Solução de sistemas não lineares

Método de Newton

Várias equações, várias incógnitas

Queremos resolver:

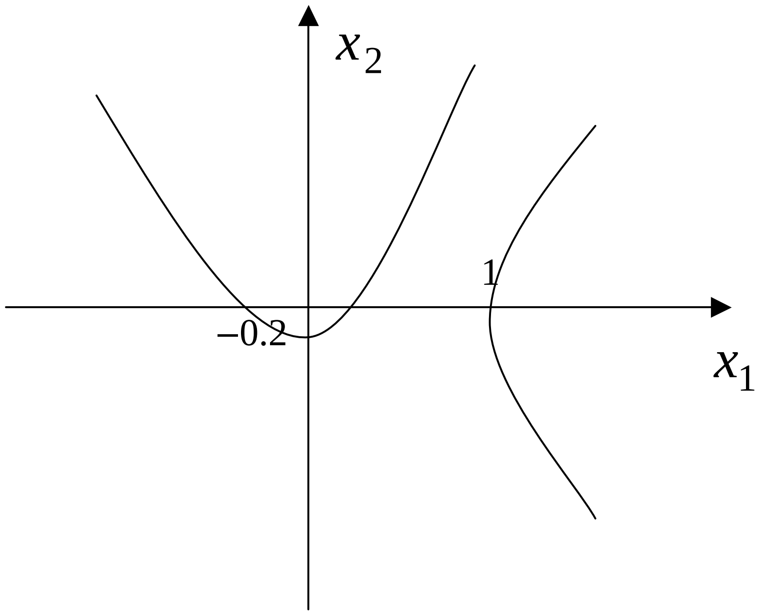
$$\begin{cases} f_1\,(x_1, x_2, ..., x_m) = 0 \\ f_2\,(x_1, x_2, ..., x_m) = 0 \\ ... \\ f_m\,(x_1, x_2, ..., x_m) = 0 \end{cases}$$

Exemplo1: Intersecção de duas parábolas.

$$f_1(x_1, x_2) = x_1^{\,2} - x_2 - 0.2 = 0$$

$$f_1(x_1, x_2) = x_2^{\,2} - x_1 + 1 = 0$$

Não temos soluções!!!!!!!!!!!!!!!!

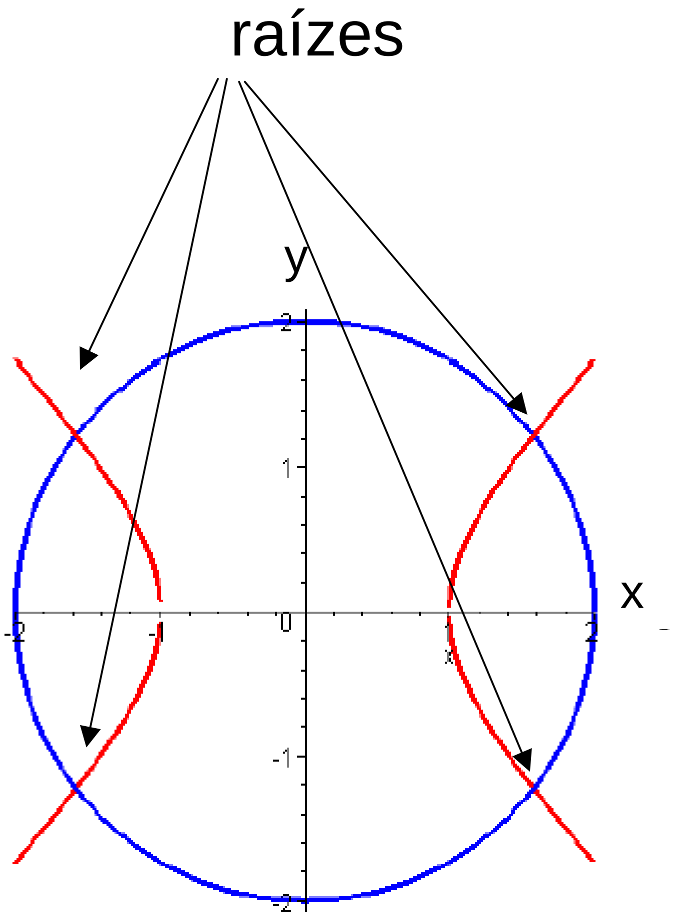


Exemplo (2x2) – 2 variáveis, 2 incógnitas

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$$

Escrevendo na forma do slide anterior

$$\begin{cases} f(x,y) = x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ g(x,y) = x^2 - y^2 - 1 \end{cases}$$



Tomando duas funções quaisquer

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

- Suponha que (x_0, y_0) é uma aproximação de uma solução do sistema.
- Vamos usar o desenvolvimento de Taylor em torno deste ponto:

$$\begin{cases} f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \\ g(x,y) \approx g(x_0,y_0) + g_x(x_0,y_0)(x-x_0) + g_y(x_0,y_0)(y-y_0) \end{cases}$$

Exemplo - Taylor (1/2)

$$\begin{cases} f(x,y) = x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ g(x,y) = x^2 - y^2 - 1 \end{cases}$$

$f_x = 2x$, $f_y = 2y$, $g_x = 2x$, $g_y = -2y$

Pelo teorema de Taylor, sabemos que perto do ponto (x,y) = (1.5,1.5), podemos escrever:

$$\begin{cases} f(x,y)_{\text{em torno de }(x,y)=(1.5,1.5)} \approx f(x_0,y_0) + 3(x-x_0) + 3(y-y_0) \\ g(x,y)_{\text{em torno de }(x,y)=(1.5,1.5)} \approx g(x_0,y_0) + 3(x-x_0) - 3(y-y_0) \end{cases}$$

Exemplo - Taylor (2/2)

$$\begin{cases} f(x,y) = x^2 + y^2 - 4 \\ g(x,y) = x^2 - y^2 - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x,y)_{(\text{em torno de } (x,y)=(1.5,1.5))} \approx f(x_0,y_0) + 3(x-x_0) + 3(y-y_0) \\ g(x,y)_{(\text{em torno de } (x,y)=(1.5,1.5))} \approx g(x_0,y_0) + 3(x-x_0) - 3(y-y_0) \end{cases}$$

No ponto (1.6,1.6):

$f(x,y) = 1.12$
$g(x,y) = -1$

$f(x,y) \approx 0.5 + 3*0.1 + 3*0.1 = 1.1$
$g(x,y) \approx -1 + 3*0.1 - 3*0.1 = -1$

Como queremos obter uma raiz:

$$\begin{cases} 0 = f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \\ 0 = g(x,y) \approx g(x_0,y_0) + g_x(x_0,y_0)(x-x_0) + g_y(x_0,y_0)(y-y_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \approx f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \\ 0 \approx g(x_0,y_0) + g_x(x_0,y_0)(x-x_0) + g_y(x_0,y_0)(y-y_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -f(x_0,y_0) \approx f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \\ -g(x_0,y_0) \approx g_x(x_0,y_0)(x-x_0) + g_y(x_0,y_0)(y-y_0) \end{cases}$$

Em forma matricial:

$$\begin{cases} -f(x_0,y_0) \approx f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \\ -g(x_0,y_0) \approx g_x(x_0,y_0)(x-x_0) + g_y(x_0,y_0)(y-y_0) \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix}_{(x_0,y_0)}} \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f(x_0,y_0) \\ -g(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

$J(x_0,y_0)$ = Matriz Jacobiana no ponto (x_0,y_0)

$$J_{(x_0,y_0)} \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f(x_0,y_0) \\ -g(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

Resolvendo

$$J_{(x_0,y_0)}\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -f(x_0,y_0) \\ -g(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}=J^{-1}{}_{(x_0,y_0)}\begin{pmatrix} -f(x_0,y_0) \\ -g(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

Problema:
Custoso calcular J^{-1}

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}+J^{-1}{}_{(x_0,y_0)}\begin{pmatrix} -f(x_0,y_0) \\ -g(x_0,y_0) \end{pmatrix}}$$

Resolvendo um sistema linear

$$J_{(x_0,y_0)}\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f(x_0, y_0) \\ -g(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

- Em vez de calcular J^{-1}, vamos chamar $(x-x_0)$ de *r* e $(y-y_0)$ de *s*:

$$J_{(x_0,y_0)}\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f(x_0, y_0) \\ -g(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Matriz conhecida   Variáveis   Vetor conhecido

Sistema linear

Processo iterativo

$$J_{(x_0,y_0)}\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f(x_0,y_0) \\ -g(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

- Ao resolvermos o sistema, teremos *s* e *r* e poderemos facilmente obter os novos valores de x_0 e y_0

$$x = r + x_0$$
$$y = s + y_0$$

Lembre que x, y não são os valores de $\bar{x}$, $\bar{y}$, mas os valores de uma nova aproximação, ou seja:

$$x_1 = r + x_0$$
$$y_1 = s + y_0$$

Método de Newton

Repetindo o processo, temos o processo iterativo de Newton:

$$J(x_k, y_k)\begin{pmatrix} x_{k+1} - x_k \\ y_{k+1} - y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f(x_k, y_k) \\ -g(x_k, y_k) \end{pmatrix}$$

Método de Newton

- Podemos generalizar o processo iterativo de Newton para sistemas lineares de dimensão *n*:

$$J(x_k, y_k, \ldots, z_k)\begin{pmatrix} x_{k+1} - x_k \\ y_{k+1} - y_k \\ \vdots \\ z_{k+1} - z_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_1(x_k, y_k, \ldots, z_k) \\ -f_2(x_k, y_k, \ldots, z_k) \\ \\ -f_n(x_k, y_k, \ldots, z_k) \end{pmatrix}$$

Precisaremos de métodos eficientes para resolver os sistemas lineares

Método de Newton

Convergência

- Quando o método converge, a convergência é quadrática.

- O método de Newton converge se:
  - As funções $f_i\ (x,y,...,z)$ para i = 1, ..., n e suas derivadas parciais ate segunda ordem sejam continuas e limitadas numa vizinhança V contendo a raiz (x*,y*,...,z*).
  - o determinante do Jacobiano é diferente de zero em V.
  - A solução inicial deve ser suficientemente próxima da raiz.

Método de Newton - Algoritmo

- resolva o sistema linear

$$J(x_k, y_k, \dots, z_k)\begin{pmatrix} r \\ s \\ \vdots \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_1(x_k, y_k, \dots, z_k) \\ -f_2(x_k, y_k, \dots, z_k) \\ \\ -f_n(x_k, y_k, \dots, z_k) \end{pmatrix}$$

- determine a nova solução

$$x_{k+1} = r + x_k$$

$$y_{k+1} = s + y_k$$

$$\vdots$$

$$z_{k+1} = t + z_k$$

Método de Newton - Algoritmo

- calcule o erro_atual

$$\left\| \begin{matrix} x_{k+1} - x_k \\ y_{k+1} - y_k \\ \vdots \\ z_{k+1} - z_k \end{matrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{matrix} r \\ s \\ \vdots \\ t \end{matrix} \right\|_\infty = \max\{|r|, |s|, \ldots, |t|\}$$

norma infinito

Voltando ao exemplo

$$\begin{cases} f(x,y) = x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ g(x,y) = x^2 - y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

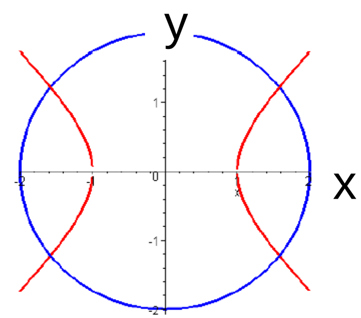
$f_x = 2x$, $f_y = 2y$
$g_x = 2x$, $g_y = -2y$

$$J = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{pmatrix}$$

Iteração de Newton:

$$J(x_k, y_k)\begin{pmatrix} x_{k+1} - x_k \\ y_{k+1} - y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f(x_k, y_k) \\ -g(x_k, y_k) \end{pmatrix}$$

Voltando ao exemplo



$$J(x_k, y_k)\begin{pmatrix} x_{k+1} - x_k \\ y_{k+1} - y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f(x_k, y_k) \\ -g(x_k, y_k) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2x_k & 2y_k \\ 2x_k & -2y_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{k+1} - x_k \\ y_{k+1} - y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f(x_k, y_k) \\ -g(x_k, y_k) \end{pmatrix}$$

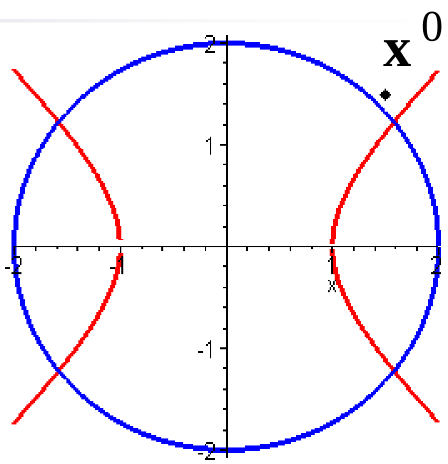
$$\mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}5 \end{bmatrix}$$

Critério de parada: erro menor que 10^{-2}

Resolução do Exemplo:

$$f_1(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 4, \qquad \nabla f_1(\mathbf{x}) = (2x_1 \;\; 2x_2)$$

$$f_2(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_2^2 - 1, \qquad \nabla f_2(\mathbf{x}) = (2x_1 \;\; -2x_2)$$



$$\underbrace{F'(\mathbf{x})}_{\substack{\textbf{matriz}\\ \textbf{Jacobiana}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & -2x_2 \end{bmatrix}$$

Cálculo no ponto inicial:

$$\mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = -F(\mathbf{x}^0) = -\begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}^0) = x_1^2 + x_2^2 - 4 \\ f_2(\mathbf{x}^0) = x_1^2 - x_2^2 - 1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0{,}5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = F'(\mathbf{x}^0) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & -2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

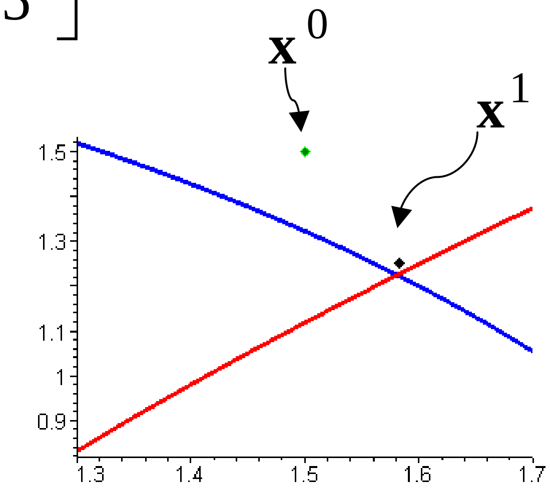
Resolva o sistema: $\mathbf{A}\,\mathbf{z} = \mathbf{b}$

Eliminação de Gauss

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,5 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 0,0833 \\ -0,25 \end{bmatrix}$$

Determine nova solução: $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^{k} + \mathbf{z}$

$$\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^0 + \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 1,5 \\ 1,5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,0833 \\ -0,25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,5833 \\ 1,25 \end{bmatrix}$$



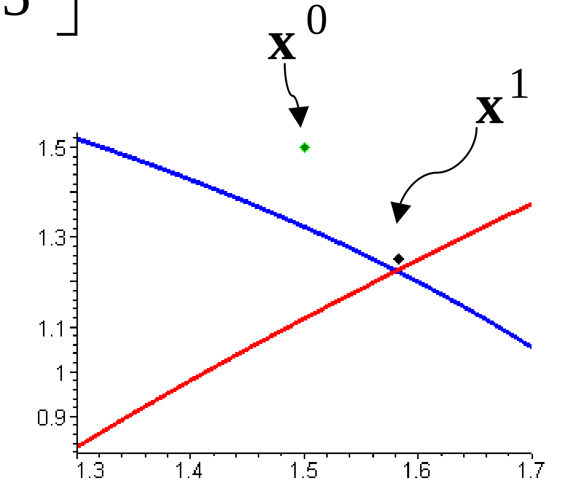
Resolva o sistema: $\mathbf{A}\,\mathbf{z}=\mathbf{b}$

Eliminação de Gauss

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -0,5 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{z}=\begin{bmatrix} 0,0833 \\ -0,25 \end{bmatrix}$$

Determine nova solução: $\mathbf{x}^{k+1}=\mathbf{x}^{k}+\mathbf{z}$

$$\mathbf{x}^{1}=\mathbf{x}^{0}+\mathbf{z}=\begin{bmatrix} 1,5 \\ 1,5 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0,0833 \\ -0,25 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1,5833 \\ 1,25 \end{bmatrix}$$



Teste de parada: $\left\|\mathbf{z}^{k}\right\|_{\infty}=\max\{|z_1|,\cdots,|z_n|\}<\varepsilon$

$$\left\|\mathbf{z}^{k}\right\|_{\infty}=\max\{|0,0833|,|-0,25|\}=0,25>\varepsilon=0,01$$

Continua, $k = k + 1 = 1$

2a. Iteração:

$$\mathbf{x}^1 = \begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,5833 \\ 1,25 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = -F(\mathbf{x}^1) = -\begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 4 \\ x_1^2 - x_2^2 - 1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0,0693 \\ -0,0557 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0693 \\ 0,0557 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = F'(\mathbf{x}^1) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & -2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,1667 & 2,5 \\ 3,1667 & -2,5 \end{bmatrix}$$

Resolva o sistema:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{z} = \mathbf{b}$$

$$\begin{bmatrix} 3,1667 & 2,5 \\ 3,1667 & -2,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0693 \\ 0,0557 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{z} = \begin{bmatrix} -0,0021 \\ -0,025 \end{bmatrix}$$

2a. Iteração:

$$\mathbf{x}^1 = \begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,5833 \\ 1,25 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = -F(\mathbf{x}^1) = -\begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 4 \\ x_1^2 - x_2^2 - 1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0,0693 \\ -0,0557 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0693 \\ 0,0557 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = F'(\mathbf{x}^1) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & -2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,1667 & 2,5 \\ 3,1667 & -2,5 \end{bmatrix}$$

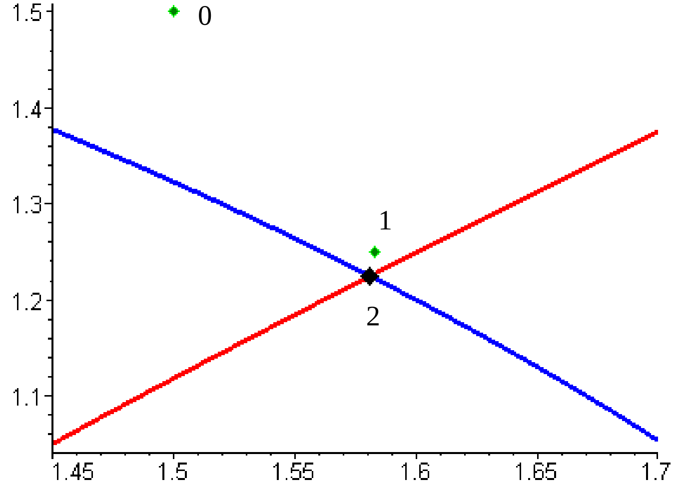
Resolva o sistema: $\mathbf{A}\,\mathbf{z} = \mathbf{b}$

$$\begin{bmatrix} 3,1667 & 2,5 \\ 3,1667 & -2,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0693 \\ 0,0557 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} -0,0021 \\ -0,025 \end{bmatrix}$$

Determine nova solução:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \mathbf{z}$$

$$\mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^1 + \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 1,5833 \\ 1,25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,0021 \\ -0,025 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,5812 \\ 1,225 \end{bmatrix}$$



Teste de parada:

$$\left\|\mathbf{z}^{k}\right\|_{\infty} = \max\left\{\left|z_1\right|, \cdots, \left|z_n\right|\right\} < \varepsilon$$

$$\left\|\mathbf{z}^{k}\right\|_{\infty} = \max\left\{\left|-0{,}0021\right|, \left|-0{,}025\right|\right\} = 0{,}025 > \varepsilon = 0{,}01$$

Continua, $k = k + 1 = 2$

Teste de parada:

$$\left\|\mathbf{z}^k\right\|_\infty = \max\left\{|z_1|,\cdots,|z_n|\right\} < \varepsilon$$

$$\left\|\mathbf{z}^k\right\|_\infty = \max\left\{|-0{,}0021|,|-0{,}025|\right\} = 0{,}025 > \varepsilon = 0{,}01$$

Continua, $k = k + 1 = 2$

3ª iteração:

$$\mathbf{x}^2 = \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}5812 \\ 1{,}225 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = -F(\mathbf{x}^2) = -\begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 4 \\ x_1^2 - x_2^2 - 1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0{,}000818 \\ -0{,}000431 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}000818 \\ 0{,}000431 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = F'(\mathbf{x}^1) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & -2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3{,}1624 & 2{,}45 \\ 3{,}1624 & -2{,}45 \end{bmatrix}$$

Resolva o sistema: $\mathbf{A\,z} = \mathbf{b}$

$$\begin{bmatrix} 3{,}1624 & 2{,}45 \\ 3{,}1624 & -2{,}45 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}000818 \\ 0{,}000431 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} -0{,}0000612 \\ -0{,}000255 \end{bmatrix}$$

Determine nova solução: $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^{k} + \mathbf{z}$

$$\mathbf{x}^{3} = \mathbf{x}^{2} + \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 1{,}5812 \\ 1{,}225 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0{,}0000612 \\ -0{,}000255 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}5811 \\ 1{,}2247 \end{bmatrix}$$

Resolva o sistema: $\mathbf{A}\,\mathbf{z} = \mathbf{b}$

$$\begin{bmatrix} 3{,}1624 & 2{,}45 \\ 3{,}1624 & -\ 2{,}45 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}000818 \\ 0{,}000431 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} -0{,}0000612 \\ -\ 0{,}000255 \end{bmatrix}$$

Determine nova solução: $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^{k} + \mathbf{z}$

$$\mathbf{x}^3 = \mathbf{x}^2 + \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 1{,}5812 \\ 1{,}225 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0{,}0000612 \\ -\ 0{,}000255 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}5811 \\ 1{,}2247 \end{bmatrix}$$

Teste de parada: $\left\|\mathbf{z}^k\right\|_\infty = \max\left\{|z_1|,\cdots,|z_n|\right\} < \varepsilon$

$$\left\|\mathbf{z}^k\right\|_\infty = \max\left\{|-0{,}0000612|,|-0{,}000255|\right\} = 0{,}000255 < \varepsilon = 0{,}01$$

Pare = Verdadeiro

Solução: *k* = 3

$$\mathbf{x}^3 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}5811 \\ 1{,}2247 \end{bmatrix}$$

Método convergiu em 3 iterações!!

Método de Newton Modificado

O Método de Newton Modificado consiste em tomar a cada iteração, sempre, $J\left(x^{(0)}\right)$, em vez de $J\left(x^{(k)}\right)$. O método iterativo é dado pela seqüência $x^{(k+1)} = x^{(k)} + s^{(k)}$.

Neste procedimento temos que resolver no passo k o sistema linear: $J\left(x^{(0)}\right)s = -F\left(x^{(k)}\right)$

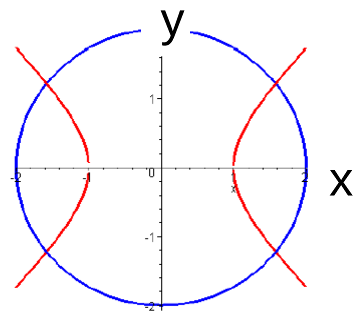
MÉTODO DE NEWTON MODIFICADO

- O Método de Newton Modificado tem a vantagem de calcular uma única vez a matriz Jacobiana $J\left(x^{(0)}\right)$.

- No caso de resolver por fatoração LU, os fatores L e U também serão calculados uma única vez.

Aplique o método de Newton Modificado

$$J(x_k, y_k)\begin{pmatrix} x_{k+1} - x_k \\ y_{k+1} - y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f(x_k, y_k) \\ -g(x_k, y_k) \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 2x_k & 2y_k \\ 2x_k & -2y_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{k+1} - x_k \\ y_{k+1} - y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f(x_k, y_k) \\ -g(x_k, y_k) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,5 \\ 1,5 \end{bmatrix}$$

Critério de parada com erro menor que 10^{-2}