4 Sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas

Valentina_S/Shutterstock/ Glow Images

Galinha

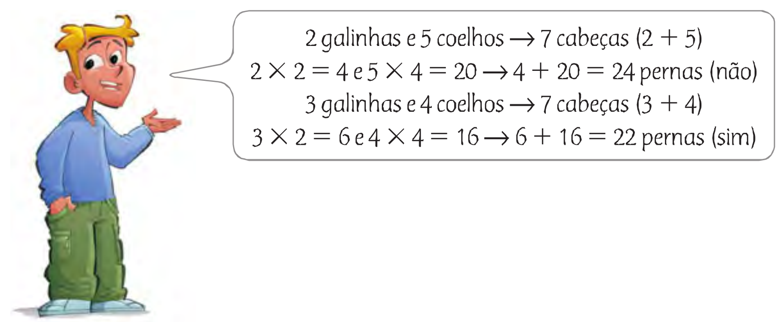
Zhukov Oleg/Shutterstock/ Glow Images

Coelho

As imagens desta página não estão representadas em proporção.

Veja se você conhece este problema tradicional.
"Em um quintal há galinhas e coelhos.
Há 7 cabeças e 22 pernas.

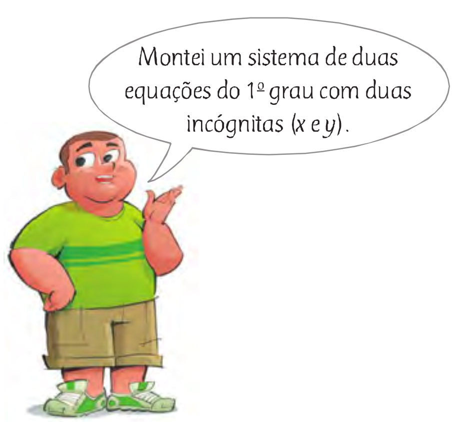
Quantas são as galinhas? E os coelhos?"
Há várias maneiras de resolver esse problema. Observe o que cada aluno fez.
1º) Luís fez por tentativas:



2º) Cibele construiu um quadro:

Galinhas	Coelhos	Cabeças	Pernas	
6	1	7	16	não
5	2	7	18	não
4	3	7	20	não
3	4	7	22	SIM

3º) Gustavo montou um sistema de equações:



x: número de galinhas
y: número de coelhos
$x + y = 7$ (São 7 cabeças, ou seja, 7 animais ao todo.)
Cada galinha tem duas pernas: $2x$.
Cada coelho tem 4 pernas: $4y$.
Então, **$2x + 4y = 22$** (total de pernas).
As duas equações têm de ser satisfeitas ao mesmo tempo:
$x + y = 7$ e $2x + 4y = 22$
ou

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + 4y = 22 \end{cases} \Rightarrow x = 3 \text{ e } y = 4$$

Casa de Tipos/Arquivo da editora

Dependendo dos números envolvidos na situação, o procedimento de Gustavo é mais prático e mais eficiente.

Você vai agora recordar e aprofundar o que já estudou sobre os sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas e resolver problemas com eles.

Soluções de um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas

Ao equacionar o problema sobre galinhas e coelhos, Gustavo chegou a duas equações do 1º grau com duas incógnitas (as mesmas para as duas equações). Por isso, ele montou um sistema de equações.

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + 4y = 22 \end{cases}$$

Solução de um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas é um par ordenado que **satisfaz**, **simultaneamente**, **as duas equações**.

No sistema acima, temos:

- Soluções da equação $x + y = 7 \rightarrow (1, 6); (2, 5); (3, 4); (4, 3); (5, 2); (6, 1);$ etc.
- Soluções da equação $2x + 4y = 22 \rightarrow (1, 5); (3, 4); (5, 3); (7, 2); (9, 1);$ etc.

O **par ordenado** $(3, 4)$ é a **solução do sistema**, pois é o **único par ordenado** que é **solução**, **ao mesmo tempo**, **das duas equações**.

Sistema: $\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + 4y = 22 \end{cases}$ Verificação: $\begin{cases} 3 + 4 = 7 \\ 2 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 6 + 16 = 22 \end{cases}$

Vamos considerar este mesmo sistema, mas agora com x e y números reais e ver, gráfica ou geometricamente, que a solução de um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas é o **ponto de intersecção** das duas retas correspondentes às duas equações.

Observe o gráfico a seguir, que mostra a solução do sistema $\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + 4y = 22 \end{cases}$:

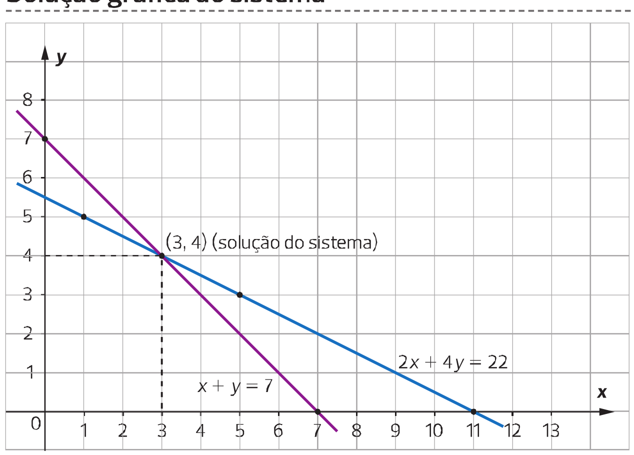
$x + y = 7$	
x	y
0	7
7	0

Pares ordenados: $(0, 7); (7, 0)$

$2x + 4y = 22$	
x	y
1	5
5	3

Pares ordenados: $(1, 5); (5, 3)$

Solução gráfica do sistema



Solução de um sistema usando cálculo mental

Podemos resolver alguns sistemas mentalmente. Por exemplo, para resolver mentalmente o sistema $\begin{cases} x+y=9 \\ x-y=1 \end{cases}$, basta pensar em dois números cuja soma é 9 e cuja diferença é 1.

São os números 5 e 4, pois $5 + 4 = 9$ e $5 - 4 = 1$.

Exercícios

35. Determine mentalmente as soluções dos sistemas para x e y números naturais e registre o par ordenado.

a) $\begin{cases} x+y=12 \\ x-y=2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x=2y \\ x+y=12 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y=5 \\ x+3y=11 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y=3x \\ x-y=-6 \end{cases}$

36. Construa as duas retas e encontre graficamente a solução de cada um dos sistemas para x e y números reais.

a) $\begin{cases} x+y=7 \\ 2x-y=-1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x+y=-2 \end{cases}$

37. Atividade em dupla

Dos pares ordenados abaixo, sendo x e y números inteiros, qual é a solução do sistema $\begin{cases} 2x+5y=-14 \\ 4x-3y=24 \end{cases}$?

a) (2, 1)
b) (−3, 4)
c) (3, −4)
d) (−3, −4)

Comparem com a resposta de outra dupla e vejam como foi a resolução.

38. Crie um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas cuja solução é o par ordenado (1, 2).

39. Arredondamentos, cálculo mental e resultado aproximado

Teresa gastou R$ 19,60 na compra de 1 metro de tecido e 1 metro de fita. O metro de tecido custa R$ 9,90 a mais do que o metro de fita. Faça arredondamentos, monte um sistema, resolva-o mentalmente e registre usando os valores aproximados obtidos. Qual dos valores abaixo é o preço de 2 m de tecido e 3 m de fita?

a) R$ 42,05
b) R$ 39,05
c) R$ 44,05
d) R$ 48,05

Métodos de resolução de um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas

Nem sempre podemos resolver mentalmente um sistema de equações. Por isso, além do método geométrico (gráfico), foram desenvolvidos outros métodos de resolução. A seguir, vamos estudar o **método da substituição**, o **método da comparação** e o **método da adição**, que são métodos algébricos de resolução.

Método da substituição

Considere o seguinte problema:

A soma das idades de Janaína e Marisa é 55 anos. A idade de Janaína mais o dobro da idade de Marisa resulta 85 anos. Qual é a idade de cada uma?


Ariwasabi/Shutterstock/Glow Images

Marisa


Andresr/Shutterstock/Glow Images

Janaína

1º) Representamos:

- idade de Janaína: x
- idade de Marisa: y

2º) Montamos o sistema a partir das informações do problema: $\begin{cases} x + y = 55 \\ x + 2y = 85 \end{cases}$

3º) Resolvemos o sistema pelo método da substituição:

1ª etapa

"Isolamos", no 1º membro, uma das incógnitas em uma das equações. Por exemplo, o x na 1ª equação:

$$x + y = 55$$
$$x = 55 - y$$

2ª etapa

Na outra equação, substituímos x por $(55 - y)$ e determinamos o valor de y:

$$x + 2y = 85$$
$$55 - y + 2y = 85$$
$$-y + 2y = 85 - 55$$
$$y = 30$$

3ª etapa

Voltamos a $x = 55 - y$, substituímos y por 30 e determinamos o valor de x:

$$x = 55 - y$$
$$x = 55 - 30$$
$$x = 25$$

A solução do sistema é o par ordenado (25, 30).

Logo, Janaína tem 25 anos e Marisa tem 30 anos.

Verificando:

- A soma das idades: $25 + 30 = 55$; 55 anos
- A idade de Janaína mais o dobro da idade de Marisa: $25 + 60 = 85$; 85 anos

Examine agora mais alguns exemplos de resolução de sistemas pelo método da substituição. Considere x e y números reais.

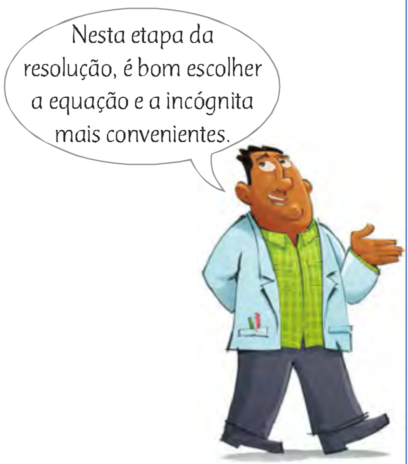
a) $\begin{cases} 3x+4y=1 \\ 2x-5y=16 \end{cases}$

1ª etapa

$3x + 4y = 1$

$3x = 1 - 4y$

$\boxed{x = \dfrac{1-4y}{3}}$



2ª etapa

$2x - 5y = 16$

$2\left(\dfrac{1-4y}{3}\right) - 5y = 16$

$\dfrac{2-8y}{3} - 5y = 16$

$\dfrac{2-8y}{3} - \dfrac{15y}{3} = \dfrac{48}{3}$

$2 - 8y - 15y = 48$

$-8y - 15y = 48 - 2$

$-23y = 46 \quad \cdot(-1)$

$23y = -46$

$y = \dfrac{-46}{23}$

$\boxed{y = -2}$

3ª etapa

$x = \dfrac{1-4y}{3}$ e $y = -2$

$x = \dfrac{1-4(-2)}{3}$

$x = \dfrac{1+8}{3}$

$x = \dfrac{9}{3}$

$\boxed{x = 3}$

A solução do sistema é o par ordenado $(3, -2)$.

b) $\begin{cases} 3(x-1) + 4(y-3) = 4 \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{6} = 1 \end{cases}$

Neste exemplo, é conveniente transformar inicialmente as equações para a forma $ax + by = c$.

1ª equação:

$3(x-1) + 4(y-3) = 4$

$3x - 3 + 4y - 12 = 4$

$3x + 4y = 4 + 3 + 12$

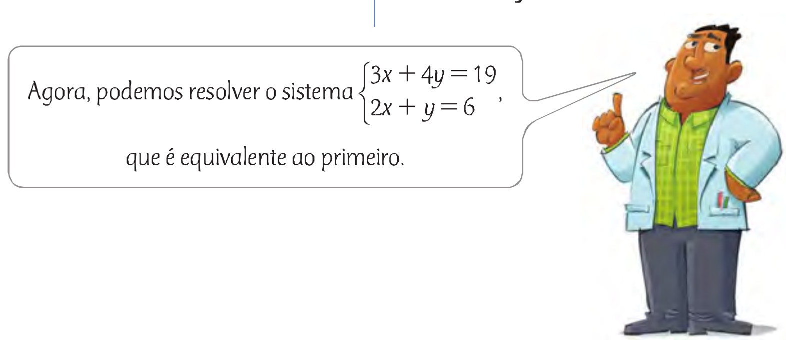
$3x + 4y = 19$

2ª equação:

$\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{6} = 1$

$\dfrac{2x}{6} + \dfrac{y}{6} = \dfrac{6}{6}$

$2x + y = 6$



Nesse caso, é mais conveniente começar obtendo o valor de y na segunda equação:

1ª etapa

$$2x + y = 6$$
$$\boxed{y = 6 - 2x}$$

2ª etapa

$$3x + 4y = 19$$
$$3x + 4(6 - 2x) = 19$$
$$3x + 24 - 8x = 19$$
$$3x - 8x = 19 - 24$$
$$-5x = -5 \quad \cdot(-1)$$
$$5x = 5$$
$$x = \frac{5}{5}$$
$$\boxed{x = 1}$$

3ª etapa

$$y = 6 - 2x \text{ e } x = 1$$
$$y = 6 - 2 \cdot 1$$
$$y = 6 - 2$$
$$\boxed{y = 4}$$

A solução do sistema é o par ordenado (1, 4).

c) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{4} - \dfrac{x-y}{3} = 10 \\ \dfrac{x+y}{8} + \dfrac{x-y}{6} = 5 \end{cases}$

Inicialmente, preparamos o sistema, transformando cada uma das suas equações em uma equação da forma $ax + by = c$:

1ª equação:

$$\frac{x+y}{4} - \frac{x-y}{3} = 10$$
$$\frac{3(x+y)}{12} - \frac{4(x-y)}{12} = \frac{120}{12}$$
$$3(x+y) - 4(x-y) = 120$$
$$3x + 3y - 4x + 4y = 120$$
$$-x + 7y = 120$$

2ª equação:

$$\frac{x+y}{8} + \frac{x-y}{6} = 5$$
$$\frac{3(x+y)}{24} + \frac{4(x-y)}{24} = \frac{120}{24}$$
$$3x + 3y + 4x - 4y = 120$$
$$7x - y = 120$$

Agora, resolvemos o sistema $\begin{cases} -x + 7y = 120 \\ 7x - y = 120 \end{cases}$, formado com as equações obtidas, que é equivalente ao primeiro:

1ª etapa

$$-x + 7y = 120$$
$$-x = 120 - 7y \quad \cdot(-1)$$
$$\boxed{x = 7y - 120}$$

2ª etapa

$$7x - y = 120$$
$$7(7y - 120) - y = 120$$
$$49y - 840 - y = 120$$
$$49y - y = 120 + 840$$
$$48y = 960$$
$$y = \frac{960}{48}$$
$$\boxed{y = 20}$$

3ª etapa

$$x = 7y - 120 \text{ e } y = 20$$
$$x = 7 \cdot 20 - 120$$
$$x = 140 - 120$$
$$\boxed{x = 20}$$

A solução do sistema é o par ordenado (20, 20).