

Probabilidade - aula III

Marcos Oliveira Prates

2012/02

- 1 Regra da Multiplicação
- 2 Regra da Probabilidade Total
- 3 Independência
- 4 Teorema de Bayes
- 5 Variáveis Aleatórias

Objetivos

Ao final deste capítulo você deve ser capaz de:

- Usar a regra da multiplicação para calcular probabilidade de eventos
- Usar a Regra da Probabilidade Total.

Regra da Multiplicação

- Frequentemente precisamos da probabilidade da interseção de dois eventos.
- A definição da probabilidade condicional

$$P(B|A) = P(A \cap B)/P(A)$$

pode ser reescrita e resultar na regra conhecida como regra da multiplicação.

Regra da Multiplicação

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B)$$

Exemplo:

- A probabilidade de que o primeiro estágio de uma operação de usinagem atenda às especificações é de 0,90.
- Falhas ocorrem devido a: variações no metal, condição da lâmina, etc.
- Dado que o primeiro estágio atende as especificações, a probabilidade de que o segundo estágio atenda é de 0,95.
- Qual a probabilidade de ambos encontrarem as especificações?

Solução:

- Definimos os eventos:

$A = \{\text{o primeiro estágio atende as especificações}\}$

$B = \{\text{o segundo estágio atende as especificações}\}$

- A probabilidade requerida é

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = (0,95)(0,90) .$$

- Observação:** Apesar de ser também verdade que $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$ a informação dada no problema não nos permite usar essa fórmula.

Regra da Probabilidade Total

- A probabilidade de um evento pode ser dada sob várias condições.
- A partir dessa informação podemos recuperar a probabilidade do evento.
- Esse resultado é conhecido como regra da probabilidade total.

Exemplo:

- Considere um processo de fabricação de semicondutores.
- Dado que um *chip* está sujeito a altos níveis de contaminação, a probabilidade de que ele cause defeito na produção é de 0,1.
- Dado que o *chip* não está sujeito a altos níveis de contaminação, a probabilidade dele causar defeito na produção é 0,005.
- Sabemos ainda que a probabilidade de um *chip* estar sob altos níveis de contaminação é 0,2.
- Estamos interessados no evento: o *chip* causa uma falha na produção.
- As condições a que esse evento está sujeito são:
 - está sujeito a altos níveis de contaminação;
 - não está sujeito a altos níveis de contaminação.

- Para qualquer evento B podemos escrever

$$B = (B \cap A') \cup (B \cap A).$$

- Como $(B \cap A')$ e $(B \cap A)$ são mutuamente excludentes

$$P(B) = P(B \cap A') + P(B \cap A) = P(B|A)P(A) + P(B|A')P(A').$$

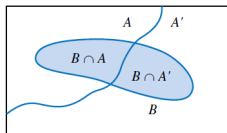


Figure 2-14 Partitioning an event into two mutually exclusive subsets.

Exemplo:

- Considere o exemplo de contaminação discutido anteriormente.
- Seja

$$F = \{\text{o chip causa defeito na produção}\}$$

$$H = \{\text{o chip está sujeito a altos níveis de contaminação}\}$$

- Temos que

$$P(F|H) = 0,10 \quad P(F|H') = 0,005 \quad P(H) = 0,2.$$

- Logo

$$\begin{aligned} P(F) &= P(F|H)P(H) + P(F|H')P(H') \\ &= (0,10)(0,2) + (0,005)(0,8) = 0,0235. \end{aligned}$$

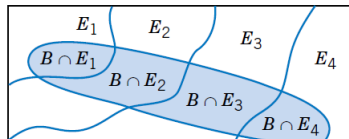
- Uma coleção de eventos $E_1, \dots, E_n$ é dita exaustiva e mutuamente excludente se

$$E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n = S \quad \text{e} \quad E_i \cap E_j = \emptyset.$$

Regra da Probabilidade Total

Se $E_1, \dots, E_n$ é uma coleção exaustiva e mutuamente excludentes de eventos

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap E_1) + P(B \cap E_2) + \dots + P(B \cap E_n) \\ &= P(B|E_1)P(E_1) + P(B|E_2)P(E_2) + \dots + P(B|E_n)P(E_n). \end{aligned}$$



Exemplo:

- Considere o exemplo de contaminação.
- Porém agora o chip pode estar sujeito a níveis de contaminação: alto, médio e baixo.
- Seja

$$F = \{\text{o chip causa defeito na produção}\}$$

$$H = \{\text{o chip está sujeito a altos níveis de contaminação}\}$$

$$M = \{\text{o chip está sujeito níveis médios de contaminação}\}$$

$$L = \{\text{o chip está sujeito níveis baixos de contaminação}\}$$

- Qual a probabilidade do *chip* causar defeito na produção?

Exemplo: (solução)

- Temos que

$$P(F|H) = 0,10 \quad P(F|M) = 0,01, \quad P(F|L) = 0,001$$

$$P(H) = 0,2 \quad P(M) = 0,3 \quad P(L) = 0,5.$$

- Logo

$$\begin{aligned} P(F) &= P(F|H)P(H) + P(F|M)P(M) + P(F|L)P(L) \\ &= (0,10)(0,2) + (0,01)(0,3) + (0,001)(0,5) = 0,0235. \end{aligned}$$

Independência

- Em alguns casos podemos ter que

$$P(A|B) = P(A) .$$

- O conhecimento de B não nos diz nada sobre A .
- Temos assim que

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(A)P(B) .$$

- Além disso

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B) .$$

- Dizemos assim que A e B são independentes.

Independência

Dois eventos A e B são independentes se uma das seguintes afirmações é verdade

- $P(A|B) = P(A)$;
- $P(B|A) = P(B)$;
- $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Observação: se A e B são independentes A' e B' também são. (Fazer como exercício.)

Exemplo:

- Considere o circuito abaixo.



- Ele só opera se houver um caminho de dispositivos funcionando da esquerda para direita.
- A probabilidade de cada dispositivo funcionar é mostrada na figura.
- Suponha que os dispositivos falhem independentemente.
- Qual a probabilidade do circuito operar?

Solução:

- Definimos os eventos:

$$E = \{\text{o dispositivo da esquerda opera}\}$$

$$D = \{\text{o dispositivo da direita opera}\}$$

- A probabilidade do circuito operar é

$$P(E \cap D) = P(E)P(D) = (0,95)(0,95) = 0,9025.$$

Independência coletiva

Os eventos $E_1, \dots, E_n$ são mutuamente independentes se para qualquer subconjunto de eventos $E_{i_1}, E_{i_2}, \dots, E_{i_k}$

$$P(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \dots \cap E_{i_k}) = P(E_{i_1})P(E_{i_2}) \dots P(E_{i_k})$$

Exemplo:

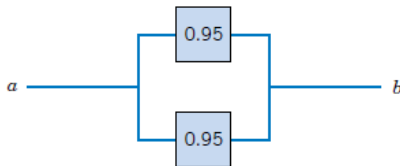
- Considere que a probabilidade de uma pastilha conter uma grande partícula de contaminação é 0,01.
- Suponha que as pastilhas são independentes:
 - a probabilidade de uma pastilha conter uma partícula de contaminação não é influenciada pelas demais.
- 15 pastilhas são analisadas.
- Qual a probabilidade de nenhuma pastilha ser contaminada?
- Defina o evento:

$$E_i = \{\text{a } i\text{-ésima partícula não é contaminada}\}, \quad P(E_i) = 0,99$$

$$\begin{aligned} P(E_1 \cap E_2 \dots E_n) &= P(E_1)P(E_2) \dots P(E_n) \\ &= (0,99)^{15} = 0,86 \end{aligned}$$

Exemplo:

- Considere o circuito apresentado a seguir.



- Ele só opera se houver um caminho de dispositivos funcionando da esquerda para direita.
- A probabilidade de cada dispositivo funcionar é mostrada na figura.
- Suponha que os dois falhem independentemente.
- Qual a probabilidade do circuito operar?

Solução:

- Definimos os eventos:

$S = \{\text{o dispositivo da parte superior opera}\}$

$I = \{\text{o dispositivo da parte inferior opera}\}$

- Haverá um caminho disponível se pelo menos um deles operar.
- A probabilidade do circuito operar é

$$P(S \cup I) = 1 - P[(S \cup I)'] = 1 - P[S' \cap I']$$

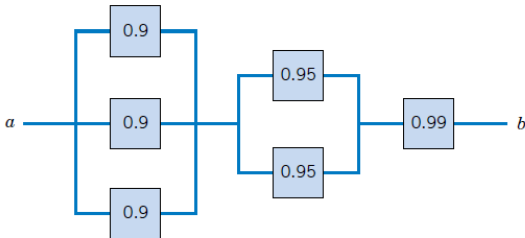
- Como S e I são independentes, S' e I' também são, logo

$$P(S' \cap I') = P(S')P(I') = (0,05)^2$$

portanto

$$P(S \cup I) = 1 - (0,05)^2 = 0,9975.$$

- Considere o circuito abaixo.



- Ele só opera se houver um caminho de dispositivos funcionando da esquerda para direita.
- Suponha que os dispositivos são independentes.
- Qual a probabilidade do circuito funcionar?
(Fazer no quadro)

Teorema de Bayes

- Vimos que a informação muitas vezes é apresentada em forma de probabilidade condicional.
- Elas nos fornecem a probabilidade de um evento (uma falha) dada uma condição (estar contaminado).
- Pode ser que estejamos interessados em investigar:
 - depois que o evento deu um resultado (falhar);
 - qual a probabilidade de uma certa condição estar presente (alta contaminação)?
- Esse tipo de problema é tratado usando o importante resultado conhecido como **Teorema de Bayes**.

- Da definição de probabilidade condicional sabemos que

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B) .$$

- Rearranjando a última igualdade temos o seguinte resultado.

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}, \text{ para } P(B) > 0 .$$

Exemplo:

- Reconsidere o exemplo do *chip*.
- Qual a probabilidade de que um nível alto de contaminação estava presente dado que uma falha ocorreu?
- Relembrando que

$$H = \{\text{ocorre um nível alto de contaminação}\}$$

$$F = \{\text{ocorre uma falha}\}$$

- Vimos que

$$P(F) = P(F|H)P(H) + P(F|H')P(H') = 0,0235.$$

- Temos então que

$$P(H|F) = \frac{P(F|H)P(H)}{P(F)} = \frac{(0,10)(0,20)}{(0,0235)} = 0,85.$$

- Podemos sempre usar a Regra da probabilidade total para calcular a probabilidade do denominador.
- Temos então o seguinte resultado geral.

Teorema de Bayes

Sejam $E_1, E_2, \dots, E_k$ eventos mutuamente excludentes e exaustivos. Seja B um evento qualquer com $P(B) > 0$ temos então que

$$P(E_i|B) = \frac{P(B|E_i)P(E_i)}{P(B|E_1)P(E_1) + P(B|E_2)P(E_2) + \dots + P(B|E_n)P(E_n)}$$

Exemplo:

- Um rastreamento médico é realizado para testar um novo procedimento.
- A probabilidade do teste identificar corretamente alguém **com** a doença é 0,99.
- A probabilidade do teste identificar corretamente alguém **sem** a doença é 0,95.
- A incidência da doença na população em geral é 0,0001.
- Você faz o teste e o resultado é positivo.
- Qual a probabilidade de você ter a doença, nesse caso?
- Defina:

$$D = \{\text{você tem a doença}\}, \quad S = \{\text{o teste deu positivo}\}.$$

(Fazer no quadro.)

Variáveis Aleatórias

- Frequentemente estamos interessados em resumir o resultado de um experimento aleatório através de um número.
- Em muitos casos, o espaço amostral é apenas uma descrição dos resultados possíveis.
- Em outros, é necessário associar um número com cada resultado do espaço amostral.
- Exemplo: lançamos três moedas e observamos o número de caras que aparecem.

- Não sabemos de ante-mão qual o resultado do experimento aleatório.
- Portanto o valor da variável resultante também não é conhecido.
- Por isso uma variável que associa um número ao resultado do experimento aleatório é conhecida como **variável aleatória**.

Variável Aleatória

Função que confere um número real a cada resultado no espaço amostral de um experimento aleatório.

- Precisamos de uma notação para distinguir variável aleatória de número real.
- Uma variável aleatória é denotada por letra maiúscula, tal como X .
- Depois do experimento ser conduzido, o valor observado da variável aleatória é denotado por letra minúscula, tal como $x = 70$ miliampéres.

- Algumas medidas podem assumir qualquer valor em um intervalo de números reais.
- Exemplo: o comprimento de uma peça pode assumir qualquer valor positivo.
- Na prática, porém, arredondamos a medida para o centésimo ou décimo mais próximo.
- Mas vamos considerar que pode assumir qualquer valor.
- Esse tipo de variável é denominada **contínua**.

- Em alguns casos podemos registrar variáveis que são apenas pontos discretos na reta.
- Exemplo: o número de bits que são transmitidos e recebidos com erro.
- Ou ainda a proporção de bits transmitidos recebidos com erro, essa medida ainda é limitada a pontos discretos na reta real.
- Nesse tipo de situação dizemos que a variável aleatória é **discreta**.

Variáveis Aleatórias Discretas e Contínuas

- **Discreta:** possui uma faixa finita (ou infinita contável) de valores.
- **Contínua:** possui um intervalo (tanto finito como infinito) de números reais para sua faixa.

- Em alguns casos a variável X é discreta, mas como sua faixa de valores é muito grande assumimos que é contínua.
- Suponha que medidas de corrente sejam lidas a partir de um instrumento com precisão de centésimos.
- Como as medidas são limitadas, a variável é discreta.
- Porém, por conveniência e simplicidade, podemos assumir que a variável é contínua.

Exemplos de Variáveis Aleatórias

- Discretas:
 - número de arranhões em uma superfície;
 - proporção de parte defeituosas em 1000 resultados;
 - número de bits transmitidos e recebidos com erro.
- Contínuas:
 - corrente elétrica;
 - comprimento;
 - pressão;
 - temperatura.