 \cdot 15 \Rightarrow V = 1080$

Portanto, a área total e o volume do paralelepípedo são, respectivamente, 684 m² e 1 080 m³.

24. **a)** $A_1 = \frac{8^2 \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow A_1 = 32\sqrt{3}$

$A_2 = 8^2 \Rightarrow A_2 = 64$

$A_3 = 6 \cdot \frac{4^2 \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow A_3 = 48\sqrt{3}$

Portanto, a área das seções 1, 2 e 3 é, respectivamente, $32\sqrt{3}$ cm², 64 cm² e $48\sqrt{3}$ cm².

b) (1) Seccionar o cubo em um plano que contenha a diagonal de uma face e um vértice da face oposta a ela.

(2) Seccionar o cubo em um plano que passe pelos pontos médios de arestas de duas faces opostas.

(3) Seccionar o cubo em um plano que passe pelos pontos médios de duas arestas concorrentes de uma face e pelo centro do cubo.

c) Respostas pessoais.

25. $V_{cubo} = a^3$

$V_{sólido\ retirado} = \frac{DX \cdot a}{2} \cdot a = \frac{DXa^2}{2} = \frac{(a - CX)a^2}{2}$

$V_{sólido\ restante} = \frac{4}{7}a^3$

$V_{cubo} - V_{sólido\ retirado} = V_{sólido\ restante}$

$a^3 - \frac{(a - CX)a^2}{2} = \frac{4}{7}a^3 \Rightarrow CX = \frac{a}{7}$

26. **a)** $d = a\sqrt{3}$

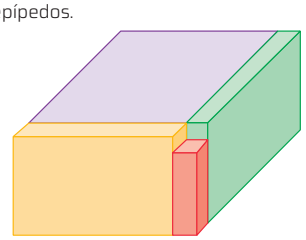
$A = a \cdot a\sqrt{2} = a^2\sqrt{2}$

b) A diagonal do quadrilátero e a diagonal do cubo são coincidentes.

27. **a)** $V' = \frac{V}{2} = \frac{a^3}{2}$

b) $V - V' = a^3 - \frac{a^3}{2} = \frac{a^3}{2}$

28. É possível dividir a caixa em quatro paralelepípedos.



ID/BR

Calculando a razão entre esses paralelepípedos e as dimensões da embalagem de biscoito, temos:

no paralelepípedo lilás (24 × 11 × 12):

$\frac{24}{3} \cdot \frac{11}{11} \cdot \frac{12}{2} = 48$

no paralelepípedo verde (12 × 11 × 2):

$\frac{12}{3} \cdot \frac{11}{11} \cdot \frac{2}{2} = 4$

no paralelepípedo amarelo (22 × 12 × 2):

$\frac{22}{11} \cdot \frac{12}{3} \cdot \frac{2}{2} = 8$

no paralelepípedo vermelho (12 × 4 × 2): apenas 1 embalagem.

Portanto, 48 + 4 + 8 + 1 = 61.

Alternativa **e**.

29. **a)** $V = \left(20 \cdot 10 - 4 \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot 10 \Rightarrow V = 1980$

Portanto, o volume da embalagem é 1 980 cm³.

b) $x + \frac{x}{5} = 1980 \Rightarrow \frac{6x}{5} = 1980 \Rightarrow x = 1650$

O volume máximo ocupado por esse sorvete no estado líquido é 1 650 cm³.

30. $V = V_{maior} - V_{menor}$

$V = \frac{6 \cdot 12^2\sqrt{3} \cdot 10}{4} - \frac{6 \cdot 4^2\sqrt{3} \cdot 10}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow V = 1920\sqrt{3}$ cm³

Alternativa **e**.

31. Resposta pessoal. Exemplo de problema: Calcule a área total e o volume de um prisma reto cuja altura é 3 cm, cuja base é um paralelogramo de lados 2 cm e 4 cm, e cuja diagonal maior tem 5 cm.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 121)

32. **a)** $A_\ell = 3 \cdot \frac{5^2\sqrt{3}}{4} = \frac{75\sqrt{3}}{4}$

$A_t = 4 \cdot \frac{5^2\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}$

b) $A_\ell = 3 \cdot \frac{7 \cdot 5}{2} = \frac{105}{2}$

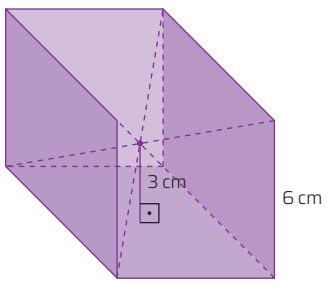
$A_t = \frac{105}{2} + \frac{5^2\sqrt{3}}{4} = \frac{5(42 + 5\sqrt{3})}{4}$

c) $A_\ell = 4 \cdot \frac{7 \cdot 5}{2} = 70$

$A_t = 70 + 25 = 95$

33. **a)** Resposta pessoal.

Exemplo de desenho:



ID/BR

b) $V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 3 = 36$

ou

$V = \frac{V_{cubo}}{6} = \frac{6^3}{6} = 6^2 = 36$

Logo, o volume da pirâmide é 36 cm³.

34. $a^3 = 100 \Rightarrow a = \sqrt[3]{100}$

Portanto, a aresta do cubo mede $\sqrt[3]{100}$ cm.

35. $V = \frac{25 \cdot 12}{3} \cdot 2 \Rightarrow V = 200$

Portanto, o volume do sólido é 200 cm³.

36. Como o triângulo da base é isósceles, os catetos têm medidas iguais.

$BC^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow 9 \cdot 2 = 2a^2 \Rightarrow a = 3$

$A_b = \frac{3 \cdot 3}{2} \Rightarrow A_b = \frac{9}{2}$

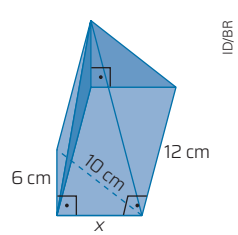
$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{2} \cdot 4 = 3 \cdot 2 = 6$

Portanto, o volume da pirâmide é 6 cm³.

37. $V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 8 \cdot 5 \Rightarrow V = 80$

Portanto, o volume da pirâmide é 80.

38.



ID/BR

Considerando x a medida do cateto do triângulo retângulo, pelo teorema de Pitágoras, temos:
$10^2 = x^2 + 6^2 \Rightarrow 8 = x$
Cálculo da área da base:
$A_b = \frac{6 \cdot 8}{2}$
$A_b = 24$
Cálculo do volume:
$V = \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot 12 \Rightarrow V = 96$
Portanto, o volume da pirâmide é 96 m³.

39. **a)** Cálculo da medida da altura de um dos triângulos equiláteros que formam o hexágono da base:
$h_{\triangle base} = \frac{4\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h_{\triangle base} = 2\sqrt{3}$
Cálculo da área da base:
$A_{\triangle base} = 6 \cdot \frac{4 \cdot 2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 24\sqrt{3}$
Cálculo do volume:
$V = \frac{1}{3} \cdot 24\sqrt{3} \cdot 6 \Rightarrow V = 48\sqrt{3}$
Portanto, o volume da pirâmide é $48\sqrt{3}$ m³.

b) $x^2 = 6^2 + (2\sqrt{3})^2 \Rightarrow x = 4\sqrt{3}$
Cálculo da área lateral:
$A_{lateral} = 6 \cdot \frac{4 \cdot 4\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A_{lateral} = 48\sqrt{3}$
$A_t = (48 + 24)\sqrt{3} = 72\sqrt{3}$
Portanto, a área total da pirâmide é $72\sqrt{3}$ m².

40. Sendo a a medida da aresta do tetraedro, temos:
$a^2\sqrt{3} = 36\sqrt{3} \Rightarrow a = 6$
Cálculo da medida da altura:
$h = \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{6\sqrt{6}}{3} \Rightarrow h = 2\sqrt{6}$
$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} = \frac{6^3\sqrt{2}}{12} \Rightarrow V = 18\sqrt{2}$
Portanto, a altura e o volume do tetraedro são, respectivamente, $2\sqrt{6}$ m e $18\sqrt{2}$ m³.

41. Sendo a a medida da aresta do tetraedro, temos:
$\frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} \Rightarrow a^3 = 8 \Rightarrow a = 2$
Cálculo da medida da altura:
$h = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow h = \frac{2\sqrt{6}}{3}$
Cálculo da área da face:
$A_{face} = \frac{2^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_{face} = \sqrt{3}$
Portanto, a altura e a área de uma face do tetraedro são, respectivamente, $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ m e $\sqrt{3}$ m².

42. Sendo a a medida da aresta do tetraedro, temos:
$\sqrt{6} = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow a = 3$
$A_t = a^2\sqrt{3} \Rightarrow A_t = 9\sqrt{3}$
$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} = \frac{27\sqrt{2}}{12} \Rightarrow V = \frac{9\sqrt{2}}{4}$
Portanto, a área total e o volume do tetraedro são, respectivamente, $9\sqrt{3}$ m² e $\frac{9\sqrt{2}}{4}$ m³.

43. **a)** $V = \frac{1}{3}A_b \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{15}}{4} \cdot 2a \Rightarrow$
$\Rightarrow V = \frac{a^3 \cdot \sqrt{15}}{6}$

b) $A_t = 5a^2$

c) $V_0 = 2a^3$
$\frac{V}{V_0} = \frac{\frac{a^3 \cdot \sqrt{15}}{6}}{2a^3} = \frac{\sqrt{15}}{12}$

d) $\frac{A_t}{A_0} = \frac{1}{2}$

44. Sendo a a medida da aresta da pirâmide, temos:
$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$
$32 = 4 \cdot \frac{a \cdot h}{2} \Rightarrow 32 = 4 \cdot 4 \cdot \frac{h}{2} \Rightarrow h = 4$
$\cos\theta = \frac{\frac{a}{2}}{h} \Rightarrow \cos\theta = \frac{\frac{4}{2}}{4} \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$
Portanto, $\theta = 60°$.

45. Quantidade média de chuva, em mm:
$100 + 100 + 300 + 100 + 50 + 50 = 700$
Isto é, 700 mm, que indicam 700 L por m².
Área da base do telhado: 8 m · 10 m = 80 m²
Logo, o telhado absorveu 80 m² · 700 L/m² = = 56 000 L (56 m³) de água.
Assim:
$4 \cdot 2 \cdot h = 56 \cdot 1{,}1 \Rightarrow h = 7{,}7$
Portanto, a profundidade da cisterna é 7,7 m.

46. Área total do octaedro regular:
$2a^2\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$
$a = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$
Volume do octaedro:
$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3} = \frac{(3\sqrt{2})^3 \cdot \sqrt{2}}{3} \Rightarrow V = 36$
Portanto, o volume do octaedro é 36 cm³.

47. $V = \frac{1}{3} \cdot 230^2 \cdot 146 \approx 2\,574\,647 \approx 2{,}6 \cdot 10^6$
Portanto, o volume aproximado é $2{,}6 \cdot 10^6$ m³.

48. Volume de 1 tijolo = 9 · 19 · 19 cm³ = = 3 249 cm³ ≃ $3{,}25 \cdot 10^3$ m³
Logo, seriam necessários 800 000 000 tijolos, pois:
$\frac{2{,}6 \cdot 10^6}{3{,}25 \cdot 10^{-3}} = 0{,}8 \cdot 10^9$

49. Resposta pessoal. Exemplo de resposta:
Calcule a área lateral e o volume da pirâmide de base quadrada cuja altura mede 15 cm e o lado da base mede 16 cm.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 127)

50. $\frac{12}{8} = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 3$
Portanto, o plano deve estar a 3 m do vértice.

51. $V = \frac{8}{3}(36 + \sqrt{36 \cdot 324} + 324) \Rightarrow V = 1\,248$
Portanto, o volume do tronco de pirâmide é 1 248 m³.

52. $13^2 = h^2 + 5^2 \Rightarrow h = 12$
$A_\ell = 4 \cdot \frac{(16 + 6) \cdot 12}{2} = 528$
$A_t = A_\ell + B + S = 528 + 256 + 36 \Rightarrow A_t = 820$
Portanto, a área lateral e a área total do tronco são, respectivamente, 528 cm² e 820 cm².

53. $a_\ell = 17$
$a_b = 8\sqrt{3}$
$x = 5$

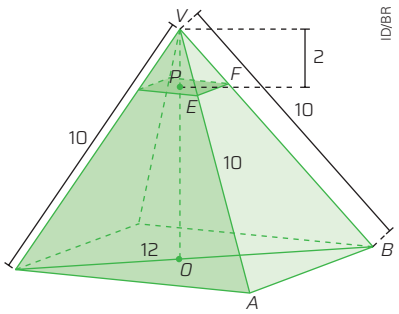
a) Cálculo de m:
$m = \frac{2}{3}h_{\triangle base}$
$m = \frac{2}{3} \cdot \frac{8\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow m = 8$
Pelo teorema de Pitágoras, temos:
$17^2 = m^2 + h^2_{pirâmide}$
$17^2 = 8^2 + h^2_{pirâmide}$
$15 = h_{pirâmide}$
Cálculo das medidas das arestas, em cm:
Por semelhança, temos:
$\frac{5}{15} = \frac{a'_\ell}{17} \Rightarrow a'_\ell \simeq 5{,}67$
$\frac{a'_\ell}{a'_b} = \frac{17}{8\sqrt{3}} \Rightarrow a'_b = \frac{8\sqrt{3}}{3} \simeq 4{,}62$

b) $a'_b = \frac{8\sqrt{3}}{3}$
$h_{\triangle base} = \frac{\frac{8\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3}}{2}$
$h_{\triangle base} = 4$
Cálculo da área da seção, em cm²:
$A_{seção} = \frac{\frac{8\sqrt{3}}{3} \cdot 4}{2} \cdot \frac{8\sqrt{3}}{3} \cdot 2 = \frac{16\sqrt{3}}{3}$
$A_{seção} \simeq 9{,}24$

c) Cálculo do volume da nova pirâmide, em cm³:
$V' = \frac{1}{3}A_{seção} \cdot h' = \frac{1}{3} \cdot \frac{16\sqrt{3}}{3} \cdot 5 = \frac{80\sqrt{3}}{9}$
$V' \simeq 15{,}40$

d) $V_{pirâmide} = \frac{1}{3}A_b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{(8\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot$
$\cdot 15 = 16 \cdot 15\sqrt{3} = 240\sqrt{3}$
Cálculo do volume do tronco, em cm³:
$V_{tronco} = 240\sqrt{3} - \frac{80\sqrt{3}}{9}$
$V_{tronco} = \frac{2080\sqrt{3}}{9} \simeq 400{,}30$

54.



ID/BR

No quadrado com diagonal de medida $d = 12$ cm, o lado mede:
$\ell = \frac{d}{\sqrt{2}} \Rightarrow \ell = \frac{12}{\sqrt{2}}$
No $\triangle VOB$ retângulo em O, vale:
$VB^2 = VO^2 + OB^2 \Rightarrow 10^2 = VO^2 + 6^2 \Rightarrow VO = 8$
Logo, a altura da pirâmide mede 8 cm.

a) Por semelhança, $\triangle VPF \sim \triangle VOB$, daí:
$\frac{2}{8} = \frac{VF}{10} \Rightarrow VF = 2{,}5$
Logo, a aresta lateral da nova pirâmide mede 2,5 cm.

b) Por semelhança, $\triangle VEF \sim \triangle VAB$, logo:
$\frac{VF}{VB} = \frac{EF}{AB} \Rightarrow \frac{2{,}5}{10} = \frac{EF}{\frac{12}{\sqrt{2}}} \Rightarrow EF = \frac{3\sqrt{2}}{2}$
Logo, o lado da nova seção da pirâmide mede $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ cm.

c) $V_{tronco} = V_{pirâmide\ inicial} - V_{pirâmide\ pequena}$
$V_{tronco} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{12}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot 8 - \frac{1}{3}\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot 2$
$V_{tronco} = 192 - 3 = 189$
Logo, o volume do tronco é 189 cm³.

55. **a)** $B = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12$
$\frac{B}{S} = \left(\frac{15}{6}\right)^2 \Rightarrow S = \frac{432}{225} \Rightarrow S = 1{,}92$
Logo, a área da seção é 1,92 cm².

b) $V = \frac{H}{3}\left[B + \sqrt{BS} + S\right]$
$V = \frac{9}{3}\left[12 + \sqrt{12 \cdot 1{,}92} + 1{,}92\right]$
$V \simeq 56{,}16$
Logo, o volume do tronco é 56,16 cm³.

56. a) $a = 3$ cm

b) $h = \frac{a\sqrt{6}}{3} = \sqrt{6}$ cm

c) $A_t = a^2\sqrt{3} = 3^2\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$ cm²

d) $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} = \frac{3^3\sqrt{2}}{12} = \frac{9\sqrt{2}}{4}$ cm³

e) $V_t = \frac{6^3\sqrt{2}}{12} - \frac{9\sqrt{2}}{4} = \frac{216\sqrt{2}}{12} - \frac{27\sqrt{2}}{12} =$
$= \frac{189\sqrt{2}}{12} = \frac{63\sqrt{2}}{4}$ cm³

f) $A_t = 3 \cdot \left(\frac{6+3}{2}\right) \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3^2\sqrt{3}}{4} + \frac{6^2\sqrt{3}}{4} =$
$= \frac{126\sqrt{3}}{4} = \frac{63\sqrt{3}}{2}$ cm²

57. Como a área da seção é um terço da área da base de P, temos:

$k^2 = \frac{3S}{S} \Rightarrow k = \sqrt{3}$

Cálculo da razão: $\frac{V_p}{V_{pir.}} = (\sqrt{3})^3 = 3\sqrt{3}$

58. Resposta pessoal. Exemplo de resposta: Maria quer pintar uma caixa na forma de pirâmide de base quadrada. Sabendo que a base tem 12 cm e a altura da pirâmide é 8 cm, qual é a área da superfície que Maria vai pintar?

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 129)

59. a) $C = 2 \cdot \pi \cdot 5 \Rightarrow C = 10\pi$ cm
$A = \pi \cdot 5^2 \Rightarrow A = 25\pi$ cm²

b) $C = 2 \cdot \pi \cdot 8 \Rightarrow C = 16\pi$ cm
$A = \pi \cdot 8^2 \Rightarrow A = 64\pi$ cm²

60. $36\pi = \pi r^2 \Rightarrow r = 6 \Rightarrow C = 2 \cdot \pi \cdot 6 \Rightarrow$
$\Rightarrow C = 12\pi$ cm

61. $2\pi r = 20\pi \Rightarrow r = 10$
$A = \pi \cdot 10^2 \Rightarrow A = 100\pi$ cm²

62. $A = 7^2\pi - 4^2\pi = 49\pi - 16\pi = 33\pi$ m²

63. $R^2 = r^2 + 8^2 \Rightarrow R^2 - r^2 = 64$
Cálculo da área da coroa circular, em m²:
$A = \pi(R^2 - r^2) \Rightarrow A = 64\pi$

64. a) $A = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 20}{360} = 2\pi$ cm²

b) $A = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$ cm²

c) $A = \frac{\pi \cdot 9^2 \cdot 45}{360} = \frac{81\pi}{8}$ m²

d) $A = \frac{5 \cdot 8}{2} = 20$ m²

65. a) $A = A_{setor} - A_{\triangle}$
$A = \frac{\pi \cdot 6^2}{3} - \frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$
$A = 3(4\pi - 3\sqrt{3})$ m²

b) $A = \frac{\pi \cdot 6^2 - (6\sqrt{2})^2}{4}$
$A = 9(\pi - 2)$ m²

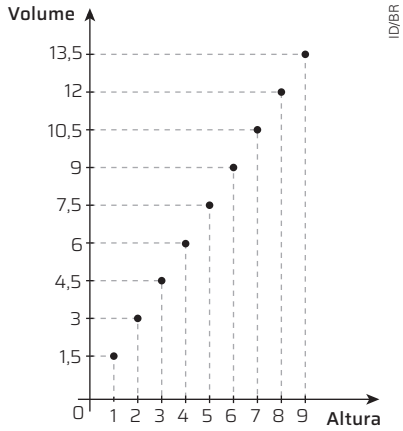
c) $A = \frac{\pi \cdot 12^2}{6} - \frac{12^2\sqrt{3}}{4}$
$A = 12(2\pi - 3\sqrt{3})$ cm²

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 132)

66. a)

Altura do cilindro	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Volume	1,5	3	4,5	6	7,5	9	10,5	12	13,5

b)



ID/BR

c) Afirmação correta, pois $V = 1{,}5 \cdot h$.

67. a) Cálculo da área lateral, em cm², do cilindro de raio 10 cm:
$A_{\ell_1} = 2\pi \cdot 0{,}1 \cdot 1 \Rightarrow A_{\ell_1} = 0{,}2\pi$
Cálculo da área lateral, em cm², do cilindro de raio 20 cm:
$A_{\ell_2} = 2\pi \cdot 0{,}2 \cdot 1 \Rightarrow A_{\ell_2} = 0{,}4\pi$
Portanto, $A_{\ell_2} = 2A_{\ell_1}$.

b) Cálculo da área total, em m², do cilindro de raio 10 cm:
$A_{t_1} = 0{,}2\pi + 2 \cdot \pi \cdot 0{,}1^2 = 0{,}22\pi$
Cálculo da área total, em m², do cilindro de raio 20 cm:
$A_{t_2} = 0{,}4\pi + 2 \cdot \pi \cdot 0{,}2^2 = 0{,}48\pi$

68. $\pi \cdot R^2 \cdot 13 = 52$
$R^2 = \frac{4}{\pi} \Rightarrow R = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Rightarrow R = \frac{2\sqrt{\pi}}{\pi}$ cm

69. a) $A_\ell = 2\pi \cdot r \cdot h$

b) $A_t = 2\pi \cdot r \cdot h + 2\pi \cdot r^2 = 2\pi r \cdot (h + r) \Rightarrow$
$\Rightarrow V = \pi \cdot r^2 \cdot h$

70. $V_{prisma} = 10 \cdot 4 \cdot 20 = 800$
$V_{cilindro} = \pi \cdot 5^2 \cdot 20 \simeq 1571$
Portanto, na embalagem cilíndrica cabe mais suco.

71. Cálculo da medida do raio, em m:
$\pi \cdot r^2 \cdot 6 = 54\pi \Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow r = 3$
Cálculo da área total, em m²:
$A_T = 2\pi \cdot 3^2 + 2\pi \cdot 3 \cdot 6 \Rightarrow A_t = 54\pi$

72. Cálculo da medida do raio, em m:
$100\pi = 25\pi \cdot h \Rightarrow h = 4$
Cálculo da medida do raio, em m:
$25\pi = \pi \cdot r^2 \Rightarrow r = 5$
Cálculo da área lateral, em m²:
$A_L = 2\pi \cdot 5 \cdot 4 \Rightarrow A_L = 40\pi$

73. Como o cilindro é equilátero, se $h = 20$, então $r = 10$.

a) $A_B = \pi \cdot 10^2 \Rightarrow A_B = 100\pi$ cm²

b) $A_L = 2\pi \cdot 10 \cdot 20 \Rightarrow A_L = 400\pi$ cm²

c) $A_T = 2A_B + A_L = 600\pi$ cm²

d) $V = A_B \cdot h = 2000\pi$ cm³

74. $\pi \cdot r^2 \cdot 2r = 250\pi \Rightarrow r = 5$
$h = 2r = 10$

a) $A_T = 2\pi \cdot 5^2 + 2\pi \cdot 5 \cdot 10 = 150\pi$
Portanto, a área total é igual a 150π m².

b) $A = 2 \cdot 5 \cdot 10 \Rightarrow A = 100$
Portanto, a área é igual a 100 m².

75. $r = 2$ e $h = 6$.
Cálculo do volume, em cm³:
$V = \pi \cdot 2^2 \cdot 6 \Rightarrow V = 24\pi$
Cálculo da área, em cm²:
$A = 2 \cdot \pi \cdot 2^2 + 2\pi \cdot 2 \cdot 6 \Rightarrow A = 32\pi$

76. a) $V = \pi \cdot 4^2 \cdot 3 = 48\pi$ m³

b) $V = \pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 36\pi$ m³

77. $R_1 = 2R_2$ e $V_1 = 4 \cdot V_2$

a) $5 \cdot V_1 = 20 \cdot V_2$
Portanto, a embalagem menor deverá ter 20 bolachas.

b) $\frac{5}{8} = \frac{4{,}75}{x} \Rightarrow x = 7{,}60$
$\frac{5}{12} = \frac{4{,}75}{y} \Rightarrow y = 11{,}40$
$\frac{5}{24} = \frac{4{,}75}{z} \Rightarrow z = 22{,}80$
Portanto, pacotes com 8, 12 e 24 bolachas deverão custar R$ 7,60, R$ 11,40 e R$ 22,80, respectivamente.

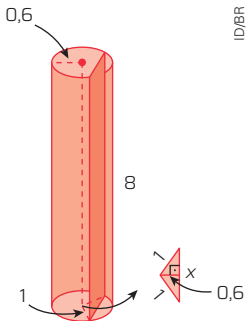
78. a) $V = 6\pi a^2 b$

b) $V_C = 4a \cdot 6a \cdot b = 24a^2b$

c) $\frac{V}{V_C} \cdot 100 = \frac{6\pi \cdot a^2b \cdot 100}{24a^2b} = 25\pi \simeq 79$
Portanto, aproximadamente 79% do volume da caixa é ocupado pelos cilindros.

79. $2\pi(r + 1) \cdot 4 = 2\pi r \cdot 4 + 2 \cdot \pi \cdot r^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4r + 4 = 4r + r^2 \Rightarrow r = 2$ m

80. Podemos representar o cilindro da seguinte maneira:



ID/BR

Pelo teorema de Pitágoras, temos:
$1^2 = x^2 + 0{,}6^2 \Rightarrow 0{,}8 = x \Rightarrow$
$\Rightarrow 1{,}6 = 2x$
Cálculo da área, em m², da seção paralela:
$A_{seção} = 1{,}6 \cdot 8 \Rightarrow A_{seção} = 12{,}8$

81. a) Cálculo da medida de tempo:
$5 = \frac{15t - 120}{t - 12} \Rightarrow t = 6$
Se $h(t) = 0$, o reservatório 1 ficará vazio. Assim:
$0 = \frac{15t - 120}{t - 12} \Rightarrow t = 8$
Portanto, demorou 8 horas para o recipiente ficar vazio.

b) Cálculo de $h(0)$:
$h(0) = \frac{-120}{-12} \Rightarrow h(0) = 10$
Usando o diâmetro de medida $D = 6$ m, o cálculo do volume, em m³, fica:
$\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot h(0) = \pi\left(\frac{6}{2}\right)^2 \cdot 10 = 90\pi$
O raio interno da base do reservatório 2 mede 6 m, então:
$90\pi = \pi \cdot 6^2 \cdot H \Rightarrow H = 2{,}5$ m

82. $V_A = V_B \Rightarrow \pi \cdot 6^2 \cdot h = \pi \cdot 8^2 \cdot 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow h = \frac{64 \cdot 4}{36} \Rightarrow h = 7{,}11$ cm
Alternativa **d**.

83. Note que o volume da pedra é igual ao volume de um cilindro com altura (23,5 − 20 = 3,5 cm) e raio igual a 8 cm, temos que:
$V_{cilindro} = \pi \cdot r^2 \cdot h \Rightarrow V_{cilindro} = \pi \cdot 8^2 \cdot (3{,}5) \Rightarrow$
$\Rightarrow V_{cilindro} = \pi \cdot 64 \cdot 3{,}5 \Rightarrow V_{cilindro} = 224\pi$ cm³
Alternativa **b**.

84. a) $\frac{(2r)^2 \cdot h}{\pi \cdot r^2 \cdot h} = \frac{4}{\pi} \simeq 1{,}27$

Portanto, o erro é de aproximadamente 27%.

b) Eles usam o valor 4 como aproximação de π.

85. Cálculo do volume e da massa da espécie I:

$V_I = 3 \cdot 3^2 \cdot 12 \cdot 0{,}06 = 19{,}44$

$m_I = 0{,}77 \cdot 19{,}44 \simeq 14{,}97$

Cálculo do volume e da massa da espécie II:

$V_{II} = 2 \cdot 4^2 \cdot 10 \cdot 0{,}06 = 19{,}2$

$m_{II} = 0{,}78 \cdot 19{,}2 \simeq 14{,}98$

Logo:

$m_I + m_{II} = 14{,}97 + 14{,}98 = 29{,}95$

Portanto, a carga tem aproximadamente 29,9 toneladas.

Alternativa **a**.

86. Considere h e r a medida da altura do cilindro e a medida do raio da base, respectivamente:

$h = 10$ e $r = 3$

Cálculo do volume:

$V_{cilindro} = \pi \cdot 3^2 \cdot 10 \Rightarrow V_{cilindro} \simeq 283\ cm^3$

Cálculo da área total:

$A_{cilindro} = 2\pi \cdot (3^2 + 3 \cdot 10) \Rightarrow A_{cilindro} \simeq 245\ cm^2$

Portanto, o volume e a área total têm, aproximadamente, 283 cm^3 e 245 cm^2.

87. Cálculo do volume do cubo:

$V_{cubo} = 216 = 6^3$

Assim, a aresta do cubo mede 6 cm, a altura do cilindro mede 6 cm e o raio do círculo da base mede 3 cm.

Cálculo do volume do cilindro:

$V_{cilindro} = \pi \cdot 3^2 \cdot 6 \Rightarrow V_{cilindro} \simeq 170$

Cálculo da área total do cilindro:

$A_{cilindro} = 2\pi \cdot (3^2 + 3 \cdot 6) \Rightarrow A_{cilindro} \simeq 170$

Portanto, o volume e a área total têm, aproximadamente, 170 cm^3 e 170 cm^2.

88. a) Se $V = 3{,}14$ quando $h = 1$, então:

$r^2 \cdot 1 = 3{,}14$ e $r^2 = 1$.

Daí, $r = 1$ e, para todos os cilindros, $A_{base} = 3{,}14$.

Completando o quadro:

Altura	0,5	1	1,5	2	...	h
Volume	1,57	3,14	4,71	6,28	...	3,14h

b) Sim, $V = 3{,}14 \cdot h$.

V é diretamente proporcional a h.

c) $V = 3{,}14 \cdot h = 11$

$h = \frac{11}{3{,}14} \simeq 3{,}5$.

89. 1ª possibilidade para o perímetro da base.

Cálculo da medida do raio:

$29{,}7 = 2 \cdot \pi \cdot r$

$r = \frac{29{,}7}{2\pi} \Rightarrow r \simeq 4{,}73$

Cálculo do volume:

$V_1 = \pi r^2 h = \pi \cdot 4{,}73^2 \cdot 21$

$V_1 \simeq 1474$

Portanto, o volume é aproximadamente 1474 cm^3.

2ª possibilidade para o perímetro da base.

Cálculo da medida do raio:

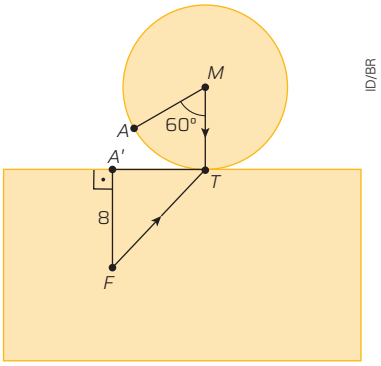
$21 = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{21}{2\pi} \simeq 3{,}34$

Cálculo do volume:

$V_2 = \pi r^2 h = \pi \cdot 3{,}34^2 \cdot 29{,}7 \simeq 1042$

Logo, o volume é aproximadamente 1042 cm^3.

90. Planificando a superfície do cilindro, temos:



ID/BR

$\text{med}(\overset{\frown}{AT}) = \text{med}(\overset{\frown}{A'T}) = \frac{1}{6} \cdot 2\pi \cdot r =$

$= \frac{\pi}{3} \cdot \frac{18}{\pi} = 6$

No $\triangle A'FT$ retângulo, temos:

$FT^2 = FA'^2 + A'T^2 = 8^2 + 6^2 = 100 \Rightarrow FT = 10$

Para percorrer essa distância em 5 segundos, a velocidade média mínima da formiga deve ser:

$v = \frac{10}{5} \Rightarrow v = 2$

Portanto, a velocidade média mínima é 2 cm/s.

91. Resposta pessoal. Sugestão: De um cilindro, sabe-se que a altura tem 20 cm, e o raio da base, 5 cm. Qual é a área da superfície desse cilindro ao pintá-lo completamente?

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 136)

92. a) Cone A:

$p = 2 \cdot \pi \cdot 2{,}5 \Rightarrow p = 5\pi$

$A_b = \pi \cdot 2{,}5^2 \Rightarrow A_b = 6{,}25\pi$

Portanto, o perímetro e a área do cone A medem 5π cm e $6{,}25\pi$ cm^2, respectivamente.

Cone B:

$p = 2\pi \cdot 5 \Rightarrow p = 10\pi$

$A_b = \pi \cdot 5^2 \Rightarrow A_b = 25\pi$

Portanto, o perímetro e a área do cone B medem 10π cm e 25π cm^2, respectivamente.

b) Volume A $= \frac{1}{3} \cdot 6{,}25\pi \cdot 5$

Volume A $= \frac{31{,}25\pi}{3}$

Volume B $= \frac{1}{3} \cdot 25\pi \cdot 2{,}5$

Volume B $= \frac{62{,}5\pi}{3}$

Portanto, o cone B tem o volume maior.

93. a) $A_{\ell_A} = \pi \cdot 10 \cdot 18 \Rightarrow A_{\ell_A} = 180\pi$

$A_{\ell_B} = \pi \cdot 20 \cdot 36 \Rightarrow A_{\ell_B} = 720\pi$

Portanto, a área lateral do cone A é 180π cm^2 e a do cone B é 720π cm^2.

$A_{\ell_B} > A_{\ell_A}$

b) $A_{t_A} = \pi \cdot (180 + 10^2) \Rightarrow A_{t_A} = 280\pi$

$A_{t_B} = \pi \cdot (720 + 20^2) \Rightarrow A_{t_B} = 1120\pi$

Portanto, a área total do cone A é 280π cm^2 e a do cone B é 1120π cm^2.

$A_{t_B} > A_{t_A}$

94. $r^2 = 34^2 - 30^2 \Rightarrow r = 16$

a) $A_L = \pi \cdot 16 \cdot 34 \Rightarrow A_L = 544\pi$

Portanto, a área lateral é 544π m^2.

b) $A_T = 544\pi + \pi \cdot 16^2 \Rightarrow A_T = 800\pi$

Portanto, a área total é 800π m^2.

c) $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 16^2 \cdot 30 \Rightarrow V = 2560\pi$

Portanto, o volume é 2560π m^3.

95. Cálculo da medida do raio:

$A_B = 90\pi - 65\pi \Rightarrow A_B = 25\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow \pi r^2 = 25\pi \Rightarrow r = 5$

Cálculo da medida da geratriz:

$\pi \cdot R \cdot g = 65\pi \Rightarrow g = \frac{65}{5} \Rightarrow g = 13$

Cálculo da medida da altura:

$h^2 = 13^2 - 5^2 \Rightarrow h = 12$

Cálculo do volume:

$V = \frac{1}{3} \cdot 25\pi \cdot 12 \Rightarrow V = 100\pi$

Portanto, o volume é 100π cm^3.

96. Com a rotação de um triângulo equilátero, tem-se um sólido formado por dois cones.

Como o perímetro é 30 cm, cada lado do triângulo tem 10 cm. Daí, temos:

$r = 5$

$g = 10$

$h = 5\sqrt{3}$

Cálculo do volume de um cone:

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot (\sqrt{3})^2 \cdot 5 \Rightarrow V = 125\pi$

Então, o volume total é dado por:

$V_T = 2V \Rightarrow V_T = 250\pi$

Cálculo da área total:

$A_T = 2 \cdot \pi \cdot 5\sqrt{3} \cdot 10 = 100\sqrt{3}\pi$

Portanto, o volume e a área total do sólido são, respectivamente, 250π cm^3 e $100\sqrt{3}\pi$ cm^2.

97. Por semelhança de triângulos, temos:

$\frac{3}{DE} = \frac{4}{8} \Rightarrow DE = 6$

Como o triângulo é retângulo, temos que:

$BC = 5$ e $CE = 10$

Cálculo do volume:

$V = \frac{1}{3} \cdot (\pi \cdot 3^2 \cdot 4 + \pi \cdot 6^2 \cdot 8) =$

$= \frac{1}{3} \cdot (36\pi + 288\pi) \Rightarrow V = 108\pi$

Cálculo da área total:

$A_T = \pi \cdot 3 \cdot 5 + \pi \cdot 6 \cdot 10 + \pi \cdot 3^2 + \pi \cdot 6^2$

$A_T = 120\pi$

Portanto, o volume e a área total do sólido são, respectivamente, 108π dm^3 e 120π dm^2.

98. $g^2 = 8^2 + 15^2 \Rightarrow g = 17$

a) $A_T = 2 \cdot \pi \cdot 15 \cdot 17 \Rightarrow A_T = 510\pi$

Portanto, a área total é 510π m^2.

b) $A_T = 2\pi \cdot 8 \cdot 17 \Rightarrow A_T = 272\pi$

Portanto, a área total é 272π m^2.

99. Da rotação de um trapézio, obtemos:

Cálculo do volume do cone:

$V_{cone} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 3 \Rightarrow V_{cone} = 16\pi$

Cálculo do volume do cilindro:

$V_{cilindro} = \pi \cdot 4^2 \cdot 6 \Rightarrow V_{cilindro} = 96\pi$

Cálculo do volume total:

$V_{sólido} = 2V_{cone} + V_{cilindro} = 2 \cdot 16\pi + 96\pi$

$V_{sólido} = 128\pi$

Cálculo da área total:

$A = 2\pi \cdot 4g + 2\pi \cdot 4 \cdot 6$

Mas como $g^2 = 4^2 + 3^2$, então, $g = 5$.

Temos:

$A = 2\pi \cdot 4 \cdot 5 + 2\pi \cdot 4 \cdot 6 \Rightarrow A = 88\pi$

Portanto, o volume e a área total do sólido são, respectivamente, 128π m^3 e 88π m^2.

100. $\pi \cdot 1^2 = \frac{2h}{2} \Rightarrow h = \pi$

Portanto, a altura é π m.

101. a) $V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 4{,}5 \Rightarrow V = 75\pi$

Portanto, o volume é 75π cm^3.

b) $V = \pi \cdot 5^2 \cdot 9 - 75\pi \Rightarrow V = 150\pi$

Portanto, o volume é 150π cm^3.

102. $\frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h_{cone} = \pi \cdot r^2 \cdot h_{cilindro}$

$3 \cdot h_{cilindro} = h_{cone}$

103. a) $V = \pi \cdot r^2 h + \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 h$

$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^2 h \Rightarrow V = \frac{4\pi h}{3} \cdot r^2$

b) $V = \frac{4\pi r^2}{3} \cdot h$

104. a) $V = \pi \cdot r^2 h - \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 h$

$V = \frac{2}{3}\pi \cdot r^2 h \Rightarrow V = \frac{2\pi h}{3} \cdot r^2$

b) $V = \frac{2\pi r^2}{3} \cdot h$

105. Cálculo da medida da altura do cone:

$15^2 = h^2 + 12^2 \Rightarrow h = 9$

a) $A_L = \pi \cdot 12 \cdot 15 \Rightarrow A_L = 180\pi$

Portanto, a área lateral é 180π cm².

b) $A_T = \pi \cdot 12^2 + 180\pi \Rightarrow A_T = 324\pi$

Portanto, a área total é 324π cm².

c) $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 12^2 \cdot 9 \Rightarrow V = 432\pi$

Portanto, o volume é 432π cm³.

106. $g^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow g = 10$

a) $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 8^2 \cdot 6 \Rightarrow V = 128\pi$

Portanto, o volume é 128π m³.

$A_T = \pi \cdot 8^2 + \pi \cdot 8 \cdot 10 \Rightarrow A_T = 144\pi$

Portanto, a área total é 144π m².

b) $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 8 \Rightarrow V = 96\pi$

Portanto, o volume é 96π m³.

$A_T = \pi \cdot 6^2 + \pi \cdot 6 \cdot 10 = 96\pi$

Portanto, a área é 96π m².

107. $r^2 = 16^2 - 8^2 \Rightarrow r \simeq 13{,}86$

Cálculo da área total:

$A_T = \pi \cdot 13{,}86^2 + \pi \cdot 13{,}86 \cdot 16$

$A_T \simeq 413{,}86\pi \Rightarrow A_T \simeq 1299{,}52$

Cálculo do volume:

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 13{,}86^2 \cdot 8 \Rightarrow V = 512\pi$

$V \simeq 1607{,}68$

Portanto, o volume e a área total do sólido são, respectivamente, 1 607,68 m³ e 1 299,52 m².

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 142)

108. a) $4\pi x^2$ e $16\pi x^2$

b) $V = \frac{4}{3}\pi x^3$ e $V = \frac{32}{3}\pi x^3$

c) A área quadruplica; o volume octuplica.

109. $r^2 = 13^2 - 12^2 \Rightarrow r = 5$

Cálculo da área da seção:

$A = \pi \cdot 5^2 \Rightarrow A = 25\pi$

Portanto, a área é 25π cm².

110. Cálculo da medida do raio:

$2\pi r = 32\pi \Rightarrow r = 16$

Considerando x a distância do centro de uma superfície esférica ao plano, temos:

$x^2 = 20^2 - 16^2 \Rightarrow x = 12$

Portanto, a distância é 12 cm.

111. $r = 3$

a) $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3^3 \Rightarrow V = 36\pi$

Portanto, o volume é 36π cm³.

b) $A = 4\pi \cdot 3^2 \Rightarrow A = 36\pi$

Portanto, a área é 36π cm².

c) Área de um círculo máximo:

$\pi \cdot 3^2 = 9\pi$

Isto é, 9π cm².

112. $324\pi = 4\pi \cdot r^2 \Rightarrow r = 9$

a) $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 9^3 \Rightarrow V = 972\pi$

Portanto, o volume é 972π cm³.

b) Comprimento de uma circunferência máxima:

$2\pi \cdot 9 = 18\pi$

Isto é, 18π cm.

113. a) $V_{\text{hemisfério}} = \frac{2}{3}r^3$

b) $A_{\text{superfície curva}} = 2\pi r^2$

c) $A_{\text{hemisfério}} = 2\pi \cdot r^2 + \pi \cdot r^2 = 3\pi r^2$

114. a) Cálculo do volume:

$V = \frac{4}{6} \cdot \pi \cdot 5^3 \Rightarrow V = \frac{250\pi}{3}$

Portanto, o volume é $\frac{250\pi}{3}$ cm³.

Cálculo da área da superfície curva:

$A_{\text{superfície curva}} = 2\pi \cdot 5^2$

$A_{\text{superfície curva}} = 50\pi$

Portanto, a área é 50π cm².

Cálculo da área total:

$A = 3\pi \cdot 5^2 \Rightarrow A = 75\pi$

Portanto, a área total é 75π cm².

b) Cálculo do volume:

$V = \frac{4}{6} \cdot \pi \cdot 8^3 \Rightarrow V = \frac{1024\pi}{3}$

Portanto, o volume é $\frac{1024\pi}{3}$ cm³.

Cálculo da área da superfície curva:

$A_{\text{superfície curva}} = 2\pi \cdot 8^2$

$A_{\text{superfície curva}} = 128\pi$

Portanto, a área é 128π cm².

Cálculo da área total:

$A = 3\pi \cdot 8^2 \Rightarrow A = 192\pi$

Portanto, a área é 192π cm².

115. a) $V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} \cdot \pi a^2 \cdot 2a = \frac{2\pi a^3}{3}$

b) $V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot a^3$

c) $V_{\text{esfera}} > V_{\text{cone}}$ ou $V_{\text{esfera}} = 2V_{\text{cone}}$

116. a) $A_{\text{esfera}} = 4\pi \frac{a^2}{4} = \pi a^2$

b) $A_{\text{cubo}} = 6 \cdot a^2$

c) $\frac{A_{\text{esfera}}}{A_{\text{cubo}}} = \frac{\pi}{6}$

d) $V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{a^3}{8} = \frac{\pi a^3}{6}$

e) $V_{\text{cubo}} = a^3$

f) $\frac{V_{\text{esfera}}}{V_{\text{cubo}}} = \frac{\pi}{6}$

117. a) Se o volume V de uma esfera de raio R é $V = \frac{4\pi R^3}{3}$ e o novo raio mede 50% do raio inicial, isto é, $\frac{R}{2}$, então, para o novo volume V', temos:

$V' = \frac{4\pi\left(\frac{R}{2}\right)^3}{3} \Rightarrow V' = \frac{4\pi\frac{R^3}{8}}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow V' = \frac{1}{8} \cdot \frac{4\pi R^3}{3} \Rightarrow V' = \frac{1}{8}V$

Portanto, ao diminuir o raio de uma esfera pela metade, o volume passa a ser $\frac{1}{8}$ do volume inicial.

b) Se a área A de uma esfera de raio R é $A = 4\pi R^2$, e o novo raio mede $\frac{R}{2}$, então, para a nova área A', temos:

$A' = 4\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 \Rightarrow A' = 4\pi\frac{R^2}{4} \Rightarrow$

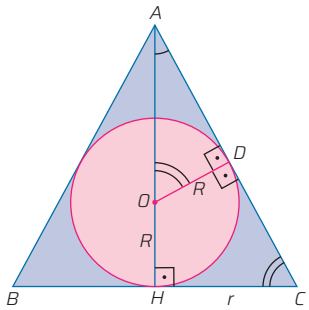
$\Rightarrow A' = \frac{1}{4} \cdot 4\pi R^2 \Rightarrow A' = \frac{1}{4}A$

Portanto, ao diminuir o raio de uma esfera pela metade, a área da sua superfície passa a ser $\frac{1}{4}$ da área inicial.

118. Como $g = 2r$, temos:

$g = 2 \cdot 4\sqrt{3} \Rightarrow g = 8\sqrt{3}$

$\triangle ADO \sim \triangle AHC$



ID/BR

Por semelhança, temos:

$\frac{AO}{DO} = \frac{AC}{HC} \Rightarrow \frac{AO}{R} = \frac{g}{r} \Rightarrow \frac{AO}{R} = \frac{8\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow AO = 2R$

Temos também:

$AH = \frac{BC\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH = \frac{8\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH = 12$

Portanto: $2R + R = 12 \Rightarrow 3R = 12 \Rightarrow R = 4$

Cálculo do volume:

$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 4^3 \Rightarrow V = \frac{256}{3}\pi$

Portanto, o volume é $\frac{256\pi}{3}$ cm³.

Cálculo da área: $A = 4\pi \cdot 4^2 \Rightarrow A = 64\pi$

Portanto, a área é 64π cm².

119. $r = \sqrt{3}$

Cálculo do volume:

$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\sqrt{3}\right)^3 \Rightarrow V = 4\pi\sqrt{3}$

Portanto, o volume é $4\pi\sqrt{3}$ cm³.

Cálculo da área: $A = 4\pi \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow A = 12\pi$

Portanto, a área é 12π cm².

120. O raio da esfera mede: $r = \frac{8\sqrt{6}}{4} = 2\sqrt{6}$

Cálculo do volume:

$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(2\sqrt{6}\right)^3 \Rightarrow V = 64\pi\sqrt{6}$

Portanto, o volume é $64\pi\sqrt{6}$ cm³.

Cálculo da área: $A = 4\pi r^2 = 4\pi\left(2\sqrt{6}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow A = 96\pi$

Portanto, a área é 96π cm².

121. $\pi r^2 \cdot 4r = 32\pi \Rightarrow r = 2$

Cálculo do volume:

$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2^3 \Rightarrow V = \frac{32\pi}{3}$

Portanto, o volume é $\frac{32\pi}{3}$ dm³.

Cálculo da área: $A = 4 \cdot \pi \cdot 2^2 \Rightarrow A = 16\pi$

Portanto, a área é 16π dm².

122. Levando em consideração uma pirâmide de base hexagonal inscrita em metade da esfera, temos:

$V = \frac{1}{3}A_b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{6r^2\sqrt{3}}{4} \cdot r = \frac{\sqrt{3}r^3}{2}$

Alternativa **e**.

123. a) 40 212 km

b) $5{,}15 \cdot 10^8$ km²

c) $1{,}10 \cdot 10^{12}$ km³

d) $3{,}43 \cdot 10^8$ km²

124. $R \simeq 1600$ km

$V \simeq 1{,}72 \cdot 10^{10}$ km³

$A \simeq 3{,}22 \cdot 10^7$ km²

CÁLCULO RÁPIDO (P. 143)

1. a) $x = -2$ ou $x = -8$

b) $x = 5$ ou $x = -3$

c) $x = 5$

d) $x = 1$ ou $x = 3$

e) $y = 9$ ou $y = -3$

f) $a = -6$

2. a) $x = \pm 4$

b) $x = \pm\frac{1}{3}$

c) $S = \varnothing$

d) $x = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}$

e) $S = \varnothing$

f) $S = \varnothing$

3. **a)** 3 000 cm^2 **c)** 11 m **e)** 10,5 cm^2
b) 25 cm^2 **d)** 12 m

4. **a)** 42 cm **c)** 192 m^2 **e)** 54 m^2 **g)** 12,5 dm
b) 147 cm^2 **d)** 54 mm **f)** 84 cm^2 **h)** 5 m

5. **a)** 0,5 L **b)** 5 000 L **c)** 1,1 L **d)** 50 000 L

6.

a	5 cm	3 m	0,07 m	0,5 m
b	6 cm	150 cm	Aproximadamente 9,2 cm	78 cm
c	7,7 cm	Aproximadamente 152 cm	6 cm	1,2 m
h	10 cm	50 cm	9,6 cm	1,5 m
Área da base	Aproximadamente 15 cm^2	2 600 cm^2	21 cm^2	Aproximadamente 1 300 cm^2
Volume	150 cm^3	130 000 cm^3	201,6 cm^3	195 000 cm^3

PARA RECORDAR (P. 144)

1. O quadrilátero formado pelos segmentos das retas r e s e os lados do triângulo tem soma dos ângulos internos igual a 360°. Então: $360° = 80° + 90° + 90° + \theta$.
Daí, $\theta = 100°$.

2. **a)** O triângulo ABC é retângulo em B, então
$\operatorname{sen}\hat{A} = \frac{BC}{AC}$ e $\cos\hat{A} = \frac{AB}{AC}$.
Daí, temos: $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BC}{10}$ e $\frac{1}{2} = \frac{5}{AC}$
Dessas duas equações, temos:
$AC = 10$ km e $BC = 5\sqrt{3}$ km.

b) Tempo para o barco A chegar a C:
$t_A = \frac{10}{25} = 0{,}4$
Tempo para o barco B chegar a C:
$t_B = \frac{5\sqrt{3}}{20} \simeq 0{,}43$
Logo, $t_B > t_A$, o que significa que o barco A chega antes para socorrer o barco C.

3. Como os lados AD e BC são paralelos e têm a mesma medida, depreendemos que as coordenadas do ponto B são (4, 4).

4. Considerando o triângulo equilátero de lado de medida a, temos:
$\triangle BCD$: $\frac{DC}{a} = \operatorname{sen} 60° \Rightarrow \frac{DC}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow DC = = \frac{a\sqrt{3}}{2}$
$\frac{BC}{a} = \cos 60° \Rightarrow \frac{BC}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow BC = \frac{a}{2}$
A razão entre as áreas das regiões Q e P é:
$\frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{2}$
Alternativa **e**.

5. Após a retirada dos tetraedros de aresta de medida $\frac{a}{3}$, restarão por faces 4 hexágonos regulares de lado de medida $\frac{a}{3}$ e 4 triângulos equiláteros de lado de medida $\frac{a}{3}$.
Alternativa **a**.

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO (P. 145)

1. Esta é apenas **uma** forma de resolução. Os estudantes poderão chegar à resposta por diferentes raciocínios.
O número de fechaduras deve ser um múltiplo de 4 para que os chefes de serviço só possam abrir o cofre também em quatro. Deve ser também um múltiplo de 5, pois são 5 os chefes de serviço, para que cada diretor-adjunto só possa abrir o cofre com quaisquer dos chefes de serviço. Assim, são necessárias 20 fechaduras.

2. Cada uma das três pessoas, em princípio, pode beber água ou suco, logo há 8 possibilidades ($2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$) para considerar, conforme o quadro.

	Ari	Bruna	Carlos
1	água	água	água
2	suco	água	água
3	água	suco	água
4	suco	suco	água
5	água	água	suco
6	suco	água	suco
7	água	suco	suco
8	suco	suco	suco

A primeira condição (se Ari pede a mesma bebida que Carlos, então Bruna pede água) elimina as possibilidades 3 e 8. A segunda condição (se Ari pede uma bebida diferente da de Bruna, então Carlos pede suco) elimina a possibilidade 2. A terceira condição (se Bruna pede uma bebida diferente da de Carlos, então Ari pede água) elimina as possibilidades 4 e 6.
Até o momento, restam três possibilidades: 1, 5 e 7.

	Ari	Bruna	Carlos
1	água	água	água
5	água	água	suco
7	água	suco	suco

Como apenas um deles pede sempre a mesma bebida, chegamos a Ari, que sempre pede água.
Alternativa **a**.

3. A face oposta ao número 5 apresenta o número 2. Existem mais seis faces horizontais, duas em cada um dos outros três dados. A soma pedida é: $2 + 3 \cdot 7 = 23$
Alternativa **a**.

MATEMÁTICA E METEOROLOGIA (P. 146)

Conectando ideias

1. Resposta pessoal. Para realizar o cálculo, é interessante propor aos estudantes o uso da notação científica, já que os números possuem muitos dígitos. Eles devem perceber a necessidade de converter km^2 em m^2 e compreender que o índice de 680 mm corresponde a 680 L/m^2, assim:
680 L/m^2 · 491,546 · 10^6 m^2 = = 334 251,28 · 10^6 L ou 3,3 · 10^{11} L
Com base nesse cálculo, espera-se que os estudantes percebam que se trata de um volume alto em relação à média anual.

2. Com a pesquisa para a elaboração do infográfico, espera-se que os estudantes busquem textos de diversos tipos, como vídeos, reportagens, filmes ou outras mídias que tratem do assunto e que sejam relevantes para compreender como a quantidade de chuva pode afetar uma localidade. Dessa forma, durante a pesquisa, eles podem perceber como são as dinâmicas climáticas e de precipitação no Brasil e especificamente na região onde moram, além da maneira como a ausência ou o excesso de chuvas em determinado período ou em determinado lugar podem ter relação também com as mudanças climáticas da Terra, a exploração do meio ambiente, o consumo, a produção e o descarte inadequado de lixo, etc.
Para construir o infográfico, os estudantes podem novamente contar com o auxílio do professor de Geografia, que pode fornecer mais dados sobre o regime pluviométrico das regiões brasileiras. Também podem ser analisados climogramas ou outros gráficos do tipo para conferência do formato e das informações.

CAPÍTULO 6 PROJEÇÕES CARTOGRÁFICAS

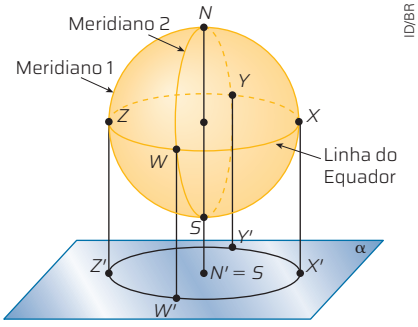
PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 154)

1. Os valores obtidos nesta atividade dependem das cidades escolhidas pelos estudantes. Contudo, o objetivo é levá-los a pensar que nem sempre a menor distância entre dois pontos é um segmento de reta. Em se tratando de geometria na esfera, a menor curva que liga dois pontos é chamada de "geodésica" e, nesse caso, será obtida por meio da medição no globo terrestre.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 162)

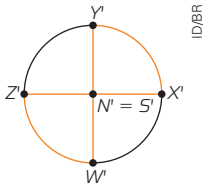
2. A projeção plana, também chamada de projeção azimutal, é um tipo de projeção cartográfica na qual a superfície da Terra é projetada em um plano. Esse tipo de projeção é frequentemente usada para representar áreas polares ou regiões menores com precisão. Note-se que no centro da imagem temos a Antártida, que se encontra no extremo sul do planeta.
Alternativa **d**.

3. A projeção ortogonal de um ponto sobre o plano é a intersecção da reta que passa por um ponto dado e é perpendicular ao plano. Fazendo a projeção ortogonal dos pontos que destacam as trajetórias indicadas na figura, tem-se:



ID/BR

Por meio de uma visão superior do plano α, pode-se traçar a projeção ortogonal dos segmentos $\overline{YN}$, $\overline{YX}$, $\overline{XN}$, $\overline{WN}$, $\overline{WZ}$ e $\overline{ZN}$, representados por $\overline{Y'N'}$, $\overline{Y'N'}$, $\overline{Y'X'}$, $\overline{X'N'}$, $\overline{W'N'}$, $\overline{W'Z'}$ e $\overline{Z'N'}$, respectivamente:



ID/BR

Alternativa **e**.

4. Analisando as imagens, temos:

1 - Projeção cilíndrica: representa melhor as regiões próximas à linha do Equador (latitudes baixas).

2 - Projeção cônica: representa bem as regiões de latitudes médias.

3 - Projeção azimutal: representa bem as regiões polares.

Desse modo, cada uma das afirmações pode ser identificada na seguinte ordem: 1 - 3 - 2 - 1 - 3.

Alternativa **c**.

5. A projeção cilíndrica é um tipo de projeção cartográfica em que a superfície da Terra é projetada em um cilindro que envolve o globo. Entre suas características tem-se que as áreas próximas ao Equador são representadas com maior precisão, enquanto regiões próximas aos polos sofrem grande distorção em tamanho e forma.

Alternativa **c**.

6. Ambas as projeções apresentadas são projeções cilíndricas.

- Mapa 1: Projeção de Mercator: é uma projeção conforme (mantém as formas, mas distorce as áreas) e é utilizada no Brasil como base cartográfica. Eurocentrista, surgiu com a expansão marítima e prioriza a representação dos países do hemisfério Norte.
- Mapa 2: Projeção de Peters: projeção equivalente (mantém a equivalência das áreas, mas altera as formas). Destaca países do hemisfério Sul.

Analisando cada afirmação, temos:

I. Correta. **III.** Errada. **V.** Correta.
II. Correta. **IV.** Correta.

Alternativa **a**.

7. Na projeção de Mercator (cilíndrica), há preservação das áreas na região equatorial, porém, quanto mais distante da linha do Equador (maior latitude), maior a distorção da área (áreas maiores que as reais), apesar de as formas serem mantidas. Sendo assim, a Groenlândia aparece com área muito superior à real.

Alternativa **d**.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 167)

8. **a)** Nas três projeções apresentadas, os marcadores de Tissot não apresentam deformações de áreas que estão localizadas nas regiões próximas à linha do Equador. Como essas áreas são as que menos sofrem distorções, podemos dizer que as projeções são conformes e equivalentes.

b) Os polos são áreas bastante distorcidas nas três projeções apresentadas na atividade, tanto em sua forma (ovalada) quanto em sua área. São as áreas cujas representações são mais diferentes que a realidade.

9. O símbolo da ONU apresenta uma projeção azimutal equidistante centrada no polo Norte. A região mais distorcida nesse tipo de projeção é a do polo Sul, que é apresentada ao redor de todo o círculo. Entretanto, os demais continentes apresentam distorções menores, sendo uma representação mais equitativa dos países.

CÁLCULO RÁPIDO (P. 167)

1. **a)** $10\text{ km} = 10 \cdot 100\,000\text{ cm} = 1\,000\,000\text{ cm} = 10^6\text{ cm}$

$25\text{ km} = 25 \cdot 100\,000\text{ cm} = 2\,500\,000\text{ cm} = 2{,}5 \cdot 10^6\text{ cm}$

$2{,}4\text{ km} = 2{,}4 \cdot 100\,000\text{ cm} = 240\,000\text{ cm} = 2{,}4 \cdot 10^5\text{ cm}$

b) $5\,000\,000\text{ cm} = 5\,000\,000 : 100\,000\text{ km} = 50\text{ km}$

$230\,000\text{ cm} = 230\,000 : 100\,000\text{ km} = 2{,}3\text{ km}$

$140\,000\,000\text{ cm} = 140\,000\,000 : 100\,000\text{ km} = 1\,400\text{ km}$

2. **a)** 10 km **c)** 24 km
b) 15 km **d)** 2,4 km

3. **a)** $x + 17° = 90° \Rightarrow x = 90° - 17° \Rightarrow x = 73°$

b) $x + 35° = 180° \Rightarrow x = 180° - 35° \Rightarrow x = 145°$

c) $x + 113° = 180° \Rightarrow x = 180° - 113° \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 67°$

d) $x + 43° = 180° \Rightarrow x = 180° - 43° \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 137°$

e) $x + 45° = 90° \Rightarrow x = 90° - 45° \Rightarrow x = 45°$

f) $x + 58° = 180° \Rightarrow x = 180° - 58° \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 122°$

PARA RECORDAR (P. 168)

1. **a)** Pontos que interceptam os eixos: (0, 4) e (2, 0)

- Para o ponto (0, 4), temos:
$y = ax + b \Rightarrow 4 = a \cdot 0 + b \Rightarrow$
$\Rightarrow 4 = 0 + b \Rightarrow b = 4$
- Para o ponto (2, 0), temos:
$y = ax + b \Rightarrow 0 = a \cdot 2 + 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2a + 4 = 0 \Rightarrow 2a = -4 \Rightarrow a = -2$

Substituindo a e b na função original, temos $f(x) = -2x + 4$.

b) Pontos que interceptam os eixos: (0, −1) e (1, 0)

- Para o ponto (0, −1), temos:
$y = ax + b \Rightarrow -1 = a \cdot 0 + b \Rightarrow$
$\Rightarrow -1 = 0 + b \Rightarrow b = -1$
- Para o ponto (1, 0), temos:
$y = ax + b \Rightarrow 0 = a \cdot 1 + (-1) \Rightarrow$
$\Rightarrow 0 = a - 1 \Rightarrow a = 1$

Substituindo a e b na função original, temos $f(x) = x - 1$.

2. $10^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 100$

$$\begin{cases} x + y = 14 \\ x^2 + y^2 = 100 \end{cases}$$

$$\underbrace{(x+y)}_{14}{}^2 = \underbrace{x^2 + y^2}_{100} + 2 \cdot \underbrace{xy}_{A_{\text{retângulo}}} \Rightarrow 14^2 =$$

$$= 100 + 2A_{\text{retângulo}} \Rightarrow 2A_{\text{retângulo}} = 196 - 100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2A_{\text{retângulo}} = 96 \Rightarrow A_{\text{retângulo}} = 48$$

Logo, a área desse retângulo é 48 cm².

3. $C_1 = 3 \cdot C_2 \Rightarrow \cancel{2\pi} r_1 = 3 \cdot \cancel{2\pi} r_2 \Rightarrow r_1 = 3r_2$

Substituindo r_1 em $r_1 + r_2 = 12$, encontramos:

$r_1 + r_2 = 12 \Rightarrow 3r_2 + r_2 = 12 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4r_2 = 12 \Rightarrow r_2 = 3$

Como $r_1 = 3r_2$, temos: $r_1 = 3 \cdot 3 \Rightarrow r_1 = 9$

Portanto, o raio da circunferência maior mede 9 dm e o raio da circunferência menor mede 3 dm.

4. Seja x a largura e y o comprimento do campo de futebol.

- Antes da ampliação: $2x + 2y = 340$
- Após a ampliação: $y + 10 = 2x$

$$\begin{cases} 2x + 2y = 340 \\ y + 10 = 2x \end{cases} \Rightarrow y = 110$$

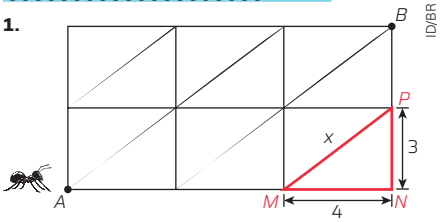
Substituindo $y = 110$ na segunda equação, temos: $x = 60$

a) As dimensões do campo antigo eram: largura 60 m e comprimento 110 m.

b) As dimensões do campo novo são x e $2x$ ou x e $y + 10$. Ou seja, largura 60 m e comprimento 120 m.

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO (P. 169)

1.



ID/BR

$x^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = 5$

Portanto, a menor distância será, em centímetros: $d = 5 + 5 + 4 = 14$

Alternativa **b**.

2. **a)** Incorreta. Nem todos os tradutores que falam japonês falam russo, apenas o contrário é verdade.

b) Incorreta. Nenhum tradutor que fala alemão também fala coreano. Não há intersecção entre os conjuntos.

c) Incorreta. Não há nenhum tradutor que fale inglês e que fale coreano, pois não há intersecção entre o conjunto de tradutores que falam inglês e o conjunto de tradutores que falam coreano.

d) Incorreta. Os dois tradutores que falam russo também falam japonês.

e) Correta. Não há intersecção entre os conjuntos dos tradutores que falam russo e alemão.

Alternativa **e**.

3. **a)** Falso. Um contraexemplo seria Joana ter um amigo com 15, outro com 27 e os outros 38 com 26 anos. A média seria acima de 21 anos.

b) Falso. Não é possível garantir isso. O contraexemplo pode ser o mesmo usado para invalidar a alternativa anterior.

c) Falso. Sabemos que há pelo menos um amigo com 15 anos e outro com 27 anos e, portanto, os outros 38 amigos, que não têm nem 15 anos nem 27 anos, podem ter a idade de 21 anos.

d) Falso. Pelo contraexemplo anterior, é possível que Joana tenha mais de 15 amigos com a mesma idade.

e) Verdadeiro. Se distribuirmos os amigos de Joana em todas as casas de idades inteiras possíveis no intervalo (13 idades distintas), ao chegar no 39º amigo, já teríamos 3 amigos por idade e ainda precisaríamos classificar o 40º amigo em uma das 13 idades, portanto, haveria uma idade que teria 4 amigos em sua casa. Logo, conseguimos garantir, com a distribuição mais igualitária possível, que pelo menos 4 amigos teriam a mesma idade.

Alternativa **e**.

MATEMÁTICA E TECNOLOGIA (P. 170)

Conectando ideias

1. **a)** Resposta pessoal. A resposta depende das escolhas de trajetos que os estudantes fizerem.

b) Nessa questão, espera-se que os estudantes utilizem as informações de tempo e distância registradas no item anterior no cálculo da velocidade média, conforme a fórmula:

$$\text{velocidade média} = \frac{\text{distância percorrida}}{\text{tempo gasto}}$$

O valor obtido deve ser aproximadamente 6,5 km/h.

c) Espera-se que os estudantes citem fatores diversos, como: relevo, condicionamento físico, fatores climáticos (excesso de sol ou chuva), número de ruas atravessadas (levando-se em conta o tempo de espera em faixas de pedestres e semáforos). É interessante que eles compartilhem as hipóteses elaboradas previamente, de modo que cada um possa complementar sua análise com o ponto de vista dos colegas. Vale a reflexão sobre quais fatores poderiam ser previstos pelo GPS, como relevo (quanto mais íngreme, menor a velocidade, já que o esforço tende a ser maior), altitude, clima (integração com aplicativo de previsão do tempo), quantidade de ruas atravessadas.

d) Espera-se que os estudantes percebam que o tempo estimado pelo *site* é próximo do real, mas há variações.

2. Resposta pessoal. Esta atividade visa desenvolver habilidades de pesquisa, análise e comunicação, além de promover a interdisciplinaridade, conectando o uso do GPS com profissões diversas. Antes da pesquisa, discuta com a turma a importância do GPS e como ele influencia diferentes áreas profissionais, estimulando a curiosidade sobre o tema. Sugira aos estudantes que usem fontes confiáveis, como *sites* de associações profissionais e reportagens, e que elaborem perguntas orientadoras, como: "Quais profissões utilizam GPS?" e "De que forma ele é aplicado no cotidiano de trabalho?". Auxilie as duplas a identificar como o uso do GPS está relacionado às competências matemáticas e tecnológicas, como localização, navegação e análise de dados. Oriente a organização do material coletado e a forma de apresentação (cartazes, *slides*, etc.), promovendo o compartilhamento entre os grupos, para que todos possam conhecer as diferentes formas de uso do GPS.

POR DENTRO DO ENEM E DOS VESTIBULARES (P. 172)

1. O raio da circunferência que circunscreve um triângulo equilátero é igual a dois terços de sua altura.

$$R = \frac{2}{3} \cdot h = \frac{2}{3} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 3 \cdot 3 = x\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{9}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3}$$

A área do triângulo equilátero, isto é, da área da base da pirâmide é:

$$A = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(3\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{27\sqrt{3}}{4}$$

Por sua vez, o volume é dado por: $V = \frac{1}{3}A \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{27\sqrt{3}}{4} \cdot 4 = 9\sqrt{3}$

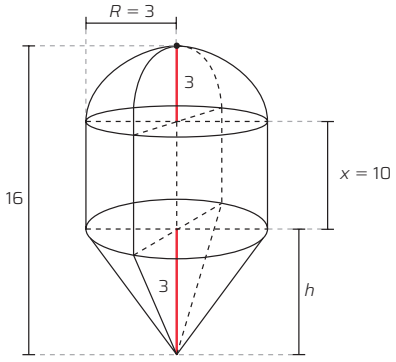
Alternativa **c**.

2. A projeção de Mercator distorce o tamanho das áreas, especialmente em regiões próximas aos polos, de altas latitudes.

Alternativa **c**.

3. Como a altura do sólido mede 16 cm, a altura do cilindro mede 10 cm e o raio da semiesfera mede 3 cm, então a altura do cone mede 4 cm.

$16 = 3 + 10 + h \Rightarrow h = 3$



ID/BR

A metade da área da superfície esférica é dada por:

$A_{semi} = \frac{1}{2} \cdot 4\pi R^2 = 2\pi \cdot 3^2 = 18\pi \text{ cm}^2$

A área da superfície do cilindro, nesse caso, corresponde a sua área lateral: $A_{cil} = 2\pi Rh = 2\pi \cdot 3 \cdot 10 = 60\pi \text{ cm}^2$

A área da superfície do cone, nesse caso, corresponde a sua área lateral. Para o cálculo dessa área, é necessário encontrar a geratriz do cone:

$g^2 = R^2 + h^2 = 3^2 + 3^2 = 2 \cdot 3^2 \Rightarrow g = \sqrt{2 \cdot 3^2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{con} = \pi Rg = \pi \cdot 3 \cdot 3\sqrt{2} = 9\sqrt{2}\pi \text{ cm}^2$

Somando as três áreas, a área da superfície do sólido é:

$A_s = 18\pi + 60\pi + 9\sqrt{2}\pi = (78\pi + 9\sqrt{2}\pi) \text{ cm}^2$

Alternativa **d**.

UNIDADE 3 PROGRAMAÇÃO E PENSAMENTO COMPUTACIONAL

CAPÍTULO 7 PENSAMENTO COMPUTACIONAL

TECNOLOGIA (P. 180)

1. Nesse primeiro contato dos estudantes com o *Scratch*, eles poderão enfrentar algumas dificuldades, como:

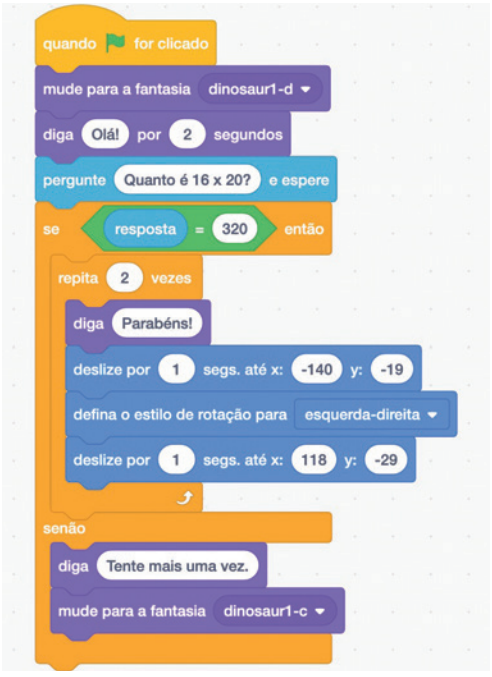
- localizar o comando desejado no menu lateral (Blocos de comandos). As cores utilizadas no *Scratch* são muito parecidas entre si, o que pode dificultar um pouco a identificação do Bloco de comando desejado;
- explorar comandos diferentes daqueles previstos na atividade. Nesse caso, recomenda-se usar parte do tempo destinado à atividade inicialmente para a exploração livre dos comandos, o que otimiza o tempo utilizado na elaboração do programa solicitado;
- combinar adequadamente os comandos do *Scratch*. Nesse caso, é interessante identificar os "encaixes" presentes em cada comando. Eles indicam qual comando pode ser combinado com o outro e vai auxiliá-los na elaboração do programa solicitado;
- combinar comandos aleatoriamente. Isso pode gerar fluxos de comandos contínuos chamados de *loops* ou, ainda, não definir adequadamente os condicionantes dos testes lógicos "se/então";
- utilizar linguagem clara para detalhar o funcionamento dos comandos utilizados na elaboração do programa. Contar a algum colega como entende a ação executada por um comando é uma boa sugestão nesse caso;
- selecionar outras partes da área de trabalho durante a elaboração no programa. Cada conjunto de comandos está vinculado a uma personagem ou a um cenário. Para retornar ao conjunto de comandos relacionado a um determinado elemento, basta clicar novamente sobre ele.

É possível promover uma troca de experiências baseada no que os estudantes registraram no item acima. Dessa forma, eles poderão se ajudar mutuamente para as próximas explorações. A dificuldade de um pode ser minimizada por alguma dica ou percepção do outro. Essas trocas enriquecem o processo de aprendizagem e permitem novos conhecimentos. Incentive os estudantes a testar comandos que não foram explorados no item anterior.

2. e **3.**

Nas atividades **2** e **3**, os estudantes poderão explorar os comandos de pergunta. Há muitas possibilidades de usar esse recurso. A seguir, há uma possibilidade incluindo o bloco lógico de movimento para mostrar a comemoração da personagem com a resposta correta (ele se desloca duas vezes "esquerda-direita") e a mudança da sua fantasia quando a resposta está errada.

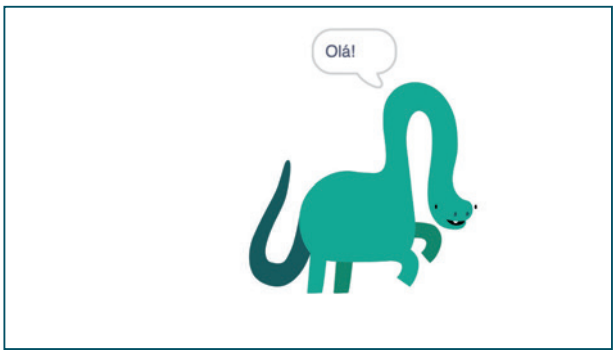
Blocos de comandos organizados:

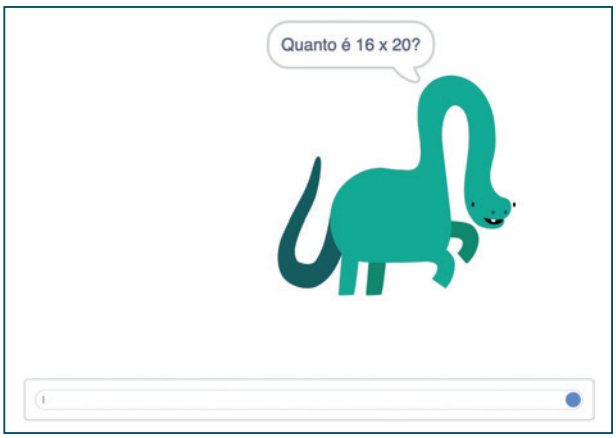


Scratch. Fac-símile: ID/BR

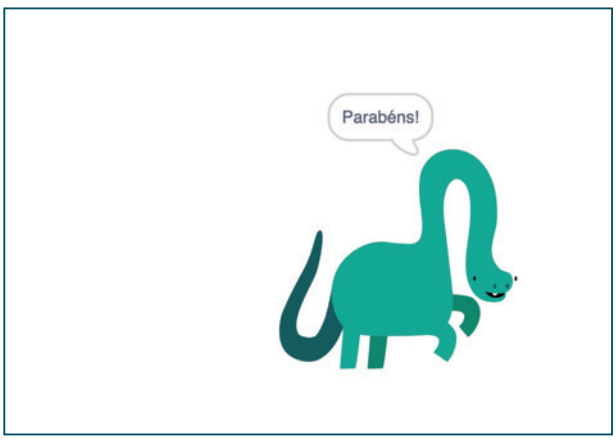
Telas iniciais:

Imagens: Scratch. Fac-símile: ID/BR





Resposta correta:



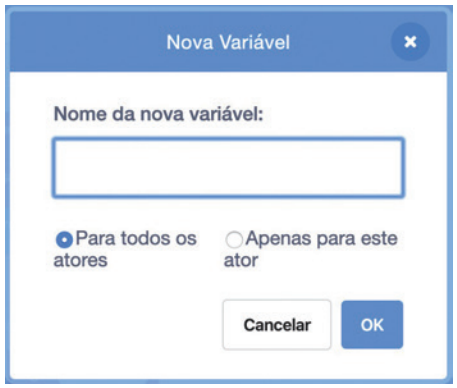
Resposta errada:



4. Na primeira etapa desta atividade, é importante usar a aplicação para entender como os comandos podem se relacionar e realizar testes (clicando na bandeirinha verde e executando os comandos para entender o que funciona e aquilo que pode ser aprimorado ou modificado).

Para a criação de alguns comandos, será necessária a criação de variáveis: "a", "b" e "Pontuação". Esses comandos ainda não existem, mas as variáveis devem ser criadas para que sejam inseridas no *script* de programação.

No painel de códigos, na cor laranja, há o comando "Variáveis". Nesse comando, ao selecionar a opção "Criar uma variável", a tela a seguir será apresentada:



Scratch. Fac-símile: ID/BR

É necessário fazer esse procedimento para as três variáveis – "a", "b" e "Pontuação" –, para que apareçam entre as opções do menu e possam ser inseridas no *script* de programação.

Sempre que necessário, basta ir ao bloco "Variáveis" e selecionar a variável desejada.



Scratch. Fac-símile: ID/BR

Uma possibilidade de organização para a elaboração do jogo da tabuada pode ser observada a seguir.



Scratch. Fac-símile: ID/BR

Em forma de texto, temos:

- Sempre que o programa for executado, a pontuação será "zero".
- Todo o fluxo que segue será repetido 10 vezes (10 rodadas de perguntas), até que o jogo seja finalizado.
- A cada rodada, um novo valor entre 0 e 10 é atribuído às variáveis "a" e "b", sendo solicitado o produto entre tais valores.
- Se a resposta inserida estiver correta, o som "Guitar Strum" será reproduzido e 2 pontos serão adicionados à variável "Pontuação", e começará uma nova rodada.
- Se a resposta inserida estiver incorreta, o som "String Pluck" será reproduzido e 1 ponto será subtraído da variável "Pontuação" até que seja terminada a 10ª rodada.

Resposta pessoal.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 188)

1. Para descobrirmos a sequência correta de cores, precisamos analisar cada uma das tentativas, conforme segue:

Tentativa 1: Nessa tentativa, não houve nenhum acerto. Assim, temos:

- Posição 1: não é vermelho (só pode ser laranja ou roxo);
- Posição 2: não é laranja (só pode ser roxo ou vermelho);
- Posição 3: não é roxo (só pode ser laranja ou vermelho).

Tentativa	Posição 1	Posição 2	Posição 3	Verificação
1	NÃO	NÃO	NÃO	☹☹☹

Tentativa 2: Nessa tentativa, uma das cores foi colocada na posição certa e duas foram colocadas na posição errada. Assim, temos:

- Posição 1: pode ser roxo;
- Posição 2: não é laranja (já conhecemos isso da tentativa 1);
- Posição 3: pode ser vermelho.

Tentativa	Posição 1	Posição 2	Posição 3	Verificação
2	TALVEZ	NÃO	TALVEZ	☺☹☹

Logo, roxo na posição 1 ou vermelho na posição 3 é um acerto.

Tentativa 3: Nessa tentativa, todas as cores foram colocadas na posição errada. Assim, temos:

- Posição 1: não é laranja;
- Posição 2: não é roxo;
- Posição 3: não é vermelho.

Tentativa	Posição 1	Posição 2	Posição 3	Verificação
3	NÃO	NÃO	NÃO	☹☹☹

Reunindo as informações obtidas até esse momento, pode-se concluir que:

- Posição 1: não é vermelho (tentativa 1) nem laranja (tentativa 3) e pode ser roxo (tentativa 2); assim, já sabemos que, na posição 1, só pode ser **roxo**;
- Posição 2: não é laranja (tentativas 1 e 2) nem roxo (tentativa 3); logo, só pode ser **vermelho**;
- Posição 3: não é roxo (tentativa 1) nem vermelho (tentativa 3); logo, só pode ser **laranja**.

Tentativa 4: Nessa tentativa, com as informações das tentativas anteriores, será possível deduzir as cores em cada posição, ou seja, é composta de roxo na posição 1, vermelho na posição 2 e laranja na posição 3.

Tentativa	Posição 1	Posição 2	Posição 3	Verificação
4	SIM	SIM	SIM	☺☺☺

2. Como na atividade **1**, analisaremos todas as tentativas.

a) **Tentativa 1**: Nessa tentativa, todas as cores foram colocadas na posição errada. Assim, temos:

- Posição 1: não é roxo;
- Posição 2: não é vermelho;
- Posição 3: não é laranja.

Tentativa 2: Nessa tentativa, uma das cores foi colocada na posição certa e duas foram colocadas na posição errada. Assim, temos:

- Posição 1: não é roxo (informação obtida da tentativa 1);
- Posição 2: pode ser laranja;
- Posição 3: pode ser vermelho.

Tentativa 3: Nessa tentativa, todas as cores foram colocadas na posição errada. Assim, temos:

- Posição 1: não é laranja;
- Posição 2: não é roxo;
- Posição 3: não é vermelho.

Tentativa 4: Nessa tentativa, uma das cores foi colocada na posição certa e duas foram colocadas na posição errada. Assim, temos:

- Posição 1: pode ser vermelho;
- Posição 2: não é roxo (informação obtida da tentativa 3);
- Posição 3: não é laranja (informação obtida da tentativa 1).

Tendo analisado todas as tentativas, faremos um quadro com seus resultados, conforme segue:

Tentativa	Posição 1	Posição 2	Posição 3	Verificação
1	NÃO	NÃO	NÃO	☹☹☹
2	NÃO	TALVEZ	TALVEZ	☺☹☹
3	NÃO	NÃO	NÃO	☹☹☹
4	TALVEZ	NÃO	NÃO	☺☹☹
5	//////////////	//////////////	//////////////	☺☺☺

Logo:

Sabemos que a posição 1 não é ocupada pelo roxo nem pelo laranja; então, na posição 1, temos o vermelho.

Sabemos que a posição 2 não é ocupada pelo vermelho nem pelo roxo; então, na posição 2, temos o laranja.

Sabemos que a posição 3 não é ocupada pelo laranja nem pelo vermelho; então, na posição 3, temos o roxo.

Tentativa	Posição 1	Posição 2	Posição 3	Verificação
5	SIM	SIM	SIM	☺☺☺

b) **Tentativa 1**: Nessa tentativa, uma das cores foi colocada na posição certa e duas foram colocadas na posição errada. Assim, temos:

- Posição 1: pode ser roxo;
- Posição 2: pode ser vermelho;
- Posição 3: pode ser laranja.

Tentativa 2: Nessa tentativa, todas as cores estão colocadas na posição errada. Assim, temos:

- Posição 1: não é roxo;
- Posição 2: não é laranja;
- Posição 3: não é vermelho.

Tentativa 3: Nessa tentativa, uma das cores foi colocada na posição certa e duas na posição errada. Assim, temos:

- Posição 1: pode ser laranja;
- Posição 2: pode ser roxo;
- Posição 3: não é vermelho (informação obtida da tentativa 2).

Tentativa 4: Nessa tentativa, todas as cores estão colocadas na posição errada. Assim, temos:

- Posição 1: não é vermelho;
- Posição 2: não é roxo;
- Posição 3: não é laranja.

Tendo analisado todas as tentativas, faremos um quadro com seus resultados, conforme segue:

Tentativa	Posição 1	Posição 2	Posição 3	Verificação
1	TALVEZ	TALVEZ	TALVEZ	☺☹☹
2	NÃO	NÃO	NÃO	☹☹☹
3	TALVEZ	TALVEZ	NÃO	☺☹☹
4	NÃO	NÃO	NÃO	☹☹☹
5	////////////	////////////	////////////	☺☺☺

Logo:

Sabemos que a posição 1 não é ocupada pelo roxo nem pelo vermelho; então, na posição 1, temos o laranja.

Sabemos que a posição 2 não é ocupada pelo laranja nem pelo roxo; então, na posição 2, temos o vermelho.

Sabemos que a posição 3 não é ocupada pelo vermelho nem pelo laranja; então, na posição 3, temos o roxo.

Tentativa	Posição 1	Posição 2	Posição 3	Verificação
5	SIM	SIM	SIM	☺☺☺

c) **Tentativa 1**: Nessa tentativa, uma das cores foi colocada na posição certa e duas foram colocadas na posição errada. Assim, temos:

- Posição 1: pode ser azul;
- Posição 2: pode ser preto;
- Posição 3: pode ser laranja.

Tentativa 2: Nessa tentativa, todas as cores foram colocadas na posição errada. Assim, temos:

- Posição 1: não é azul;
- Posição 2: não é laranja;
- Posição 3: não é preto.

Tentativa 3: Nessa tentativa, todas as cores foram colocadas na posição errada. Assim, temos:

- Posição 1: não é preto;
- Posição 2: não é azul;
- Posição 3: não é laranja.

Tentativa 4: Nessa tentativa, uma das cores foi colocada na posição certa e duas foram colocadas na posição errada. Assim, temos:

- Posição 1: pode ser laranja;
- Posição 2: não é azul (informação obtida da tentativa 3);
- Posição 3: não é preto (informação obtida da tentativa 2).

Tendo analisado todas as tentativas, faremos um quadro com seus resultados, conforme segue:

Tentativa	Posição 1	Posição 2	Posição 3	Verificação
1	TALVEZ	TALVEZ	TALVEZ	☺☹☹
2	NÃO	NÃO	NÃO	☹☹☹
3	NÃO	NÃO	NÃO	☹☹☹
4	TALVEZ	NÃO	NÃO	☺☹☹
5	////////////	////////////	////////////	☺☺☺

Logo:

Sabemos que a posição 1 não é ocupada pelo azul nem pelo preto; então, na posição 1, temos o laranja.

Sabemos que a posição 2 não é ocupada pelo laranja nem pelo azul; então, na posição 2, temos o preto.

Sabemos que a posição 3 não é ocupada pelo preto nem pelo laranja; então, na posição 3, temos o azul.

Tentativa	Posição 1	Posição 2	Posição 3	Verificação
5	SIM	SIM	SIM	☺☺☺

3. Partindo de determinado ponto, pode-se descrever a trajetória da tartaruga traduzindo a linguagem dos comandos para a língua portuguesa. Sabe-se que FD 50, por exemplo, significa seguir em frente em uma distância cujo comprimento é 50 unidades de medida; RT 90 significa rotacionar 90° para a direita; LT 90 significa rotacionar 90° para a esquerda. Dessa forma, pode-se traduzir a seguinte sequência em língua portuguesa:

FD 50 = seguir adiante 50 unidades;

LT 90 = rotacionar 90° para a esquerda;

FD 50 = seguir adiante 50 unidades;

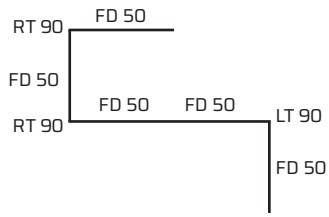
FD 50 = seguir adiante 50 unidades;

RT 90 = rotacionar 90° para a direita;

FD 50 = seguir adiante 50 unidades;

RT 90 = rotacionar 90° para a direita;

FD 50 = seguir adiante 50 unidades.



Portanto, alternativa **d**.

4. Para resolver essa questão, basta traduzir a linguagem natural para a língua portuguesa e efetuar as operações matemáticas solicitadas. Seja a variável res uma caixa, dentro do qual há o valor 1:

RES | 1 |

O código res = 3 · res significa que o valor dentro da caixa será substituído pelo triplo do valor que está lá. Como 3 · 1 = 3, então o novo valor dentro da caixa é:

RES | 3 |

O código res = res + 1 seguido de res = 2 · res será repetido, até que o o valor de dentro da caixa seja um número maior que 20. Na primeira iteração, tem-se:

Res = 3 + 1 = 4 e Res = 2 · 4 = 8

RES | 8 |

Com o valor é menor que 20, repete-se a iteração:

Res = 8 + 1 = 9 e Res = 2 · 9 = 18

RES | 18 |

Com o valor é menor que 20, repete-se a iteração:

Res = 18 + 1 = 19 e Res = 2 · 19 = 38

RES | 38 |

Uma vez que o valor dentro da caixa é maior que 20, basta aplicar o código res = res - 5, isto é, 38 - 5 = 33.

RES | 33 |

Portanto, alternativa **b**.

CÁLCULO RÁPIDO (P. 189)

1. **a)** O dobro de x é 6; portanto, x é 3, pois $2 \cdot 3 = 6$.

b) Sabemos que o dobro de 3 é 6, e que, para obtermos um produto positivo (6), sabendo que o primeiro fator é negativo (−2), o outro fator deverá ser negativo. Logo, a resposta é −3.

c) O dobro de x somado com 1 é 11; então, x é 5, pois $2 \cdot 5 = 10$ e $10 + 1 = 11$.

d) Sabemos que a soma de 10 com 1 resulta em 11. Logo, devemos determinar um número que, multiplicado por −2, resulta em 10. Para que um produto seja positivo a partir de um fator negativo, o outro fator também deverá ser negativo. Logo, a resposta é −5.

e) Somando 3 ao triplo de x, obtemos 12; então, para calcular o valor de x, basta subtrair 3 de 12 (que resulta em 9) e pensar no número cujo triplo é 9. Logo, a resposta é 3.

f) Subtraindo 3 do triplo de x, obtemos 12. Dessa maneira, caso não tivéssemos subtraído 3, teríamos 15. O número cujo triplo é 15 é 5.

g) O quíntuplo de um número foi somado com 10, resultando em -5. Caso não tivéssemos somado 10, teríamos -15. O número cujo quíntuplo é -15 é -3.

h) A soma do oposto do quíntuplo de um número com 10 resulta em 5. Logo, caso não tivéssemos somado 10, teríamos -5. Para que um produto resulte em negativo, sabendo que um de seus fatores é negativo, o outro deverá ser positivo. Logo, para que o quíntuplo de um número seja 5, esse deve valer 1.

2. Sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180°, concluímos que:

a) A soma das medidas dos dois ângulos dados é 150°; logo, x é 30°, pois $180° - 150° = 30°$.

b) A soma das medidas dos dois ângulos dados é 130°; logo, x é 50°, pois $180° - 130° = 50°$.

c) As medidas dos ângulos são proporcionais a 1, 5 e 3. Então, dividindo 180° por 9 (1 + 3 + 5 = 9), temos 20°. Portanto, os ângulos medem 20°, 60° e 100°.

d) Observando os valores indicados na figura, temos que $3x + 30° = 180°$. Ou seja, $3x = 150°$. O número cujo triplo é 150 é 50. Portanto, os ângulos medem 50°, 110° e 20°.

PARA RECORDAR (P. 190)

1. Quando analisamos as igualdades apresentadas e seu comportamento, percebemos o padrão dos resultados das potenciações a cada linha (a cada algarismo 9 acrescentado na base da potenciação): o resultado inicial (81) recebe um algarismo 9 à sua esquerda e um algarismo 0 entre os algarismos 8 e 1.

Dessa forma, as igualdades seguintes dessa sequência devem ser:

$99\,999^2 = 9\,999\,800\,001$

$999\,999^2 = 999\,998\,000\,001$

A alternativa **d** é a correta.

Esse padrão pode ser explicado da seguinte maneira:

$\underbrace{99\ldots9}_{n\text{ noves}}{}^2 = (\underbrace{100\ldots0}_{n\text{ zeros}} - 1)^2 =$

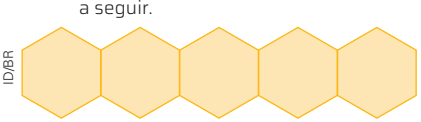
$= 1\underbrace{00000\ldots0}_{2n\text{ zeros}} - \underbrace{2000\ldots0}_{n\text{ zeros}} + 1 =$

$= \underbrace{99\ldots9}_{n-1\text{ noves}}\,8\,\underbrace{00\ldots}_{n-1\text{ zeros}}\,01$

2. **a)** Analisando o padrão das figuras apresentadas, percebemos que, a cada nova figura, um hexágono regular é acrescentado. Assim:

- Figura 1: 1 hexágono regular;
- Figura 2: 2 hexágonos regulares;
- Figura 3: 3 hexágonos regulares;
- Figura 4: 4 hexágonos regulares.

Portanto, a figura 5 será formada por 5 hexágonos regulares, como na imagem a seguir.

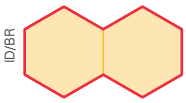


b) Sabendo que o perímetro p é a soma da medida dos lados que não são coincidentes entre os polígonos e que, de acordo com o enunciado, cada lado dos hexágonos apresentados mede 1, temos:

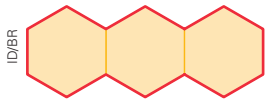
- Figura 1: apresenta 6 lados de medida 1 (contorno destacado em vermelho); logo, seu perímetro é $p_1 = 6 \cdot 1 = 6$:



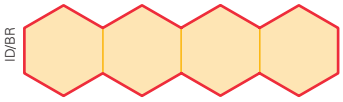
- Figura 2: apresenta 10 lados não coincidentes entre os polígonos (contorno destacado em vermelho); logo, seu perímetro é $p_2 = 10 \cdot 1 = 10$:



- Figura 3: apresenta 14 lados não coincidentes entre os polígonos (contorno destacado em vermelho); logo, seu perímetro é $p_3 = 14 \cdot 1 = 14$:



- Figura 4: apresenta 18 lados não coincidentes entre os polígonos (contorno destacado em vermelho); logo, seu perímetro é $p_4 = 18 \cdot 1 = 18$:



c) De acordo com a análise do número de lados que formam o perímetro das figuras, podemos perceber que existe um padrão, em que o perímetro é igual a 2 mais a multiplicação de 4 pelo número da figura n, da seguinte maneira:

$p_1 = 2 + 4 \cdot 1 = 6$

$p_2 = 2 + 4 \cdot 2 = 10$

$p_3 = 2 + 4 \cdot 3 = 14$

$p_4 = 2 + 4 \cdot 4 = 18$

Portanto, temos:

$p_{10} = 2 + 4 \cdot 10 = 42$

Logo, o perímetro da figura 10 mede 42.

d) Resposta pessoal. Exemplo de resposta:

Conforme descrevemos no item **c**, a medida do perímetro equivale a 2 mais a multiplicação de 4 pelo número da figura n. Assim, a expressão geral é dada por:

$p_n = 2 + 4 \cdot n$

Outras generalizações da expressão para o padrão da sequência podem ser aceitas, desde que equivalentes a essa.

e) Utilizando a expressão geral para o cálculo do perímetro, encontrada no item **d**, temos:

$2 + 4 \cdot n = 110$

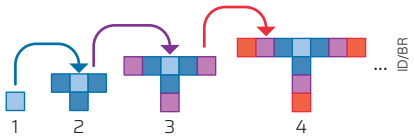
$4n = 110 - 2$

$n = \frac{108}{4}$

$n = 27$

Assim, o perímetro 110 é o perímetro da 27ª figura dessa sequência.

3. **a)** Há muitas maneiras de perceber esse padrão. Uma delas é que, a cada figura, acrescentam-se 3 quadradinhos: um na coluna central para baixo e um de cada lado (esquerda e direita) da linha existente anteriormente, conforme a figura.



b) Nessa sequência, o número de quadrados Q é equivalente ao número da figura n, multiplicado por 3, e de seu resultado subtraem-se 2. Assim:

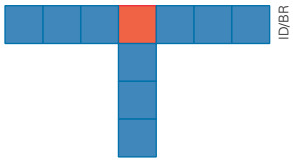
- Figura 1: $Q_1 = 1 \cdot 3 - 2 = 1$;
- Figura 2: $Q_2 = 2 \cdot 3 - 2 = 4$;
- Figura 3: $Q_3 = 3 \cdot 3 - 2 = 7$;
- Figura 4: $Q_4 = 4 \cdot 3 - 2 = 10$.

A expressão geral para essa sequência, de acordo com o padrão citado, é descrita por: $Q_n = n \cdot 3 - 2$, ou ainda, $Q_n = 3n - 2$, em que n indica a posição da figura nessa sequência.

c) Uma expressão geral alternativa àquela apresentada no item **b** pode ser descrita como:

$Q_n = 3(n - 1) + 1$

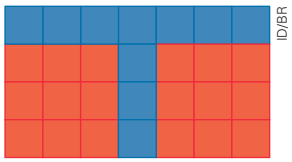
Uma representação geométrica dessa expressão pode ser encontrada na figura a seguir, composta de 3 partes com a mesma quantidade de quadradinhos (duas horizontais e uma vertical) acrescida e 1 quadradinho central.



Outra expressão alternativa pode ser descrita como:

$Q_n = n(2n - 1) - 2(n - 1)^2$

cuja representação geométrica é vista a seguir.



Nessa representação, pode-se verificar um retângulo composto de n linhas e $2n - 1$ colunas do qual foram retirados 2 quadrados (em vermelho) compostos de $n - 1$ linhas/colunas.

Outras generalizações da expressão para o padrão da sequência podem ser aceitas, desde que equivalentes a essas.

4. **a)** Nessa sequência, o número de pontos P é o número da figura n mais dois. Assim:

- Figura 1: $P_1 = 1 + 2 = 3$;
- Figura 2: $P_2 = 2 + 2 = 4$;
- Figura 3: $P_3 = 3 + 2 = 5$;
- Figura 4: $P_4 = 4 + 2 = 6$.

Logo, a expressão geral para essa sequência é dada por: $P_n = n + 2$

b) Nessa sequência, o número de segmentos S é duas vezes o número da figura n mais um. Assim:

- Figura 1: $S_1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$;
- Figura 2: $S_2 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$;
- Figura 3: $S_3 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$;
- Figura 4: $S_4 = 2 \cdot 4 + 1 = 9$.

Logo, a expressão geral para essa sequência é dada por: $S_n = 2n + 1$

5. **a)** Em uma figura, cada segmento da etapa anterior se transforma em 5 novos segmentos. Como o comprimento da figura 1 é 1, temos:

$C(2) = 5 \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$

$C(3) = 5 \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{9} = \left(\frac{5}{3}\right)^2$

$C(4) = 5 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} = \left(\frac{5}{3}\right)^3$

b) Generalizando o que vimos no item **a**, temos:

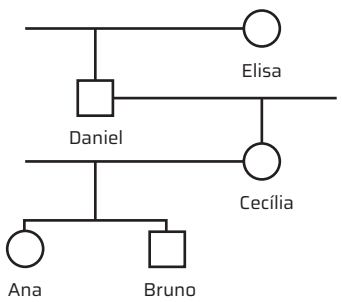
$C(n) = \left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}$

c) Como $\frac{5}{3} > 1$, quando n cresce indefinidamente, $C(n)$ também cresce indefinidamente, ou seja, o valor do perímetro das figuras fica cada vez maior.

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO (P. 191)

1. Para facilitar o entendimento da questão, montamos a árvore genealógica com as relações apresentadas pelo enunciado, conforme imagem a seguir (o círculo representa as mulheres, e o quadrado, os homens).

ID/BR



Sabendo que Ana é irmã de Bruno e com base nas demais informações do enunciado, podemos concluir que ela também é filha de Cecília (mãe de Bruno) e neta de Daniel, já que este é pai de Cecília. O fato de Elisa ser mãe de Daniel não interfere significativamente na resolução da situação proposta, pois é solicitada apenas a relação entre Daniel e Ana. Logo, Ana é neta de Daniel, ou Daniel é avô de Ana.

2. Como apenas um mentiu, Carlos e Mário não podem estar falando a verdade; logo, um deles mentiu.

Se Mário mentiu, então o que os outros três amigos afirmaram é verdade e concluímos que Pedro entrou sem pagar.

Caso Mário tivesse falado a verdade, haveria uma contradição, já que a afirmação de Pedro seria verdadeira, mas a de Carlos seria falsa.

Dessa maneira, sabemos que foi Pedro quem entrou sem pagar.

3. A frase "Se pelo menos um jurado se virar, o candidato é selecionado", presente no enunciado, pode ser reescrita como "se o candidato não foi selecionado, nenhum jurado se virou para ele", já que se um ou mais jurados se virarem o candidato é selecionado.

Alternativa **b**.

MATEMÁTICA E TECNOLOGIA (P. 192)

Conectando ideias

1. **a)** Espera-se que os estudantes levantem hipóteses como:

- informações detalhadas da nota fiscal;
- informações detalhadas da empresa que emitiu a nota fiscal;
- informações sobre a destinação dos tributos;
- entre outras (dados de identificação relacionados ao comprador, ao vendedor e ao produto).

b) Essa resposta dependerá do tipo de Nota Fiscal e de estabelecimento. O QR Code direciona para o *site* da Secretaria da Fazenda, onde, em geral, consta a nota fiscal eletrônica emitida pela empresa, com informações relativas a itens comprados e respectivos valores, valor total da compra, quantidade de itens comprados, forma de pagamento, dados da nota fiscal, dados do consumidor, informações sobre os atendentes do comércio, data e hora da compra e tributos.

2. **a)** A porcentagem dos tributos, em relação ao valor total da compra, pode ser obtida comparando o valor dos tributos (R$ 75,16) com o valor total pago (R$ 271,39) por meio de uma razão (divisão), conforme segue:

$\frac{75{,}16}{271{,}39} \simeq 0{,}2769$

Logo, o valor dos tributos corresponde a aproximadamente 27,7% do valor total pago.

b) Espera-se que os estudantes compreendam que a lei trata de esclarecimento ao consumidor sobre quais informações precisam constar na nota fiscal eletrônica, como a informação do valor aproximado correspondente à totalidade dos tributos federais, estaduais e municipais de forma separada por item, assim como a identificação de seu percentual.

Alguns tributos previstos nessa legislação são:

- Imposto sobre Operações relativas à Circulação de Mercadorias e sobre Prestações de Serviços de Transporte Interestadual e Intermunicipal e de Comunicação (ICMS);
- Imposto sobre Serviços de Qualquer Natureza (ISS);
- Imposto sobre Produtos Industrializados (IPI);
- Imposto sobre Operações de Crédito, Câmbio e Seguro, ou relativas a Títulos ou Valores Mobiliários (IOF);
- Contribuição social para o Programa de Integração Social (PIS) e para o Programa de Formação do Patrimônio do Servidor Público (Pasep) – (PIS/Pasep);
- Contribuição para o Financiamento da Seguridade Social (Cofins);
- Contribuição de Intervenção no Domínio Econômico (Cide), incidente sobre a importação e a comercialização de petróleo e seus derivados, gás natural e seus derivados, e álcool etílico combustível;
- Imposto de importação, PIS/Pasep/Importação e Cofins/Importação.

3. Suponha que o valor total da nota fiscal utilizada na atividade **1** seja de R$ 134,00 e que o valor dos tributos seja de R$ 25,00, ou seja, aproximadamente 18,94%.

Do valor total da compra, 14% corresponde ao valor do ICMS, como segue:

$\frac{14}{100} \cdot 134 = 18{,}76$

Assim, o valor pago de ICMS é R$ 18,76.

4. Resposta pessoal. Sugestão:

Explique que transparência pública é o direito de acessar informações sobre a atuação do governo e o uso dos recursos públicos, conforme a Constituição de 1988. Destaque como a transparência fortalece a democracia ao permitir que os cidadãos fiscalizem o governo e participem mais efetivamente. Oriente os estudantes a pesquisar as tecnologias utilizadas para promover a transparência pública, como portais de transparência, aplicativos de monitoramento e sistemas de licitação eletrônica. Explique como essas tecnologias facilitam o acesso e a compreensão das informações públicas. Organize os estudantes em grupos para apresentarem exemplos de tecnologias encontradas em suas pesquisas. Após as apresentações, discuta outras formas de usar a tecnologia para melhorar a transparência. Juntos, escrevam um texto resumindo as ideias discutidas e sugestões para novas tecnologias. Publique o texto nas redes sociais do colégio para informar a comunidade. Pergunte aos estudantes sobre a importância de manter o foco durante a atividade e como isso afeta o sucesso do trabalho.

Resposta pessoal.

CAPÍTULO 8 ALGORITMOS E FLUXOGRAMAS

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 200)

1. As respostas dependem de informações pessoais dos estudantes. Espera-se que eles decomponham cada um dos números por meio das divisões sucessivas por 2 e organizem uma soma de potências de 2. O item **c** será mais trabalhoso, pois haverá mais divisões sucessivas.

2. Realizando agrupamentos em potências de 2 e observando os restos, temos:

$$\begin{array}{r|l} 99 & 2 \\ 1 \quad 49 & 2 \\ 1 \quad 24 & 2 \\ 0 \quad 12 & 2 \\ 0 \quad 6 & 2 \\ 0 \quad 3 & 2 \\ 1 \quad 1 & \end{array}$$

Logo:

$(99)_{10} = (1100011)_2$

Alternativa **a**.

3. $(11001000)_2 = 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot$
$\cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 =$
$= 128 + 64 + 8 = (200)_{10}$

Alternativa **d**.

4. Para entender o problema, vamos elaborar uma lista com "palavras" de diferentes tamanhos (quantidade de algarismos):

- Palavras com **um** único símbolo, 2 possibilidades (0 ou 1): $2^1 = 2$;
- Palavras com exatamente **dois** símbolos, 4 possibilidades (00, 01, 10 ou 11): $2^2 = 4$;
- Palavras com exatamente **três** símbolos, 8 possibilidades (000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111): $2^3 = 8$; e assim sucessivamente.

Como desejamos formar palavras com até seis símbolos, pode-se calcular:

$2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 =$
$= 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 126$

Logo, é possível escrever 126 palavras diferentes.

Alternativa **d**.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 203)

5. **a)** Sabendo que 1 GB equivale a 1 024 MB e que 1 MB equivale a 8 Mb, temos que:

$10 \cdot 1024 \cdot 8 = 81920$

Logo, o arquivo tem 81 920 Mb.

Dividindo o tamanho do arquivo a ser baixado pela velocidade da internet, temos:

$\frac{81920}{10} = 8192$

Logo, serão necessários 8 192 segundos, que equivalem a 2 horas, 16 minutos e 32 segundos.

b) Considerando a velocidade de 10 MBps, temos:

$\frac{10240}{10} = 1024$

Logo, o tempo de *download* seria 1 024 segundos, que é equivalente a 17 minutos e 4 segundos.

6. Como 1 hora equivale a 60 minutos, temos:

$\underbrace{375}_{\text{Memória consumida por minuto}} \cdot \underbrace{60}_{\text{Tempo de gravação}} = 22500$

Assim, uma gravação de 1 hora ocupa 22 500 MB.

Em seguida, temos:

$22500 : 10^3 = 22{,}5$

Logo, o tamanho do arquivo gerado em uma hora de gravação é 22,5 GB.

7. De acordo com a atividade anterior, uma gravação de 1 hora de duração na resolução 4K gera um arquivo que ocupa 22,5 GB. Logo, um filme com 4 horas de duração irá gerar um arquivo de:

$\underbrace{22{,}5}_{\text{Tamanho do arquivo de 1 hora}} \cdot \underbrace{4}_{\text{Tempo de gravação}} = 90$

Assim, o filme com 4 horas de duração teria um tamanho de 90 GB. Como a taxa de transferência é 90 GB/s, o arquivo completo demoraria 1 segundo para ser transferido.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 207)

8. A trajetória do robô consiste em percorrer um segmento vertical para cima com 1 unidade de comprimento e 2 segmentos horizontais para a direita, cada um com 1 unidade de comprimento. Como o robô leva 1 segundo para percorrer 1 unidade, ele gasta, respectivamente, 1 segundo para se movimentar na vertical e 2 segundos para se mover na horizontal.

Em outras palavras, em 3 segundos ele caminha 1 segmento vertical para cima e 2 segmentos horizontais para a direita. Contando a partir do ponto A, isso significa que, para uma trajetória de 18 segundos, é possível que o robô execute 6 conjuntos de movimentos (1 segmento para cima e 2 segmentos para a direita).

As coordenadas do ponto A são (2, 0). Partindo da abscissa $x = 2$ e percorrendo 6 conjuntos de 2 segmentos para a direita ($6 \cdot 2 = 12$), o robô terá abscissa $x = 2 + 12 = 14$. Iniciando na ordenada $y = 0$ e andando 6 conjuntos de 1 segmento para cima ($6 \cdot 1 = 6$), a nova ordenada do robô será $y = 0 + 6 = 6$.

Logo, as novas coordenadas do robô são $A'(14, 6)$.

Alternativa **a**.

9. Sim. A trajetória do robô segue um algoritmo, como um passo a passo, uma vez que ele sempre se locomove seguindo uma mesma estrutura a partir do ponto $A(2,0)$. Por exemplo:

- Percorrer a distância de uma unidade na direção vertical no sentido de baixo para cima;
- Girar 90° no sentido horário;
- Percorrer a distância de duas unidades na direção horizontal no sentido esquerda para a direita;
- Girar 90° no sentido anti-horário;
- Repetir essa sequência de passos.

10. Resposta pessoal.

11. **a)** Segundo a regra de Alice, temos as seguintes etapas:

- Multiplicar cada um dos dígitos (excluindo o dígito verificador) por 1 e 2, alternadamente em sequência, começando por 1:

Dígito	1	1	1	1	1	1
Fator	1	2	1	2	1	2
Resultado	1	2	1	2	1	2

- Adicionar os resultados obtidos:
  $1 + 2 + 1 + 2 + 1 + 2 = 9$
- Dividir o último resultado por 10:
  $\frac{9}{10} = 0{,}9$
- Arredondar o quociente obtido para o inteiro inferior mais próximo:
  $0{,}9 \rightarrow 0$
- Adicionar 1 ao inteiro obtido:
  $0 + 1 = 1$
- Multiplicar esse último resultado por 10:
  $1 \cdot 10 = 10$
- Para encontrar o dígito verificador, basta subtrair do resultado obtido na etapa anterior a soma obtida inicialmente, correspondente à adição dos produtos de cada um dos dígitos multiplicados por 1 e 2, em sequência e alternadamente:
  $10 - 9 = 1$

Portanto, o dígito verificador do código (x) criado por Alice é 1 e o código de barras completo é 111111-1.

b) Seguindo as etapas do código de Alice, temos:

- Multiplicar cada um dos dígitos (excluindo o dígito verificador) por 1 e 2, alternadamente e em sequência, começando por 1:

Dígito	5	3	y	2	9	3
Fator	1	2	1	2	1	2
Resultado	5	6	y	4	9	6

- Adicionar os resultados obtidos:
  $5 + 6 + y + 4 + 9 + 6 = 30 + y$
- Dividir o último resultado por 10:
  $\frac{30 + y}{10} = 3 + \frac{y}{10}$
- Arredondar o quociente obtido para o inteiro inferior mais próximo:
  Como y é um número entre 0 e 9, a fração $\frac{y}{10}$ é um número sem parte inteira, entre 0 e 1. Logo, o resultado da soma $3 + \frac{y}{10}$ encontrada na etapa anterior tem como número inteiro inferior o próprio 3. Podemos dizer que:
  $3 + \frac{y}{10} \rightarrow 3$
- Adicionar 1 ao inteiro obtido:
  $3 + 1 = 4$
- Multiplicar esse último resultado por 10:
  $4 \cdot 10 = 40$
- Para encontrar o dígito verificador, basta subtrair do resultado obtido na etapa anterior a soma obtida inicialmente, correspondente à adição dos produtos de cada um dos dígitos multiplicados por 1 e 2, em sequência e alternadamente. Como o dígito verificador é 7 (dado no enunciado), temos:
  $40 - (30 + y) = 7$
  $40 - 30 - y = 7$
  $10 - 7 = y$
  $y = 3$

Portanto, o dígito (y) é 3. Logo, o código de barras completo é 533293-7.

TECNOLOGIA (P. 207)

1.

Script (Comando)	Descrição
	Executa as ações quando a bandeira for clicada (inicia a sequência).
	Posiciona a personagem na posição (0, 0).
	Posiciona a personagem perpendicularmente ao eixo horizontal.
	Limpa os rastros deixados anteriormente.
	Faz com que a personagem exiba o rastro ao movimentar-se.
	Movimenta a personagem 100 passos para a frente.
	Rotaciona a personagem 90 graus no sentido horário.

Imagens: Scratch. Fac-símile: ID/BR

2. **a)** Os estudantes deverão usar os mesmos blocos de comandos propostos na atividade e obter o mesmo desenho da etapa 3, um quadrado. O programa, porém, deverá ser construído de maneira diferente da que está escrita nessa etapa da seção.

Ao inserir os comandos "gire 90 graus" no sentido horário e "mova 100 passos" no comando "repita 4 vezes", Paula otimizou a escrita de seu programa, economizando passos e solicitando ao *software* que reproduzisse os comandos do bloco "repita" o número de vezes que ela informou.

b) Se o comando de "espere" é retirado, não é possível acompanhar as etapas do desenho sendo feitas, pois assim que a bandeira verde for clicada, a personagem executará os comandos instantaneamente e o quadrado aparecerá na tela.

c) Existem algumas possibilidades de alterações na ordem dos comandos sem interferência no resultado. A seguir, serão apresentadas algumas.

O comando "apague tudo" pode aparecer logo no começo da sequência, pois ele serve apenas para garantir que o novo desenho não seja feito sobre algum desenho feito anteriormente.

O comando "use a caneta" e o comando "apague tudo" podem variar de posição conforme os exemplos a seguir.

Imagens: Scratch. Fac-símile: ID/BR





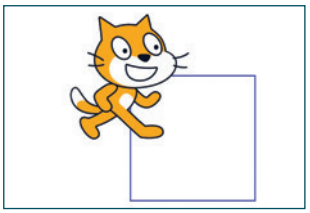


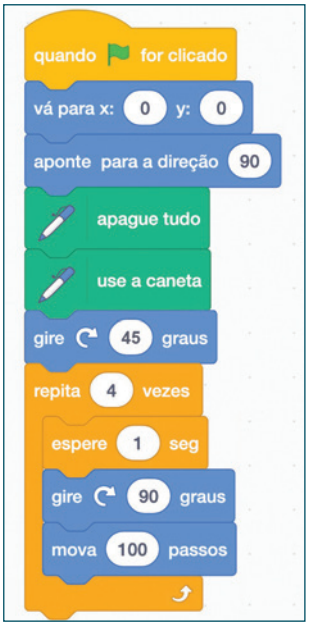
d) No algoritmo elaborado por Paula, o comando "repita 4 vezes" economiza a utilização dos comandos "gire 90 graus" e "mova 100 passos" que se repetem na terceira etapa da seção.

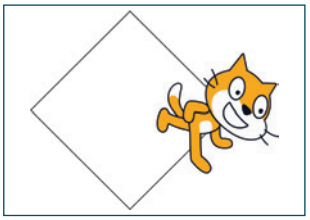
3. Resposta pessoal. Alguns exemplos de diferentes combinações de comandos para fazer um quadrado são apresentados a seguir.

Imagens: Scratch. Fac-símile: ID/BR









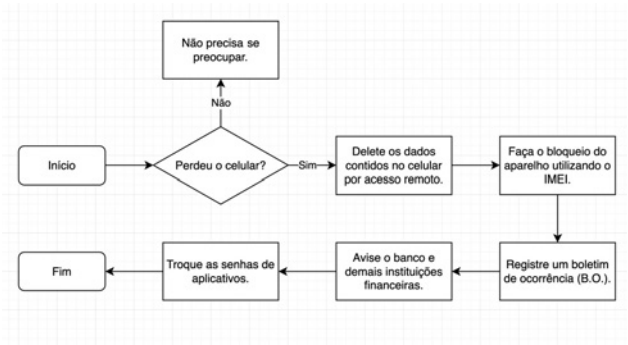
TECNOLOGIA (P. 213)

1. **a)** O vendedor precisa tomar três decisões:
- O cliente tem cadastro?
- O produto está disponível?
- O cliente aceitou o outro produto?

b) Informar ao cliente sobre a indisponibilidade do produto e oferecer um produto alternativo.

2. Mostre aos estudantes como utilizar o **Draw.io** para criar fluxogramas, explicando os principais elementos, como início/fim, processos (ações) e decisões (pontos de escolha).

A seguir, uma possível resposta:



Draw.io. Fac-símile: ID/BR

3. Resposta pessoal.

TECNOLOGIA (P. 216)

1. **a)** O valor do 8º termo foi 152.

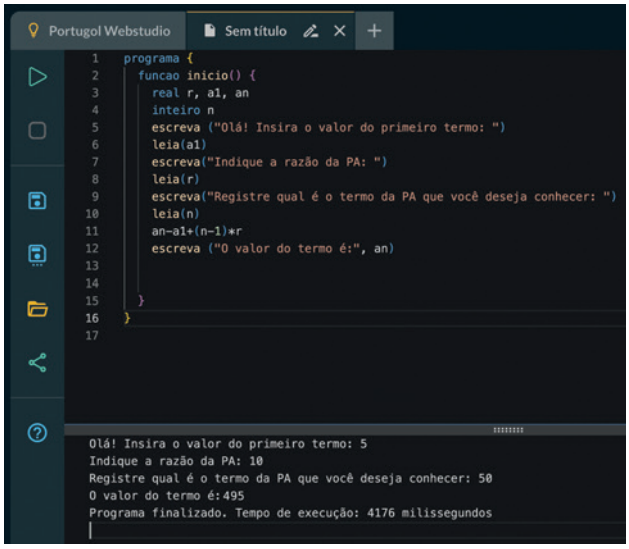
b) O primeiro termo da PA é 12 e sua razão é 20. O 8º termo é o 1º termo mais 7 vezes a razão, conforme a fórmula do termo geral de uma PA:

$a_8 = a_1 + 7r = 12 + 7 \cdot 20 = 152$

Logo, o valor apresentado pelo programa está correto.

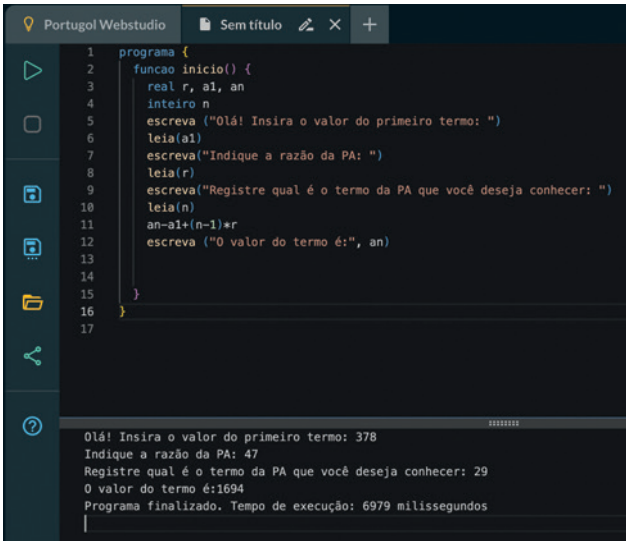
c) $12 + 7 \cdot 20$

2. **a)** 495



Portugol. Fac-símile: ID/BR

b) 1 694



Portugol. Fac-símile: ID/BR

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 219)

12. Os seguintes significados podem ser encontrados para os símbolos propostos.

A: Dados, utilizado para inserir dados (variáveis) no programa.

B: Documento, utilizado para exibir um relatório (documento) com valores elaborados pelo programa.

C: Operação Manual, muito usado para repetir um procedimento no programa.

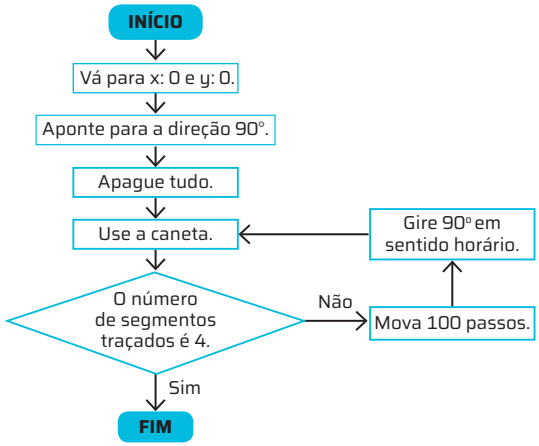
D: Entrada Manual, usado pelo usuário para ler dados.

E: Conector, utilizado para unir o resultado entre dois símbolos no programa.

Caso os estudantes encontrem outros símbolos utilizados em fluxogramas, peça a eles que anotem seu significado e compartilhem com os demais colegas.

13. Uma possível representação do algoritmo desenvolvido anteriormente para a obtenção do quadrado pode ser vista na imagem a seguir.

É importante que o primeiro elemento do fluxograma (início) e o último (fim) sejam o símbolo com cantos arredondados. Os comandos que devem ser executados devem aparecer em sequência entre o início e o fim, dentro de retângulos. Para a repetição do bloco de comandos que faz os lados do quadrado, é possível usar o losango para que seja tomada a decisão de continuar a repetição ou de encerrar o programa.



14. Quando a cooperativa recebe uma fruta de 320 gramas, essa fruta terá um, e somente um, dos destinos a seguir:

I. Se a aparência da casca e a rigidez da fruta estiverem normais, então ela será enviada para exportação.

II. Se a aparência da casca ou a rigidez da fruta não estiver normal, e a fruta estiver podre, então ela será enviada para compostagem.

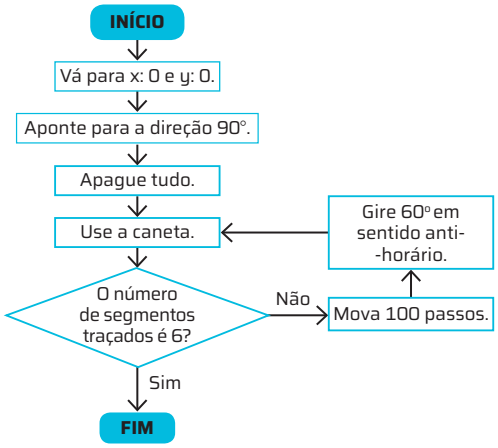
III. Se a aparência da casca ou a rigidez da fruta não estiver normal, e a fruta não estiver podre, então ela será enviada para a fábrica de geleias.

Analisando-se as opções de resposta e as conclusões I, II e III, necessariamente, a fruta não será enviada para comercialização no mercado interno.

Alternativa **c**.

15. **a)** Um polígono regular é uma figura plana fechada cujos lados têm todos a mesma medida. Todos os ângulos (internos ou externos) formados entre dois lados consecutivos também têm mesma medida.

b) Uma possibilidade de fluxograma para a construção de um hexágono regular pode ser observada na figura a seguir.

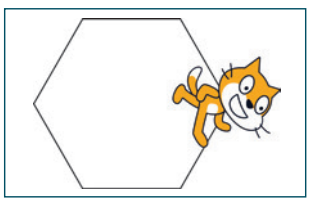


c) Um hexágono regular pode ser construído no Scratch com o seguinte *script*.



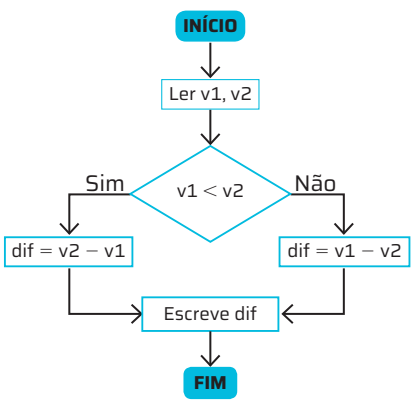
Scratch. Fac-símile: ID/BR

O resultado esperado para esse código está apresentado na figura a seguir.



Scratch. Fac-símile: ID/BR

16. O fluxograma que representa o programa "diferença entre dois números" pode ser assim:



17. **a)** Falsa, pois os fluxogramas podem representar fenômenos associados à vida.

b) Falsa, pois não é possível prever a vida futura das pessoas por meio de um fluxograma.

c) Verdadeira, pois apesar das vantagens do uso do fluxograma, existem limitações de acordo a complexidade do fenômeno envolvido e com as possibilidades diante de uma única etapa.

d) Falsa, mesmo fenômenos complexos podem ser representados por meio de fluxogramas.

e) Falsa, pois não é possível determinar com exatidão o futuro por meio de um fluxograma.

Alternativa **c**.

18. A partir do início do fluxograma, vamos seguir os testes de decisões:

- No primeiro teste do fluxograma ($D > 5\%$), como $D = 1{,}2\%$ e $1{,}2\% < 5\%$, a saída é **Não** e o fluxo segue para o segundo teste.
- No segundo teste do fluxograma ($D > 3\%$), como $D = 1{,}2\%$ e $1{,}2\% < 3\%$, a saída também é **Não**. Logo, a cor azul é escolhida e o terceiro teste é realizado.
- No terceiro teste do fluxograma ($D > 1\%$), como $D = 1{,}2\%$ e $1{,}2\% > 1\%$, a saída é **Sim**. Logo, o componente receberá um selo azul com a classificação "2ª Classe".

Alternativa **d**.

19. Analisemos cada uma das alternativas separadamente:

a) Correta, pois, de acordo com o fluxograma, a diminuição da quantidade de árvores causa uma redução na quantidade de chuvas, aumentando a inflamabilidade da floresta.

b) Correta, pois, ao observar o fluxograma, é possível verificar que a diminuição da quantidade de árvores implica a redução da evapotranspiração que vem das plantas, influenciando na redução das chuvas.

c) Correta, pois a queimada das árvores impacta na diminuição das chuvas, aumentando a inflamabilidade da floresta e, novamente, ampliando as queimadas.

d) Incorreta, pois o fenômeno El Niño ocorre devido à diminuição dos ventos alísios, que são responsáveis por trazerem umidade para regiões mais secas. Segundo o fluxograma, ele é outro fator que, junto com a redução de chuvas, colabora para o aumento da inflamabilidade florestal.

Alternativa **d**.

20. Comparando os fluxogramas, nota-se que o fluxograma I refere-se ao fenômeno conhecido por efeito estufa, enquanto o fluxograma II trata do processo de manutenção da temperatura global exercido pela camada de ozônio. Analisando as alternativas temos:

a) Verdadeira, pois, enquanto o efeito estufa tende a aumentar a temperatura terrestre, a camada de ozônio faz a manutenção do clima terrestre, evitando o superaquecimento global.

b) Falsa, pois tais fenômenos ocorrem em escala global, e não local como a alternativa afirma.

c) Verdadeira, pois ambos os fluxogramas mostram o impacto das ações humanas sobre o clima global.

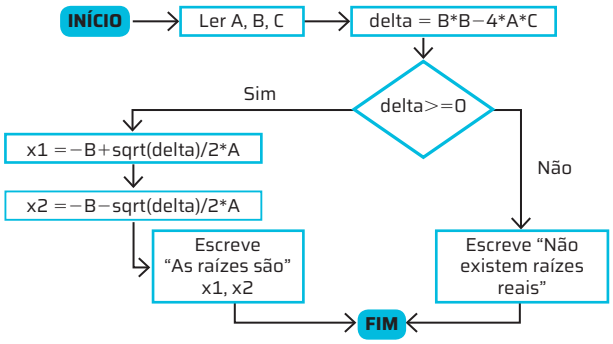
d) Verdadeira, pois os processos envolvidos são complexos e requerem conclusões mais elaboradas.

Alternativa **b**.

21. a)

Comando	Função
/*Algoritmo Raizes	É apenas um comentário. Os símbolos /* indicam que esta linha não deve ser lida pelo compilador (programa que roda o código).
A, B, C: real	Cria as variáveis A, B e C e atribui a característica de números reais a elas.
Delta, x1, x2: real	Cria as variáveis Delta, x1 e x2 e atribui a característica de números reais a elas.
Inicio	Começa a executar o código.
{Leitura de dados}	Comentário da etapa.
Leia (A, B, C)	Recebe os valores de A, B e C.
{Calculo do discriminante}	Comentário da etapa.
Delta = B*B - 4*A*C	Usa os valores de A, B e C para executar o cálculo de Delta e armazena esse valor
{Teste do discriminante}	Comentário da etapa.
Se (Delta >= 0) entao	Verifica se Delta é maior ou igual a zero. Se for, segue para as etapas seguintes de cálculo de x1 e x2.
{Calculo das raizes}	Comentário da etapa.
x1 = (-B + sqrt(Delta))/(2*A)	Calcula x1 a partir dos valores de A, B e Delta.
x2 = (-B - sqrt(Delta))/(2*A)	Calcula x2 a partir dos valores de A, B e Delta.
Escreva ("As raízes são:", x1, x2)	Exibe x1 e x2 calculadas nas etapas anteriores apresentando a mensagem: "As raízes são:"
Senao	Se, no cálculo de Delta, Delta for menor que zero, então aparece a mensagem: "Não existem raízes reais".
Escreva ("Não existem raízes reais.")	
Fim	Para de executar o código.

b) Uma possibilidade de fluxograma é:



22. a) Sejam f, g e h, respectivamente, as funções definidas por:

$f(x) = \sqrt{x} - 1$

$g(x) = 2x^{-2} = \frac{2}{x^2}$

$h(x) = (x + 2)^{\frac{1}{3}}$

Analisando $f(x)$, há a condição de x ser positivo ou igual a zero, pois é a condição para que ele seja o radicando de $\sqrt{x}$.

Em $g(x)$, o denominador x^2 precisa ser um número diferente de 0 devido à condição do denominador; portanto, x não pode ser zero.

Em $h(x)$ não há nenhum tipo de restrição para o valor de x.

Temos que o domínio de cada uma das funções é dado por:

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$

$D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$

$D(h) = \mathbb{R}$

Apesar de o domínio de g não admitir a possibilidade de $x = 0$, o teste $\sqrt{x} - 1 > 1$ já elimina o valor $x = 0$. Portanto, o programa descrito pelo fluxograma é executável apenas para $x \geqslant 0$.

b) Elaborando uma tabela para os valores solicitados, temos:

	$x = 0$	$x = 4$	$x = 9$
$\sqrt{x} - 1$	$f(0) = \sqrt{0} - 1 = -1$	$f(4) = \sqrt{4} - 1 = 2 - 1 = 1$	$f(9) = \sqrt{9} - 1 = 3 - 1 = 2$
Decisão: $\sqrt{x} - 1 > 1$?	Não	Não	Sim
Função a ser usada	$h(x) = (x + 2)^{\frac{1}{3}}$	$h(x) = (x + 2)^{\frac{1}{3}}$	$g(x) = \frac{2}{x^2}$
Saída	$h(0) = (0 + 2)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$	$h(4) = (4 + 2)^{\frac{1}{3}} = 6^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{6}$	$g(9) = \frac{2}{9^2} = \frac{2}{81}$

CÁLCULO RÁPIDO (P. 223)

1. a) $2{,}25 - 0{,}75 = 1{,}5$

b) $-5{,}9 + 2{,}3 = -3{,}6$

c) $0{,}5 + 0{,}25 - 1{,}25 = -0{,}5$

d) $1 + 0{,}3 - 2 \cdot 0{,}75 = -0{,}2$

e) $-4 \cdot 0{,}25 + 0{,}75 = -0{,}25$

f) $3 \cdot (-0{,}25) + 1{,}75 - 2 = -1$

2. a) $\frac{\pi}{4} = \frac{180°}{4} = 45°$

$\frac{\pi}{3} = \frac{180°}{3} = 60°$

$\frac{3\pi}{4} = \frac{3 \cdot 180°}{4} = 3 \cdot 45° = 135°$

$\frac{2\pi}{3} = \frac{2 \cdot 180°}{3} = 2 \cdot 60° = 120°$

$\frac{\pi}{6} = \frac{180°}{6} = 30°$

$\frac{5\pi}{6} = \frac{5 \cdot 180°}{6} = 5 \cdot 30° = 150°$

b) $10° = \frac{180°}{18} = \frac{\pi}{18}$

$15° = \frac{180°}{12} = \frac{\pi}{12}$

$20° = \frac{180°}{9} = \frac{\pi}{9}$

$540° = 3 \cdot 180° = 3\pi$

3. a) O ângulo x é oposto pelo vértice ao ângulo y; logo, eles têm a mesma medida. Como y é correspondente ao ângulo de medida 120°, então $y = 120°$ e $x = 120°$.

b) Observando a figura, o ângulo y é suplementar ao ângulo de 100°; logo, a soma dos dois equivale a 180°. Temos, então:

$100° + y = 180°$

$y = 80°$

Como x é correspondente ao ângulo de 100°, então $x = 100°$.

4. a) Observando a figura, o ângulo x é suplementar ao ângulo de y; logo:

$x + y = 180°$

O ângulo y é suplementar ao ângulo de 50°; logo:

$50° + y = 180°$

$y = 130°$

Como $x + y = 180°$, então:

$x + 130° = 180°$

$x = 50°$

Portanto, $x = 50°$ e $y = 130°$.

b) O ângulo x é suplementar ao ângulo de 70°; logo:

$x = 180° - 70° = 110°$.

Como x e y são correspondentes, eles têm a mesma medida. Logo, $x = 110°$ e $y = 110°$.

PARA RECORDAR (P. 224)

1. a) O gráfico da função é uma reta; logo se trata de uma função afim. Para encontrar uma função afim, uma das possibilidades é encontrar os parâmetros por meio de dois pontos dados. Na figura, são dados os pontos (0, 3) e (5, 0). Dessa forma, tem-se:

$f(x) = ax + b$

$f(0) = a \cdot 0 + b$

$3 = 0 + b$

$b = 3$

$f(x) = ax + b$

$f(5) = a \cdot 5 + 3$

$0 = a \cdot 5 + 3$

$5a = -3$

$a = -\frac{3}{5}$

Portanto, a função f é definida como:

$f(x) = -\frac{3}{5}x + 3$

b) Para estudar o sinal de uma função, há que saber para que valores de x, a função assume valores positivos, negativos ou zero. Assim:

- $f(x) > 0$

  $-\frac{3}{5}x + 3 > 0$

  $3 > \frac{3}{5}x$

  $15 > 3x$

  $5 > x$

  $x < 5$

- $f(x) < 0$

  $-\frac{3}{5}x + 3 < 0$

  $3 < \frac{3}{5}x$

  $15 < 3x$

  $5 < x$

  $x > 5$

- $f(x) = 0$

  $-\frac{3}{5}x + 3 = 0$

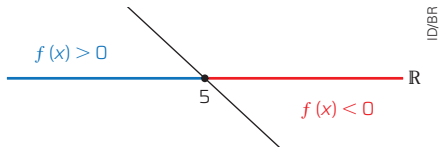
  $3 = \frac{3}{5}x$

  $15 = 3x$

  $5 = x$

  $x = 5$

Graficamente, tem-se:



Portanto:

$\begin{cases} f(x) = 0, \text{ se } x = 5 \\ f(x) > 0, \text{ se } x < 5 \\ f(x) < 0, \text{ se } x > 5 \end{cases}$

c) Como se trata de uma função afim, o gráfico é uma reta, que, por ser função, é contínua. Logo, o domínio e a imagem da função abarcam todos os números reais.

$D(f) = Im(f) = \mathbb{R}$

2. Nessa questão, podemos representar a situação por um triângulo retângulo em que o ângulo de depressão é de 60°, o cateto oposto à 60° é a altura da torre (50 m), e precisamos encontrar a distância horizontal d (cateto adjacente à 60°) entre a plataforma e o barco. Assim, temos que:

$\text{tg } 60° = \frac{50}{d}$

$\sqrt{3} = \frac{50}{d}$

$d = \frac{50}{1{,}73}$

$d = 28{,}9$

Portanto, a distância do barco à plataforma é de aproximadamente 28,9 metros.

3. Sejam as quantidades de embalagens definidas como: n para embalagens de 2 L, s para embalagens de 20 L e t para embalagens de 10 L. O primeiro passo é transformar as informações do texto em equações.

- Foram comprados 94 L de água:
  $2n + 20s + 10t = 94$
- O custo total é de R$ 65,00, e a partir dos dados da tabela:
  $3n + 10s + 6t = 65$
- O número de embalagens de 10 L corresponde ao dobro do número de embalagens de 20 L:
  $t = 2s$

Assim, obtemos um sistema de equações lineares com três equações e três incógnitas.

$$\begin{cases} 2n + 20s + 10t = 94 \\ 3n + 10s + 6t = 65 \\ t = 2s \end{cases}$$

Para resolver esse sistema, pode-se simplificar a primeira equação dividindo todos os termos por 2:

$$\begin{cases} n + 10s + 5t = 47 \\ 3n + 10s + 6t = 6 \\ t = 2s \end{cases}$$

Substituindo a terceira equação na primeira e segunda, tem-se:

$$\begin{cases} n + 10s + 5 \cdot 2s = 47 \\ 3n + 10s + 6 \cdot 2s = 65 \\ t = 2s \end{cases}$$

$$\begin{cases} n + 20s = 47 \\ 3n + 22s = 65 \\ t = 2s \end{cases}$$

As duas primeiras equações compõem um sistema. Multiplicando a primeira equação por -3 e somando com a segunda equação, elimina-se uma das incógnitas:

$$\begin{cases} -3n + -3 \cdot 20s = -3 \cdot 47 \\ 3n + 22s = 65 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3n - 60s = -141 \\ 3n + 22s = 65 \end{cases}$$

$-38s = -76$

$s = 2$

Com o valor de s, calcula-se o valor de t, por conseguinte, o valor de n:

$t = 2 \cdot 2 = 4$

$3n + 10s + 6t = 65$

$3n + 10 \cdot 2 + 6 \cdot 4 = 65$

$n = 7$

Portanto, são 7 embalagens de 2 L.

Alternativa **c**.

4. Com base no gráfico apresentado, analisam-se as seguintes afirmações:

I. Verdadeira, pois, no intervalo citado, o valor da função permanece o mesmo, igual a 1,5.

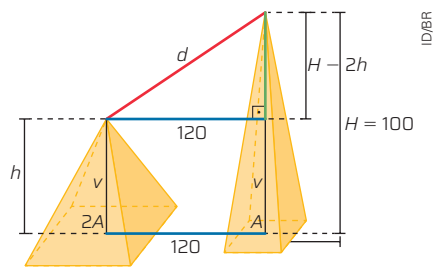
II. Falsa, pois, como cos 0 = 1, então $f(0) = 3$, o que não condiz com o ponto (0, 0) do gráfico.

III. Falsa, pois, no intervalo citado, a função é decrescente, então $m < 0$.

IV. Verdadeira, pois $f(t_2) = 2$, valor máximo de f.

Alternativa **b**.

5. Observe a figura.



ID/BR

Duas pirâmides de volume V, uma com base de área $2A$ e altura h e a outra com base de área A e altura H, com centros da base a 120 m de distância. Nota-se que a distância d, entre os vértices da pirâmide, forma um triângulo retângulo com a projeção ortogonal da distância entre os centros da base e a diferença entre as alturas das pirâmides, e que a altura da maior mede 100 m. Escrevendo as fórmulas do volume das pirâmides, tem-se:

$V = \frac{2Ah}{3}$ e $V = \frac{AH}{3}$

$\frac{2Ah}{3} = \frac{AH}{3}$

$H = 2h$

$100 = 2h$

$h = 50$

$H - h = 100 - 50 = 50$

Assim, tem-se um triângulo retângulo cujos catetos medem 120 e 50 e se quer encontrar a hipotenusa. Então:

$120^2 + 50^2 = d^2$

$14\,400 + 2\,500 = d^2$

$16\,900 = d^2$

$d = 130$

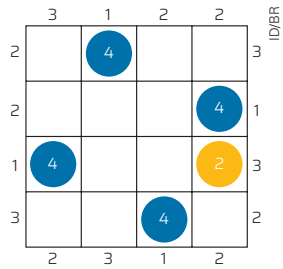
Alternativa **c**.

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO (P. 225)

1. Ao observar as setas que partem de e que chegam a cada irmã, conclui-se que a irmã mais velha é aquela que não tem nenhuma seta partindo de si na direção de outra irmã (o que indica que ela não é mais nova que ninguém). A única irmã que satisfaz essa condição é Celina, portanto, ela é a mais velha de todas.

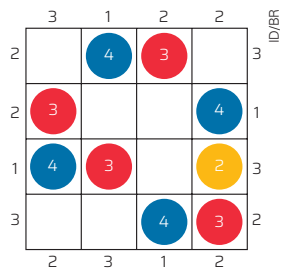
Alternativa **c**.

2. Um prédio de 4 andares bloqueia a visão das pessoas para os demais prédios (localizados atrás dele na fileira). Sendo assim, pode-se começar a preencher o quadriculado com os prédios de 4 andares mais próximos das extremidades, observando a quantidade de prédios que a pessoa vê: uma pessoa que olha frontalmente uma fileira de prédios poderá ver apenas um, caso o primeiro prédio tenha 4 andares (impossibilitando a visão dos prédios atrás dele).



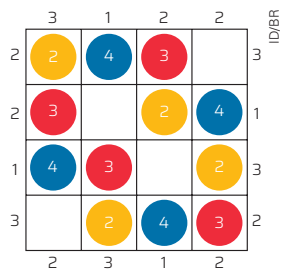
ID/BR

Olhando agora para as fileiras em que só se pode ver 2 prédios e pensando que os prédios de 3 andares só permitem ver os de 4 andares atrás deles, podemos concluir que:



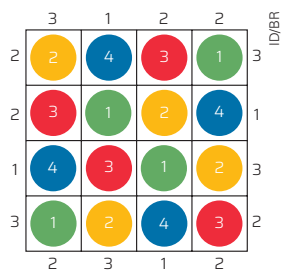
ID/BR

Fazemos o mesmo para os prédios de 2 andares e suas possíveis posições, sabendo que eles escondem apenas os prédios de 1 andar.



ID/BR

Os lugares que sobram são para os prédios de apenas 1 andar. Dessa forma, a grade se completa da seguinte maneira:



ID/BR

Desse modo, podemos concluir que $A = 1$, $B = 2$ e $C = 3$. Substituindo esses valores na expressão da atividade, temos:

$3A + 4B + 2C = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 3$

$3A + 4B + 2C = 17$

Alternativa **b**.

MATEMÁTICA E TECNOLOGIA (P. 226)

Conectando ideias

1. Respostas pessoais.

Os estudantes podem citar, além do exemplo de *chatbot* mencionado no texto-base, androides e ciborgues em filmes, séries, livros e revistas, brinquedos eletrônicos, assistentes de *smartphones* e muitos outros exemplos. Na segunda parte da resolução, caso julgue necessário e interessante, você pode convidar os professores de História, Filosofia ou Sociologia da escola para discutir, entre outros aspectos, como serão as profissões do futuro, de que maneira esses trabalhos serão executados, quais devem ser as qualificações dos profissionais, como pode ser feito o pagamento ou mesmo se existirá emprego para todos. Nesse momento, você também pode indicar o vídeo sugerido no boxe *Para explorar* como forma de os estudantes conhecerem diferentes pontos de vista sobre o assunto.

2. Na resolução dessa atividade, solicite aos estudantes que anotem termos e expressões desconhecidos para pesquisarem em seguida, ou, ainda, compartilharem com a classe, solicitando que uns auxiliem os outros na resolução de possíveis questionamentos. Perceba de que maneira eles reagem à atividade, se demonstram alguma resistência ou se têm outras dificuldades além do idioma. Para complementar a execução da tarefa, você pode questioná-los, por exemplo, como o idioma poderia ser alterado e se eles conseguem ler e interpretar a linguagem de programação.

POR DENTRO DO ENEM E DOS VESTIBULARES (P. 230)

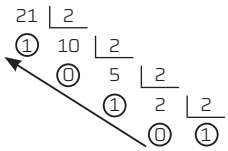
1. $1{,}5\ GB = 1{,}5 \cdot 1024\ MB = 1536\ MB$

Como a velocidade de *download* é de 20 MB/s, tem-se:

$\frac{1536}{20} = 76{,}8$

Alternativa **c**.

2. Como $9 + 12 = 21$ na base decimal, basta transformar esse valor na base binária:



$10\,101_{2} = 21$

Alternativa **d**.

3. Ao executar o código para res = 1, tem-se:

$res = 1$

$res = 3 \cdot 1 = 3$

$res = 3 + 1 = 4$

$res = 2 \cdot 4 = 8$

$res = 8 + 1 = 9$

$res = 2 \cdot 9 = 18$

$res = 18 + 1 = 19$

$res = 2 \cdot 19 = 38$

$res = 38 - 5 = 33$

Alternativa **d**.

UNIDADE 4 SISTEMAS LINEARES E MATRIZES

CAPÍTULO 9 SISTEMAS LINEARES

TECNOLOGIA (P. 239)

1. $\begin{cases} -3x + 4y = 23 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x + 4y = 23 \\ 2x + y = 3 \quad \cdot(-4) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -3x + 4y = 23 \\ -8x - 4y = -12 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow -11x = 11 \Rightarrow x = -\frac{11}{11} \Rightarrow x = -1$

Substituindo x na segunda equação, temos que:

$2(-1) + y = 3 \Rightarrow -2 + y = 3 \Rightarrow y = 5$

Portanto, $S = \{(-1, 5)\}$.

2. **a)** $\begin{cases} -2x + 3y = -3 \\ x + 5y = 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 3y = -3 \\ x + 5y = 21 \quad \cdot(2) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -2x + 3y = -3 \\ 2x + 10y = 42 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 13y = 39 \Rightarrow y = \frac{39}{13} \Rightarrow y = 3$

Substituindo y na segunda equação, temos que:

$x + 5 \cdot (3) = 21 \Rightarrow x + 15 = 21 \Rightarrow x = 6$

Portanto, $S = \{(6, 3)\}$.

b) $\begin{cases} 3x + y = 0 \\ 6x + 2y = 22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + y = 0 \quad \cdot(-2) \\ 6x + 2y = 22 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -6x - 2y = 0 \\ 6x + 2y = 22 \end{cases} \Rightarrow 0x + 0y = 22$

Observe que, para qualquer valor de x e y, a sentença obtida nunca será satisfeita, pois o primeiro membro sempre será $0 \neq 22$. Portanto, o sistema não admite solução ($S = \varnothing$).

c) $\begin{cases} -2x + y = -15 \\ 6x - 3y = 45 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -2x + y = -15 \quad \cdot(3) \\ 6x - 3y = 45 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -6x + 3y = -45 \\ 6x - 3y = 45 \end{cases} \Rightarrow 0x + 0y = 0$

Portanto, o sistema não admite solução ($S = \varnothing$).

d) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 7x + 9y = -13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 1 \quad \cdot(-7) \\ 7x + 9y = -13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -7x - 14y = -7 \\ 7x + 9y = -13 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow -5y = -20 \Rightarrow y = \frac{20}{5} \Rightarrow y = 4$

Substituindo y na primeira equação, temos que:

$x + 2 \cdot (4) = 1 \Rightarrow x + 8 = 1 \Rightarrow x = -7$

Portanto, $S = \{(-7, 4)\}$.

3. $\begin{cases} x + y = 7 \\ 50x + 20y = 230 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 7 \quad \cdot(-50) \\ 50x + 20y = 230 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -50x - 50y = -350 \\ 50x + 20y = 230 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow -30y = -120 \Rightarrow y = \frac{120}{30} \Rightarrow y = 4$

Substituindo y na primeira equação, temos que: $x + 4 = 7 \Rightarrow x = 3$

Portanto, $S = \{(3, 4)\}$.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 243)

1. Vamos representar a quantidade de livros que Augusto recebeu por a e a quantidade de livros que Bárbara recebeu por b. Dessa maneira, obtemos o seguinte sistema de equações lineares:

$\begin{cases} a + b = 12 \\ a + 3 = 2b \end{cases}$

Isolando a incógnita a na primeira equação, temos:

$a + b = 12 \Rightarrow a = 12 - b$

Substituindo a por $12 - b$ na segunda equação:

$12 - b + 3 = 2b \Rightarrow b = 5$

Então, Bárbara recebeu 5 livros, e Augusto, 7.

Alternativa **c**.

2. Vamos representar o número de televisores por t, o de computadores por c e o de dispositivos eletrônicos portáteis por p. Dessa maneira, é possível representar a situação pelo seguinte sistema de equações lineares:

$\begin{cases} p + c + t = 183 \\ c = 3t + 1 \\ p = \frac{c}{2} \end{cases}$

Substituindo o valor da segunda equação na terceira, temos:

$p = \frac{c}{2} \Rightarrow p = \frac{3t + 1}{2}$

Utilizando os valores de c e p na primeira equação, temos:

$\frac{3t + 1}{2} + 3t + 1 + t = 183 \Rightarrow t = 33$

Portanto, foram doados 33 televisores.

Alternativa **a**.

3. Representando o número de pacientes dos grupos por x e y, podemos representar a situação da seguinte maneira:

$x + y = 2438$
30% de x + 50% de $y = 921$
Ou seja, obtemos o seguinte sistema de equações lineares:

$\begin{cases} x + y = 2438 \\ 0{,}3x + 0{,}5y = 921 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 2438 & \cdot(-3) \\ 0{,}3x + 0{,}5y = 921 & \cdot(10) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow + \begin{cases} -3x - 3y = -7314 \\ 3x + 5y = 9210 \end{cases}$

$2y = 1896$
$y = 948$

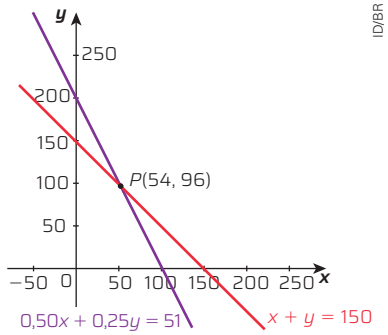
Dessa maneira, o número de pacientes do grupo y é 948 e do grupo x é 1 490, pois 2 438 − 948 = 1 490.

Alternativa **d**.

4. Representando o número de homens por x e o número de mulheres por y, obtemos o seguinte sistema de equações lineares:

$\begin{cases} x + y = 150 \\ 0{,}50x + 0{,}25y = 51 \end{cases}$

Representando essas equações no plano e determinando as coordenadas do ponto de intersecção entre elas, temos:



ID/BR

Como as coordenadas do ponto de intersecção são $P(54, 96)$, isso significa que há 54 homens e 96 mulheres entre os estudantes. Calculando o número de mulheres que falam espanhol, temos:

$\underbrace{25\%}_{\substack{\text{porcentagem de estudantes mulheres que falam espanhol}}} \cdot \underbrace{96}_{\substack{\text{total de estudantes mulheres}}} = 0{,}25 \cdot 96 = \underbrace{24}_{\substack{\text{mulheres que falam espanhol}}}$

Alternativa **d**.

5. $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x - y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x - y = 5 \cdot (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 4 \\ 6x - 2y = 10 \end{cases} \Rightarrow x = 2$

Substituindo x na equação, temos:

$x + 2y = 4 \Rightarrow 2 + 2y = 4 \Rightarrow 2y = 4 - 2 \Rightarrow 2y = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{2} \Rightarrow y = 1$

Analisando as alternativas, os gráficos que contêm o ponto de intersecção $P(2, 1)$ são os das alternativas **d** e **e**. Como a primeira equação desse sistema linear é a equação de uma reta, com coeficiente linear igual a 2 ($y = -\frac{1}{2}x + 2$), podemos concluir que a reta cruza o eixo y no ponto de coordenada (0, 2).

Portanto, alternativa **e**.

6. Resposta pessoal. Exemplo de resposta:

Uma possível resolução está representada a seguir pelas retas r e s, cujas equações são, respectivamente, $-x + 2y = 1$ e $7x + 5y = -6$.

Resolvendo o sistema:

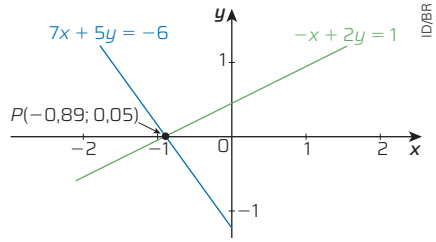
$\begin{cases} -x + 2y = 1 & \cdot(7) \\ 7x + 5y = -6 \end{cases} \Rightarrow + \begin{cases} -7x + 14y = 7 \\ 7x + 5y = -6 \end{cases}$

$19y = 1$
$y = \frac{1}{19}$

Determinando o valor da variável x, temos:

$-x + 2 \cdot \frac{1}{19} = 1 \Rightarrow -x = 1 - \frac{2}{19} \Rightarrow x = -\frac{17}{19}$

Conferindo as coordenadas do ponto de intersecção com o comando "Exibir valor", temos:



ID/BR

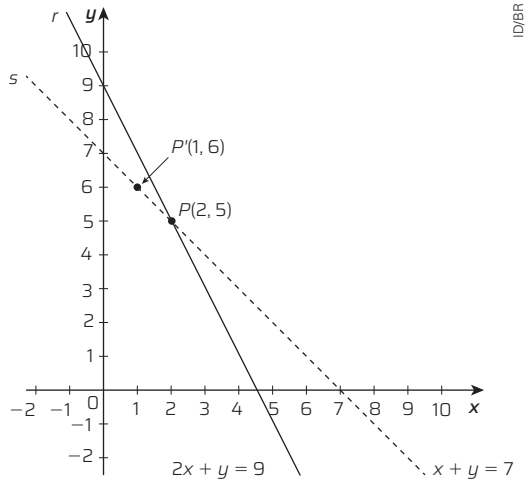
De fato, temos:

- $x = -\frac{17}{19} \simeq -0{,}89$
- $y = \frac{1}{19} \simeq 0{,}05$

Portanto, $P\left(-\frac{17}{19}, \frac{1}{19}\right) = P(-0{,}89; 0{,}05)$.

7. Resposta pessoal. Exemplo de resposta:

Uma possível solução neste caso é traçarmos a reta r (neste exemplo, a equação da reta r é: $2x + y = 9$), denotarmos um de seus pontos P (neste exemplo, $P(2, 5)$) e construirmos um ponto P' (neste caso, $P'(1, 6)$). O desafio é determinar a equação da reta s tal que $P \in s$ e $P' \in s$.



ID/BR

A reta s é do tipo $a \cdot x + b \cdot y = c$, em que a, b e $c \in \mathbb{R}$. Sabemos que o ponto $P \in s$ porque é a intersecção entre a reta r e a reta s. Nesse caso, temos:

$a \cdot 2 + b \cdot 5 = c \Rightarrow 2a + 5b = c$ (1)

O ponto P' também pertence à reta s. Portanto, temos:

$a \cdot 1 + b \cdot 6 = c \Rightarrow a + 6b = c$ (2)

Dessa maneira, as equações (1) e (2) compõem o seguinte sistema linear:

$\begin{cases} 2a + 5b = c \\ a + 6b = c \end{cases}$

Podemos elaborar a igualdade:

$2a + 5b = a + 6b \Rightarrow a = b$ (3)

Utilizando o resultado (3) na equação (2), obtemos:

$a + 6 \cdot a = c \Rightarrow c = 7a$ (4)

Substituindo a equação (4) na equação geral, obtemos a equação da reta s:

$a \cdot x + a \cdot y = 7a \Rightarrow x + y = 7$

Conferindo pelo aplicativo, verificamos que a equação calculada realmente condiz com a reta s: $x + y = 7$.

8. Vamos representar a quantidade de passagens vendidas para Lisboa, Paris e Roma, respectivamente, pelas incógnitas l, p e r. Analisando as informações do enunciado, podemos obter um sistema com três equações lineares:

$\begin{cases} l + p + r = 78 \\ p = 2(l + r) \\ r = \frac{l}{2} + 2 \end{cases}$

Para resolver o sistema, podemos utilizar as informações de uma equação na outra. Isolando a expressão $(l + r)$ na primeira equação, temos:
$l + r = 78 - p$
Substituindo o valor encontrado na segunda equação, obtemos:
$p = 2 \cdot (78 - p)$
Assim, obtemos uma equação apenas na incógnita p e é possível determinar seu valor:
$p = 2 \cdot (78 - p) \Rightarrow p = 156 - 2p \Rightarrow p = 52$
De modo semelhante, podemos isolar a incógnita r na primeira equação e aplicar o valor de $p = 52$. Dessa forma, temos:
$r = 78 - 52 - l \Rightarrow r = 26 - l$
Substituindo o valor obtido na terceira equação, temos:

$$26 - l = \frac{l}{2} + 2$$

$52 - 2l = l + 4 \Rightarrow l = 16$
Por último, determinamos o valor da incógnita r:
$r = 26 - l \Rightarrow r = 26 - 16 \Rightarrow r = 10$
Logo, foram vendidas 16 passagens para Lisboa, 52 passagens para Paris e 10 passagens para Roma, sendo que o total de passagens vendidas para Paris e Roma é 62.
Alternativa **d**.

9. Analisando o problema, temos:

$$\begin{cases} 18A + 9V = 32{,}40 \\ A - V = V + 0{,}05 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 18A + 9V = 32{,}40 \\ A - 2V = 0{,}05 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow A - 2V = 0{,}05 \Rightarrow A = 0{,}05 + 2V$

Substituindo A na primeira equação, temos:

$18(0{,}05 + 2V) + 9V = 32{,}40 \Rightarrow 0{,}90 + 36V + 9V = 32{,}40 \Rightarrow$

$\Rightarrow 45V = 31{,}50 \Rightarrow V = 0{,}70$

Logo, $V = \text{R\$}\, 0{,}70 \cdot 9 \Rightarrow V = \text{R\$}\, 6{,}30$.

Alternativa **b**.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 249)

10. a) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + y + z = 7 \\ x + 2y + z = 8 \end{cases}$

Vamos multiplicar a primeira equação por (-2) e adicionar o produto à segunda. Depois, vamos multiplicar a primeira equação por (-1) e adicionar o produto à terceira:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 & (1) \\ -y - z = -5 & (2) \\ y = 2 \end{cases}$$

Substituindo $y = 2$ na equação (2), temos:
$-2 - z = -5 \Rightarrow z = 3$
Substituindo $y = 2$ e $z = 3$ na equação (1), temos:
$x + 2 + 3 = 6 \Rightarrow x = 1$
Portanto, $S = \{(1, 2, 3)\}$. Sistema possível e determinado.

b) $\begin{cases} 2x + 12y + 17z = 53 \\ x + 5y + 7z = 22 \\ 3x + 22y + 19z = 35 \end{cases}$

Vamos multiplicar a segunda equação por (-2) e adicionar o produto à primeira. Depois, vamos multiplicar a segunda equação por (-3) e adicionar o produto à terceira:

$$\begin{cases} x + 5y + 7z = 22 & (1) \\ 2y + 3z = 9 & (2) \\ 7y - 2z = -31 & (3) \end{cases}$$

Multiplicando a equação (2) por 2, a equação (3) por 3 e adicionando os produtos membro a membro, temos:

$$+\begin{cases} 4y + 6z = 18 \\ 21y - 6z = -93 \end{cases}$$
$$25y = -75$$
$$y = -3$$

Substituindo $y = -3$ na equação (2), temos:
$2 \cdot (-3) + 3z = 9 \Rightarrow z = 5$
Substituindo $y = -3$ e $z = 5$ na equação (1), temos:
$x + 5 \cdot (-3) + 7 \cdot 5 = 22 \Rightarrow x = 2$
Portanto, $S = \{(2, -3, 5)\}$. Sistema possível e determinado.

c) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ x - y + 7z = 7 \\ 2x + 4y + 9z = 15 \end{cases}$

Vamos multiplicar a primeira equação por (-1) e adicionar o produto à segunda. Depois, vamos multiplicar a primeira equação por (-2) e adicionar o produto à terceira:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 2 & (1) \\ y + 4z = 5 & (2) \\ 8y + 3z = 11 & (3) \end{cases}$$

Multiplicando a equação (2) por (-8) e adicionando o produto membro a membro à equação (3), temos:

$$+\begin{cases} -8y - 32z = -40 \\ 8y + 3z = 11 \end{cases}$$
$$-29z = -29$$
$$z = 1$$

Substituindo $z = 1$ na equação (2), temos:
$y + 4 \cdot 1 = 5 \Rightarrow y = 1$
Substituindo $z = 1$ e $y = 1$ na equação (1), temos:
$x - 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 2 \Rightarrow x = 1$
Portanto, $S = \{(1, 1, 1)\}$. Sistema possível e determinado.

d) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x - 5y + 2z = 1 \\ 4x - y + 8z = 3 \end{cases}$

Vamos multiplicar a primeira equação por (-2) e adicionar o produto à segunda. Depois, vamos multiplicar a primeira equação por (-4) e adicionar à terceira:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ -9y - 4z = -7 \\ -9y - 4z = -13 \end{cases}$$

Portanto, $S = \varnothing$. Sistema impossível.

e) $\begin{cases} x + 3y - z = 7 \\ 3x + 7y + z = 11 \\ 2x + 7y - 4z = 19 \end{cases}$

Vamos multiplicar a primeira equação por (-3) e adicionar o produto à segunda. Depois, vamos multiplicar a primeira equação por (-2) e adicionar o produto à terceira:

$$\begin{cases} x + 3y - z = 7 & (1) \\ -2y + 4z = -10 & (2) \\ y - 2z = 5 & (3) \end{cases}$$

Multiplicando a equação (3) por 2 e adicionando o produto membro a membro à equação (2), temos:

$$+\begin{cases} -2y + 4z = -10 \\ 2y - 4z = 10 \end{cases}$$
$$0 = 0$$

Considerando $z = \alpha$, temos:

- $y - 2 \cdot \alpha = 5 \Rightarrow y = 2\alpha + 5$
- $x + 3 \cdot (2\alpha + 5) - \alpha = 7 \Rightarrow x = -5\alpha - 8$

Portanto, $S = \{(-5\alpha - 8, 2\alpha + 5, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.
Sistema possível e indeterminado.

f) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = 0 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$

Vamos multiplicar a primeira equação por (-3) e adicionar o produto à segunda. Depois, vamos multiplicar a primeira equação por (-2) e adicionar o produto à terceira:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 & (1) \\ -7y + 11z = -3 & (2) \\ -3y + 7z = 0 & (3) \end{cases}$$

Multiplicando a equação (2) por 3, a equação (3) por (-7) e adicionando os produtos membro a membro, temos:

$$+\begin{cases} -21y + 33z = -9 \\ 21y - 49z = 0 \end{cases}$$
$$-16z = -9$$
$$z = \frac{9}{16}$$

Substituindo o valor de z na equação ②, temos:

$-7y + 11 \cdot \left(\frac{9}{16}\right) = -3 \Rightarrow \frac{-112y + 99}{16} = -\frac{48}{16} \Rightarrow$

$\Rightarrow 112y = 147 \Rightarrow y = \frac{21}{16}$

Substituindo o valor de y e z na equação ①, temos:

$x + 2 \cdot \left(\frac{21}{16}\right) - 3 \cdot \left(\frac{9}{16}\right) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{16x + 42 - 27}{16} = \frac{16}{16} \Rightarrow x = \frac{1}{16}$

Portanto, $S = \left\{\left(\frac{1}{16}, \frac{21}{16}, \frac{9}{16}\right)\right\}$. Sistema possível e determinado.

11. • **1º modo:** sem construir um sistema.

Adicionando as massas indicadas nas três balanças, temos:

$90 + 69 + 75 = 234$

Mas foram somadas duas vezes as massas do rapaz, da moça e do cachorro. Então, a medida de massa dos três juntos é 117 kg. Visto que a primeira balança marca 90 kg para o rapaz e a moça, temos que a massa do cachorro é 27 kg.

Daí, observando as duas outras balanças, concluímos que a medida de massa da moça é 42 kg e a do rapaz, 48 kg.

• **2º modo:** utilizando um sistema.

Considerando R, M e C as massas do rapaz, da moça e do cão, respectivamente, temos:

$\begin{cases} R + M = 90 \\ M + C = 69 \\ R + C = 75 \end{cases}$

Subtraindo a segunda equação da primeira e adicionando o resto à terceira, obtemos:

$+\begin{cases} R - C = 21 \\ \underline{R + C = 75} \end{cases}$

$2R = 96$

$R = 48$

Substituindo o valor de R na primeira equação, obtemos:

$48 + M = 90 \Rightarrow M = 42$

Substituindo o valor de R na terceira equação, obtemos:

$48 + C = 75 \Rightarrow C = 27$

Portanto, o rapaz, a moça e o cachorro têm medidas de massa, respectivamente, igual a 48 kg, 42 kg e 27 kg.

12. Considerando x, y e z os objetos em forma de esfera azul, cilindro amarelo e cone verde, respectivamente, temos:

$\begin{cases} 5x = 2y + z \\ 2x + y = 3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x - 2y = z \\ 4x + 2y = 6z \end{cases} \Rightarrow 9x = 7z \Rightarrow z = \frac{9}{7}x$

Substituindo o valor de z na primeira equação, temos:

$5x = 2y + \frac{9}{7}x \Rightarrow y = \frac{13}{7}x$

Na balança **C**, há 4 objetos em forma de cilindro amarelo no lado esquerdo, e no lado direito há 5 objetos em forma de esfera azul e 2 em forma de cone verde. Então:

lado esquerdo: $4 \cdot \frac{13}{7}x = \frac{52}{7}x$

lado direito: $5x + 2 \cdot \frac{9}{7}x = \frac{53}{7}x$

Como $\frac{52}{7}x < \frac{53}{7}x$, a balança pende para a direita.

13. a) $\begin{cases} x + y + z = 12 \\ x + y - 2z = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 12 - z \\ x + y = 2z - 6 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 12 - z = 2z - 6 \Rightarrow 3z = 18 \Rightarrow z = 6$

Substituindo o valor de z no sistema, temos:

$\begin{cases} x + y + 6 = 12 \\ x + y - 2 \cdot 6 = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 6 \\ x + y = 6 \end{cases}$

Então, se $x = \alpha$, temos $y = 6 - \alpha$.

Portanto, $S = \{(\alpha, 6 - \alpha, 6) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

b) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x - 2y = 0 \\ 5x - 3y = 1 \end{cases}$

Multiplicando a segunda equação por (−5) e a terceira por 3, temos:

$+\begin{cases} -15x + 10y = 0 \\ \underline{15x - 9y = 3} \end{cases}$

$y = 3$

Substituindo o valor de y na terceira equação, obtemos:

$5x - 3 \cdot 3 = 1 \Rightarrow 5x = 10 \Rightarrow x = 2$

Portanto, $S = \{(2, 3)\}$.

c) $\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 2x + 3y - z = 10 \end{cases}$

Considerando $z = \alpha$, temos:

$\begin{cases} x + y = 1 + 2\alpha & \cdot(-2) \\ 2x + 3y = 10 + \alpha \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow + \begin{cases} -2x - 2y = -2 - 4\alpha \\ \underline{2x + 3y = 10 + \alpha} \end{cases}$

$y = 8 - 3\alpha$

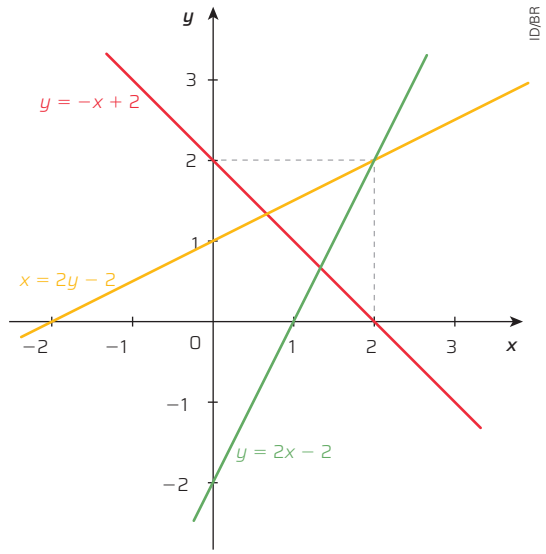
Substituindo o valor de y na primeira equação, temos:

$x + 8 - 3\alpha = 1 + 2\alpha \Rightarrow x = -7 + 5\alpha$

Portanto, $S = \{(-7 + 5\alpha, 8 - 3\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

14. Basta determinar dois pontos para traçar a reta que representa cada equação:

$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x + y = 2 \\ -x + 2y = 2 \end{cases}$



Como as retas referentes às equações não se intersectam em um único ponto, o sistema não tem solução.

15. Excesso de bagagem do casal: $x + 2z = 60$

Excesso de bagagem do senhor: $y + z = 60$

Devemos ter $y = 3{,}5x$, então:

$\begin{cases} x + 2z = 60 \\ y + z = 60 \\ y = 3{,}5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z = 60 \\ y + z = 60 \\ 3{,}5x - y = 0 \end{cases}$

Alternativa **a**.

16. Considerando x a quantidade de homens e y a de mulheres, temos:

$\begin{cases} x = 2(y - 31) \\ y - 31 = 3(x - 55) \end{cases} \Rightarrow + \begin{cases} 3x - 6y = -186 \\ \underline{-3x + y = -134} \end{cases}$

$-5y = -320 \Rightarrow y = 64$

Substituindo o valor de y na primeira equação, temos:

$x = 2(64 - 31) \Rightarrow x = 66$

Portanto, o número de pessoas presentes no começo da festa era igual a:

$n = 66 + 64 = 130$

Alternativa **d**.

17. I. Leia o enunciado.

II. Antes mesmo de resolver a questão, com uma leitura cuidadosa das alternativas, podemos descartar a alternativa **c**, uma vez que não faz sentido um sistema ser impossível e, simultaneamente, determinado.

III. $\begin{cases} x + y - z = -1 \\ -3x + y - z = -2 \\ 5x + y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - z = -1 \\ 4y - 4z = -5 \\ -4y + 4z = 5 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x + y - z = -1 \\ 4y - 4z = -5 \\ 0z = 0 \end{cases}$

Portanto, o sistema é possível e indeterminado.

Alternativa **d**.

18. O erro está na obtenção da equação ④:

$1 - y - 2z + 2y + 3z = 2 \Rightarrow y + z = 1$ ④

Portanto, o sistema é: $\begin{cases} y + z = 1 \\ 3y + 3z = 0 \end{cases}$

Logo, as retas são paralelas e o sistema é impossível.

19. **a)** Considerando x, y e z o faturamento com bolas, bonecas e carrinhos em janeiro, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} x + y + z = 1\,200 \\ 600 + y + 100 + 800 = 1\,600 \\ \frac{80}{100}x + \frac{y}{2} + \frac{150}{100}z = 1\,560 \end{cases}$$

Na segunda equação, obtemos $y = 100$. Substituindo esse valor nas outras equações, temos:

$$\begin{cases} x + z = 1\,100 \\ \frac{8}{10}x + 50 + \frac{15}{10}z = 1\,560 \end{cases}$$

Então:

$\frac{8}{10}x + 50 + \frac{15}{10} \cdot (1\,100 - x) = 1\,560 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{8}{10}x - \frac{15}{10}x = -140 \Rightarrow x = 200$

Substituindo o valor de x e y na primeira equação, temos:

$200 + 100 + z = 1\,200 \Rightarrow z = 900$

Logo, em janeiro, os faturamentos foram R$ 200,00 com a venda de bolas, R$ 100,00 com a venda de bonecas e R$ 900,00 com a venda de carrinhos.

b) Total arrecadado com os carrinhos:

$900 + 800 + \frac{150}{100} \cdot 900 = 3\,050$

Portanto, foram arrecadados R$ 3 050,00 com os carrinhos.

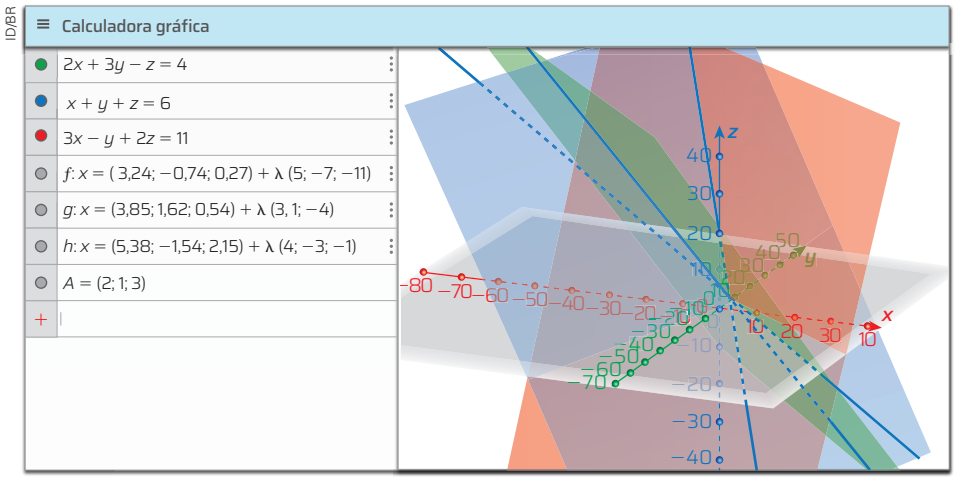
Se cada carrinho é vendido por 2 reais, foram vendidos 1 525 carrinhos, pois $\frac{3\,050}{2} = 1\,525$.

TECNOLOGIA (P. 256)

1. **a)** $S = \{(2, -1, 1)\}$

b) Como os planos e as retas são concorrentes em um único ponto, isto é, o sistema tem solução única, então o sistema é possível e determinado (SPD).

2. Com o auxílio do *software* de geometria dinâmica, podemos representar cada uma das equações que compõem o sistema linear no espaço. Determinando a intersecção dos planos, dois a dois, obtemos retas. Com isso, verificamos a intersecção entre as retas determinadas anteriormente e obtemos o ponto $P(2, 1, 3)$.

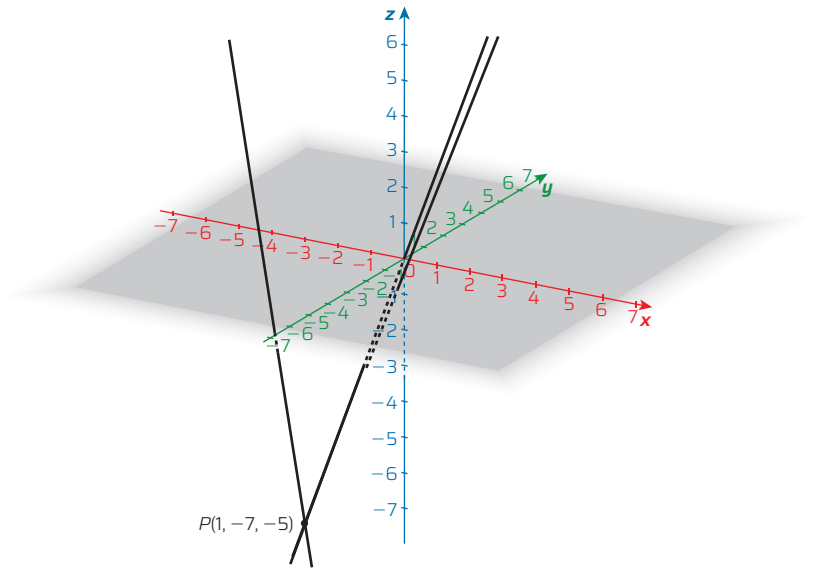


Logo, esse sistema é possível e determinado (SPD).

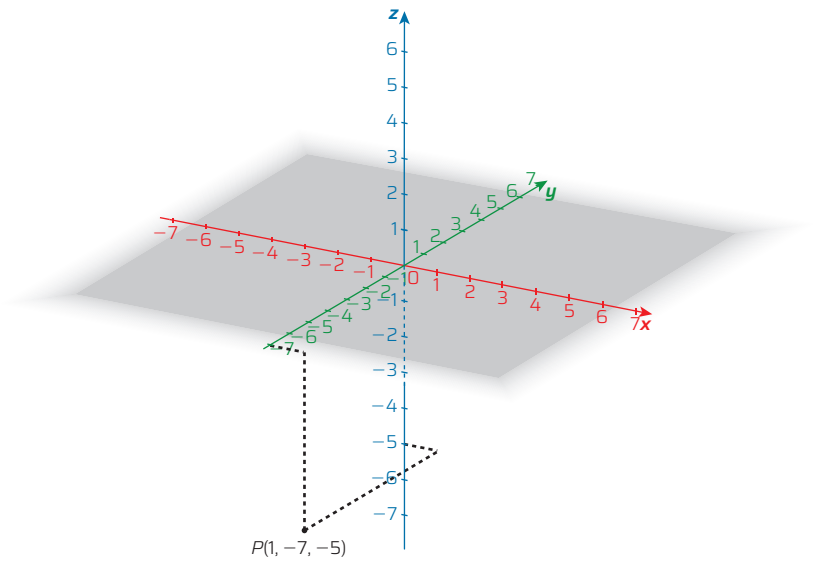
PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 258)

20. **a)** Com o auxílio do *software* de geometria dinâmica, podemos representar cada uma das equações que compõem o sistema linear no espaço. Determinando a intersecção dos planos, dois a dois, obtemos retas. Com isso, verificamos a intersecção entre as retas determinadas anteriormente e obtemos o ponto $P(1, -7, -5)$.

Logo, esse sistema é possível e determinado (SPD).

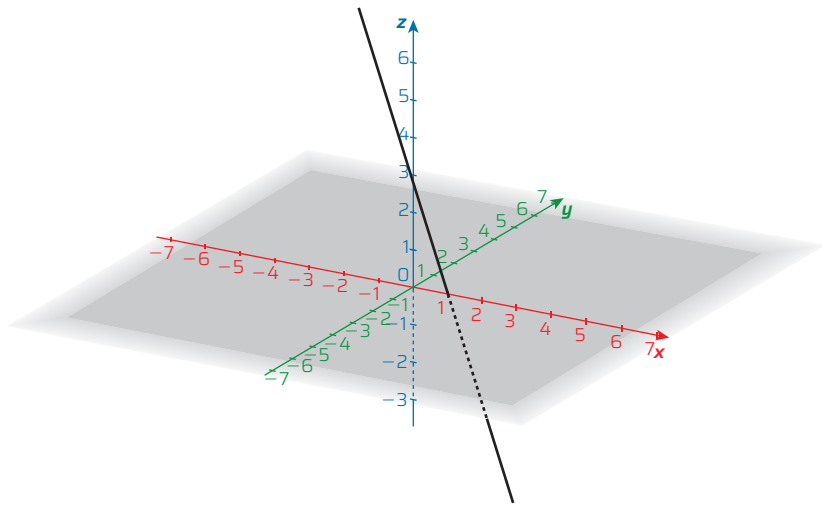


ID/BR



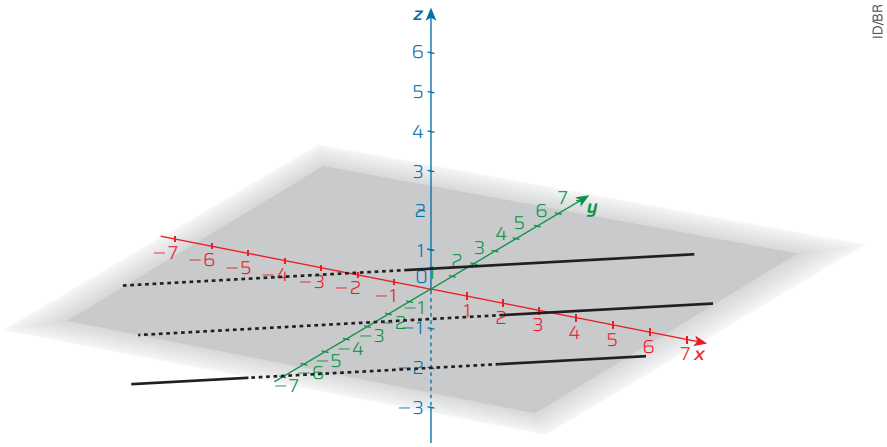
ID/BR

b) Usando os passos que fizemos no item **a**, com o auxílio do *software* de Geometria dinâmica, é possível verificar que a intersecção entre os planos (dois a dois) sempre resulta na mesma reta (os três planos se interceptam numa reta em comum). Ou seja, as coordenadas dos pontos que pertencem à referida reta satisfazem a todas as equações do sistema linear. Em outras palavras, é possível determinar infinitas respostas para o sistema e, portanto, ele é classificado como possível e indeterminado (SPI).



ID/BR

c) Usando os passos que fizemos nos itens anteriores, com o auxílio do *software* de geometria dinâmica, e analisando as posições relativas das retas entre si, percebe-se que temos um feixe de retas paralelas e, portanto, não é possível determinar a intersecção entre as retas. Logo, não há nenhum ponto que pertença aos três planos simultaneamente e, portanto, sua solução é vazia. Neste caso, o sistema é classificado como impossível (SI).



ID/BR

21. Considerando x, y e z o preço de uma calça, de uma camiseta e de uma cueca, respectivamente, podemos representar a situação algebricamente pelo seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 420 \\ 2x + z = 285 \end{cases}$$

Adicionando membro a membro as equações e dividindo os termos por 3, temos:

$3x + 3y + 3z = 705 \Rightarrow x + y + z = 235$

Logo, se André tivesse comprado uma peça de cada tipo, ele teria gasto R$ 235,00.

Alternativa **e**.

22. Considerando c, p e m os preços do cachorro-quente, do pastel e do milho-verde, respectivamente, podemos representar as quantidades vendidas pelas barracas A, B e C por meio do seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 24c + 36p + 24m = 324 \ (1) \\ 33c + 55p + 33m = 462 \ (2) \\ 20c + 40p + 30m = 350 \ (3) \end{cases}$$

Multiplicando a equação (1) por $\left(-\frac{11}{8}\right)$ e adicionando à equação (2), temos:

$$\begin{cases} -33c - \frac{99}{2}p - 33m = -\frac{891}{2} \\ 33c + 55p + 33m = 462 \end{cases} \Rightarrow \frac{11}{2}p = \frac{33}{2} \Rightarrow p = 3$$

Multiplicando a equação (1) por $\left(-\frac{5}{6}\right)$ e adicionando à equação (3), temos:

$$\begin{cases} -20c - 30p - 20m = -270 \\ 20c + 40p + 30m = 350 \end{cases} \Rightarrow 10p + 10m = 80 \ (4)$$

Como $p = 3$, fazendo a substituição na equação (4), temos:

$10 \cdot 3 + 10m = 80 \Rightarrow 10m = 50 \Rightarrow m = 5$

Substituindo na equação (3) os valores $p = 3$ e $m = 5$, obtemos:

$20c + 40 \cdot 3 + 30 \cdot 5 = 350 \Rightarrow$

$\Rightarrow 20c + 120 + 150 = 350 \Rightarrow$

$\Rightarrow 20c + 270 = 350 \Rightarrow$

$\Rightarrow 20c = 80 \Rightarrow c = 4$

Logo, o conjunto solução é $S = \{(4, 3, 5)\}$. Isto é, o preço do cachorro-quente é R$ 4,00; o do pastel, R$ 3,00, e o do milho-verde, R$ 5,00.

Analisando cada um dos itens da atividade, temos:

01) Falsa, pois $4 + 3 < 2 \cdot 5$.

02) Verdadeira, pois $3 + 5 = 2 \cdot 4$.

04) Verdadeira, pois 5 é um número primo.

08) Verdadeira, pois $c = 4$.

16) Falsa, pois $4 + 3 + 5 = 12$, que é um número inteiro.

Soma dos itens corretos: 02 + 04 + 08 = 14.

23. **Modelo A:** $4x + 2y + z = 2470$

Modelo B: $8x + y + z = 2885$

Modelo C: $12x + 3y + 4z = 8355$

$$\begin{cases} 4x + 2y + z = 2470 \\ 8x + y + z = 2885 \\ 12x + 3y + 4z = 8355 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x - 2y - z = -2470 \\ 8x + y + z = 2885 \end{cases} \Rightarrow 4x - y = 415$$

$\begin{cases} 4x + 2y + z = 2\,470 \\ 12x + 3y + 4z = 8\,355 \end{cases} \cdot(-4) \Rightarrow \begin{cases} -16x - 8y - 4z = -9\,880 \\ 12x + 3y + 4z = 8\,355 \end{cases} \Rightarrow -4x - 5y = -1\,525$

$\begin{cases} 4x + 2y + z = 2\,470 \\ 4x - y = 415 \\ -4x - 5y = -1\,525 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - y = 415 \\ -4x - 5y = -1\,525 \end{cases} \Rightarrow 6y = 1\,110 \Rightarrow y = \frac{1\,110}{6} \Rightarrow y = 185$

Substituindo y na equação, temos:

$4x - y = 415 \Rightarrow 4x - 185 = 415 \Rightarrow 4x = 600 \Rightarrow x = 150$

Substituindo x e y na primeira equação, temos:

$4x + 2y + z = 2\,470 \Rightarrow 4 \cdot (150) + 2 \cdot (185) + z = 2\,470 \Rightarrow 600 + 370 + z = 2\,470 \Rightarrow z = 1\,500$

a) O valor de cada núcleo do processador é 150 (Modelo A: 600; Modelo B: 1 200 e Modelo C: 1 800).

b) O valor de cada unidade do armazenamento SSD é 185 (Modelo A: 370; Modelo B: 185 e Modelo C: 555).

c) O valor de cada placa aceleradora de vídeo é 1 500 (Modelo A: 1 500; Modelo B: 1 500 e Modelo C: 6 000).

24. $\begin{cases} x + y + z = a \\ x + 2y + z = 2a \\ 2x + 3y + 2z = a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = a \\ x + 2y + z = 2a \end{cases} \Rightarrow 2x + 3y + 2z = 3a$

Subtraindo da terceira equação, temos:

$\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 3a \\ 2x + 3y + 2z = a^2 \end{cases} \Rightarrow 0 = 3a - a^2 \Rightarrow a^2 - 3a = 0 \Rightarrow a(a - 3) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 0$ ou $a - 3 = = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $a = 3$

Logo, o conjunto solução é $S = \{(0, 3)\}$

Então, o sistema linear pertence ao conjunto $(-1, 4]$.

Alternativa **b**.

25. $\begin{cases} \lambda a - b + c = 3 \\ a + \lambda b + c = \lambda \\ a + b + \lambda c = 1 \end{cases}$

Fazendo $\lambda = 0$, temos: $\begin{cases} 0a - b + c = 3 \\ a + 0b + c = 0 \\ a + b + 0c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -b + c = 3 \\ a + c = 0 \\ a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -b + c = 3 \\ a + c = 0 \end{cases} \cdot(-1) \Rightarrow \begin{cases} b - c = -3 \\ a + c = 0 \end{cases} \Rightarrow a + b = -3$

Fazendo $\lambda = -1$, temos:

$\begin{cases} -a - b + c = 3 \\ a - b + c = -1 \\ a + b - c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a - b + c = 3 \\ a + b - c = 1 \end{cases} \Rightarrow 0 = 4$

Fazendo $\lambda = 1$, temos:

$\begin{cases} a - b + c = 3 \\ a + b + c = 1 \\ a + b + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b + c = 3 \\ a + b + c = 1 \end{cases} \cdot(-1) \Rightarrow \begin{cases} a - b + c = 3 \\ -a - b - c = -1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow -2b = 2 \Rightarrow b = -\frac{2}{2} \Rightarrow b = -1$

Substituindo b na terceira equação, temos:

$a + b + c = 1 \Rightarrow a - 1 + c = 1 \Rightarrow a + c = 1 + 1 \Rightarrow a + c = 2$

Logo, podemos concluir que será impossível se $\lambda = -1$ ou $\lambda = 0$.

Alternativa **c**.

26. Resposta pessoal. Exemplo de resposta: Dado o sistema linear $\begin{cases} 3x + 3y + 3z = 3a \\ 3x + 6y + 3z = 6a \\ 6x + 9y + 6z = a^2 \end{cases}$, determine os valores do número real a, para que o sistema linear tenha solução única.

CÁLCULO RÁPIDO (P. 259)

1. **a)** $C = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 4 = 2\pi$

b) $C = \frac{3}{4} \cdot 2\pi \cdot 2 = 3\pi$

c) $C = \frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot 1 = \frac{2}{3}\pi$

2. **a)** $\frac{2\pi}{3} = \frac{2 \cdot 180°}{3} = 2 \cdot 60° = 120°$

Portanto, a medida angular do arco AB é de 120°.

b) Como π corresponde a 180°, então a medida angular do arco AB é 180°.

c) $5\pi = 5 \cdot 180° = 900°$

Portanto, a medida angular do arco AB é 900°.

3. **a)** $x^2 = (6^2 + 3^2) + 6^2 \Rightarrow x^2 = 81 \Rightarrow x = 9$

b) $x^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow x^2 = 100 \Rightarrow x = 10$

c) $x^2 = 1^2 + (\sqrt{8})^2 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$

d) $(\sqrt{5})^2 = x^2 + 1^2 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$

e) Seja y a medida do lado do triângulo retângulo de lados medindo 4, 5 e y. Então:

$5^2 = 4^2 + y^2 \Rightarrow y = 3$

Como o trapézio é isósceles, temos:

$x = 14 - 3 - 3 \Rightarrow x = 8$

PARA RECORDAR (P. 260)

1. **a)** $C = 2\pi \cdot 3 = 6\pi$

Considerando x a medida do ângulo central $A\hat{O}B$, temos:

$x = \frac{2\pi \cdot 8}{6\pi} = \frac{16\pi}{6\pi} \simeq 2{,}6°$

b) Considerando y a medida do arco CD, temos:

$y = \frac{40°}{360°} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 3 \Rightarrow y = \frac{2}{3}\pi$

2.

Poliedro regular	Formas das faces	Número de faces	Número de vértices	Número de arestas
Hexaedro (cubo)	quadrado	6	8	12
Tetraedro	triângulo	4	4	6
Octaedro	triângulo	8	6	12
Dodecaedro	pentágono	12	20	30
Icosaedro	triângulo	20	12	30

a) Dodecaedro.
b) Octaedro.
c) Hexaedro.
d) Tetraedro.
e) Icosaedro.

3. Vamos calcular a medida do raio $\overline{AP}$ do círculo verde.

$32\pi = \pi(AP)^2 \Rightarrow (AP)^2 = 32 \Rightarrow AP = 4\sqrt{2}$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo APO, temos:

$(OP)^2 + (AP)^2 = (AO)^2 \Rightarrow (OP)^2 + 32 = 100 \Rightarrow (OP)^2 = 68 \Rightarrow OP = 2\sqrt{17}$

Portanto, a distância do centro O de uma esfera de raio 10 m a que devemos traçar um plano de modo que a área do círculo verde seja 32π m² é $2\sqrt{17}$ m.

4. Como $\overline{AP_1}$ mede 70% do raio da Terra, temos:

$AP_1 = \frac{70}{100} \cdot 6\,400 = 4\,480$

O comprimento do paralelo que passa por P_1 e P_2 é:

$C = 2 \cdot \pi \cdot 4\,480 \Rightarrow C = 8\,960\pi$

Portanto, o comprimento do paralelo que passa por P_1 e P_2 é $8\,960\pi$ km.

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO (P. 261)

1. A projeção ortogonal correta é a que podemos conectar os cantos dos blocos às paredes ortogonalmente.

Alternativa **e**.

2. Ao final do primeiro dia, um dos carregadores entrega um pacote a cada um dos outros participantes da travessia e volta ao ponto de origem consumindo um pacote. O outro carregador e o detetive seguem com 4 pacotes cada um.

Ao final do segundo dia, o outro carregador entrega 2 pacotes ao detetive e volta à origem da jornada, consumindo 2 pacotes. O detetive segue então com 4 pacotes, suficientes para 4 dias da travessia em segurança, chegando ao outro lado do deserto.

MATEMÁTICA E INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL (IA) (P. 262)

Conectando ideias

1. Resposta pessoal. Com relação ao uso da ferramenta da Inteligência Artificial, essa pergunta depende da resposta dos estudantes, por exemplo, TV, reconhecimento facial, aplicativos de rotas, análise do comportamento do consumidor, entre outros. Vantagens do uso da Inteligência Artificial: A IA pode ajudar a otimizar processos, reduzir falhas, melhorar a tomada de decisão e personalizar e customizar serviços. Pode também ser usada para detectar atividades suspeitas, como fraudes, e proteger negócios e clientes. Desvantagens do uso da Inteligência Artificial: A IA pode apresentar riscos, como a perda de empregos, a falta de criatividade e a possibilidade de vieses nos algoritmos. A IA também pode levantar preocupações com a privacidade e a segurança dos dados, pois muitas vezes requer grande quantidade de dados pessoais.

2. Resposta pessoal. As respostas dependem dos temas escolhidos pelos estudantes para a realização da pesquisa e da discussão com os professores e colegas de classe.

CAPÍTULO 10 MATRIZES

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 267)

1. **a)** Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$.

Substituindo os valores de i e j no termo geral da matriz, temos:

$a_{11} = 1^2 - 3 \cdot 1 = -2$

$a_{12} = 1^2 - 3 \cdot 2 = -5$

$a_{21} = 2^2 - 3 \cdot 1 = 1$

$a_{22} = 2^2 - 3 \cdot 2 = -2$

Logo, a matriz A é $\begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$.

b) Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$.

Substituindo os valores de i e j no termo geral da matriz, temos:

$a_{11} = (-1)^1 \cdot (2 \cdot 1 - 3 \cdot 1) = (-1) \cdot (2 - 3) = (-1) \cdot (-1) = 1$

$a_{12} = (-1)^1 \cdot (2 \cdot 1 - 3 \cdot 2) = (-1) \cdot (2 - 6) = (-1) \cdot (-4) = 4$

$a_{21} = (-1)^2 \cdot (2 \cdot 2 - 3 \cdot 1) = (+1) \cdot (4 - 3) = (+1) \cdot (+1) = 1$

$a_{22} = (-1)^2 \cdot (2 \cdot 2 - 3 \cdot 2) = (+1) \cdot (4 - 6) = (+1) \cdot (-2) = -2$

$a_{31} = (-1)^3 \cdot (2 \cdot 3 - 3 \cdot 1) = (-1) \cdot (6 - 3) = (-1) \cdot (+3) = -3$

$a_{32} = (-1)^3 \cdot (2 \cdot 3 - 3 \cdot 2) = (-1) \cdot (6 - 6) = (-1) \cdot (0) = 0$

Logo, a matriz A é $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$.

2. As linhas 1, 2 e 3 da matriz M indicam, respectivamente, as hortaliças agrião, almeirão e alface. Já as colunas 1, 2 e 3 indicam as fazendas f_1, f_2 e f_3. Vamos reforçar isso na matriz M.

	f_1	f_2	f_3
Agrião	250	580	640
Almeirão	160	110	80
Alface	900	620	590

Cada elemento dessa matriz representa a quantidade de um tipo de hortaliça produzida em média, semanalmente, para cada fazenda. Por exemplo, a fazenda f_1 produz em média, por semana, 900 alfaces.

Agora, vamos julgar as afirmações:

a) Incorreta. As fazendas f_1 e f_3 produziram a mesma quantidade de hortaliças, um total de 1 310 hortaliças (basta somar os valores das colunas 1 e 3, respectivamente).

b) Incorreta. A fazenda f_3 produziu 590 alfaces, essa quantidade é menor que as 620 produzidas por f_2.

c) Correta. A fazenda f_1 produz 160 almeirões e a fazenda f_3 produz 80, e sabemos que $160 = 2 \times 80$.

d) Incorreta. A fazenda f_3 produziu 640 agriões, essa quantidade é maior que os 580 produzidos por f_2.

e) Incorreta, pela mesma justificativa da alternativa **a**.

Alternativa **c**.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 269)

3. $A + B + C = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 9 & 14 \end{bmatrix}$

4. $X = B - A \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

5. Sejam as matrizes $X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$ e $Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{21} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}$.

Substituindo os valores de i e j no termo geral das matrizes, temos:

$x_{11} = 1^2 + 1^2 \Rightarrow x_{11} = 1 + 1 \Rightarrow x_{11} = 2$

$x_{12} = 1^2 + 2^2 \Rightarrow x_{12} = 1 + 4 \Rightarrow x_{12} = 5$

$x_{21} = 2^2 + 1^2 \Rightarrow x_{21} = 4 + 1 \Rightarrow x_{21} = 5$

$x_{22} = 2^2 + 2^2 \Rightarrow x_{22} = 4 + 4 \Rightarrow x_{22} = 8$

Logo, $X = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$.

$y_{11} = -1^2 + 1^2 \Rightarrow y_{11} = -1 + 1 \Rightarrow y_{11} = 0$
$y_{12} = -1^2 + 2^2 \Rightarrow y_{12} = -1 + 4 \Rightarrow y_{12} = 3$
$y_{21} = -2^2 + 1^2 \Rightarrow y_{21} = -4 + 1 \Rightarrow y_{21} = -3$
$y_{22} = -2^2 + 2^2 \Rightarrow y_{22} = -4 + 4 \Rightarrow y_{22} = 0$

Logo, $Y = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$.

Então, $X + Y = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow X + Y = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$

Alternativa **b**.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 273)

6. a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) & 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-3) + 0 \cdot 2 \\ 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot (-1) & 3 \cdot 0 + (-1) \cdot (-3) + 2 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot 4 & 3 \cdot 1 \\ (-2) \cdot 2 & (-2) \cdot 4 & (-2) \cdot 1 \\ 4 \cdot 2 & 4 \cdot 4 & 4 \cdot 1 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 6 & 12 & 3 \\ -4 & -8 & -2 \\ 8 & 16 & 4 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 6 & 5 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 3 \cdot 0 + (-1) \cdot -1 & 3 \cdot 6 + (-1) \cdot 3 & 3 \cdot 5 + (-1) \cdot 4 \\ 2 \cdot 0 + 5 \cdot (-1) & 2 \cdot 6 + 5 \cdot 3 & 2 \cdot 5 + 5 \cdot 4 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 1 & 15 & 11 \\ -5 & 27 & 30 \end{bmatrix}$

7. Uma maneira de resolver a situação proposta é elaborar duas matrizes representando os dados das tabelas I e II e multiplicar seus valores. Nesse caso, temos as matrizes X e Y tais que:

$X \cdot Y = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 6 & 8 & 16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 15 & 25 \\ 30 & 20 \\ 18 & 15 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 3 \cdot 15 + 4 \cdot 30 + 4 \cdot 18 & 3 \cdot 25 + 4 \cdot 20 + 4 \cdot 15 \\ 6 \cdot 15 + 8 \cdot 30 + 16 \cdot 18 & 6 \cdot 25 + 8 \cdot 20 + 16 \cdot 15 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 237 & 215 \\ 618 & 550 \end{bmatrix}$

Por sua vez, o produto $X \cdot Y$ pode ser representado em uma tabela (tabela III) indicando o número de peças necessárias em cada mês. Dessa forma, temos:

Tabela III

Peça \ Mês	Julho	Agosto
Eixos	237	215
Rodas	618	550

a) O número de eixos necessários para o mês de julho é 237 e para o mês de agosto é 215. O número de rodas necessárias para o mês de julho é 618 e para o mês de agosto é 550.

b) No mês de agosto, são necessárias 550 rodas. Considerando de agosto a dezembro, temos 5 meses. Logo, o total de rodas necessárias para esse semestre será de 2 750 ($5 \cdot 550 = 2\,750$).

c) Acrescentar uma coluna na tabela peça/modelo e uma linha na tabela modelo/mês.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 275)

8. Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, de acordo com enunciado, temos:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Para calcular a matriz inversa A^{-1}, temos:

$A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ w & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2w = 1 \\ y + 2z = 0 \\ 0 + w = 0 \\ 0 + z = 1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x + 2w = 1 \\ y + 2z = 0 \\ w = 0 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2 \cdot 0 = 1 \\ y + 2 \cdot 1 = 0 \\ w = 0 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ w = 0 \\ z = 1 \end{cases}$

Logo, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Para calcular a matriz A^2, temos:

$A^2 = A \cdot A \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

De acordo com o enunciado, temos que: $A^2 = aA^{-1} + bI \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + b & -2a \\ 0 & a + b \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a + b = 1 \Rightarrow -2 + b = 1 \Rightarrow b = 1 + 2 \Rightarrow b = 3 \\ -2a = 4 \Rightarrow a = -\frac{4}{2} \Rightarrow a = -2 \end{cases}$

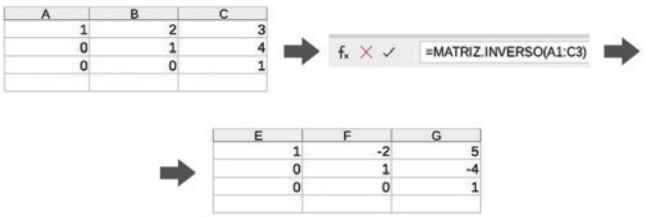
Logo, $a^2 - 2b + 1 = (-2)^2 - 2 \cdot (3) + 1 = 4 - 6 + 1 = -1$.

Alternativa **a**.

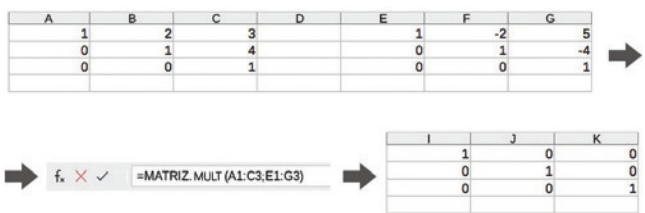
TECNOLOGIA (P. 278)

1. De acordo com a resolução apresentada, o total de glicerina vendida nessa quinzena foi igual a: $20 \cdot 50\ L + 30 \cdot 200\ L + 3 \cdot 1\,000\ L = 10\,000\ L$.
Portanto, alternativa **b**.

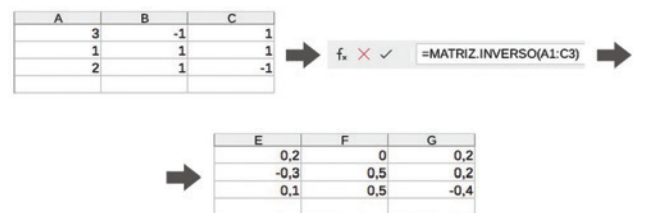
2. Vamos utilizar o comando "MATRIZ.INVERSO" para o programa calcular a matriz inversa de A.



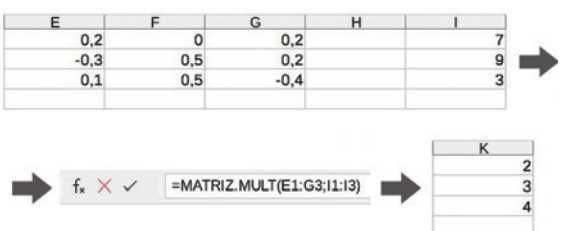
Em seguida, utilizando o comando "MATRIZ.MULT", verificamos que o produto da matriz A pela sua inversa é a matriz identidade de ordem 3.



3. a) Com auxílio de uma planilha eletrônica, determinamos a matriz inversa da matriz de coeficientes. Assim, temos:



Em seguida, digitamos a matriz dos termos independentes e multiplicamos a matriz inversa dos coeficientes pela matriz dos termos independentes, obtendo, assim, os valores da matriz das incógnitas (valores das variáveis).



Portanto, é possível resolver o sistema, obtendo $x = 2$, $y = 3$ e $z = 4$.

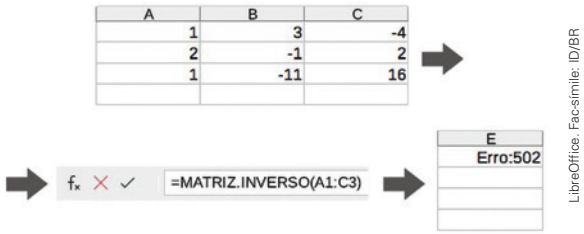
b) Com auxílio de uma planilha eletrônica, determinamos a matriz inversa da matriz de coeficientes. Assim, temos:



LibreOffice. Fac-símile: ID/BR

Portanto, não é possível resolver o sistema.

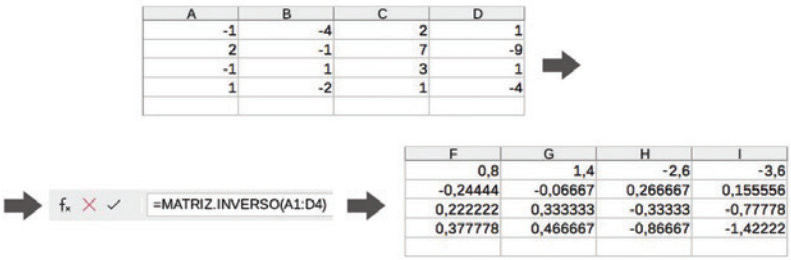
c) Com auxílio de uma planilha eletrônica, determinamos a matriz inversa da matriz de coeficientes. Assim, temos:



LibreOffice. Fac-símile: ID/BR

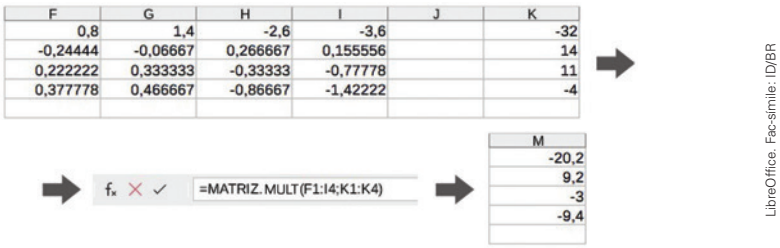
Portanto, não é possível resolver o sistema.

d) Com auxílio de uma planilha eletrônica, determinamos a matriz inversa da matriz de coeficientes. Assim, temos:



LibreOffice. Fac-símile: ID/BR

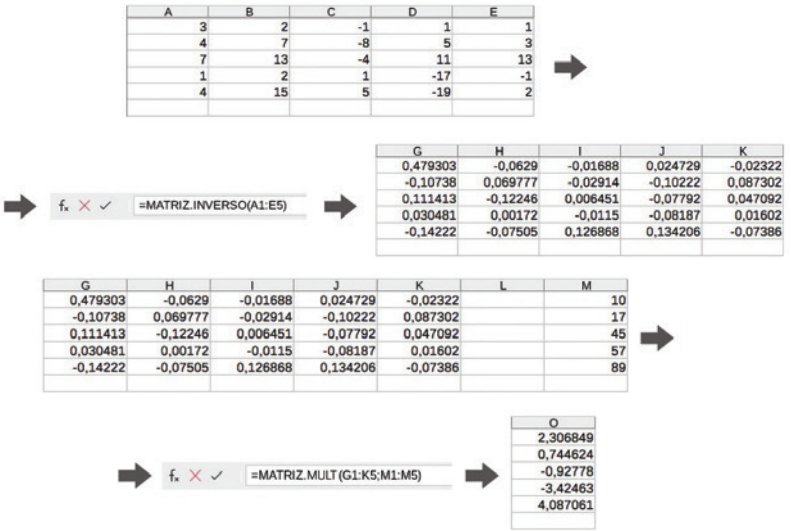
Em seguida, digitamos a matriz dos termos independentes e multiplicamos a matriz inversa dos coeficientes pela matriz dos termos independentes, obtendo, assim, os valores da matriz das incógnitas (valores das variáveis).



LibreOffice. Fac-símile: ID/BR

Portanto, é possível resolver o sistema, obtendo $x = -20{,}2$; $y = 9{,}2$; $z = -3$ e $w = -9{,}4$.

e) Com auxílio de uma planilha eletrônica, determinamos a matriz inversa da matriz de coeficientes. Assim, temos:



LibreOffice. Fac-símile: ID/BR

Portanto, é possível resolver o sistema, obtendo $x = 2{,}306849$; $y = 0{,}744624$; $z = -0{,}92778$; $w = -3{,}42463$; $t = 4{,}087061$.

4. Resposta pessoal. Nos casos em que o sistema é impossível ou possível e indeterminado, a planilha retorna uma mensagem de erro na determinação da matriz inversa. Uma opção de ferramenta que pode ser utilizada para resolver esses sistemas é o Geogebra 3D, disponível em: https://www.geogebra.org/3d?lang5pt (acesso em: 25 out. 2024).

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 280)

9. Considerando x, y e z o preço de cada caneta, de cada caderno e de cada lápis, respectivamente, respeitando as promoções propostas pela papelaria, podemos representar a situação por:

$$\begin{cases} 5x + 4y + 10z = 62 \\ 3x + 5y + 3z = 66 \\ 2x + 3y + 7z = 44 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 \cdot x + 4 \cdot y + 10 \cdot z = 62 \\ 3 \cdot x + 5 \cdot y + 3 \cdot z = 66 \\ 2 \cdot x + 3 \cdot y + 7 \cdot z = 44 \end{cases}$$

Utilizando uma planilha eletrônica, podemos digitar a partir da célula A1 a matriz dos coeficientes associados às equações do sistema.

LibreOffice. Fac-símile: ID/BR

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	5	4	10										
2	3	5	3										
3	2	3	7										
4													

Em seguida, na célula E1, usamos a função "=MATRIZ.INVERSO(A1:C3)" para obter a matriz inversa dos coeficientes:

LibreOffice. Fac-símile: ID/BR

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	5	4	10		0,43333333	0,03333333	-0,6333333				
2	3	5	3		-0,25	0,25	0,25				
3	2	3	7		-0,0166667	-0,1166667	0,21666667				
4											

Digitamos, a partir da célula I1, a matriz dos termos independentes do sistema.

LibreOffice. Fac-símile: ID/BR

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	5	4	10		0,43333333	0,03333333	-0,6333333		62		
2	3	5	3		-0,25	0,25	0,25		66		
3	2	3	7		-0,0166667	-0,1166667	0,21666667		44		
4											

Na célula K1, usamos a função "=MATRIZ.MULT(E1:G3; I1:I3)" para obter o resultado do sistema.

LibreOffice. Fac-símile: ID/BR

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	5	4	10		0,43333333	0,03333333	-0,6333333		62		1,2
2	3	5	3		-0,25	0,25	0,25		66		12
3	2	3	7		-0,0166667	-0,1166667	0,21666667		44		0,8
4											

Dessa forma, obtemos a matriz das incógnitas do sistema linear. Logo, $x = 1{,}2$; $y = 12$ e $z = 0{,}8$.
Como se pede a soma dos preços de um objeto escolar de cada tipo, temos:
$x + y + z = 1{,}20 + 12{,}00 + 0{,}80 = 14{,}00$
Portanto, a soma dos preços é R$ 14,00.
Alternativa **d**.

10. Inicialmente, vamos calcular o valor de $P(1)$, $P(2)$ e $P(3)$.

$P(1) = m \cdot 1^3 + n \cdot 1^2 + p \cdot 1 = m + n + p$

$P(2) = m \cdot 2^3 + n \cdot 2^2 + p \cdot 2 = 8m + 4n + 2p$

$P(3) = m \cdot 3^3 + n \cdot 3^2 + p \cdot 3 = 27m + 9n + 3p$

Como $P(1) = 1$, $P(2) = 5$ e $P(3) = 15$, obtemos o seguinte sistema de equações lineares nas variáveis m, n e p:

$$\begin{cases} m + n + p = 1 \\ 8m + 4n + 2p = 5 \\ 27m + 9n + 3p = 15 \end{cases}$$

Determinando a matriz dos coeficientes e também a matriz dos termos independentes, temos:

$$\begin{cases} m + n + p = 1 \\ 8m + 4n + 2p = 5 \\ 27m + 9n + 3p = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \cdot m + 1 \cdot n + 1 \cdot p = 1 \\ 8 \cdot m + 4 \cdot n + 2 \cdot p = 5 \\ 27 \cdot m + 9 \cdot n + 3 \cdot p = 15 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \\ 27 & 9 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Com auxílio de uma planilha eletrônica, determinamos a matriz inversa da matriz de coeficientes.

LibreOffice. Fac-símile: ID/BR

	A	B	C
1	1	1	1
2	8	4	2
3	27	9	3

=MATRIZ.INVERSO(A1:C3)

	E	F	G
1	0,5	-0,5	0,16666667
2	-2,5	2	-0,5
3	3	-1,5	0,33333333

Em seguida, digitamos a matriz dos termos independentes e multiplicamos a matriz inversa dos coeficientes pela matriz dos termos independentes, obtendo, assim, os valores da matriz das incógnitas (valores das variáveis).



LibreOffice. Fac-símile: ID/BR

Portanto, $m = 0{,}5$; $n = 0$ e $p = 0{,}5$.

Alternativa **a**.

11. Representando o comprimento das pistas X, Y e Z, respectivamente, por x, y e z e considerando o número de voltas que cada corredor efetuou ao redor de cada pista e a distância percorrida, podemos representar a situação por meio do seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 8420 \\ x + 2y + 2z = 7940 \\ 4x + 3y = 8110 \end{cases}$$

Determinando a matriz dos coeficientes e também a matriz dos termos independentes, temos:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 8420 \\ x + 2y + 2z = 7940 \\ 4x + 3y = 8110 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \cdot x + 3 \cdot y + 1 \cdot z = 8420 \\ 1 \cdot x + 2 \cdot y + 2 \cdot z = 7940 \\ 4 \cdot x + 3 \cdot y + 0 \cdot z = 8110 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8420 \\ 7940 \\ 8110 \end{pmatrix}$$

Associando os comandos "MATRIZ.MULT" e "MATRIZ.INVERSO" em uma planilha eletrônica, é possível determinar os valores x, y e z a partir da matriz dos coeficientes numéricos e da matriz dos termos independentes. Dessa forma, temos:



LibreOffice. Fac-símile: ID/BR

Portanto, $x = 820$, $y = 1\,610$ e $z = 1\,950$. Determinando a diferença entre o comprimento da maior pista e o da menor pista, temos $1\,950 - 820 = 1\,130$, ou seja, a diferença é de 1 130 m.

Alternativa **a**.

12. Representando o número de cada tipo de veículo pela sua inicial, podemos elaborar o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} c + m + t = 50 & ① \\ 4c + 2m + 3t = 165 & ② \\ c = 2m & ③ \end{cases}$$

Substituindo o valor obtido na equação ③ nas equações ① e ②, temos:

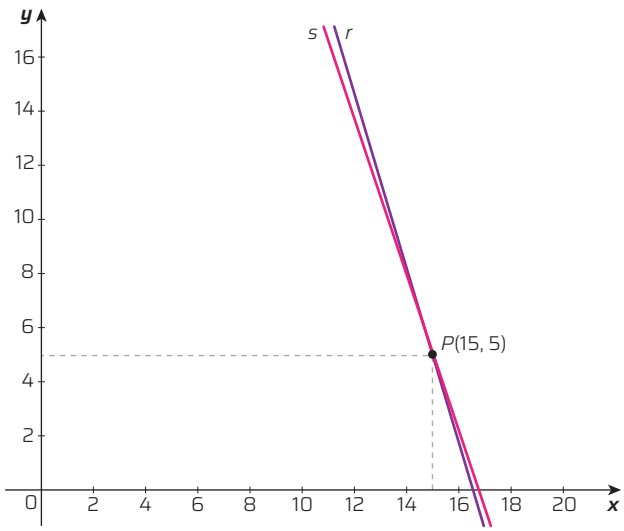
$c + m + t = 50 \Rightarrow 2m + m + t = 50 \Rightarrow 3m + t = 50$

$4c + 2m + 3t = 165 \Rightarrow 4 \cdot (2m) + 2m + 3t = 165 \Rightarrow 8m + 2m + 3t = 165 \Rightarrow 10m + 3t = 165$

Dessa forma, obtemos um sistema de equações 2×2 equivalente ao sistema de equações 3×3 dado.

$$\begin{cases} 3m + t = 50 \\ 10m + 3t = 165 \end{cases}$$

Representando tais equações no plano, obtemos as seguintes retas concorrentes, cujo ponto de intersecção $P(15, 5)$ pertence a ambas e cujas coordenadas satisfazem simultaneamente as equações:



ID/BR

Assim, temos $m = 15$, $t = 5$. Logo:

$c = 50 - 15 - 5 = 30$

Portanto, no estacionamento havia 30 carros, 15 motos e 5 triciclos.

Alternativa **e**.

13. Vamos analisar as entradas e saídas em cada um dos vértices da rede apresentada.

- No vértice E_1, temos:
  $290 = x_1 + x_2 \Rightarrow -x_1 - x_2 + 290 = 0$
- No vértice E_2, temos:
  $60 + x_2 = x_3 + x_5 \Rightarrow x_2 - x_3 - x_5 + 60 = 0$
- No vértice E_3, temos:
  $x_1 + x_3 = x_4 + 170 \Rightarrow x_1 + x_3 - x_4 - 170 = 0$
- No vértice E_4, temos:
  $x_4 + x_5 = 180 \Rightarrow x_4 + x_5 - 180 = 0$

Dessa forma, obtemos um sistema com quatro equações e cinco incógnitas.

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 290 = 0 \\ x_2 - x_3 - x_5 + 60 = 0 \\ x_1 + x_3 - x_4 - 170 = 0 \\ x_4 + x_5 - 180 = 0 \end{cases}$$

Note que, no primeiro membro, as incógnitas apresentam valores opostos. Logo, adicionando membro a membro as equações, obtemos a indeterminação $0 = 0$. Logo, trata-se de um sistema possível e indeterminado, apresentando infinitas soluções.

Alternativa **e**.

CÁLCULO RÁPIDO (P. 281)

1. **a)** $\begin{cases} 2x - 3y = -16 \\ 5x + 3y = 2 \end{cases} \Rightarrow 7x = -14 \Rightarrow x = \frac{-14}{7} \Rightarrow x = -2$

Substituindo x na segunda equação, temos:

$5x + 3y = 2 \Rightarrow 5 \cdot (-2) + 3y = 2 \Rightarrow -10 + 3y = 2 \Rightarrow 3y = 2 + 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3y = 12 \Rightarrow y = \frac{12}{3} \Rightarrow y = 4$

Portanto, o conjunto solução é $S = \{(-2, 4)\}$. Logo, possui uma única solução (Sistema possível determinado (SPD)).

b) $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 4x - 6y = 5 \end{cases} \cdot(-2) \Rightarrow \begin{cases} -4x + 6y = -8 \\ 4x - 6y = 5 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 0x + 0y = -3 \Rightarrow 0 \neq -3$

Portanto, o conjunto solução é $S = \varnothing$. Logo, não existe nenhuma solução (Sistema impossível (SI)).

c) $\begin{cases} 3x + y = 0 \\ 11x - y = 42 \end{cases} \Rightarrow 14x = 42 \Rightarrow x = \frac{42}{14} \Rightarrow x = 3$

Substituindo x na primeira equação, temos:

$3x + y = 0 \Rightarrow 3 \cdot (3) + y = 0 \Rightarrow 9 + y = 0 \Rightarrow y = 0 - 9 \Rightarrow y = -9$

Portanto, o conjunto solução é $S = \{(-9, 3)\}$. Logo, possui uma única solução (Sistema possível determinado (SPD)).

d) $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - y = -4 \end{cases} \cdot(3) \Rightarrow \begin{cases} x + 3y = 5 \\ 6x - 3y = -12 \end{cases} \Rightarrow 7x = -7 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{-7}{7} \Rightarrow x = -1$

Substituindo x na primeira equação, temos:

$x + 3y = 5 \Rightarrow -1 + 3y = 5 \Rightarrow 3y = 5 + 1 \Rightarrow 3y = 6 \Rightarrow y = \frac{6}{3} \Rightarrow y = 2$

Portanto, o conjunto solução é $S = \{(-1, 2)\}$. Logo, possui uma única solução (Sistema possível determinado (SPD)).

e) $\begin{cases} -3x + y = 7 \\ 9x - 3y = -21 \end{cases} \cdot(3) \Rightarrow \begin{cases} -9x + 3y = 21 \\ 9x - 3y = -21 \end{cases} \Rightarrow 0x + 0y = 0 \Rightarrow 0 = 0$

Fazendo $y = \alpha$, temos:

$-3x + y = 7 \Rightarrow -3x + \alpha = 7 \Rightarrow -3x = 7 - \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{7 - \alpha}{-3} \Rightarrow x = \frac{\alpha - 7}{3}$

Portanto, o conjunto solução é $S = \left\{\left(\frac{\alpha - 7}{3}, \alpha \,\middle|\, \alpha \in R\right)\right\}$. Logo, possui infinitas soluções (Sistema possível indeterminado (SPI)).

f) $\begin{cases} 5x + 2y = 8 \\ 10x + 4y = 5 \end{cases} \cdot(-2) \Rightarrow \begin{cases} -10x - 4y = -16 \\ 10x + 4y = 5 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 0x + 0y = -11 \Rightarrow 0 \neq -11$

Portanto, o conjunto solução é $S = \varnothing$. Logo, não existe nenhuma solução (Sistema impossível (SI)).

2. **a)** $2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$

b) $3^x = 27 \Rightarrow 3^x = 3^3 \Rightarrow x = 3$

c) $(-3)^3 = x \Rightarrow x = -27$

d) $(2)^{-3} = x \Rightarrow x = \frac{1}{2^3} \Rightarrow x = \frac{1}{8}$

e) $(-5)^{-1} = x \Rightarrow x = -\frac{1}{5}$

f) $x^{-2} = 16 \Rightarrow \frac{1}{x^2} = 16 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{16}} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{4}$

3. **a)** Observando o círculo trigonométrico, verificamos que o valor de x, do 1º quadrante, cujo seno vale $\frac{1}{2}$ é o arco de 30° ou $\frac{\pi}{6}$ *rad*. Consequentemente, o seu simétrico, no 2º quadrante, será o arco de 150° ou $\frac{5\pi}{6}$ *rad*.

Assim, para $0 \leq x \leq 2\pi$, a solução da equação será: $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$.

b) Observando o círculo trigonométrico, verificamos que o valor de x, do 1º quadrante, cujo cosseno vale $\frac{1}{2}$ é o arco de 60° ou $\frac{\pi}{3}$ *rad*. Consequentemente, o seu simétrico, no 4º quadrante, será o arco de 300° ou $\frac{5\pi}{3}$ *rad*.

Assim, para $0 \leq x \leq 2\pi$, a solução da equação será: $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$.

c) Observando o círculo trigonométrico, verificamos que o valor de x, do 1º quadrante, cujo seno vale $\frac{\sqrt{2}}{2}$ é o arco de 45° ou $\frac{\pi}{4}$ *rad*. Consequentemente, o seu simétrico, no 2º quadrante, será o arco de 135° ou $\frac{3\pi}{4}$ *rad*.

Assim, para $0 \leq x \leq 2\pi$, a solução da equação será: $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$.

d) Observando o círculo trigonométrico, verificamos que o valor de x, do 1º quadrante, cujo cosseno vale $\frac{\sqrt{2}}{2}$ é o arco de 45° ou $\frac{\pi}{4}$ *rad*. Consequentemente, o seu simétrico, no 4º quadrante, será o arco de 315° ou $\frac{7\pi}{4}$ *rad*.

Assim, para $0 \leq x \leq 2\pi$, a solução da equação será: $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$.

e) Observando o círculo trigonométrico, podemos verificar que o valor de x, do 1º quadrante, cujo seno vale $\frac{\sqrt{3}}{2}$ é o arco de 60° $\left(\frac{\pi}{3}\ rad\right)$ e, os seus simétricos serão os arcos de 240° $\left(\frac{4\pi}{3}\ rad\right)$ e 300° $\left(\frac{5\pi}{3}\ rad\right)$.

Assim, para $0 \leq x \leq 2\pi$, a solução da equação será: $S = \left\{\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$.

f) Verificamos que o valor de x, do 2º quadrante, cujo cosseno vale -1 é o arco de 180° ou π *rad*.

Assim, para $0 \leq x \leq 2\pi$, a solução da equação será: $S = \{\pi\}$

4. **a)** Pela semelhança de triângulos, temos: $\frac{4}{4+4} = \frac{x}{5} \Rightarrow \frac{4}{8} = \frac{x}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow 8x = 4 \cdot 5 \Rightarrow 8x = 20 \Rightarrow x = \frac{20}{8} \Rightarrow x = 2{,}5$

b) Pela semelhança de triângulos, temos:

$\frac{x}{3+x} = \frac{5}{7} \Rightarrow 7x = 5(3 + x) \Rightarrow 7x = = 15 + 5x \Rightarrow 7x - 5x = 15 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x = 15 \Rightarrow x = \frac{15}{2} \Rightarrow x = 7{,}5$

PARA RECORDAR (P. 282)

1. **a)** Não. Pois:

Se $x = 1$ e $y = 2$, temos:

$1 < 2,\ 1^2 = 1 < 2$ (Sim)

Se $x = 2$ e $y = 2$, temos:

$2 < 2,\ 2^2 = 4 < 2$ (Não)

Se $x = 2$ e $y = 4$, temos:

$2 < 4,\ 2^2 = 4 < 4$ (Não)

Se $x = 3$ e $y = 2$, temos:

$3 < 2,\ 3^2 = 9 < 2$ (Não)

b) Sim. Por exemplo:

Se $x = 1$, temos: $-1 < 0$ (Sim)

Se $x = 2$, temos: $-2 < 0$ (Sim)

Se $x = 3$, temos: $-3 < 0$ (Sim)

c) Sim. Por exemplo:
Se $x = 1$ e $y = 1$, temos:
$\sqrt{1^2} \cdot \sqrt{1^2} = 1 \cdot 1 \Rightarrow 1 \cdot 1 = 1 \Rightarrow 1 = 1$ (Sim)
Se $x = 2$ e $y = 2$, temos:
$\sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2^2} = 2 \cdot 2 \Rightarrow 2 \cdot 2 = 4 \Rightarrow 4 = 4$ (Sim)
Se $x = 2$ e $y = 3$, temos:
$\sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3^2} = 2 \cdot 3 \Rightarrow 2 \cdot 3 = 6 \Rightarrow 6 = 6$ (Sim)

2. **a)** Sim. De acordo com enunciado, sabemos que:
João: 1 pessoa
1ª etapa: 2 pessoas
2ª etapa: 4 pessoas
3ª etapa: 8 pessoas
4ª etapa: 16 pessoas
⋮
Ou seja, é uma P.G. com razão 2.

b) Ao todo participaram dessa campanha até a 5ª etapa:
$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_5 = 2 \cdot 2^{5-1} \Rightarrow a_5 = 2 \cdot 2^4 \Rightarrow a_5 = 2^5 \Rightarrow$
$\Rightarrow a_5 = 32$ pessoas

c) $S_n = \dfrac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$
Para $n = 8$, temos que:
$S_8 = \dfrac{a_1(q^8 - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_8 = \dfrac{2(2^8 - 1)}{2 - 1} \Rightarrow S_8 = \dfrac{2(256 - 1)}{1} \Rightarrow$
$\Rightarrow S_8 = 2 \cdot 255 \Rightarrow S_8 = 510$ kg

d) $S_n = \dfrac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow 128 = \dfrac{2(2^n - 1)}{2 - 1} \Rightarrow \dfrac{128}{2} = 2^n - 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow 64 = 2^n - 1 \Rightarrow 2^n = 65$

Como $2^n = 64 \Rightarrow n = 6$, segue que $n \geqslant 6$.

Logo, ele encheu a primeira caixa na 6ª etapa.

3. O número total de maneiras de escolher 2 fios entre 5 é dado por codificação:
$C_{5,2} = \dfrac{5!}{2! \cdot (5 - 2)!} \Rightarrow C_{5,2} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 1 \cdot 3!} \Rightarrow C_{5,2} = \dfrac{20}{2} \Rightarrow C_{5,2} = 10$
Para cada combinação de 2 fios, existem 2 ordens possíveis (desligar o primeiro fio e depois o segundo, ou vice-versa). Portanto, o número total de maneiras de desligar 2 fios em ordem é: $10 \times 2 = 20$.

O número de maneiras corretas de desligar os fios (desligando os 2 fios específicos na ordem correta) é 1.

A probabilidade de o eletricista desativar o curto, em uma determinada ordem, é de $\dfrac{1}{20}$.

4. $180° - 11° = 169°$
$180° - 169° - 9° = 2°$
$15 \cdot \text{tg } 9° \cong 15 \cdot 0{,}16 \simeq 2{,}4$
$15 \cdot \text{tg } 11° \cong 15 \cdot 0{,}19 \simeq 2{,}85$
Logo, $2{,}85 - 2{,}4 = 0{,}45$ m. Portanto, a largura ℓ do rio é 0,45 m.

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO (P. 283)

1. A menina de azul, que não é nem Alice nem Cláudia, está entre a menina de branco e Daniela.
A menina de preto está entre a menina de vermelho e Cláudia.
Resolvendo as etapas acima, concluímos que a ordem das cores que as meninas estão usando é: preto, azul, branco e vermelho.
Alternativa **e**.

2. De acordo com o enunciado, temos: $D > C$
$C - A = A - D$
$B + D = A + C$
$C - A = A - D \Rightarrow C + D = A + A \Rightarrow C + D = 2A$
$C + C < C + D = 2A \Rightarrow 2C < 2A \Rightarrow C < A \Rightarrow A > C$
$D + D < C + D = 2A \Rightarrow 2D > 2A \Rightarrow D > A \Rightarrow D > A > C$
$B + D = A + C \Rightarrow B + A < A + C \Rightarrow B < C \Rightarrow C > B \Rightarrow D > A > C > B$
$D - B > A - C$. *Logo*, $B + D = A + C \Rightarrow D - C = A - B$.
Alternativa **d**.

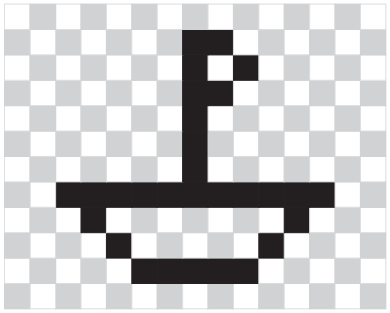
3. Analisando o problema, temos: $3 \cdot 8 = 24$.
$\dfrac{24 \text{ fatias}}{9} \simeq 2{,}667 \simeq 3$ fatias
Podemos concluir que um deles comeu, no mínimo, três fatias.
Alternativa **e**.

MATEMÁTICA E TECNOLOGIA (P. 284)

Conectando ideias

1. Resposta pessoal. Exemplo de resposta:

I.



Ilustrações: ID/BR

II.

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

2. Resposta pessoal. Os estudantes podem produzir suas obras de arte digital no Pixilart, por meio do *link* https://www.pixilart.com/draw?ref=home-page (acesso em: 29 out. 2024).

Resposta pessoal.

POR DENTRO DO ENEM E DOS VESTIBULARES (P. 286)

1. Seja a matriz $D = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, temos que $C \cdot D = I \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} =$
$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2a + c & 2b + d \\ 5a + 3c & 5b + 3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$
$\Rightarrow \begin{cases} 2a + c = 1 \\ 2b + d = 0 \Rightarrow d = -2b \\ 5a + 3c = 0 \Rightarrow 3c = -5a \Rightarrow c = -\dfrac{5}{3}a \\ 5b + 3d = 1 \end{cases}$
Substituindo d na quarta equação, temos:
$5b + 3d = 1 \Rightarrow 5b + 3 \cdot (-2b) = 1 \Rightarrow 5b - 6b = 1 \Rightarrow b = -1$
Substituindo b na segunda equação, temos:
$d = -2b \Rightarrow d = -2 \cdot (-1) \Rightarrow d = 2$
Substituindo c na primeira equação, temos:
$2a + c = 1 \Rightarrow 2a - \dfrac{5}{3}a = 1 \Rightarrow \dfrac{6a - 5a}{3} = \dfrac{3}{3} \Rightarrow a = 3$
Substituindo a na terceira equação, temos:
$c = -\dfrac{5}{3}a \Rightarrow c = -\dfrac{5}{3} \cdot (3) \Rightarrow c = -5$
Logo, $D = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow D = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$.
Alternativa **e**.

2. Sejam $P(a, b)$, $P'(a', b')$ e $M = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\,\theta \\ sen\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, então $\begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} = M \times \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$
Sabemos que $\theta = \dfrac{\pi}{6}$, temos: $M = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -sen\,\frac{\pi}{6} \\ sen\,\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{bmatrix} \Rightarrow M = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} = M \times \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b \end{bmatrix} \Rightarrow$
$\Rightarrow P'(a', b') \Rightarrow P'\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}a - \dfrac{1}{2}b,\ \dfrac{1}{2}a + \dfrac{\sqrt{3}}{2}b\right)$
Alternativa **e**.

BIBLIOGRAFIA COMENTADA

Almeida, Fernando José de; Fonseca Júnior, Fernando Moraes. *ProInfo*: projetos e ambientes inovadores. Brasília, DF: Ministério da Educação, Secretaria de Educação a Distância, 2000. *E-book*. Disponível em: http://www.dominiopublico.gov.br/pesquisa/DetalheObraDownload.do?select_action=&co_obra=28295&co_midia=2. Acesso em: 9 out. 2024.

A obra apresenta referências teóricas e práticas que facilitam a apropriação das novas tecnologias e seu uso como instrumento de transformação do sistema educacional. Os autores adotam uma metodologia de aprendizagem por projetos e discutem como tais projetos articulam disciplinas. Além disso, sugerem como aplicar e utilizar *softwares*, dando indicações de como o trabalho com a tecnologia pode abrir horizontes para além da sala de aula.

American Psychiatric Association (APA). *Manual diagnóstico e estatístico de transtornos mentais:* DSM-5. 5. ed. Porto Alegre: Artmed, 2014.

O manual é uma obra de referência para a prática clínica relacionada aos cuidados com saúde mental.

Andrade, Julia Pinheiro (org.). *Aprendizagens visíveis*: experiências teórico-práticas em sala de aula. Belo Horizonte: Panda Educação, 2021.

Esse livro compila práticas pedagógicas que visam melhorar o ensino na Educação Básica, dialogando com propostas contemporâneas, como a aprendizagem visível. O livro aborda temas como a cultura *maker*, o uso do *design* na educação e a importância da avaliação formativa, oferecendo ferramentas práticas aos educadores.

Arroyo, Miguel González. *Imagens quebradas*: trajetórias e tempos de alunos e mestres. Petrópolis: Vozes, 2004.

O autor traz um conjunto de reflexões sobre o momento vivido nas escolas, tanto para o educador quanto para o educando, e as consequências para as práticas pedagógicas.

Bacich, Lilian; Moran, José (org.). *Metodologias ativas para uma educação inovadora*: uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso, 2017.

O ponto central do livro são as práticas pedagógicas para a Educação Básica e Superior que valorizam o protagonismo dos estudantes e contribuem para a formação de professores. A obra, escrita por autores brasileiros, analisa por que e para que usar metodologias ativas, cujo foco é a participação efetiva dos estudantes na construção do conhecimento e no desenvolvimento de competências.

Bender, William N. *Aprendizagem baseada em projetos*: educação diferenciada para o século XXI. Porto Alegre: Penso, 2014.

O educador estadunidense apresenta, nesse livro, as diretrizes para a implementação da Aprendizagem Baseada em Projetos (ABP) na Educação Básica com o uso das tecnologias em sala de aula. A obra também propõe modelos de projeto e diferentes tipos de estratégia para desenvolvê-los.

Bergmann, Jonathan. *Aprendizagem invertida para resolver o problema do dever de casa*. Porto Alegre: Penso, 2018.

Nesse livro, o autor, especialista pioneiro em aula invertida, analisa o motivo pelo qual a tradicional tarefa de casa não desperta tanto interesse nos estudantes. O livro aborda o potencial da sala de aula invertida para provocar o interesse dos estudantes, aumentando a capacidade de aprendizagem por meio dessa estratégia metodológica. O autor sugere ainda atividades especialmente planejadas para tornar os estudantes participantes ativos na experiência de sala de aula.

Boaler, Jo. *Mentalidades matemáticas*: estimulando o potencial dos estudantes por meio da matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador. Porto Alegre: Penso, 2018 (Série Desafios da Educação).

Nessa obra, a autora desafia a noção de que a Matemática é difícil, propondo uma abordagem que fomenta uma mentalidade de crescimento entre os estudantes. O livro fornece exemplos práticos e atividades para transformar o ensino da Matemática, tornando a aprendizagem mais envolvente e prazerosa.

Boaler, Jo. *Mente sem barreiras*: as chaves para destravar seu potencial ilimitado de aprendizagem. Porto Alegre: Penso, 2019.

É comum a crença de que o alcance de nossas habilidades intelectuais é limitado pela genética. Essa ideia tem influência significativa na maneira como compreendemos a aprendizagem e em concepções como a de que se somos bons ou ruins em Matemática ou em Arte, por exemplo. No entanto, estudos recentes mostram que atribuir à genética a determinação da capacidade de aprender é um equívoco, e o livro se propõe a ajudar a transformar profundamente as noções de educação e aprendizagem, ampliando a compreensão dos processos de aprendizado e de como aproveitar o vasto potencial cognitivo do nosso cérebro.

Boaler, Jo. *O que a matemática tem a ver com isso?* Como professores e pais podem transformar a aprendizagem da matemática e inspirar sucesso. Porto Alegre: Penso, 2019.

Esse livro explora como métodos tradicionais de ensino e percepções negativas minam a confiança dos estudantes em Matemática. A autora apresenta estratégias para professores e pais transformarem essa visão e inspirarem o sucesso dos estudantes, oferecendo abordagens concretas para tornar a matemática mais acessível e menos intimidante.

Bondie, Rhonda; Zusho, Akane. *Diferenciação pedagógica na prática*: rotinas para engajar todos os estudantes. Porto Alegre: Penso, 2023.

Esse livro oferece uma abordagem prática para a diferenciação pedagógica, apresentando estratégias para adequar o ensino às necessidades individuais dos estudantes. A obra fornece ferramentas concretas para criar aulas mais engajadoras e acessíveis, além de discutir o uso da avaliação formativa para ajustar o ensino.

Borba, Gustavo Severo de; Lesnovski, Melissa Merino. *Transformando a sala de aula*: ferramentas do *design* para engajamento e equidade. Porto Alegre: Penso, 2023.

Esse livro aborda a inovação na educação, utilizando ferramentas de *design* para promover engajamento e equidade. Os autores discutem os impactos da pandemia e as novas gerações de estudantes, propondo práticas inclusivas para renovar currículos e promover a diversidade nas salas de aula.

Borba, Marcelo de C.; Penteado, Miriam G. *Informática e educação matemática*. 6. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019 (Coleção Tendências em Educação Matemática).

Nesse livro, os autores descrevem diferentes momentos experenciados com o uso da informática como ferramenta da educação matemática em sala de aula por professores e estudantes brasileiros. Além disso, essas experiências comprovaram a eficácia desse recurso tecnológico no ambiente escolar e fomentaram reflexões sobre políticas educacionais nessa área.

Boyer, Carl B. *História da Matemática*. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Blucher, 1996.

Essa é uma obra de referência em história da Matemática em língua portuguesa. Em seus capítulos, estruturados em ordem cronológica, encontram-se as origens e as razões de ideias, conceitos e procedimentos da Matemática construídos pelo ser humano desde a Pré-História até o século XX. O livro pode ser uma fonte de consulta sobre o que se ensina e também sobre preparação de aulas para contextualizar a origem do que os estudantes vão aprender.

Brasil. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). *Matriz de Avaliação de Matemática*: Pisa 2012. [Brasília, DF]: Inep, 2012. Disponível em: https://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/marcos_referenciais/2013/matriz_avaliacao_matematica.pdf. Acesso em: 9 out. 2024.

O Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa) traz informações sobre o desempenho dos estudantes na faixa etária de 15 anos. Nesse documento, é possível conhecer a matriz de avaliação de Matemática.

Brasil. *Lei n. 13146, de 6 julho de 2015*. Institui a Lei Brasileira de Inclusão da Pessoa com Deficiência (Estatuto da Pessoa com Deficiência). Brasília, DF: Presidência da República, 2015. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2015-2018/2015/lei/l13146.htm?msclkid=e03ca915a93011eca55b7de3600188ab. Acesso em: 9 out. 2024.

A instituição do Estatuto da Pessoa com Deficiência busca assegurar a inclusão social e o pleno exercício da cidadania a essas pessoas.

Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Aplicações do pensamento computacional para os Anos Finais do Ensino Fundamental*. [Brasília, DF]: MEC/SEB, [20--]. Disponível em: https://avamec.mec.gov.br/# /instituicao/seb/curso/4701/informacoes. Acesso em: 9 out. 2024.

Nesse curso *on-line*, destinado a professores dos Anos Finais do Ensino Fundamental, são explorados os quatro pilares do pensamento computacional e algumas aplicações em sala de aula. O curso faz parte do Ambiente Virtual do MEC (Avamec).

Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular*: educação é a base. Brasília, DF: MEC/SEB, 2018a. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 13 set. 2024.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem desenvolver ao longo das etapas e das modalidades da Educação Básica.

Brasil. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Câmara de Educação Básica. *Resolução CNE/CEB n. 3, de 21 de novembro de 2018*. Atualiza as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. Brasília, DF: MEC/CNE, 2018b. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/docman/novembro-2018-pdf/102481-rceb003-18/file. Acesso em: 9 out. 2024.

Essa resolução atualiza as diretrizes que devem ser observadas pelos sistemas de ensino e suas unidades escolares na organização curricular e que se aplicam a todas as formas e modalidades de Ensino Médio, complementadas, quando necessário, por diretrizes próprias.

Camargo, Fausto; Daros, Thuinie. *A sala de aula inovadora*: estratégias pedagógicas para fomentar o aprendizado ativo. Porto Alegre: Penso, 2018 (Série Desafios da Educação).

Esse livro mostra como inovar em sala de aula, isto é, superar a aula expositiva por meio das metodologias ativas, em que o estudante é o protagonista da aprendizagem. Para isso, os autores descrevem mais de quarenta estratégias, de modo simples e direto, que podem ser aplicadas com base em métodos e recursos práticos para efetivamente promover mudanças da Educação Básica ao Ensino Superior.

Chambers, Paul; Timlin, Robert. *Ensinando matemática para adolescentes*. 2. ed. Porto Alegre: Penso, 2015.

Esse livro é um guia prático para professores de Matemática, abordando desafios de como melhorar o desempenho e motivar estudantes do Ensino Médio. Os autores oferecem estratégias para criar planos de aula eficazes, usar recursos de forma eficiente e avaliar o progresso dos estudantes.

Code. Disponível em: https://code.org. Acesso em: 9 out. 2024.

Essa organização sem fins lucrativos oferece cursos EAD gratuitos para promover a educação da Ciência da Computação a estudantes dos ensinos Fundamental e Médio.

Cohen, Elizabeth G.; Lotan, Rachel A. *Planejando o trabalho em grupo*: estratégias para salas de aula heterogêneas. 3. ed. Porto Alegre: Penso, 2017.

As autoras apresentam, no livro, estudos e propostas importantes de como usar efetivamente a aprendizagem cooperativa na construção de salas de aula equitativas. A obra inclui evidências de pesquisas recentes sobre o que torna uma tarefa adequada para grupos, explicita como o trabalho em times favorece o crescimento e o desenvolvimento dos estudantes e de que forma os educadores podem organizar suas salas de aula para que todos participem e aprendam ativamente.

Comitê Gestor da Internet no Brasil (CGI.br). *Pesquisa sobre o uso das tecnologias de informação e comunicação nas escolas brasileiras*: TIC educação 2017. São Paulo: CGI.br, 2018. *E-book*. Disponível em: https://cetic.br/media/docs/publicacoes/2/tic_edu_2017_livro_eletronico.pdf. Acesso em: 9 out. 2024.

O livro traz estudos e indicadores sobre a adoção das tecnologias de informação e comunicação (TIC) para ampliar o conhecimento sobre as implicações sociais e econômicas da expansão da internet na sociedade brasileira.

Costa, Sérgio Francisco. *Introdução ilustrada à estatística*. 5. ed. São Paulo: Harbra, 2015.

O autor dessa obra organiza e apresenta os conceitos fundamentais da Estatística de maneira lúdica, utilizando diversas ilustrações que ajudam a compreender melhor temas como mensuração, populações e amostras e a diferença entre estatística descritiva e estatística inferencial, além de estudo detalhado sobre representações gráficas, medidas de tendência central e de variabilidade, probabilidade, distribuição binomial, distribuição normal, entre outros temas. O livro também oferece um formulário para contatar a editora e obter um gabarito da curva normal, que funciona como um simulador para a resolução de alguns exercícios e problemas que dependem da visualização do gráfico, além de trazer respostas dos exercícios propostos. Além disso, a obra apoia os professores com uma seleção de exercícios resolvidos.

Coxford, Arthur F.; Shulte, Albert P. (org.). *As ideias da álgebra*. São Paulo: Atual, 1994.

Esse livro é uma tradução de uma obra do National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), com artigos de diferentes pesquisadores e educadores que auxiliam na compreensão do que está envolvido no desenvolvimento do pensamento algébrico. Algumas passagens são especialmente recomendadas, como os capítulos 2 e 5. No capítulo 2, são apresentadas as diferentes concepções de Álgebra, como essas concepções dependem do sentido que a letra assume e quais são as implicações dessas concepções para a aprendizagem. O capítulo 5 aborda as dificuldades com a aprendizagem de funções e permite que, de posse desse conhecimento, seja possível planejar as aulas de modo a apoiar os estudantes na direção de uma aprendizagem significativa desse conteúdo.

D'Ambrosio, Ubiratan. *Etnomatemática*: elo entre as tradições e a modernidade. Belo Horizonte: Autêntica, 2019.

Internacionalmente reconhecido por suas pesquisas na área, o autor explora a Etnomatemática, destacando seu papel na cultura ocidental e sua relevância para o ensino. A obra discute como a Matemática pode ser vista como uma forma decolonial, centrada nas culturas e nos saberes locais, e apresenta reflexões sobre diversos trabalhos realizados na área, tanto no Brasil quanto no exterior.

Dayrell, Juarez; Carrano, Paulo; Maia, Carla Linhares (org.). *Juventude e Ensino Médio*: sujeitos e currículos em diálogo. Belo Horizonte: Ed. da UFMG, 2014. Disponível em: https://educacaointegral.org.br/wp-content/uploads/2015/01/livro-completo_juventude-e-ensino-medio_2014.pdf. Acesso em: 9 out. 2024.

O livro trata de temas que dizem respeito aos jovens e à relação deles com o currículo do Ensino Médio sob a perspectiva do trabalho, da cultura, da ciência e da tecnologia.

Dell'Isola, Regina L. Péret. Inferência na leitura. *In*: Glossário Ceale: termos de alfabetização, leitura e escrita para educadores. Belo Horizonte: FaE-UFMG, [20--]. Disponível em: https://www.ceale.fae.ufmg.br/glossarioceale/referencia/dell-isola-r-l-cia-p-ret-leitura-infer-ncia-e-contexto-sociocultural-belo-horizonte-formato-saraiva-2001-. Acesso em: 9 out. 2024.

O verbete do Glossário Ceale, do Centro de Alfabetização, Leitura e Escrita da Faculdade de Educação da Universidade Federal de Minas Gerais, trata da concepção de inferência e de sua importância no processo de leitura.

Delors, Jacques *et al*. *Educação*: um tesouro a descobrir. Relatório para a Unesco da Comissão Internacional sobre Educação para o século XXI. Brasília, DF: MEC, 2010. *E-book*. Disponível em: https://unesdoc.Unesco.Org/ark:/48223/pf0000109590_por. Acesso em: 9 out. 2024.

O relatório da Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura (Unesco) indica o conjunto de missões da educação, organizado com base em quatro aprendizagens fundamentais.

Duny, André. As contradições do projeto coletivo: emancipação ou manipulação? *In*: Apap, Georges *et al*. *A construção dos saberes e da cidadania*: da escola à cidade. Porto Alegre: Artmed, 2002.

Esse texto aborda como questão central as demandas por novas práticas no campo da docência. De acordo com o autor, é possível pensar um mundo no qual os saberes e a cidadania sejam tratados de forma mais inteligente e humanizada.

Fundação Scratch. *Scratch*. [*S. l.*], [20--]. Disponível em: https://scratch.mit.edu/about. Acesso em: 9 out. 2024.

Essa plataforma gratuita foi desenvolvida para os usuários poderem programar histórias, jogos e animações e compartilhá-las.

Gardner, Howard. *Inteligências múltiplas*: a teoria na prática. Porto Alegre: Artmed, 1995.

Precursor dos estudos de neurociência, o autor desse livro apresenta as ideias fundamentais que desencadearam uma revolução na maneira como compreendemos a inteligência humana e as possibilidades de sua aplicação na educação, em especial nas escolas e salas de aula nas quais a aprendizagem seja pensada com profundidade, para além do estudo superficial de conteúdos, visando a um ensino voltado para a compreensão.

GeoGebra. Disponível em: https://www.geogebra.org. Acesso em: 13 set. 2024.

Essa plataforma gratuita de aplicativos matemáticos foi desenvolvida para os usuários criarem e compartilharem projetos por meio do *software* de geometria dinâmica GeoGebra.

Grover, Shuchi; Pea, Roy. Computational thinking in K-12: a review of the state of the field. *Educational Researcher*, [*s. l.*], v. 42, n. 1, 2013.

Esse artigo apresenta um panorama do desenvolvimento do pensamento computacional e traz estudos feitos após a publicação do artigo de Jeannette Wing, precursora desse tema.

Hattie, John. *Aprendizagem visível para professores*: como maximizar o impacto da aprendizagem. Porto Alegre: Penso, 2017.

Fundamentado em amplas pesquisas com milhões de estudantes ao redor do mundo, o autor explica como é possível maximizar a aprendizagem na escola por meio do que ele define como aprendizagem visível. Na obra, o autor apresenta conceitos bastante inovadores relacionados à avaliação e ao acompanhamento contínuo da aprendizagem pelo educador e pelo estudante, ensinando como aplicar os princípios da aprendizagem visível em qualquer sala de aula.

Hattie, John; Zierer, Klaus. *10 princípios para a aprendizagem visível*: educar para o sucesso. Porto Alegre: Penso, 2019.

O livro é um guia prático que apresenta dez princípios essenciais para que professores e instituições de ensino implementem a aprendizagem visível, visando maximizar o aprendizado. A obra aborda temas como avaliação, *feedback*, trabalho colaborativo, importância do diálogo e da construção de relações positivas, todos voltados para a aprendizagem visível.

Hernández, Fernando; Ventura, Montserrat. *A organização do currículo por projetos de trabalho*: o conhecimento é um caleidoscópio. 5. ed. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998.

Os autores descrevem os princípios e as práticas da organização do currículo por projetos, e não pelas disciplinas tradicionais. Também resgatam as ideias do filósofo estadunidense John Dewey (1859-1952), que considerava a atividade prática, a liberdade de pensamento e a democracia essenciais para a educação.

Instituto Ayrton Senna (IAS). *As competências socioemocionais no cotidiano das escolas*. [*S. l.*]: IAS, 2022. *E-book*. Disponível em: https://institutoayrtonsenna.org.br/app/uploads/2022/11/instituto-ayrton-senna-as-competencias-socioemocionais-no-cotidiano-das-escolas.pdf. Acesso em: 9 out. 2024.

O texto apresenta o conceito de competências socioemocionais e discute como aplicá-lo no dia a dia, abordando os efeitos das competências na educação, as dimensões socioemocionais que impactam a aprendizagem e os modelos organizacionais.

Instituto Reúna. *BNCC comentada para o Ensino Médio*. São Paulo, 2024. Disponível em: https://www.institutoreuna.org.br/conteudo/bncc-comentada. Acesso em: 9 out. 2024.

A *BNCC comentada para o Ensino Médio* é uma ferramenta que interpreta, comenta e explica as competências específicas e as habilidades de cada área de conhecimento para essa etapa. Escrita por uma equipe de especialistas, tem como objetivo apoiar a elaboração de currículos alinhados à BNCC, sugerindo formas de desenvolver competências e habilidades em consonância com a educação integral e o projeto de vida dos estudantes, contemplando temas e objetos de conhecimento diversos. A obra também apresenta inovações e estratégias metodológicas que favorecem um trabalho integrado e contextualizado entre as áreas do conhecimento, além de exemplos de objetivos de aprendizagem.

Instituto Reúna. *Fortalecimento da aprendizagem*. São Paulo, 2024. Disponível em: https://www.institutoreuna.org.br/fortalecimento-da-aprendizagem. Acesso em: 9 out. 2024.

Essa organização sem fins lucrativos disponibiliza recursos didáticos de Língua Portuguesa e Matemática que auxiliam na recomposição das aprendizagens dos estudantes do Ensino Médio.

Knijnik, Gelsa *et al*. *Etnomatemática em movimento*. Belo Horizonte: Autêntica, 2019.

Esse livro oferece um estudo aprofundado sobre a Etnomatemática, explorando seu histórico e mudanças desde os anos 1970. As autoras discutem os avanços na área e seu impacto na educação contemporânea, questionando o conhecimento dominante e valorizando a diversidade cultural.

Lima, Ronaldo F. de. *Introdução à geometria diferencial*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. Disponível em: https://sbm.org.br/wp-content/uploads/2021/10/Introducao-a-Geometria-Diferencial_Ronaldo-Freire-Lima.pdf. Acesso em: 9 out. 2024.

Dê especial atenção ao capítulo 4, que trata da geometria intrínseca desenvolvida por Carl Friedrich Gauss e descreve as superfícies e suas curvaturas, a soma dos ângulos internos de um triângulo no plano e no espaço e as geodésicas.

Lindquist, Mary Montgomery; Shulte, Albert P. (org.). *Aprendendo e ensinando geometria*. São Paulo: Atual, 1994.

Uma das maiores contribuições desse livro é mostrar a importância da Geometria no ensino e na aprendizagem de Matemática. Destaca-se o capítulo que trata do desenvolvimento do pensamento geométrico na perspectiva das pesquisas do casal Van Hiele, segundo a qual um trabalho planejado e consistente em aulas especialmente voltadas para o estudo de Geometria e fundamentadas na problematização é crucial para que os estudantes desenvolvam o raciocínio geométrico.

Martín, Héctor Ruiz. *Como aprendemos?* Uma abordagem científica da aprendizagem e do ensino. 3. ed. Porto Alegre: Penso, 2023.

O autor explora as descobertas científicas sobre os processos de aprendizagem, abordando como aplicá-las para melhorar a prática pedagógica. Também discute temas como memória, motivação, avaliação e autorregulação, aproximando a ciência da educação para qualificar a aprendizagem nas escolas.

Martins, Amilton R. de Q.; Eloy, Adelmo A. da S. (org.). *Educação Integral por meio do pensamento computacional*: letramento em programação: relatos de experiência e artigos científicos. Curitiba: Appris, 2019 (Coleção Educação, Tecnologias e Transdisciplinaridade). Disponível em: https://institutoayrtonsenna.org.br/app/uploads/2022/11/instituto-ayrton-senna-educacao-integral-por-meio-do-pensamento-computacional.pdf. Acesso em: 9 out. 2024.

Essa obra reúne artigos científicos que detalham as características do pensamento computacional e de experiências, realizadas em salas de aulas brasileiras, que envolvem diversas estratégias metodológicas. Esse material contribuiu para a elaboração das atividades relacionadas ao desenvolvimento dessa modalidade de raciocínio e de competências socioemocionais.

Perrenoud, Philippe. *10 novas competências para ensinar*. Porto Alegre: Artmed, 2000.

As competências são enfatizadas pelo sociólogo suíço ao tratar dos desafios da educação contemporânea. A organização, a administração e o desenvolvimento da aprendizagem, a utilização de novas tecnologias, o trabalho em equipe, o envolvimento dos estudantes em suas aprendizagens e a participação na administração da escola são alguns dos temas abordados no livro.

Piangers, Marcos; Borba, Gustavo. *A escola do futuro*: o que querem (e precisam) alunos, pais e professores. Porto Alegre: Penso, 2019.

Nesse livro, o autor analisa como será a escola do futuro, o que deve ser ensinado e como ensinar a uma geração de estudantes que tem acesso rápido e quase imediato a qualquer informação, além das expectativas desses estudantes em relação à escola. O autor também discute o papel dos pais e professores nesse cenário educacional complexo e convida estudantes, pais e professores a uma reflexão.

Pozo, Juan Ignacio (org.). *A solução de problemas*. Porto Alegre: Artmed, 1998.

Esse livro apresenta a visão de que ensinar a resolver problemas, em cada área do conhecimento, significa enfatizar o ensino de procedimentos. Além disso, destaca o papel fundamental do professor em incentivar os estudantes a desenvolver estratégias para a solução de problemas.

Russell, Michael K.; Airasian, Peter W. *Avaliação em sala de aula*: conceitos e aplicações. Porto Alegre: Penso, 2014.

Esse livro trata a avaliação como um componente-chave para o processo de ensino e aprendizagem e apresenta novas ferramentas e abordagens avaliativas que decorrem da introdução das tecnologias computacionais nas escolas.

Schuhmacher, Élcio *et al*. O desenvolvimento do pensamento computacional no Ensino Médio por meio de ambientes de programação. *In*: International Conference on Engineering and Technology Education, 14., 2016, Salvador. *Anais*... Salvador: Copec, 2016. p. 239-243. Disponível em: https://copec.eu/congresses/intertech2016/proc/works/52.pdf. Acesso em: 9 out. 2024.

O artigo trata do desenvolvimento de um projeto computacional com estudantes do Ensino Médio. Os resultados demonstraram a progressão de habilidades colaborativas, de conteúdos curriculares e do pensamento computacional com base na inclusão de aplicações computacionais na prática pedagógica.

Smole, Katia Stocco; Diniz, Maria Ignez (org.). *Ler, escrever e resolver problemas*: habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001.

Apesar de ser escrito originalmente para o Ensino Fundamental, esse livro é tido como uma referência para o processo de ensino e aprendizagem de Matemática para toda a Educação Básica, em especial na abordagem de resolução de problemas aliada aos processos de comunicação.

Tomaz, Vanessa Sena; David, Maria Manuela M. S. E. *Interdisciplinaridade e aprendizagem da matemática na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2021.

Esse livro explora a interdisciplinaridade no ensino da Matemática, destacando sua importância para a formação integral do estudante. As autoras compartilham exemplos práticos de abordagens interdisciplinares, ajudando professores a integrar a matemática ao contexto social e a enriquecer a aprendizagem.

Vila, Antoni; Callejo, María Luz. *Matemática para aprender a pensar*: o papel das crenças na resolução de problemas. Porto Alegre: Artmed, 2007.

A arte de pensar não pertence exclusivamente a nenhuma ciência, mas a Matemática é uma área do conhecimento que contribui para o pleno exercício desse processo cognitivo e para aperfeiçoá-lo. A obra ajuda a responder a alguns questionamentos por meio de reflexões e situações do dia a dia que envolvem a Matemática.

Wing, Jeannette M. Computational thinking benefits society. *Social Issues in Computing*, [*s. l.*], 10 jan. 2014. Disponível em: http://socialissues.cs.toronto.edu/index.html%3Fp=279.html. Acesso em: 9 out. 2024.

Esse artigo descreve os benefícios alcançados com o desenvolvimento dos conceitos sobre pensamento computacional em diversas áreas de atuação humana.

Wing, Jeannette M. Pensamento computacional: um conjunto de atitudes e habilidades que todos, não só cientistas da computação, ficaram ansiosos para aprender e usar. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, Ponta Grossa, v. 9, n. 2, p. 1-10, maio/ago. 2016. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/4711/pdf. Acesso em: 9 out. 2024.

A pesquisadora discorre sobre a importância e o significado de desenvolver os preceitos relacionados a essa modalidade de raciocínio nos indivíduos e distingue o pensamento computacional da programação e do letramento digital.

2 2 3 3 6 0

ISBN 978-85-418-3232-8

2 900002 233605