

Equações e problemas de segundo grau

Érika Silos de Castro (coordenação), André Luiz Martins Pereira, Luciana Felix da Costa Santos e Renata Cardoso Pires de Abreu.

Introdução

Na unidade 4 do material do aluno, são apresentadas algumas situações que podem ser representadas e resolvidas por intermédio de equações do 2º grau. Nesta unidade, o aluno terá a oportunidade de relembrar alguns conhecimentos, como o de produtos notáveis, que são uma ferramenta estratégica para a resolução de equações do 2º grau.

Para potencializar o material didático do aluno, pesquisamos alguns recursos e atividades para auxiliar a você, professor, a ampliar possibilidades para exploração deste tema em suas aulas.

Sugerimos que a primeira aula dessa unidade se inicie com uma atividade disparadora. Esta é uma atividade proposta para ser realizada em grupo, promovendo uma dinâmica entre os alunos. Nesse momento, é esperado que eles desenvolvam algumas noções básicas relacionadas a equações quadráticas.

Para dar sequência ao estudo dessa unidade, disponibilizamos alguns recursos complementares, vinculados ao conteúdo do material didático do aluno. Sugerimos que sejam utilizados nas aulas subsequentes à aula inicial, de acordo com a realidade da sua turma. Ressaltamos a importância de fazer as alterações e adaptações que julgar necessárias.

Por fim, aconselhamos que a última aula desta unidade seja dividida em dois momentos. O primeiro deve ser dedicado a uma revisão geral do estudo realizado durante esta unidade, consolidando o aprendizado do aluno a partir da retomada de questões que surgiram durante o processo. O segundo momento deve ser uma etapa de avaliação do estudante, priorizando questionamentos reflexivos que complementem as atividades e exercícios resolvidos durante as aulas.

A descrição e o detalhamento destas sugestões são apresentados nas tabelas e textos a seguir.

Apresentação da unidade do material do aluno

Caro professor, apresentamos, abaixo, as principais características desta unidade:

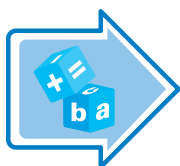
Disciplina	Volume	Módulo	Unidade	Estimativa de aulas para essa unidade
Matemática	1	1	4	4 aulas de 2 tempos

Título da unidade	Tema
Equações e problemas de segundo grau	Equações do 2º grau
Objetivos da unidade	
Identificar uma equação do 2º grau e seus coeficientes numéricos;	
Reduzir uma equação à forma $ax^2 + bx + c = 0$, quando for possível;	
Resolver uma equação do 2º grau;	
Resolver problemas que recaiam em equações do 2º grau;	
Resolver sistemas do 2º grau.	
Seções	Páginas no material do aluno
Para início de conversa...	155 a 156
Seção 1 – Definição	156 a 159
Seção 2 – Breve revisão dos produtos notáveis	160 a 164
Seção 3 – Resolução de equações do 2º grau	164 a 174
O que perguntam por aí...	175 a 176

Recursos e ideias para o Professor

Tipos de Atividades

Para dar suporte às aulas, seguem os recursos, ferramentas e ideias no Material do Professor, correspondentes à Unidade acima:



Atividades em grupo ou individuais

São atividades que são feitas com recursos simples disponíveis.



Ferramentas

Atividades que precisam de ferramentas disponíveis para os alunos.



Applets

São programas que precisam ser instalados em computadores ou *smart-phones* disponíveis para os alunos.



Avaliação

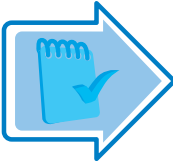
Questões ou propostas de avaliação conforme orientação.



Exercícios

Proposições de exercícios complementares

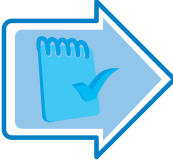
Atividade Inicial

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Equações quadráticas: como resolvê-las?	Cópias da folha de atividades.	O objetivo dessa atividade é desenvolver a capacidade de ler, interpretar, escolher estratégias e analisar a solução de uma situação-problema.	Duplas	40 minutos

Seção 2 – Breve revisão dos produtos notáveis

Páginas no material do aluno

160 a 164

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Resolvendo Equações Utilizando Produtos Notáveis	Tesoura e cópias da folha de atividades.	O objetivo dessa atividade é fazer uma revisão de fatoração de polinômios, em especial, de alguns produtos notáveis, que serão posteriormente utilizados como ferramentas para resolver equações do 2º grau. Para isso, sugerimos um material concreto que associa áreas de figuras geométricas às operações matemáticas envolvidas.	Duplas	40 minutos

Seção 3 – Resolução de equações do 2º grau

Páginas no material do aluno

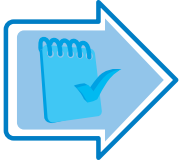
164 a 174

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Completando quadrados: combinando métodos geométricos e algébricos!	Computador com Datashow, cópias da folha de atividades.	O objetivo dessa atividade é mostrar aos alunos um método bem interessante para resolver equações do segundo grau. O método, conhecido como método de completar quadrados, propõe uma combinação entre métodos algébricos e geométricos.	Grupos de 4 alunos	40 minutos
	Encontrando a Fórmula	Cópias da folha de atividades.	O objetivo dessa aula é desenvolver o raciocínio lógico, por intermédio da dedução da fórmula de resolução de equações do segundo grau. Também esperamos que o aluno consiga utilizar a fórmula encontrada para resolver situações que envolvam equações deste tipo.	Duplas	40 minutos
	Quantas raízes reais a equação tem?	Cópias da folha de atividades.	O objetivo dessa aula é analisar a fórmula conhecida como a fórmula de Bhaskara, estabelecendo relações entre o número de raízes reais e o sinal do discriminante (delta).	Duplas	40 minutos

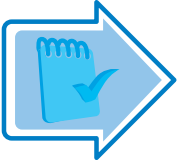
Seção 3 – Resolução de Problemas de 2º Grau

Páginas no material do aluno

164 a 174

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Papiro de Moscou e os Babilônios	Cópias da folha de atividades.	O objetivo dessa atividade é fazer com que o aluno consiga identificar e resolver problemas que envolvam equações de segundo grau. Para isso, vamos enunciar e sugerir que os alunos traduzam tais problemas em linguagem algébrica. Além disso, os alunos também devem resolvê-los a partir da resolução da equação e da interpretação de suas raízes.	Grupos de 4 alunos	40 minutos

Avaliação da Aprendizagem

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Avaliação da Unidade	Folha de atividades, material do aluno, lápis/caneta.	Esta atividade sugere um instrumento avaliativo para a unidade dividido em duas etapas: registro de aprendizagens e questões objetivas a serem escolhidas a critério do professor.	Participação individual.	40 minutos

O que perguntam por aí...

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Questões de avaliações externas	Imagem para projeção disponível neste material e no DVD do professor; material do aluno.	–	Duplas	–

Atividade Complementar

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Exercícios Complementares	Cópias da folha de Atividades.	–	Duplas ou trios.	–

Atividades Iniciais

Descrevemos a seguir situações motivadoras que tem por objetivo fazer com que os alunos iniciem uma discussão coletiva e, antes da etapa de formalização, se familiarizem com o conteúdo matemático a ser trabalhado de forma empírica e com atividades de fácil compreensão. Sugerimos que você escolha a que seja mais adequada à sua realidade, ou, se preferir, utilize uma atividade própria.

Atividade Inicial

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Equações quadráticas: como resolvê-las?	Cópias da folha de atividades.	O objetivo dessa atividade é desenvolver a capacidade de ler, interpretar, escolher estratégias e analisar a solução de uma situação-problema.	Duplas	40 minutos

Aspectos operacionais

Professor, na folha de atividades, são propostas algumas curiosidades matemáticas para promover uma reflexão utilizando, para isso, raciocínios que envolvem a equação do segundo grau. Procure, inicialmente, deixar que seus alunos reflitam sobre elas e, ao final, procure fazer a discussão com as diferentes formas de resolução apresentadas.

É importante que você reproduza a folha de atividades, com antecedência, de acordo com o número de alunos da sua turma.

Aspectos pedagógicos

Os grupos deverão expor o modo como desenvolveram a atividade. Você pode discutir com os alunos sobre o que foi exposto, como também sobre as dificuldades encontradas na realização da atividade.

Chamamos a atenção para alguns aspectos em relação às questões propostas:

- Na questão 1, oriente os alunos para usarem frações irredutíveis, sobretudo, quando os números são pares.

- Na questão 2, no item (e), é solicitado que o aluno determine o valor de x , caso a área do retângulo C seja igual a 84 u.a., caso haja dúvidas na resolução deste problema, você pode orientar os alunos a pensarem na fatoração de 84 em dois fatores inteiros que satisfaçam a condição: x e $20-x$
- Na questão 3, você pode expor para os alunos a importância de se ter atenção para a ordem das palavras. Por exemplo: “a soma do dobro de um número com 3” e o “o dobro da soma de um número com 3” representam, respectivamente, $2x+3$ e $2(x+3)=2x+6$. No último item desta questão, os alunos devem perceber que a equação não tem solução real, pois um quadrado não pode ser igual a um número negativo. Em caso de dificuldade, retome essa questão com seus alunos.

Ao final da atividade, procure fazer uma discussão com a turma sobre as diferentes formas de resolução apresentadas.

Folha de Atividades – Equações quadráticas: como resolvê-las?

Nome da escola: _____

Nome: _____

1. (UERJ-2005-adaptada) Terno pitagórico é a denominação para os três números inteiros que representam as medidas, com a mesma unidade, dos três lados de um triângulo retângulo. Um terno pitagórico pode ser gerado da seguinte forma:

- i. Escolhem-se dois números pares consecutivos ou dois números ímpares consecutivos;
- ii. Calcula-se a soma de seus inversos, obtendo-se uma fração cujos numerador e denominador representam as medidas dos catetos de um triângulo retângulo;
- iii. Calcula-se a hipotenusa, utilizando o teorema de Pitágoras.

Por exemplo,

- i. Para 3 e 5

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$$

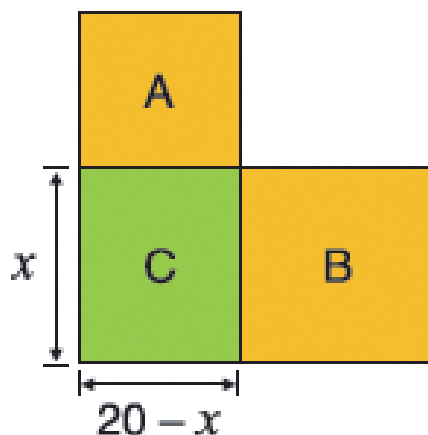
ii.

$$\text{iii. } a^2 = 8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289 \rightarrow a = 17$$

Utilizando o procedimento descrito, calcule as medidas dos três lados de um triângulo retângulo, considerando os números a seguir:

- a. 1 e 3
- b. 4 e 6

2. Observe o diagrama a seguir, formado por dois quadrados (A e B) e um retângulo (C).



- Qual é a expressão algébrica que representa a medida do lado do quadrado indicado por A?
 - Qual é a expressão algébrica que representa a medida do lado do quadrado indicado por B?
 - Complete o diagrama, formando um novo quadrado.
Qual é a medida do lado desse novo quadrado?
Qual é a medida da sua área?
 - Para completar o quadrado é necessário um retângulo cuja medida da área é igual à área do retângulo indicado por C. Por que isso acontece? Troque ideias com seus colegas.
 - Considerando que a área do retângulo C é 84 cm^2 , quais as medida dos seus lados?
3. Observe a seguinte equação

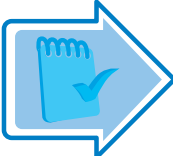
$$(x-3)^2 = 25$$

- Você sabe ler essa equação?
- Provavelmente você pensou “x menos 3 ao quadrado igual a 25”. Sim, é verdade. Porém, essa equação também pode ser lida da seguinte maneira: “25 é o quadrado de um número que subtraído de 3”.
Falando assim não fica um pouco mais fácil para pensar na solução? Afinal, 25 é o quadrado de 5, então o número que subtraído de 3 dá 5 é 8.
Às vezes nos detemos tanto aos procedimentos que nos esquecemos de pensar! Mas sempre que possível é importante pensar em diferentes estratégias para resolver um problema.
Pense, então, para tentar entender por que -2 também é solução dessa equação. Explique com suas palavras o que você pensou.
- Observe a equação a seguir e determine os valores de x que a satisfazem.
 $(x+1)^2 = 4$
- A equação $(x-2)^2 = -9$
Por quê?

Seção 2 – Breve revisão dos produtos notáveis

Páginas no material do aluno

160 a 164

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Resolvendo Equações Utilizando Produtos Notáveis	Tesoura e cópias da folha de atividades.	O objetivo dessa atividade é fazer uma revisão de fatoração de polinômios, em especial, de alguns produtos notáveis, que serão posteriormente utilizados como ferramentas para resolver equações do 2º grau. Para isso, sugerimos um material concreto que associa áreas de figuras geométricas às operações matemáticas envolvidas.	Duplas	40 minutos

Aspectos operacionais

Esta atividade foi dividida em 5 etapas, que trabalham gradativamente fatoraões de polinômios com o auxílio de áreas de figuras geométricas. As etapas 1 e 2 trabalham as ideias de termos em evidência e agrupamento a partir da propriedade distributiva. Da etapa 3 em diante, retomamos a ideia de alguns produtos notáveis, como os quadrados da soma e da diferença de dois termos e o produto da soma pela diferença de dois termos.

Para iniciar a atividade, apresente aos alunos as peças disponíveis na folha de atividades e peça que as recorrem na medida em que forem realizando as etapas da atividade. Oriente-os a identificar as áreas de cada peça, assim como composições entre elas, a partir das questões propostas.

Professor, é importante que você reproduza a folha de atividades, com antecedência, de acordo com o número de alunos da sua turma.

Aspectos pedagógicos

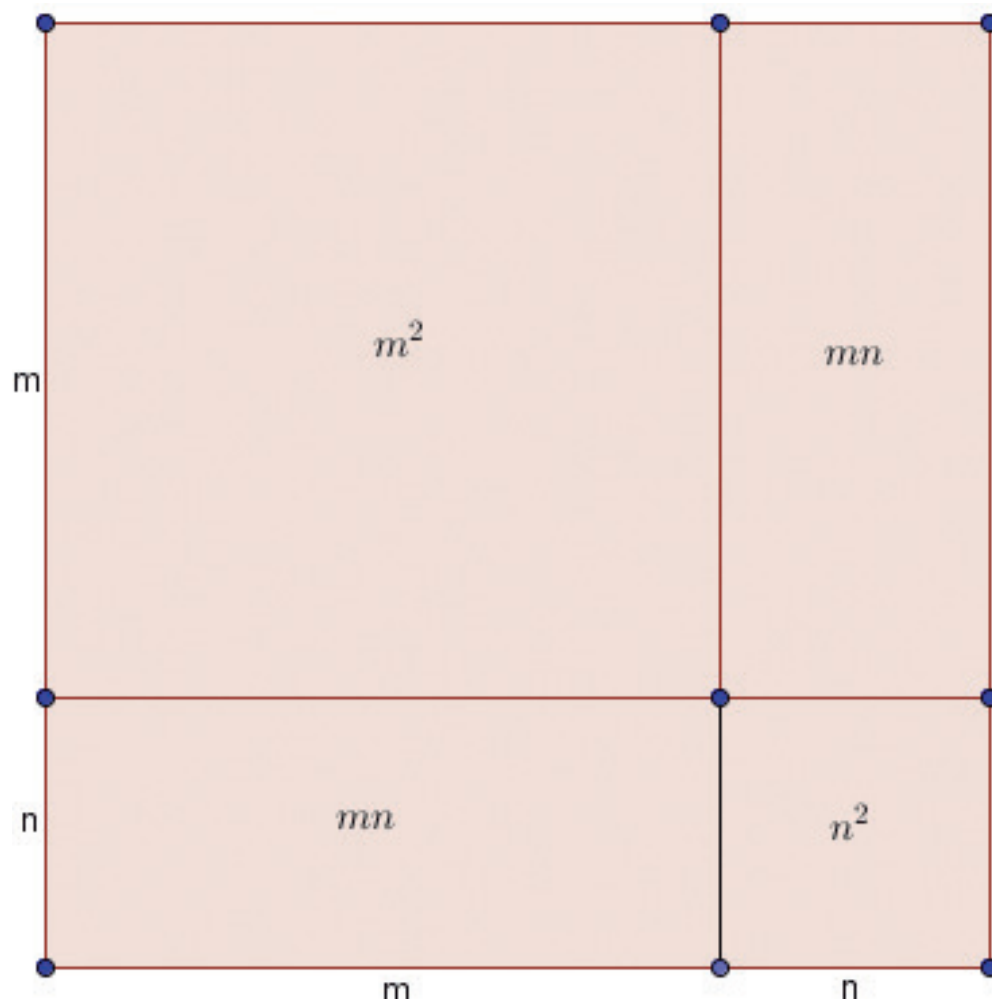
Professor, durante a realização das etapas 1 e 2, retome a propriedade distributiva e oriente os alunos a observarem a possibilidade de se colocar termos comuns em evidência.

Durante as etapas, é importante que os alunos relacionem as áreas das figuras geométricas aos produtos:

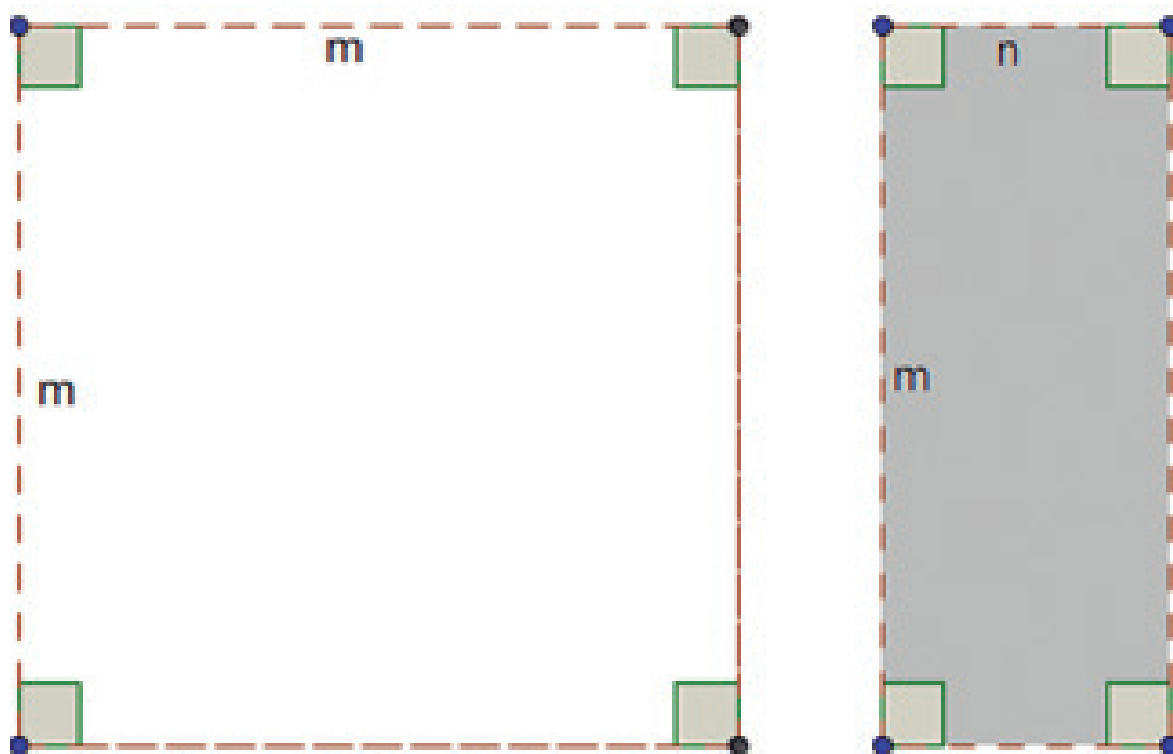
- $x(x+m) = x^2+mx$ ou $x(x-m) = x^2-mx$
- $(x+m)^2 = x^2+2mx+m^2$ ou $(x-m)^2 = x^2-2mx+m^2$
- $(x+m)(x-m) = x^2-m^2$
- E, genericamente, $(x+m)(x+n) = x^2 + (m+n)x + mn$

Alguns alunos podem, por exemplo, ter dificuldades de associar as áreas das figuras planas a essas representações algébricas. Por esse motivo, é importante explorar esses pontos com os alunos, indagando-os sobre o entendimento destas relações.

Se achar necessário, reproduza as figuras na lousa, realizando as composições das peças e montando as figuras propostas nas etapas da atividade, como por exemplo, no caso $(x+m)^2 = x^2+2mx+m^2$:



Para facilitar o entendimento, você pode orientá-los a considerarem peças de cores diferentes para representar termos com sinais diferentes. Por exemplo, peças brancas termos com sinal positivo e cinzas com sinal negativo.



Assim, o termo correspondente ao quadrado branco é o $+m^2$ e ao retângulo cinza o $-mn$.

Após essa exploração genérica, você pode apresentar um exemplo, como o exposto a seguir:

A equação $x^2+6x+9=0$ pode ser reescrita da forma $(x+3)^2=0$. Se usarmos a propriedade da multiplicação de números reais - se $a.b=0$ então $a=0$ ou $b=0$ -, obteremos, diretamente, duas soluções reais e iguais $x_1 = x_2 = -3$, para a equação dada.

Ao final da atividade, acreditamos que os alunos estejam aptos a resolverem os exercícios propostos nesta seção no material do aluno.

Folha de Atividades – Resolvendo Equações Utilizando Produtos Notáveis

Nome da escola: _____

Nome: _____

Etapa 1: Relembrando a propriedade distributiva – termos em evidência

- Recorte as peças dadas, disponíveis na sua folha de atividades.
- Qual é a área de cada uma das peças retangulares dadas?
- Com essas duas peças, construa um retângulo.
- Qual é a medida dos lados desse retângulo que você construiu?
- Qual é área do retângulo construído?
- Você deve ter observado que a área do retângulo construído é igual à soma das áreas das duas peças retangulares. Expresse algebricamente essa relação de igualdade.

Etapa 2: Relembrando a propriedade distributiva - outros casos

- Recorte as peças dadas, disponíveis na sua folha de atividades.
- Qual é a área de cada uma das peças retangulares dadas?
- Com essas quatro peças, construa um retângulo.
- Qual é a medida dos lados desse retângulo que você construiu?
- Qual é área do retângulo construído?
- Você deve ter observado que a área do retângulo construído é igual à soma das áreas das quatro peças retangulares. Expresse algebricamente essa relação de igualdade.

Etapa 3: Produtos notáveis – o quadrado da soma de dois termos

- Recorte as peças dadas, disponíveis na sua folha de atividades.
- Qual é a área de cada uma das peças dadas?
- Com essas quatro peças, construa um quadrado.
- Qual é a medida dos lados desse quadrado que você construiu?
- Qual é área do quadrado construído?
- Você deve ter observado que a área do quadrado construído é igual à soma das áreas das quatro peças dadas. Expresse algebricamente essa relação de igualdade.

Etapa 4: Produtos notáveis – o quadrado da diferença entre dois termos

- Recorte as peças dadas, disponíveis na sua folha de atividades.
- Qual é a área de cada uma das peças dadas?
- Com essas quatro peças, obtenha um quadrado de lado $m-n$. Para isso, sobreponha as peças dadas para retirar ou acrescentar áreas.
- Qual é área do quadrado construído?
- Você deve ter observado que o quadrado de lado $m-n$ pode ser obtido se:
 - retirarmos do quadrado de lado m um retângulo de dimensões n e m ;
 - acrescentarmos um quadrado de lado n ;
 - retirarmos outro retângulo de dimensões n e m .

Expresse algebricamente essa relação de igualdade entre a área do quadrado e a sequência de operações expostas acima.

Etapa 5: Produtos notáveis – o produto da soma pela diferença de dois termos

- Para esta etapa, utilize as mesmas peças da etapa anterior.
- Justaponha as peças para acrescentar e sobreponha para retirar, e construa um retângulo de dimensões $m+n$ e $m-n$.
- Qual é área do retângulo construído?
- Você deve ter observado que o retângulo de dimensões $m+n$ e $m-n$ pode ser obtido se:
 - acrescentarmos ao quadrado de lado m um retângulo de dimensões m e n ;
 - retirarmos, do retângulo de lados m e $m+n$ formado, um quadrado de lado n e um retângulo de dimensões m e n .

Expresse algebricamente essa relação de igualdade entre a área desse quadrado e a sequência de operações expostas acima.

Obs.: Você pode observar uma outra abordagem para esta etapa no material do aluno.

Agora, responda as questões a seguir:

Questão 1: Desenvolva os seguintes produtos notáveis:

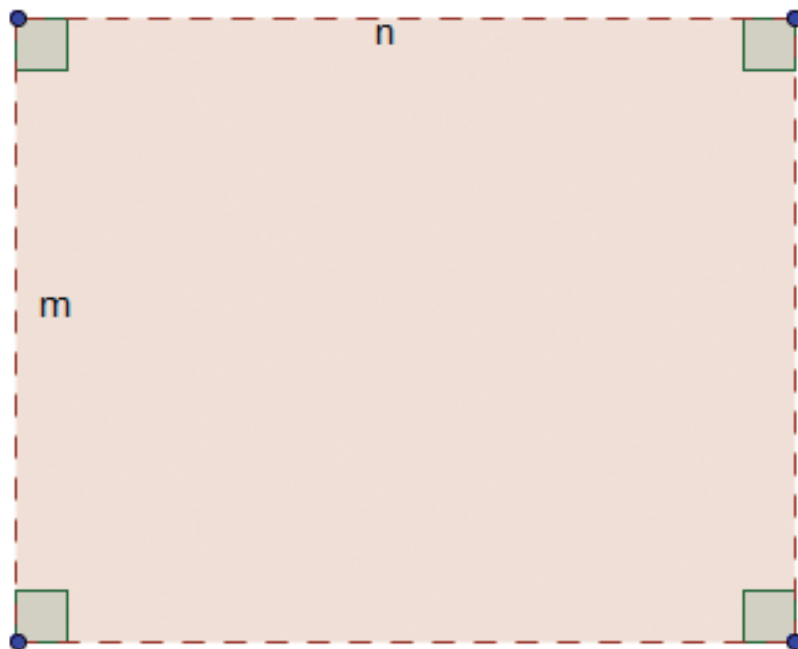
- a) $(x-4)^2$ b) $(x+5)^2$ c) $(x-8)^2$

Questão 2: Utilizando produtos notáveis, resolva as seguintes equações:

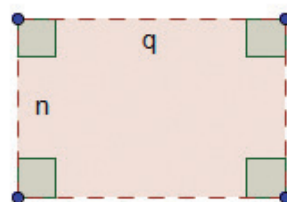
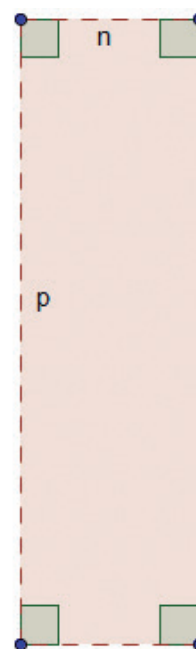
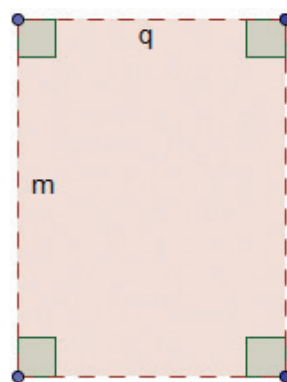
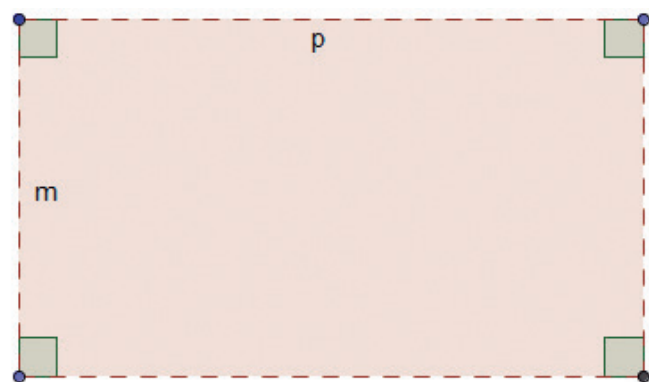
- a) $x^2-2x+1=0$ b) $x^2+12x+36=0$ c) $x^2-20x+100=0$

Figuras para recorte

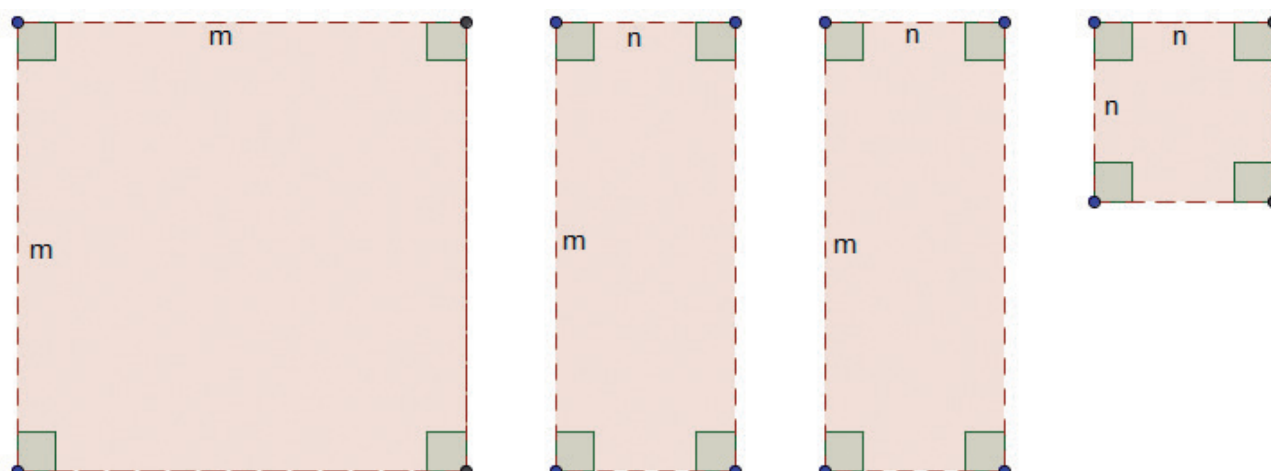
Etapas 1



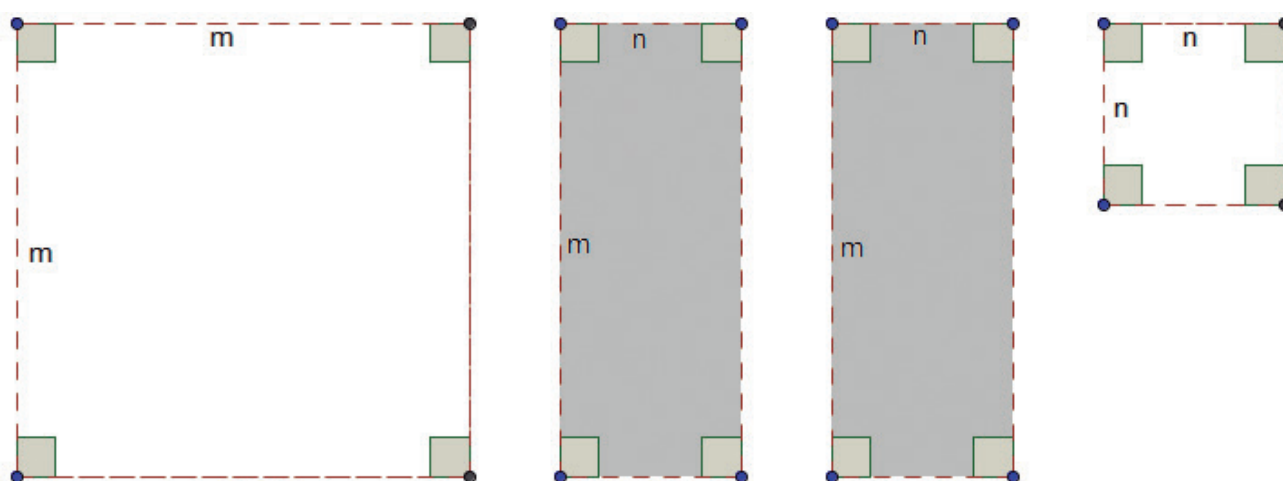
Etapas 2



Etapa 3



Etapas 4 e 5



Seção 3 – Resolução de equações do 2º grau

Páginas no material do aluno

164 a 174

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Completando quadrados: combinando métodos geométricos e algébricos!	Computador com Datashow, cópias da folha de atividades.	O objetivo dessa atividade é mostrar aos alunos um método bem interessante para resolver equações do segundo grau. O método, conhecido como método de completar quadrados, propõe uma combinação entre métodos algébricos e geométricos.	Grupos de 4 alunos	40 minutos

Aspectos operacionais

Professor, usando um projetor e o material disponível em pdf no seu DVD, mostre aos alunos como podem resolver uma equação de segundo grau, utilizando métodos algébricos e geométricos combinados.

A equação que será apresentada aos alunos para ser resolvida será a seguinte:

$$x^2 + 10x - 39 = 0$$

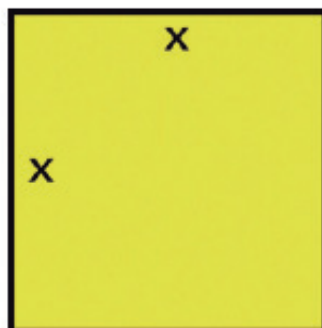
Para resolvê-la, oriente os alunos a seguirem os passos a seguir:

Passo 1: Verifique se a expressão corresponde a um quadrado perfeito.

Caso contrário, reescreva a equação, de tal maneira que o 1º termo (do lado esquerdo da igualdade) fique o termo de grau 2 (x^2) somado com o termo de grau 1 e no 2º termo (do lado direito) um número.

$$x^2 + 10x = 39$$

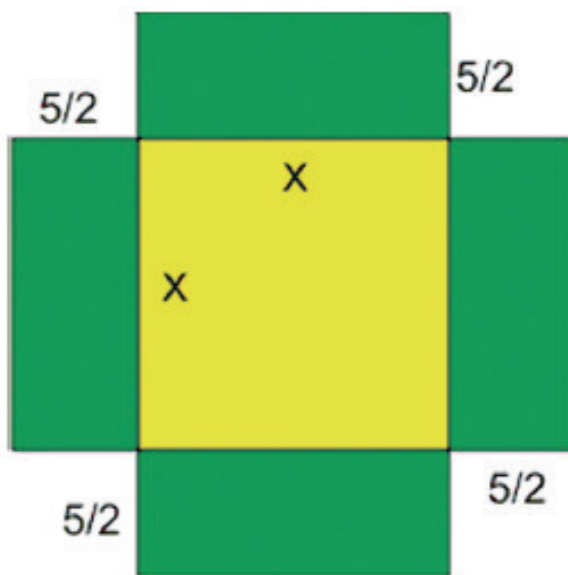
Passo 2: Represente um quadrado de lado x .



Observe que esse quadrado tem área x^2 .

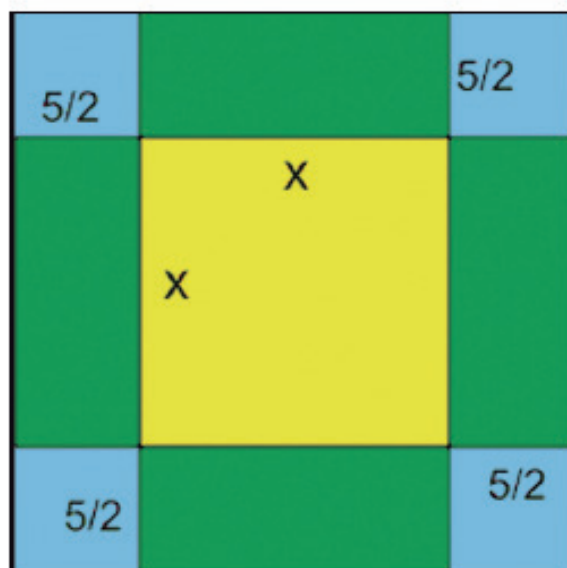
Passo 3: Justaponha um retângulo a cada lado do quadrado. Para isso, observe que o termo de grau 1 ($10x$, nesse caso) pode ser interpretado geometricamente por um retângulo com lados medindo x e 10 . Assim, para colocarmos quatro retângulos em cada um dos lados do quadrado, cada retângulo deve ter um lado igual a x e outro igual a $10/4$ para que a soma dos quatro retângulos seja igual a $10x$.

Repare que $10/4 = 5/2$.



Repare que essa figura representa a expressão $x^2 + 10x$, ou seja, um quadrado e um retângulo 10 por x , decomposto em 4 retângulos $5/2$ por x . Como $x^2 + 10x = 39$ então, podemos afirmar que essa figura tem área igual a 39 .

Passo 4: Complete a figura acima, formando um quadrado.



Passo 5: Calcule a área desse novo quadrado, lembrando que cada um dos 4 quadradinhos tem área $\left(\frac{5}{2}\right)^2$. Depois disso, observe o quadrado formado no item anterior e indique a medida de seu lado.

A área do quadrado é

$$39 (=x^2+10x) + 4 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 (\text{quadradinhos}) = 39 + 4 \cdot \left(\frac{25}{4}\right) = 39 + 25 = 64$$

Como o quadrado tem lado $x + 5/2 + 5/2 = x + 5$, então, podemos escrever

$$(x+5)^2 = 64$$

Assim, o lado x do quadrado é 3.

Porém, observando a equação, é possível perceber que há outra solução. Para obter essa solução, podemos proceder, por exemplo, da seguinte maneira.

$$(x+5)^2 = 64$$

$$x + 5 = \pm\sqrt{64} = \pm 8 \rightarrow x = -5 \pm 8 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -5 + 8 = 3 \\ x_2 = -5 - 8 = -13 \end{cases}$$

Após esta exploração, leve os alunos a utilizar o método de completar quadrados, para resolver equações disponíveis na folha de atividades.

Professor, é importante que você reproduza a folha de atividades, com antecedência, de acordo com o número de alunos da sua turma.

Aspectos pedagógicos

Professor, ao apresentar o método de completar quadrados, discuta com a turma sobre a possibilidade de se combinar aspectos algébricos e geométricos para resolver equações do segundo grau.

Em relação aos passos da apresentação, antes de completar o quadrado geométrico, ressalte para seus alunos que a figura formada no terceiro passo tem área igual a 39, uma vez que a equação dada nos diz que $x^2 + 10x = 39$

Ao final, a observação do quadrado geométrico leva à raiz positiva da equação. Contudo, é importante que você chame a atenção de seus alunos para a outra raiz da equação. Nesse caso, os alunos devem lembrar que não é apenas o número 8 que tem o quadrado igual a 64: -8 também o tem e, por isso, -13 também é solução da equação algébrica dada.

Depois disso, os alunos devem colocar em prática o método, fazendo os exercícios que se encontram na folha de atividades. Ao término da atividade, é interessante discutir os exercícios propostos em sala de aula, para sanar dúvidas que ainda possam existir.

Caso os alunos apresentem dificuldades em relação às manipulações algébricas a partir de figuras geométricas, utilize a lousa para dar outros exemplos, e resolva outras equações usando os passos apresentados, até que os alunos atinjam o entendimento desejado. Na última equação, os alunos podem ter alguma dificuldade para operar com frações. Repare que, nas duas primeiras equações, o termo de x é par, o que faz com que o procedimento seja muito parecido com o exemplo. Já na última equação, esse termo é ímpar e, por isso, ao fazer $4.(3/4)^2$ o fator 4 não poderá ser simplificado como nos outros casos e, assim, terão que operar com a fração $9/4$. Esteja atento e ajude seus alunos, se necessário.

Folha de Atividades – Completando quadrados: combinando métodos geométricos e algébricos!

Nome da escola: _____

Nome: _____

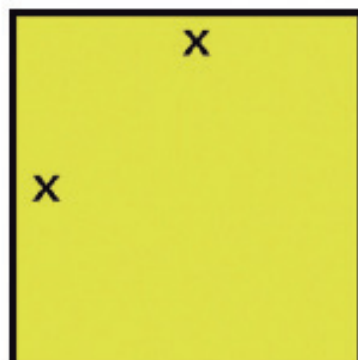
O método de completar quadrados para expressões do tipo $x^2 + bx = k$, com b positivo.

Passo 1: Verifique se a expressão corresponde a um quadrado perfeito.

Caso contrário, escreva a equação, de tal maneira que do lado esquerdo fique o termo de grau 2 (x^2) somado com o termo de grau 1 e do lado direito um número.

$$x^2 + 10x = 39$$

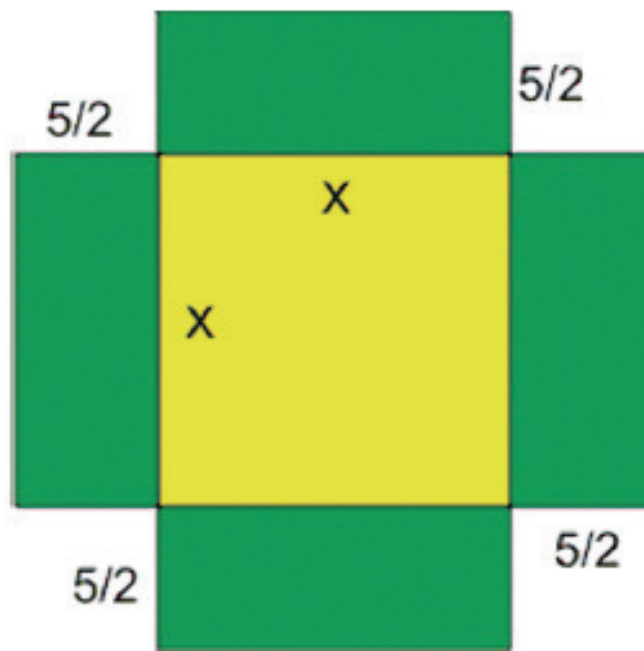
Passo 2: Represente um quadrado de lado x .



Observe que esse quadrado tem área x^2

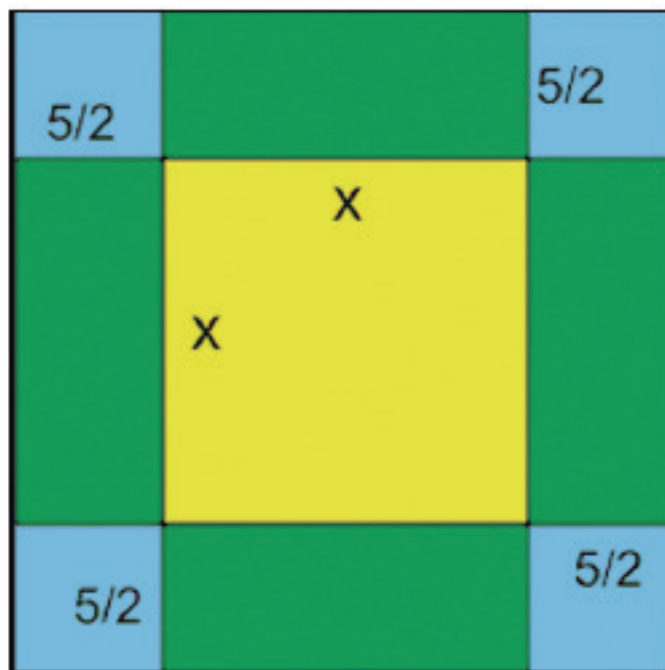
Passo 3: Justaponha um retângulo a cada lado do quadrado. Para isso, observe que o termo de grau 1 ($10x$, nesse caso) pode ser interpretado geometricamente por um retângulo com lados medindo x e 10 . Assim, para colocarmos quatro retângulos em cada um dos lados do quadrado, cada retângulo deve ter um lado igual a x e outro igual a $10/4$ para que a soma dos quatro retângulos seja igual a $10x$.

Repare que $10/4 = 5/2$.



Repare que essa figura representa a expressão $x^2 + 10x$, ou seja, um quadrado e um retângulo 10 por x , decomposto em 4 retângulos $5/2$ por x . Como $x^2 + 10x = 39$ então, podemos afirmar que essa figura tem área igual a 39 .

Passo 4: Complete a figura acima, formando um quadrado.



Passo 5: Calcule a área desse novo quadrado, lembrando que cada um dos 4 quadradinhos tem área $\left(\frac{5}{2}\right)^2$. Depois disso, observe o quadrado formado no item anterior e indique a medida de seu lado.

A área do quadrado é

$$39 (=x^2+10x) + 4 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 (\text{quadradinhos}) = 39 + 4 \cdot \left(\frac{25}{4}\right) = 39 + 25 = 64$$

Como o quadrado tem lado $x + 5/2 + 5/2 = x + 5$, então, podemos escrever

$$(x+5)^2 = 64$$

Assim, o lado x do quadrado é 3.

Porém, observando a equação, é possível perceber que há outra solução. Para obter essa solução, podemos proceder, por exemplo, da seguinte maneira.

$$(x+5)^2 = 64$$

$$x + 5 = \pm\sqrt{64} = \pm 8 \rightarrow x = -5 \pm 8 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -5 + 8 = 3 \\ x_2 = -5 - 8 = -13 \end{cases}$$

Questão 1: Utilizando o método de completar quadrados, resolva as seguintes equações.

a. $x^2 + 6x - 27 = 0$

b. $x^2 + 14x = 15$

c. $x^2 + 3x - 70 = 0$

Seção 3 – Resolução de equações do 2º grau

Páginas no material do aluno

164 a 174

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Encontrando a Fórmula	Cópias da folha de atividades.	O objetivo dessa aula é desenvolver o raciocínio lógico, por intermédio da dedução da fórmula de resolução de equações do segundo grau. Também esperamos que o aluno consiga utilizar a fórmula encontrada para resolver situações que envolvam equações deste tipo.	Duplas	40 minutos

Aspectos operacionais

Professor, o material do aluno sugere que você deduza uma fórmula, conhecida como fórmula de Bhaskara, que permite determinar as raízes de equações do 2º grau completas e incompletas. Esta atividade propõe que esta dedução seja construída em conjunto com alunos e, posteriormente, aplicada na resolução de equações.

Para iniciar a atividade, oriente os alunos a acompanharem a dedução de uma fórmula muito útil para resolver equações do 2º grau. Você pode orientá-los a acompanharem essa dedução na lousa e pelo material do aluno, conforme os passos a seguir:

Passo 1: Considere uma equação da forma $ax^2 + bx + c = 0$, com a , b e c sendo coeficientes reais e $a \neq 0$.

Passo 2: Reescreva a equação como $ax^2 + bx = -c$ e divida todos os termos por a . Daí, obtém-se $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$

Passo 3: Para ter no 1º membro dessa equação um trinômio quadrado perfeito, some $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ a ambos os membros. Assim, tem-se $x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$.

Passo 4: Escreva o 1º membro na sua forma do quadrado da soma de dois termos e o 2º membro com um único denominador. Desta forma, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$.

Passo 5: Aplique a raiz quadrada em ambos os membros e obtenha que $x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$, ou seja,

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Passo 6: Isole o x para obter a fórmula desejada, isto é, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Após expor, na lousa, os passos necessários para esta dedução, divida a turma em duplas para que possam desenvolver as questões propostas na folha de atividades.

Professor, é importante que você reproduza a folha de atividades, com antecedência, de acordo com o número de alunos da sua turma.

Aspectos pedagógicos

Professor, sabemos que não há unanimidade quanto ao uso de demonstrações nas aulas do Ensino Médio. No entanto, acreditamos que esta seja uma oportunidade de se promover uma discussão coletiva sobre a fórmula mais usual de resolução de equações do 2º grau e um meio de mostrar aos alunos que não se trata de uma fórmula mágica, e sim de uma dedução, oriunda de uma sequência de operações e propriedades matemáticas que embasam a sua utilização. Também é possível discutir o que se entende por “fórmula”, salientando o papel desse aparato matemático, as vantagens de sua aplicação e sua característica generalizante.

Durante essa dedução, é possível que os alunos apresentem algumas dificuldades para compreender as manipulações algébricas utilizadas. Por exemplo, do passo 3 para o 4, é importante lembrá-los sobre a ideia de produtos notáveis e a redução de trinômios quadrados perfeitos ao quadrado da soma de dois termos. Nesta etapa, utilizou-se, no 1º membro, a relação $(x+m)^2 = x^2 + 2mx + m^2$, com $m=b/2a$ e, no 2º membro, utilizou-se apenas cálculos com potências e equivalência de frações, ou seja, $(b/2a)^2 = b^2/4a^2$ e $(c/2a)^2 = 4ac/4a^2$.

Outra discussão relevante está na passagem do passo 4 para o 5. Chame a atenção dos alunos para o fato de que, ao tirar a raiz quadrada de um quadrado, o resultado é o módulo da base.

Em relação às questões propostas na folha de atividades, espera-se que o aluno consiga aplicar a fórmula deduzida e observar que nem sempre haverá soluções reais para uma equação dada.

Ao final da atividade, é interessante discutir os exercícios propostos em sala de aula, para tentar sanar as dúvidas ainda existentes. Se você achar necessário, desdobre essa dedução em um número maior de passos, até que a turma demonstre o entendimento necessário.

Folha de Atividades – Encontrando a Fórmula

Nome da escola: _____

Nome: _____

Questão 1: Para fixar as ideias trabalhadas em aula, reproduza os passos realizados pelo professor para deduzir a fórmula de resolução de equações do 2º grau:

Questão 2: Identifique os coeficientes a , b e c e resolva, em $\mathbb{R}$, as equações a seguir, utilizando a fórmula deduzida durante a atividade.

a) $x^2 - x - 20 = 0$

b) $-x^2 - 3x + 4 = 0$

c) $x^2 - 8x + 7 = 0$

d) $x^2 + 2x + 1 = 0$

e) $2x^2 - 2x + 5 = 0$

Questão 3: O que você observa em relação às soluções reais da equação do item (e) da questão anterior?

Seção 3 – Resolução de equações do 2º grau

Páginas no material do aluno

164 a 174

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Quantas raízes reais a equação tem?	Cópias da folha de atividades.	O objetivo dessa aula é analisar a fórmula conhecida como a fórmula de Bhaskara, estabelecendo relações entre o número de raízes reais e o sinal do discriminante (delta).	Duplas	40 minutos

Aspectos operacionais

Professor, o material do aluno, assim como uma das atividades propostas neste material, apresenta a dedução da fórmula conhecida como fórmula de Bhaskara. Esta atividade propõe que a fórmula de Bhaskara seja analisada sob o ponto de vista da natureza das raízes de uma equação quadrática dada e de como se pode calcular a soma e o produto destas raízes.

Para iniciar a atividade, utilize a lousa para lembrar os alunos da fórmula obtida:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Destaque o radicando, desta fórmula, apresentando-o como o discriminante da equação, isto é, $\Delta = \sqrt{b^2 - 4ac}$, reescrevendo a fórmula da forma:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

E separe as operações, de modo que os alunos observem as duas operações representadas pelo sinal $\pm$, ou seja:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Após expor, na lousa, a fórmula e as operações envolvidas, divida a turma em duplas e entregue uma folha de atividades para cada aluno, para que possam desenvolver as questões propostas.

Professor, é importante que você reproduza a folha de atividades, com antecedência, de acordo com o número de alunos da sua turma.

Aspectos pedagógicos

Professor, para instigar os alunos a pensar na relação entre o número de raízes reais e o discriminante de uma equação, você pode utilizar perguntas do tipo:

- Quantas raízes reais, vocês acham que uma equação do 2º grau possui?
- Será que é necessário resolver uma equação do segundo grau para saber quantas raízes reais ela tem?

Em relação às questões propostas na folha de atividades, espera-se que o aluno observe a relação entre o número de raízes reais e o sinal do discriminante. Espera-se também que ele consiga deduzir, a partir da fórmula apresentada, fórmulas para calcular a soma e produto das raízes de uma equação quadrática. Em caso de dúvidas, oriente os alunos a preencherem a tabela, disponível na folha.

Durante a dedução das fórmulas de soma e produto, é possível que os alunos apresentem algu-

mas dificuldades na compreensão de manipulações algébricas utilizadas. Por exemplo, ao calcularem $x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right)$ oriente-os nas regras de sinais e operações com frações, e leve-os a compreen-

der que $x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta} - b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$. Da mesma forma, chame atenção para as operações no cálculo do produto, $x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \cdot \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$.

Aqui, é importante lembrá-los sobre a ideia de produtos notáveis e o produto da soma pela diferença de dois termos. Neste produto, utilizou-se, no numerador, a relação $(x+m)(x-m) = x^2 - m^2$, com $x = -b$ e $m = \sqrt{\Delta}$. Posteriormente, utilizou-se equivalência de frações e propriedades de potência e radiciação, como $(\sqrt{\Delta})^2 = \Delta$, e $(4ac/4a^2 = c/a)$.

Ao indagar os alunos sobre o número de raízes de uma equação quadrática, é possível que muitos respondam que sempre haverá duas raízes. É importante que você valorize esta resposta, que de fato é verdade, mas leve-os a observar que nem sempre tais soluções pertencem ao conjunto dos números reais, e que, em certos casos ($\Delta > 0$), as raízes pertencem a outro conjunto, denominado conjunto dos números complexos, $\mathbb{C}$. Você deve lembrá-los que uma raiz quadrada só é um número real se o radicando for positivo ou zero, ou seja, que não existe nenhum número real que elevado ao quadrado resulte em um número negativo.

Ao final da atividade, seria interessante que os grupos expusessem para a turma como desenvolveram as atividades propostas e discutissem coletivamente os exercícios propostos.

Para fixar as ideias trabalhadas na atividade, sugerimos que você construa, em conjunto com os alunos, um quadro-resumo, conforme o exposto a seguir:

$ax^2 + bx + c = 0$ com $a \neq 0$			
$\Delta > 0$	Duas raízes reais diferentes	$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	O conjunto verdade, em R, possui dois elementos.
$\Delta = 0$	Duas raízes reais iguais	$x_1 = x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = \frac{-b}{2a}$	O conjunto verdade, em R, possui um elemento.
$\Delta < 0$	Não tem raízes reais	–	O conjunto verdade, em R, é vazio.

Folha de Atividades – Quantas raízes reais a equação tem?

Vimos que podemos calcular as raízes de uma equação do 2º grau pela fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

O radicando $b^2 - 4ac$ é denominado discriminante (no decorrer na atividade pense por quê?) e é representado pela letra grega delta, assim escrevemos $\Delta = b^2 - 4ac$.

Separando as duas operações representadas pelo sinal $\pm$, obtemos:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Agora, responda as questões propostas:

Questão 1: Utilizando a fórmula dada, resolva, em R, as equações a seguir:

- a) $x^2 - 7x + 10$ b) $x^2 - 8x + 16$ c) $x^2 - 2x + 2$

Questão 2: O que você observa em relação ao número de raízes reais das equações da questão anterior?

Questão 3: Você acha que é necessário resolver uma equação do segundo grau para saber quantas raízes reais ela possui? Justifique a sua resposta.

Questão 4: Relacione o sinal do discriminante ao número de raízes reais de uma equação do 2º grau.

- (a) $\Delta < 0$ () duas raízes reais iguais.
 (b) $\Delta = 0$ () duas raízes reais diferentes.
 (c) $\Delta > 0$ () não possui raiz real.

Questão 3: Para fixar as ideias, complete a tabela e responda as questões a seguir:

Equação	$\Delta = b^2 - 4ac$	Complete com <, > ou =	Número de raízes reais (diferentes, iguais ou não possui raiz real)	Número de elementos do conjunto verdade, em R
$x^2 - 7x + 10$	9	$\Delta > 0$	2 raízes reais diferentes	2 elementos
$x^2 - 6x + 8 = 0$		$\Delta \text{ _____ } 0$		
$x^2 - 8x + 16 = 0$		$\Delta \text{ _____ } 0$		
$x^2 - 2x + 2 = 0$		$\Delta \text{ _____ } 0$		
$x^2 - 2\sqrt{5}x + 4 = 0$		$\Delta \text{ _____ } 0$		
$-2x^2 + 3x - 1 = 0$		$\Delta \text{ _____ } 0$		
$3x^2 + 2x + 1 = 0$		$\Delta \text{ _____ } 0$		
$4x^2 - 4x + 1 = 0$		$\Delta \text{ _____ } 0$		

- a) Qual a condição para que o conjunto verdade, em R de uma equação seja unitário?
 b) Qual o valor de m, para que a equação $-x^2 - 3x - (2m - 3) = 0$ tenha um conjunto verdade, em R, não vazio?

Questão 5: Sabendo que as raízes de uma equação do 2º grau podem ser obtidas pelas fórmulas:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

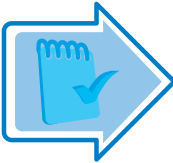
Tente deduzir as fórmulas que permitem calcular:

- a) A soma das raízes, isto é, $x_1 + x_2$
 b) O produto das raízes, isto é, $x_1 \cdot x_2$

Seção 3 – Resolução de Equações de 2º Grau

Páginas no material do aluno

164 a 174

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Papiro de Moscou e os Babilônios	Cópias da folha de atividades.	O objetivo dessa atividade é fazer com que o aluno consiga identificar e resolver problemas que envolvam equações de segundo grau. Para isso, vamos enunciar e sugerir que os alunos traduzam tais problemas em linguagem algébrica. Além disso, os alunos também devem resolvê-los a partir da resolução da equação e da interpretação de suas raízes.	Grupos de 4 alunos	40 minutos

Aspectos operacionais

Apresente os problemas disponíveis na folha de atividades aos alunos. Recomendamos que você, professor, leia-os com os alunos. Divida a turma em grupos e distribua uma folha de atividades para cada grupo. Professor, é importante que você reproduza a folha de atividades, com antecedência, de acordo com o número de alunos da sua turma.

Aspectos pedagógicos

Apresente os problemas históricos à turma. Em seguida, promova uma discussão sobre como escrever esses problemas em linguagem algébrica. Também seria interessante relembrar aos alunos sobre áreas de quadrado e retângulo.

Em relação aos problemas, observe que:

- No Problema 1, os alunos podem confundir a base com a altura do retângulo. É importante que eles indiquem a base por x , por exemplo, e, conseqüentemente, a altura será $\frac{3}{4}x$. Como nesse problema x representa o lado de um retângulo, então a raiz negativa da equação correspondente deve ser descartada,

porém, é interessante trabalhar com os alunos o fato de a solução algébrica ser diferente da solução geométrica, isto é, para o problema não vale a solução -4 , apesar de ser solução de $\frac{3}{4}x^2 = 12$.

- Para o Problema 2, oriente os alunos a utilizarem uma calculadora para obter a raiz quadrada de 3481, afinal, os cálculos não devem ser empecilho para que os alunos resolvam a equação. Mais uma vez recomendamos que as soluções dos alunos sejam apresentadas e exploradas.

Ao término da atividade, recomendamos discutir os exercícios propostos em sala de aula, valorizando a solução apresentada pelos alunos.

Folha de Atividades – Papiro de Moscou e os Babilônios

Nome da escola: _____

Nome: _____

Problema 1:

Muitos povos antigos tinham um conhecimento matemático muito desenvolvido e estruturado. Esse era o caso dos egípcios. Alguns textos conhecidos dessa civilização mostram que eles resolviam equações do segundo grau para solucionar problemas do seu dia a dia. O Papiro de Moscou, que data de aproximadamente 1850 a.C., tem esse nome por ter sido comprado pelo museu de Moscou, mas é um papiro egípcio que contém alguns problemas matemáticos. Nele, por exemplo, é pedido que se **calcule a base de um retângulo de área igual a 12, cuja altura corresponde a $\frac{3}{4}$ da sua base.**

Como base nas informações do texto, faça o que se pede.

- Escreva esse problema em linguagem algébrica.
- Encontre a solução desse problema

Problema 2:

Os babilônios tinham conhecimentos matemáticos aprimorados, tinham um sistema de numeração próprio e deixaram muita coisa sobre o que faziam escrita em tabletas de argila, usando uma escrita, chamada cuneiforme. Um dos tabletas encontrados por arqueólogos mostra um problema relacionado às equações do segundo grau. Escrito em linguagem moderna, o problema diz o seguinte: **ache o lado de um quadrado, se a sua área subtraída pelo seu lado for igual a 870.** Para esse problema, eles apresentavam a seguinte solução, escrita com linguagem moderna e usando a notação decimal para os números: tome metade de 1. Multiplique 0,5 por 0,5. Junte o resultado a 870. Extraia a raiz quadrada desse resultado e, finalmente, junte a esse resultado a metade de 1, obtendo 30 como medida do lado do quadrado.

Como base nas informações, faça o que se pede.

- a. Escreva esse problema em linguagem algébrica.
- b. Verifique que 30 é solução da equação obtida no item anterior.

Você saberia resolver a equação obtida no item a? Torque ideias com seus colegas e resolvam a equação, obtendo as duas soluções da equação.

Avaliação da Aprendizagem

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Avaliação da Unidade	Folha de atividades, material do aluno, lápis/caneta.	Esta atividade sugere um instrumento avaliativo para a unidade dividido em duas etapas: registro de aprendizagens e questões objetivas a serem escolhidas a critério do professor.	Participação individual.	40 minutos

Aspectos operacionais

Para o momento de avaliação, sugerimos que você utilize o último dos tempos de aula destinados à unidade 4. A seguir, apresentamos sugestões para a avaliação das habilidades pretendidas nesta unidade. Dividiremos nossas sugestões avaliativas em duas etapas, conforme explicitadas a seguir.

Etapa 1: Registros de aprendizagens (Momento de Reflexão)

Aqui, você poderá propor que o aluno registre individualmente, na folha de atividades, disponível para reprodução neste material e no seu DVD, as aprendizagens matemáticas adquiridas com o estudo desta unidade. Para nortear esta avaliação, apresentamos algumas questões que podem complementar aquelas do material do aluno no que tange à avaliação do desenvolvimento das habilidades matemáticas pretendidas:

- identificar uma equação do 2º grau e seus coeficientes numéricos;
- reduzir uma equação à forma $ax^2 + bx + c = 0$, quando for possível;
- resolver uma equação do 2º grau;
- resolver problemas que recaiam em equações do 2º grau;

- resolver sistemas do 2º grau.

Sugerimos também, que este material seja recolhido para uma posterior seleção de registros a serem entregues ao seu formador no curso de formação presencial. Desta forma, esperamos acompanhar com você como os alunos estão reagindo aos caminhos que escolhemos para desenvolver este trabalho, para se for o caso, repensá-los de acordo com as características apresentadas.

Etapa 2: Questões objetivas

Para compor o instrumento avaliativo desta etapa, sugerimos a escolha de pelo menos uma questão objetiva, entre as que estão disponíveis na seção Avaliação da Aprendizagem do material do aluno.

Sugestões de questões objetivas para a avaliação da aprendizagem:

1. $\{-7, -2\}$ é o conjunto-verdade da equação:

- | | |
|------------------------|------------------------|
| a) $x^2 + 14x + 9 = 0$ | b) $x^2 - 9x - 9 = 0$ |
| c) $x^2 + 9x + 14 = 0$ | d) $x^2 - 9x + 14 = 0$ |

2. Dois números têm por soma 7 e por produto -18 . São eles:

- | | |
|-------------|-------------|
| a) 4 e -3 | b) -6 e 3 |
| c) 7 e -1 | d) 9 e -2 |

3. Considere as afirmações:

- i. O conjunto solução da equação $x^2 - 1 = 0$ é $S = \{-1, 1\}$.
- ii. O conjunto solução da equação $x^2 - 4x = 0$ é $S = \{-2, 2\}$.
- iii. A equação $x^2 - 10x + 25 = 0$ tem raiz no conjunto $\mathbb{R}$.

Quantas afirmações são verdadeiras?

- | | | | |
|------|------|------|------|
| a) 3 | b) 2 | c) 1 | d) 0 |
|------|------|------|------|

4. A área de um retângulo é 54 cm^2 . Se um lado mede 3 cm mais que o outro, então suas medidas são:

- | | | | |
|-----------|------------|----------|----------|
| a) 9 e 12 | b) 12 e 15 | c) 6 e 9 | d) 3 e 6 |
|-----------|------------|----------|----------|

5. Se x é positivo e se o inverso de $x + 1$ é $x - 1$, então x é:

- | | | | | |
|------|------|------|---------------|---------------|
| a) 1 | b) 2 | c) 3 | d) $\sqrt{2}$ | e) $\sqrt{3}$ |
|------|------|------|---------------|---------------|

6. A soma e o produto das raízes da equação $x^2 - 2x - 35 = 0$, em $\mathbb{R}$, são respectivamente iguais a:

- a) 2 e 35
- b) 2 e -35
- c) -2 e 35

d) -2 e -35

7. Sabendo que uma das raízes da equação $(m^2 - 3)x^2 + 2mx - 4m = 0$ é 2 , temos:

a) $(\quad) m^2 = 0$ b) $(\quad) m^2 = 3$ c) $(\quad) m^2 = \sqrt{3}$ d) $(\quad) m^2 = 2$

8. Ao sistema $\begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases}$, associamos dois pares ordenados (a, b) que satisfazem as equações dadas. Considerando apenas o par que apresenta componentes negativas e adicionando os valores das mesmas, encontramos:

a) -4 b) -5 c) -6 d) -7 e) -8

9. As diferenças entre dois números e os quadrados desses dois números são respectivamente 1 e 49 . A soma dos referidos números será:

a) 49 b) 59 c) 50 d) 51 e) 89

Gabarito da avaliação da aprendizagem

1	2	3	4	5	6	7	8	9
C	D	B	C	D	B	B	E	A

Folha de Atividades – Momento de Reflexão

Nome da Escola: _____

Nome: _____

Neste momento, propomos que você retome as discussões feitas na unidade 4 e registre as aprendizagens matemáticas adquiridas com o estudo desta unidade. Para ajudá-lo nos seus registros, tente responder as questões a seguir:

Questão 1: Qual foi o conteúdo matemático estudado nessa unidade?

Questão 2: Cite alguma situação do cotidiano que envolve os conhecimentos aqui estudados.

Questão 3: Dentre os números -2, 0, 1, 4, quais deles são soluções da equação $x^2 - 2x - 8 = 0$?

Questão 4 (Puccamp): Considere as seguintes equações:

I. $x^2 + 25 = 0$

II. $x^2 - 7 = 0$

III. $0,4x^2 = 0,1$

Sobre as soluções dessas equações é verdade que em

- a) II são números irracionais. b) III é número irracional. c) I e II são números reais.
d) I e III são números não reais. e) II e III são números racionais.

Questão 5: Considere o seguinte problema: "Achar um número que, somando com 1, seja igual ao seu inverso". Qual das equações representa este problema?

a) $x^2 - x + 1 = 0$

b) $x^2 + x - 1 = 0$

c) $x^2 - x - 1 = 0$

d) $x^2 + x + 2 = 0$

e) $x^2 - x - 2 = 0$

O que perguntam por aí...

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Questões de avaliações externas	Imagem para projeção disponível neste material e no DVD do professor; material do aluno.	–	Duplas	–

Aspectos operacionais

Na seção *O que perguntam por aí...*, do material do aluno, são apresentadas questões de avaliações externas que envolvem conhecimentos de equações do 2º grau trabalhados nesta unidade. Essas questões já se encontram resolvidas no material do aluno, mas você poderá trabalhá-las a partir da projeção das imagens disponíveis no seu DVD e nesse material, conforme a seguir.

(Banco de Questões da Avaliação Externa do Município do Rio de Janeiro) A figura a seguir representa o trinômio quadrado perfeito $x^2 + 6x + 9$.

$3x$	9
x^2	$3x$

A forma fatorada desta expressão algébrica é

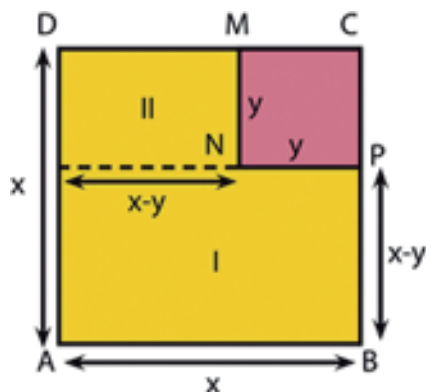
- (A) $(x + 3)^2$.
- (B) $(x - 3)^2$.
- (C) $3x (x^2 + 9)$.
- (D) $(x + 3) (x - 3)$.

Resposta: Letra (A)

Comentários: Essa questão explora a temática de produtos notáveis com um enfoque algébrico. O aluno perceberá que a área do quadrado é de $x^2 + 2(3x) + 9$. Para calcular essa área é necessário elevar ao quadrado o lado da figura que é $(x+3)$. Logo, a resposta será a alternativa (A).

Possivelmente, o aluno que escolheu as alternativas (B) ou (D) se confundiu ao associar o trinômio quadrado perfeito dado na questão com os outros casos de produtos notáveis: quadrado da diferença e produto da soma pela diferença de dois termos, respectivamente. Já o aluno que optou pela alternativa (C) possivelmente não compreendeu a correspondência entre o trinômio quadrado perfeito e a área de um quadrado de lado $x+3$ e pode ter tentado calcular a área do quadrado, considerando indevidamente, os termos x^2 , $3x$ e 9 que aparecem no enunciado da questão.

2. Na figura abaixo, o lado do quadrado ABCD mede x e o lado do quadrado CMNP mede y . Observe e responda:



- Indique o produto que fornece a área da figura I.
- Indique o produto que fornece a área da figura II.

Solução: A questão trabalha as diferentes formas de associar os produtos notáveis às representações geométricas.

- $(x - y) x = x^2 - xy$
 - $(x - y) y = xy - y^2$
3. (Enem) Um posto de combustível vende 10.000 litros de álcool por dia a R\$ 1,50 cada litro. Seu proprietário percebeu que, para cada centavo de desconto que concedia por litro, eram vendidos 100 litros a mais por dia. Por exemplo, no dia em que o preço do álcool foi R\$ 1,48, foram vendidos 10.200 litros. Considerando x o valor, em centavos, do desconto dado no preço de cada litro, e V o valor, em R\$, arrecadado por dia com a venda do álcool, então a expressão que relaciona V e x é
- $V = 10.000 + 50x - x^2$.
 - $V = 10.000 + 50x + x^2$.
 - $V = 15.000 - 50x - x^2$.
 - $V = 15.000 + 50x - x^2$.
 - $V = 15.000 - 50x + x^2$.

Resposta: Letra (d)

Comentários: Se é dado um desconto de x centavos, temos que o preço de cada litro de combustível é $1,50 - x \cdot 0,01$ e que a quantidade de combustível vendida por dia é $10000 + 100x$. O valor arrecadado é

$$V = (1,50 - 0,01x)(10000 + 100x) = 1500 + 150x - 100x - x^2 = 15000 + 50x - x^2$$

4. O custo de uma produção, em milhares de reais, de x máquinas iguais é dado pela expressão $C(x) = x^2 - x + 10$. Se o custo foi de 52 mil reais, então, o número de máquinas utilizadas na produção foi

- a. 6
- b. 7.
- c. 8.
- d. 9.

Resposta: Letra (b).

Comentários: Queremos descobrir o valor de x de modo que $C(x)$ seja igual a 52. Cabe aqui salientar que alguns alunos podem dizer que, nesse problema, $C(x) = 52000$. Porém, o professor deve destacar o fato de que, no enunciado, C é dado em milhares de reais. Dessa forma, $52 = x^2 - x + 10$, equação que pode ser escrita como $x^2 - x - 42 = 0$. Fatorando o polinômio do 1º membro, teremos $(x - 7)(x + 6) = 0$, que nos dá como soluções $x = 7$ ou $x = -6$. Como, nesse caso, x não pode assumir valor negativo, a resposta é a letra B.

Aspectos pedagógicos

Após a resolução desta questão em aula, você pode promover uma análise coletiva das respostas encontradas pelos alunos, com uma breve discussão a respeito dos possíveis erros (erros mais comuns) por eles cometidos.

Atividade Complementar

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Exercícios Complementares	Cópias da folha de Atividades.	—	Duplas ou trios.	—

Aspectos operacionais

Peça que os seus alunos se organizem em duplas ou em trios. Mas procure distribuir uma folha de atividades para cada um, de maneira que todos possam ficar com uma cópia do material e usá-la como mais uma fonte de consulta.

Escolha previamente os exercícios que melhor se adequam à realidade de sua turma e à abordagem escolhida para apresentação dos conceitos introduzidos nesta unidade.

Depois dos alunos concluírem o conjunto de exercícios que você escolheu aplicar, procure discutir as soluções apresentadas pelos alunos, valorizando cada estratégia mesmo que esta não tenha o conduzido a uma resposta verdadeira.

Aspectos pedagógicos

A seguir, apresentamos alguns exercícios que podem auxiliar você, professor, na fixação das principais noções trabalhadas nesta unidade. Esses exercícios foram dispostos em uma folha de atividades (que se encontra disponível para reprodução na pasta “Material DVD”) e poderá ser aplicada de forma fracionada ao término de cada seção do material do aluno ou de uma só vez no momento reservado para a consolidação dos conteúdos trabalhados.

Não é necessária a aplicação da totalidade dos exercícios. Apenas selecione para a aplicação os exercícios que julgar mais adequados ao ritmo de aprendizagem e características particulares de sua turma. Você também poderá encontrar as soluções desses exercícios em um arquivo no Grid de aula de seu DVD. Procure incentivar os alunos a executar os exercícios sem a sua intervenção: isso pode favorecer o desenvolvimento da autonomia dos alunos no que diz respeito à habilidade de resolver problemas.

Folha de Atividades – “Exercícios Complementares”

Nome da Escola: _____

Nome: _____

1. Utilize algum dos casos de fatoração de polinômios para determinar as raízes reais das equações seguir.

a. $x^2 - 2809 = 0$

b. $9y^2 - 24y + 16 = 0$

c. $4t^2 - 20t + 25 = 0$

d. $y^2 - 20y = 0$

e. $t^2 - 36 = 0$

2. Completando quadrados, resolva em R as equações abaixo:

a. $x^2 - 5x + 6 = 0$

b. $x^2 - x - 6 = 0$

c. $-y^2 + 11y - 28 = 0$

3. Considere a equação $6x^2 + x - 1 = 0$.
- Quais são os coeficientes desta equação?
 - Qual o valor do seu discriminante?
 - De acordo com o valor do discriminante encontrado no item anterior, determine quantas são as soluções reais desta equação.
 - Caso seja possível determine suas raízes.
4. Considere a equação $2x^2 - 4x + 3 = 0$.
- Quais são os coeficientes desta equação?
 - Qual o valor do seu discriminante?
 - De acordo com o valor do discriminante encontrado no item anterior, determine quantas são as soluções reais desta equação.
 - Caso seja possível determine suas raízes.
5. Considere a equação $25x^2 - 20x + 5 = 0$.
- Quais são os coeficientes desta equação?
 - Qual o valor do seu discriminante?
 - De acordo com o valor do discriminante encontrado no item anterior, determine quantas são as soluções reais desta equação.
 - Caso seja possível determine suas raízes.
6. Considere a equação $2x^2 - 10x = 0$.
- Quais são os coeficientes desta equação?
 - Qual o valor do seu discriminante?
 - De acordo com o valor do discriminante encontrado no item anterior, determine quantas são as soluções reais desta equação.
 - Caso seja possível determine suas raízes.
7. Determine a forma reduzida das equações do 2º grau abaixo e, em seguida, resolva-as em $\mathbb{R}$ pelo método que melhor lhe convier:
- $(3x + 1)^2 + (x + 1)(x - 1) = 0$
 - $3x^2 - 3x + 1 + x^2 + 3x - 1 = 0$
 - $(2x - 1)(x + 2) - (x + 4)(x - 1) + 5 = 0$

8. Determinar o valor de m na equação $x^2 - 5x + (m - 1) = 0$, de modo que suas raízes sejam reais e desiguais.

9. Determinar o valor de k na equação $(k - 1)x^2 - 3x + 2 = 0$, de modo que suas raízes sejam reais e iguais.

10. Determinar o valor de p na equação $3x^2 - 2x + p - 5 = 0$, de modo que ela não admita raízes reais.

