Capítulo 2

Radiciação e potenciação

Radicais

Se $b^2 = a$, então b é a **raiz quadrada** de a. Por exemplo, 2 e -2 são raízes quadradas de 4 porque $2^2 = (-2)^2 = 4$. Da mesma maneira, se $b^3 = a$ então b é a **raiz cúbica** de a. Por exemplo, 2 é a raiz cúbica de 8 porque $2^3 = 8$.

Objetivos de aprendizagem

- Radicais.
- Simplificação de expressões com radicais.
- Racionalização.
- Potenciação com expoentes racionais.

DEFINIÇÃO Raiz *n*-ésima de um número real

Sejam n um número inteiro maior que 1 e a e b números reais.

1. Se $b^n = a$, então b é uma **raiz *n*-ésima** de a.

2. Se a tem uma raiz n-ésima, então a **principal raiz *n*-ésima** de a é aquela com o mesmo sinal de a.

A principal raiz n-ésima de a é denotada pela **expressão com o radical** $\sqrt[n]{a}$. O inteiro positivo n é o **índice** do radical e a é o **radicando**.

Todo número real tem exatamente uma *raiz n-ésima* real quando n é ímpar. Por exemplo, 2 é a única raiz cúbica real de 8. Quando n é par, números reais positivos têm duas *raízes n-ésimas* reais e números reais negativos não têm raízes n-ésimas reais. Por exemplo, $\sqrt[4]{16} = \pm 2$ e -16 não tem raiz quarta real. A *principal* raiz quarta de 16 é 2.

Quando $n = 2$, uma notação especial é usada para raízes. Omitimos o índice e escrevemos $\sqrt{a}$ em vez de $\sqrt[2]{a}$. Se a é um número real positivo e n um inteiro par positivo, suas duas raízes n-ésimas são denotadas por $\sqrt[n]{a}$ e $-\sqrt[n]{a}$.

EXEMPLO 1 Verificação das raízes *n*-ésimas principais

(a) $\sqrt{36} = 6$ porque $6^2 = 36$.

(b) $\sqrt[3]{\dfrac{27}{8}} = \dfrac{3}{2}$ porque $\left(\dfrac{3}{2}\right)^3 = \dfrac{27}{8}$.

(c) $\sqrt[3]{-\dfrac{27}{8}} = -\dfrac{3}{2}$ porque $\left(-\dfrac{3}{2}\right)^3 = -\dfrac{27}{8}$.

(d) $\sqrt[4]{-625}$ não é um número real porque o índice 4 é par e o radicando -625 é negativo (*não existe número real cuja quarta potência seja negativa*).

Eis algumas propriedades de radicais, juntamente com exemplos que auxiliam a ilustrar seu significado.

Propriedades dos radicais

Sejam u e v números reais, variáveis ou expressões algébricas e m e n números positivos inteiros maiores que 1. Vamos supor que todas as raízes sejam números reais e todos os denominadores não sejam zero.

Propriedade	Exemplo
1. $\sqrt[n]{uv} = \sqrt[n]{u} \cdot \sqrt[n]{v}$	$\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$
2. $\sqrt[n]{\dfrac{u}{v}} = \dfrac{\sqrt[n]{u}}{\sqrt[n]{v}}$	$\dfrac{\sqrt[4]{96}}{\sqrt[4]{6}} = \sqrt[4]{\dfrac{96}{6}} = \sqrt[4]{16} = 2$
3. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{u}} = \sqrt[m \cdot n]{u}$	$\sqrt{\sqrt[3]{7}} = \sqrt[2 \cdot 3]{7} = \sqrt[6]{7}$
4. $(\sqrt[n]{u})^n = u$	$(\sqrt[4]{5})^4 = 5$
5. $\sqrt[n]{u^m} = (\sqrt[n]{u})^m$	$\sqrt[3]{27^2} = (\sqrt[3]{27})^2 = 3^2 = 9$
6. $\sqrt[n]{u^n} = \begin{cases} \lvert u \rvert & \text{para } n \text{ par} \\ u & \text{para } n \text{ ímpar} \end{cases}$	$\sqrt{(-6)^2} = \lvert -6 \rvert = 6$ $\sqrt[3]{(-6)^3} = -6$

Simplificação de expressões com radicais

Muitas técnicas de simplificação de raízes de números reais não são mais usadas, devido à utilização das calculadoras. No entanto, vamos mostrar com exemplos o que podemos fazer em casos sem o uso delas.

EXEMPLO 2 Remoção de fatores dos radicandos

(a) $\sqrt[4]{80} = \sqrt[4]{16 \cdot 5} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 5} = \sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{5} = 2\sqrt[4]{5}$

(b) $\sqrt{18x^5} = \sqrt{9x^4 \cdot 2x} = \sqrt{(3x^2)^2 \cdot 2x} = 3x^2\sqrt{2x}$

(c) $\sqrt[4]{x^4y^4} = \sqrt[4]{(xy)^4} = \lvert xy \rvert$

(d) $\sqrt[3]{-24y^6} = \sqrt[3]{(-2y^2)^3 \cdot 3} = -2y^2\sqrt[3]{3}$

Racionalização

O processo de reescrever frações contendo radicais de modo que o denominador fique sem esses radicais é **a racionalização.** Quando o denominador tem a forma $\sqrt[n]{u^k}$, multiplicando numerador e denominador por $\sqrt[n]{u^{n-k}}$ poderemos eliminar o radical do denominador, pois

$$\sqrt[n]{u^k} \cdot \sqrt[n]{u^{n-k}} = \sqrt[n]{u^k \cdot u^{n-k}} = \sqrt[n]{u^{k+n-k}} = \sqrt[n]{u^n} = u.$$

O Exemplo 3 ilustra o processo.

EXEMPLO 3 Racionalização

(a) $\sqrt{\dfrac{2}{3}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

(b) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}} \cdot \dfrac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[4]{x^3}} = \dfrac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[4]{x^4}} = \dfrac{\sqrt[4]{x^3}}{|x|}$

(c) $\sqrt[5]{\dfrac{x^2}{y^3}} = \dfrac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[5]{y^3}} = \dfrac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[5]{y^3}} \cdot \dfrac{\sqrt[5]{y^2}}{\sqrt[5]{y^2}} = \dfrac{\sqrt[5]{x^2y^2}}{\sqrt[5]{y^5}} = \dfrac{\sqrt[5]{x^2y^2}}{y}$

Potenciação com expoentes racionais

Sabemos como manipular expressões exponenciais com expoentes inteiros. Por exemplo, $x^3 \cdot x^4 = x^7$, $(x^3)^2 = x^6$, $x^5/x^2 = x^3$, $x^{-2} = 1/x^2$, e assim por diante. Mas os expoentes podem ser também números racionais. Como deveríamos definir, por exemplo, $x^{1/2}$? Para começar, podemos supor que as mesmas regras que aplicamos para expoentes inteiros também se aplicam para expoentes racionais.

DEFINIÇÃO Expoentes racionais

Seja u um número real, variável ou expressão algébrica e n um inteiro maior que 1. Então

$$u^{1/n} = \sqrt[n]{u}.$$

Se m é um inteiro positivo, m/n está na forma reduzida e todas as raízes são números reais, então

$$u^{m/n} = (u^{1/n})^m = (\sqrt[n]{u})^m \qquad \text{e} \qquad u^{m/n} = (u^m)^{1/n} = \sqrt[n]{u^m}.$$

O numerador de um expoente racional é a *potência* para a qual a base está elevada e o denominador é o indíce da *raiz*. A fração m/n precisa estar na forma reduzida, pois, caso contrário, isso pode ocasionar algum problema de definição. Vejamos:

$$u^{2/3} = (\sqrt[3]{u})^2$$

e esta expressão está definida para todo número u real, mas

$$u^{4/6} = (\sqrt[6]{u})^4$$

está definida somente para $u \geq 0$.

EXEMPLO 4 Conversão de radicais para potências e vice-versa

(a) $\sqrt{(x+y)^3} = (x+y)^{3/2}$

(b) $3x\sqrt[5]{x^2} = 3x \cdot x^{2/5} = 3x^{7/5}$

(c) $x^{2/3}y^{1/3} = (x^2y)^{1/3} = \sqrt[3]{x^2y}$

(d) $z^{-3/2} = \dfrac{1}{z^{3/2}} = \dfrac{1}{\sqrt{z^3}}$

Uma expressão envolvendo potências está *simplificada* se cada fator aparece somente uma vez e todos os expoentes são positivos.

EXEMPLO 5 Simplificação de expressões com potências

(a) $(x^2y^9)^{1/3}(xy^2) = (x^{2/3}y^3)(xy^2) = x^{5/3}y^5$

(b) $\left(\dfrac{3x^{2/3}}{y^{1/2}}\right)\left(\dfrac{2x^{-1/2}}{y^{2/5}}\right) = \dfrac{6x^{1/6}}{y^{9/10}}$

O Exemplo 6 sugere como simplificar uma soma ou diferença de radicais.

EXEMPLO 6 Simplificação de expressões com radicais

(a) $2\sqrt{80} - \sqrt{125} = 2\sqrt{16 \cdot 5} - \sqrt{25 \cdot 5}$
$= 8\sqrt{5} - 5\sqrt{5}$
$= 3\sqrt{5}$

(b) $\sqrt{4x^2y} - \sqrt{y^3} = \sqrt{(2x)^2y} - \sqrt{y^2y}$
$= 2|x|\sqrt{y} - |y|\sqrt{y}$
$= (2|x| - |y|)\sqrt{y}$

Eis um resumo dos procedimentos usados para *simplificar expressões* envolvendo radicais.

Simplificação de expressões com radicais

1. Remover fatores dos radicais (Exemplo 2).
2. Eliminar radicais dos denominadores e denominadores dos radicandos (Exemplo 3).
3. Combinar somas e diferenças dos radicais, se possível (Exemplo 6).

EXERCÍCIOS

Nos exercícios 1 a 6, encontre as raízes reais indicadas.

1. Raiz quadrada de 81.
2. Raiz quarta de 81.
3. Raiz cúbica de 64.
4. Raiz quinta de 243.
5. Raiz quadrada de 16/9.
6. Raiz cúbica de −27/8.

Nos exercícios 7 a 12, calcule a expressão sem usar uma calculadora.

7. $\sqrt{144}$ **8.** $\sqrt{-16}$

9. $\sqrt[3]{-216}$ **10.** $\sqrt[3]{216}$

11. $\sqrt[3]{-\dfrac{64}{27}}$ **12.** $\sqrt{\dfrac{64}{25}}$

Nos exercícios 13 a 22, use uma calculadora para encontrar o valor da expressão.

13. $\sqrt[4]{256}$ **14.** $\sqrt[5]{3125}$

15. $\sqrt[3]{15{,}625}$ **16.** $\sqrt{12{,}25}$

17. $81^{3/2}$ **18.** $16^{5/4}$

19. $32^{-2/5}$ **20.** $27^{-4/3}$

21. $\left(-\dfrac{1}{8}\right)^{-1/3}$ **22.** $\left(-\dfrac{125}{64}\right)^{-1/3}$

Nos exercícios 23 a 32, simplifique removendo fatores do radicando.

23. $\sqrt{288}$ **24.** $\sqrt[3]{500}$

25. $\sqrt[3]{-250}$ **26.** $\sqrt[4]{192}$

27. $\sqrt{2x^3y^4}$ **28.** $\sqrt[3]{-27x^3y^6}$

29. $\sqrt[4]{3x^8y^6}$ **30.** $\sqrt[3]{8x^6y^4}$

31. $\sqrt[5]{96x^{10}}$ **32.** $\sqrt{108x^4y^9}$

Nos exercícios 33 a 38, racionalize o denominador.

33. $\dfrac{4}{\sqrt[3]{2}}$ **34.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

35. $\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$ **36.** $\dfrac{2}{\sqrt[4]{y}}$

37. $\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{y}}$ **38.** $\sqrt[5]{\dfrac{a^3}{b^2}}$

Nos exercícios 39 a 42, converta para a forma exponencial (forma de potência).

39. $\sqrt[3]{(a+2b)^2}$ **40.** $\sqrt[5]{x^2y^3}$

41. $2x\sqrt[3]{x^2y}$ **42.** $xy\sqrt[4]{xy^3}$

Nos exercícios 43 a 46, converta para a forma radical.

43. $a^{3/4}b^{1/4}$ **44.** $x^{2/3}y^{1/3}$

45. $x^{-5/3}$ **46.** $(xy)^{-3/4}$

Nos exercícios 47 a 52, escreva usando um radical simples.

47. $\sqrt{\sqrt{2x}}$ **48.** $\sqrt{\sqrt[3]{3x^2}}$

49. $\sqrt[4]{\sqrt{xy}}$ **50.** $\sqrt[3]{\sqrt{ab}}$

51. $\dfrac{\sqrt[5]{a^2}}{\sqrt[3]{a}}$ **52.** $\sqrt{a}\sqrt[3]{a^2}$

Nos exercícios 53 a 60, simplifique as expressões exponenciais.

53. $\dfrac{a^{3/5}a^{1/3}}{a^{3/2}}$ **54.** $(x^2y^4)^{1/2}$

55. $(a^{5/3}b^{3/4})(3a^{1/3}b^{5/4})$ **56.** $\left(\dfrac{x^{1/2}}{y^{2/3}}\right)^6$

57. $\left(\dfrac{-8x^6}{y^{-3}}\right)^{2/3}$ **58.** $\dfrac{(p^2q^4)^{1/2}}{(27q^3p^6)^{1/3}}$

59. $\dfrac{(x^9y^6)^{-1/3}}{(x^6y^2)^{-1/2}}$ **60.** $\left(\dfrac{2x^{1/2}}{y^{2/3}}\right)\left(\dfrac{3x^{-2/3}}{y^{1/2}}\right)$

Nos exercícios 61 a 70, simplifique as expressões radicais.

61. $\sqrt{9x^{-6}y^4}$ **62.** $\sqrt{16y^8z^{-2}}$

63. $\sqrt[4]{\dfrac{3x^8y^2}{8x^2}}$ **64.** $\sqrt[5]{\dfrac{4x^6y}{9x^3}}$

65. $\sqrt[3]{\dfrac{4x^2}{y^2}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{2x^2}{y}}$ **66.** $\sqrt[5]{9ab^6}\cdot\sqrt[5]{27a^2b^{-1}}$

67. $3\sqrt{48}-2\sqrt{108}$ **68.** $2\sqrt{175}-4\sqrt{28}$

69. $\sqrt{x^3}-\sqrt{4xy^2}$ **70.** $\sqrt{18x^2y}+\sqrt{2y^3}$

Nos exercícios 71 a 78, substitua ○ por $<$, $=$ ou $>$ para tornar a expressão verdadeira.

71. $\sqrt{2+6}\ \bigcirc\ \sqrt{2}+\sqrt{6}$

72. $\sqrt{4}+\sqrt{9}\ \bigcirc\ \sqrt{4+9}$

73. $(3^{-2})^{-1/2}\ \bigcirc\ 3$ **74.** $(2^{-3})^{1/3}\ \bigcirc\ 2$

75. $\sqrt[4]{(-2)^4}\ \bigcirc\ -2$ **76.** $\sqrt[3]{(-2)^3}\ \bigcirc\ -2$

77. $2^{2/3}\ \bigcirc\ 3^{3/4}$ **78.** $4^{-2/3}\ \bigcirc\ 3^{-3/4}$

79. O tempo t (em segundos) que uma pedra leva para cair de uma distância d (em metros) é aproximadamente $t = 0{,}45\cdot\sqrt{d}$. Quanto tempo uma pedra leva para cair de uma distância de 200 metros?