9º ANO	Superintendência de Educação Infantil e Ensino Fundamental · Secretaria de Estado da Educação · Somos todos GOIÁS
MATEMÁTICA	

6ª QUINZENA – 4º CICLO

(EF09MA09-B) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau, em contextos significativos.

NOME:

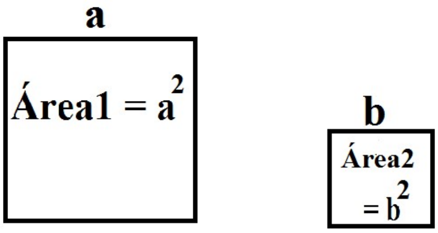
UNIDADE ESCOLAR:

Tema/ objeto de conhecimento: Expressões algébricas: fatoração e produtos notáveis; Resolução de equações polinomiais do 2° grau por meio de fatorações; Produtos notáveis; Fatoração.

Estudo dos Produtos Notáveis.

Considere dois quadrados, um com lado de medida “a” e outro com lado de medida “b”. Ao calcularmos suas áreas teríamos:

Quadrado de lado “a” => Área1= a^2 Quadrado de lado “b” => Área2= b^2



Note que se somarmos as áreas 1 e 2, teremos uma área total de $a^2 + b^2$.

Por outro lado, vamos agora supor que tenhamos um quadrado com lado a + b. Será que sua área será igual a soma das áreas 1 e 2?

A área de lado “a + b” será a Área 3, seu valor é calculado fazendo o produto de seus lados;

Área 3 = $(a + b)(a + b)$ <= aplicando a propriedade distributiva teremos

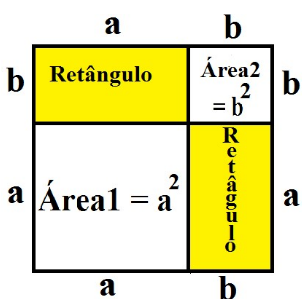
Área 3 = a^2 **+ ab + ab** + b^2

Área 3 = a^2 **+ 2ab** + b^2 .

Notamos então que existe um valor a mais que a soma das áreas 1 e 2. Esse valor corresponde a áreas de dois retângulos de lados “a” e “b”.

Observe a figura a seguir.

A área dos retângulos de lados a e b é dada por => $A_{retângulo} = a \cdot b$.



Concluímos então que o produto de “a + b” por ele mesmo, ou seja, $(a + b)(a + b) = (a + b)^2$ é maior que $a^2 + b^2$, porque aparece um termo “2ab” correspondente a área de dois retângulos de lados a e b.

Algebricamente, o termo “$(a + b)^2$” é um produto notável, por ser muito importante no desenvolvimento de expressões algébricas, recebe o nome de *quadrado da soma de dois termos* e seu desenvolvimento é dado por: $(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$

$$(a + b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Existem muitos produtos notáveis. E suas expressões mais utilizadas estão elencadas a seguir.

PRODUTOS NOTÁVEIS

01) **Quadrado da soma de 2 termos**: $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

02) **Quadrado da diferença de 2 termos**: $(x – y)^2 = x^2 – 2xy + y^2$.

Exemplo: Desenvolva: $(a – 5)^2$

$(a - 5)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot 5 + 5^2 = a^2 - 10a + 25$

03) Produto da soma pela diferença: $(x + y) \cdot (x - y) = x^2 - y^2$.
Exemplo: Desenvolva: $(5 + a) \cdot (5 - a)$.
$(5 + a) \cdot (5 - a) = 5^2 - a^2 = 25 - a^2$

04) **Cubo da soma de dois termos:** $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$.
Exemplo: Desenvolva: $(a + 5)^3$.

$$
\begin{aligned}
(a + 5)^3 = (a + 5)\cdot(a + 5)\cdot(a + 5) &= (a + 5)^2 \cdot(a + 5) \\
&= (a^2 + 2\cdot a\cdot 5 + 5^2) \cdot(a + 5) \\
&= (a^2 + 10a + 25) \cdot(a + 5) \\
&= a^3 + 5a^2 + 10a^2 + 50a + 25a - 125 \\
&= a^3 + 15a^2 + 750a + 125
\end{aligned}
$$

Aplicando a fórmula direta teremos:
$(a + 5)^3 = a^3 + 3\cdot a^2\cdot 5 + 3\cdot a\cdot 5^2 + 5^3$
$(a + 5)^3 = a^3 + 15a^2 + 750a + 125$
Note que os resultados são iguais, porém pela fórmula chega-se mais rapidamente a ele.

05) **Cubo da diferença de dois termos**: $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$.
Exemplo: Desenvolva: $(m - 2)^3$.

$$
\begin{aligned}
(m - 2)^3 = (m - 2)\cdot(m - 2)\cdot(m - 2) &= (m - 2)^2 \cdot(m - 2) \\
&= (m^2 - 2\cdot m \cdot 2 + 2^2) \cdot(m - 2) \\
&= (m^2 - 4 m + 4) \cdot(m - 2) \\
&= m^3 - 2 m^2 - 4m^2 + 8m + 4m - 8 \\
&= m^3 - 6 m^2 + 12m - 8
\end{aligned}
$$

Aplicando a fórmula direta teremos:
$(m - 2)^3 = m^3 - 3\cdot m^2\cdot 2 + 3\cdot m\cdot 2^2 - 2^3$
$(m - 2)^3 = = m^3 - 6 m^2 + 12m - 8$
Note que os resultados são iguais, porém pela fórmula chega-se mais rapidamente a ele.

FATORAÇÃO
Definição: Fatorar uma expressão significa escrevê-la como o produto de dois ou mais termos.
01) Fator comum: $ab \pm ac = \underbrace{a}_{\text{MDC}} \cdot (b \pm c)$

Exemplo: Fatore a expressão: $2x^2 + 4x$

$2x^2 + 4x = 2x (x + 2)$

02) Agrupamento: $ax + by + ay + bx = a (x + y) + b (x + y) = (a + b) \cdot (x + y)$

Exemplo: Fatore a expressão: $2np + 3rq + 2nq + 3rp$

$2p + 3q + 2q + 3p = 2n (p + q) + 3r (p + q) = (p + q) (2n + 3r)$

03) Quadrado perfeito:

$$x^2 \pm 2xy + y^2$$
$$(x \pm y)^2$$

Verificação: Para sabermos se o binômio $(x \pm y)$ gerou o trinômio do quadrado perfeito temos que verificar se o dobro do produto dos termos encontrados é igual ao valor do termos central do trinômio. Se for igual, então o trinômio veio do quadrado perfeito.

Exemplo: Fatore a expressão: $x^2 + 10x + 25$
Tirando as raízes quadrados do primeiro e do último termo, temos:
$\sqrt{x^2} = x$ e $\sqrt{25} = 5$, e ainda que o sinal do termo central é positivo. Neste caso teremos
$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$

Verificando: Fazendo o dobro do produto dos termos encontrados: $2 \cdot x \cdot 5 = 10x$, que é o termo central. Portanto o trinômio $x^2 + 10x + 25$ veio do quadrado perfeito $(x + 5)^2$

04) Produto da soma pela diferença: $x^2 - y^2 = (x + y) \cdot (x - y)$

Exemplo: Fatore a expressão: $a^2 - 4$

$a^2 - 4 = a^2 - 2^2 = (a + 2)(a - 2)$

05) Trinomio do segundo grau: $ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'')$, em que x' e x" são as raízes do polinômio.

Exemplo: Fatore a expressão: $x^2 - 7x + 10$.

Inicialmente vamos determinar as raízes da equação do 2º grau $x^2 - 7x + 10 = 0$

Calculando $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 49 - 40 = 9$

Aplicando a fórmula de Báskara: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 3}{2}$

$x' = 2$ e $x'' = 5$

Portanto a forma fatorada do trinômio do 2º grau $x^2 - 7x + 10$ é $1(x - 2)(x - 5)$, ou seja:

$\mathbf{x^2 - 7x + 10 = 1(x - 2)(x - 5)}$

Observação: Essa é uma parte de extrema importância para o desenvolvimento de raciocinio algébrico, que ajudará em muito a compreensão de determinados assuntos tanto dentro da própria matemática como em outras disciplinas como física e química. Então, para aquele que pretende dominar os assunto futuros devem dar muita atenção a essa teoría e executar os exercícios com o máximo de empenho.

ATIVIDADES

01) Aplicando as regras dos produtos notáveis, desenvolva:

a) $(x + 8)^2 =$ ____________________

b) $(2 - 3a)^2 =$ ____________________

c) $(3x + y^2)^2 =$ ____________________

d) $(1 + 5m)(1 - 5m)$ ____________________

e) $(ab - c)^2 =$ ____________________

f) $(m - 1)^3 =$ ____________________

g) $(a^3 - b^3)(a^3 + b^3) =$ ____________________

h) $(4 + h)^2 =$ ____________________

i) $(10 + a^2x)(10 - a^2x) =$ ____________________

j) $\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 =$ ____________________

k) $(a + t)^3 =$ ____________________

02) Simplificando os casos de fatoração estudados, fatore os polinômios:

a) $x^2 + 5x =$ ____________________

b) $4x^2 - 12x + 9 =$ ____________________

c) $x^3 - 2x^2 + 4x - 8 =$ ____________________

d) $4x^2 - 9 =$ ____________________

e) $a^6 - 5a^5 + 6a^3 =$ ____________________

f) $ax - a + bx - b =$ ____________________

g) $64y^2 + 80y + 25 =$ ____________________

h) $a^3b^2 + a^2b^3 =$ ____________________

i) $m^6 - 1 =$ ____________________

j) $4a^2x^2 - 4abx + b^2$ ____________________

k) $12a^2b + 18a =$ ____________________

03) Simplifique as seguintes frações algébricas:

a) $\dfrac{3(x - y)^2}{6(x - y)} =$

b) $\dfrac{abx + aby}{a^2x + a^2y} =$

c) $\dfrac{5x - 5}{4x - 4} =$

d) $\dfrac{x^2 - 10x + 25}{x - 5} =$

e) $\dfrac{a^2 + 4a + 4}{a^2 - 4} =$

f) $\dfrac{3x - 3y}{6x - 6y} =$

g) $\dfrac{x^2 - 4}{x - 2} =$

h) $\dfrac{y^2 - 9}{y + 3} =$

i) $\dfrac{3x^2 - 3y^2}{6x - 6y} =$

04) Determine os seguintes produtos:

a) $\dfrac{a + 2}{a} \cdot \dfrac{a - 1}{2 + a} =$

b) $\dfrac{x + y}{x - y} \cdot \dfrac{2y}{x + y} =$

c) $\dfrac{3a}{a - b} \cdot \dfrac{a^2 - b^2}{6ab} =$

d) $\dfrac{14x}{a^2 - 4} \cdot \dfrac{a + 2}{7x} =$

e) $\dfrac{ax + x}{x^2 - y^2} \cdot \dfrac{3x - 3y}{a + 1} =$

f) $\dfrac{3y + 3}{x^4 + x^2} \cdot \dfrac{x^3}{y + 1} =$

g) $\dfrac{a^2 + 2ax + x^2}{m^2 - n^2} \cdot \dfrac{m - n}{a + x} =$

05) Determine os seguintes quocientes:

a) $\dfrac{y}{x + 2} : \dfrac{y^2}{x^2 - 4} =$

b) $\dfrac{2x + 2y}{x - y} : \dfrac{4x + 4y}{2} =$

c) $\dfrac{3ax}{a^2 - x^2} : \dfrac{6x}{a + x} =$

d) $\dfrac{a^2 - 25}{ab} : \dfrac{2a + 10}{a} =$

e) $\dfrac{4a}{b + 1} : \dfrac{8a^2}{2b + 2} =$

f) $\dfrac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 + 4x} : \dfrac{x - 1}{4x} =$

g) $\dfrac{4 + 4a + a^2}{1 - b^2} : \dfrac{a^2 - 4}{b + 1} =$

06) O valor da expressão: $\dfrac{x^2 - y^2}{x + y} \cdot \dfrac{x^2 + 2xy + y^2}{x - y}$ para x = 1,25 e y = - 0,75 é:

(A) ( ) - 0,25
(B) ( ) - 0,125
(C) ( ) 0,125
(D) ( ) 0,25

07) Aplicando a regra dos produtos notáveis, desenvolva:

a) $\left(\sqrt{5} + 2\sqrt{3}\right)^2 =$

b) $\left(2 - \sqrt{2}\right)^2 =$

c) $\left(\sqrt{7} + \sqrt{5}\right) . \left(\sqrt{7} - \sqrt{5}\right) =$

d) $\left(a + \sqrt{b}\right)^2 =$

e) $(x - 2)^3 =$

f) $x^2 - y^2 =$

g) $\left(\sqrt{3} - 1\right)^2 =$

08) Resolva a equação $2x^2 - 2x - 24 = 0$, aplicando a fatoração.

09) Sendo a e b números reais positivos, sabendo que $\begin{cases} a^2 + b^2 = 117 \\ a \cdot b = 54 \end{cases}$.Nestas condições o valor de $(a - b)^2$ é

(A) (   ) 9
(B) (   ) 10
(C) (   ) 12
(D) (   ) 15