Módulo de Leis dos Senos e dos Cossenos

Leis dos Senos e dos Cossenos.

1ª série E.M.

Módulo de Leis dos Senos e dos Cossenos
Leis dos Senos e dos Cossenos.

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Calcule o que se pede em cada um dos itens abaixo.

a) Qual o cosseno do maior ângulo do triângulo de lados medindo 5, 6 e 7?

b) Qual o cosseno do menor ângulo do triângulo de lados medindo 7, 8 e 10?

c) Num triângulo com lados medindo 5 e 6 e ângulo entre eles de $60°$, qual o lado oposto ao ângulo informado?

d) Qual o cosseno de maior ângulo do triângulo de lados medindo 2, 3 e 5?

Exercício 2. Dois lados de um triângulo medem 6 m e 10 m e formam entre si um ângulo de $120°$. Determinar a medida do terceiro lado.

Exercício 3. Os lados de um triângulo obtusângulo medem 3, 4 e x. Podemos afirmar que

a) $5 < x < 7$.
b) $\sqrt{7} < x < 5$.
c) $1 < x < \sqrt{7}$ ou $5 < x < 7$.
d) $x = 5$ ou $x = 7$.

Exercício 4. Sendo a o lado oposto ao ângulo α, b oposto a β e c oposto a γ, em um triângulo, calcule:

a) o seno de β para $a = 4$ cm, $\alpha = 30°$ e $b = 8$ cm;

b) o valor de γ para $a = \sqrt{2}$ cm, $\beta = 45°$ e $b = 2$; e

c) o cosseno de α para $a = \sqrt{3}$, $\operatorname{sen}\gamma = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ e $c = 10$.

Exercício 5. Dado um triângulo ABC com $BC = 5\sqrt{2}$ cm, $B\hat{A}C = 45°$ e $A\hat{B}C = 30°$. Qual a medida de AC ?

Exercício 6. Calcular o raio da circunferência circunscrita a um triângulo do qual se conhecem um lado $AB = 10$ m e o ângulo oposto $C = 60°$.

Exercício 7. Um navio, deslocando-se em linha reta, visa um farol e obtém a leitura de $30°$ para o ângulo formado entre a sua trajetória e a linha de visada do farol. Após navegar 20 milhas, através de uma nova visada ao farol, obtém a leitura de $75°$. Determine a distância entre o farol e o navio no instante em que fez a 2^a leitura.
(Use $\sqrt{2} \cong 1,4$).

Exercício 8. Dado um triângulo de lados 5 cm, 7 cm e 8 cm, determine o valor do cosseno e do seno do menor ângulo interno desse triângulo.

Exercício 9. No triângulo ABC, os lados AC e BC medem 8 cm e 6 cm, respectivamente, e o ângulo A vale $30°$. Quanto vale o seno do ângulo B?

Exercício 10. Três ilhas A, B e C aparecem num mapa, em escala 1 : 10000, como na figura 1. Das alternativas, a que melhor aproxima a distância em km entre as ilhas A e B é:

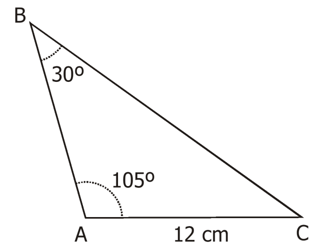

Figura 1

a) $2,3$. b) $2,1$. c) $1,9$. d) $1,4$. e) $1,7$.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 11. Os lados de um triângulo são 3, 4 e 6. O cosseno do maior ângulo interno desse triângulo vale:

a) $\dfrac{11}{24}$ b) $-\dfrac{11}{24}$ c) $\dfrac{3}{8}$ d) $-\dfrac{3}{8}$ e) $-\dfrac{3}{10}$

Exercício 12. Calcule o que se pede em cada um dos itens abaixo.

a) Qual o cosseno do maior ângulo do triângulo de lados medindo 4, 5 e 6?

b) Qual o cosseno do menor ângulo do triângulo de lados medindo 7, 8 e 10?

c) Qual o cosseno de maior ângulo do triângulo de lados medindo 5, 10 e 15?

Exercício 13. Em um triângulo, as medidas de seus lados, em metros, são três números inteiros consecutivos e a medida do maior ângulo é o dobro da medida do menor. Determine a medida do menor lado deste triângulo.

Exercício 14. A, B e C são pontos de uma circunferência de raio 3 cm, $AB = BC$ e o ângulo $A\hat{B}C$ mede $30°$. Calcule, em cm, o comprimento do segmento AC.

Exercício 15. Um $\triangle ABC$ tem lados AB, AC e BC que medem, respectivamente, 5 cm, 10 cm e 9 cm. Determine a medida da mediana relativa ao lado AC.

Exercício 16. Em um paralelogramo $ABCD$, os lados AB e AD medem, respectivamente, $x\sqrt{2}$ cm e x cm, e θ é o ângulo obtuso formado entre eles. Se a diagonal maior mede $2x$ cm, então qual o valor do seno do ângulo θ?

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 17. Considere o triângulo retângulo da figura 2.

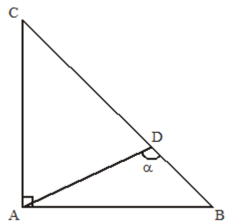

Figura 2

Sabendo-se que $\alpha = 120°$, $AB = AC = 1$ cm. Determine a medida de AD.

Exercício 18. Na figura 3, $AD = 2$ cm, $AB = \sqrt{3}$ cm, a medida do ângulo $B\hat{A}C$ é $30°$ e $BD = DC$, onde D é ponto do lado AC . A medida do lado BC , em cm, é

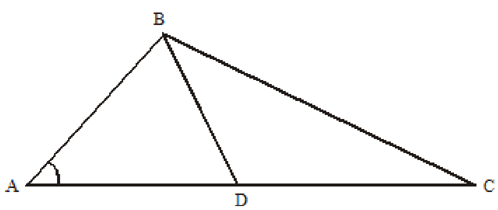

Figura 3

Exercício 19. Uma circunferência de raio 14 cm circunscreve um triângulo ABC. Calcule a medida do lado AB, sabendo-se que o triângulo ABC não é retângulo e que o ângulo $A\hat{C}B$ mede $30°$.

Exercício 20. Na figura 4, tem-se o triângulo ABC inscrito em uma circunferência de centro D.

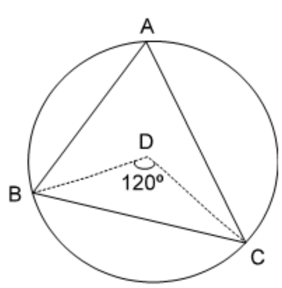

Figura 4

Se $AB = 6$ cm e $AC = 9$ cm, o perímetro do triângulo ABC, em centímetros, é aproximadamente igual a

a) $18,4$ b) $19,8$ c) $20,6$ d) $21,4$ e) $22,9$

Exercício 21. Num triângulo ABC, retângulo em $\hat{A}$, temos $\hat{B} = 60°$. As bissetrizes destes ângulos se encontram num ponto D. Se o segmento de reta BD mede 1 cm, determine a medida da hipotenusa.

Exercício 22. Na figura 5, tem-se

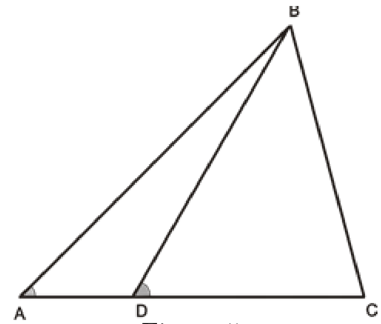

Figura 5

$B\hat{A}C = 45°$, $B\hat{D}C = 60°$, $AD = 5$ u.c. e $DC = 10$ u.c.. Com base nesses dados, calcule BC.

Exercício 23. Um observador, situado no ponto A, distante 30 m do ponto B, vê um edifício sob um ângulo de $30°$, conforme a figura abaixo. Baseado nos dados da figura 6, determine a altura do edifício em metros e divida o resultado por $\sqrt{2}$.
Dados: $AB = 30$ m; $A\hat{C}D = 30°$; $C\hat{A}B = 75°$; $A\hat{B}C = 60°$; $D\hat{C}A = 90°$.

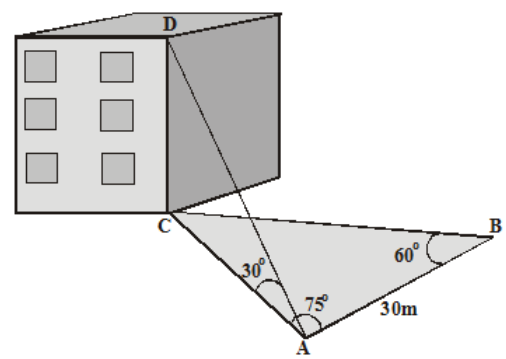

Figura 6

Exercício 24. A proporção

$$\frac{e}{f} = \frac{g}{h}$$

implica que

$$\frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \frac{e+g}{f+h}.$$

Interprete o resultado acima e o aplique juntamente com a lei dos senos para resolver os itens abaixo.

a) No triângulo ABC, p é o semiperímetro e R o raio do círculo circunscrito. Prove que

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\gamma = \frac{p}{R}.$$

b) Os senos dos ângulos de um triângulo são números racionais. Mostre que os seus cossenos são também racionais.

Exercício 25. As páginas de um livro medem 1 dm de base e $\sqrt{1+\sqrt{3}}$ dm de altura. Se este livro for parcialmente aberto, de tal forma que o ângulo entre duas páginas seja $60°$, a medida do ângulo α, formado pelas diagonais das páginas, será:

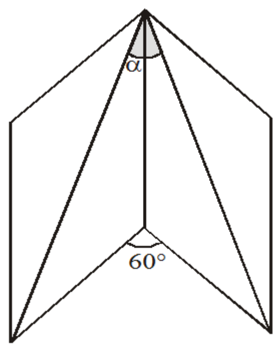

Figura 7

Exercício 26. Calcule a área do triângulo ABC tal que $AB = 1$ cm, $BC = 0,5$ cm e o ângulo $A\hat{B}C$ tem o dobro da medida do ângulo $B\hat{A}C$.

Respostas e Soluções.

1.

a) O maior ângulo do triângulo é o oposto ao maior lado. Chame de α o ângulo oposto ao lado de medida 7. Aplicando a Lei dos Cossenos temos:

$$7^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cos\alpha$$

e chegaremos a $\cos\alpha = \dfrac{1}{5}$.

b) O menor ângulo do triângulo é o oposto ao menor lado. Chame de α o ângulo oposto ao lado de medida 7. Aplicando a Lei dos Cossenos temos:

$$7^2 = 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cos\alpha$$

e chegaremos a $\cos\alpha = \dfrac{23}{32}$.

c) Aplicando a Lei dos Cossenos temos:

$$a^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cos 60^\circ$$

e chegaremos a $a = \sqrt{31}$.

d) Observe que esses lados não formam um triângulo, pois, pela desigualdade triangular deveríamos ter $a < b + c$ e na questão $5 = 3 + 2$.

2. Seja a o lado oposto a 120°, então podemos escrever que

$$\begin{aligned}
a^2 &= 6^2 + 10^2 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \cos 120^\circ \\
a^2 &= 36 + 100 - 120 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\
a &= \sqrt{196} \\
a &= 14 \text{ m.}
\end{aligned}$$

3. (Adaptado do vestibular da UNIMONTES MG)
Para o triângulo existir deveremos ter, pela desigualdade triangular, $4 - 3 < x < 4 + 3$, ou seja, $1 < x < 7$. Perceba que se $x = 5$ teremos o triângulo retângulo pitagórico [1]. Se x for o maior lado, o triângulo será obtusângulo se

$$\begin{aligned}
x^2 &> 3^2 + 4^2 \\
x^2 &> 25 \\
x &> 5.
\end{aligned}$$

Então, $5 < x < 7$. Mas, se x não for o maior lado, teremos

$$\begin{aligned}
4^2 &> 3^2 + x^2 \\
x^2 &< 7 \\
x &< \sqrt{7}
\end{aligned}$$

Portanto, obtemos $1 < x < \sqrt{7}$. Resposta na letra **C**.

[1]Catetos medido 3 e 4 e hipotenusa medindo 5, esse é o triângulo retângulo com menores medidas inteiras para os lados.

4.

a) Pela lei dos senos, temos que:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} &= \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} \\
\frac{4}{\operatorname{sen}30^\circ} &= \frac{8}{\operatorname{sen}\beta} \\
\operatorname{sen}\beta &= 1.
\end{aligned}$$

b) Pela lei dos senos, temos que:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{2}}{\operatorname{sen}\alpha} &= \frac{2}{\operatorname{sen}45^\circ} \\
\operatorname{sen}\alpha &= \frac{1}{2} \\
\alpha &= 30^\circ.
\end{aligned}$$

Portanto, como $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, então $\gamma = 105^\circ$.

c) Pela lei dos senos, temos que:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{3}}{\operatorname{sen}\alpha} &= \frac{10}{\operatorname{sen}\gamma} \\
\frac{\sqrt{3}}{\operatorname{sen}\alpha} &= \frac{10}{\frac{\sqrt{3}}{3}} \\
\operatorname{sen}\alpha &= \frac{1}{10}.
\end{aligned}$$

Pela fórmula fundamental, ficamos com

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha &= 1 \\
\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \cos^2\alpha &= 1 \\
\cos^2\alpha &= 1 - \frac{1}{100} \\
\cos\alpha &= \sqrt{\frac{99}{100}} = \frac{3\sqrt{11}}{10}.
\end{aligned}$$

5. Pela lei dos senos, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{5\sqrt{2}}{\operatorname{sen}45^\circ} &= \frac{AC}{\operatorname{sen}30^\circ} \\
\frac{5\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} &= \frac{AC}{\frac{1}{2}} \\
AC &= 5 \text{ cm.}
\end{aligned}$$

6. Da lei dos senos, temos que

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = 2R,$$

sendo R o raio da circunferência circunscrita ao $\triangle ABC$. Daí, $\dfrac{10}{\operatorname{sen}60^\circ} = 2R$ e $R = \dfrac{10\sqrt{3}}{3}$.

7. Seja A o ponto em que o navio se encontra no primeiro momento, B o do segundo, C um ponto qualquer da trajetória do navio e F o do farol. Da interpretação do enunciado, concluímos que $F\hat{A}B = 30°$, $AB = 20$ milhas, $F\hat{B}C = 75°$ e $BF = d$ milhas. Podemos concluir que $B\hat{F}A = 45°$ e, pela lei de senos, ficaremos com:

$$\begin{aligned} \frac{d}{\text{sen}\,30°} &= \frac{20}{\text{sen}\,45°} \\ \frac{d}{1/2} &= \frac{20}{\sqrt{2}/2} \\ d &= \frac{20}{\sqrt{2}} \\ d &= \frac{20}{1,4} \\ d &\cong 14,3 \text{ milhas.} \end{aligned}$$

8. Seja α o menor ângulo interno. Ele será o oposto ao lado de medida 5 e, aplicando a lei dos cossenos, teremos

$$\begin{aligned} 5^2 &= 7^2 + 8^2 - 2\cdot 7\cdot 8\cdot \cos\alpha \\ -\cos\alpha &= \frac{25-49-64}{2\cdot 7\cdot 8} \\ \cos\alpha &= \frac{11}{14}. \end{aligned}$$

Aplicando a fórmula fundamental, obteremos

$$\begin{aligned} \text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha &= 1 \\ \text{sen}^2\alpha + \left(\frac{11}{14}\right)^2 &= 1 \\ \text{sen}\,\alpha &= \frac{5\sqrt{3}}{14}. \end{aligned}$$

9. Da lei dos senos, temos que

$$\begin{aligned} \frac{8}{\text{sen}\,\hat{B}} &= \frac{6}{\text{sen}\,30°} \\ \text{sen}\,\hat{B} &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

10. (Extraído do vestibular do MACK SP)
Observe que $B\hat{C}A = 45°$ e, aplicando a lei dos senos, teremos

$$\begin{aligned} \frac{AB}{\text{sen}\,45°} &= \frac{12}{\text{sen}\,30°} \\ AB &= 12\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Após o uso da escala, $AB = 120000\sqrt{2}$ cm ou $AB \cong 1,7$ km, que está na letra **E**.

11. O maior ângulo do triângulo é o oposto ao maior lado, chame-o de θ, e o seu lado correspondente será o de medida 6. Aplicando a Lei dos Cossenos, temos

$$6^2 = 3^2 + 4^2 - 2\cdot 3\cdot 4\cos\theta.$$

Consequentemente $\cos\theta = -\dfrac{11}{24}$ e a resposta é a letra **B**.

12.

a) O maior ângulo do triângulo é o oposto ao maior lado, chame-o de β, e o seu lado correspondente será o de medida 6. Aplicando a Lei dos Cossenos, temos

$$6^2 = 5^2 + 4^2 - 2\cdot 5\cdot 4\cos\beta.$$

Assim, $\cos\beta = \dfrac{1}{8}$.

b) O menor ângulo do triângulo é o oposto ao menor lado. Chamando-o de γ, o seu lado correspondente será o de medida 7. Aplicando a Lei dos Cossenos, temos

$$7^2 = 10^2 + 8^2 - 2\cdot 10\cdot 8\cos\gamma.$$

Assim, chegaremos a $\cos\gamma = \dfrac{23}{32}$.

c) Observe que esses lados não formam um triângulo, pois, pela desigualdade triangular deveríamos ter $a < b + c$ e na questão $15 = 10 + 5$.

13. (Extraído do vestibular da UECE)
Sejam os lados do triângulo iguais a $x-1$, x e $x+1$ e os respectivos ângulos iguais a α, β e 2α. Interpretando o enunciado e aplicando a lei dos senos, temos que

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{\text{sen}\,\alpha} &= \frac{x+1}{\text{sen}(2\alpha)} \\ \cos\alpha &= \frac{x+1}{2x-2}. \end{aligned}$$

Agora, aplicando a lei dos cossenos, obteremos:

$$\begin{aligned} (x-1)^2 &= x^2 + (x+1)^2 - 2\cdot x\cdot (x+1)\cdot\cos\alpha \\ (x-1)^2 &= x^2 + (x+1)^2 - 2\cdot x\cdot (x+1)\cdot \frac{x+1}{2x-2} \\ x^2 - 2x + 1 &= x^2 + x^2 + 2x + 1 - \frac{x\cdot (x+1)^2}{x-1} \\ x^2 + 4x &= \frac{x\cdot(x+1)^2}{x-1} \\ (x+4) &= \frac{(x+1)^2}{x-1} \\ (x+4)(x-1) &= x^2 + 2x + 1 \\ x^2 + 3x - 4 &= x^2 + 2x + 1 \\ x &= 5. \end{aligned}$$

Assim, o menor lado mede $x - 1 = 4$ m.

14. (Adaptado do vestibular da FUVEST SP)
Da lei dos senos, temos que

$$\frac{AC}{\text{sen}\,30°} = 2\cdot 3$$

e daí $AC = 3\ cm$.

15. Observe que, pela lei dos cossenos, obtemos

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos B\hat{A}C \\ 9^2 &= 5^2+10^2-2\cdot 5\cdot 10\cdot\cos B\hat{A}C \\ \cos B\hat{A}C &= \frac{11}{25}. \end{aligned}$$

Agora, Sendo BM a mediana relativa a AC, teremos $AM = 5$, $B\hat{A}C = B\hat{A}M$ e, pela lei dos cossenos, teremos

$$\begin{aligned} BM^2 &= AB^2 + AM^2 - 2\cdot AB\cdot AMC\cdot\cos B\hat{A}M \\ BM^2 &= 5^2+5^2-2\cdot 5\cdot 5\cdot\frac{11}{25} \\ BM &= \sqrt{28} \;=\; 2\sqrt{7}\text{ cm.} \end{aligned}$$

16. Denotemos $AD = BC$ por x e $AB = CD$ por y. Pela lei dos cossenos, temos

$$\begin{aligned} AC^2 &= x^2+y^2-2\cdot x\cdot y\cos(180^\circ-\theta) \\ AC^2 &= x^2+y^2-2\cdot x\cdot y(-\cos(\theta)) \\ AC^2 &= x^2+y^2+2\cdot x\cdot y\cos(\theta) \end{aligned}$$

e

$$BD^2 = x^2+y^2-2\cdot x\cdot y\cos(\theta),$$

ou seja, $AC > BD$. Seguindo com os valores do enunciado, obteremos

$$\begin{aligned} (2x)^2 &= x^2+(x\sqrt{2})^2+2\cdot x\cdot x\sqrt{2}\cos(\theta) \\ 4x^2 &= x^2+2x^2+2\sqrt{2}x^2\cdot\cos\theta \\ 4 &= 1+2+2\sqrt{2}\cdot\cos\theta \\ 1 &= 2\sqrt{2}\cdot\cos\theta \\ \cos\theta &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Assim, $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{1-\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Ficamos com o valor positivo do seno, pois $\theta < 180^\circ$.

17. (Extraído do vestibular da UFU MG)
Observe que $A\hat{D}C = 60^\circ$ e, como $AB = AC$, temos $A\hat{C}D = 45^\circ$. Pela lei dos senos, temos

$$\begin{aligned} \frac{AC}{\operatorname{sen}60^\circ} &= \frac{AD}{\operatorname{sen}45^\circ} \\ AD &= \sqrt{\frac{3}{2}} \;=\; \frac{\sqrt{6}}{2}\text{ cm.} \end{aligned}$$

18. (Extraído do vestibular da FUVEST SP)
Pela lei dos cossenos, temos

$$\begin{aligned} BD^2 &= \sqrt{3}^2+2^2-2\cdot\sqrt{3}\cdot 2\cdot\cos 30^\circ \\ BD &= 1\text{ cm.} \end{aligned}$$

Além disso, como $BD = DC$, temos $AC = AD + DC = 3$ cm e, pela lei dos cossenos, chegamos a

$$\begin{aligned} BC^2 &= \sqrt{3}^2+3^2-2\cdot\sqrt{3}\cdot 3\cdot\cos 30^\circ \\ BD &= \sqrt{3}\text{ cm.} \end{aligned}$$

19. (Extraído do vestibular da UNB)
Da lei dos senos, temos que

$$\frac{AB}{\operatorname{sen}30^\circ} = 2\cdot 14,\text{ daí } AB = 14\text{ cm.}$$

20. (Extraído do vestibular da UNIFOR CE) Como $B\hat{A}C$ é um ângulo inscrito na circunferência de centro O, $B\hat{A}C = \frac{B\hat{D}C}{2} = 60^\circ$. Pela lei dos cossenos, temos

$$\begin{aligned} BC^2 &= 6^2+9^2-2\cdot 6\cdot 9\cdot\cos 60^\circ \\ BC &= \sqrt{63} \\ BC &\cong 7,9 \end{aligned}$$

Portanto, $AB + BC + CA \cong 22,9$.

21. (Extraído do vestibular do ITA)
Observe que se a hipotenusa BC mede x, então $AB = \frac{x}{2}$. Agora, no $\triangle ADB$, como D é incentro, teremos $D\hat{A}B = 45^\circ$, $A\hat{B}D = 30^\circ$ e $A\hat{D}B = 105^\circ$. Como $\operatorname{sen}105^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, pela lei dos senos, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{AB}{\operatorname{sen}105^\circ} &= \frac{BD}{\operatorname{sen}45^\circ} \\ \frac{x}{2} &= \frac{\operatorname{sen}105^\circ}{\operatorname{sen}45^\circ} \\ \frac{x}{2} &= \frac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ x &= 1+\sqrt{3}\text{ cm.} \end{aligned}$$

22. (Extraído do vestibular do UFBA)
Observe que $A\hat{B}D = 15^\circ$ e, pela lei dos senos, chegamos a

$$\begin{aligned} \frac{BD}{\operatorname{sen}45^\circ} &= \frac{AD}{\operatorname{sen}15^\circ} \\ \frac{x}{5} &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} \\ x &= \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} \\ x &= \frac{10}{\sqrt{3}-1} \\ x &= 5(\sqrt{3}+1)\text{ u.c..} \end{aligned}$$

Agora, pela lei dos cossenos, obtemos

$$\begin{aligned} BC^2 &= 10^2+(5(\sqrt{3}+1))^2-2\cdot 10\cdot 5(\sqrt{3}+1)\cdot\cos 60^\circ \\ BC &= \sqrt{150} \\ &= 5\sqrt{6}\text{ u.c..} \end{aligned}$$

23. (Extraído do vestibular do UNB)
Observe que se $CD = x$, então $AC = x\sqrt{3}$. Agora, no $\triangle ABC$ teremos $A\hat{C}B = 45°$, pela lei dos senos, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{AB}{\operatorname{sen} 45°} &= \frac{AC}{\operatorname{sen} 60°} \\ x &= \frac{30}{\sqrt{2}} \text{ metros.} \end{aligned}$$

Dividindo o resultado por $\sqrt{2}$, obtemos $\dfrac{x}{\sqrt{2}} = 15$.

24.

a) (Extraído do material do PROFMAT)
Usando a lei dos senos, temos que

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = 2R$$

o que implica

$$\begin{aligned} \frac{a+b+c}{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\gamma} &= 2R \\ \frac{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\gamma}{a+b+c} &= \frac{1}{2R} \\ \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\gamma &= \frac{\frac{a+b+c}{2}}{R} \\ \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\gamma &= \frac{p}{R} \end{aligned}$$

■

b) (Extraído da Olimpíada de Matemática da Rússia)
Como os senos são racionais, a sua divisão é racional. Agora, usando a lei dos senos temos que:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

Isso implica que

$$\begin{aligned} \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} &= \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} \\ \frac{b}{a} &= \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha} \end{aligned}$$

Ou seja, $\dfrac{b}{a} \in \mathbb{Q}$, analogamente $\dfrac{c}{a} \in \mathbb{Q}$. Agora pela lei dos cossenos, obteremos

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ 1 &= \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} - 2 \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{a} \cdot \cos\alpha \\ \cos\alpha &= \frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 - \left(\frac{c}{a}\right)^2}{2 \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{a}}. \end{aligned}$$

Portanto, como o numerador e denominador são racionais,

$$\cos\alpha \in \mathbb{Q}.$$

Analogamente, $\cos\beta \in \mathbb{Q}$ e $\cos\gamma \in \mathbb{Q}$. ■

25. (Extraído do vestibular da FUVEST SP)
Pelo Teorema de Pitágoras, podemos calcular o valor x de cada diagonal fazendo

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{1+\sqrt{3}}\right)^2 + 1^2 &= x^2 \\ x &= \sqrt{2+\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Agora, na base também há um triângulo equilátero formado pelas bases do livro e seus extremos. Observe que podemos formar um triângulo entre as diagonais das páginas e seus extremos e, pela lei dos cossenos,

$$\begin{aligned} 1^2 &= 2\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2 - 2 \cdot \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \cos\alpha \\ \cos\alpha &= \frac{2\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2 - 1}{2\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2} \\ &= \frac{3+2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Portanto, $\alpha = 30°$.

26. (Extraído da Olimpíada Paraibana de Matemática)
Sejam $B\hat{A}C = \theta$, $A\hat{B}C = 2\theta$ e $AC = x$. Pela lei dos senos, temos que

$$\begin{aligned} \frac{x}{\operatorname{sen} 2\theta} &= \frac{0,5}{\operatorname{sen}\theta} \\ \frac{x}{2\operatorname{sen}\theta\cos\theta} &= \frac{0,5}{\operatorname{sen}\theta} \\ x &= \cos\theta. \end{aligned}$$

Agora, pela lei dos cossenos, teremos

$$\begin{aligned} 0,5^2 &= 1^2 + x^2 - 2 \cdot 1 \cdot x \cdot \cos\theta \\ x &= \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Como $AC^2 + BC^2 = AB^2$, pela recíproca do Teorema de Pitágoras, $\triangle ABC$ é retângulo em C, e sua área será

$$S = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8} \text{ cm}^2.$$

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com