

MA093 – matemática básica 2

Sistemas não quadrados. Polinômios. Sistemas não lineares

Francisco A. M. Gomes

UNICAMP - IMECC

Outubro de 2018

Tópicos importantes

O objetivo dessa aula é investigar

- 1 sistemas com mais equações que incógnitas;
- 2 sistemas com mais incógnitas que equações;
- 3 uso de sistemas para encontrar funções polinomiais;
- 4 sistemas não lineares;

Exemplo 1 – Mais equações que incógnitas

- Sistema com 3 equações e 2 incógnitas

$$\begin{cases} -x + 2y = 2 \\ 2x - y = 2 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

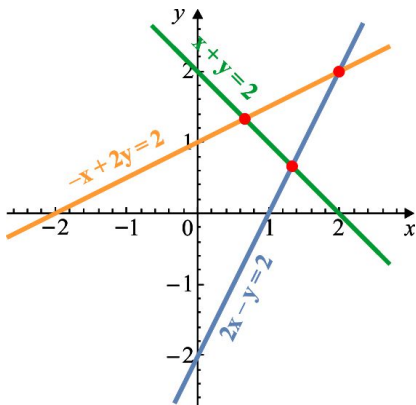
- Isolando x na 1ª equação: $x = 2y - 2$
- Substituindo x nas outras equações

$$2^{\text{a}} \text{ eq. : } 2(2y - 2) - y = 2 \rightarrow y = 2$$

$$3^{\text{a}} \text{ eq. : } (2y - 2) + y = 2 \rightarrow y = 4/3$$

- Como não é possível ter, ao mesmo tempo, $y = 2$ e $y = 4/3$,
o sistema não tem solução.

Exemplo 1 – Mais equações que incógnitas



$$\begin{cases} -x + 2y = 2 \\ 2x - y = 2 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

- 3 equações e 2 incógnitas.
- 3 retas e 2 variáveis.
- Não há um ponto que esteja na interseção de todas as 3 retas.
- O sistema não tem solução.

Exemplo 2 – Mais equações que incógnitas

- Sistema com 3 equações e 2 incógnitas

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$$

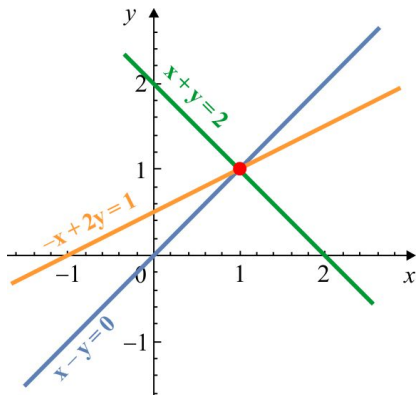
- Isolando x na 1ª equação: $x = 2 - y$
- Substituindo x nas outras equações

$$2^{\text{a}} \text{ eq. : } (2 - y) - y = 0 \quad \rightarrow \quad y = 1$$

$$3^{\text{a}} \text{ eq. : } -(2 - y) + 2y = 1 \quad \rightarrow \quad y = 1$$

- Constatamos que $y = 1$.
- Logo, $x = 2 - y = 2 - 1 = 1$
- O sistema tem uma única solução: $x = 1$ e $y = 1$.

Exemplo 2 – Mais equações que incógnitas



$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$$

- 3 equações e 2 incógnitas.
- 3 retas e 2 variáveis.
- Há um único ponto de interseção das 3 retas.
- O sistema tem solução única: $(x, y) = (1, 1)$.

Exemplo 3 – Mais incógnitas que equações

- Sistema com 2 equações e 3 incógnitas

$$\begin{cases} 4x + 2y + z = 6 \\ y - 2z = -1 \end{cases}$$

- Isolando y na 2ª equação: $y = 2z - 1$
- Substituindo y na 1ª equação:

$$4x + 2(2z - 1) + z = 6 \rightarrow 4x = 8 - 5z \rightarrow x = 2 - \frac{5}{4}z$$

- O sistema tem infinitas soluções.
- Solução geral:

$$x = 2 - \frac{5}{4}z, \quad y = 2z - 1, \quad z \text{ qualquer}$$

Exemplo 4 – Reta que passa por dois pontos

Reta que passa por dois pontos

Encontrar a equação da reta que passa por $(1, 2)$ e $(-2, 11)$.

- Equação da reta: $y = ax + b$
- Queremos encontrar os coeficientes a e b .
- Substituindo $(x, y) = (1, 2)$ na equação: $2 = a \cdot 1 + b$
- Substituindo $(x, y) = (-2, 11)$ na equação: $11 = a \cdot (-2) + b$
- Sistema linear:

$$\begin{array}{rcl} a & + & b = 2 \\ -2a & + & b = 11 \end{array}$$

Exemplo 4 – Reta que passa por dois pontos

- Sistema linear:
$$\begin{cases} a + b = 2 \\ -2a + b = 11 \end{cases}$$

- Isolando b na 1ª equação: $b = 2 - a$

- Substituindo b na 2ª equação:

$$-2a + (2 - a) = 11 \quad \rightarrow \quad -3a = 9 \quad \rightarrow \quad a = \frac{9}{(-3)} = -3$$

- Encontrando b : $b = 2 - a = 2 - (-3) = 5$

- Equação da reta: $y = -3x + 5$

- Conferência da solução:
$$\begin{cases} -3 + 5 = 2 & \text{(Ok!)} \\ -2(-3) + 5 = 11 & \text{(Ok!)} \end{cases}$$

Exemplo 5 – Parábola que passa por três pontos

Problema

A quantidade de CO₂ produzida a cada quilômetro percorrido por um carro depende da velocidade deste. A tabela abaixo fornece alguns valores relativos a um carro específico.

Velocidade (km/h)	CO ₂ emitido (g/km)
20	400
30	250
40	200

Determine a função quadrática $y(x)$ que relaciona a quantidade emitida de CO₂ [y] à velocidade do carro [x].

Exemplo 5 – Parábola que passa por três pontos

- Dados: $y(20) = 400$, $y(30) = 250$, $y(40) = 200$
- Função quadrática: $y(x) = ax^2 + bx + c$
- Queremos encontrar os coeficientes a , b e c .
- Como $y(20) = 400$, temos $400 = a \cdot 20^2 + b \cdot 20 + c$
- Como $y(30) = 250$, temos $250 = a \cdot 30^2 + b \cdot 30 + c$
- Como $y(40) = 200$, temos $200 = a \cdot 40^2 + b \cdot 40 + c$
- Sistema linear:

$$c + 20b + 400a = 400$$

$$c + 30b + 900a = 250$$

$$c + 40b + 1600a = 200$$

Exemplo 5 – Parábola que passa por três pontos

- Sistema linear:

$$c + 20b + 400a = 400$$

$$c + 30b + 900a = 250$$

$$c + 40b + 1600a = 200$$

- Sistema triangular equivalente:

$$c + 20b + 400a = 400$$

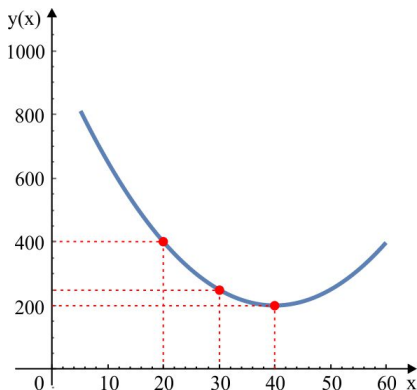
$$10b + 500a = -150$$

$$200a = 100$$

- Solução: $a = 1/2$, $b = -40$, $c = 1000$

- Função: $y(x) = ax^2 + bx + c = \frac{x^2}{2} - 40x + 1000$

Exemplo 5 – Parábola que passa por três pontos



- Dados conhecidos:

$$y(20) = 400$$

$$y(30) = 250$$

$$y(40) = 250$$

- Função quadrática:

$$y(x) = \frac{x^2}{2} - 40x + 1000$$

Polinômios de maior grau

Polinômio de grau n

O procedimento usado para encontrar funções lineares e quadráticas pode ser aplicado à determinação de qualquer **polinômio** de grau n ,

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

desde que

- 1 O número de pontos conhecidos seja $n + 1$.
- 2 As abscissas (coordenadas- x) dos pontos sejam todas diferentes.

Exemplo 6 – Problema não linear

Sistema não linear

Encontrar os pontos de interseção das equações

$$\begin{aligned}y &= x^2 \\ -x + y &= 6\end{aligned}$$

- Nesse problema, a 1ª equação não é linear
- Mesmo assim, podemos usar o **método da substituição**
- Isolando y na 2ª equação: **$y = 6 + x$**
- Substituindo y na 1ª equação: **$6 + x = x^2$**
- Equação equivalente: **$x^2 - x - 6 = 0$**

Exemplo 6 – Problema não linear

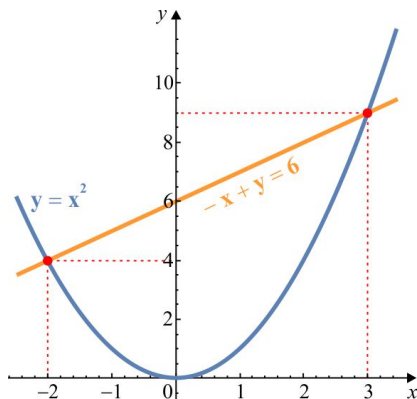
- Equação em x : $x^2 - x - 6 = 0$
- Solução por Bháskara: $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

- Soluções da eq. quadrática: $x = 3$ e $x = -2$
- Valores de y
 - Para $x = 3$, temos $y = x + 6 = 3 + 6 = 9$
 - Para $x = -2$, temos $y = x + 6 = -2 + 6 = 4$
- Soluções do sistema não linear:

$$(x, y) = (3, 9) \quad \text{e} \quad (x, y) = (-2, 4)$$

Exemplo 6 – Problema não linear - Resolução gráfica



- Sistema não linear:

$$y = x^2$$

$$-x + y = 6$$

- Soluções:

$$x = 3 \text{ e } y = 9$$

$$x = -2 \text{ e } y = 4$$

Exercício 1

Problema

Seja dado o sistema linear

$$\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 2x + y = 4 \\ 4x - y = k \end{cases}$$

- 1 Mostre graficamente que esse sistema não tem solução para $k = -4$.
Dica: desenhe as equações para $-3 \leq x \leq 3$ e $-2 \leq y \leq 5$.
- 2 Usando o método da substituição, determine o valor de k que faz com que o sistema tenha uma única solução.

$$k = 5$$

Exercício 2

Problema

Usando o método da substituição, determine a equação da reta que passa pelos pontos

$$(4, -2) \text{ e } (-3, 5).$$

$$y = -x + 2$$

Exercício 3

Problema

Durante um torneio paralímpico de arremesso de peso, anotou-se a altura (y) do peso arremessado por um atleta em função da distância horizontal (x), medida em relação ao ponto de lançamento, conforme mostra a tabela abaixo.

Distância (m)	Altura (m)
1	2,0
2	2,7
3	3,2

Seja $y(x) = ax^2 + bx + c$ a função que descreve a trajetória (parabólica) do peso. Monte um sistema linear que permita a determinação dos parâmetros a , b e c .

Exercício 4

Problema

Determine o polinômio de grau 2 que passa pelos pontos

$$(-2, 2), \quad (0, -2) \quad \text{e} \quad (4, 2).$$

$$y = \frac{x^2}{2} - x - 2$$

Exercício 5

Problema

Resolva o sistema abaixo pelo método da substituição

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x \\ y = 2x - x^2 \end{cases}$$

$(0, 0)$ e $(3, -3)$