MA093 – Matemática básica 2

Área de triângulos. Lei dos senos

Francisco A. M. Gomes

UNICAMP - IMECC

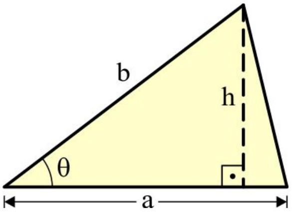
Setembro de 2018

Tópicos importantes

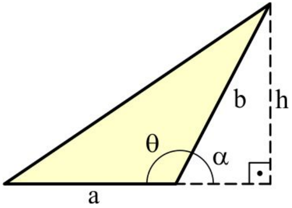
O objetivo dessa aula é investigar

1. Área de triângulos.
2. A lei dos senos.
3. Resolução de triângulos: os casos ALA, LAA e LLA.

Área de um triângulo



- $A = \frac{1}{2}ah$
- $sen(\theta) = h/b \quad \Rightarrow \quad h = b\,sen(\theta)$
- $A = \frac{1}{2}ab\,sen(\theta)$



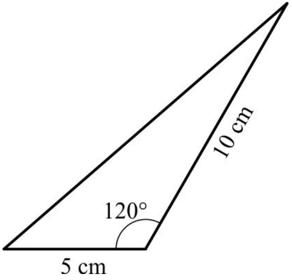
- $A = \frac{1}{2}ah$
- $sen(\alpha) = h/b \quad \Rightarrow \quad h = b\,sen(\alpha)$
- $sen(\alpha) = sen(\theta) \quad \Rightarrow \quad h = b\,sen(\theta)$
- $A = \frac{1}{2}ab\,sen(\theta)$.

Área de um triângulo

Teorema

Dadas as medidas a e b de dois lados de um triângulo, bem como a medida θ do ângulo entre elas, a área do triângulo é dada por

$$A = \frac{1}{2} ab\, sen(\theta)$$

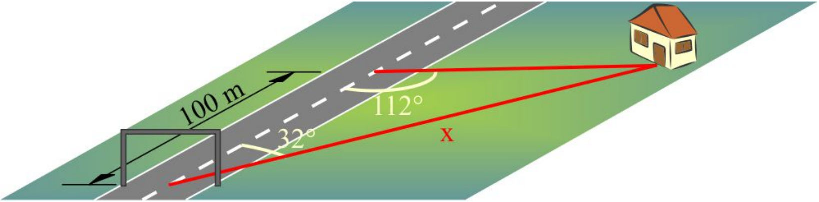


Exemplo

Determine a área do triângulo ao lado.

- $A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10 \cdot sen(120^\circ)$
- $A = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $A = \frac{25}{2}\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

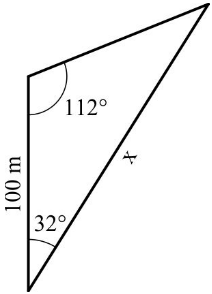
Um problema simples



Distância da porteira à casa

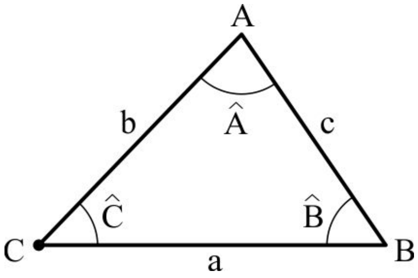
Um topógrafo situado na porteira de uma fazenda descobriu que havia um ângulo de 32° entre a estrada e o segmento que ligava a porteira a uma casa. Ele também verificou que, andando 100 m pela estrada, o ângulo entre esta e a casa mudava para 112°. Com base nesses dados, determine a distância entre a porteira e a casa.

Representação matemática do problema (caso ALA)



- Temos um triângulo escaleno.
- Conhecemos dois ângulos, bem como o lado entre eles (caso ALA).
- Queremos determinar a medida de um dos outros dois lados, x.

A lei dos senos

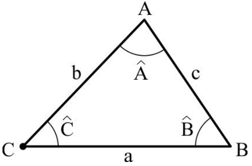


Teorema

Dado um triângulo ABC qualquer, temos

$$\frac{a}{sen(\hat{A})} = \frac{b}{sen(\hat{B})} = \frac{c}{sen(\hat{C})}$$

Demonstração da lei dos senos



Área do triângulo

$$A = \frac{1}{2}ab\,sen(\hat{C}) = \frac{1}{2}ac\,sen(\hat{B}) = \frac{1}{2}bc\,sen(\hat{A})$$

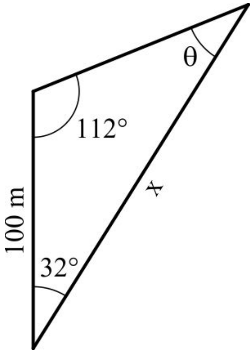
Das 2 primeiras fórmulas, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}ab\,sen(\hat{C}) &= \frac{1}{2}ac\,sen(\hat{B}) \\ b\,sen(\hat{C}) &= c\,sen(\hat{B}) \\ \frac{b}{sen(\hat{B})} &= \frac{c}{sen(\hat{C})} \end{aligned}$$

Das 2 últimas fórmulas, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}ac\,sen(\hat{B}) &= \frac{1}{2}bc\,sen(\hat{A}) \\ a\,sen(\hat{B}) &= b\,sen(\hat{A}) \\ \frac{a}{sen(\hat{A})} &= \frac{b}{sen(\hat{B})} \end{aligned}$$

Voltando ao problema da fazenda



- $\theta = 180 - 112 - 32 = 36°$
- Aplicando a lei dos senos:

$$\frac{100}{sen(36°)} = \frac{x}{sen(112°)}$$

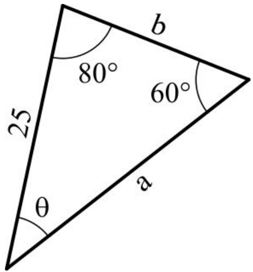
- Logo,

$$x = \frac{100 \cdot sen(112°)}{sen(36°)} \approx 157,74 \text{ m}$$

Caso LAA

Problema

Determine a e b na figura abaixo.



$$\frac{25}{sen(60^\circ)} = \frac{a}{sen(80^\circ)}$$

$$a = \frac{25 \cdot sen(80^\circ)}{sen(60^\circ)} \approx 28,43$$

$$\theta = 180 - 80 - 60 = 40^\circ$$

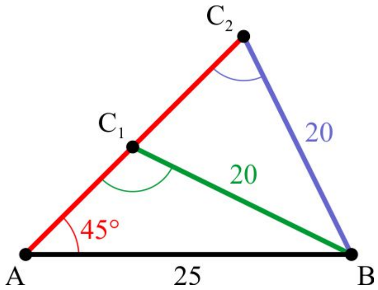
$$\frac{25}{sen(60^\circ)} = \frac{b}{sen(40^\circ)}$$

$$b = \frac{25 \cdot sen(40^\circ)}{sen(60^\circ)} \approx 18,56$$

Caso LLA com duas soluções

Problema

Determine o ângulo $\hat{C}$ de um triângulo ABC, sabendo que $\hat{A} = 45°$, $\overline{AB} = 25$ e $\overline{BC} = 20$.



$$\frac{25}{sen(\hat{C})} = \frac{20}{sen(45°)}$$

$$sen(\hat{C}) = \frac{25\, sen(45°)}{20} \approx 0,88388$$

$$\hat{C}_2 \approx arcsen(0,88388) \approx 62,11°$$

Mas $-90° \leq arcsen(\hat{C}) \leq -90°$.

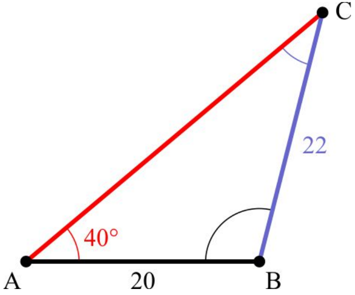
Logo, também temos

$$\hat{C}_1 \approx 180° - 62,11° = 117,89°$$

Caso LLA com uma solução

Problema

Determine o ângulo $\hat{C}$ e o lado $\overline{AC}$ de um triângulo ABC, sabendo que $\hat{A} = 40^\circ$, $\overline{AB} = 20$ e $\overline{BC} = 22$.



$$\frac{20}{sen(\hat{C})} = \frac{22}{sen(40^\circ)}$$

$$sen(\hat{C}) = \frac{20\ sen(40^\circ)}{22} \approx 0,58435$$

$$\hat{C} \approx arcsen(0,58435) \approx 35,76^\circ$$

$$(\cancel{\hat{C} \approx 180 - 35,76 = 144,24^\circ})$$

$$\hat{B} \approx 180 - 40 - 35,76 = 104,24^\circ$$

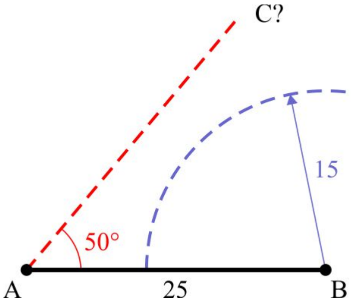
$$\frac{\overline{AC}}{sen(104,24^\circ)} = \frac{22}{sen(40^\circ)}$$

$$\overline{AC} = \frac{22\ sen(104,24^\circ)}{sen(40^\circ)} \approx 33,17$$

Caso LLA sem solução

Problema

Determine o ângulo $\hat{C}$ de um triângulo ABC, sabendo que $\hat{A} = 50°$, $\overline{AB} = 25$ e $\overline{BC} = 15$.



$$\frac{25}{sen(\hat{C})} = \frac{15}{sen(50°)}$$

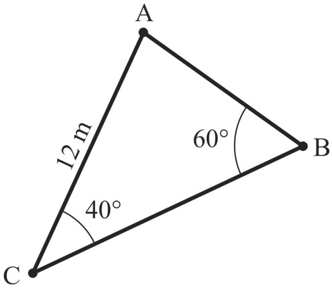
$$sen(\hat{C}) = \frac{25\,sen(50°)}{15} \approx 1,2767$$

Não há $\hat{C}$ compatível

Exercício 1

Problema

Um terreno tem o formato do triângulo ABC mostrado abaixo. Determine o comprimento do lado BC, bem como a área do terreno.

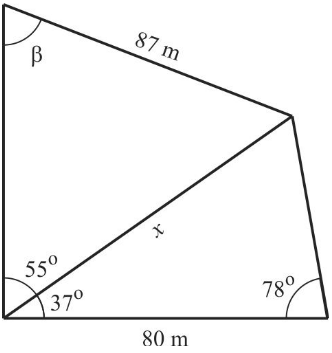


$13,65 \text{ m}; \quad 52,63 \text{ m}^2$

Exercício 2

Problema

Determine a medida do lado x, bem como a medida do ângulo β da figura.

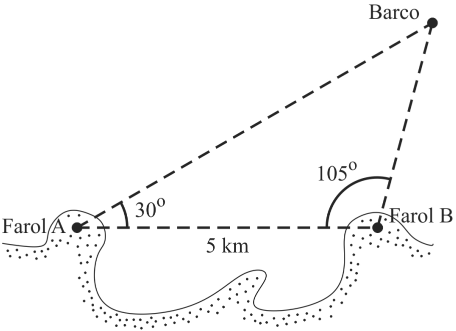


$86,34$ m; $54,59°$

Exercício 3

Problema

Do alto de seus faróis, que distam 5 km um do outro, dois faroleiros avistam um barco no mar, como mostra a figura abaixo. Determine a distância do barco a cada farol.

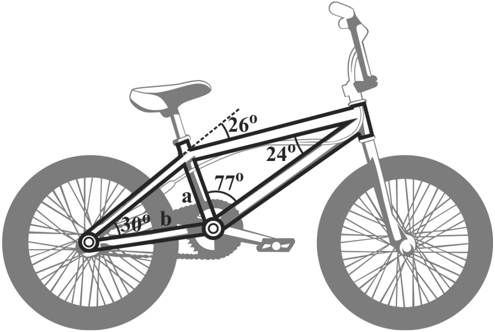


6,83 km;   3,54 km

Exercício 4

Problema

O quadro de uma bicicleta é mostrado abaixo. Sabendo que *a* mede 22 cm, calcule o comprimento *b* da barra que liga o eixo da roda ao eixo dos pedais.

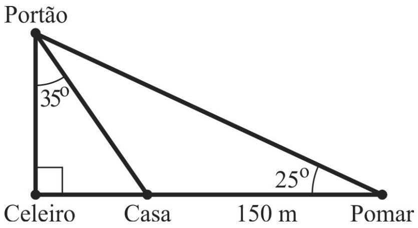


42,5 cm

Exercício 5

Problema

Em um sítio, o pomar fica a 150 m da casa, como mostra a figura. Determine a distância da casa ao portão e ao celeiro.

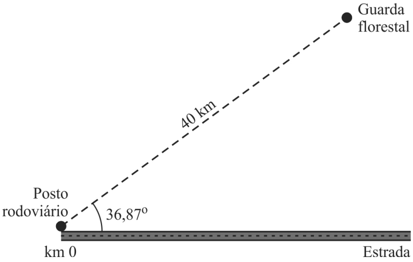


126,79 m; 72,72 m

Exercício 6

Problema

Um posto rodoviário está localizado no quilômetro zero de uma estrada. A 40 km do posto, há uma estação da guarda florestal. Pretende-se instalar uma antena de rádio em um ponto da estrada, de modo que as distâncias dessa antena ao posto e à estação sejam iguais. Em que quilômetro da estrada a antena deve ser instalada?



No quilômetro 25