

IMPORTANTE

1. → Organize-se, guardando cada lista de exercícios que receber durante o ano, em pasta colecionadora.
2. → Se faltar à aula, procure o professor para registrar o recebimento dos exercícios.
3. → →TRAZER ESTE MATERIAL DIDÁTICO EM TODAS AS AULAS DE LÓGICA.

PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM E PROBABILIDADE

Neste bimestre, trabalharemos com contagens e probabilidade, mas não aquela contagem um-a-um e, sim, os princípios de contagem, para determinar o número total de resultados possíveis ao observar – ou procurar prever – os resultados de um experimento, de um jogo, dentre outras situações. Esse conteúdo provavelmente não é novidade, pois já foi visto no 6º ano (princípio fundamental da contagem).

* Fatorial de um Número Natural

Na resolução de problemas de contagem por meio do princípio fundamental da contagem (ou PFC) é comum aparecerem multiplicações envolvendo números naturais consecutivos, como, por exemplo: $26 \cdot 25 \cdot 24$; $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$; $7 \cdot 6 \cdot 5$; etc.

Muitas vezes é possível escrever multiplicações desse tipo de forma mais sintética (resumida). Para isso, vamos apresentar o fatorial de um número natural, que será útil na resolução dos exercícios que estão por vir.

→ Definição

Seja n um número natural, com $n \geq 2$. Define-se o **fatorial de n** , que é representado por $n!$, como o produto dos números naturais consecutivos n , $n - 1$, $n - 2$, ..., 1. Isto é:

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 1$$

Importante: $0! = 1$ e $1! = 1$

Exemplos:

- a) $2! = 2 \cdot 1 = 2$
- b) $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
- c) $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
- d) $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. Calcule:

- a) $6!$
- b) $0! + 1!$
- c) $7! - 5!$
- d) $5 \cdot 3!$
- e) $3! \cdot 2!$
- f) $\frac{0!}{3!}$

02. Obtenha o valor de cada uma das expressões seguintes:

- a) $\frac{8!}{6!}$
- b) $\frac{9!}{10!}$

c) $\frac{3!}{4!} + \frac{4!}{5!}$

d) $\frac{7!}{5! \cdot 2!}$

e) $\frac{20!}{18! \cdot 2!}$

f) $\frac{8! \cdot 6!}{7! \cdot 7!}$

* Princípio Fundamental da Contagem (PFC)

O Princípio Fundamental da Contagem também é chamado de Princípio Multiplicativo, pois o número total de possibilidades é o **produto dos números de possibilidades em cada etapa**.

Exemplo 1:

Quantos anagramas podemos escrever com as letras da palavra **amor**?

Obs.: Anagrama é uma “palavra” formada pela transposição (troca ou “embaralhamento”) das letras de outra palavra.

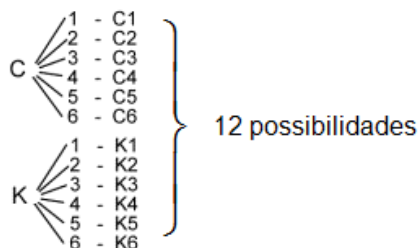
Sol.: A palavra amor possui 4 letras diferentes. Então, para calcular o número de anagramas, temos:

Número de possibilidades de escolher a primeira letra = 4
Número de possibilidades de escolher a segunda letra = 3
Número de possibilidades de escolher a terceira letra = 2
Número de possibilidades de escolher a última letra = 1

Número de anagramas: $n \rightarrow n = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$
 $n = 24$

Resposta: Podemos escrever 24 anagramas (perceba que a palavra **amor** também é contada como um anagrama possível).

Exemplo 2: Ao lançarmos uma moeda e um dado, temos as seguintes possibilidades para o resultado (sendo, C: cara e K: coroa):



Observe que o evento tem duas etapas, com 2 possibilidades em uma e 6 possibilidades em outra, totalizando $2 \cdot 6 = 12$ possibilidades.

Exemplo 3: Com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7:

a) Quantos números de 3 algarismos podemos formar?

Sol.: _____ _____ _____
centena dezena unidade

Há 7 possibilidades para a centena (0 não é permitido), 8 para a dezena e 8 para a unidade. Portanto, podemos formar $7 \cdot 8 \cdot 8 = 448$ números.

b) E de 3 algarismos distintos?

Sol.: _____ _____ _____
centena dezena unidade

Se os algarismos são distintos, há 7 possibilidades para a centena, 7 para a dezena e 6 para a unidade. . Portanto, podemos formar $7 \cdot 7 \cdot 6 = 294$ números de 3 algarismos distintos com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

- 03. Num restaurante expresso de comida italiana, o cliente pode escolher entre 3 tipos de massa, tendo ainda 4 opções de molho. Quantos pratos diferentes podem ser montados com essas opções?
- 04. Certo modelo de carro é fabricado em 7 diferentes cores, apresentando ainda 2 tipos de motores e 3 opções de estofamento. De acordo com esses 3 itens, que quantidade de carros diferentes desse modelo podem ser fabricados?
- 05. O site de uma fábrica de produtos esportivos permite que os clientes montem seus próprios tênis, que são em seguida produzidos sob encomenda. O cliente pode fazer as escolhas a seguir.

- ⇒ cor do fundo (4 opções)
- ⇒ cor secundária (6 opções)
- ⇒ cor dos detalhes (5 opções)

Quantos tênis diferentes podem ser montados com essas opções?

- 06. Em uma festa de formatura havia 170 formandos, sendo 80 meninos e 90 meninas. Para dançar a valsa dos formandos, quantos casais diferentes poderiam ser formados?
- 07. De quantas maneiras 5 meninos podem sentar-se num banco que tem apenas 3 lugares?
- 08. Cinco amigos vão se sentar em 5 cadeiras consecutivas de um cinema.
a) De quantas maneiras diferentes eles podem se sentar?
b) De quantas maneiras diferentes eles podem se sentar de modo que André, um dos amigos, ocupe a cadeira do meio?
- 09. Seis casais chegaram às finais de um concurso de dança. Um componente de cada casal será escolhido para dar uma entrevista sobre o concurso. De quantos modos diferentes poderá ser feita essa escolha?
- 10. (OBM) Quantos inteiros da lista 100, 101, 102, ..., 999 não possuem algarismos iguais a 2, 5, 7 ou 8?

- A) 160 B) 170 C) 180
D) 190 E) 200

11. (OBMEP) Fábio tem cinco camisas: uma preta de mangas curtas, uma preta de mangas compridas, uma azul, uma cinza e uma branca, e quatro calças: uma preta, uma azul, uma verde e uma marrom. De quantas maneiras diferentes ele pode se vestir com uma camisa e uma calça de cores distintas?

- A) 12 B) 15 C) 17
D) 18 E) 20

12. (OBM) Um número natural A de três algarismos *detona* um número natural B de três algarismos se cada algarismo de A é maior do que o algarismo correspondente de B. Por exemplo, 876 detona 345; porém, 651 não detona 542 pois $1 < 2$. Quantos números de três algarismos detonam 314?

- A) 120 B) 240 C) 360
D) 480 E) 600

13. Um estádio de futebol possui 12 portões. De quantas maneiras diferentes um torcedor poderá entrar no estádio e sair dele por um portão diferente do que usou para entrar?

14. Marcelo possui 12 camisas e 5 gravatas. Ele acha que a gravata azul não combina com a camisa listrada, por isso nunca as usa juntas. De quantas maneiras diferentes ele pode combinar as camisas e as gravatas, considerando a condição citada?

15. (OBMEP) (OBMEP) Manuela quer pintar as quatro paredes de seu quarto usando as cores azul, rosa, verde e branco, cada parede de uma cor diferente. Ela não quer que as paredes azul e rosa fiquem de frente uma para a outra. De quantas maneiras diferentes ela pode pintar seu quarto?

- A) 8
B) 16
C) 18
D) 20
E) 24

(Questões de placas e senhas)

16. Até o ano de 1991, as placas dos carros no Brasil eram formadas por duas letras e quatro algarismos. Com o aumento da quantidade de carros, começaram a faltar placas disponíveis para os veículos novos, sendo necessário mudar o sistema: as placas passaram a ter três letras e quatro algarismos. Quantos veículos podem ser emplacados? (Considere 26 letras e 10 algarismos)

- a) Antes da mudança do sistema.
b) Depois da mudança do sistema.

17. Quantas motos podem ser licenciadas se cada placa tiver 2 vogais e 3 algarismos distintos?

- a) 120
b) 18000
c) 25000
d) 32000
e) 120000

18. A senha de um cartão eletrônico é formada por duas letras diferentes seguidas por uma sequência de 3 algarismos também diferentes. Quantas senhas diferentes são possíveis?

19. Geórgia colocou uma senha em seu computador composta de 2 letras distintas seguidas de 2 algarismos. Dias depois, ela esqueceu completamente a senha, e resolveu ir fazendo tentativas até encontrá-la. Quantas tentativas, no máximo, Geórgia terá de fazer?

(Questões de anagramas)

20. Quantas palavras (com significado ou não) de 3 letras podemos formar com as letras **A**, **L** e **I**? Quais são essas palavras?
21. Calcule quantos são os anagramas da palavra:
- a) PERDÃO
- b) PERDÃO que iniciam com **P** e terminam por **O**
- c) PERDÃO em que as letras **A** e **O** aparecem juntas e nessa ordem (ÃO)
- d) PERDÃO em que **P** e **O** aparecem nos extremos

22. Responda:

- a) Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra FILHO?
- b) Quantas “palavras” de 4 letras distintas é possível formar com as letras da palavra FILHO?
- c) Quantas dessas “palavras” de 4 letras começam com **O**?
- d) Quantas dessas “palavras” de 4 letras terminam com **FI**?

(Questões de Algarismos)

23. Responda:

- a) Quantos números de cinco algarismos existem?
- b) Quantos números ímpares de cinco algarismos existem?
24. Considerando os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8, responda:
- a) Quantos números de quatro algarismos podemos formar?
- b) Quantos números pares de quatro algarismos podemos formar?
- c) Quantos números de quatro algarismos distintos podemos formar?
25. Com os dígitos 1, 2, 3, 4, 6 e 8, podem-se formar uma quantidade de números ímpares, com três algarismos distintos cada um. A quantidade de números ímpares que podemos formar com esses dígitos, é:
- A) 40 B) 60 C) 80 D) 100 E) 120

* Probabilidade

Veja as seguintes situações.

Situação 1: Marta e Fernanda estão jogando cara ou coroa. Marta ganha quando o resultado é cara, e Fernanda quando é coroa. Qual é a chance de cada uma delas ganhar em cada lançamento da moeda?

Como só há dois resultados possíveis, cara ou coroa, a chance de Marta ganhar é uma em duas, ou seja, $\frac{1}{2}$ (ou 50%), chance igual à de Fernanda.

Quando as meninas lançam a moeda não é possível ter certeza se sairá cara ou coroa. Apenas podemos descrever os resultados possíveis.

Situação 2: Na amostra cultural da escola, o grupo de oito alunos (Vera, Rita, Luma, Marcos, Janaína, Márcio, Jéssica e Anderson) que obteve destaque com a apresentação de seu trabalho teve o direito de participar do sorteio de um livro.

- a) Qual a chance de Ana ganhar o livro no sorteio?
- Resposta:** A chance de Ana ganhar o livro é 1 em 8, isto é, $\frac{1}{8}$.
- b) Qual é a chance de um menino ganhar o livro nesse sorteio?
- Resposta:** Como há três meninos no grupo, a chance é 3 em 8, ou $\frac{3}{8}$.

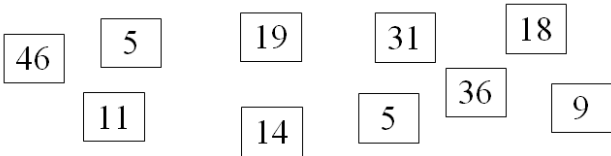
Genericamente, o cálculo da probabilidade de ocorrer um determinado resultado é dado por:

$$P = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}$$

A probabilidade de um evento A é sempre um número que varia de 0 a 1 (ou de 0% a 100%). Se a probabilidade de um evento é igual a 0, esse é um **evento impossível**, e se a probabilidade de um evento é igual a 1, esse é um **evento certo**.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

26. Considere estas dez cartas numeradas, embaralhamos essas cartas e tiramos uma ao acaso.



- a) Qual é a probabilidade de ela ser a carta com o número 9?
- b) Qual é a probabilidade de ela ser a carta com o número 5?
- c) Qual é a probabilidade de a carta retirada ser a com um número par?
- d) Qual é a probabilidade de a carta ser a com um número ímpar?
- e) Qual é a probabilidade de a carta retirada ter um número maior do que 50?
- f) Qual é a probabilidade de a carta retirada ter um número menor do que 70?

27. Considere o lançamento de um dado com faces numeradas de 1 a 6.

- a) Qual é a probabilidade de o resultado ser 6?
- b) Qual é a probabilidade de o resultado ser par?
- c) Qual é a probabilidade de o resultado ser divisível por 3?
- d) Qual é a probabilidade de o resultado ser um número primo?

28. Em uma festa há 10 meninos e 25 meninas. Sorteando um convidado ao acaso, qual é a probabilidade de ser um menino? E de ser uma menina?

29. A possibilidade de ganhar uma bicicleta numa rifa de 100 números tendo comprado quatro números é:

- a) $\frac{2}{5}$
- b) $\frac{1}{10}$
- c) $\frac{1}{25}$
- d) $\frac{1}{30}$
- e) $\frac{1}{50}$

30. Uma caixa contém 10 fichas, sendo 1 ficha azul, 3 amarelas e 6 vermelhas, todas com a mesma forma, tamanho e peso. Pede-se a uma pessoa para retirar ao acaso uma ficha da caixa. Calcule em seu caderno a probabilidade de essa pessoa retirar uma ficha amarela.
31. Sabe-se que a probabilidade de uma peça produzida em determinada indústria ser defeituosa é 3%. Qual a probabilidade de que essa peça não tenha defeito?
32. Durante uma promoção de um shopping center, Tadeu ganhou 5 cupons para concorrer a um carro e Marcela, 20. Os cupons foram preenchidos e colocados em uma urna. Sabendo que nessa urna havia 5000 cupons e que seria sorteado apenas um, calcule as probabilidades de Tadeu e de Marcela ganhar o carro.
33. Cinco fichas foram colocadas sobre uma mesa, com as letras viradas para baixo.



- Uma pessoa escolheu 3 dessas fichas e colocou-as em determinada sequência, formando uma palavra. Calcule a probabilidade do evento enunciado em cada item.
- a) A palavra formada ser **RIO**.
- b) A palavra começar pela letra **A**.
- c) A palavra começar com uma vogal.

34. Dentre os números dados a seguir, copie em seu caderno aqueles que podem representar a probabilidade de ocorrência de um evento.



35. Dentre os eventos descritos abaixo, encontre um evento impossível e um evento certo.
- a) Obtenção de um número divisível por 10 no lançamento de um dado comum.
- b) Conseguir pelo menos uma face “cara” no lançamento de 20 moedas comuns.
- c) Lançando-se 3 dados comuns, obter a soma dos pontos maior ou igual a 3.
36. Uma transportadora comunicou a um de seus clientes que sua encomenda chegaria na próxima semana, no máximo até sexta-feira, e enviou a tabela abaixo indicando as probabilidades de esse cliente receber a mercadoria em cada dia.

Dia	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª
Probabilidade	5%	10%	15%	25%	

A probabilidade de que a encomenda chegue na sexta-feira saiu ilegível no fax. Com base nos outros dados, calcule esse valor.

37. Foi feita uma pesquisa com os alunos das turmas **A** e **B** de uma escola em que se perguntou qual o esporte favorito de cada um. Os resultados estão no quadro abaixo.

	Futebol	Natação	Judô	Vôlei
Turma A	12	5	3	10
Turma B	15	1	6	8

- a) Quantos alunos há nessas turmas A e B?
- b) Escolhendo ao acaso um aluno das turmas A ou B dessa escola, qual a probabilidade de que o seu esporte favorito seja futebol? E vôlei?
- c) Escolhendo ao acaso um aluno da turma B dessa escola, qual a probabilidade de que o seu esporte favorito seja futebol? E vôlei?
38. (Ibmec-SP) João e Vitor disputam um “par ou ímpar” no qual cada um exibe, ao mesmo tempo, de 1 a 5 dedos da mão direita. Se a soma for par, João vence, e, se for ímpar, a vitória é de Vitor. A razão entre as probabilidades de João vencer e de Vitor vencer é:

- a) $\frac{2}{3}$
- b) $\frac{12}{13}$
- c) 1
- d) $\frac{13}{12}$
- e) $\frac{3}{2}$

39. No lançamento simultâneo de 3 moedas perfeitas distinguíveis, qual é a probabilidade de serem obtidas:

- a) pelo menos 2 caras?
- b) exatamente 2 caras?

40. No lançamento simultâneo de dois dados perfeitos e distinguíveis, um branco e outro vermelho, qual é a probabilidade de que:

- a) a soma seja 7?
- b) a soma seja par?
- c) ambos os números sejam pares?
- d) ambos os números sejam iguais?

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Paiva, Manoel. **Matemática Paiva – 2º ano – Ensino Médio**. São Paulo: Moderna, 2009.
- Dante, Luiz. **Matemática Dante – Volume Único – Ensino Médio**. São Paulo: Ática, 2008.
- Oliveira, Carlos; Fernandes, Marco; Orfali, Fabio; Torkomian, Mônica. **Matemática Para Viver Juntos – 9º ano**. São Paulo: SM, 2010.
- Iezzi, Gelson; Dolce, Osvaldo; Degenszajn, David; Pérego, Roberto; Almeida, Nilze. **Matemática – Ciência e Aplicações – 2º ano – Ensino Médio**. São Paulo: Saraiva, 2010.