Matemática

Polinômios

EXERCÍCIOS

01. Calcule o valor numérico de $P(x) = 2x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 5$ para $x = i$.

Resolução:

$P(i) = 2 \,.\, (i)^4 - (i)^3 - 3(i)^2 + (i) + 5 = 2 + i + 3 + i + 5 = \mathbf{10 + 2i}$

02. Dado o polinômio $P(x) = x^3 + kx^2 - 2x + 5$, determine **k** sendo $P(2) = P(0)$.

Resolução:

$P(2) = P(0) \Rightarrow 2^3 + k \,.\, 2^2 - 2 \,.\, 2 + 5 = 0^3 + k \,.\, 0^2 - 2 \,.\, 0 + 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow 8 + 4k - 4 + 5 = 5 \Rightarrow \mathbf{k = -1}$

03. Dado o polinômio $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, calcule $P(1)$.

Resolução:

$P(1) = a \,.\, 1^3 + b \,.\, 1^2 + c \,.\, 1 + d = \mathbf{a + b + c + d}$

04. Determine a soma dos coeficientes do polinômio $P(x) = (6x^2 - 4x + 1)^2$.

Resolução:

$P(x) = (6x^2 - 4x + 1)\,(6x^2 - 4x + 1) =$
$= 36x^4 - 24x^3 + 6x^2 - 24x^3 + 16x^2 - 4x + 6x^2 - 4x + 1 =$
$= 36x^4 - 48x^3 + 28x^2 - 8x + 1$

Soma = 9

05. Determine o grau do polinômio $P(x) = (a - 1)\,x^3 + (a + 1)x^2 - ax + a$.

Resolução:

Grau = 3 se $a \neq 1$
Grau = 2 se $a = 1$

06. Determine **a**, **b**, **c**, **d** que tornam identicamente nulo o polinômio $P(x) = (a - 3)\,x^3 + (b + 2)x^2 + (c - 4)x + d$.

Resolução:

$$\begin{cases} a - 3 = 0 \Rightarrow \mathbf{a = 3} \\ b + 2 = 0 \Rightarrow \mathbf{b = -2} \\ c - 4 = 0 \Rightarrow \mathbf{c = 4} \\ \mathbf{d = 0} \end{cases}$$

S = {(3, –2, 4, 0)}

07. Determine **a**, **b**, **c**, **d** para que sejam idênticos os polinômios $P(x) = (a + 2)x^3 + (b - 1)x^2 + cx + 3$ e $Q(x) = ax^2 + 2x - d + 1$.

Resolução:

$$P(x) = Q(x) \Rightarrow \begin{cases} a + 2 = 0 \Rightarrow \mathbf{a = -2} \\ b - 1 = a \Rightarrow \mathbf{b = -1} \\ \mathbf{c = 2} \\ 3 = -d + 1 \Rightarrow \mathbf{d = -2} \end{cases}$$

S = {(–2, –1, 2, –2)}

EXERCÍCIOS DE CASA

08. Calcule o valor numérico de
$P(x) = -x^4 + 3x^3 - x^2 - 4x + 1$, para:

a) $x = 0$
b) $x = 1$
c) $x = -1$
d) $x = i$
e) $x = -i$

Resolução:

a) $P(0) = -0 + 0 - 0 - 0 + 1 = \mathbf{1}$
b) $P(1) = -1 + 3 - 1 - 4 + 1 = \mathbf{-2}$
c) $P(-1) = -1 - 3 - 1 + 4 + 1 = \mathbf{0}$
d) $P(i) = -1 - 3i + 1 - 4i + 1 = \mathbf{1 - 7i}$
e) $P(-i) = -1 + 3i + 1 + 4i + 1 = \mathbf{+1 + 7i}$

---

09. Dado o polinômio $P(x) = 3x^3 + mx^2 + nx + 2$, determine **m** e **n**, sendo $P(0) = P(i)$.

Resolução:

$P(0) = P(i) \Rightarrow 0 + 0 + 0 + 2 = 3 \,.\, (-i) + m\,(-1) + n\,(i) + 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2 = -3i - m + ni + 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathbf{n = 3}$ e $\mathbf{m = 0}$

---

10. Determine a soma dos coeficientes do polinômio $P(x) = (4x^2 - 3)^5$.

Resolução:

$P(x) = (4x^2 - 3)^5 \Rightarrow$ Soma $= (4 - 3)^5 = \mathbf{1}$

---

11. Determine o grau do polinômio
$P(x) = ax^3 - ax^2 - (a + 2)x - a + 1$.

Resolução:

Grau = 3 se $a \neq 0$
Grau = 1 se $a = 0$

---

12. Determine **a**, **b**, **c**, **d**, **e** que tornam identicamente nulo o polinômio
$P(x) = (a + 7)\,x^4 - bx^3 - cx^2 - (d + 2)\,x + e - 6$.

Resolução:

$$\begin{cases} (a+7) = 0 & \Rightarrow \mathbf{a = -7} \\ -b = 0 & \Rightarrow \mathbf{b = 0} \\ -c = 0 & \Rightarrow \mathbf{c = 0} \\ -d - 2 = 0 & \Rightarrow \mathbf{d = -2} \\ e - 6 = 0 & \Rightarrow \mathbf{e = 6} \end{cases}$$

S = {(–7, 0, 0, –2, 6)}

---

13. Determine **a**, **b**, **c**, **d**, **e** para que sejam idênticos os polinômios:

$P(x) = ax^4 + 2x^3 + (b + 1)\,x^2 - 5x + c - 1$ e
$Q(x) = (b - 1)x^3 + (d - 3)x^2 + ex$

Resolução:

$$P(x) = Q(x) \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{a = 0} & \\ 2 = b - 1 & \Rightarrow \mathbf{b = 3} \\ b + 1 = d - 3 & \Rightarrow \mathbf{d = 7} \\ -5 = e & \Rightarrow \mathbf{e = -5} \\ c - 1 = 0 & \Rightarrow \mathbf{c = 1} \end{cases}$$

S = {(0, 3, 1, 7, –5)}

EXERCÍCIOS

14. Divida $P(x) = -5x^4 + 3x^3 - 2x - 3$ por $D(x) = x - 2$ pelos métodos:

a) da chave
b) de Briot-Ruffini

Resolução:

a)
$$
\begin{array}{l|l}
-5x^4 + 3x^3 - 2x - 3 & x - 2 \\
\underline{+5x^4 - 10x^3} & \mathbf{-5x^3 - 7x^2 - 14x - 30} \\
\quad -7x^3 - 2x - 3 & \\
\quad \underline{+7x^3 - 14x^2} & \\
\qquad -14x^2 - 2x - 3 & \\
\qquad \underline{+14x^2 - 28x} & \\
\qquad\quad -30x - 3 & \\
\qquad\quad \underline{+30x - 60} & \\
\qquad\qquad \mathbf{-63} &
\end{array}
$$

$\mathbf{Q(x) = -5x^3 - 7x^2 - 14x - 30}$ e $\mathbf{R(x) = -63}$

b)

2	–5	3	0	–2	–3
	–5	–7	–14	–30	–63

$\mathbf{Q(x) = -5x^3 - 7x^2 - 14x - 30}$ e $\mathbf{R(x) = -63}$

15. Determine o resto da divisão de
$P(x) = x^3 - 5x^2 - 9x + 8$ por $D(x) = x + 3$.

Resolução:

–3	1	–5	–9	8
	1	–8	15	–37

$\mathbf{Q(x) = x^2 - 8x + 15}$ e $\mathbf{R(x) = -37}$

16. Determine o resto da divisão de $P(x) = x^n + 1$ por $D(x) = x - 1$, onde $n \in \mathbb{N}$.

Resolução:

1	1	0	0	0	···	0	1
	1	1	1	1	···	1	2

$\mathbf{R(x) = 2}$

17. O resto da divisão de um polinômio $P(x)$ por $(x + 1)$ é 7 e o resto da divisão de $P(x)$ por $(x - 2)$ é 3. Determine o resto da divisão de $P(x)$ por $(x + 1)(x - 2)$.

Resolução:

$P(x) = Q_1(x) \cdot (x + 1) + 7 \Rightarrow P(-1) = Q_1(-1) \cdot 0 + 7 \Rightarrow P(-1) = 7$

$P(x) = Q_2(x) \cdot (x - 2) + 3 \Rightarrow P(2) = Q_2(2) \cdot 0 + 3 \Rightarrow P(2) = 3$

$P(x) = Q(x) \cdot (x + 1)(x - 2) + R(x) \Rightarrow \begin{cases} P(-1) = R(-1) = 7 \\ P(2) = R(2) = 3 \end{cases}$

$R(x) = ax + b \quad \begin{cases} -a + b = 7 \\ 2a + b = 3 \end{cases}$

$\begin{cases} -2a + 2b = 14 \\ 2a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow 3b = 17 \Rightarrow b = \dfrac{17}{3}$

$2a + 17/3 = 3 \Rightarrow 2a = \dfrac{9 - 17}{3} \Rightarrow a = -\dfrac{4}{3}$

$\mathbf{R(x) = -\dfrac{4}{3}x + \dfrac{17}{3}}$

EXERCÍCIOS DE CASA

18. Divida $P(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ por $D(x) = x + 1$ pelos métodos:

a) da chave
b) de Briot-Ruffini

Resolução:

a)
$$
\begin{array}{l|l}
x^3 + 2x^2 + 2x + 1 & x + 1 \\
\underline{-x^3 - x^2} & \mathbf{x^2 + x + 1} \\
\quad x^2 + 2x + 1 & \\
\quad \underline{-x^2 - x} & \\
\qquad x + 1 & \\
\qquad \underline{-x - 1} & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

$\mathbf{Q(x) = x^2 + x + 1}$ e $\mathbf{R(x) = 0}$

b)

–1	1	2	2	1
	1	1	1	0

$\mathbf{Q(x) = x^2 + x + 1}$ e $\mathbf{R(x) = 0}$

19. Divida $P(x) = -2x^3 + 8x^2 + 4$ por $D(x) = -2x^2 - 1$

Resolução:

$$\begin{array}{rrrr|l} -2x^3 & +8x^2 & & +4 & -2x^2-1 \\ \cline{5-5} +2x^3 & & +x & & \mathbf{x-4} \\ \cline{1-4} & 8x^2 & +x & +4 & \\ & -8x^2 & & -4 & \\ \cline{2-4} & & x & & \end{array}$$

$\mathbf{Q(x) = x - 4}$ e $\mathbf{R(x) = x}$

20. Determine o resto da divisão de
$P(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x + 1$ por $D(x) = x - i$.

Resolução:

i	1	–2	3	–1	1
	1	–2 + i	+2 – 2i	1 + 2i	–1 + i

$Q(x) = x^3 + (-2 + i)x^2 + (2 - 2i)x + (1 + 2i)$ e $\mathbf{R(x) = -1 + i}$

21. Determine os restos das divisões de $P(x) = x^n - 1$ por:

a) $D(x) = x - 1$ b) $D(x) = x + 1$, onde $n \in IN$.

Resolução:

a)

1	1	0	0	···	0	–1
	1	1	1	···	1	0

$\mathbf{R(x) = 0}$

b)

–1	1	0	0	···	0	–1
	1	–1	1	···	1 ou –1	0 ou –2

R(x) = 0 se n for par e **R(x) = –2 se n for ímpar**

22. Sendo 8 e 6 respectivos restos da divisão do polinômio $P(x)$ por $(x - 5)$ e $(x - 3)$, pede-se determinar o resto da divisão de $P(x)$ por $(x - 5)(x - 3)$.

Resolução:

$P(x) = Q_1(x) \cdot (x - 5) + 8 \Rightarrow P(5) = 8$

$P(x) = Q_2(x) \cdot (x - 3) + 6 \Rightarrow P(3) = 6$

$P(x) = Q(x) \cdot (x - 5)(x - 3) + R(x)$

$P(5) = 8 = R(5)$

$P(3) = 6 = R(3)$

$$R(x) = ax + b \quad \begin{cases} 8 = 5a + b \\ 6 = 3a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5a + b = 8 \\ -3a - b = -6 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1$ e $b = 3$

$\mathbf{R(x) = x + 3}$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

23. (ITA) A identidade

$\dfrac{x^3 + 4}{x^3 + 1} = 1 + \dfrac{a}{x + 1} + \dfrac{bx + c}{x^2 - x + 1}$, é válida para todo número real $x \neq -1$. Determine $a + b + c$.

Resolução:

$$\frac{x^3 + 4}{x^3 + 1} = \frac{x^3 + 1 + (x^2 - x + 1) \cdot a + (x + 1)(bx + c)}{(x^2 - x + 1)(x + 1) \cdot 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^3 + 4}{x^3 + 1} = \frac{x^3 + 1 + ax^2 - ax + a + bx^2 + bx + cx + c}{x^3 + 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 + 4 = x^3 + (a + b)x^2 (b + c - a)x + a + c + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ -a + b + c = 0 \\ a + c + 1 = 4 \end{cases} \overset{\oplus}{\longrightarrow} \begin{cases} 2a + b + c = 3 \\ a - b - c = 0 \end{cases} \Rightarrow 3a = 3 \Rightarrow a = 1$$

$a + b = 0 \Rightarrow b = -1$

$-a + b + c = 0 \Rightarrow c = 2$

$a + b + c = 1 - 1 + 2 = 2 \Rightarrow \mathbf{a + b + c = 2}$

24. (PUC) A produção diária de um certo produto por um determinado operário é avaliada por:

Produção $= 8x + 9x^2 - x^3$ unidades, **x** horas após as 8 horas da manhã, quando começa o seu turno.

Qual a produção durante a quarta hora de trabalho?

Resolução:

$P(4) - P(3) = (8 \cdot 4 + 9 \cdot 16 - 64) - (8 \cdot 3 + 9 \cdot 9 - 27) = 34$

Produziu 34 unidades.

25. Determinar $P(x)$, sabendo que $P(x + 1) = x^2 - 7x + 6$.

Resolução:

$P(x + 1) = x^2 - 7x + 6 = x^2 + 2x + 1 - 9x + 5 =$

$= (x + 1)^2 - 9x - 9 + 14 = (x + 1)^2 - 9(x + 1) + 14$

$\mathbf{P(x) = x^2 - 9x + 14}$

26. Dado $P(x) = x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x^2 + x + 1$, $n \in \mathbb{N}$, calcule a soma dos coeficientes dos polinômios:

a) $P(x)$
b) $Q(x)$, sendo $Q(x) = P(-x)$ e **n** par

Resolução:

a) $1 + 1 + \ldots + 1 = \mathbf{n + 1}$

b) $+1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + 1 - 1 + 1 = \mathbf{1}$

27. Dado $P(x) = ax^2 + bx + c$, calcule **a**, **b** e **c** para que se tenha a identidade $P(x+1) = P(2x)$.

Resolução:

$P(x+1) = P(2x) \Rightarrow a(x+1)^2 + b(x+1) + c = a(2x)^2 + b(2x) + c \Rightarrow$

$\Rightarrow (x^2 + 2x + 1)a + bx + b + c = 4x^2a + 2bx + c \Rightarrow$

$\Rightarrow ax^2 + 2ax + a + bx + b + c = 4ax^2 + 2bx + c \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4a = a & \Rightarrow a = 0 \\ 2a + b = 2b & \Rightarrow b = 0 \\ a + b + c = c & \Rightarrow c \in \end{cases}$$

$\mathbf{a = b = 0, \ \forall c \in \mathbb{R}}$

28. (FUVEST) Dados os polinômios $P(x) = x^2$, $Q(x) = x^4 + x^2$ e $R(x) = 5x^4 + 3x^2$, determine os números **"a"** e **"b"** reais tais que $R(x) = a \cdot P(x) + b \cdot Q(x)$.

Resolução:

$5x^4 + 3x^2 = a \cdot (x^2) + b\,(x^4 + x^2)$

$$5x^4 + 3x^2 = ax^2 + bx^4 + bx^2 \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{b = 5} \\ a + 5 = 3 \Rightarrow \mathbf{a = -2} \end{cases}$$

29. Discuta o grau do polinômio

$P(x) = (m-4)\,x^3 + (m^2 - 16)\,x^2 + (m+4)\,x + 4$

em função do parâmetro **m** real.

Resolução:

grau $= 3$ se $m - 4 \neq 0 \Rightarrow m \neq 4$

$$\text{se } m = 4, \text{ então: } \left.\begin{array}{l} m - 4 = 0 \\ m^2 - 16 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{grau} = 1$$

grau = 3 se $\mathbf{m \neq 4}$
grau = 1 se $\mathbf{m = 4}$

30. (UFSM) Considere os polinômios, de coeficientes reais:

$A(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$
$B(x) = bx^3 + 2x^2 + cx + 2$

Teremos que $A(k) = B(k)$, qualquer que seja o número real **k**, quando:

a) $a = c = 2$ e $b = 1$
b) $b = c = 1$ e $a = 2$
c) $a = b = c = 1$
d) $a = b = c = 2$
e) nunca

Resolução:

$A(x) = B(x) \Rightarrow x^3 + ax^2 + bx + c = bx^3 + 2x^2 + cx + 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 2 \\ b = c \Rightarrow b = 2 \\ c = 2 \end{cases}$$

$b = 1 = 2$ (Impossível) $\therefore$ **Alternativa E**

31. Determine a condição entre **a** e **b** para que o polinômio "$x^4 + ax^3 + bx^2 + 8x + 4$" seja um quadrado perfeito.

Resolução:

$x^4 + ax^3 + bx^2 + 8x + 4 = (x^2 + cx + d)^2$
$\Rightarrow x^4 + ax^3 + bx^2 + 8x + 4 = x^4 + cx^3 + dx^2 + cx^3 + c^2x^2 + cdx + dx^2 + cdx + d^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^4 + ax^3 + bx^2 + 8x + 4 = x^4 + 2cx^3 + (2d + c^2)x^2 + 2cdx + d^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2c = a \\ 2d + c^2 = b \\ 2cd = 8 \\ d^2 = 4 \Rightarrow d = \pm 2 \end{cases}$$

Se $d = 2$: $\begin{cases} c = 2 \\ b = 8 \\ a = 4 \end{cases}$ $\therefore$ $\mathbf{b - a = 4}$

Se $d = -2$: $\begin{cases} c = -2 \\ b = 0 \\ a = -4 \end{cases}$ $\therefore$ $\mathbf{b - a = 4}$

32. (FUVEST)

$$\frac{8}{x^3 - 4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x + 2}$$

são respectivamente:

a) $-2,\ 2,\ -1$

b) $-1,\ 2,\ 1$

c) $-2,\ 1,\ -1$

d) $-1,\ -1,\ 2$

e) $-2,\ 1,\ 1$

Resolução:

$$\frac{8}{x^3 - 4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x + 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{8}{x^3 - 4x} = \frac{(x-2)(x+2) \cdot A + B \cdot x \cdot (x+2) + C \cdot x \cdot (x-2)}{x \cdot (x-2)(x+2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{8}{x^3 - 4x} = \frac{(x^2 - 4)A + (x^2 + 2x)B + (x^2 - 2x)C}{x^3 - 4x} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 8 = Ax^2 - 4A + Bx^2 + 2Bx + Cx^2 - 2Cx \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + B + C = 0 \Rightarrow -4 + 2B + 2C = 0 \\ 2B - 2C = 0 \\ -4A = 8 \Rightarrow \mathbf{A = -2} \end{cases} \oplus \rightarrow -4 + 4B = 0 \Rightarrow \mathbf{B = 1}$$

$2B - 2C = 0$

$2 - 2C = 0 \Rightarrow$ $\mathbf{C = 1}$ $\therefore$ **Alternativa E**

33. (UF-RS) Se $r(x) = ap(x) + bq(x)$, com $r(x) = 4x^2 + kx - 8$, $p(x) = 2x^2 - 3x - 2$, $q(x) = x^2 - 5x + 1$, $a \in IR$, $b \in IR$ e $k \in IR$, calcule o valor de $a + b + k$.

Resolução:

$4x^2 + kx - 8 = a(2x^2 - 3x - 2) + b(x^2 - 5x + 1) \Rightarrow$
$\Rightarrow 4x^2 + kx - 8 = 2ax^2 - 3ax - 2a + bx^2 - 5bx + b \Rightarrow$
$\Rightarrow 4x^2 + kx - 8 = (2a + b)x^2 + (-3a - 5b)x - 2a + b$

I. $-2a + b = -8$
II. $2a + b = 4$
III. $-3a - 5b = k$

Somando as equações (I) e (II), teremos: $2b = -4 \Rightarrow$ $\mathbf{b = -2}$

Substituindo, agora, o valor de **b** em (I), teremos:
$-2a - 2 = -8 \Rightarrow -2a = -6 \Rightarrow$ $\mathbf{a = 3}$

Substituindo, para calcular k, os valores de **a** e **b** em (III), teremos:
$-3(3) - 5(-2) = k \Rightarrow$ $\mathbf{k = 1}$

Temos, então, que: $a + b + k = 3 - 2 + 1 = \mathbf{2}$

34. O polinômio **P** é tal que $P(x) + x\ P(2-x) = x^2 + 3$ para todo **x** real.

a) Determine P(0), P(1) e P(2)
b) Demonstre que o grau de **P** é 1

Resolução:

a) $P(x) + x \,.\, P(2-x) = x^2 + 3$
$P(0) + 0 \,.\, P(2-0) = 0^2 + 3 \Rightarrow \mathbf{P(0) = 3}$

$P(1) + 1 \,.\, P(2-1) = 1^2 + 3$
$P(1) + P(1) = 4$
$2P(1) = 4 \Rightarrow \mathbf{P(1) = 2}$

$P(2) + 2 \,.\, P(2-2) = 2^2 + 3$
$P(2) + 2 \,.\, P(0) = 7 \Rightarrow \mathbf{P(2) = 1}$

b) Se o grau de P(x) é 1, então:

$P(x) = ax + b$

$P(0) = a \,.\, 0 + b = 3 \Rightarrow b = 3$

$P(1) = a + 3 = 2 \Rightarrow a = -1$

$P(x) = -x + 3 \Rightarrow P(x) + x \,.\, P(2-x) =$

$= -x + 3 + x \,.\, (-(2-x) + 3) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(x) + x \,.\, P(2-x) = -x + 3 + x\,(-2 + x + 3) \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbf{P(x) + x \,.\, P(2-x) = x^2 + 3}$ **C.Q.D**

35. (FUVEST) Um polinômio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ satisfaz as seguintes condições:

$P(1) = 0$; $P(-x) + P(x) = 0$, qualquer que seja **x** real. Qual o valor de P(2)?

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

Resolução:

$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

$P(1) = 1^3 + a.\ 1^2 + b\ .\ 1 + c = 0 \Rightarrow a + b + c = -1$

$P(-x) + P(x) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -x^3 + ax^2 - bx + c + x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2ax^2 + 2c = 0 \Rightarrow ax^2 + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = 0 \end{cases};\ b = -1$

$P(2) = 8 - 2 = \mathbf{6}$ $\therefore$ **Alternativa E**

36. (FGV)

a) Determine os valores de **A**, **B** e **C** de modo que:

$$\frac{3x^2 + 6x + 2}{x^3 + 3x^2 + 2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}$$

b) Prove que se $x > 99$ então $0 < \dfrac{3x^2 + 6x + 2}{x^3 + 3x^2 + 2x} < \dfrac{1}{33}$

Resolução:

a) $\dfrac{3x^2 + 6x + 2}{x^3 + 3x^2 + 2x} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{C}{x+2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{3x^2 + 6x + 2}{x^3 + 3x^2 + 2x} = \dfrac{(x+1)(x+2)A + x(x+2)B + x(x+1)C}{x(x+1)(x+2)}$

$\Rightarrow \dfrac{3x^2 + 6x + 2}{x^3 + 3x^2 + 2x} = \dfrac{(x^2 + 3x + 2)A + (x^2 + 2x)B + (x^2 + x)C}{x^3 + 3x^2 + 2x}$

$\Rightarrow 3x^2 + 6x + 2 = (A + B + C)x^2 + (3A + 2B + C)x + 2A \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} A + B + C = 3 \overset{(.-1)}{\Rightarrow} -1 - B - C = -3 \\ 3A + 2B + C = 6 \Rightarrow 3 + 2B + C = 6 \\ 2A = 2 \Rightarrow \mathbf{A = 1} \end{cases}$ $\oplus \to 2 + B = 3 \Rightarrow \mathbf{B = 1}$

$A + B + C = 3 \Rightarrow 1 + 1 + C = 3 \Rightarrow \mathbf{C = 1}$

$\mathbf{A = B = C = 1}$

b) $\dfrac{3x^2 + 6x + 2}{x^3 + 3x^2 + 2x} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+2}$

se $x = 99$, então:

$\dfrac{1}{99} + \dfrac{1}{100} + \dfrac{1}{101} = \dfrac{10100 + 9999 + 9900}{999900} = \dfrac{29999}{999900}$

$\dfrac{1}{33} = \dfrac{30300}{999900} \Rightarrow 0 < \dfrac{29999}{999900} < \dfrac{30300}{999900}$

Se $x > 99$, a equação diminui, sem nunca chegar a zero, e

$$0 < \frac{3x^2 + 6x + 2}{x^3 + 3x^2 + 2x} < \frac{1}{33}$$

37. Considere um polinômio não nulo $P(x)$ tal que

$(P(x))^3 = x^2 P(x) = x P(x^2)$ para todo **x** real.

a) Qual o grau de $P(x)$?

b) Determine $P(x)$.

Resolução:

a) $3 \,.\, \text{grau} = 2 + \text{grau} = 1 + \text{grau} \,.\, 2$
$3\,\text{grau} - \text{grau} = 2 \Rightarrow 2\,\text{grau} = 2 \Rightarrow$ **grau = 1**

b) $P(x) = ax + b$

$(P(x))^3 = xP(x^2) \Rightarrow (P(0))^3 = 0 \,.\, P(0) \Rightarrow P(0) = 0$

$P(0) = a \,.\, 0 + b \Rightarrow b = 0$

$[P(1)]^3 = 1 \,.\, P(1) \Rightarrow [P(1)]^2 = 1 \Rightarrow P(1) = 1$ ou $P(1) = -1$

$P(1) = a = 1$ ou $P(1) = +a = -1 \Rightarrow a = -1$

P(x) = x ou **P(x) = –x**

---

38. (MACK)O resto da divisão de $P(x) = x^4 + x^3 + x^2 + ax + b$ por $x^2 + 1$ é 3. Calcule o valor de **a + b**.

Resolução:

a)
$$\begin{array}{l|l} x^4 + x^3 + x^2 + ax + b & x^2 + 1 \\ \cline{2-2} -x^4 - x^2 & x^2 + x \\ \hline \quad x^3 + ax + b & \\ \quad -x^3 - x & \\ \hline \quad (a-1)x + b = 3 & \end{array}$$

$a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$
$b = 3$
a + b = 4

---

39. (MACK)

$$\begin{array}{c|l} P(x) & x-2 \\ \cline{2-2} 4 & Q(x) \end{array} \qquad \begin{array}{c|l} Q(x) & x-6 \\ \cline{2-2} 1 & Q_1(x) \end{array}$$

Considerando as divisões de polinômios acima, podemos afirmar que o resto da divisão de $P(x)$ por $x^2 - 8x + 12$ é:

a) $3x - 2$
b) $x + 1$
c) $2x + 2$
d) $2x + 1$
e) $x + 2$

Resolução:

$P(x) = Q(x)(x-2) + 4 \qquad Qx = Q_1(x)(x-6) + 1$

$P(x) = \left(Q_1(x)(x-6) + 1\right)(x-2) + 4$

$P(x) = Q_1(x)(x^2 - 8x + 12) + x - 2 + 4$

$P(x) = Q_1(x)(x^2 - 8x + 12) + (x + 2)$

R(x) = x + 2 ∴ Alternativa E

---

40. Seja $P(x)$ um polinômio do 2º grau tal que:

$P(0) = -20$

$P(1) + P(2) = -18$

$P(1) - 3P(2) = 6$

Determine o conjunto de todos os valores de **x** para as quais $P(x) < 0$.

Resolução:

$P(x) = ax^2 + bx + c \qquad P(0) = c = -20$

$P(1) + P(2) = a + b - 20 + 4a + 2b - 20 = -18 \Rightarrow$
$\Rightarrow 5a + 3b - 22 = 0$

$P(1) - 3P(2) = a + b - 20 - 3(4a + 2b - 20) = 6 \Rightarrow$
$\Rightarrow -11a - 5b + 34 = 0$

$\begin{cases} 25a + 15b - 110 = 0 \\ -33a - 15b + 102 = 0 \end{cases} \Rightarrow -8a = +8 \Rightarrow a = -1$

$-25 + 15b - 110 = 0 \Rightarrow b = 9$

$P(x) = -x^2 + 9x - 20$
$x_1 = 4$ e $x_2 = 5$

$P(x) < 0 \Rightarrow$ 

S = {x ∈ IR / x < 4 ou x > 5}

41. (FUVEST) $P(x)$ é um polinômio de grau ≥ 2 e tal que $P(1) = 2$ e $P(2) = 1$. Sejam $D(x) = (x-2)(x-1)$ e $Q(x)$ o quociente da divisão de $P(x)$ por $D(x)$.

a) Determine o resto da divisão de $P(x)$ por $D(x)$.

b) Sabendo que o termo independente de $P(x) = 8$, determine o termo independente de $Q(x)$.

Resolução:

a) $P(x) = Q(x) \, . \, (x-2)(x-1) + R(x)$

$P(1) = Q(1) \, . \, 0 + R(1) = 2$

$R(1) = 2$

$P(2) = Q(2) \, . \, 0 + R(2) = 1$

$R(2) = 1$

$R(x) = ax + b$

$R(1) = a + b = 2$

$R(2) = 2a + b = 1$

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 2a + b = 1 \end{cases}$$

$a = -1$

$b = 3$

$\mathbf{R(x) = -x + 3}$

b) $P(0) = Q(0)\,(0-2)\,(0-1) + R(0)$

$8 = Q(0) \, . \, 2 + 3 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Q(0) = 5/2}$

42. Um polinômio dividido por $x - 2$ dá resto 2. O quociente dessa divisão é então dividido por $x - 3$, obtendo-se resto 3. Qual o resto da divisão deste polinômio por $(x-2)(x-3)$?

Resolução:

$P(x) = Q(x)\,(x-2) + 2 \qquad Q(x) = Q_1(x)\,(x-3) + 3$

$P(x) = Q_1(x)\,(x-2)\,(x-3) + 3\,(x-2) + 2$

$P(x) = Q_1(x)\,(x-2)\,(x-3) + \underbrace{3x - 4}_{R(x)}$

$\mathbf{R(x) = 3x - 4}$

43. (FGV) Determine as soluções da equação $Q(x) = 0$, onde $Q(x)$ é o quociente do polinômio

$x^4 - 10x^3 + 24x^2 + 10 - 24$ por $x^2 - 6x + 5$.

Resolução:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -10x^3 & +24x^2 & +10x & -24 & x^2 - 6x + 5 \\
-x^4 & +6x^3 & -5x^2 & & & x^2 - 4x - 5 \\
\hline
 & -4x^3 & +19x^2 & +10x & -24 & \\
 & +4x^3 & -24x^2 & +20x & & \\
\hline
 & & -5x^2 & +30x & -24 & \\
 & & +5x^2 & -30x & +25 & \\
\hline
 & & & & 1 &
\end{array}$$

$Q(x) = x^2 - 4x - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 5 \text{ e } x_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S = \{-1; 5\}}$

44. (FUVEST) Determine o valor de **"p"** para que o polinômio $2x^3 + 5x^2 - px + 2$ seja divisível por $x - 2$.

Resolução:

2	2	5	$-p$	2
	2	9	$18 - p$	$38 - 2p$

$38 - 2p = 0$

$38 = 2p \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p = 19}$

45. A divisão de $x^{999} - 1$ por $x - 1$ tem resto $R(x)$ e o quociente $Q(x)$. Pode-se afirmar que:

a) $R(x) = -2$ e $Q(x)$ tem grau 998
b) $R(x) = 0$ e $Q(x)$ se anula para $x = 0$
c) $R(x) = -2$ e $Q(x)$ se anula para $x = -1$
d) $R(x) = 0$ e $Q(x)$ vale 1 para $x = 0$
e) $R(x) = -2$ e $Q(x)$ vale -1 para $x = 0$

Resolução:

1	1	0	0	...	0	–1
	1	1	1	...	1	0

$R(x) = 0$

$Q(x)$ tem grau 998 e $Q(0) = 1$

Alternativa D

46. Um polinômio dividido por $(x + 1)$ dá resto -1, por $(x - 1)$ dá resto 1 e por $(x + 2)$ dá resto 1. Qual o resto da divisão por $(x + 1)(x - 1)(x + 2)$.

Resolução:

$P(x) = Q(x)(x + 1) - 1 \Rightarrow P(-1) = -1$
$P(x) = Q_1(x)(x - 1) + 1 \Rightarrow P(1) = 1$
$P(x) = Q_2(x)(x + 2) + 1 \Rightarrow P(-2) = 1$

$P(x) = Q3(x) . (x + 1)(x - 1)(x + 2) + R(x)$
$P(x) = Q_3(x) . (x + 1)(x - 1)(x + 2) + ax^2 + bx + c$

$P(-1) = +a - b + c = -1 \Rightarrow -a + b - c = +1$
$P(1) = a + b + c = 1$
$P(-2) = 4a - 2b + c = 1$

$$\begin{cases} 4a + c = 3 \Rightarrow -4c + c = 3 \Rightarrow c = -1 \\ -a - c = 0 \Rightarrow a = -c \Rightarrow a = 1 \\ -2b = -2 \Rightarrow b = 1 \end{cases}$$

$\mathbf{R(x) = x^2 + x - 1}$

47. Sejam **a**, **b** e **c** números reais que nesta ordem formam uma P.A. de soma 12. Sabendo que os restos das divisões de $x^{10} + 8x^8 + ax^5 + bx^3 + cx$ por $x - 2$ e $x + 2$ são iguais, determine a razão da P.A.

Resolução:

2	1	0	8	0	0	a	0	b	0	c	0
	1	2	12	24	48	96 + a	192 + 2a	384 + 4a + b	768 + 8a + 2b	1536 + 16a + 4b + c	3072 + 32a + 8b + 2c

–2	1	0	8	0	0	a	0	b	0	c	0
	1	–2	12	–24	48	–96 + a	192 – 2a	–384 + 4a + b	768 – 8a – 2b	–1536 + 16a + 4b + c	3072 – 32a – 8b – 2c

$3072 + 32a + 8b + 2c = 3072 - 32a - 8b - 2c \Rightarrow 16a + 4b + c = 0$

(I) $16a + 4b + c = 0$ (II) $a + b + c = 12$ (III) $2b = a + c$

Substituindo (III) em (II), teremos: $3b = 12 \Rightarrow \mathbf{b = 4}$

Substituindo o valor de **b** em (I) e (III), teremos: (I) $16a + c = -16$
(III) $-a - c = -8$
$15a = -24 \Rightarrow a = -24/15 \Rightarrow a = -8/5$

Como a razão r é igual a subtração de **b** por **a**, teremos: $b - a = r \Rightarrow r = 4 - \left(-\frac{8}{5}\right) \Rightarrow r = \frac{20 + 8}{5} \Rightarrow r = \mathbf{\frac{28}{5}}$

48. (VUNESP) Seja **"m"** raiz do polinômio real

$P(x) = x^6 - (m + 1)x^5 + 32.$

Determine o resto da divisão de P(x) por $x - 1$.

Resolução:

$P(m) = 0 \Rightarrow m^6 - (m + 1)m^5 + 32 = 0$
$-m^5 = -32 \Rightarrow \mathbf{m = 2}$

1	1	–3	0	0	0	0	32
	1	–2	–2	–2	–2	–2	30

R(x) = 30

49. (FGV) Sabe-se que o polinômio $f = x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2$ é divisível por $x^2 - 1$. Um outro divisor de **f** é o polinômio:

a) $x^2 - 4$
b) $x^2 + 1$
c) $(x+1)^2$
d) $(x-2)^2$
e) $(x-1)^2$

Resolução:

$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$

$$\begin{array}{l|l} x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2 & x^2 - 1 \\ \hline \quad 0 & x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2) \end{array}$$

$x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2 = \mathbf{(x + 1)^2} \cdot (x - 1) \cdot (x - 2)$

Alternativa C

50. (FUVEST) Dividindo-se um polinômio $P(x)$ por $(x - 1)^2$, obtém-se um resto que, dividido por $x - 1$, dá resto 3. Ache $P(1)$.

Resolução:

$P(x) = (x - 1)^2 \cdot Q(x) + R(x) \Rightarrow P(1) = R(1)$

$R(x) = (x - 1) \cdot Q'(x) + 3 \Rightarrow R(1) = 3$

$\mathbf{P(1) = R(1) = 3}$

51. Calcule **c**, sabendo que os restos das divisões de $P(x) = x^{10} + ax^6 + bx^2 + cx + d$ por $x - 10$ e por $x + 10$ são iguais.

Resolução:

10	1	0	0	0	a	0	0	0	b	c	d
	1	10	10^2	10^3	$10^4 + a$	$10^5 + a10$	$10^6 + a10^2$	$10^7 + a10^3$	$10^8 + a10^4 + b$	$10^9 + a10^5 + 10b + c$	$10^{10} + a10^6 + 10^2b + 10c + d$

–10	1	0	0	0	a	0	0	0	b	c	d
	1	–10	10^2	-10^3	$10^4 + a$	$-10^5 - 10a$	$10^6 + 10^2a$	$-10^7 - 10^3a$	$10^8 + 10^4a + b$	$-10^9 - 10^5a - 10b + c$	$10^{10} + 10^6a + 10^2b - 10c + d$

$10^{10} + a10^6 + b10^2 + c10 + d = 10^{10} + a10^6 + b10^2 - 10c + d \Rightarrow 10c = -10c \Rightarrow \mathbf{c = 0}$

52. Demonstrar que, se o polinômio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ é divisível por $x - a$, então $P(a) = 0$.

Resolução:

$P(x) = Q(x) \cdot D(x) + R(x)$
$P(x) = Q(x) \cdot (x - a) + R(x)$
Mas, como $P(x)$ é divisível por $(x - a)$, $R(a) = 0$
$P(x) = Q(x) \cdot (x - a)$ para $(x = a)$
$P(a) = Q(a) \cdot (a - a) \Rightarrow P(a) = 0$ CQD

53. Determinar **a** e **b** e o maior inteiro **n** de modo que $P(x) = x^5 - a x^4 + b x^3 - b x^2 + 2x - 1$ seja divisível por $(x - 1)^n$.

Resolução:

1	1	–a	b	–b	2	–1
	1	1 – a	1 – a + b	1 – a	3 – a	2 – a

$-2 + a = 0 \Rightarrow a = 2$

1	1	1 – a	1 – a + b	1 – a	3 – a
	1	2 – a	3 – 2a + b	4 – 3a + b	7 – 4a + b

$7 - 4a + b = 0 \Rightarrow 7 - 8 + b = 0 \Rightarrow b = 1$

1	1	2 – a	3 – 2a + b	4 – 3a + b
	1	3 – a	6 – 3a + b	10 – 6a + 2b

$10 - 6a + 2b = 0 \Rightarrow 10 - 12 + 2 = 0 \Rightarrow 0 = 0$ (V)

1	1	3 – a	6 – 3a + b
	1	4 – a	10 – 4a + b

$10 - 4a + b = 0 \Rightarrow 3 = 0$ (F)

$\mathbf{n = 3}$, $\mathbf{b = 1}$, $\mathbf{a = 2}$

54. O resto e o quociente da divisão de $P(x) = x^4 + p\,x^3 - 3\,x^2 + 4x - 5$ por $ax + 2$ são respectivamente 7 e $q\,x^3 - 4\,x^2 + 5x + r$. Sabendo que $B(x) = (a + p)\,x + (q + r)$, determine $B(x + 1)$.

Resolução:

$B(x) = (a + p)x + (q + r)$

$B(x + 1) = (a + p)(x + 1) + (q + r) \Rightarrow B(x + 1) = (a + p)x + a + p + q + r$

$P(x) = Q(x) \,.\, D(x) + R(x)$

$x^4 + px^3 - 3x^2 + 4x - 5 = (qx^3 - 4x^2 + 5x + r)(ax + 2) + 7$

para $x = 0 \Rightarrow -5 = 2r + 7 \Rightarrow r = -6$

$x^4 + px^3 - 3x^2 + 4x - 5 = aqx^4 - 4ax^3 + 5ax^2 + arx + 2qx^3 - 8x^2 + 10x + 2r + 7 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^4 + px^3 - 3x^2 + 4x - 5 = aqx^4 + (-4a + 2q)x^3 + (5a - 8)x^2 + (10 + ar)x + 2r + 7$

$$\begin{cases} aq = 1 \Rightarrow q = 1 \\ -4a + 2q = p \Rightarrow -4 + 2 = p \Rightarrow p = -2 \\ 5a - 8 = -3 \Rightarrow a = 1 \end{cases}$$

$\mathbf{B(x + 1) = -x - 6}$

55. Obter o quociente e resto da divisão de:

a) $2\,x^4 - 3\,x^3 - 2\,x^2 + 6x - 3$ por $2\,x - 1$

b) $3\,x^4 + 4\,x^3 - 5\,x^2 + 2x + 1$ por $(x + 1)(x - 3)$

Resolução:

a)
$$\begin{array}{rl|l} & 2x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 6x - 3 & 2x - 1 \\ \cline{3-3} & -2x^4 + x^3 & x^3 - x^2 - 3/2x + 9/4 \\ \hline & -2x^3 - 2x^2 + 6x - 3 & \\ & +2x^3 - x^2 & \\ \hline & -3x^2 + 6x - 3 & \\ & +3x^2 - 3/2x & \\ \hline & 9/2x - 3 & \\ & -9/2x + 9/4 & \\ \hline & -3/4 & \end{array}$$

$\mathbf{Q(x) = x^3 - x^2 - 3/2x + 9/4}$

$\mathbf{R(x) = -3/4}$

b) $3x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 2x + 1 = (x + 1)(x - 3)\,Q(x) + R(x)$

para $x = 3 \Rightarrow 243 + 108 - 45 + 6 + 1 = 0 + a(3) + b$
$3a + b = 313$

para $x = -1 \Rightarrow 3 - 4 - 5 - 2 + 1 = -a + b$
$a - b = 7$

$$\begin{cases} 3a + b = 313 \\ a - b = 7 \end{cases} \Rightarrow 4a = 320 \Rightarrow a = 80 \quad e \quad b = 73$$

$\mathbf{R(x) = 80x + 73}$

$3x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 2x + 1 = (x + 1)(x - 3)\,.\,Q(x) + 80x + 73$

para $x = 0 \Rightarrow 1 = -3\,(a\,.\,0^2 + b\,.\,0 + c) + 80\,.\,0 + 73$
$1 = -3c + 73 \Rightarrow c = 24$

para $x = 1 \Rightarrow 3 + 4 - 5 + 2 + 1 = -4\,.\,(a + b + 24) + 80 + 73$
$5 = -4a - 4b - 96 + 80 + 73 \Rightarrow 4a + 4b = 52$

para $x = 2 \Rightarrow 48 + 32 - 20 + 4 + 1 = -3\,(4a + 2b + 24) + 160 + 73$
$65 - 233 = -12a - 6b - 72$
$12a + 6b = 96 \Rightarrow -4a - 2b = -32$

$$\begin{cases} 4a + 4b = 52 \\ -4a - 2b = -32 \end{cases} \Rightarrow 2b = 20 \Rightarrow b = 10 \quad e \quad a = 3$$

$\mathbf{Q(x) = 3x^2 + 10x + 24}$

56. (UNICAMP) Determine o quociente da divisão de $x^{100} + x + 1$ por $x^2 - 1$.

Resolução:

a)
$$
\begin{array}{l|l}
x^{100} + x + 1 & x^2 - 1 \\ \cline{2-2}
-x^{100} + x^{98} & \mathbf{x^{98} + x^{96} + x^{94} + \ldots + x^2 + 1} \\ \cline{1-1}
+x^{98} + x + 1 & \\
-x^{98} + x^{96} & \\ \cline{1-1}
x^{96} + x + 1 & \\
-x^{94} + x^{94} & \\ \cline{1-1}
x^{94} + x + 1 & \\
\ldots & \\
x^4 + x + 1 & \\
-x^4 + x^2 & \\ \cline{1-1}
x^2 + x + 1 & \\
-x^2 + 1 & \\ \cline{1-1}
x + 2 &
\end{array}
$$

$\mathbf{Q(x) = x^{98} + x^{96} + x^{94} + \ldots + x^2 + 1}$

57. Obter o quociente e o resto das divisões de:

a) $A(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3$ por $2x - 1$

b) $B(x) = 3x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x - 1$ por $3x + 1$

Resolução:

a)
$$
\begin{array}{l|l}
x^3 - 2x^2 + x - 3 & 2x - 1 \\ \cline{2-2}
-x^3 + 1/2x^2 & \mathbf{1/2x^2 - 3/4x + 1/8} \\ \cline{1-1}
-3/2x^2 + x - 3 & \\
+3/2x^2 - 3/4x & \\ \cline{1-1}
1/4x - 3 & \\
-1/4x + 1/8 & \\ \cline{1-1}
\mathbf{-23/8} &
\end{array}
$$

$\mathbf{Q(x) = 1/2x^2 - 3/4x + 1/8}$
$\mathbf{R(x) = -23/8}$

b)

–1/3	3	–2	–1	2	–1
	3	–3	0	2	–5/3

$Q(x) = 3/3x^3 - 3/3x^2 + 2/3 \Rightarrow \mathbf{Q(x) = x^3 - x^2 + 2/3}$

$\mathbf{R(x) = -5/3}$

58. Obter o quociente e o resto das divisões de:

a) $5x^5 - 2x^3 + 4x - 2$ por $(x - 1)(x + 2)$

b) $x^n + 1$ por $x^2 - 1$

Resolução:

a)

1	5	0	–2	0	4	–2
	5	5	3	3	7	5

dividindo por $(x - 1)$

$Q(x) = 5x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 3x + 7 \qquad R_1(x) = 5$

–2	5	5	3	3	7
	5	–5	13	–23	

dividindo por $(x + 2)$

$\mathbf{Q(x) = 5x^3 - 5x^2 + 13x - 23} \qquad R_2(x) = ?$

$5x^5 - 2x^3 + 4x - 2 = (x - 1)(x + 2) . (5x^3 - 5x^2 + 13x - 23) + ax + b$
$5x^5 - 2x^3 + 4x - 2 = (x^2 + x - 2)(5x^3 - 5x^2 + 13x - 23) + ax + b$
$4x - 2 = -23x + ax - 26x + 46 + b$

$$\begin{cases} 4 = -23 - 26 + a \Rightarrow a = 53 \\ -2 = 46 + b \Rightarrow b = -48 \end{cases}$$

$\mathbf{R(x) = 53x - 48}$

b) Se n = par

$$
\begin{array}{l|l}
x^n + 1 & x^2 - 1 \\ \cline{2-2}
-x^n + x^{n-2} & x^{n-2} + x^{n-4} + \ldots + x^2 + 1 \\ \cline{1-1}
x^{n-2} + 1 & \\
-x^{n-2} + x^{n-4} & \\ \cline{1-1}
x^{n-4} + 1 & \\
\ldots & \\ \cline{1-1}
x^4 + 1 & \\
-x^4 + x^2 & \\ \cline{1-1}
x^2 + 1 & \\
-x^2 + 1 & \\ \cline{1-1}
2 &
\end{array}
$$

$\mathbf{Q(x) = x^{n-2} + x^{n-4} + \ldots + x^2 + 1}$
$\mathbf{R(x) = 2}$

ou se n = ímpar

$$
\begin{array}{l|l}
x^n + 1 & x^2 - 1 \\ \cline{2-2}
-x^n + x^{n-2} & x^{n-2} + x^{n-4} + \ldots + x^3 + x \\ \cline{1-1}
x^{n-2} + 1 & \\
-x^{n-2} + x^{n-4} & \\ \cline{1-1}
\ldots & \\ \cline{1-1}
x^5 + 1 & \\
-x^5 + x^3 & \\ \cline{1-1}
x^3 + 1 & \\
-x^3 + x & \\ \cline{1-1}
x + 1 &
\end{array}
$$

$\mathbf{Q(x) = x^{n-2} + x^{n-4} + \ldots + x^3 + x}$
$\mathbf{R(x) = x + 1}$

59. Mostrar que $P(x) = x^n - x^{n-2} - 2x + 2$ ($n \in IN$ e $n \geq 2$) é divisível por $(x-1)^2$.

Resolução:

$$
\begin{array}{l|l}
x^n - x^{n-2} - 2x + 2 & x^2 - 2x + 1 \\
\cline{2-2}
-x^n + 2x^{n-1} - x^{n-2} & x^{n-2} + 2x^{n-3} + \ldots + 2x + 2 \\
\cline{1-1}
2x^{n-1} - 2x^{n-2} - 2x + 2 & \\
-2x^{n-1} + 4x^{n-2} - 2x^{n-3} & \\
\cline{1-1}
2x^{n-2} - 2x^{n-3} - 2x + 2 & \\
\ldots & \\
\cline{1-1}
2x^2 - 4x + 2 & \\
-2x^2 + 4x - 2 & \\
\cline{1-1}
0 & \text{C.Q.D.}
\end{array}
$$

60. Um polinômio $P(x)$ foi dividido pelo binômio $x - a$. Usando-se o dispositivo de Briot-Ruffini, obteve-se o quadro abaixo. Determine $P(x)$.

	3	–4	5	d	e
a	b	–10	c	24	40

Resolução:

a	3	–4	5	d	e
	b	–10	c	24	40

$b = 3$ $\quad b \cdot a + (-4) = -10$
$3a - 4 = -10$
$a = -2$

$-10 \cdot a + 5 = c$
$-10 \cdot (-2) + 5 = c$
$c = 25$

$c \cdot a + d = 24$
$25 \cdot (-2) + d = 24$
$d = 74$

$24 \cdot a + e = 40$
$24 \cdot (-2) + e = 40$
$e = 88$

$P(x) = 3x^4 - 4x^3 + 5x^2 + 74x + 88$

61. Dividindo-se um polinômio por $(x-2)^3$, obtém-se um resto que dividido por $(x-2)$, dá resto 4.

Determine $P(2)$.

Resolução:

$P(x) = (x-2)^3 \cdot Q_1(x) + R(x) \Rightarrow P(2) = R(2)$

$R(x) = (x-2) \cdot Q_2(x) + 4 \Rightarrow R(2) = 4$

$P(2) = R(2) = 4$

62. (MACK) Se $P(x) = x^3 - 8x^2 + kx - m$ é divisível por $(x-2)(x+1)$ então $\frac{k}{m}$, $(m \neq 0)$, vale:

a) 2/5
b) –5/14
c) 7/2
d) 2/7
e) 1/2

Resolução:

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 - 8x^2 + kx - m & x^2 - x - 2 \\
\cline{2-2}
-x^3 + x^2 + 2x & x - 7 \\
\cline{1-1}
-7x^2 + (2+k)x - m & \\
+7x^2 - 7x - 14 & \\
\cline{1-1}
(2+k-7)x - (14+m) &
\end{array}
$$

$(2+k-7)x - (14+m) \Rightarrow \begin{cases} 2+k-7=0 \Rightarrow k=5 \\ -14-m=0 \Rightarrow m=-14 \end{cases}$

$\Rightarrow$ **Alternativa B**

$P(2x+1) = x$, determine $P(1) + P(2) - 2P(3)$.

Resolução:

$P(x) = ax + b \Rightarrow P(2x+1) = (2x+1)a + b = x \Rightarrow$

$\Rightarrow 2ax + a + b = x \Rightarrow \begin{cases} 2a = 1 \Rightarrow a = 1/2 \\ a + b = 0 \Rightarrow a = -b \Rightarrow b = -1/2 \end{cases}$

$P(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$

$P(1) + P(2) - 2P(3) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{2}{2} - \frac{1}{2} - 2\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) =$

$= \frac{1}{2} - 3 + 1 = -\mathbf{\frac{3}{2}}$

64. (FGV) Um polinômio $P(x)$ do 4º grau é divisível por $(x-3)^3$. Sendo $P(0) = 27$ e $P(2) = -1$, então o valor de $P(5)$ é:

a) 48 b) 32 c) 27 d) 16 e) 12

Resolução:

$P(x) = (x-3)^3 \cdot Q(x) + R(x)$
$P(0) = -27 \cdot Q(0) = 27 \Rightarrow Q(0) = -1$
$P(2) = -1 \cdot Q(2) = -1 \Rightarrow Q(2) = 1$
$P(5) = ?$
$Q(x) = ax + b$
$Q(0) = b = -1$
$Q(2) = 2a - 1 = 1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow Q(x) = x - 1$
$P(5) = (5-3)^3 \cdot Q(5) \Rightarrow P(5) = 8 \cdot (5-1) = 32$
Alternativa E

65. Numa divisão de polinômios em que o dividendo é de grau **p** e o quociente de grau **q**, qual é o grau máximo que o resto pode ter ?

Resolução:

p = q . divisor + resto

grau do resto < grau do divisor

grau do divisor = p – q

grau do resto ≤ **p – q – 1**

66. Qual o resto da divisão do polinômio

$f(x) = x^{100} - 2x^{51} + 1$ por $x^2 - 1$?

Resolução:

$P(x) = Q(x) . (x^2 - 1) + ax + b$
$P(1) = 0 + a + b$
$P(1) = a + b = 1^{100} - 2 . 1^{51} + 1$
$a + b = 0$
$P(-1) = -a + b = (-1)^{100} - 2 . (-1)^{51} + 1$
$= -a + b = 1 + 2 + 1 = +4$
$-a + b = 4$

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ -a + b = 4 \end{cases} \Rightarrow 2b = 4 \Rightarrow \mathbf{b = 2} \text{ e } \mathbf{a = -2}$$

R(x) = – 2x + 2

67. Qual o resto da divisão de $x^{100} + 2x^{99} - 3x^3 + 2x + 5$ por $x^2 + x - 2$?

Resolução:

$P(x) = Q(x) . (x^2 + x - 2) + ax + b$
$P(1) = 1 . a + b = 1^{100} + 2 . 1^{99} - 3 . 1^3 + 2 . 1 + 5$
$a + b = 7$
$P(-2) = -2a + b = (-2)^{100} + 2 . (-2)^{99} - 3 . (-2)^3 + 2 . (-2) + 5$
$-2a + b = 24 + 1 \Rightarrow -2a + b = 25$

$$\begin{cases} a + b = 7 \\ -2a + b = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + 2b = 14 \\ -2a + b = 25 \end{cases} \Rightarrow 3b = 39 \Rightarrow \mathbf{b = 13}$$

$a + b = 7 \Rightarrow a + 13 = 7 \Rightarrow \mathbf{a = -6}$

R(x) = –6x + 13

68. Estabeleça as condições sobre os coeficientes **a**, **b** e **c** de modo que $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ seja divisível por $(x - 1)^2$ mas não por $(x - 1)^3$.

Resolução:

$$\begin{array}{l|l} x^3 + ax^2 + bx + c & (x-1) \\ \cline{2-2} -x^3 + x^2 & x^2 + (a+1)x + a + b + 1 \\ \hline (a+1)x^2 + bx + c & \\ -(a+1)x^2 + (a+1)x & \\ \hline (a+b+1)x + c & \\ -(a+b+1)x + a + b + 1 & \\ \hline a + b + c + 1 & \end{array}$$

a + b + c + 1 = 0 (I)

$$\begin{array}{l|l} x^2 + (a+1)x + a + b + 1 & (x-1) \\ \cline{2-2} -x^2 + x & x + a + 2 \\ \hline (a+2)x + a + b + 1 & \\ -(a+2)x + a + 2 & \\ \hline 2a + b + 3 & \end{array}$$

2a + b + 3 = 0 (II)

$$\begin{array}{l|l} x + a + 2 & (x-1) \\ \cline{2-2} -x + 1 & 1 \\ \hline a + 3 & \end{array}$$

$a + 3 \neq 0 \Rightarrow \mathbf{a \neq -3}$ **(III)**

Utilizando, agora, (I), (II) e (III), obteremos:

(I) $a + b + c + 1 = 0$
(II) $2a + b + 3 = 0 \Rightarrow \mathbf{b = -2a - 3}$
(III) $\mathbf{a \neq -3}$

Substituindo (II) em (I), teremos:

$a - 2a - 3 + c + 1 = 0 \Rightarrow \mathbf{c = a + 2}$

Resposta: $a \neq -3$, $c = a + 2$, $b = -2a - 3$