ÁREA DO CONHECIMENTO: MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

BONJORNO
GIOVANNI JR
FELIPE FUGITA

MANUAL DO PROFESSOR

MATEMÁTICA POR TODA PARTE

$1^{\underline{o}}$ ANO
ENSINO MÉDIO

CÓDIGO DA COLEÇÃO
0039P26010120281 4
PNLD EM 2026-2029 • CATEGORIA 1
Material de divulgação
Versão em processo de avaliação

FTD

MANUAL DO PROFESSOR

MATEMÁTICA POR TODA PARTE

JOSÉ ROBERTO BONJORNO

Licenciado em Pedagogia pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras "Professor Carlos Pasquale".

Bacharel e licenciado em Física pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP).

Professor de Matemática e Física em escolas do Ensino Fundamental e Médio desde 1973.

JOSÉ RUY GIOVANNI JÚNIOR

Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP).

Professor e assessor de Matemática em escolas do Ensino Fundamental e Médio desde 1985.

FELIPE FUGITA

Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP).

Mestre em Matemática pela Universidade Federal do ABC (UFABC).

Coordenador e professor de Matemática do Ensino Fundamental e Médio.

Autor de obras didáticas de Matemática do Ensino Fundamental e Médio.

1º ANO
ENSINO MÉDIO

ÁREA DO CONHECIMENTO: MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

FTD

1ª edição
São Paulo – 2024

Matemática Por toda parte – Matemática – 1º ano (Ensino Médio)

Direção-geral Ricardo Tavares de Oliveira
Direção de conteúdo e negócios Cayube Galas
Direção editorial adjunta Luiz Tonolli
Gerência editorial Roberto Henrique Lopes da Silva e Nubia de Cassia de M. Andrade e Silva
Edição Cibeli de Oliveira Chibante Bueno (coord.)
Alessandra Maria Rodrigues da Silva, Bianca Cristina Fratelli, Emike Luzia Pereira Correia, Janaina Bezerra Pereira, Juliana Montagner, Marceli Megumi Hamazi Iwai, Rizia Sales Carneiro, Wagner Jose Razvickas Filho
Preparação e revisão Maria Clara Paes (coord.)
Ana Carolina Rollemberg, Cintia R. M. Salles, Denise Morgado, Desirée Araújo, Eloise Melero, Kátia Cardoso, Márcia Pessoa, Maura Loria, Veridiana Maenaka, Yara Affonso
Produção de conteúdo digital João Paulo Bortoluci
Gerência de produção e arte Ricardo Borges
Design Andréa Dellamagna (coord.)
Sergio Cândido (criação), Ana Carolina Orsolin, Andréa Lasserre
Projeto de capa Sergio Cândido
Imagem de capa ADAM GAULT/SPL/GETTY IMAGES
Arte e produção Isabel Cristina Corandin Marques (coord.)
André Gomes Vitale, Débora Jóia, Jorge Katsumata, Kleber B. Cavalcante, Rodrigo Bastos Marchini, Maria Paula Santo Siqueira (Assist.)
Diagramação WYM Design
Coordenação de imagens e textos Elaine Bueno Koga
Licenciamento de textos Erica Brambilla
Iconografia Karine Ribeiro de Oliveira
Leticia dos Santos Domingos (trat. imagens)
Ilustrações Bentinho, Editoria de arte, Selma Caparroz, Sergio Lima

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Fugita, Felipe
Por toda parte matemática : 1º ano : ensino médio : volume I / Felipe Fugita, José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Júnior. – 1. ed. – São Paulo : FTD, 2024.

Componente curricular: Matemática.
Área do conhecimento : Matemática e suas tecnologias.
ISBN 978-85-96-04638-1 (livro do estudante)
ISBN 978-85-96-04639-8 (manual do professor)
ISBN 978-85-96-04644-2 (livro do estudante HTML 5)
ISBN 978-85-96-04645-9 (manual do professor HTML 5)

1. Matemática (Ensino médio) I. Bonjorno, José Roberto. II. Giovanni Júnior, José Ruy. III. Título.

24-227746 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino médio 510.7

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

EDITORA FTD.
Rua Rui Barbosa, 156 – Bela Vista – São Paulo – SP
CEP 01326-010 – Tel. 0800 772 2300
Caixa Postal 65149 – CEP da Caixa Postal 01390-970
www.ftd.com.br
central.relacionamento@ftd.com.br

Em respeito ao meio ambiente, as folhas deste livro foram produzidas com fibras obtidas de árvores de florestas plantadas, com origem certificada.

Impresso no Parque Gráfico da Editora FTD
CNPJ 61.186.490/0016-33
Avenida Antonio Bardella, 300
Guarulhos-SP – CEP 07220-020
Tel. (11) 3545-8600 e Fax (11) 2412-5375

APRESENTAÇÃO

Caro estudante,

Este livro tem como objetivo estimular você a compreender a Matemática para utilizá-la no seu dia a dia e na continuação dos seus estudos. Além disso, busca favorecer o desenvolvimento de competências e habilidades que o auxiliem a ser um cidadão crítico, criativo, autônomo e responsável. Na sociedade contemporânea, é muito importante que você seja capaz de ler a realidade, enfrentar novos desafios e tomar decisões éticas e fundamentadas.

Além dos conteúdos matemáticos específicos, o livro ainda traz possibilidades de explorar o uso de recursos tecnológicos, como *softwares* de Geometria dinâmica e planilhas eletrônicas, e de refletir sobre as relações entre a Matemática e outras áreas do conhecimento.

Desejamos que essa obra contribua para que você reflita e interfira na sociedade em que está inserido com base em conhecimentos cientificamente fundamentados.

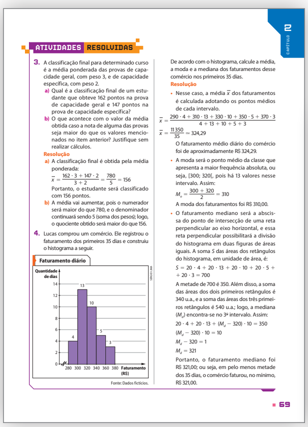
Bons estudos!

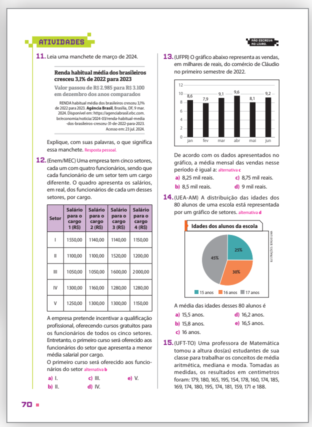
Os Autores

CONHEÇA SEU LIVRO

Abertura de capítulo

Nas páginas de abertura, você é convidado a observar textos e/ou imagens relacionados ao conteúdo do capítulo e a responder a questões cujo objetivo é proporcionar um momento de reflexão sobre o contexto apresentado e os conteúdos já estudados.





Atividades resolvidas e Atividades

As **atividades resolvidas** apresentam uma forma organizada de resolução e devem ser um momento de reflexão e de busca por outras formas de resolução. Já as **atividades** são variadas e visam à prática do conteúdo em estudo. Há também oportunidades de elaboração, análise de atividades e compartilhamento com seus colegas e o professor.

Fórum

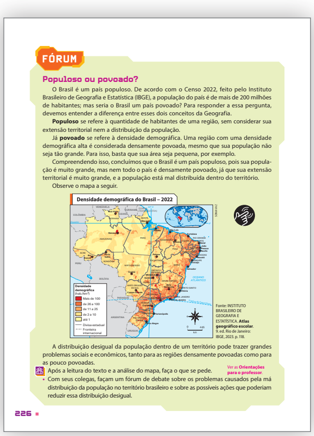
É uma oportunidade para trocar e compartilhar ideias com seus colegas e o professor, a partir de temas contemporâneos.

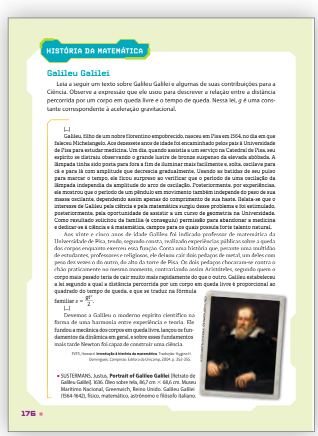
História da Matemática

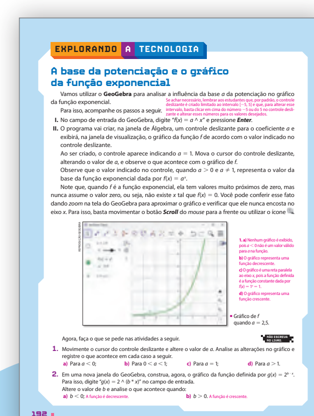
Nesta seção, você vai ter a oportunidade de ler textos sobre a história da Matemática relacionados aos conteúdos que estão sendo estudados no capítulo.

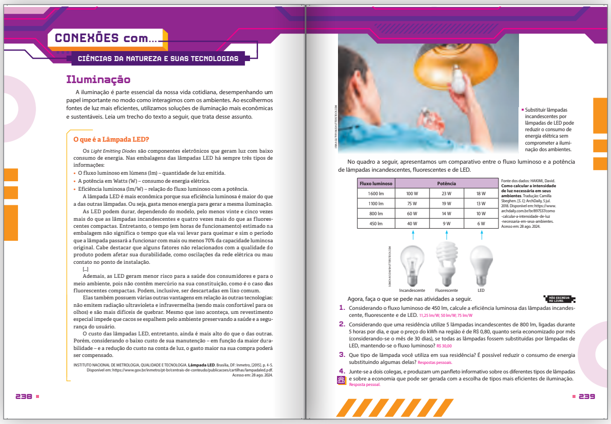
Explorando a tecnologia

Nesta seção, você vai ter a oportunidade de aprofundar seus conhecimentos matemáticos e desenvolver o pensamento computacional, com ou sem o auxílio de tecnologias digitais.



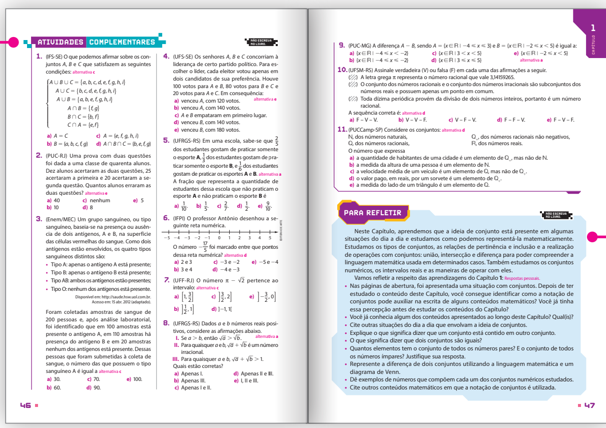






Conexão com...

Nesta seção, você vai explorar temas diversos e interdisciplinares relacionados ao conteúdo em estudo, com o objetivo de desenvolver a competência leitora, a cidadania e o senso crítico, por meio de atividades investigativas, pesquisas e discussão com os colegas.



Atividades complementares

Nesta seção, você vai encontrar questões de exames oficiais relacionadas aos conteúdos estudados. É uma oportunidade para verificar seu conhecimento em relação ao que foi abordado no capítulo.

Para refletir

Neste momento, você vai ter a oportunidade de refletir sobre o que estudou em cada um dos capítulos e fazer uma autoavaliação de seu desempenho.

Boxes

Glossário

Explicação de termos matemáticos ou da língua portuguesa.

Pense e responda

Momentos que valorizam, por meio de questões, sua participação na construção do conhecimento, incentivando você a interagir, investigar e refletir sobre o conteúdo em estudo.

Para assistir

Para ler

Para acessar

Para ouvir

Sugestões de livros, *links*, filmes, *podcasts* etc. a fim de complementar o conteúdo do livro.

Saiba que...

Apresentação de uma dica interessante ou informação relevante a respeito do conteúdo.

OBJETOS EDUCACIONAIS DIGITAIS

Os ícones a seguir identificam os diferentes tipos de objetos educacionais digitais presentes neste volume. Esses materiais digitais apresentam assuntos complementares ao conteúdo trabalhado na obra, ampliando a aprendizagem.

VÍDEO

PODCAST

CARROSSEL DE IMAGENS

INFOGRÁFICO CLICÁVEL

MAPA CLICÁVEL

ÍCONES

Atividades a serem realizadas com o auxílio de uma calculadora.

Atividades em duplas.

Atividades em grupos.

Os *sites* indicados nesta obra podem apresentar imagens e eventuais textos publicitários junto ao conteúdo de referência, os quais não condizem com o objetivo didático da coleção. Não há controle sobre esses conteúdos, pois eles estão estritamente relacionados ao histórico de pesquisa de cada usuário e à dinâmica dos meios digitais.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 5 Função exponencial

CAPÍTULO 6 Grandezas e medidas

Objetos Educacionais Digitais

CAPÍTULO 1

CONJUNTOS

A ideia de conjunto está presente em várias situações do dia a dia. Ao organizar a lista de amigos para uma festa, ao reunir o material escolar e ao formar um time, por exemplo, estamos constituindo conjuntos.

Neste Capítulo, estudaremos os conjuntos do ponto de vista matemático, analisando algumas de suas propriedades e operações, além de retomar os conjuntos numéricos já estudados no Ensino Fundamental e ampliar os conteúdos associados a esses conjuntos. Esses conteúdos auxiliam na compreensão da linguagem utilizada para expressar conceitos matemáticos e serão utilizados na apresentação de outros conteúdos.

CHICO PEIXOTO/EURASIA SPORT IMAGES/ GETTY IMAGES

■ Seleção brasileira de futebol feminino durante jogo contra a Jamaica na Arena Pernambuco, São Lourenço da Mata. Fotografia de 2024.

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Agora, reúna-se a um colega, e façam o que se pede em cada questão.

1. Citem outros exemplos em que a ideia de conjunto esteja presente no dia a dia de vocês. Resposta pessoal. Exemplo de resposta: Conjunto de potes para guardar alimentos, conjunto de brinquedos etc.
2. O que são conjuntos numéricos? Quais deles vocês conhecem? Escrevam um pequeno texto a respeito do assunto. Respostas pessoais. Espera-se que os estudantes relembrem o que já estudaram a respeito dos números naturais, inteiros e racionais no Ensino Fundamental.
3. Como vocês definiriam o que é um conjunto infinito? Escrevam com suas próprias palavras. Resposta pessoal.

Professor, apresentar o questionamento do primeiro parágrafo para a turma e deixar que os estudantes debatam por um tempo para que percebam facilidades e dificuldades de uma escrita e de outra. Incentivar que justifiquem suas respostas e, caso necessário, apresentar outros exemplos. Esse momento de discussão e investigação é importante para despertar o interesse no assunto a ser tratado, antes de prosseguir com o conteúdo.

Introdução

Você já parou para pensar em como escreveria uma simples conta de adição, como $2 + 3 = 5$, se não houvesse os símbolos "+" e "=" e os numerais "2", "3" e "5" para representar os números? Uma opção seria escrever na língua materna, que, no caso do português, seria: "dois mais três é igual a cinco".

Esses símbolos foram desenvolvidos e aprimorados ao longo do tempo, à medida que estudiosos da área perceberam a necessidade de tê-los para simplificar e condensar a escrita e para representar os conceitos, as definições e as propriedades matemáticas, mantendo, porém, a precisão e o rigor necessários.

Neste Capítulo, estudaremos a linguagem dos conjuntos, que é bastante útil ao tratar de diferentes assuntos, por exemplo, as funções, as relações entre entes geométricos (como ponto, reta e plano) e a lógica. Também estudaremos propriedades e operações que podem ser feitas nessa estrutura de conjuntos.

Saiba que...

Utilizamos a expressão "língua materna" relacionando-a ao português; é importante destacar que, para os estudantes surdos brasileiros, além do português, a Língua Brasileira de Sinais (Libras) também é considerada língua materna.

Conceitos iniciais

Um **conjunto** é uma coleção qualquer de objetos, e cada um deles é chamado de **elemento**. No exemplo apresentado na abertura deste Capítulo, cada jogadora é um elemento do conjunto time de futebol.

Representações de um conjunto

Geralmente, nomeamos os conjuntos utilizando letras maiúsculas (por exemplo: A, B, C, D, ..., X, Y, Z) e adotamos letras minúsculas para representar seus elementos (por exemplo: a, b, c, d, ..., x, y, z).

Um conjunto pode ser representado de várias maneiras. Por exemplo, podemos representar o conjunto A, formado pelas vogais do nosso alfabeto, dos seguintes modos:

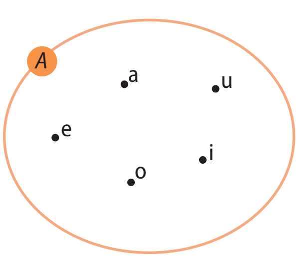
a) Os elementos do conjunto são colocados entre chaves e separados por vírgula ou ponto e vírgula:
$A = \{\text{a, e, i, o, u}\}$

b) Os elementos do conjunto são indicados por uma ou mais propriedades que os caracterizam:
$A = \{x \mid x \text{ é vogal do nosso alfabeto}\}$

Esse símbolo significa **tal que**.

Professor, se julgar necessário, comentar com os estudantes que os dois-pontos (:) ou o ponto e vírgula (;) também podem ser usados para representar as expressões "tal que" e "tais que".

c) Os elementos do conjunto são representados em um **diagrama de Venn**, como mostra a imagem.



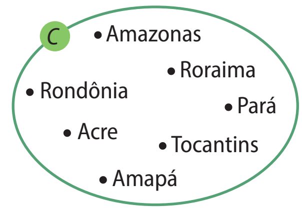
EDITORIA DE ARTE

Saiba que...

O diagrama de Venn foi desenvolvido pelo matemático inglês John Venn (1834-1923).

Observe outros exemplos de conjuntos:

- conjunto das consoantes da palavra "avião":
  $A = \{v\}$;
- conjunto dos números naturais pares:
  $B = \{b \mid b$ é um número natural par$\}$;
- conjunto dos estados da Região Norte:



EDITORIA DE ARTE

Para indicar que um elemento faz parte de determinado conjunto, usamos o símbolo $\in$ (**pertence**) e, para indicar que ele não faz parte, usamos o símbolo $\notin$ (**não pertence**). Por exemplo, dado o conjunto das vogais $A = \{a, e, i, o, u\}$, temos:

- $i \in A$ (lê-se: i pertence a A);
- $d \notin A$ (lê-se: d não pertence a A).

Pense e responda

Uma reta é formada por infinitos pontos. Como você escreveria, usando símbolos, que "um ponto A pertence a uma reta r"? $A \in r$

» Tipos de conjuntos

Quanto ao número de elementos, os conjuntos podem ser classificados em finitos ou infinitos.

Um conjunto é **finito** quando é possível contar seus elementos.

Quando dizemos "contar", significa que a contagem finaliza em algum número natural. Vamos retomar o exemplo do conjunto A das vogais de nosso alfabeto:

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

Ao contar os elementos do conjunto, chegamos até o número 5. Logo, esse conjunto é finito e tem cinco elementos. Utilizamos a notação $n(A)$ para indicar a **quantidade de elementos do conjunto** finito A. Nesse exemplo, temos $n(A) = 5$.

Um conjunto é **infinito** quando não é finito.

Ou seja, um conjunto é infinito quando não é possível contar todos os seus elementos e finalizar a contagem até certo número. Por exemplo, dado o conjunto B dos números naturais ímpares, temos:

$$B = \{1, 3, 5, 7, 9, ...\}$$

As reticências colocadas no começo ou no final representam a continuação infinita de elementos.

Saiba que...

As reticências também podem ser usadas entre dois elementos de um conjunto para indicar os elementos entre eles (sejam finitos ou infinitos). Por exemplo, o conjunto finito N dos números naturais de 1 a 90 pode ser representado por $N = \{1, 2, 3, 4, ..., 88, 89, 90\}$.

Um conjunto é **unitário** quando é formado por um único elemento.

Observe, a seguir, um exemplo de um conjunto unitário.

$$H = \{x \mid x \text{ é um número natural maior do que 6 e menor do que 8}\}$$

Como só existe um número natural maior do que 6 e menor do que 8, temos: $H = \{7\}$. Logo, H é um conjunto unitário.

O **conjunto vazio** é aquele que não possui elementos.

Pense e responda

Qual é o valor de $n(H)$? E o de $n(V)$?

$n(H) = 1$; $n(V) = 0$

Representamos um conjunto vazio por { } ou $\varnothing$. Por exemplo:

$$V = \{x \mid x \text{ é um número natural menor do que zero}\}$$

Como não existe número natural menor do que zero, o conjunto V é vazio. Logo, $V = \varnothing$.

Por definição, o conjunto vazio é um conjunto finito.

» Igualdade de conjuntos

Analisando os conjuntos A = {vogais da palavra "livro"} e $B = \{i, o\}$, observamos que eles possuem exatamente os mesmos elementos. Nesse caso, dizemos que A e B são iguais.

Agora, observe os conjuntos $C = \{1, 2, 3\}$ e $D = \{0, 1, 2, 3\}$. Como existe um elemento em D que não pertence a C, dizemos que C e D são diferentes.

Dois conjuntos A e B são **iguais** quando todos os elementos pertencentes a A também pertencem a B e todos os elementos pertencentes a B também pertencem a A. Indicamos $A = B$.

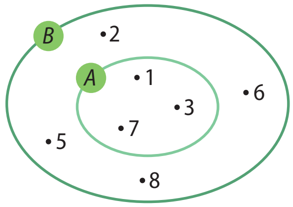
Dois conjuntos A e B são **diferentes** se, pelo menos, um dos elementos de um dos conjuntos não pertence ao outro. Indicamos $A \neq B$.

A ordem em que os elementos estão dispostos nos conjuntos não os diferencia. Por exemplo, os conjuntos $X = \{p, a, t, o\}$ e $W = \{a, o, t, p\}$ das letras da palavra "pato" têm os mesmos elementos, então $X = W$.

Da mesma maneira, os conjuntos $P = \{a, r, n, h\}$ e $Q = \{a, r, a, n, h, a\}$ das letras da palavra "aranha" também são iguais, ou seja, têm os mesmos elementos, pois elementos repetidos não diferenciam um conjunto de outro. Apesar de a palavra ter três letras "a", elas não precisam aparecer todas as vezes na representação do conjunto das letras que a compõem.

» Subconjuntos

Considerando os conjuntos $A = \{1, 3, 7\}$ e $B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8\}$, observamos que todo elemento do conjunto A também é elemento de B. Nesse caso, dizemos que A é um subconjunto de B. Observe a representação desses conjuntos por meio de um diagrama.



EDITORIA DE ARTE

De maneira geral:

Um conjunto A é **subconjunto** de um conjunto B quando todos os elementos de A também pertencem a B.

Quando um conjunto A é subconjunto de um conjunto B, temos uma **relação de inclusão** e dizemos que A **está contido** em B. Podemos dizer, também, que B **contém** A.

Indica-se:

$A \subset B$ (lê-se: A está contido em B)

Esse símbolo significa **está contido**.

$B \supset A$ (lê-se: B contém A)

Esse símbolo significa **contém**.

Observe alguns exemplos:

a) Sendo $A = \{1, 2\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3\}$, tem-se $A \subset B$.

b) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \supset \{3, 4, 5\}$

c) $\{4, 5, 6\} \subset \{4, 5, 6\}$

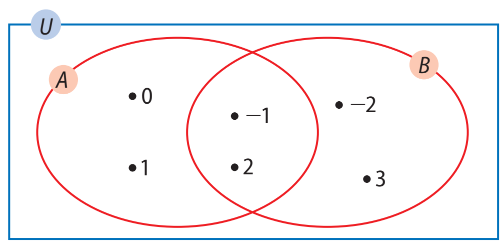
d) $\{2, 4, 6, 8\} \supset \{8\}$

e) $\{a, b\} \subset \{a, b, x, y\}$

f) Sendo $M = \{m \mid m$ é um mês do ano que tem 30 dias$\}$ e $Q = \{$junho, setembro$\}$, então $Q \subset M$.

O **conjunto universo**, representado por U, é o conjunto que contém todos os elementos considerados em uma situação ou um problema. Por exemplo:

Os conjuntos $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{-2, -1, 2, 3\}$ são subconjuntos do conjunto universo U, formado pelos números inteiros. Nos diagramas, é usual representar o conjunto universo por um retângulo.



EDITORIA DE ARTE

Propriedades da relação de inclusão

É possível demonstrar que são válidas as seguintes propriedades para a relação de inclusão de conjuntos:

1ª) **Propriedade reflexiva**: $A \subset A$, para qualquer A, ou seja, um conjunto sempre é subconjunto dele mesmo.

2ª) **Propriedade antissimétrica**: Se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = B$, ou seja, dados dois conjuntos, se cada um deles é subconjunto do outro, então eles são iguais.

3ª) **Propriedade transitiva**: Se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$, ou seja, se um conjunto é subconjunto de um segundo, que, por sua vez, é subconjunto de um terceiro conjunto, então o primeiro é subconjunto do terceiro.

Observações:

- A relação de pertinência ($x \in A$) se estabelece entre elemento e conjunto, enquanto a relação de inclusão ($A \subset B$) se estabelece entre dois conjuntos.
- Se existir pelo menos um elemento de A que não pertença a B, dizemos que A **não está contido** em B ou que B **não contém** A.
- O símbolo $\not\subset$ significa **não está contido**.
- O símbolo $\not\supset$ significa **não contém**.
- O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto, ou seja, $\varnothing \subset A$, qualquer que seja o conjunto A.

ATIVIDADES RESOLVIDAS

1. Descreva os conjuntos a seguir, listando seus elementos:

a) $V = \{x \mid x$ é vogal da palavra "estacionamento"$\}$.

b) $P = \{y \mid y$ é um número natural primo menor do que $30\}$.

Resolução

a) As vogais do nosso alfabeto são: a, e, i, o, u. Na palavra "estacionamento", as vogais são: a, e, i, o. Portanto, $V = \{a, e, i, o\}$.

b) Os números primos são aqueles que possuem apenas dois divisores distintos, o número 1 e ele mesmo. Logo, os números naturais primos menores do que 30 são: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 e 29.
Portanto, $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$.

2. Verifique se o conjunto $A = \{0, 3, 5\}$ é subconjunto de $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Resolução

Comparando, um a um, os elementos dos conjuntos A e B, verificamos que o elemento 5 do conjunto A não pertence a B, ou seja, $5 \notin B$. Logo, A não está contido em B, isto é, $A \not\subset B$. Portanto, A não é subconjunto de B.

3. Determine todos os subconjuntos de $A = \{1, 2, 3\}$.

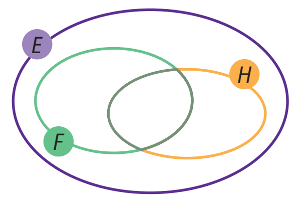
Resolução

O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto. Além disso, os subconjuntos de A serão todas as combinações possíveis dos elementos de A.

Então, os subconjuntos de A são os seguintes:

- o conjunto vazio: $\varnothing$
- os conjuntos com apenas 1 elemento: $\{1\}, \{2\}, \{3\}$;
- os conjuntos com 2 elementos: $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$;
- o próprio conjunto A, com 3 elementos: $\{1, 2, 3\}$.

4. Observe o diagrama, em que E, F e H são conjuntos não vazios:



EDITORIA DE ARTE

Quais afirmativas são verdadeiras? Justifique sua resposta.

a) $E \not\subset F$ **c)** $H \subset F$ **e)** $F \not\subset H$

b) $F \supset E$ **d)** $E \supset H$ **f)** $H \subset E$

Resolução

Analisando as afirmativas, uma a uma, temos:

a) Verdadeira, pois existem elementos que pertencem a E e não pertencem a F.

b) Falsa, pois existem elementos que pertencem a E e não pertencem a F.

c) Falsa, pois existem elementos que pertencem a H e não pertencem a F.

d) Verdadeira, pois todos os elementos de H pertencem a E.

e) Verdadeira, pois existem elementos que pertencem a F e não pertencem a H.

f) Verdadeira, pois todos os elementos de H pertencem a E.

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. Escreva os conjuntos descritos em cada item. **1. a)** $A = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

a) O conjunto A representado pelos números naturais múltiplos de 3 menores do que 20.

b) O conjunto B representado pelos números naturais primos menores do que 27. $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$

c) O conjunto C representado pelos números naturais menores do que 50 e múltiplos de 7. $C = \{0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49\}$

d) $D = \{x \mid x$ é satélite natural da Terra$\}$. $D = \{Lua\}$

e) $E = \{y \mid y$ é consoante da palavra "pedra"$\}$. $E = \{p, d, r\}$

2. Dado o conjunto $B = \{1, -1, 2, -2\}$, responda se as proposições a seguir são verdadeiras ou falsas.

a) $1 \in B$ V **b)** $\{1\} \in B$ F **c)** $2 \in B$ V **d)** $-1 \in B$ V **e)** $1 \notin B$ F **f)** $3 \in B$ F

- Agora reúna-se a um colega, e reescrevam as alternativas falsas alterando-as para que se tornem verdadeiras. Exemplo de resposta: **b)** $1 \in B$; **e)** $4 \notin B$; **f)** $3 \notin B$

3. Considere o conjunto $A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$. Represente os subconjuntos de A formados:

a) pelos números maiores do que 5 e menores do que 10; $\{6, 7, 8, 9\}$

b) pelos números pares; $\{4, 6, 8, 10\}$

c) pelos números ímpares maiores do que ou iguais a 7. $\{7, 9, 11\}$

4. Dado o conjunto $E = \{2, 4, 6, 8\}$, liste todos os subconjuntos de E formados por:

a) 3 elementos; $\{2, 4, 6\}$; $\{2, 4, 8\}$; $\{2, 6, 8\}$; $\{4, 6, 8\}$

b) 4 elementos. $\{2, 4, 6, 8\}$

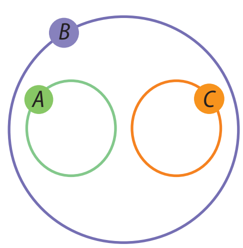
5. Sejam a e b números naturais, determine o valor de $a + b$, tal que $\{0, 1, 2\} = \{2, a, b\}$. 1

6. Uma pessoa tem quatro opções de música para escutar: a, b, c e d. Considerando o conjunto $\{a, b, c, d\}$ formado por essas músicas, resolva os itens.

a) Indique todos os subconjuntos possíveis com apenas duas músicas. $\{a, b\}$; $\{a, c\}$; $\{a, d\}$; $\{b, c\}$; $\{b, d\}$; $\{c, d\}$

b) Se uma pessoa quiser ouvir apenas duas músicas por dia, quantas possibilidades de pares ela tem para escolher? 6 pares

7. No diagrama a seguir, A, B e C são três conjuntos não vazios.



EDITORIA DE ARTE

Associe V ou F a cada uma das seguintes sentenças, conforme ela seja verdadeira ou falsa.

a) $A \subset B$ V	**e)** $B \not\subset A$ V
b) $C \subset B$ V	**f)** $A \not\subset C$ V
c) $B \subset A$ F	**g)** $B \supset A$ V
d) $A \subset C$ F	**h)** $A \not\supset B$ V

8. Dados os conjuntos $A = \{1\}$, $B = \{0, 1\}$, $C = \{1, 2, 3\}$ e $D = \{0, 1, 2, 4\}$, relacione cada par de conjuntos a seguir usando o símbolo $\subset$ ou $\not\subset$.

a) A e B $A \subset B$	**c)** A e D $A \subset D$	**e)** B e D $B \subset D$
b) A e C $A \subset C$	**d)** B e C $B \not\subset C$	**f)** C e D $C \not\subset D$

9. Sejam A, B e C os conjuntos a seguir:

$A = \{x \mid x$ é número natural par compreendido entre 3 e 15$\}$;

$B = \{x \mid x$ é número natural par menor do que 15$\}$;

$C = \{x \mid x$ é número natural par diferente de 2$\}$.

Relacione cada par a seguir usando o símbolo $\subset$ ou $\not\subset$.

a) A e B $A \subset B$	**b)** A e C $A \subset C$	**c)** B e C $B \not\subset C$

10. Dado o conjunto $A = \{0, 2, 3\}$, diga se as proposições são verdadeiras ou falsas.

a) $0 \in A$ V	**e)** $\{1, 2\} \subset A$ F
b) $1 \subset A$ F	**f)** $\varnothing \subset A$ V
c) $3 \in A$ V	**g)** $\varnothing \in A$ F
d) $\{3\} \subset A$ V	**h)** $\{3\} \in A$ F

11. Indique apenas as afirmações verdadeiras. alternativas **a**, **b**, **d**, **e**, **f**, **g** e **h**

a) $\{5\} \subset \{0, 5, 10, 15\}$

b) $\{a, b, c\} \supset \{b, a, c\}$

c) $2 \subset \{0, 2, 4\}$

d) $8 \in \{2, 4, 6, 8, 10\}$

e) $\{1, 2, 3\} \supset \{1, 2\}$

f) $\{-1, 6\} \not\subset \{n \mid n$ é um número natural$\}$

g) $3 \in \{0, 3, 6, 9\}$

h) $\frac{1}{2} \notin \{n \mid n$ é um número natural$\}$

12. Sendo P e Q dois conjuntos não vazios, de modo que $P \subset Q$, indique apenas as afirmações verdadeiras. alternativa **d**

a) Existe $x \in P$, tal que $x \notin Q$.

b) Existe $x \in Q$, tal que $x \notin P$.

c) Se $x \in Q$, então $x \in P$.

d) Se $x \notin Q$, então $x \notin P$.

e) P e Q não têm elementos em comum.

13. Quantos conjuntos M satisfazem à sentença a seguir? 4 conjuntos

$\{1, 2\} \subset M \subset \{1, 2, 3, 4\}$

14. Qual deve ser a relação entre os conjuntos A, B e C para que $A \subset B$, $B \subset C$ e $C \subset A$? $A = B = C$

PRESSMASTER/SHUTTERSTOCK

Um processo seletivo busca classificar os candidatos de acordo com habilidades e competências relevantes para a vaga disputada.

Operações entre conjuntos

Agora que já estudamos como representar conjuntos, vamos aprender a realizar operações entre eles e conhecer a simbologia utilizada para isso. Por exemplo, em um grupo de pessoas que estão participando de um processo seletivo, algumas delas informaram que têm conhecimentos de inglês; outras afirmaram ter habilidades com um programa específico de computador. Os recrutadores desejam saber quantos candidatos apresentam as duas características juntas e quantos não apresentam nenhuma das duas características. O que vamos estudar auxiliará na resolução de situações como essa.

União de conjuntos

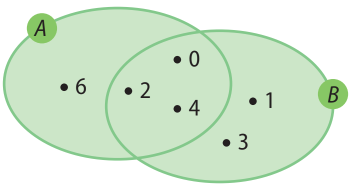
A **união** (também chamada de **reunião**) **de dois conjuntos** A e B, que indicamos por $A \cup B$, é o conjunto formado pela junção dos elementos que pertencem ao conjunto A com os elementos que pertencem ao conjunto B:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Por exemplo, dados os conjuntos $A = \{0, 2, 4, 6\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, a união desses conjuntos é o conjunto cujos elementos pertencem a pelo menos um desses conjuntos, isto é:

$$\underbrace{A \cup B}_{\text{Lê-se: } A \text{ união } B \text{ ou } A \text{ reunião } B.} = \{0, 1, 2, 3, 4, 6\}$$

Observe que, qualquer que seja o elemento de $A \cup B$, ele pertence ao conjunto A ou ao conjunto B ou a ambos.



A parte pintada dos conjuntos indica $A \cup B$.

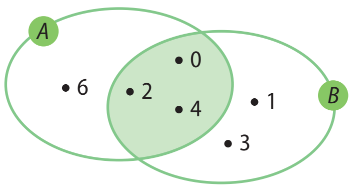
Intersecção de conjuntos

A **intersecção de dois conjuntos** A e B, que indicamos por $A \cap B$, é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e também pertencem a B:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Por exemplo, a intersecção dos conjuntos A e B do exemplo anterior é o conjunto cujos elementos pertencem, ao mesmo tempo, ao conjunto A e ao conjunto B. Observe:

$$\underbrace{A \cap B}_{\text{Lê-se: } A \text{ intersecção } B.} = \{0, 2, 4\}$$



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

A parte pintada dos conjuntos indica $A \cap B$.

Observação:

Se os conjuntos A e B não têm elementos comuns ($A \cap B = \varnothing$), dizemos que A e B são conjuntos **disjuntos**. Acompanhe alguns exemplos:

a) Considere os conjuntos: $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

Temos $A \cap B = \varnothing$, então os conjuntos A e B são disjuntos.

b) Considere os conjuntos: $P = \{p \mid p$ é mês do ano com 30 dias$\}$ e $Q = \{$dezembro$\}$

O mês de dezembro tem 31 dias, então os conjuntos P e Q são disjuntos, pois $P \cap Q = \varnothing$.

Saiba que...

Usualmente, as operações de união e de intersecção de conjuntos são associadas aos conectivos **ou** e **e**, respectivamente. Na Matemática, dizer que um elemento pertence a um conjunto **ou** a outro significa dizer que ele pertence a pelo menos um dos conjuntos, mas pode pertencer a ambos. Já dizer que um elemento pertence a um conjunto **e** a outro significa, necessariamente, que ele pertence aos dois conjuntos considerados.

Propriedades da união e da intersecção de conjuntos

Dados três conjuntos, A, B e C, é possível demonstrar que valem as seguintes propriedades:

1ª) Propriedade comutativa

$A \cup B = B \cup A$ ← propriedade comutativa da união

$A \cap B = B \cap A$ ← propriedade comutativa da intersecção

2ª) Propriedade associativa

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ ← propriedade associativa da união

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ ← propriedade associativa da intersecção

3ª) Propriedade distributiva

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ← propriedade distributiva da intersecção em relação à união

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ← propriedade distributiva da união em relação à intersecção

4ª) Propriedade

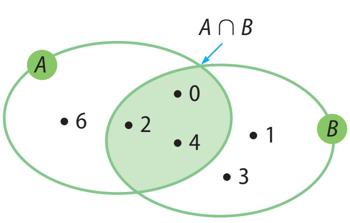
Se $A \subset B$, então $A \cup B = B$ e $A \cap B = A$.

Da mesma maneira, se $A \cup B = B$ ou $A \cap B = A$, então $A \subset B$.

Quantidade de elementos da união de conjuntos

Acompanhe o exemplo a seguir. Dados os conjuntos $A = \{0, 2, 4, 6\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, qual é a quantidade de elementos do conjunto $A \cup B$?

Observe o diagrama e note que, se adicionarmos a quantidade de elementos de A à quantidade de elementos de B, a quantidade de elementos de $A \cap B$ será contada duas vezes, pois os elementos 0, 2 e 4 estão presentes nos dois conjuntos. Assim, precisamos descontar essa repetição, de modo que concluímos que o conjunto $A \cup B$ tem 6 elementos.



EDITORIA DE ARTE

De maneira geral, sendo A e B dois conjuntos finitos, a quantidade de elementos do conjunto $A \cup B$, que indicamos por $n(A \cup B)$, é dada pela seguinte relação:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Aplicando essa igualdade para o exemplo anterior, temos:

$$n(A \cup B) = 4 + 5 - 3 \Rightarrow n(A \cup B) = 6$$

Observação:

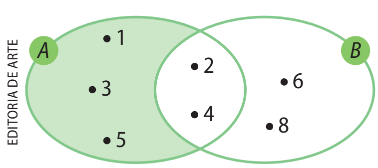
Se $A \cap B = \varnothing$, temos: $n(A \cap B) = 0$ e $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.

» Diferença de conjuntos

A **diferença** de dois conjuntos A e B, que indicamos por $A - B$, nessa ordem, é o conjunto dos elementos que pertencem a A e não pertencem a B:

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

Por exemplo, dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{2, 4, 6, 8\}$, a diferença $A - B$ é formada por todos os elementos que pertencem a A, mas não pertencem a B.



A parte pintada nos conjuntos indica $A - B$.

$\underbrace{A - B}$ $= \{1, 3, 5\}$

Lê-se: A menos B.

Acompanhe outros exemplos:

a) Dados $M = \{m, n, p, q, r\}$ e $P = \{p, q\}$, temos:

$M - P = \{m, n, r\}$

b) Seja E o conjunto formado pelos seguintes esportes: basquete, vôlei, futebol, handebol, judô, xadrez, natação e atletismo. Temos:

E = {basquete, vôlei, futebol, handebol, judô, xadrez, natação, atletismo}

Considere também o conjunto C, formado pelos esportes coletivos. Ao realizarmos $E - C$, temos:

$E - C$ = {judô, xadrez, natação, atletismo}

Se $B \subset A$, a diferença $A - B$ é denominada **complementar** de B em relação a A e é indicada por:

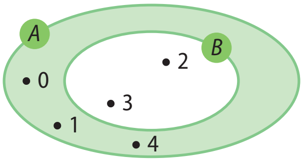
$$\complement_A^B = A - B$$

Por exemplo, se $B = \{2, 3\}$ e $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, o complementar de B em relação a A é dado por:

$$\complement_A^B = A - B = \{0, 1, 4\}$$

No caso de termos determinado conjunto universo U, do qual A é subconjunto, o complementar de A em relação a U é indicado por:

$$A' = \overline{A} = A^{\complement} = \complement_U^A = U - A$$



EDITORIA DE ARTE

A parte pintada nos conjuntos indica $\complement_A^B$.

FÓRUM

O Brasil nos jogos Parapan-Americanos 2023

O Brasil se despediu dos Jogos Parapan-Americanos de Santiago 2023 com o maior desempenho de todos os tempos. Foram 343 medalhas no total, com 156 ouros, 98 pratas e 89 bronzes [...]. Desde o Parapan do Rio 2007, o Brasil termina no topo do quadro de medalhas.

[...]

O desempenho brasileiro [...] foi histórico por diversos motivos, como a melhor campanha em todas as edições e conquistas inéditas. E um dado foi muito importante para que isso acontecesse: o Brasil subiu ao pódio em todas as 17 modalidades em que esteve presente na competição na capital chilena.

MARTIN BERNETTI/AFP/GETTY IMAGES

Delegação brasileira na cerimônia de abertura dos Jogos Parapan-Americanos de Santiago 2023.

[...] Fosse no badminton, halterofilismo, natação ou qualquer outro esporte, ao menos um atleta brasileiro ocupou um dos três lugares do pódio pelo menos em uma ocasião em Santiago.

[...]

COMITÊ PARALÍMPICO BRASILEIRO. **Saiba 23 motivos que fizeram do Parapan de Santiago 2023 inesquecível**. [*S. l.*]: CPB, 27 nov. 2023. Disponível em: https://cpb.org.br/noticias/saiba-23-motivos-que-fizeram-do-parapan-de-santiago-2023-inesquecivel/. Acesso em: 25 jun. 2024.

Após ler o texto, faça o que se pede.

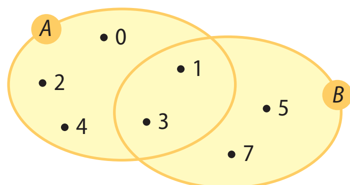
- Reúna-se a mais dois colegas, e pesquisem o que são os jogos Parapan-Americanos e quais foram as 17 modalidades esportivas presentes na edição de Santiago (Chile) em 2023. Depois, promovam um fórum para discutir as diferentes modalidades de esportes adaptados para pessoas com deficiência (PcD). Ver as **Orientações para o professor**.

ATIVIDADES RESOLVIDAS

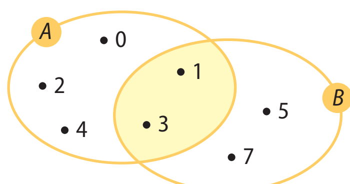
5. Dados os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7\}$, determine os conjuntos $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$ e represente cada um deles por meio de um diagrama.

Resolução

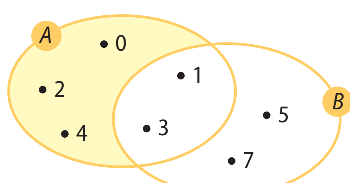
Juntando todos os elementos que pertencem a A com os elementos que pertencem a B, temos: $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7\}$



Tomando os elementos comuns a A e a B, temos: $A \cap B = \{1, 3\}$



Considerando os elementos que pertencem a A e não pertencem a B, temos:
$A - B = \{0, 2, 4\}$



6. Determinada empresa de perfume deseja saber como está o consumo de seus produtos. Assim, fez uma pesquisa de mercado para levantar quantas pessoas consomem o seu produto (P) e quantas consomem o produto (S) da sua principal concorrente. Os dados obtidos na pesquisa foram os seguintes:

Consumo dos produtos *S* e *P*

Produto consumido	S	P	S e P	Nenhum dos dois
Número de consumidores	210	180	50	40

Fonte: Dados fictícios.

Quantas pessoas foram consultadas nessa pesquisa?

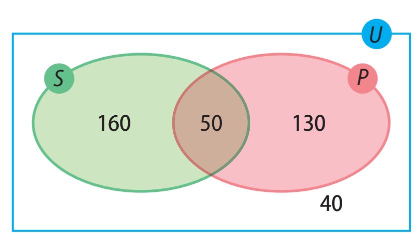
Resolução

Vamos considerar o conjunto universo U de todas as pessoas que responderam à pesquisa e os conjuntos S e P das pessoas que consomem os produtos S e P, respectivamente.

Fazemos o diagrama e o preenchemos do seguinte modo:

- Colocamos 50 na região $S \cap P$, pois 50 pessoas consomem os dois produtos. É importante começar pela intersecção, pois, assim, não corremos o risco de contar mais de uma vez essas 50 pessoas.
- Das 210 pessoas que consomem o produto S, 50 consomem também o produto P, então o número de pessoas que consomem somente o produto S é:
  $210 - 50 = 160$
  Portanto, colocamos 160 na região $S - P$.
- Das 180 pessoas que consomem o produto P, temos 50 que também consomem o produto S. Então, o número de pessoas que consomem somente o produto P é:
  $180 - 50 = 130$
  Portanto, colocamos 130 na região $P - S$.
- Por último, acrescentamos as 40 pessoas que não consomem nenhum dos produtos.

Observe como fica o diagrama de Venn com essas informações.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Para determinar quantas pessoas foram consultadas, adicionamos os números marcados no diagrama:

$$160 + 50 + 130 + 40 = 380$$

Assim, foram consultadas 380 pessoas nessa pesquisa.

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

15. Sendo $A = \{0, 11, 12, 13, 14\}$, $B = \{11, 12\}$, $C = \{x \mid x$ é número natural par compreendido entre 11 e 19$\}$ e $D = \{x \mid x$ é número natural ímpar compreendido entre 10 e 16$\}$, determine:

a) $A \cap B$
$A \cap B = \{11, 12\}$

b) $A \cap C$
$A \cap C = \{12, 14\}$

c) $B \cup C$
$B \cup C = \{11, 12, 14, 16, 18\}$

d) $C \cup D$
$C \cup D = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 18\}$

e) $(A \cup B) \cup C$
$(A \cup B) \cup C = \{0, 11, 12, 13, 14, 16, 18\}$

f) $(A \cap C) \cap D$
$(A \cap C) \cap D = \varnothing$

16. Dados os conjuntos $A = \{m, n, p, q\}$, $B = \{n, p, q\}$ e $C = \{p, q, r, s\}$, cujos elementos são letras, determine:

a) $A - B$
$A - B = \{m\}$

b) $A - C$
$A - C = \{m, n\}$

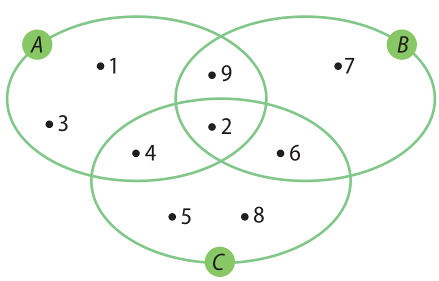
c) $B - C$
$B - C = \{n\}$

d) $(A \cap B) - C$
$(A \cap B) - C = \{n\}$

e) $(A - C) \cap (B - C)$
$(A - C) \cap (B - C) = \{n\}$

f) $A - \varnothing$
$A - \varnothing = \{m, n, p, q\}$

17. Considere o diagrama.



EDITORIA DE ARTE

Determine:

a) $A \cup B$
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 9\}$

b) $A \cup C$
$A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$

c) $A \cup B \cup C$
$A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

d) $B \cap C$
$B \cap C = \{2, 6\}$

e) $A \cap B \cap C$
$A \cap B \cap C = \{2\}$

f) $A - C$
$A - C = \{1, 3, 9\}$

g) $(A \cap C) - B$
$(A \cap C) - B = \{4\}$

18. Liste os elementos dos conjuntos resultantes de cada operação dada.

a) $\{10, 11, 12\} \cap \{7, 8, 9, 10, 11\}$ $\{10, 11\}$

b) $\{-3, -2, -1, 0\} \cap \{0, 1, 2, 3\}$ $\{0\}$

c) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right\} \cap \left\{\frac{1}{5}, \frac{1}{6}\right\}$ $\varnothing$

19. Os conjuntos A, B e E são tais que $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A \cap B = \{4, 5\}$, $E - B = \{1, 2\}$, $B - A = \{6, 7\}$, $E \cap B = \varnothing$ e $E \subset A$. Calcule $\complement_A^E$. $\complement_A^E = A - E = \{3, 4, 5\}$

20. Dados $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{0, 2, 5\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$ e $E = \{2, 4, 6\}$, determine:

a) $\complement_U^A$ **b)** $\complement_U^B$ **c)** $\complement_U^E$

21. Representamos $M(a)$ o conjunto dos múltiplos de a e $D(a)$ o conjunto dos divisores de a, com a sendo um número natural. Liste os elementos dos conjuntos resultantes das operações a seguir.

a) $M(3) \cap D(30)$
$\{3, 6, 15, 30\}$

b) $M(2) \cap M(4)$
$\{0, 4, 8, ...\}$

c) $D(100) \cap D(50)$
$\{1, 2, 5, 10, 25, 50\}$

d) $M(7) \cap M(5)$
$\{0, 35, 70, ...\}$

22. (UFSC) Sejam A e B dois conjuntos, onde $(A \cup B)$ possui 134 elementos e $(A \cap B)$ possui 49 elementos. Se A possui 15 elementos a mais do que B, então o número de elementos de A é: ▨ 99 elementos

23. Uma pesquisa revelou que, das pessoas consultadas, 100 liam o jornal A, 150 liam o jornal B, 20 liam os dois jornais (A e B) e 110 não liam nenhum jornal. Quantas pessoas foram consultadas? 340 pessoas

24. Em uma escola de idiomas, há 630 estudantes, dos quais 350 optaram pelo curso de Inglês, 210 escolheram o de Espanhol e 90 optaram pelos dois cursos (Inglês e Espanhol). Pergunta-se:

a) Quantos estudantes cursam apenas Inglês? 260 estudantes

b) Quantos estudantes cursam apenas Espanhol? 120 estudantes

c) Quantos estudantes cursam Inglês ou Espanhol? 470 estudantes

d) Quantos estudantes não cursam nenhum dos dois idiomas? 160 estudantes

25. Em um grupo de 99 esportistas, 40 jogam vôlei, 20 jogam vôlei e xadrez, 22 jogam xadrez e tênis, 18 jogam vôlei e tênis e 11 jogam as três modalidades. O número de pessoas que jogam xadrez é igual ao número de pessoas que jogam tênis. Quantos esportistas jogam:

a) tênis e não jogam vôlei? 36 esportistas

b) xadrez ou tênis e não jogam vôlei? 59 esportistas

c) vôlei e não jogam xadrez? 20 esportistas

20. a) $\complement_U^A = U - A = \{1, 3, 4, 6, 7\}$ **b)** $\complement_U^B = U - B = \{0, 2, 4, 6\}$ **c)** $\complement_U^E = U - E = \{0, 1, 3, 5, 7\}$

Conjuntos numéricos

Ao longo da história humana, conforme as sociedades foram se desenvolvendo, o uso dos números evoluiu da simples necessidade de contar e registrar quantidades para concepções e escritas cada vez mais abrangentes que pudessem atender a necessidades matemáticas mais complexas que foram surgindo. É nesse contexto que os números foram organizados em **conjuntos numéricos**.

Estudaremos os conjuntos dos números naturais, dos números inteiros, dos números racionais, dos números irracionais e dos números reais, com algumas de suas propriedades e aplicações.


THONGCHAI S/SHUTTERSTOCK

VALENTIN VALKOV/SHUTTERSTOCK

■ Um dos primeiros instrumentos utilizados para realizar cálculos foi o ábaco; hoje em dia, usamos a calculadora, principalmente as encontradas em *smartphones* e em outros aparelhos eletrônicos. (As imagens da página estão fora de proporção.)

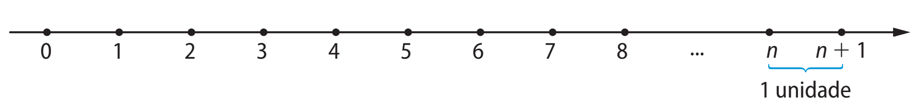
Conjunto dos números naturais

Os números naturais são utilizados para indicar contagens, como idade, dias de mês ou, ainda, para representar o número de uma residência.

Começando por zero e acrescentando sempre uma unidade, obtemos os elementos do **conjunto dos números naturais**, indicado por $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ...\}$$

O conjunto dos números naturais é infinito, e podemos representá-lo em uma reta orientada sobre a qual marcamos pontos equidistantes. A cada ponto marcado, fazemos corresponder, ordenadamente, um número natural, e cada número natural é representado por um desses pontos, como mostra a figura a seguir.



EDITORIA DE ARTE

A respeito dos números naturais:

- Todo número natural n tem seu **sucessor** $n + 1$, que é o número natural que vem imediatamente depois dele. Por exemplo, o sucessor de 5 é 6; o sucessor de 29 é 30.
- O número natural que vem imediatamente antes de um número natural diferente de zero é denominado **antecessor**. Por exemplo, o antecessor de 10 é 9; o antecessor de 231 é 230.

Pense e responda

Qual é o único número natural que não tem antecessor? o zero

- Os números naturais n e $n + 1$ são denominados **consecutivos**. Analogamente, dizemos que os números naturais n, $n + 1$, $n + 2$, ... são consecutivos. Por exemplo, 4 e 5 são consecutivos, e 18, 19 e 20 também são consecutivos.
- O subconjunto de $\mathbb{N}$ formado por todos os números naturais diferentes de zero é denotado assim:

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\} = \mathbb{N} - \{0\}$$

No conjunto $\mathbb{N}$, as operações de adição e de multiplicação estão bem definidas, pois, quaisquer que sejam dois números naturais, essas operações sempre resultam em um número natural. Porém, a subtração de dois números naturais nem sempre resulta em um número natural. Por exemplo: $5 - 7 = -2$ e $-2 \notin \mathbb{N}$.

Saiba que...

O asterisco (*), colocado junto ao símbolo que representa um conjunto numérico, indica que o número zero foi retirado do conjunto.

Professor, enfatizar a facilidade de se usar a notação de conjuntos com o símbolo de "não pertence" para a escrita de algumas sentenças matemáticas.

» Conjunto dos números inteiros

Durante o Renascimento (entre os séculos XIV e XVI), a circulação de dinheiro aumentou, por causa da expansão comercial. Isso fez com que comerciantes se envolvessem com situações de lucro e prejuízo e, para facilitar a representação dessa movimentação financeira, começaram a utilizar os símbolos + (mais), para representar um valor positivo ou lucro, e − (menos), para representar um valor negativo ou prejuízo.

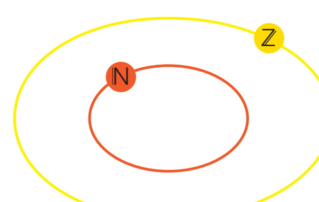
Ao incluirmos os números negativos −1, −2, −3, −4, ... no conjunto {0, 1, 2, 3, 4, ...}, formamos o **conjunto dos números inteiros**, representado por $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, ...\}$$

ou

$$\mathbb{Z} = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

Todos os números naturais pertencem ao conjunto dos números inteiros, ou seja, o conjunto dos números naturais é um subconjunto do conjunto dos números inteiros, como mostra o diagrama. Podemos escrever $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.



Na reta orientada, o conjunto $\mathbb{Z}$ pode ser assim representado:

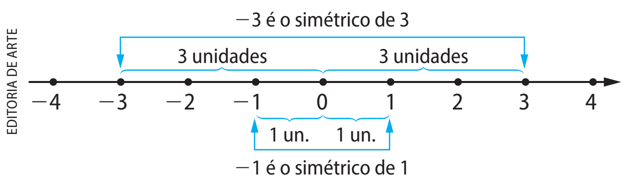
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Note que cada ponto marcado na reta está associado a um único número inteiro e que, reciprocamente, cada número inteiro está associado a apenas um desses pontos.

A respeito dos números inteiros:

- Todo número inteiro tem um antecessor e um sucessor. Por exemplo: o antecessor de -10 é -11, e o sucessor de -1 é 0.
- Dois números inteiros são **opostos** ou **simétricos** quando a soma deles é igual a zero. Por exemplo: o oposto de 1 é -1, e o oposto de -3 é 3. O oposto de zero é o próprio zero.

Na reta orientada, identificamos dois números opostos quando eles são simétricos em relação ao zero, ou seja, estão a uma mesma distância da origem. Observe:



Pense e responda

Todo número natural também é um número inteiro? E todo número inteiro é um número natural? Justifique.

Sim, todo número natural é um número inteiro. Entretanto, nem todo número inteiro é um número natural, por exemplo, -1 não é um número natural.

Destacamos, agora, importantes subconjuntos de $\mathbb{Z}$:

- números inteiros não nulos: $\mathbb{Z}^* = \{..., -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, ...\} = \mathbb{Z} - \{0\}$
- números inteiros não negativos: $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$
- números inteiros não positivos: $\mathbb{Z}_- = \{0, -1, -2, -3, -4, ...\}$
- números inteiros positivos: $\mathbb{Z}^*_+ = \{1, 2, 3, 4, ...\}$
- números inteiros negativos: $\mathbb{Z}^*_- = \{-1, -2, -3, -4, ...\}$
- números pares: $P = \{..., -4, -2, 0, 2, 4, ...\}$, ou seja, são os números que, divididos por 2, têm resto 0.
- números ímpares: $I = \{..., -3, -1, 1, 3, ...\}$, ou seja, são os números que, divididos por 2, têm resto 1.

No conjunto $\mathbb{Z}$, as operações de adição, subtração e multiplicação estão bem definidas. Isso significa que, quaisquer que sejam dois números inteiros, essas operações sempre resultam em um número inteiro. Observe alguns exemplos:

a) $-5 + 8 = 3$

b) $25 + (-2) = 25 - 2 = 23$

c) $10 - (-17) = 10 + 17 = 27$

d) $-40 - 21 = -61$

e) $-7 \cdot 3 = -21$

f) $4 \cdot (-9) = -36$

No entanto, no conjunto dos números inteiros, não é possível obter um número inteiro como quociente de algumas divisões exatas, como $7 : 2$, por exemplo. Desse modo, surge a necessidade de definir novos conjuntos numéricos.

» Conjunto dos números racionais

Como mencionamos, os resultados de algumas divisões não pertencem ao conjunto dos números inteiros. Por causa disso, surgiu a necessidade de complementar os conjuntos numéricos, o que deu origem ao **conjunto dos números racionais**.

O conjunto dos números racionais, que indicamos por $\mathbb{Q}$, é aquele formado pelos números que podem ser expressos na forma $\frac{a}{b}$, sendo a e b inteiros e $b \neq 0$:

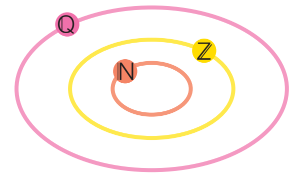
$$\mathbb{Q} = \left\{x \mid x = \frac{a}{b}, \text{ com } a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^*\right\}$$

Exemplos:

- $7 = \frac{7}{1}$
- $-0,13 = -\frac{13}{100}$
- $0,4777... = \frac{43}{90}$
- $0,6 = \frac{3}{5}$
- $1,3333... = \frac{4}{3}$

Professor, reforçar com os estudantes o uso da linguagem de conjuntos já estudada para estabelecer e indicar a relação entre os conjuntos numéricos.

Podemos escrever os números inteiros como frações com denominador 1. Assim, todos os números inteiros pertencem ao conjunto dos números racionais, ou seja, o conjunto $\mathbb{Z}$ é um subconjunto do conjunto $\mathbb{Q}$, como mostra o diagrama. Podemos escrever $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.



EDITORIA DE ARTE

Um número racional pode ser representado de duas maneiras: na **forma fracionária**, sendo o denominador não nulo; e na **forma decimal**, caso em que a parte decimal tem uma quantidade finita de algarismos ou é infinita e periódica.

Exemplos:

- $\frac{1}{4} = 0,25$
- $\frac{14}{5} = 2,8$
- $\frac{13}{6} = 2,1666...$

Ao realizar uma divisão para obter a forma decimal de um número racional, temos duas possibilidades:

1. O resultado é um número decimal com uma quantidade finita de algarismos depois da vírgula. Nesse caso, temos um **número decimal exato**.

   Exemplos:

   - $\frac{12}{4} = 3$
   - $\frac{9}{2} = 4,5$
   - $\frac{3}{4} = 0,75$
   - $\frac{3}{8} = -0,375$

2. O resultado é um número decimal com uma quantidade infinita de algarismos depois da vírgula, com um grupo deles se repetindo periodicamente. Nesse caso, temos uma **dízima periódica**, e o grupo de algarismos que se repetem infinitamente é chamado de **período** da dízima.

   Exemplos:

   - $\frac{13}{6} = 2,1666... = 2,1\overline{6}$ (o período é 6)
   - $\frac{40}{99} = 0,404040... = 0,\overline{40}$ (o período é 40)

Saiba que...

Colocamos um traço sobre o período da dízima para indicar que ela se repete indefinidamente. Por exemplo:

- $0,333... = 0,\overline{3}$
- $0,171717... = 0,\overline{17}$
- $3,1454545... = 3,1\overline{45}$

Pense e responda

Espera-se que os estudantes percebam que, se em algum momento o número 0 aparecer como resto da divisão entre dois inteiros, o quociente é finito; portanto, trata-se de um decimal exato.

Observando o resto da divisão de dois números inteiros positivos, você consegue perceber se o quociente desses dois números é um decimal exato ou uma dízima periódica? Explique.

Espera-se que os estudantes percebam que, se o número for inteiro, basta escrevê-lo como uma fração de denominador 1. Para um número na forma decimal, é possível escrevê-lo como uma fração cujo denominador é uma potência de 10 e simplificá-la até obter a fração irredutível equivalente.

Acabamos de aprender a obter a forma decimal de um número racional a partir de sua forma fracionária. Também podemos obter uma fração de inteiros equivalente a um número racional, seja ele um decimal exato, seja ele uma dízima periódica.

Pense e responda

Como obtemos a fração irredutível equivalente a um número decimal exato?

Essa fração é chamada de **fração geratriz**. Acompanhe como obter a fração geratriz da dízima 2,313131...

$x = 2{,}313131...$ (I)

Como o período tem 2 algarismos que se encontram logo após a vírgula, multiplicamos por 100 ambos os membros da igualdade:

$100x = 231{,}313131...$ (II)

Fazemos (II) $-$ (I), subtraindo, membro a membro, as duas igualdades:

$100x - x = 231{,}313131... - 2{,}313131...$

Portanto:

$99x = 229 \Rightarrow x = \dfrac{229}{99}$

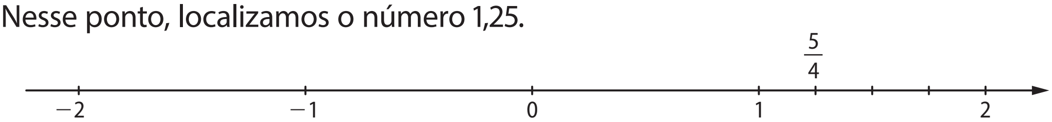
Logo, $\dfrac{229}{99}$ é a fração geratriz da dízima periódica 2,313131...

Professor, comentar com os estudantes que o conjunto dos números racionais é formado pelos decimais exatos e pelas dízimas periódicas.

Um número racional escrito na forma decimal pode ter uma quantidade finita ou infinita e periódica de algarismos depois da vírgula. Na forma fracionária, um número racional tem uma representação que é uma fração formada por números inteiros com denominador não nulo.

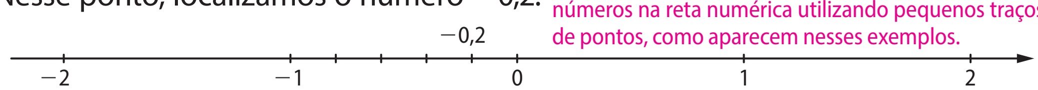
Na reta orientada, é possível marcar pontos que representem números racionais. Acompanhe alguns exemplos de localização de números racionais na reta orientada:

a) Como o número $\dfrac{5}{4} = 1\dfrac{1}{4} = 1{,}25$ está localizado entre 1 e 2, dividimos o intervalo entre os números 1 e 2 em quatro partes iguais e tomamos o ponto da divisão que fica mais próximo de 1. Nesse ponto, localizamos o número 1,25.

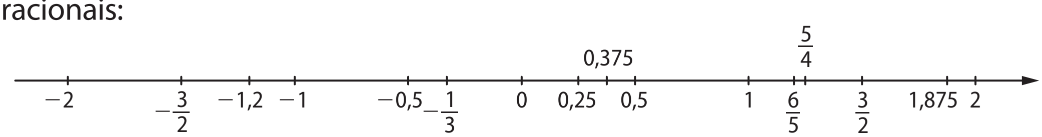


b) O número $-0{,}2 = -\dfrac{1}{5}$ está localizado entre 0 e -1; então, dividimos o intervalo entre os números -1 e 0 em cinco partes iguais e tomamos o ponto da divisão que fica mais próximo do 0. Nesse ponto, localizamos o número $-0{,}2$.

Professor, comentar com os estudantes que é comum localizar números na reta numérica utilizando pequenos traços, em vez de pontos, como aparecem nesses exemplos.



Observe um trecho da reta orientada com alguns pontos que estão associados a alguns números racionais:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Todos os números racionais estão associados a um único ponto da reta orientada. No entanto, nem todos os pontos da reta orientada correspondem a um número racional, como é o caso das dízimas não periódicas. Isso significa que os números racionais não são suficientes para "preencher" toda a reta, ou seja, há "buracos" na reta que precisam ser preenchidos com outros números. Esses números serão estudados mais adiante neste Capítulo.

A respeito dos números racionais:

a) A soma de dois números racionais é um número racional. Exemplos:

- $\frac{1}{3} + \frac{4}{5} = \frac{17}{15}$
- $7{,}4 + 3{,}6 = 11{,}0$

b) A diferença de dois números racionais é um número racional. Exemplos:

- $1{,}\overline{3} - 0{,}\overline{1} = 1{,}\overline{2}$
- $\frac{1}{6} - \frac{3}{8} = -\frac{5}{24}$

c) O produto de dois números racionais é um número racional. Exemplos:

- $45{,}\overline{21} \cdot 2 = 90{,}\overline{42}$
- $\frac{4}{5} \cdot \frac{13}{6} = \frac{26}{15}$

d) O quociente de dois números racionais, sendo o divisor diferente de zero, é um número racional. Exemplos:

- $0{,}5 : 2{,}25 = 0{,}\overline{2}$
- $\frac{3}{25} : \frac{4}{5} = \frac{3}{20}$

e) Dois números racionais são **opostos** ou **simétricos** quando a soma deles é igual a zero. Exemplos:

- O oposto de 0,5 é $-0{,}5$, pois $0{,}5 + (-0{,}5) = 0{,}5 - 0{,}5 = 0$.
- O oposto de $-\frac{3}{2}$ é $\frac{3}{2}$, pois $-\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0$.

f) Dois números racionais são **inversos** um do outro quando o produto deles é igual a 1. Exemplos:

- O inverso de $\frac{4}{5}$ é $\frac{5}{4}$, pois $\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{4} = 1$.
- O inverso de -7 é $-\frac{1}{7}$, pois $-7 \cdot -\frac{1}{7} = 1$.

Pense e responda

Qual é o único número racional que não possui inverso? o zero

g) Entre dois números racionais distintos sempre existe outro número racional. Daí a impossibilidade de se escreverem todos os números racionais situados entre dois números quaisquer. Exemplos:

- Entre os números $0{,}2 = \frac{1}{5}$ e $0{,}\overline{3} = \frac{1}{3}$ existem, entre outros, os números racionais 0,25; $0{,}2\overline{9}$ e $\frac{9}{40}$.
- Um procedimento possível para se obter um número racional entre dois outros números racionais é calcular a média aritmética entre eles. No caso do exemplo anterior, temos:

$$\frac{0{,}2 + 0{,}\overline{3}}{2} = \frac{0{,}5\overline{3}}{2} = 0{,}2\overline{6} \text{ ou } \frac{\frac{1}{5} + \frac{1}{3}}{2} = \frac{\frac{8}{15}}{2} = \frac{4}{15}$$

Pense e responda

Determine três números racionais que estejam entre 4,5 e 4,8.

Exemplo de resposta: 4,51; 4,6 e 4,799. Os estudantes podem utilizar a estratégia da média aritmética apresentada ou outra que desejarem.

Destacamos, agora, importantes subconjuntos de $\mathbb{Q}$:

- números racionais não nulos: $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$
- números racionais não negativos: $\mathbb{Q}_+$
- números racionais não positivos: $\mathbb{Q}_-$
- números racionais positivos: $\mathbb{Q}^*_+$
- números racionais negativos: $\mathbb{Q}^*_-$

Aprendemos que a soma, a diferença, o produto e o quociente de números racionais são números racionais. Além disso, todo número racional, quando não nulo, possui oposto e inverso.

ATIVIDADES RESOLVIDAS

7. Considere os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leqslant 5\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leqslant x < 3\}$. Em seguida:

a) descreva os elementos dos conjuntos A e B.

b) determine $A \cup B$.

c) determine $A \cap B$.

Resolução

a) No conjunto A, a notação $x \leqslant 5$ significa que x é um número menor do que ou igual a 5, ou seja, sendo $x \in \mathbb{N}$, x pode assumir qualquer valor natural entre 0 e 5, incluindo os dois extremos. Logo, $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

No conjunto B, a notação $-2 \leqslant x < 3$ significa que $x \geqslant -2$ e, também, $x < 3$, sendo $x \in \mathbb{Z}$, ou seja, x pode assumir qualquer valor inteiro entre -2 e 3, incluindo o extremo -2, mas não incluindo o extremo 3. Assim, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

b) A união dos conjuntos A e B é o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a A ou a B. Logo,

$A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

c) A intersecção dos conjuntos A e B é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e também pertencem a B. Portanto, $A \cap B = \{0, 1, 2\}$.

8. Considere os conjuntos:

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é par}\}$;

$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2k + 1, \text{ com } k \in \mathbb{N}\}$ e

$C = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

O conjunto $C - (A \cup B)$ é o conjunto:

a) $\mathbb{N}^*$ **c)** $\mathbb{Q}_-$ **e)** $\mathbb{Z}^*_-$

b) $\mathbb{Z}_-$ **d)** $\mathbb{N}^*_+$

Resolução

O conjunto A é formado pelos números naturais pares, portanto $A = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$.

O conjunto B é formado por x natural, tal que x é da forma $x = 2k + 1$, com k natural. Atribuindo valores naturais para k, obtemos valores de x:

$k = 0 \Rightarrow x = 2 \cdot 0 + 1 \Rightarrow x = 1$

$k = 1 \Rightarrow x = 2 \cdot 1 + 1 \Rightarrow x = 3$

$k = 2 \Rightarrow x = 2 \cdot 2 + 1 \Rightarrow x = 5$

$k = 3 \Rightarrow x = 2 \cdot 3 + 1 \Rightarrow x = 7$

$\vdots$

Note que, ao atribuir valores naturais para k, obtemos valores naturais ímpares para x. Então, o conjunto B é formado pelos números naturais ímpares. Portanto, $B = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$.

Sendo assim, temos $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$.

Fazendo $C - (A \cup B)$, temos:

$\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} - \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\} = \{\ldots, -3, -2, -1\}$

Então, o conjunto $C - (A \cup B)$ é formado por números inteiros negativos, ou seja, $C - (A \cup B) = \mathbb{Z}^*_-$.

Portanto, **e** é a alternativa correta.

9. Escreva, em ordem crescente, os números racionais:

$$-\frac{2}{3};\ \frac{17}{8};\ 1{,}333...;\ -\frac{9}{4};\ \frac{7}{2} \text{ e } \frac{43}{20}$$

Resolução

Primeiro, determinamos a forma decimal das frações:

$-\dfrac{2}{3} = -0{,}666...$ $\qquad \dfrac{7}{2} = 3{,}5$

$\dfrac{17}{8} = 2{,}125$ $\qquad \dfrac{43}{20} = 2{,}15$

$-\dfrac{9}{4} = -2{,}25$

Agora, observando os números na forma decimal, escrevemos esses números racionais em ordem crescente:

$$-\frac{9}{4} < -\frac{2}{3} < 1{,}333... < \frac{17}{8} < \frac{43}{20} < \frac{7}{2}$$

10. Dois números inteiros x e y, com $x < y$, são consecutivos e somam 153. Quais são os valores de x e y?

Resolução

Se x e y são números consecutivos e $x < y$, então podemos escrever que:

$y = x + 1$

Como a soma de x com y é 153, temos:

$x + y = 153 \Rightarrow x + x + 1 = 153 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x = 152 \Rightarrow x = 76$

Sendo assim, temos $y = 76 + 1 \Rightarrow y = 77$.

Portanto, $x = 76$ e $y = 77$.

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

26. Escreva os seguintes conjuntos, listando seus elementos:

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 8\}$ $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

b) $C = \{z \in \mathbb{Z}^* \mid -3 < z < 4\}$ $C = \{-2, -1, 1, 2, 3\}$

27. Descreva cada um dos conjuntos de números, definindo-os por uma propriedade de seus elementos. Exemplo de resposta:

a) $M = \{6, 7, 8\}$ $M = \{x \in \mathbb{N} \mid 6 \leqslant x \leqslant 8\}$

b) $T = \{..., -5, -4, -3, -2, -1\}$ $T = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leqslant -1\}$

28. Considere os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ é par e $x < 9\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ é ímpar e $x < 9\}$. Utilize os símbolos $\in$ ou $\notin$ para relacionar cada par a seguir.

a) 4 e A $\in$ **c)** 8 e A $\in$ **e)** 1 e B $\in$

b) 5 e A $\notin$ **d)** 2 e B $\notin$ **f)** 10 e A $\notin$

29. Sendo $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$, escreva os seguintes conjuntos, listando seus elementos.

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2k, k \in \mathbb{N}\}$ $A = \{0, 2, 4, ...\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = k^2, k \in \mathbb{N}\}$ $B = \{0, 1, 4, 9, ...\}$

30. Dados os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x = 2k, k \in \mathbb{N}\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leqslant 10\}$, determine o número de elementos de $A \cap B$. $n(A \cap B) = 5$

31. Verifique se os conjuntos a seguir são iguais. Sim, são iguais.

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leqslant x < 4\}$

$B = \{x \in \mathbb{N} \mid (x - 2)(x - 3) = 0\}$

32. Usando os símbolos $\in$ ou $\notin$, relacione:

a) -7 e $\mathbb{N}$. $\notin$ **c)** $\frac{1}{2}$ e $\mathbb{Z}$. $\notin$

b) 4 e $\mathbb{Z}$. $\in$ **d)** 0,166... e $\mathbb{Q}$. $\in$

33. Determine a fração geratriz dos números a seguir.

a) 0,323232... $\frac{32}{99}$ **b)** 2,715715715... $\frac{2\,713}{999}$

34. Sendo A o conjunto dos divisores naturais de 18 e B o conjunto dos divisores naturais de 30, escreva:

a) o conjunto A; $A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

b) o conjunto B; $B = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$

c) o conjunto C dos divisores comuns de 18 e 30; $C = \{1, 2, 3, 6\}$

d) o máximo divisor comum de 18 e 30. 6

35. (UFAL) No universo $\mathbb{N}$, sejam A o conjunto dos números pares, B o conjunto dos números múltiplos de 3 e C o conjunto dos números múltiplos de 5. Determine os 10 menores números que pertencem ao conjunto $B - (A \cup C)$.
3, 9, 21, 27, 33, 39, 51, 57, 63 e 69

36. (Unicamp-SP) Ache dois números inteiros positivos e consecutivos sabendo que a soma de seus quadrados é 481. 15 e 16

37. Determine os seguintes conjuntos, listando seus elementos.

a) $M = \{x \in \mathbb{Q} \mid -2x - 9x + 5 = 0\}$ $M = \left\{\frac{5}{11}\right\}$

b) $N = \left\{a \in \mathbb{Q} \mid \frac{1}{2} + a = 2\right\}$ $N = \left\{\frac{3}{2}\right\}$

c) $P = \{y \in \mathbb{Z} \mid (y - 1)(y + 2)(y - 3) = 0\}$ $P = \{-2, 1, 3\}$

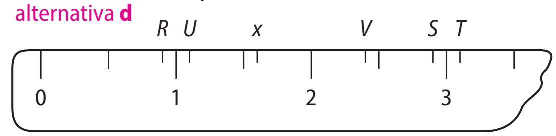
d) $S = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 25 = 0\}$ $S = \{5\}$

38. (UFMG) Considere x, y e z números naturais. Na divisão de x por y, obtém-se quociente z e resto 8. Sabe-se que a representação decimal de $\frac{x}{y}$ é a dízima periódica 7,363636...
Então, o valor de $x + y + z$ é alternativa **d**

a) 190. **c)** 191.

b) 193. **d)** 192.

39. (OBMEP) A figura representa parte de uma régua graduada de meio em meio centímetro, onde estão marcados alguns pontos. Qual deles melhor representa o número $2x - 2$?
alternativa **d**



EDITORIA DE ARTE

a) R **c)** T **e)** V

b) S **d)** U

40. O valor de $\frac{6}{0{,}333...}$ é alternativa **c**

a) 20,0 **c)** 18,0 **e)** 2,0

b) 18,18... **d)** 2,2...

41. (Cesgranrio-RJ) Ordenando os números racionais $p = \frac{13}{24}$, $q = \frac{2}{3}$ e $r = \frac{5}{8}$, obtemos: alternativa **a**

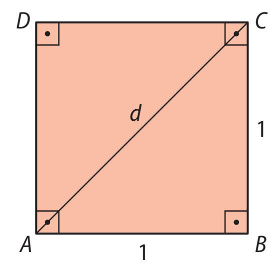
a) $p < r < q$ **d)** $q < r < p$

b) $p < q < r$ **e)** $r < q < p$

c) $r < p < q$

» Conjunto dos números irracionais

Antigamente, o conjunto dos números racionais parecia ser ideal para todas as situações que envolviam operações aritméticas. E, de fato, durante algum tempo, acreditou-se que os números racionais resolveriam todos os problemas que envolviam medições. No entanto, já na época de Pitágoras e seus discípulos, cerca de VI a.C., alguns problemas desafiavam essa teoria, como o apresentado a seguir.



EDITORIA DE ARTE

Qual é a medida da diagonal *d* do quadrado *ABCD* cujo lado mede 1 unidade de comprimento?

Usando o teorema de Pitágoras no triângulo *ABC*, temos:

$$d^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow d^2 = 2$$

Para determinar o valor de *d*, devemos responder à seguinte questão: qual é o número cujo quadrado é igual a 2? Inicialmente, vamos tentar calcular o valor de *d* usando aproximações por números racionais.

$1^2 = 1$ $\qquad$ $2^2 = 4$

Logo, *d* é um valor que está entre 1 e 2 ($1 < d < 2$).

Em seguida, com o auxílio de uma calculadora, vamos determinar a primeira casa decimal de *d*.

$(1{,}1)^2 = 1{,}21$ $\qquad$ $(1{,}3)^2 = 1{,}69$ $\qquad$ $(1{,}5)^2 = 2{,}25$

$(1{,}2)^2 = 1{,}44$ $\qquad$ $(1{,}4)^2 = 1{,}96$

Logo, *d* está entre 1,4 e 1,5, ou seja, $1{,}4 < d < 1{,}5$.

Então, 1,4 é um valor aproximado de *d*, por falta, com uma casa decimal.

Usando o mesmo procedimento, determinamos a segunda casa decimal de *d*.

$(1{,}41)^2 = 1{,}9881$ $\qquad$ $(1{,}42)^2 = 2{,}0164$

Logo, *d* está entre 1,41 e 1,42, ou seja, $1{,}41 < d < 1{,}42$.

Aqui, 1,41 é um valor aproximado de *d*, por falta, com duas casas decimais.

Pense e responda

- Com base nos cálculos feitos, indique uma aproximação, por excesso, para a medida *d* da diagonal do quadrado apresentado com três casas decimais. 1,415
- Utilizando uma calculadora e o raciocínio apresentado aqui, determine uma aproximação com duas casas decimais para o número irracional $\sqrt{3}$.

Exemplo de resposta:
Aproximação por falta: 1,73; aproximação por excesso: 1,74

Mediante outras tentativas, percebemos que a medida *d* da diagonal está entre 1,414 e 1,415, ou seja, $1{,}414 < d < 1{,}415$. Observe:

$(1{,}414)^2 = 1{,}999396$ $\qquad$ $(1{,}415)^2 = 2{,}002225$

Nesse caso, 1,414 é um valor aproximado de *d*, por falta, com três casas decimais.

Se continuarmos repetindo esse processo, vamos obter quantas casas decimais quisermos, mas encontraremos sempre um valor aproximado para *d*, por falta, pois esse valor, elevado ao quadrado, é sempre um número menor do que 2.

Poderíamos também obter o valor aproximado de *d* por excesso, ou seja, utilizando as aproximações para *d* tais que, elevadas ao quadrado, ultrapassam o valor 2.

Representamos o valor exato para a medida da diagonal do quadrado de lado 1 por $\sqrt{2}$. Utilizando uma calculadora científica, é possível obter as primeiras casas decimais de $\sqrt{2}$, que indicamos assim:

$$\sqrt{2} = 1{,}414213562...$$

Esse número tem uma infinidade de casas decimais que não apresentam padrão de repetição; logo, não é uma dízima periódica, e é possível demonstrar que números desse tipo não podem ser escritos na forma de fração com números inteiros (com denominador não nulo). Portanto, $\sqrt{2}$ não é um número racional; é um número irracional, que faz parte do conjunto dos números irracionais.

O **conjunto dos números irracionais**, que indicamos por $\mathbb{I}$, é o conjunto formado pelos números que têm uma representação decimal infinita e não periódica.

Para realizar cálculos aproximados, podemos utilizar os números irracionais em sua representação decimal com quantas casas decimais desejarmos. Por exemplo:

$$\sqrt{3} \simeq 1{,}73205 \text{ e } \sqrt{2} \simeq 1{,}41$$

Esse símbolo significa **aproximadamente igual a**.

Observe outros exemplos de números irracionais e suas primeiras casas decimais, obtidas com o auxílio de uma calculadora científica:

- $\sqrt{13} = 3{,}605551275...$ • $\sqrt[3]{5} = 1{,}709975946...$ • $\pi = 3{,}141592653...$

A respeito dos números irracionais, é possível demonstrar que:

a) as raízes quadradas de números naturais que não são quadrados perfeitos são números irracionais. Exemplos:
- $\sqrt{10} = 3{,}162277660...$
- $\sqrt{24} = 4{,}898979485...$

b) em particular, as raízes quadradas de números primos positivos são números irracionais. Exemplos:
- $\sqrt{3} = 1{,}732050807...$ • $\sqrt{7} = 2{,}645751311...$ • $\sqrt{61} = 7{,}810249675...$

c) a soma de um número racional com um número irracional é um número irracional. Exemplos:
- $3 + \sqrt{2} = 3 + 1{,}414213562... = 4{,}414213562...$
- $\sqrt{5} + 1{,}5 = 2{,}236067977... + 1{,}5 = 3{,}736067977...$

d) o resultado da subtração entre um número racional e um número irracional, e vice-versa, é um número irracional. Exemplos:
- $1 - \pi = 1 - 3{,}141592653... = -2{,}141592653...$
- $\sqrt{6} - 4 = 2{,}449489742... - 4 = -1{,}550510257...$

e) o produto de um número racional não nulo por um número irracional é um número irracional. Exemplos:
- $2 \cdot \sqrt{7} = 2 \cdot 2{,}645751311... = 5{,}291502622...$
- $-\dfrac{1}{3} \cdot \pi = -\dfrac{\pi}{3} = -1{,}047197551...$

f) o quociente de um número racional não nulo por um número irracional é um número irracional. Exemplos:
- $5 : \sqrt{3} = \dfrac{5}{\sqrt{3}} = \dfrac{5\sqrt{3}}{3} = 2{,}886751345...$
- $7 : \sqrt{2} = \dfrac{7}{\sqrt{2}} = \dfrac{7\sqrt{2}}{2} = 4{,}949747468...$

Professor, se julgar interessante, comentar com os estudantes que o quociente de um número irracional por um número racional não nulo também é um número irracional.

Destacamos dois subconjuntos de $\mathbb{I}$:
- Números irracionais positivos: $\mathbb{I}_+$ • Números irracionais negativos: $\mathbb{I}_-$

Saiba que...

Uma calculadora científica é capaz de realizar outras operações e funções além das operações aritméticas básicas. Além da versão física, também está disponível digitalmente na maioria dos sistemas operacionais dos computadores e celulares.

Saiba que...

- Um número irracional não pode ser expresso por uma fração formada por números inteiros, com denominador não nulo.
- Número quadrado perfeito é o número natural cuja raiz quadrada é um número natural. Assim, 1, 9, 25 e 64 são exemplos de quadrados perfeitos, pois: $\sqrt{1} = 1$; $\sqrt{9} = 3$; $\sqrt{25} = 5$; $\sqrt{64} = 8$.

Pense e responda

- A soma de dois números irracionais sempre é um número irracional? Justifique.

Não. Espera-se que os estudantes apresentem algum contraexemplo, como: $\sqrt{2} + (-\sqrt{2} + 1) = 1$.

- O produto de dois números irracionais sempre é um número irracional? Justifique.

Não. Espera-se que os estudantes apresentem algum contraexemplo, como: $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5$.

Alguns números irracionais famosos

O número pi (π)

O número representado pela letra grega π (pi) é um dos números irracionais mais conhecidos no meio matemático. O **número π** é a constante obtida da razão entre o comprimento de uma circunferência e a medida de seu diâmetro. Essa razão não pode ser expressa na forma de fração com números inteiros (com denominador não nulo), isto é, π é um número irracional e sua representação decimal é infinita e não periódica: $\pi = 3{,}141592653...$.

As aproximações do número π já eram conhecidas por muitas civilizações antigas, como a babilônica e a egípcia, que sabiam que essa razão era maior do que 3. Por exemplo, essa constante aparece com o valor 3,16 (na notação atual) no papiro de Ahmes (cerca de 1650 a.C.) e com o valor 3,14 no papiro de Moscou (cerca de 1850 a.C.).

No entanto, a designação dessa constante pela letra grega π apareceu apenas em 1706, quando o matemático inglês William Jones (1675-1749) usou esse símbolo pela primeira vez para expressar essa razão. Euler adotou o símbolo em 1737, o qual rapidamente se tornou uma notação padrão.

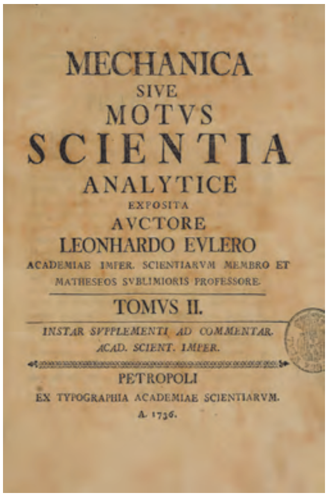
O número de Euler (e)

O número irracional *e*, chamado de **número de Euler**, cujo valor é 2,718281828..., tem diversas aplicações na Matemática, bem como em outras ciências, como Economia, Biologia e Estatística. Esse número irracional também é chamado de número de Napier, graças aos estudos relacionados aos logaritmos feitos pelo matemático John Napier (1550-1617).

A primeira referência a esse número foi publicada em 1618, em um trabalho sobre logaritmos realizado por esse matemático. O valor da constante não aparece nesse trabalho, há apenas uma lista de logaritmos naturais de diversos números.

Anos depois, Jacob Bernoulli (1655-1705) indicou um possível valor aproximado para esse número, enquanto estudava soluções para problemas de juro composto no campo financeiro.

Leonhard Euler (1707-1783) adotou a letra *e* para representar a constante em sua obra **Mechanica**, publicada em 1736, que descreve analiticamente a matemática que rege os movimentos em Física. O número *e* é bastante utilizado no cálculo de logaritmos e de funções exponenciais e logarítmicas.



COLEÇÃO PARTICULAR

- EULER, Leonhard. **Mechanica siue motus scientia analytice exposita**. São Petersburgo: Ex Typographia Academiae Scientiarum, 1736. Primeira página.

Para assistir

- PARA que serve o pi e por que esse número causa tanto fascínio? [*S. l.*: *s. n.*], 2020. 1 vídeo (3 min). Publicado pelo canal BBC News Brasil. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=vY6965UdcLI. Acesso em: 26 jun. 2024.
O vídeo apresenta curiosidades sobre o número π e suas casas decimais.

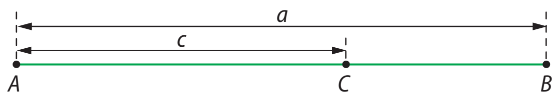
A razão áurea

A razão áurea está relacionada à divisão de um segmento de reta em média e extrema razão. Acompanhe.

Dado um segmento $\overline{AB}$ de medida a, dividi-lo em média e extrema razão é determinar o ponto C tal que $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$.

Indicando a medida do segmento $\overline{AC}$ por c, a proporção fica:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{c}{a-c} \Rightarrow c^2 + ac - a^2 = 0$$



A equação $c^2 + ac - a^2 = 0$ é uma equação do 2º grau, cujo método de resolução será apresentado posteriormente neste Volume.

A partir da resolução dessa equação na incógnita c, obtém-se a razão:

$$\frac{a}{c} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

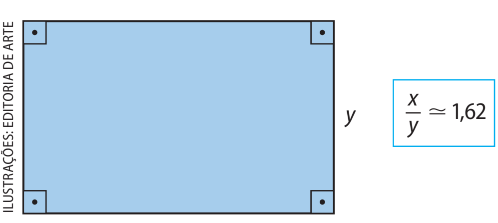
Essa razão é conhecida como **razão áurea**, e o número irracional $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, cujo valor é 1,618033988..., é chamado de **número de ouro**, representado pela letra grega maiúscula ϕ (lê-se: fi).

A "divisão de um segmento em média e extrema razão" foi um dos assuntos da escola pitagórica, grupo de estudos criado por Pitágoras, responsável por grandes descobertas por volta do século VI a.C. Séculos mais tarde, essa razão ficou conhecida como razão áurea.

A razão áurea também esteve presente nos trabalhos de outros matemáticos, principalmente naqueles desenvolvidos por Fibonacci (1170-1250) e por Luca Pacioli (1445-1517).

Outra denominação para a razão áurea é proporção áurea, considerada harmônica entre dois segmentos de reta, ou seja, considerada o perfeito equilíbrio, ou proporcionalidade, entre as medidas de dois segmentos de reta. Por exemplo, um retângulo áureo é aquele que possui a razão entre suas medidas igual a ϕ. Nesta figura, o retângulo tem medidas próximas às de um retângulo áureo.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

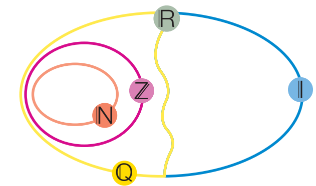


A razão áurea foi objeto de grande admiração e estudo desde a Antiguidade, pois é encontrada em diversas formas de arte e na arquitetura, como na pirâmide de Quéops, na arquitetura egípcia; no Parthenon (construído entre 447 a.C. e 433 a.C.), na arquitetura grega; na obra **Homem vitruviano**, de Leonardo da Vinci (1452-1519); entre outras.

» Conjunto dos números reais

Reunindo os números racionais aos números irracionais, formamos o **conjunto dos números reais**, representado por $\mathbb{R}$.

Assim, os conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais e irracionais estão contidos no conjunto dos números reais, ou seja, são subconjuntos de $\mathbb{R}$. Observe o diagrama.



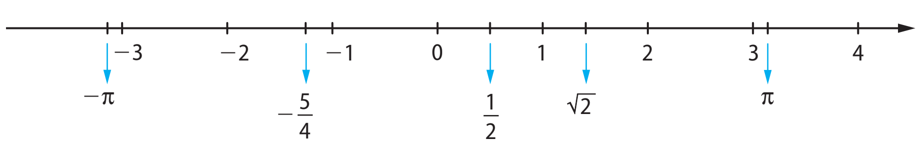
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ e $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$, além disso, $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$.

Já aprendemos a marcar, na reta orientada, pontos que representam números racionais. Aprendemos, também, que os números racionais não são suficientes para preencher toda a reta orientada. É possível marcar pontos na reta que representam números irracionais. Observe alguns números racionais e irracionais representados na reta orientada:

Saiba que...

O ponto que representa o número zero também é chamado de origem da reta real.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE



Agora, com os números irracionais na reta orientada, podemos dizer que ela está completa e que não há mais "buracos" em seu preenchimento. Podemos demonstrar que, ao marcarmos os números racionais e os irracionais na reta orientada, ela fica completa, com todos os números reais. A reta assim construída é denominada **reta numérica** ou **reta real**.

Cada ponto da reta numérica pode ser associado a um único número real, e cada número real pode ser associado a um único ponto da reta numérica, ou seja, dizemos que há uma correspondência biunívoca dos números reais com os pontos da reta.

A respeito dos números reais:

a) A soma de dois números reais é um número real.

b) A diferença de dois números reais é um número real.

c) O produto de dois números reais é um número real.

d) O quociente de dois números reais, sendo o divisor diferente de zero, é um número real.

e) Os conceitos de números opostos e de números inversos estudados nos conjuntos numéricos anteriores também são válidos para os números reais.

Exemplos:

- O oposto de $\sqrt{2}$ é $-\sqrt{2}$, pois $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$
- O inverso de π é $\frac{1}{\pi}$, pois $\pi \cdot \frac{1}{\pi} = 1$.

No conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, destacamos os seguintes subconjuntos:

- números reais não nulos: $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$
- números reais não negativos: $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$
- números reais não positivos: $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0\}$
- números reais positivos: $\mathbb{R}^*_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
- números reais negativos: $\mathbb{R}^*_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

Saiba que...

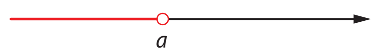
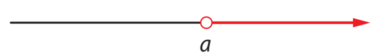
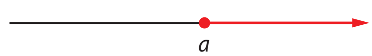
As letras $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ são as iniciais das palavras número (ou natural), quociente e real. A letra $\mathbb{Z}$ é inicial da palavra *zahl*, que significa número em alemão.

LIMA, Elon L. *et al*. **A Matemática do Ensino Médio**. 11. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016. (Coleção Professor de Matemática, v. 1, p. 58).

Intervalos reais

Existem subconjuntos de $\mathbb{R}$, chamados de **intervalos reais**, que são determinados por desigualdades. Os intervalos podem ser representados de diversas maneiras, como mostrado a seguir.

Dados dois números reais a e b, chamados de **extremos do intervalo**, com $a < b$, temos:

	Representação na reta real	Representação por notação de conjuntos
Intervalo aberto		$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ ou $]a, b[$
Intervalo fechado		$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ ou $[a, b]$
Intervalos semiabertos		$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$ ou $[a, b[$
		$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$ ou $]a, b]$
Intervalos ilimitados		$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$ ou $]-\infty, a[$
		$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant a\}$ ou $]-\infty, a]$
		$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ ou $]a, +\infty[$
		$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant a\}$ ou $[a, +\infty[$
		$\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Observações:

- A bolinha vazia (○) indica que os extremos não pertencem ao intervalo.
- A bolinha cheia (●) indica que os extremos pertencem ao intervalo.
- O símbolo $+\infty$ lê-se "mais infinito".
- O símbolo $-\infty$ lê-se "menos infinito".
- Os símbolos $+\infty$ e $-\infty$ não são números reais, são apenas símbolos usados na notação de intervalos ilimitados.

Saiba que...

Outra maneira de representar os intervalos abertos é utilizando parênteses. Observe:

$]a, b[\; = (a, b)$

$]a, b] = (a, b]$

$[a, b[\; = [a, b)$

Observe alguns exemplos de intervalos reais a seguir.

a) $[-4, 3[$ ou

$\{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leqslant x < 3\}$ ou

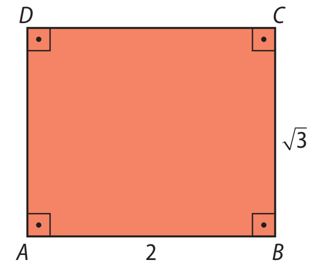
b) $]-\infty, -2]$ ou

$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2\}$ ou

c) $]0, +\infty[$ ou

$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ ou

ATIVIDADES RESOLVIDAS



11. Determine a área, o perímetro e a diagonal do retângulo *ABCD*. As medidas obtidas são números irracionais?

Resolução

Vamos calcular a área *A* do retângulo dada pelo produto da medida da base pela medida da altura:

$A = 2 \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

A medida da área do retângulo é irracional, pois o produto de um número racional (não nulo) por um número irracional é um número irracional.

O perímetro *P* do retângulo é dado pela soma das medidas de seus lados:

$P = 2 + \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} \Rightarrow P = 4 + 2\sqrt{3}$

A medida do perímetro do retângulo é irracional, pois a soma de um número racional com um número irracional é um número irracional.

Para determinarmos a medida da diagonal *d* do retângulo, aplicamos o teorema de Pitágoras no triângulo *ABD*:

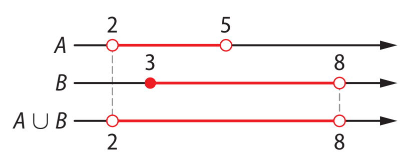
$d^2 = 2^2 + (\sqrt{3})^2 \Rightarrow d^2 = 4 + 3 = 7 \Rightarrow d = \sqrt{7}$

A medida da diagonal do retângulo é irracional, pois a raiz quadrada de um número primo positivo é um número irracional.

12. Se $A =]2, 5[$ e $B = [3, 8[$, determine $A \cup B$ e $A \cap B$.

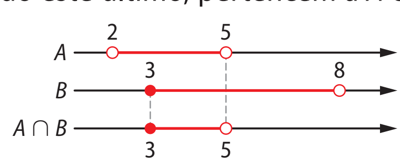
Resolução

As operações de união e intersecção com intervalos reais funcionam da mesma maneira que as operações de união e intersecção com conjuntos estudadas anteriormente neste Capítulo. No caso dos intervalos, é interessante começar pela análise dos extremos. Assim, a união dos intervalos *A* e *B* é dada por:



Para a intersecção, também vamos analisar os extremos dos intervalos. Observe que 3 é elemento de *A* e também de *B*; e 5 é elemento de *B* e não é elemento de *A*.

Os elementos de 3 até 5, excluído este último, pertencem a *A* e a *B*. Logo:



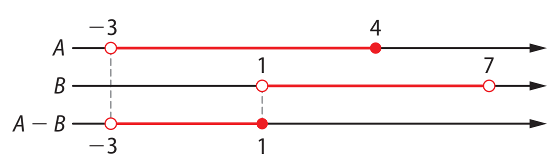
Assim, temos: $A \cup B =]2, 8[$ e $A \cap B = [3, 5[$.

13. Dados $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leqslant 4\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 7\}$, calcule $A - B$.

Resolução

O conjunto $A - B$ é formado pelos elementos que pertencem a *A* e não pertencem a *B*.

Observe que o número 1 pertence ao conjunto *A*, mas não pertence ao conjunto *B*; portanto, ele pertence ao conjunto $A - B$.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

A diferença dos conjuntos é $A - B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leqslant 1\}$.

ATIVIDADES

44. Exemplo de resposta:
a) $a = \sqrt{2}$ e $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$
b) $a = \sqrt{2}$ e $b = -\sqrt{2}$

42. Determine os elementos dos conjuntos.

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3x - 4x - 4 = 0\}$ $A = \varnothing$

b) $B = \{y \in \mathbb{I} \mid y^2 - 7 = 0\}$ $B = \{-\sqrt{7}, \sqrt{7}\}$

c) $C = \left\{a \in \mathbb{N} \mid \frac{a}{4} + 0{,}25a + \frac{3}{2}a = 2\right\}$ $C = \{1\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{Q} \mid 3 + x^2 = 4\}$ $D = \{-1, 1\}$

e) $E = \left\{y \in \mathbb{Q} \mid \frac{y}{3} + y = \frac{1}{7}\right\}$ $E = \left\{\frac{3}{28}\right\}$

f) $F = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4 = 0\}$ $F = \{-2, 2\}$

43. Sendo $\sqrt{3} \simeq 1{,}732$, calcule um valor aproximado de:

a) $\frac{\sqrt{3} + 2}{2}$ aproximadamente 1,866

b) $\frac{2\sqrt{3} - 1}{4}$ aproximadamente 0,616

44. Sejam a e b números irracionais quaisquer. As seguintes afirmações são FALSAS:

a) $a \cdot b$ sempre é um número irracional;

b) $a + b$ sempre é um número irracional.

Em cada caso, dê um exemplo que indica que as afirmações são falsas.

45. Assinale a afirmação verdadeira. alternativa **b**

a) $(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)$ é irracional e 0,999... é racional.

b) $(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)$ é racional e 0,999... é racional.

c) $(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)$ é racional e 0,999... é irracional.

d) $(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)$ é irracional e 0,999... é irracional.

e) $(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)$ e 0,999... não são números reais.

46. Usando a notação de conjuntos, escreva os intervalos a seguir.

a) $[6, 10]$ $\{x \in \mathbb{R} \mid 6 \leqslant x \leqslant 10\}$

b) $]-1, 5]$ $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leqslant 5\}$

c) $]-6, 0[$ $\{x \in \mathbb{R} \mid -6 < x < 0\}$

d) $[0, +\infty[$ $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$

e) $]-\infty, 3[$ $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$

47. Represente, na reta real, os intervalos a seguir.
Ver as **Orientações para o professor**.

a) $[2, 8]$

b) $]-\infty, 2]$

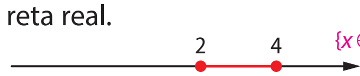
c) $[-6, -1[$

d) $[2, +\infty[$

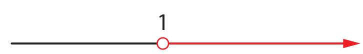
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}$

f) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x \leqslant 2\}$

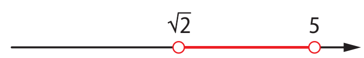
48. Usando a notação de conjuntos, escreva os intervalos a seguir, que estão representados na reta real.

a)


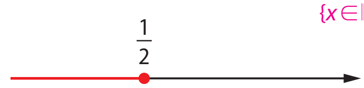
$\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 4\}$

b)


$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

c)


$\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{2} < x < 5\}$

d)


$\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \frac{1}{2}\right\}$

49. Determine $A \cup B$ em cada caso.

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 3\}$ e
$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 5\}$ $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 5\}$

b) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x \leqslant 1\}$ e
$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 3\}$ $\{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x \leqslant 1$ ou $2 \leqslant x \leqslant 3\}$

c) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}$ e
$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 4\}$ $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 5\}$

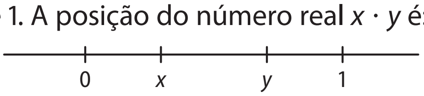
d) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x < 2\}$ e
$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -2\}$

50. Dados os conjuntos $A = [-1, 6[$, $B =]-4, 2]$ e $E =]-2, 4[$, calcule:

a) $(B \cup E) - A$ $]-4, -1[$

b) $E - (A \cap B)$ $]-2, -1[\cup]2, 4[$

51. (Fuvest-SP) Na figura abaixo estão representados geometricamente os números reais 0, x, y e 1. A posição do número real $x \cdot y$ é:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

a) à esquerda do zero alternativa **b**

b) entre zero e x

c) entre x e y

d) entre y e 1

e) à direita de 1

Incomensurabilidade e números irracionais

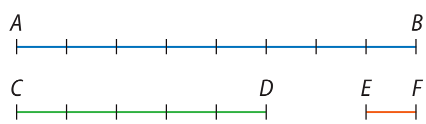
Um dos assuntos que gerou muita discussão entre os estudiosos da Antiguidade foi o conceito de grandezas incomensuráveis, advindo da descoberta de que os números racionais não eram suficientes para medir tudo o que se desejava. Leia o trecho de um texto que trata desse assunto.

Grandezas incomensuráveis e números irracionais

Existem, em Matemática, conceitos que parecem muito simples a uma visão superficial, mas que, submetidos a uma análise mais cuidadosa, revelam aspectos verdadeiramente surpreendentes.

[...] Exploremos alguns fatos notáveis e inesperados, que estão ligados à primeira grande crise do desenvolvimento da Matemática, ocorrida no final do 5º século a.C.

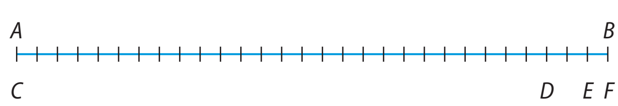
Uma questão com que lidavam os matemáticos gregos daquela época era a de comparar grandezas da mesma espécie, como dois segmentos de reta, duas áreas ou dois volumes. No caso de dois segmentos retilíneos *AB* e *CD*, dizer que a razão $\frac{AB}{CD}$ é o número racional $\frac{m}{n}$ significava para eles (e ainda significa para nós) que existia um terceiro segmento *EF* tal que *AB* fosse *m* vezes *EF* e *CD* *n* vezes esse mesmo segmento *EF*. Na Fig. 1 ilustramos essa situação com $m = 8$ e $n = 5$.



$$\frac{AB}{CD} = \frac{8}{5}$$

Fig. 1

No tempo de Pitágoras (580 – 500 a.C. aproximadamente) – e mesmo durante boa parte do 5º século a.C. – pensava-se que os números racionais fossem suficientes para comparar segmentos de reta; isto é, dados dois segmentos *AB* e *CD*, seria sempre possível encontrar um terceiro segmento *EF* contido um número inteiro de vezes em *AB* e outro número inteiro de vezes em *CD*, situação esta que descrevemos dizendo que *EF* é um *submúltiplo comum* de *AB* e *CD*. Uma simples reflexão revela que essa é uma ideia muito razoável. Afinal, se *EF* não serve, podemos imaginar um segmento menor, outro menor ainda, e assim por diante. Nossa intuição geométrica parece dizer-nos que há de existir um certo segmento *EF*, talvez muito pequeno, mas satisfazendo aos propósitos desejados. Na Fig. 2 ilustramos uma situação com segmento *EF* bem menor que o da Fig. 1. O leitor deve ir muito além, imaginando um segmento *EF* tão pequeno que nem possa mais desenhar, para se convencer, pela sua intuição geométrica, da possibilidade de sempre encontrar um submúltiplo comum de *AB* e *CD*.



$$\frac{AB}{CD} = \frac{29}{26}$$

Fig. 2

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Dois segmentos nessas condições são ditos *comensuráveis*, justamente por ser possível medi-los ao mesmo tempo, com a mesma unidade *EF*. Entretanto, não é verdade que dois segmentos quaisquer sejam sempre comensuráveis. Em outras palavras, existem segmentos *AB* e *CD* sem unidade comum *EF*, os chamados segmentos *incomensuráveis*. Esse é um fato que contraria nossa intuição geométrica, e por isso mesmo a descoberta de grandezas incomensuráveis na Antiguidade representou um momento de crise no desenvolvimento da Matemática.

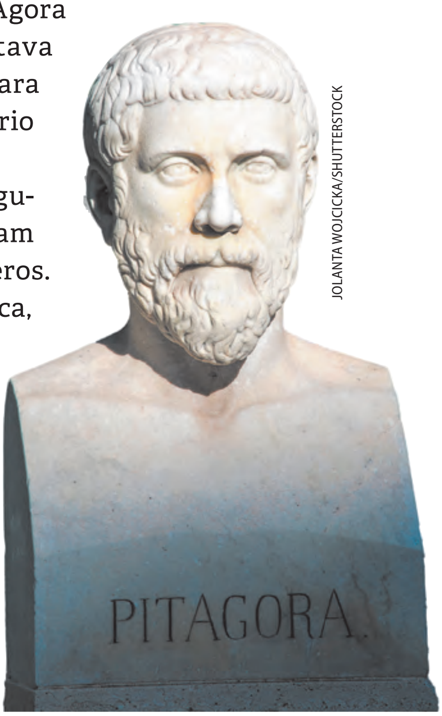
Foram os próprios pitagóricos que descobriram grandezas incomensuráveis, provavelmente entre 450 e 400 a.C.; e, ao que tudo indica, isto se fez através de um argumento geométrico, [...] demonstrando que o lado e a diagonal de um quadrado são segmentos incomensuráveis.

[...]

A descoberta dos incomensuráveis representou, no 5º século a.C., uma derrota para os pitagóricos. De fato, para eles o número era a essência de tudo. Eles acreditavam na possibilidade de explicar todos os fenômenos do mundo sensível em termos dos números e de suas relações, tanto na Geometria como na Música, na Astronomia ou na Física, enfim, o número seria a essência última do ser e de todos os fenômenos. Mas por número eles entendiam apenas o que chamamos hoje de "números naturais", ou inteiros positivos: 1, 2, 3, 4, ... Nem as frações eram números, já que elas apareciam como relações entre grandezas da mesma espécie. Agora que haviam sido descobertas grandezas incomensuráveis, estava claro que os números (naturais) eram insuficientes até mesmo para definir a razão entre duas grandezas, o que se constituía num sério entrave à Filosofia Pitagórica.

Ao mesmo tempo em que essas coisas aconteciam, outros argumentos propostos pelos filósofos da época [...] também apontavam dificuldades na suposta harmonia entre a Geometria e os números. Tudo isso culminou numa crise no desenvolvimento da Matemática, crise essa que só foi definitivamente superada com a criação da teoria dos números reais (racionais e irracionais) no século passado, devido, sobretudo aos trabalhos do matemático alemão Richard Dedekind (1831-1916).

ÁVILA, Geraldo. Grandezas incomensuráveis e números irracionais. **Revista do Professor de Matemática (RPM)**, São Paulo, n. 5, [201-]. Disponível em: http://www.rpm.org.br/cdrpm/5/3.htm. Acesso em: 16 jul. 2024.



JOLANTA WOJCICKA/SHUTTERSTOCK

[BUSTO de Pitágoras]. [ca. 1608-1633]. 1 escultura. Jardins da Vila Borghese, Roma (Itália). Fotografia de 2020.

Para ler

- STEWART, Ian. **O fantástico mundo dos números**: a matemática do zero ao infinito. Rio de Janeiro: Zahar, 2016.

  Um livro que traz informações interessantes a respeito de diversos números por meio de textos leves e divertidos. Por exemplo, você sabia que 43 252 003 274 489 856 000 é o número de maneiras possíveis de rearranjar um cubo mágico?

EDITORA ZAHAR

Capa do livro **O fantástico mundo dos números**.

Alimentação

Hábitos saudáveis, como exercícios regulares, sono adequado e alimentação balanceada, são alguns dos fatores para uma vida com qualidade. Leia o trecho de um texto a respeito de uma alimentação saudável e faça o que se pede em cada questão.

Alimentação saudável

A alimentação para os seres humanos possui significado maior do que apenas garantir as necessidades do corpo. O ato de comer está relacionado a valores sociais, culturais, afetivos e sensoriais. Na maioria das vezes, comer é um momento de prazer e confraternização com nossos amigos e familiares.

O alimento torna-se, assim, muito mais do que uma fonte de nutrientes. Apreciamos as cores e gostamos de sentir a textura e o sabor da comida. Mas isso não é tudo! Nesse jogo de sensações, precisamos lembrar que uma alimentação saudável:

- não precisa ser cara, pois pode ser feita com alimentos naturais, produzidos na região em que vivemos;
- deve ser colorida e composta por alimentos variados;
- é saborosa;
- precisa ter qualidade e ser consumida na quantidade certa;
- deve ser segura para o consumo, ou seja, estar livre de contaminação.

[...]

Mudanças na alimentação ao longo do tempo e seu impacto na saúde

Com a evolução da sociedade, muitos tipos de alimentos foram criados e, para garantir maior aceitação da população, foram introduzidos novos ingredientes. Com isso, surgiram produtos cada vez mais atraentes e saborosos.

ALEXANDER RATHS/SHUTTERSTOCK

DIOGOPPR/SHUTTERSTOCK.COM

Prato com alimentos variados.

Açúcar: é fonte de energia para o ser humano. Mas, quando comemos em exagero, pode causar aumento de peso e excesso de gordura no sangue.

Gordura saturada: é um tipo de gordura muito encontrado em alimentos de origem animal. Comê-la excessivamente pode provocar o acúmulo de gordura nos vasos sanguíneos e causar doenças do coração.

Por exemplo: açúcar para adoçar; gordura saturada e gordura trans para dar maior maciez, leveza e cremosidade; sódio para acentuar o sabor; corantes para dar cor especial e aromatizantes para criar um cheirinho irresistível.

[...]

No entanto, todos esses novos produtos reduziram a qualidade nutricional dos alimentos. Alguns deles têm se tornado tão populares que passaram a ser cada vez mais desejados, como os salgadinhos, refrigerantes, sorvetes, biscoitos e muitos outros.

Então, parte da população habituou-se a comer esses alimentos somente para saciar desejos e estar "na moda", sem considerar que os excessos podem trazer problemas à saúde, como a obesidade, a pressão alta, o diabetes e as doenças do coração.

AGÊNCIA NACIONAL DE VIGILÂNCIA SANITÁRIA. **Alimentação saudável**: fique esperto! Brasília, DF: Anvisa, 2018. p. 4-7. Disponível em: https://www.gov.br/anvisa/pt-br/centraisdeconteudo/publicacoes/educacao-e-pesquisa/educanvisa/alimentacao-saudavel-fique-esperto.pdf/view. Acesso em: 16 jul. 2024.

Gordura trans: é produzida pela transformação de óleos vegetais em gordura vegetal hidrogenada. Está presente em produtos como biscoitos e chocolates. Consumida em excesso pode causar problemas de saúde, principalmente ao coração.

Sódio: faz parte do sal de cozinha e é acrescentado aos alimentos, pelas indústrias, para dar um sabor mais salgado e aumentar o tempo de conservação [...] do produto. Comer muito sódio pode causar pressão alta.

Professor, esta obra está atualizada conforme a grafia estabelecida pelo SI na publicação: BRASIL. Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia; PORTUGAL. Instituto Português da Qualidade. **O Sistema Internacional de Unidades** (**SI**): tradução luso-brasileira da 9ª edição. Brasília, DF: Inmetro; Caparica: IPQ, 2021.

Agora, faça o que se pede nas atividades a seguir.

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. De acordo com o texto, responda:

a) Quais são as características de uma alimentação saudável?

1. a) Conter, em sua composição, alimentos naturais, ser colorida e composta de alimentos variados, ser saborosa, ter qualidade, ser consumida na quantidade certa e estar livre de contaminação.

b) Quais problemas de saúde estão associados ao consumo excessivo de produtos que contêm açúcares, sódio e gorduras saturadas e trans? Doenças como obesidade, pressão alta, diabetes e doenças do coração.

c) Reflita sobre seus hábitos alimentares. O que pode ser melhorado para que você tenha uma alimentação saudável? Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes consigam, com base nas informações apresentadas no texto, identificar e apontar hábitos alimentares ruins que eles possam estar reproduzindo.

2. Você já ouviu falar sobre IMC? O Índice de Massa Corpórea (IMC) é adotado pela Organização Mundial da Saúde (OMS) para o cálculo da massa ideal de um indivíduo adulto. O cálculo pode ser realizado por meio da relação $IMC = \frac{massa}{(altura)^2}$, com a massa indicada em kilograma, e a altura, em metro. O valor obtido pode ser interpretado conforme a tabela.

a) Determine a classificação do IMC de uma pessoa de 80 kg e 1,70 m de altura. sobrepeso

b) Podemos escrever a faixa do IMC que determina a classificação "magro" como IMC < 18,5. Utilizando essa mesma simbologia, escreva as demais faixas.

Classificação internacional da obesidade segundo o IMC

IMC	Classificação
Menor do que 18,5	Magro
Entre 18,5 e 24,9	Normal
Entre 25,0 e 29,9	Sobrepeso
Entre 30,0 e 39,9	Obesidade
Maior do que ou igual a 40,0	Obesidade grave

Fonte dos dados: ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA PARA O ESTUDO DA OBESIDADE E DA SÍNDROME METABÓLICA. **Diretrizes brasileiras de obesidade 2016**. 4. ed. São Paulo: Abeso, 2016. p. 16. Disponível em: https://abeso.org.br/wp-content/uploads/2019/12/Diretrizes-Download-Diretrizes-Brasileiras-de-Obesidade-2016.pdf. Acesso em: 16 jul. 2024

2. b) normal: $18,5 \leqslant IMC \leqslant 24,9$; sobrepeso: $25,0 \leqslant IMC \leqslant 29,9$; obesidade: $30,0 \leqslant IMC \leqslant 39,9$; obesidade grave: $IMC \geqslant 40,0$

3. Reúna-se a mais dois colegas, e pesquisem a respeito de alimentos industrializados, alimentação balanceada e hábitos saudáveis. Elaborem um material informativo sobre esse assunto para ser apresentado aos demais colegas e membros da comunidade escolar. Pesquisa dos estudantes.

Pense e responda

Que conceitos estudados neste Capítulo você utilizou para realizar as atividades desta seção?

Resposta esperada: Cálculos com números racionais; intervalos reais

Algoritmos e fluxogramas

Um **algoritmo** é uma sequência simples e objetiva de instruções que pode ser utilizada para resolver um problema. Além disso, essa sequência deve ser finita e não pode permitir mais de uma interpretação. Já o **fluxograma** é um diagrama que é usado para uma representação visual de um algoritmo, utilizando, para isso, uma simbologia própria.

Vamos analisar um algoritmo que resolve o seguinte problema sobre conjuntos; depois, vamos construir um fluxograma que represente esse algoritmo.

O aplicativo de agendamento de aulas de uma academia registrou, em certa manhã, a seguinte movimentação de 68 alunos:

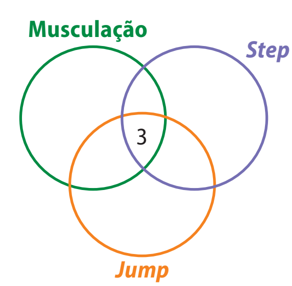
- 25 agendaram musculação
- 29 agendaram aula de *step*
- 30 agendaram aula de *jump*
- 9 agendaram musculação e aula de *step*
- 7 agendaram musculação e aula de *jump*
- 5 agendaram aulas de *step* e *jump*
- 3 agendaram musculação e aulas de *step* e *jump*

Determine quantos alunos agendaram somente musculação.

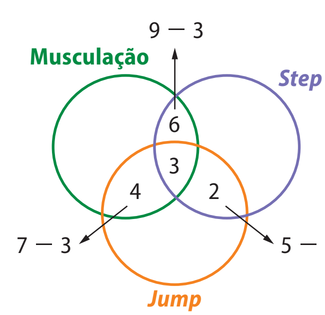
Um algoritmo que resolve o problema é:

I. Construa um diagrama de Venn para representar os três conjuntos (musculação, *step* e *jump*).

II. Indique o número de alunos que agendaram as três aulas na região do diagrama que representa a intersecção dos três conjuntos.

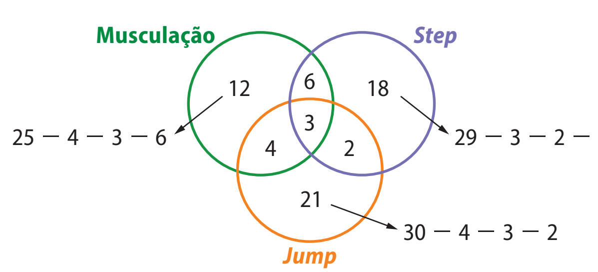


III. Registre no diagrama o número de alunos que agendaram duas aulas em cada uma das regiões que representa a intersecção de apenas dois conjuntos; porém, subtraia o número de alunos que agendaram as três aulas.

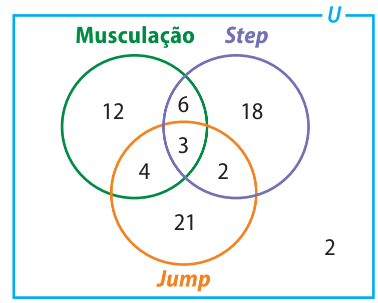


ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

IV. Complete o diagrama com o número de alunos que agendaram apenas uma aula, subtraindo o número de alunos indicados anteriormente no diagrama.



V. Adicione todos os números do diagrama e verifique se o total é igual ao total de alunos registrados no aplicativo da academia.
$12 + 6 + 18 + 4 + 3 + 2 + 21 = 66$; portanto, há uma diferença de 2 alunos.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

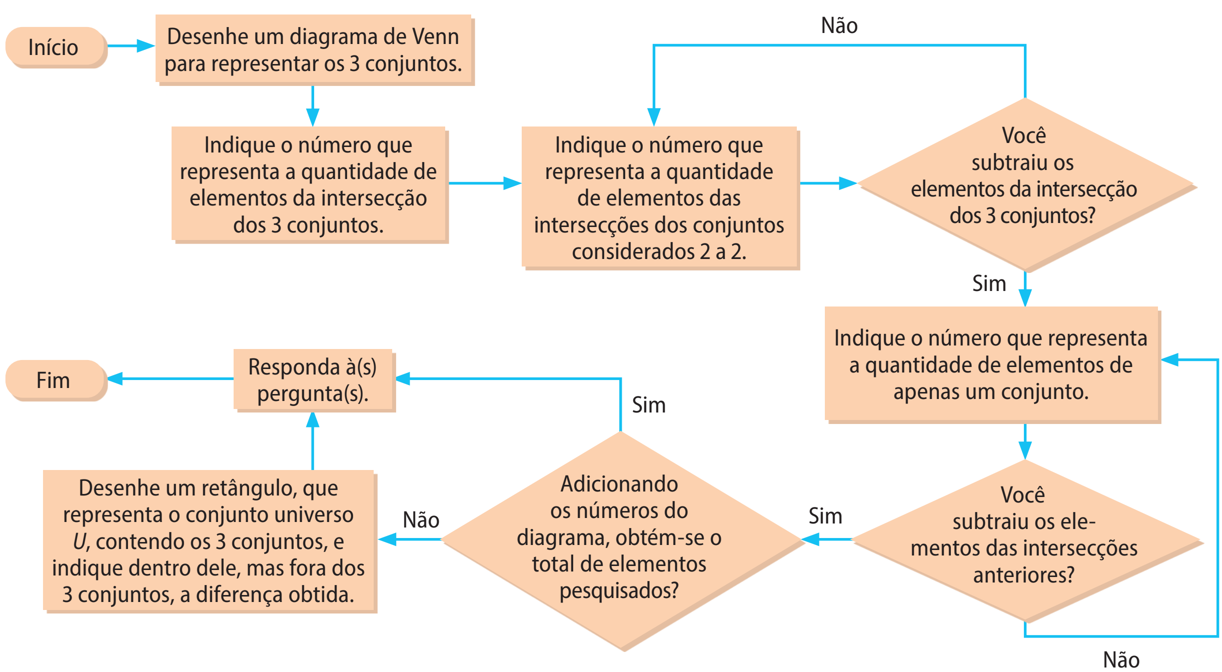
VI. Se a soma for diferente, significa que alguns alunos não fizeram agendamento para musculação, *step* ou *jump*. Nesse caso, desenhe um retângulo, que representa o conjunto universo *U*, contendo os 3 conjuntos, e indique dentro dele, mas fora dos 3 conjuntos, a diferença obtida.

VII. Observe os valores em cada região do diagrama e responda à pergunta inicial do problema.

Existem símbolos específicos que devem ser usados na construção de um fluxograma. A seguir, apresentamos alguns desses símbolos.

Indica o início e o fim do fluxograma. | Indica cada passo que precisa ser executado. | Indica uma tomada de decisão. | Indica a direção do fluxo.

A seguir, analise um fluxograma que mostra os passos para a resolução de problemas como o apresentado.



Agora, faça o que se pede nas atividades a seguir.

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. Na situação apresentada, observe o diagrama e determine quantos alunos agendaram:

a) somente musculação. 12 alunos

b) somente *step*. 18 alunos

c) somente *jump*. 21 alunos

2. Crie um algoritmo e, depois, um fluxograma para descrever como escovar os dentes.
Resposta pessoal. Ver as **Orientações para o professor**.

3. Construa um fluxograma para resolver o problema a seguir.
Em uma escola de Artes, estudam 400 alunos. Destes, 50 fazem curso de desenho, 35 fazem curso de canto e 6 fazem os dois cursos. Quantos alunos não fazem nenhum dos dois cursos?
Espera-se que os estudantes consigam, por meio de um fluxograma, obter o resultado 321.

1. (IFS-SE) O que podemos afirmar sobre os conjuntos A, B e C que satisfazem as seguintes condições: alternativa **c**

$$\begin{cases} A \cup B \cup C = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\} \\ A \cup C = \{b, c, d, e, f, g, h, i\} \\ A \cup B = \{a, b, e, f, g, h, i\} \\ A \cap B = \{f, g\} \\ B \cap C = \{b, f\} \\ C \cap A = \{e, f\} \end{cases}$$

a) $A = C$
b) $B = \{a, b, c, f, g\}$
c) $A = \{e, f, g, h, i\}$
d) $A \cap B \cap C = \{b, e, f, g\}$

2. (PUC-RJ) Uma prova com duas questões foi dada a uma classe de quarenta alunos. Dez alunos acertaram as duas questões, 25 acertaram a primeira e 20 acertaram a segunda questão. Quantos alunos erraram as duas questões? alternativa **e**

a) 40
b) 10
c) nenhum
d) 8
e) 5

3. (Enem/MEC) Um grupo sanguíneo, ou tipo sanguíneo, baseia-se na presença ou ausência de dois antígenos, A e B, na superfície das células vermelhas do sangue. Como dois antígenos estão envolvidos, os quatro tipos sanguíneos distintos são:

- Tipo A: apenas o antígeno A está presente;
- Tipo B: apenas o antígeno B está presente;
- Tipo AB: ambos os antígenos estão presentes;
- Tipo O: nenhum dos antígenos está presente.

Disponível em: http://saude.hsw.uol.com.br.
Acesso em: 15 abr. 2012 (adaptado).

Foram coletadas amostras de sangue de 200 pessoas e, após análise laboratorial, foi identificado que em 100 amostras está presente o antígeno A, em 110 amostras há presença do antígeno B e em 20 amostras nenhum dos antígenos está presente. Dessas pessoas que foram submetidas à coleta de sangue, o número das que possuem o tipo sanguíneo A é igual a alternativa **c**

a) 30.
b) 60.
c) 70.
d) 90.
e) 100.

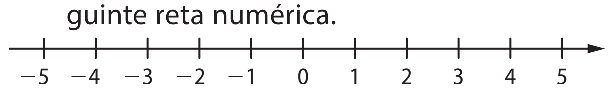
4. (UFS-SE) Os senhores A, B e C concorriam à liderança de certo partido político. Para escolher o líder, cada eleitor votou apenas em dois candidatos de sua preferência. Houve 100 votos para A e B, 80 votos para B e C e 20 votos para A e C. Em consequência: alternativa **e**

a) venceu A, com 120 votos.
b) venceu A, com 140 votos.
c) A e B empataram em primeiro lugar.
d) venceu B, com 140 votos.
e) venceu B, com 180 votos.

5. (UFRGS-RS) Em uma escola, sabe-se que $\frac{2}{5}$ dos estudantes gostam de praticar somente o esporte **A**, $\frac{1}{3}$ dos estudantes gostam de praticar somente o esporte **B**, e $\frac{1}{6}$ dos estudantes gostam de praticar os esportes **A** e **B**. alternativa **a**
A fração que representa a quantidade de estudantes dessa escola que não praticam o esporte **A** e não praticam o esporte **B** é

a) $\frac{1}{10}$.
b) $\frac{1}{5}$.
c) $\frac{2}{7}$.
d) $\frac{1}{2}$.
e) $\frac{9}{10}$.

6. (IFPI) O professor Antônio desenhou a seguinte reta numérica.



EDITORIA DE ARTE

O número $-\frac{17}{5}$ foi marcado entre que pontos dessa reta numérica? alternativa **d**

a) 2 e 3
b) 3 e 4
c) -3 e -2
d) -4 e -3
e) -5 e -4

7. (UFF-RJ) O número $\pi - \sqrt{2}$ pertence ao intervalo: alternativa **c**

a) $\left[1, \frac{3}{2}\right]$
b) $\left]\frac{1}{2}, 1\right]$
c) $\left]\frac{3}{2}, 2\right]$
d) $]-1, 1[$
e) $\left]-\frac{3}{2}, 0\right]$

8. (UFRGS-RS) Dados a e b números reais positivos, considere as afirmações abaixo. alternativa **a**

I. Se $a > b$, então $\sqrt{a} > \sqrt{b}$.
II. Para quaisquer a e b, $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ é um número irracional.
III. Para quaisquer a e b, $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 1$.

Quais estão corretas?

a) Apenas I.
b) Apenas III.
c) Apenas I e II.
d) Apenas II e III.
e) I, II e III.

9. (PUC-MG) A diferença $A - B$, sendo $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leqslant x \leqslant 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x < 5\}$ é igual a:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leqslant x < -2\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leqslant x \leqslant -2\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 5\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leqslant x \leqslant 5\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x < 5\}$

alternativa **a**

10. (UFSM-RS) Assinale verdadeira (V) ou falsa (F) em cada uma das afirmações a seguir.

( ) A letra grega π representa o número racional que vale 3,14159265.
( ) O conjunto dos números racionais e o conjunto dos números irracionais são subconjuntos dos números reais e possuem apenas um ponto em comum.
( ) Toda dízima periódica provém da divisão de dois números inteiros, portanto é um número racional.

A sequência correta é: alternativa **d**

a) F – V – V.
b) V – V – F.
c) V – F – V.
d) F – F – V.
e) F – V – F.

11. (PUCCamp-SP) Considere os conjuntos: alternativa **d**

$\mathbb{N}$, dos números naturais,
$\mathbb{Q}$, dos números racionais,
$\mathbb{Q}_+$, dos números racionais não negativos,
$\mathbb{R}$, dos números reais.

O número que expressa

a) a quantidade de habitantes de uma cidade é um elemento de $\mathbb{Q}_+$, mas não de $\mathbb{N}$.
b) a medida da altura de uma pessoa é um elemento de $\mathbb{N}$.
c) a velocidade média de um veículo é um elemento de $\mathbb{Q}$, mas não de $\mathbb{Q}_+$.
d) o valor pago, em reais, por um sorvete é um elemento de $\mathbb{Q}_+$.
e) a medida do lado de um triângulo é um elemento de $\mathbb{Q}$.

PARA REFLETIR

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Neste Capítulo, aprendemos que a ideia de conjunto está presente em algumas situações do dia a dia e estudamos como podemos representá-la matematicamente. Estudamos os tipos de conjuntos, as relações de pertinência e inclusão e a realização de operações com conjuntos: união, intersecção e diferença para poder compreender a linguagem matemática usada em determinados casos. Também estudamos os conjuntos numéricos, os intervalos reais e as maneiras de operar com eles.

Vamos refletir a respeito das aprendizagens do Capítulo **1**: Respostas pessoais.

- Nas páginas de abertura, foi apresentada uma situação com conjuntos. Depois de ter estudado o conteúdo deste Capítulo, você consegue identificar como a notação de conjuntos pode auxiliar na escrita de alguns conteúdos matemáticos? Você já tinha essa percepção antes de estudar os conteúdos do Capítulo?
- Você já conhecia algum dos conteúdos apresentados ao longo deste Capítulo? Qual(is)?
- Cite outras situações do dia a dia que envolvam a ideia de conjuntos.
- Explique o que significa dizer que um conjunto está contido em outro conjunto.
- O que significa dizer que dois conjuntos são iguais?
- Quantos elementos tem o conjunto de todos os números pares? E o conjunto de todos os números ímpares? Justifique sua resposta.
- Represente a diferença de dois conjuntos utilizando a linguagem matemática e um diagrama de Venn.
- Dê exemplos de números que compõem cada um dos conjuntos numéricos estudados.
- Cite outros conteúdos matemáticos em que a notação de conjuntos é utilizada.

CAPÍTULO

2 NOÇÕES DE ESTATÍSTICA

O envelhecimento populacional é uma realidade crescente no Brasil. Em 2022, conforme dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), 10,9% da população do país tinha 65 anos ou mais; em 2010, essa proporção era de 7,4%. Em 2022, o índice de envelhecimento chegou a 55,2, indicando que há 55,2 pessoas com 65 anos de idade ou mais para cada 100 crianças de 0 a 14 anos; em 2010, esse índice era de 30,7.

O aumento da expectativa de vida e a queda na taxa de fecundidade são os principais fatores para o envelhecimento da população brasileira, e os desafios desse envelhecimento são diversos: é preciso realizar a adaptação dos sistemas de saúde e melhorar a infraestrutura das cidades, além de garantir previdência e assistência social para atender às necessidades dessa população.

Políticas públicas voltadas para o envelhecimento ativo e inclusivo são essenciais para garantir qualidade de vida e participação social à população idosa. Para auxiliar na implementação de políticas públicas eficientes e fundamentar ações de melhorias, podem-se utilizar métodos e técnicas de pesquisas estatísticas, como as análises de dados.

A Estatística é uma área da Matemática que trabalha com a coleta, a organização, a análise e a representação de dados por meio de gráficos, tabelas e diagramas, assuntos que vamos estudar neste Capítulo.

Elaborado com base em: GOMES, Irene; BRITTO, Vinícius. **Censo 2022**: número de pessoas com 65 anos ou mais de idade cresceu 57,4% em 12 anos. Rio de Janeiro: Agência IBGE Notícias, 1 nov. 2023. Disponível em: https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-noticias/2012-agencia-de-noticias/noticias/38186-censo-2022-numero-de-pessoas-com-65-anos-ou-mais-de-idade-cresceu-57-4-em-12-anos. Acesso em: 23 jul. 2024.

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Agora, reúna-se a um colega, e façam o que se pede em cada questão.

1. O que vocês entendem por pesquisa estatística? Citem exemplos. Resposta pessoal.
2. Pesquisem e descrevam políticas públicas que poderiam ser implementadas para promover o envelhecimento ativo e inclusivo no Brasil. Resposta pessoal.
3. No município de vocês, existem iniciativas públicas implementadas, ou em implementação, que visam promover o envelhecimento ativo e inclusivo? Resposta pessoal.
4. Vocês sabem ler e construir gráficos? Que tipos de gráfico? Respostas pessoais. Espera-se que os estudantes saibam ler e construir os gráficos mais usuais, como o de barras e o de linha.

ANDRESWD/E+/GETTY IMAGES

Em 2022, segundo o IBGE, a expectativa de vida no Brasil ultrapassava 65 anos. São Paulo (SP). Fotografia de 2024.

O que é Estatística

Uma pesquisa estatística é um método científico para estudar e investigar fenômenos naturais, fenômenos sociais e problemas relacionados a diversos contextos. Os resultados de uma pesquisa estatística são fruto de uma metodologia científica de uma área do conhecimento humano denominada **Estatística**.

Atualmente, resultados de pesquisas estatísticas são publicados com frequência nos meios de comunicação. Nos noticiários, por exemplo, eles aparecem em reportagens sobre indicativos econômicos, pesquisas eleitorais, índices de criminalidade e violência, expectativa de vida de uma pessoa que pratica esportes e tem uma alimentação saudável ou não, entre outras. Ao entrar em um *site* de notícias, por exemplo, é fácil encontrar matérias baseadas em relatórios, tabelas, gráficos e resumos com dados estatísticos. Acompanhe um exemplo.

Mais da metade dos brasileiros já presenciou ato de racismo

Estudo também mostra que 60% consideram o Brasil um país racista

A avaliação de que pessoas pretas são as que mais sofrem com o racismo é quase unanimidade entre os brasileiros, já que nove em cada dez pessoas (96%) compartilham dessa visão. Em segundo e terceiro lugares, os indígenas e os imigrantes africanos, respectivamente, com 57% e 38%, são os que mais sofrem. Há também uma maioria expressiva, de 88%, que concorda que essa parcela da população é mais criminalizada do que os brancos.

Esses são alguns dos dados da pesquisa Percepções sobre o racismo no Brasil, realizada pelo Inteligência em Pesquisa e Consultoria Estratégica (Ipec), sob encomenda do Instituto de Referência Negra Peregum e do Projeto Seta (Sistema de Educação por uma Transformação Antirracista).

[...]

O estudo tem abrangência nacional e compreendeu 127 municípios das cinco regiões do país. As entrevistas com os participantes foram feitas ao longo do mês de abril [de 2023].

De acordo com a pesquisa, pode-se dizer que o dado sobre a criminalização de pessoas negras se desdobra em outro do estudo, o referente ao tratamento que agentes da polícia dispensam à população negra. Das 2 mil pessoas ouvidas, 79% concordam que a abordagem policial é baseada na cor da pele, tipo de cabelo e tipo de vestimenta, sendo que 63% das pessoas ouvidas concordam totalmente com essa afirmação e 16% apenas parcialmente. Um total de 84% concorda que pessoas brancas e negras recebem tratamentos diferentes por parte da polícia, sendo que 71% concordam totalmente e 13% em parte.

[...]

BOND, Letycia. Mais da metade dos brasileiros já presenciou ato de racismo. **Agência Brasil**, São Paulo, 27 jul. 2023. Disponível em: https://agenciabrasil.ebc.com.br/direitos-humanos/noticia/2023-07/mais-da-metade-dos-brasileiros-presenciou-ato-de-racismo. Acesso em: 23 jul. 2024.

Pense e responda

Ao ler uma reportagem como essa, como você imagina que esses resultados impactam a vida de pessoas negras?

Resposta pessoal.

A reportagem apresenta o resultado de uma pesquisa estatística denominada **Percepções sobre o racismo no Brasil**. Em 2023, de acordo com dados do IBGE, a população brasileira era de aproximadamente 203 milhões de habitantes; o instituto que realizou esse estudo entrevistou, em abril de 2023, 2 mil pessoas, distribuídas em 127 municípios das cinco regiões do país, e, de acordo com essas entrevistas, a reportagem afirmou, entre outras informações, que:

- mais da metade dos brasileiros (mais de 100 milhões de pessoas) já presenciou algum ato de racismo;

- 60% dos brasileiros consideram o Brasil um país racista;
- 96% dos brasileiros concordam que as pessoas pretas são as que mais sofrem racismo;
- 84% dos brasileiros concordam que pessoas brancas e negras recebem tratamentos diferentes por parte da polícia.

Vale enfatizar que, nesse estudo, todas as conclusões em relação ao racismo no Brasil foram determinadas com base em entrevistas a 2000 pessoas de uma população de 203 milhões, ou seja, aproximadamente 0,001% dos brasileiros responderam à pesquisa. Embora possa parecer uma amostra pequena, os métodos estatísticos, quando bem aplicados, garantem que os dados sejam fidedignos à realidade. Esse tipo de estudo científico é chamado de pesquisa por amostragem.

Há dois tipos de pesquisa em Estatística: as populacionais, também chamadas de censitárias, e as por amostragem. As pesquisas populacionais estudam todos os indivíduos que apresentam a característica ou a propriedade que se deseja estudar, enquanto as por amostragem estudam apenas uma parcela dos indivíduos.

Em Estatística, denominamos:

População: conjunto que contém todos os indivíduos, ou elementos, com a característica ou a propriedade que se deseja estudar.

Amostra: subconjunto não vazio da população.

No último Censo Demográfico, realizado em 2022, foram investigados cerca de 78 milhões de domicílios particulares permanentes no país. O Censo é um exemplo de estudo populacional, pois considera como população todas as residências particulares do Brasil e estuda todas elas.

Por uma questão de custo e de tempo, ou quando não é possível consultar toda a população que se deseja investigar, recorre-se a uma amostra. Isto é, analisa-se um subconjunto da população que possibilite estimar, inferir, um retrato o mais próximo possível do real. Selecionar uma amostra que tenha as mesmas características da população é fundamental para garantir que os resultados não sejam equivocados. Além disso, a seleção da amostra deve ser totalmente aleatória, ou seja, cada indivíduo da população deve ter a mesma chance de ser selecionado para a composição da amostra.

A realização de um estudo estatístico envolve algumas etapas, como a definição da população-alvo, a seleção da amostra, a coleta e a organização dos dados, a apresentação desses dados em tabelas ou gráficos e a interpretação dos resultados.

Neste Capítulo, vamos organizar dados em tabelas, interpretar e construir diferentes tipos de gráfico e estudar algumas medidas estatísticas.

EDSON GRANDISOLI/PULSAR IMAGENS

Apenas um morador de cada domicílio responde ao questionário de recenseamento. Recenseador do IBGE em Sorocaba (SP). Fotografia de 2023.

» Variável

As características que se deseja investigar em uma pesquisa estatística são denominadas **variáveis**. As variáveis podem ser classificadas em qualitativa ou quantitativa.

Pense e responda

A cor é uma variável quantitativa ou qualitativa? E o número de irmãos?
qualitativa; quantitativa

Variáveis qualitativas: expressam propriedades ou atributos, por exemplo, etnia, gostos pessoais, opiniões e nível de escolarização.

Variáveis quantitativas: são indicadas por números, pois são o resultado de uma medida ou de uma contagem, como renda familiar, idade, altura e número de moradores em uma casa.

FÓRUM

Racismo estrutural

O racismo estrutural é um conceito que descreve como as instituições sociais, econômicas e políticas perpetuam e reproduzem desigualdades raciais de modo sistemático. Em outras palavras, refere-se às maneiras pelas quais o racismo está enraizado nas estruturas fundamentais da sociedade brasileira, moldando as oportunidades e experiências das pessoas pretas, pardas e indígenas.

THEVISUALSYOUNEED/SHUTTERSTOCK.COM

▪ Combater o racismo estrutural é um dever de todos.

Esse tipo de racismo não se caracteriza por atitudes individuais discriminatórias, mas pela falta de políticas para a inclusão desses grupos raciais na sociedade, em decorrência de um processo histórico. Podemos perceber o racismo estrutural em áreas como habitação, emprego, sistema de justiça criminal e acesso à saúde.

Reconhecer e combater o racismo estrutural é fundamental para promover uma sociedade mais justa e inclusiva, em que todos tenham igualdade de oportunidades e sejam tratados com dignidade e respeito.

Pesquise exemplos de racismo estrutural e converse com os colegas e o professor sobre as questões a seguir. Ver as **Orientações para o professor**.

- Como as políticas públicas podem ser reformuladas para enfrentar e reduzir o impacto do racismo estrutural em diferentes aspectos da sociedade?
- O que poderia ser feito, ou melhorado, em sua escola para a conscientização sobre o racismo estrutural?

Para assistir

- O QUE é racismo estrutural? | Desenhando. [*S. l.*: *s. n.*], 2019. 1 vídeo (5 min). Publicado pelo canal QoT. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=la3NrSoTSXk. Acesso em: 7 out. 2024.
O vídeo aborda algumas situações que exemplificam a presença do racismo estrutural na sociedade brasileira.

Tabela de frequências

Um modo de organizar dados é construir uma tabela de distribuição de frequências absolutas e de frequências relativas. Além de organizá-los, a tabela também possibilita resumir os dados coletados e facilita a interpretação deles.

Frequência absoluta (f_A): é a quantidade de vezes que determinado dado se repete no conjunto de todos os dados coletados.

Frequência relativa (f_R): é a razão entre a frequência absoluta (f_A) e o total (n) de dados coletados para a variável. Muitas vezes, é expressa na forma de porcentagem.

$$f_R = \frac{f_A}{n}$$

Considere a situação a seguir.

Em uma escola, 40 estudantes do Ensino Médio, escolhidos aleatoriamente, responderam à seguinte pergunta: “Que esporte ou atividade física você pratica?”. As respostas foram:

Musculação	***Skate***	**Futebol**	***Skate***	**Futebol**
Futebol	**Futebol**	***Skate***	**Musculação**	***Skate***
Dança	**Nenhum**	**Musculação**	**Futebol**	***Skate***
Skate	**Musculação**	**Futebol**	**Dança**	**Musculação**
Dança	**Futebol**	**Dança**	***Skate***	**Futebol**
Futebol	**Dança**	***Skate***	**Nenhum**	**Dança**
Skate	***Skate***	**Futebol**	**Dança**	**Musculação**
Futebol	**Nenhum**	**Dança**	**Futebol**	**Nenhum**

Vamos organizar esses dados em uma tabela de frequências.

1º) Determinamos a frequência absoluta de cada dado. Nesse caso, contamos quantos estudantes responderam futebol, quantos responderam dança, quantos responderam *skate*, quantos responderam musculação e quantos responderam nenhum.

- Futebol: 12
- *Skate*: 10
- Nenhum: 4
- Dança: 8
- Musculação: 6

2º) Determinamos a frequência relativa de cada dado. Nesse contexto, calculamos a razão entre as frequências absolutas e o total de entrevistados (40 estudantes).

- Futebol: $\frac{12}{40} = 0{,}3 = 0{,}3 \cdot 100\% = 30\%$
- Musculação: $\frac{6}{40} = 0{,}15 = 0{,}15 \cdot 100\% = 15\%$
- *Skate*: $\frac{10}{40} = 0{,}25 = 0{,}25 \cdot 100\% = 25\%$
- Nenhum: $\frac{4}{40} = 0{,}1 = 0{,}1 \cdot 100\% = 10\%$
- Dança: $\frac{8}{40} = 0{,}2 = 0{,}2 \cdot 100\% = 20\%$

3º) Montamos a tabela. Ela deve ter título, e a soma de todas as frequências relativas deve resultar em 1 ou 100%.

Que esporte ou atividade física você pratica?

Esporte/Atividade física	Frequência absoluta (f_A)	Frequência relativa (f_R)
Futebol	12	$\frac{12}{40}$ ou 30%
Skate	10	$\frac{10}{40}$ ou 25%
Dança	8	$\frac{8}{40}$ ou 20%
Musculação	6	$\frac{6}{40}$ ou 15%
Nenhum	4	$\frac{4}{40}$ ou 10%
Total	$n = 40$	1 ou 100%

Fonte: Dados fictícios.

Tabela de frequências para dados quantitativos agrupados em intervalos

Em alguns casos, para organizar dados quantitativos de maneira resumida em uma tabela de frequências, é necessário agrupá-los em **intervalos** ou **classes**. A situação a seguir descreve um desses casos.

O controle de qualidade de uma fábrica selecionou, aleatoriamente, 30 parafusos de uma produção e mediu, em milímetro, o comprimento de cada parafuso. O objetivo foi analisar a variação que ocorre durante o processo de produção. Os dados obtidos estão apresentados a seguir.

48,5	51,0	51,0	51,5	51,4	53,8	49,2	50,3	50,3	50,0
48,0	49,4	53,0	50,0	53,0	50,3	53,0	53,2	50,3	50,0
48,5	49,1	50,0	50,0	52,4	53,0	51,1	51,1	52,4	52,3

PATTY CHAN/SHUTTERSTOCK.COM

Parafusos prateados.

Nesse caso, a variável quantitativa "comprimento do parafuso" apresenta muitos valores diferentes, e organizar esses dados em uma tabela de frequências, como a que analisamos anteriormente, pouco resume os dados. Para organizar esses dados de maneira resumida, vamos agrupá-los em intervalos.

1º) Colocamos os dados em ordem crescente. Quando organizamos os dados quantitativos em ordem crescente ou decrescente, dizemos que os colocamos em **rol**.

48,0	48,5	48,5	49,1	49,2	49,4	50,0	50,0	50,0	50,0
50,0	50,3	50,3	50,3	50,3	51,0	51,0	51,1	51,1	51,4
51,5	52,3	52,4	52,4	53,0	53,0	53,0	53,0	53,2	53,8

2º) Calculamos a amplitude total. A **amplitude total** é a diferença entre o maior e o menor valor da variável.

$$53{,}8 \text{ mm} - 48{,}0 \text{ mm} = 5{,}8 \text{ mm}$$

A amplitude total é 5,8 mm.

3º) Escolhemos a **amplitude dos intervalos**. Geralmente, escolhemos a amplitude dos intervalos de modo que o número de intervalos (ou classes) obtidos seja igual ou superior a 4 e o comprimento de cada intervalo seja um decimal exato.

Adotaremos 1 mm para a amplitude dos intervalos. Desse modo, como a amplitude total é 5,8 mm, teremos 6 intervalos, pois 5,8 mm : 1 mm = 5,8 $\simeq$ 6. O primeiro intervalo começa em 48 mm e vai até 49 mm (não incluindo 49 mm), o segundo começa em 49 mm e vai até 50 mm (não incluindo 50 mm), e assim por diante, até o último intervalo, que começa em 53 mm e vai até 54 mm.

4º) Determinamos a frequência absoluta e a frequência relativa de cada intervalo e montamos a tabela de frequências.

Variação dos comprimentos dos parafusos fabricados

Comprimento (em mm)	Frequência absoluta (f_A)	Frequência relativa (f_R)
[48, 49[	3	$\frac{3}{30}$ ou 10%
[49, 50[	3	$\frac{3}{30}$ ou 10%
[50, 51[	9	$\frac{9}{30}$ ou 30%
[51, 52[	6	$\frac{6}{30}$ ou 20%
[52, 53[	3	$\frac{3}{30}$ ou 10%
[53, 54[	6	$\frac{6}{30}$ ou 20%
Total	30	1 ou 100%

Fonte: Dados fictícios.

O intervalo real [*a*; *b*[também pode ser representado pela notação $a \vdash b$.

Pense e responda

- Nessa situação, poderíamos considerar os intervalos como [48, 49], [49, 50], [50, 51], [51, 52], [52, 53] e [53, 54]? Por quê? Espera-se que os estudantes percebam que não, pois, desse modo, um mesmo valor poderia pertencer a mais de um intervalo.
- O que aconteceria com a quantidade de classes se escolhêssemos uma amplitude maior para os intervalos?

Espera-se que os estudantes percebam que a quantidade de classes seria menor.

Gráficos

Outro modo de organizar e resumir os dados é por meio de representações gráficas.

Existem diferentes tipos de gráfico; dependendo da comparação e da análise que se deseja fazer, um modelo será mais eficiente que outro. Outro fator que determina o modelo de gráfico mais adequado é se os dados são qualitativos ou quantitativos.

Apresentamos, a seguir, as principais representações gráficas e suas características.

Gráfico de barras

Em um **gráfico de barras**, os dados de uma pesquisa são representados por retângulos paralelos, horizontais ou verticais, todos de mesma largura e de comprimentos proporcionais aos valores que representam.

Esse tipo de gráfico permite uma rápida exploração visual e uma comparação entre a variável em estudo e suas frequências. O gráfico de barras verticais é também chamado de **gráfico de colunas**.

Acompanhe o exemplo a seguir.

A tabela ilustra os resultados de uma pesquisa de avaliação dos clientes em relação ao serviço prestado por uma empresa.

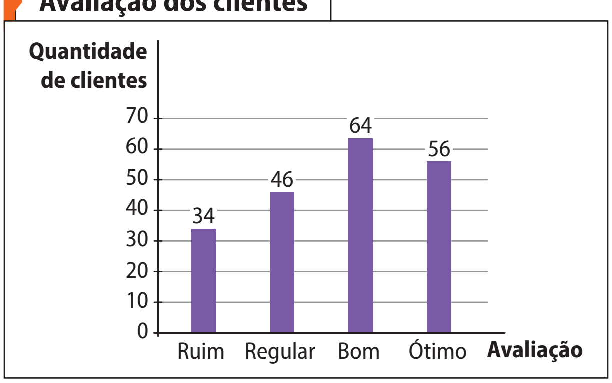
Avaliação dos clientes

Avaliação	f_A	f_R
Ruim	34	17%
Regular	46	23%
Bom	64	32%
Ótimo	56	28%
Total	200	100%

Fonte: Dados fictícios.

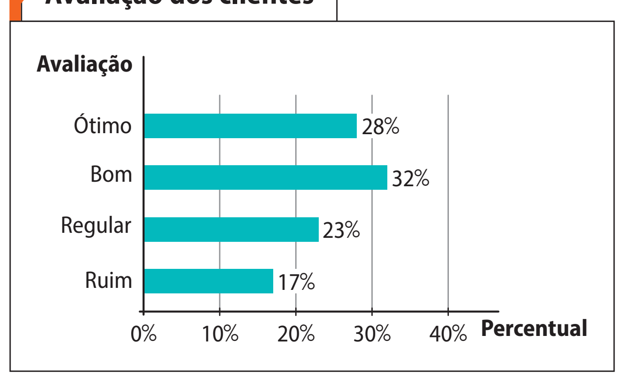
Podemos construir os seguintes gráficos de barras com os dados dessa tabela.

Avaliação dos clientes



Fonte: Dados fictícios.

Avaliação dos clientes



Fonte: Dados fictícios.

ILUSTRAÇÕES: SERGIO LIMA

O primeiro gráfico, de barras verticais, utilizou os dados da frequência absoluta, e o segundo, de barras horizontais, utilizou os dados da frequência relativa. A escolha da posição das barras, assim como a utilização da frequência absoluta ou da frequência relativa, fica a critério de quem constrói o gráfico e de seus objetivos.

Gráfico de setores

O **gráfico de setores**, também conhecido como gráfico de *pizza*, é um círculo dividido em partes (setores), em que a medida do ângulo central de cada setor é diretamente proporcional à sua frequência relativa (f_R). Desse modo, a medida θ de cada ângulo central é dada por:

$$\theta = 360° \cdot f_R$$

Esse tipo de gráfico é utilizado quando queremos comparar quanto determinada frequência (um setor) representa do total (do círculo).

Acompanhe, a seguir, um exemplo de construção de um gráfico de setores.

Um professor perguntou qual é a preferência musical de seus 30 estudantes e montou a seguinte tabela.

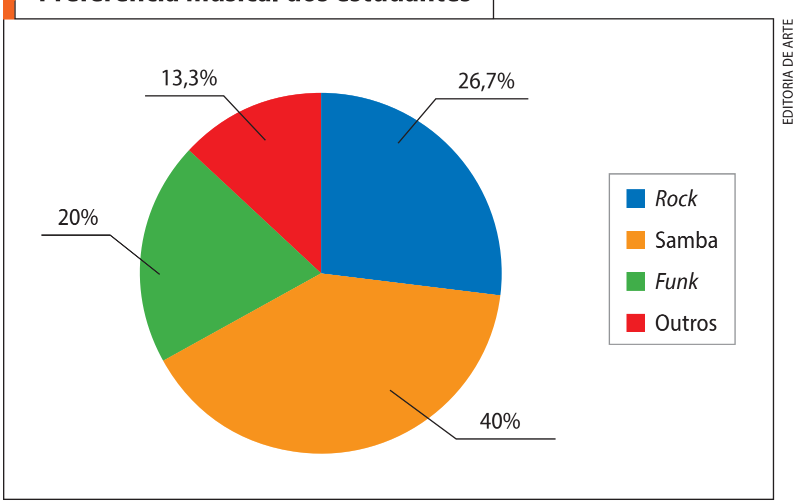
Preferência musical dos estudantes

Estilo musical	Frequência absoluta (f_A)	Frequência relativa (f_R)	Ângulo central (θ)
Rock	8	26,7%	$360° \cdot 0{,}267 = 96{,}1°$
Samba	12	40,0%	$360° \cdot 0{,}40 = 144°$
Funk	6	20,0%	$360° \cdot 0{,}20 = 72°$
Outros	4	13,3%	$360° \cdot 0{,}133 = 47{,}9°$
Total	30	100%	360°

Fonte: Dados fictícios.

Ele arredondou os resultados da frequência relativa e do ângulo central dos estilos *rock* e outros. Em seguida, construiu um gráfico de setores, colocando título e legenda de cores para identificar cada setor.

Preferência musical dos estudantes



Fonte: Dados fictícios.

Saiba que...

Nesse caso, em cada setor do gráfico, o professor indicou a frequência relativa correspondente; porém, poderiam ser indicadas as frequências absolutas.

» Gráfico de linha

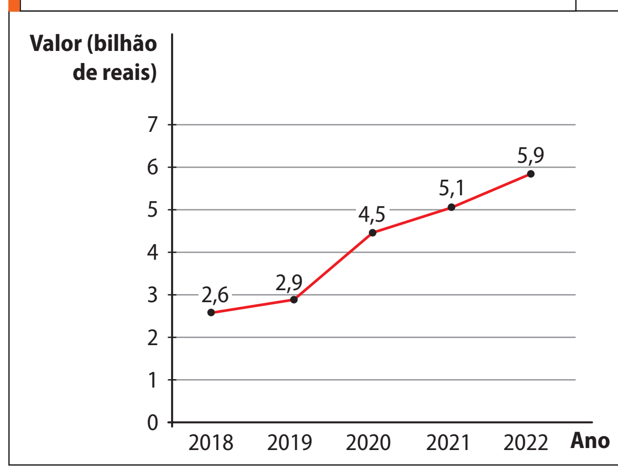
O **gráfico de linha** é usado, geralmente, para identificar tendências de aumento ou de diminuição de valores numéricos de uma variável em determinado período. Ele também é conhecido como **gráfico de segmentos**.

Observe os gráficos a seguir. O primeiro mostra o valor da produção de açaí no estado do Pará, maior produtor da fruta em 2022.

RUBENS CHAVES/PULSAR IMAGENS

▪ O açaí é uma importante fonte de renda e de alimentação para os povos ribeirinhos no Pará. Fotografia de 2022, Breves (PA).

Valor da produção de açaí – estado do Pará



ILUSTRAÇÕES: SERGIO LIMA

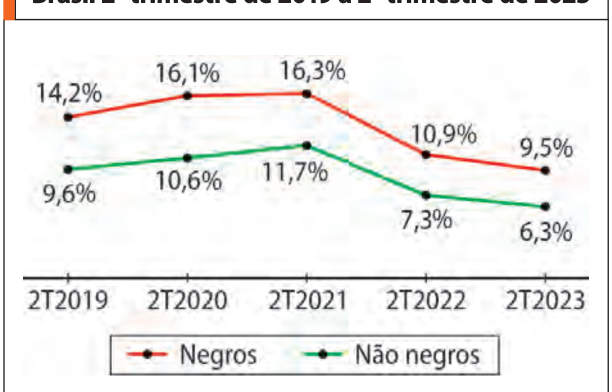
Fonte dos dados: INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Produção de açaí (cultivo)**: Pará. Rio de Janeiro: IBGE, [202-]. Disponível em: https://www.ibge.gov.br/explica/producao-agropecuaria/acai-cultivo/pa. Acesso em: 23 jul. 2024.

Podemos observar no gráfico que:

- o valor da produção aumentou a cada ano, de 2018 a 2022;
- em 2020, o valor da produção ultrapassou 4 bilhões de reais;
- o maior valor da produção ocorreu em 2022;
- em todos os anos, a produção esteve abaixo de 6 bilhões de reais.

O segundo gráfico apresenta o percentual de desempregados por raça/cor. Ele foi construído com duas linhas, uma para representar a população negra e outra para a não negra.

Taxa de desocupação por raça/cor
Brasil 2º trimestre de 2019 a 2º trimestre de 2023



Fonte: DEPARTAMENTO INTERSINDICAL DE ESTATÍSTICA E ESTUDOS SOCIOECONÔMICOS. **As dificuldades da população negra no mercado de trabalho**. São Paulo: DIEESE, 17 nov. 2023. p. 3. Disponível em: https://www.dieese.org.br/boletimespecial/2023/conscienciaNegra2023/. Acesso em: 23 jul. 2024.

Pense e responda

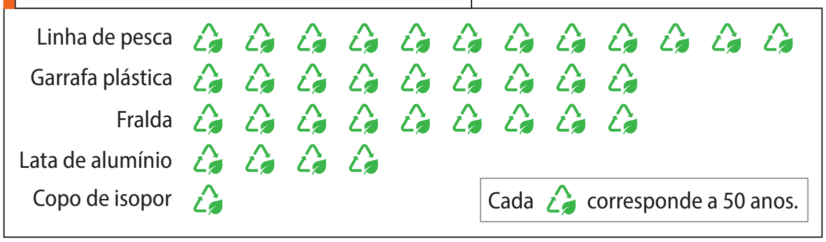
De acordo com o gráfico da taxa de desocupação, no período apresentado, o percentual de negros desempregados sempre foi maior do que o de não negros desempregados? O que aconteceria com esse gráfico se, no 2º trimestre de 2024, o percentual de negros desempregados fosse inferior ao de não negros?

Sim. Nesse caso, a linha vermelha e a linha verde se cruzariam.

» Gráfico pictórico

Os **gráficos pictóricos** ou **pictogramas** são construídos utilizando-se imagens e ícones relacionados ao tema da pesquisa. Observe o exemplo a seguir.

Tempo estimado de decomposição



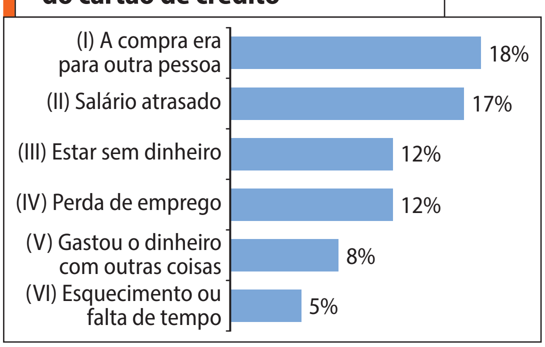
Fonte dos dados: CINCO gráficos que explicam como a poluição por plástico ameaça a vida na Terra. **BBC News Brasil**, [*s. l.*], 16 dez. 2017. Disponível em: https://www.bbc.com/portuguese/geral-42308171. Acesso em: 23 jul. 2024.

Note que, na legenda do pictograma, cada ícone equivale a 50 anos. Desse modo, a decomposição na natureza de um copo de isopor demora, aproximadamente, 50 anos, a de uma lata de alumínio demora, aproximadamente, 200 anos, e assim por diante.

ATIVIDADES RESOLVIDAS

1. Observe os principais motivos alegados por 30 000 devedores, pesquisados em uma região metropolitana, ao justificarem atrasos no pagamento do cartão de crédito. Com base nessa pesquisa, responda às questões.

Motivos de atraso no pagamento do cartão de crédito



EDITORIA DE ARTE

Fonte: Dados fictícios.

a) Qual é a frequência relativa das pessoas que apresentaram outras justificativas para o atraso do pagamento do cartão de crédito?

b) Quantas pessoas apresentaram outras justificativas?

Resolução

a) O total de respostas dadas na pesquisa deve ser 100%. Portanto, a frequência relativa das pessoas que apresentaram outras justificativas é dada por:

$100\% - (18\% + 17\% + 12\% + 12\% + 8\% + 5\%) = 28\%$

b) $n = 30\,000$; $f_A = n \cdot f_R$

28% de $30\,000 = \dfrac{28}{100} \cdot 30\,000 = 8\,400$

Portanto, 8 400 pessoas apresentaram outras justificativas.

2. Observe o pictograma.

A alfabetização na pandemia

ILUSTRAÇÕES: SERGIO LIMA

Fonte: SANTOS, Emily. Número de crianças que não aprenderam a ler e escrever chega a 2,4 milhões e aumenta mais de 65% na pandemia, diz ONG. **G1**, São Paulo, 8 fev. 2022. Disponível em: https://g1.globo.com/educacao/noticia/2022/02/08/numero-de-criancas-que-nao-aprenderam-a-ler-e-escrever-aumenta-na-pandemia-aponta-levantamento.ghtml. Acesso em: 23 jul. 2024.

De acordo com o gráfico, responda às questões.

a) Qual foi o percentual de crianças de 6 e 7 anos que não sabiam ler e escrever em 2019?

b) No período de 2019 a 2021, qual foi o aumento percentual de crianças de 6 e 7 anos que não sabiam ler e escrever?

Resolução

a) Pelo gráfico, 6 de cada 25 crianças de 6 e 7 anos não sabiam ler e escrever em 2019. Escrevendo a razão entre 6 e 25 na forma percentual, obtemos:

$$\frac{6}{25} \cdot 100\% = 0{,}24 \cdot 100\% = 24\%$$

Logo, 24% das crianças brasileiras de 6 e 7 anos não sabiam ler e escrever em 2019.

b) Em 2021, o gráfico mostra que 10 de cada 25 crianças não sabiam ler e escrever. Escrevendo a razão entre 10 e 25 na forma percentual, temos:

$$\frac{10}{25} \cdot 100\% = 0{,}4 \cdot 100\% = 40\%$$

O aumento é dado pela diferença entre 40% e 24%, percentuais correspondentes, respectivamente, aos anos de 2021 e 2019.

$$40\% - 24\% = 16\%$$

Portanto, no período de 2019 a 2021, aumentou 16% o número de crianças brasileiras de 6 e 7 anos que não sabiam ler e escrever.

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. (UFT-TO) O Tocantins tem 40 Comunidades Remanescentes de Quilombo já certificadas pela Fundação Cultural Palmares. O Censo Demográfico brasileiro de 2022, pela primeira vez, contou a população quilombola. No quadro a seguir, tem-se alguns dos municípios tocantinenses com os maiores percentuais de pessoas quilombolas.

Quadro – População, pessoas quilombolas e percentual de pessoas quilombolas com relação à população.

Município	População do município	Pessoas Quilombolas	Percentual de Pessoas Quilombolas (%)
Aragominas	5 290	829	15,67
Arraias	10 287	1 572	15,28
Brejinho de Nazaré	4 725	1 022	21,63
Chapada da Natividade	3 117	1 304	41,84
Mateiros	2 748	1 190	43,30
Muricilândia	3 367	907	26,94
São Félix do Tocantins	1 783	682	38,25

Fonte: IBGE. Disponível em: https://www.ibge.gov.br/estatisticas/sociais/populacao/22827-censo-demografico-2022.html?edicao=37415&t=resultados. Acesso em: 28 set. 2023 (adaptado).

Considere as informações apresentadas e as afirmativas a seguir.

I. O número de pessoas quilombolas do município de Mateiros é maior do que o do município de Arraias.

II. O percentual de pessoas quilombolas do município de Aragominas é maior do que o de São Félix do Tocantins.

III. Mateiros é o município com o maior percentual de pessoas quilombolas.

Com base nas informações anteriores, assinale a alternativa **CORRETA**. alternativa **c**

a) Apenas as afirmativas I e II estão corretas.

b) Apenas as afirmativas II e III estão corretas.

c) Apenas a afirmativa III está correta.

d) Todas as afirmativas estão corretas.

▪ Cesto artesanal confeccionado em capim-dourado. Mateiros (TO). Fotografia de 2023.

ANDRE DIB/PULSAR IMAGENS

2. Um motorista de aplicativo anotou, por 30 dias, a quantidade de kilometros rodados diariamente.

199	172	211	151	205	193	170	131	220	205
217	181	120	239	188	160	193	210	192	149
144	202	181	187	137	234	163	179	226	189

a) Os dados coletados pelo motorista são qualitativos ou quantitativos? quantitativos

b) Organize os dados em ordem crescente, ou seja, em rol. 120; 131; 137; 144; 149; 151; 160; 163; 170; 172; 179; 181; 181; 187; 188; 189; 192; 193; 193; 199; 202; 205; 205; 210; 211; 217; 220; 226; 234; 239

c) Determine a amplitude total desses dados. 119 km

d) Construa uma tabela de distribuição de frequências absolutas e relativas com os dados agrupados em intervalos de amplitude 20 km. Ver as **Orientações para o professor**.

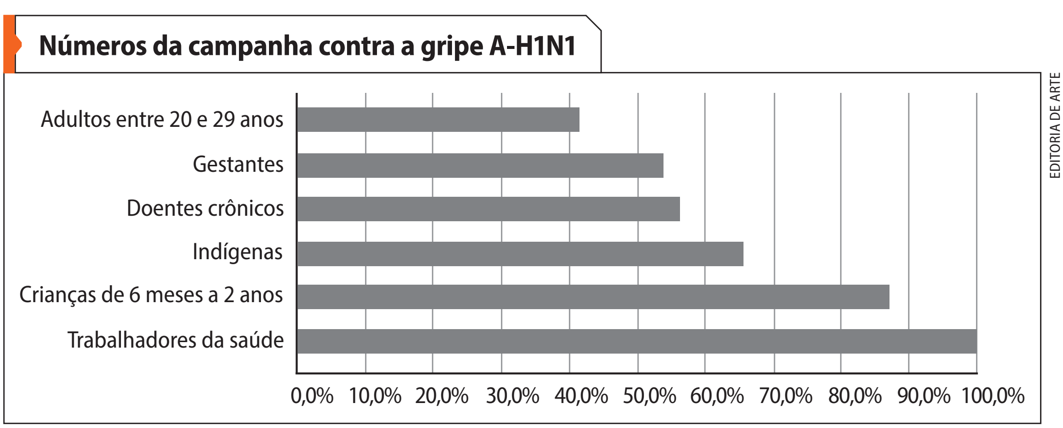
e) Consulte a tabela de frequências que você construiu e identifique qual das afirmações é verdadeira. afirmação **III**

I. O motorista rodou mais do que 200 km na maioria dos dias.

II. Em 20% dos dias, o motorista rodou menos do que 180 km.

III. Na metade dos dias, o motorista rodou no mínimo 180 km e no máximo 220 km.

3. (Enem/MEC) O gráfico expõe alguns números da gripe A-H1N1. Entre as categorias que estão em processo de imunização, uma já está completamente imunizada, a dos trabalhadores da saúde.



Época, 26 abr. 2010 (adaptado).

De acordo com o gráfico, entre as demais categorias, a que está mais exposta ao vírus da gripe A-H1N1 é a categoria de alternativa **d**

a) indígenas.

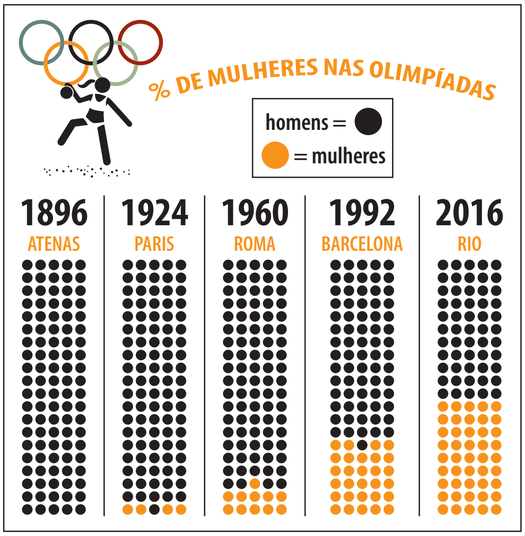
b) gestantes.

c) doentes crônicos.

d) adultos entre 20 e 29 anos.

e) crianças de 6 meses a 2 anos.

4. De acordo com o gráfico, responda às questões.



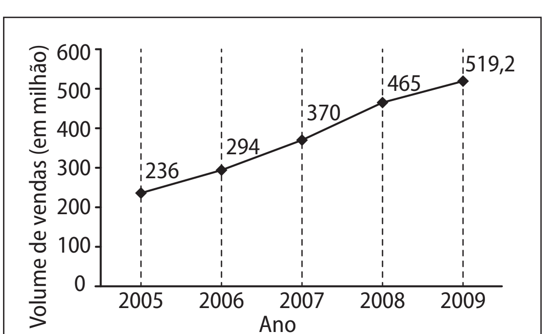
Fonte dos dados: GAMA, Gabriel; GORZIZA, Amanda; BUONO, Renata. Olimpíada de Paris deve ter a maior participação de atletas mulheres da história. **Revista Piauí**, [São Paulo], 28 mar. 2024. Disponível em: https://piaui.folha.uol.com.br/olimpiada-de-paris-deve-ter-maior-participacao-de-atletas-mulheres-da-historia/. Acesso em: 23 jul. 2024.

a) Qual foi o percentual de mulheres nas Olimpíadas de Paris em 1924? 4%

b) Em 2016, qual foi o percentual de homens nas Olimpíadas? 60%

c) Pesquise a respeito do percentual de participação das mulheres nas Olimpíadas de Paris em 2024. Qual foi esse percentual?

5. (Enem/MEC) A depressão caracteriza-se por um desequilíbrio na química cerebral. Os neurônios de um deprimido não respondem bem aos estímulos dos neurotransmissores. Os remédios que combatem a depressão têm o objetivo de restabelecer a química cerebral. Com o aumento gradativo de casos de depressão, a venda desses medicamentos está em crescente evolução, conforme ilustra o gráfico.

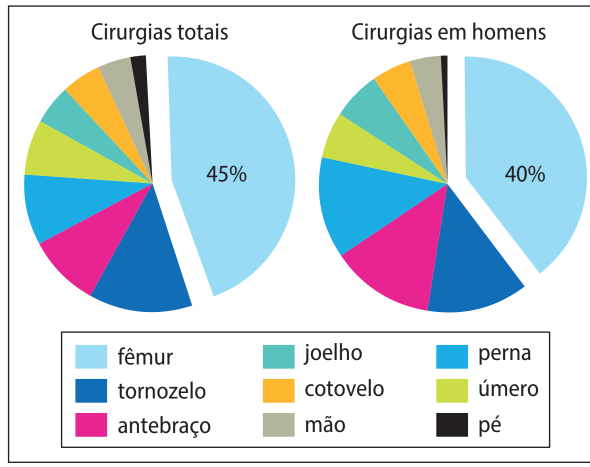


Veja, 10 fev. 2010 (adaptado).

No período de 2005 a 2009, o aumento percentual no volume de vendas foi de alternativa **c**

a) 45,4. **b)** 54,5. **c)** 120. **d)** 220. **e)** 283,2.

6. (UERJ) No mapa mensal de um hospital, foi registrado o total de 800 cirurgias ortopédicas, sendo 440 em homens, conforme os gráficos abaixo. alternativa **c**

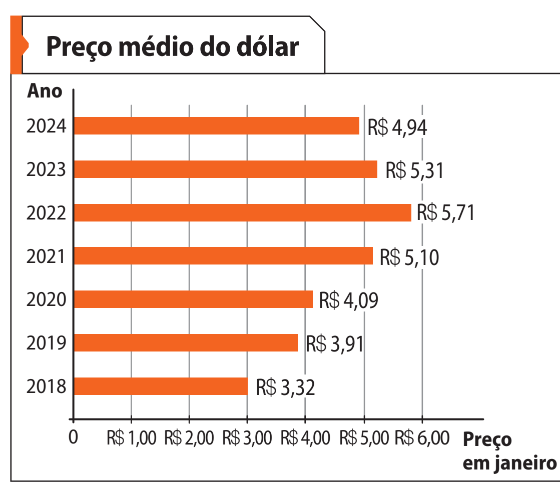


ILUSTRAÇÕES: SERGIO LIMA

De acordo com esses dados, o número total de cirurgias de fêmur realizadas em mulheres foi:

a) 144 **b)** 162 **c)** 184 **d)** 190

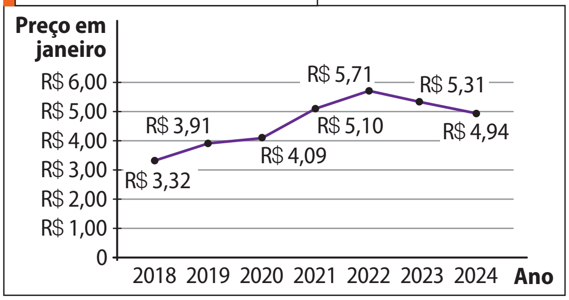
7. Em um curso de Economia, o professor solicitou a construção de um gráfico para analisar a variação da cotação média do dólar, no mês de janeiro, de 2018 a 2024. Observe, a seguir, três modelos diferentes de gráficos que os estudantes entregaram.



Fonte dos dados: BRASIL. Receita Federal. **Conversão de dólares para reais**. Brasília, DF: Ministério da Fazenda, [2024]. Disponível em: https://www.gov.br/receitafederal/pt-br/assuntos/meu-imposto-de-renda/tabelas/conversao. Acesso em: 23 jul. 2024.

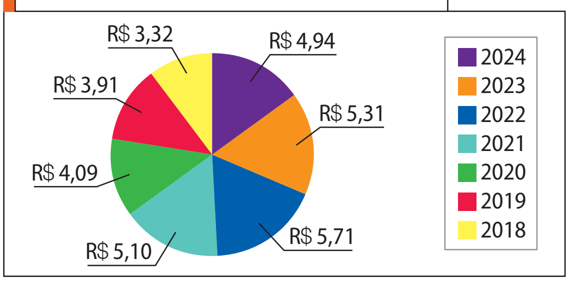
4. c) Espera-se que os estudantes indiquem um percentual próximo de 50%.

Preço médio do dólar



Fonte dos dados: BRASIL. Receita Federal. **Conversão de dólares para reais**. Brasília, DF: Ministério da Fazenda, [2024]. Disponível em: https://www.gov.br/receitafederal/pt-br/assuntos/meu-imposto-de-renda/tabelas/conversao. Acesso em: 23 jul. 2024.

Preço médio do dólar em janeiro



Fonte dos dados: BRASIL. Receita Federal. **Conversão de dólares para reais**. Brasília, DF: Ministério da Fazenda, [2024]. Disponível em: https://www.gov.br/receitafederal/pt-br/assuntos/meu-imposto-de-renda/tabelas/conversao. Acesso em: 23 jul. 2024.

O professor escolheu o modelo de gráfico mais adequado para analisar a variação do dólar. Qual modelo ele escolheu? Justifique.
O gráfico de linha. Ver as **Orientações para o professor**.

8. A tabela apresenta o preço de um modelo de celular em cinco lojas diferentes.

Preço do celular

Loja	Preço
A	R$ 1.286,00
B	R$ 1.297,00
C	R$ 1.241,00
D	R$ 1.220,00
E	R$ 1.256,00

Fonte: Dados fictícios.

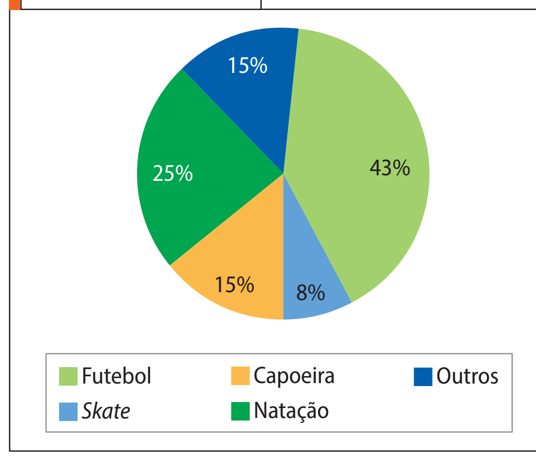
Ver as **Orientações para o professor**.

a) Qual tipo de gráfico, de setores, de barras ou de linha, é o mais adequado para comparar esses preços? Justifique.

b) Construa o modelo de gráfico que você respondeu no item **a**.

9. Um perfil de uma rede social que produz conteúdos sobre esportes em geral abriu uma caixa de perguntas para seus seguidores com a finalidade de identificar qual é o esporte preferido deles. Os resultados dessa pesquisa foram disponibilizados pelo perfil utilizando o gráfico a seguir.

Esporte favorito



ILUSTRAÇÕES: SERGIO LIMA

Fonte: Dados fictícios.

Ver as **Orientações para o professor**.

Após algum tempo, os seguidores avisaram o administrador do perfil que o gráfico divulgado estava incorreto.

a) Qual(is) é(são) o(s) erro(s) presente(s) no gráfico que pode(m) ter sido apontado(s) pelos seguidores?

b) Após o(s) apontamento(s) dos seguidores, a postagem com o gráfico foi retirada do perfil e um novo gráfico corrigido foi publicado. Sabendo que a pesquisa indicou que os números de seguidores que preferem futebol, *skate*, capoeira, natação e outros esportes são, respectivamente, 516, 96, 180, 180 e 228, construa um gráfico de setores que represente adequadamente esses dados.

10. Faça uma pesquisa sobre a participação de mulheres em cargos políticos, como na Câmara municipal da cidade em que você mora ou no Senado brasileiro, e elabore um pictograma representando essas informações. Depois, junte-se a um colega, e troquem o pictograma para que um analise as informações do outro. Por fim, elaborem um texto sobre as conclusões a que chegaram. Resposta pessoal.

» Histograma

Um gráfico utilizado para representar tabelas de frequências com dados que estão agrupados em intervalos e expressam uma medida recebe o nome de histograma.

Histograma é um gráfico formado por colunas retangulares contíguas. O comprimento da base e o da altura de cada retângulo são proporcionais, respectivamente, à amplitude e à frequência do intervalo correspondente.

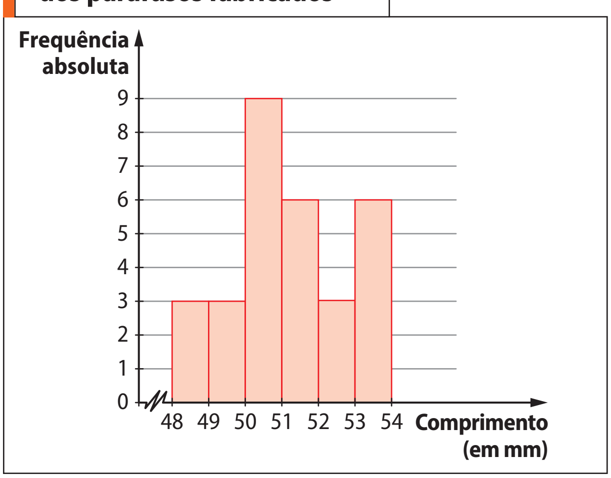
Considerando a tabela de distribuição de frequência da página 55, reproduzida a seguir, vamos construir dois histogramas: o primeiro utilizando as frequências absolutas e o segundo, as frequências relativas.

Variação dos comprimentos dos parafusos fabricados

Comprimento (em mm)	Frequência absoluta (f_A)	Frequência relativa (f_R)
[48, 49[	3	$\frac{3}{30}$ ou 10%
[49, 50[	3	$\frac{3}{30}$ ou 10%
[50, 51[	9	$\frac{9}{30}$ ou 30%
[51, 52[	6	$\frac{6}{30}$ ou 20%
[52, 53[	3	$\frac{3}{30}$ ou 10%
[53, 54[	6	$\frac{6}{30}$ ou 20%
Total	30	1 ou 100%

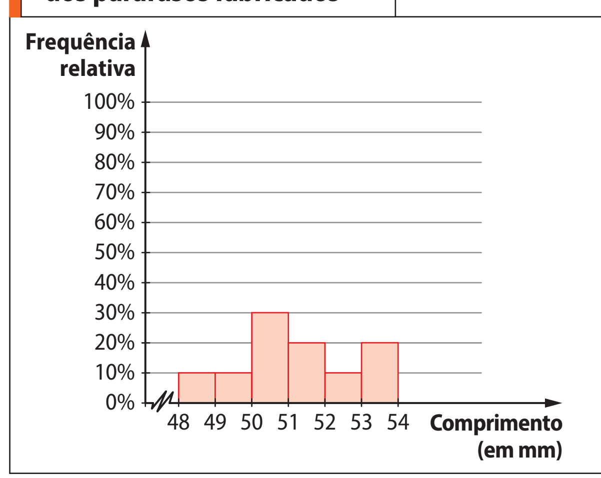
Fonte: Dados fictícios.

Variação dos comprimentos dos parafusos fabricados



Fonte: Dados fictícios.

Variação dos comprimentos dos parafusos fabricados



Fonte: Dados fictícios.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Um recurso utilizado nos dois histogramas foi a **quebra de escala**. A quebra de escala é a supressão de uma parte do eixo vertical ou horizontal, indicada pelo símbolo (-//-). Esse recurso pode ser utilizado em outros gráficos com a finalidade de suprimir partes dos eixos que não contêm dados.

Saiba que...

O histograma é uma das sete ferramentas da qualidade, que são técnicas e métodos reunidos por Kaoru Ishikawa (1915-1989) usados para identificar problemas existentes ou que possam surgir ao longo de um processo industrial, por exemplo. Esse tipo de representação gráfica, junto a outras ferramentas da qualidade, serve para procurar soluções que corrijam erros ou que sirvam como medida preventiva.

Medidas de tendência central

Uma maneira de analisar os dados de uma variável é por meio das medidas de tendência central ou centralização. Neste tópico, vamos apresentar a média aritmética, a mediana e a moda.

Média aritmética

Acompanhe a situação a seguir.

Uma livraria funciona de segunda-feira a sábado. Na semana passada, foram vendidas as quantidades de livros de literatura apresentadas na tabela a seguir.

Quantidade de livros vendidos na semana

Segunda-feira	28
Terça-feira	23
Quarta-feira	22
Quinta-feira	27
Sexta-feira	25
Sábado	13

Fonte: Dados fictícios.

O gerente dessa livraria faz um relatório semanal com o número de vendas para informar a quantidade média de livros vendidos, por dia, na semana. Para determinar essa quantidade, podemos fazer o seguinte cálculo:

$$\frac{28 + 23 + 22 + 27 + 25 + 13}{6} = \frac{138}{6} = 23$$

O número 23 é chamado de **média aritmética** dos números 28, 23, 22, 27, 25 e 13. Indicamos $\overline{x} = 23$.

Nessa situação, a média aritmética significa que, se a venda diária dessa semana fosse sempre a mesma, ou seja, 23 livros por dia, obteríamos o mesmo total de livros vendidos: 138.

Assim, no relatório, o gerente da livraria pode informar que, na quarta-feira e no sábado, a venda da livraria foi abaixo da média, enquanto na segunda-feira, na quinta-feira e na sexta-feira foi acima.

Dados os valores $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, definimos a média aritmética $\overline{x}$ como o quociente entre a soma $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n$ e a quantidade n de valores.

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

Média aritmética ponderada

Em um curso de Estatística, o professor vai aplicar três avaliações durante o semestre, todas valendo 10,0 pontos. As avaliações terão pesos diferentes na composição da média semestral, pois, enquanto a última avaliação engloba a matéria do semestre inteiro, a primeira e a segunda contemplam apenas parte dos assuntos. O quadro indica o peso de cada avaliação.

Avaliação	Peso
1ª avaliação	1
2ª avaliação	2
3ª avaliação	4

Para aprovação semestral, é necessário que a média ponderada das avaliações seja igual ou superior a 6,0. Vítor, sabendo que tirou 4,0 na primeira avaliação, 5,0 na segunda e 7,0 na terceira, calculou sua média semestral $\overline{x}$ da seguinte maneira:

$$\overline{x} = \frac{4{,}0 \cdot 1 + 5{,}0 \cdot 2 + 7{,}0 \cdot 4}{1 + 2 + 4} = \frac{4 + 10 + 28}{7} = \frac{42}{7} = 6$$

Apesar de as notas da primeira e da segunda avaliação serem inferiores a 6,0, Vítor obteve média ponderada suficiente para a aprovação, pois sua maior nota (7,0) ocorreu na avaliação de maior peso.

Dados os valores $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ e seus respectivos pesos $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$, definimos a média aritmética ponderada $\overline{x}$ como o quociente entre $x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + \dots + x_n \cdot p_n$ e a soma dos pesos $p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n$.

$$\overline{x} = \frac{x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + \dots + x_n \cdot p_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n}$$

Mediana

Uma produtora de vídeo para comerciais de TV estava procurando atores de 25 a 50 anos para produzir uma peça publicitária. Para o teste, compareceram nove atores com as seguintes idades, em ano: 37, 28, 40, 41, 45, 37, 37, 41 e 44.

Para comparar as idades desses atores, podemos organizá-las em ordem crescente, assim:

$$\underbrace{28,\ 37,\ 37,\ 37,}_{\text{4 elementos}} \quad \underbrace{40}_{\text{elemento central}} \quad \underbrace{41,\ 41,\ 44,\ 45}_{\text{4 elementos}}$$

O elemento central 40 é denominado **mediana** (M_d). A mediana divide um conjunto de dados em duas partes com a mesma quantidade de elementos. Na situação dos atores, podemos dizer que pelo menos metade dos que compareceram ao teste tinha, no máximo, 40 anos, ou, ao contrário, pelo menos metade tinha, no mínimo, 40 anos.

Considere os valores $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ organizados em rol, ou seja, em ordem crescente ou decrescente. Quando:

- n é ímpar, a mediana (M_d) é o valor central desse rol.
- n é par, a mediana (M_d) é a média aritmética dos dois valores centrais desse rol.

Por exemplo:

a) Dados os valores 12, 12, 13, 15, 16, 18, 20, a mediana (M_d) é 15.

b) Dados os valores 23, 24, 24, 25, 26, 28, 29, 29, a mediana (M_d) é:

$$M_d = \frac{25 + 26}{2} = 25{,}5$$

Moda

Leia a seguinte situação.

Em uma pesquisa para saber o número de irmãos que cada um dos 30 estudantes de uma turma tem, foram obtidos os seguintes dados: 0, 2, 3, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 0, 1, 2, 0, 2, 2, 3, 4, 2, 2, 3, 1, 3, 2, 5, 2, 4, 4.

Observe que o número de irmãos varia entre 0 e 5 e que o que aparece mais vezes é o 2, isto é, 13 estudantes dessa turma têm dois irmãos. Dizemos que 2 é a **moda** (M_o) desse conjunto de valores, a qual indicamos assim: $M_o = 2$.

Dado um conjunto de valores $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, a moda ($M_o$) é o elemento que aparece o maior número de vezes, ou seja, é o elemento de maior frequência absoluta.

Um conjunto de dados pode não apresentar moda (amodal), isto é, nenhum elemento dessa variável se repete; pode apresentar duas modas (bimodal); ou pode apresentar mais modas (multimodal).

Média aritmética, moda e mediana de dados agrupados em intervalos

As tabelas de frequências com dados agrupados em intervalos não apresentam os dados brutos. Nesses casos, a média, a moda e a mediana são determinadas pelos procedimentos descritos no exemplo a seguir.

A tabela mostra a frequência cardíaca dos estudantes da 1ª série do Ensino Médio de uma turma após a aula de Educação Física.

Frequência cardíaca dos estudantes

Freq. cardíaca (batimentos por minuto)	Ponto médio (x_i)	f_A	f_R (%)
$75 \vdash 80$	77,5	4	12,5
$80 \vdash 85$	82,5	6	18,75
$85 \vdash 90$	87,5	8	25
$90 \vdash 95$	92,5	4	12,5
$95 \vdash 100$	97,5	6	18,75
$100 \vdash 105$	102,5	4	12,5

Fonte: Dados fictícios.

Saiba que...

A frequência cardíaca normal de uma pessoa é de 60 a 100 batimentos por minuto (bpm), mas ela varia dependendo da idade, do estado de saúde, da atividade que está sendo realizada, entre outros fatores.

Para o cálculo da média, por convenção, adota-se o ponto médio (x_i) como valor representativo de cada intervalo. O ponto médio (x_i) é a média aritmética dos valores extremos dos intervalos, assim:

$$\overline{x} = \frac{77{,}5 \cdot 4 + 82{,}5 \cdot 6 + 87{,}5 \cdot 8 + 92{,}5 \cdot 4 + 97{,}5 \cdot 6 + 102{,}5 \cdot 4}{4 + 6 + 8 + 4 + 6 + 4} = \frac{2\,870}{32} = \overline{x} = 89{,}6875$$

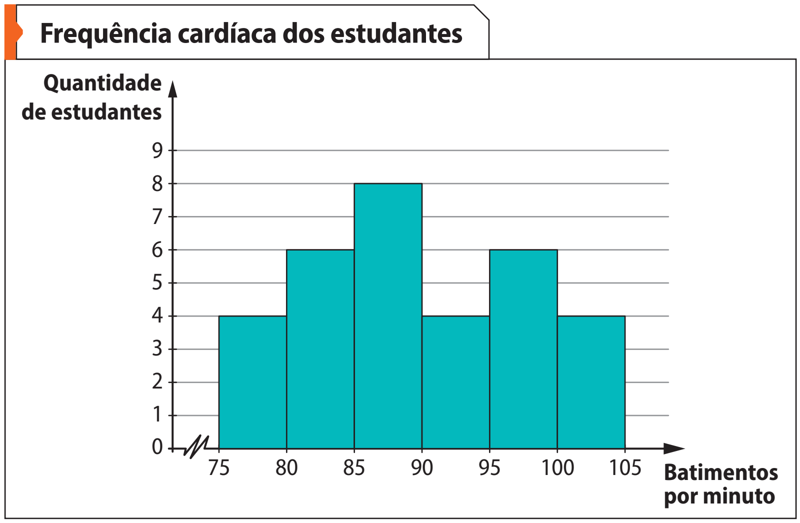
Portanto, a média é 89,6875 batimentos por minuto, ou, aproximadamente, 89,7 batimentos por minuto.

A moda será o ponto médio da classe que apresenta a maior frequência absoluta. Nesse caso, a classe é $85 \vdash 90$. Assim:

$$M_o = \frac{85 + 90}{2} = 87{,}5$$

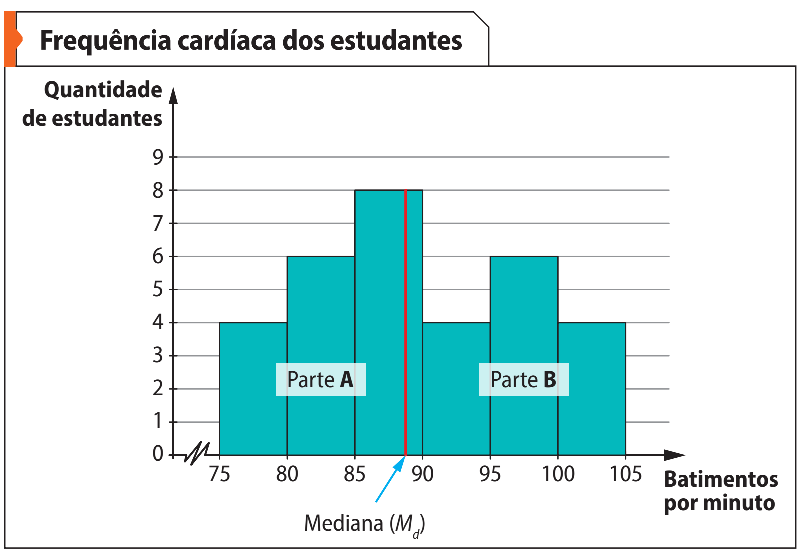
Portanto, a moda é 87,5 batimentos por minuto.

Vamos construir o histograma para o cálculo da mediana.



Fonte: Dados fictícios.

A mediana (M_d) será a abscissa do ponto de interseção de uma reta, perpendicular ao eixo horizontal, que dividirá a figura formada pelos retângulos do histograma em duas partes, **A** e **B**, de mesma área. Ou seja, a soma das áreas dos retângulos da parte **A** será igual à soma das áreas dos retângulos da parte **B**.



Fonte: Dados fictícios.

ILUSTRAÇÕES: SERGIO LIMA

A soma S das áreas dos retângulos do histograma, em unidade de área (u.a.), é:

$S = 5 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + 5 \cdot 8 + 5 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + 5 \cdot 4 = 160$

Logo, cada parte terá 80 u.a. (a metade de 160 u.a.). Note que a mediana está localizada no 3º intervalo, pois a soma das áreas dos dois primeiros retângulos é 50 u.a. (e $50 < 80$), e a soma das áreas dos três primeiros retângulos é 90 u.a. (e $90 > 80$). Com isso, podemos determinar a mediana (M_d) da seguinte maneira:

$5 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + (M_d - 85) \cdot 8 = 80 \Rightarrow 20 + 30 + (M_d - 85) \cdot 8 = 80 \Rightarrow (M_d - 85) \cdot 8 = 30 \Rightarrow$

$\Rightarrow M_d - 85 = \dfrac{30}{8} \Rightarrow M_d = 3{,}75 + 85 \Rightarrow M_d = 88{,}75$

Portanto, a mediana é 88,75 batimentos por minuto.

ATIVIDADES RESOLVIDAS

3. A classificação final para determinado curso é a média ponderada das provas de capacidade geral, com peso 3, e de capacidade específica, com peso 2.

a) Qual é a classificação final de um estudante que obteve 162 pontos na prova de capacidade geral e 147 pontos na prova de capacidade específica?

b) O que acontece com o valor da média obtida caso a nota de alguma das provas seja maior do que os valores mencionados no item anterior? Justifique sem realizar cálculos.

Resolução

a) A classificação final é obtida pela média ponderada:

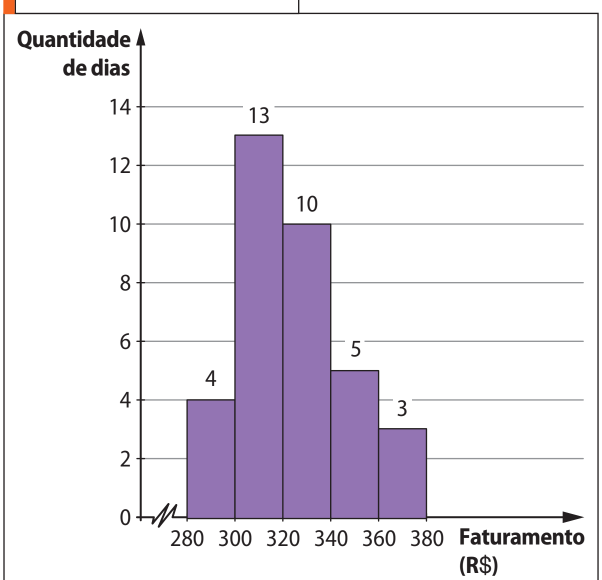
$$\overline{x} = \frac{162 \cdot 3 + 147 \cdot 2}{3 + 2} = \frac{780}{5} = 156$$

Portanto, o estudante será classificado com 156 pontos.

b) A média vai aumentar, pois o numerador será maior do que 780, e o denominador continuará sendo 5 (soma dos pesos); logo, o quociente obtido será maior do que 156.

4. Lucas comprou um comércio. Ele registrou o faturamento dos primeiros 35 dias e construiu o histograma a seguir.

Faturamento diário



Fonte: Dados fictícios.

De acordo com o histograma, calcule a média, a moda e a mediana dos faturamentos desse comércio nos primeiros 35 dias.

Resolução

- Nesse caso, a média $\overline{x}$ dos faturamentos é calculada adotando os pontos médios de cada intervalo.

$$\overline{x} = \frac{290 \cdot 4 + 310 \cdot 13 + 330 \cdot 10 + 350 \cdot 5 + 370 \cdot 3}{4 + 13 + 10 + 5 + 3}$$

$$\overline{x} = \frac{11\,350}{35} \simeq 324{,}29$$

O faturamento médio diário do comércio foi de aproximadamente R$ 324,29.

- A moda será o ponto médio da classe que apresenta a maior frequência absoluta, ou seja, [300; 320[, pois há 13 valores nesse intervalo. Assim:

$$M_o = \frac{300 + 320}{2} = 310$$

A moda dos faturamentos foi R$ 310,00.

- O faturamento mediano será a abscissa do ponto de intersecção de uma reta perpendicular ao eixo horizontal, e essa reta perpendicular possibilitará a divisão do histograma em duas figuras de áreas iguais. A soma S das áreas dos retângulos do histograma, em unidade de área, é:

$$S = 20 \cdot 4 + 20 \cdot 13 + 20 \cdot 10 + 20 \cdot 5 + 20 \cdot 3 = 700$$

A metade de 700 é 350. Além disso, a soma das áreas dos dois primeiros retângulos é 340 u.a., e a soma das áreas dos três primeiros retângulos é 540 u.a.; logo, a mediana (M_d) encontra-se no 3º intervalo. Assim:

$$20 \cdot 4 + 20 \cdot 13 + (M_d - 320) \cdot 10 = 350$$

$$(M_d - 320) \cdot 10 = 10$$

$$M_d - 320 = 1$$

$$M_d = 321$$

Portanto, o faturamento mediano foi R$ 321,00; ou seja, em pelo menos metade dos 35 dias, o comércio faturou, no mínimo, R$ 321,00.

11. Leia uma manchete de março de 2024.

> **Renda habitual média dos brasileiros cresceu 3,1% de 2022 para 2023**
>
> **Valor passou de R$ 2.985 para R$ 3.100 em dezembro dos anos comparados**
>
> RENDA habitual média dos brasileiros cresceu 3,1% de 2022 para 2023. **Agência Brasil**, Brasília, DF, 9 mar. 2024. Disponível em: https://agenciabrasil.ebc.com.br/economia/noticia/2024-03/renda-habitual-media-dos-brasileiros-cresceu-31-de-2022-para-2023. Acesso em: 23 jul. 2024.

Explique, com suas palavras, o que significa essa manchete. Resposta pessoal.

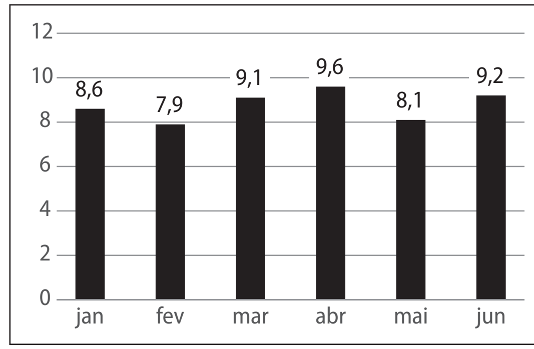
12. (Enem/MEC) Uma empresa tem cinco setores, cada um com quatro funcionários, sendo que cada funcionário de um setor tem um cargo diferente. O quadro apresenta os salários, em real, dos funcionários de cada um desses setores, por cargo.

Setor	Salário para o cargo 1 (R$)	Salário para o cargo 2 (R$)	Salário para o cargo 3 (R$)	Salário para o cargo 4 (R$)
I	1550,00	1140,00	1140,00	1150,00
II	1100,00	1100,00	1520,00	1200,00
III	1050,00	1050,00	1600,00	2000,00
IV	1300,00	1160,00	1280,00	1280,00
V	1250,00	1300,00	1300,00	1150,00

A empresa pretende incentivar a qualificação profissional, oferecendo cursos gratuitos para os funcionários de todos os cinco setores. Entretanto, o primeiro curso será oferecido aos funcionários do setor que apresenta a menor média salarial por cargo.
O primeiro curso será oferecido aos funcionários do setor alternativa **b**

a) I.
b) II.
c) III.
d) IV.
e) V.

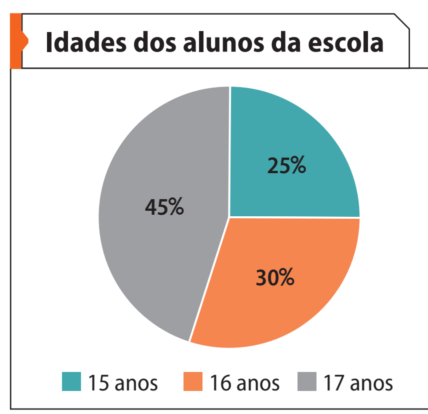
13. (UFPR) O gráfico abaixo representa as vendas, em milhares de reais, do comércio de Cláudio no primeiro semestre de 2022.



De acordo com os dados apresentados no gráfico, a média mensal das vendas nesse período é igual a: alternativa **c**

a) 8,25 mil reais.
b) 8,5 mil reais.
c) 8,75 mil reais.
d) 9 mil reais.

14. (UEA-AM) A distribuição das idades dos 80 alunos de uma escola está representada por um gráfico de setores. alternativa **d**



ILUSTRAÇÕES: SERGIO LIMA

A média das idades desses 80 alunos é

a) 15,5 anos.
b) 15,8 anos.
c) 16 anos.
d) 16,2 anos.
e) 16,5 anos.

15. (UFT-TO) Uma professora de Matemática tomou a altura dos(as) estudantes de sua classe para trabalhar os conceitos de média aritmética, mediana e moda. Tomadas as medidas, os resultados em centimetros foram: 179, 180, 165, 195, 154, 178, 160, 174, 185, 169, 174, 180, 195, 174, 181, 159, 171 e 188.

Considere as informações apresentadas e as afirmativas a seguir:

I. A altura mediana da classe é 176.

II. A altura modal da classe é 195.

III. A altura mediana é maior do que a altura modal.

IV. A média aritmética entre a mediana e a moda das alturas da classe é 175.

Com base nas informações anteriores, assinale a alternativa **CORRETA**. alternativa **c**

a) Apenas as afirmativas I, II e III estão corretas.

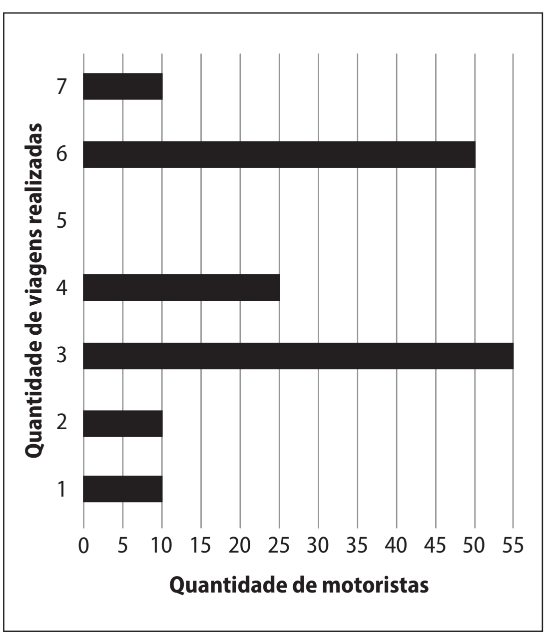
b) Apenas as afirmativas I e III estão corretas.

c) Apenas as afirmativas I, III e IV estão corretas.

d) Apenas as afirmativas I e II estão corretas.

16. (Enem/MEC) Uma empresa de transporte faz regularmente um levantamento do número de viagens realizadas durante o dia por todos os 160 motoristas cadastrados em seu aplicativo. Em um certo dia, foi gerado um relatório, por meio de um gráfico de barras, no qual se relacionaram a quantidade de motoristas com a quantidade de viagens realizadas até aquele instante do dia.

SERGIO LIMA



Comparando os valores da média, da mediana e da moda da distribuição das quantidades de viagens realizadas pelos motoristas cadastrados nessa empresa, obtém-se alternativa **d**

a) mediana = média < moda.

b) mediana = moda < média.

c) mediana < média < moda.

d) moda < média < mediana.

e) moda < mediana < média.

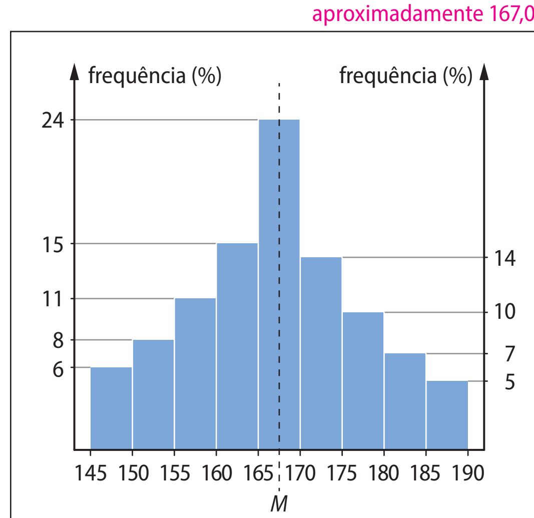
17. Um levantamento feito pelos professores de um colégio concluiu que a altura média dos 405 estudantes do Ensino Médio é 1,68 m. Sabendo que eles não têm a mesma altura, analise se cada afirmação a seguir é verdadeira ou falsa e justifique sua resposta.

I. Há, no grupo, pelo menos um estudante com altura maior do que 1,68 m e pelo menos um que mede menos de 1,68 m.

II. Com certeza há, nesse grupo, mais de um estudante com mais de 1,68 m de altura e mais de um estudante com altura abaixo de 1,68 m. Ver as **Orientações para o professor**.

18. (PUC-SP) O histograma representa a distribuição das estaturas de 100 pessoas e as respectivas frequências. Por exemplo, na 3ª classe (155-160) estão situadas 11% das pessoas com estatura de 1,55 m a 1,59 m. A 5ª classe (165-170) chama-se classe mediana. Pelo ponto *M* situado na classe mediana, traça-se uma reta paralela ao eixo das frequências, de modo a dividir a área da figura formada pelos nove retângulos das frequências em duas regiões de mesma área. Determine a abscissa do ponto *M* (mediana das observações).

aproximadamente 167,08



EDITORIA DE ARTE

19. Para ser aprovado em um componente curricular, um estudante precisa ter média maior do que ou igual a 5,0, obtida em um conjunto de 5 provas, sendo 4 parciais, com peso 1 cada uma, e um exame, com peso 2. Um estudante obteve as seguintes notas nas 4 provas parciais: 4,5

Notas			
3,0	6,0	5,0	7,0

Calcule a nota mínima que esse estudante deverá obter no exame para ser aprovado.

20. (Enem/MEC) A permanência de um gerente em uma empresa está condicionada à sua produção no semestre. Essa produção é avaliada pela média do lucro mensal do semestre. Se a média for, no mínimo, de 30 mil reais, o gerente permanece no cargo, caso contrário, ele será despedido. O quadro mostra o lucro mensal, em milhares de reais, dessa empresa, de janeiro a maio do ano em curso. alternativa **e**

Janeiro	Fevereiro	Março	Abril	Maio
21	35	21	30	38

Qual deve ser o lucro mínimo da empresa no mês de junho, em milhares de reais, para o gerente continuar no cargo no próximo semestre?

a) 26 **b)** 29 **c)** 30 **d)** 31 **e)** 35

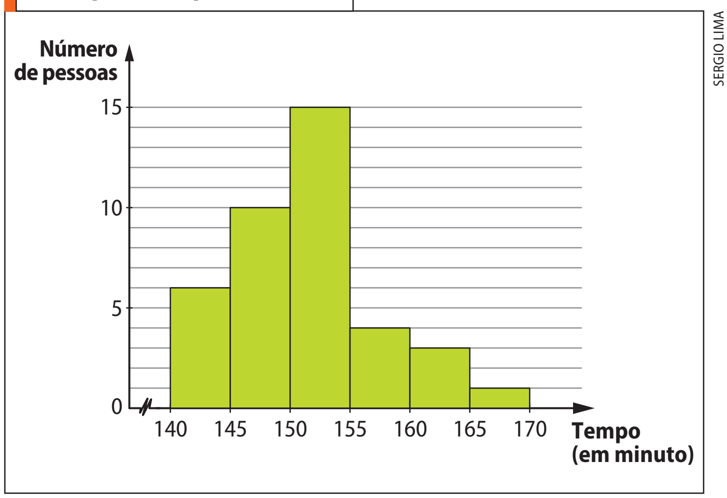
21. O gráfico a seguir mostra o tempo de espera na fila, em minuto, das pessoas que compraram ingressos para um *show*.

Com base nos dados do gráfico, responda.

a) Qual foi o tempo médio de espera nessa fila? aproximadamente 151,3 minutos

b) Qual foi a moda desses dados, isto é, quantos minutos a maioria das pessoas esperou na fila? 152,5 minutos

Tempo de espera na fila



Fonte: Dados fictícios.

22. O relatório Situação da População Mundial 2024, produzido pelo Fundo de População das Nações Unidas (UNFPA), indicou que, em 2024, no Brasil, as famílias tinham, em média, 1,6 filho. Dessa maneira, o Brasil ficava abaixo da média da taxa de fecundidade do mundo, que era de 2,3 filhos, e da América Latina, que era de 1,8 filho por família.

Elaborado com base em: FUNDO DE POPULAÇÃO DAS NAÇÕES UNIDAS. **Situação da População Mundial 2024**: vidas entrelaçadas, fios de esperança: acabando com as desigualdades na saúde e nos direitos sexuais e reprodutivos. [Brasília, DF]: UNFPA, 2024. Disponível em: https://brazil.unfpa.org/pt-br/publications/swop-2024-vidas-entrelacadas-fios-de-esperanca. Acesso em: 23 jul. 2024.

Com seus colegas, faça um levantamento da quantidade de filhos por família na família de cada um deles, construa uma tabela e resolva as questões.

a) Calcule a média aritmética da quantidade de filhos por família de sua sala de aula. Esse número é próximo da média de fecundidade do Brasil em 2024? Resposta pessoal.

b) Elabore uma questão com base nos dados obtidos no item anterior. Depois, troque-a com um colega e responda à questão elaborada por ele. Juntos, confiram as resoluções e as estratégias utilizadas. Resposta pessoal.

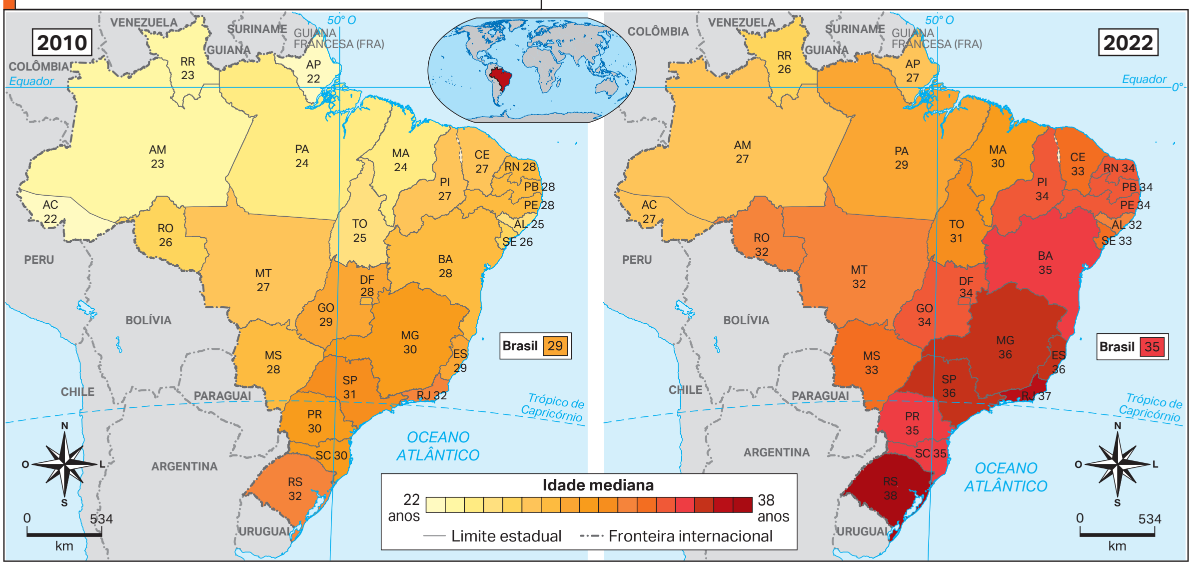
c) Pesquise alguns dos motivos prováveis pelos quais as famílias brasileiras estão diminuindo a quantidade de filhos. Para orientar sua pesquisa, considere fatores sociais, econômicos, culturais e geográficos. Ver as **Orientações para o professor**.

23. A **idade mediana** de uma região é um indicador que divide a população dessa região entre os 50% mais jovens e os 50% mais velhos.

Na abertura deste Capítulo, analisamos que a população do Brasil vem envelhecendo, e o aumento na idade mediana da população evidencia esse fato.

Observe o conjunto de mapas a seguir.

Idade mediana da população residente
Por unidades da federação



Elaborados com base em: GOMES, Irene; BRITTO, Vinícius. **Censo 2022**: número de pessoas com 65 anos ou mais de idade cresceu 57,4% em 12 anos. Rio de Janeiro: Agência IBGE Notícias, 1 nov. 2023. Disponível em: https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-noticias/2012-agencia-de-noticias/noticias/38186-censo-2022-numero-de-pessoas-com-65-anos-ou-mais-de-idade-cresceu-57-4-em-12-anos. Acesso em: 23 jul. 2024.

Agora, faça o que se pede em cada item.

23. a) Espera-se que os estudantes percebam que, no mapa de 2022, as tonalidades de todas as regiões são mais escuras que no mapa de 2010, indicando que a idade mediana aumentou em todas as Unidades da Federação.

a) Somente comparando as cores nos mapas, o que você pode dizer sobre a idade mediana no Brasil e em cada uma das Unidades da Federação?

b) Compare agora os valores em cada Unidade da Federação. Houve algum local onde a idade mediana diminuiu? Não. Em todos os locais indicados, a idade mediana aumentou.

c) A idade mediana no Brasil aumentou quantos anos de 2010 para 2022? Aumentou 6 anos.

d) Procure nos mapas o estado em que você mora e compare a idade mediana nos anos de 2010 e 2022. De quanto foi a variação na idade mediana? Resposta pessoal.

e) Elabore uma pergunta que possa ser respondida com os mapas. Em seguida, troque-a com um colega para que você responda à pergunta que ele elaborou e ele responda à sua pergunta.
Resposta pessoal.

Para assistir

- FECUNDIDADE no Brasil: IBGE Explica. [*S. l.*: *s. n.*], 2019. 1 vídeo (3 min). Publicado pelo canal IBGE. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=OymHhJp7QaA. Acesso em: 23 jul. 2024.
  O vídeo explica o que é taxa de fecundidade e como esse índice influencia o envelhecimento da população.

Medidas de dispersão

As medidas de tendência central nem sempre são suficientes para a análise de um conjunto de dados. Acompanhe o exemplo.

A tabela apresenta os índices pluviométricos, em milimetro, nos seis primeiros meses do ano em duas regiões, **A** e **B**.

Saiba que...

O índice pluviométrico refere-se à quantidade de chuva por metro quadrado em determinada região e por determinado período. Cada 1 mm de chuva indica que, para cada metro quadrado da região, choveu 1 litro de água.

Índice pluviométrico (em milimetro)

Região \ Mês	Jan.	Fev.	Mar.	Abr.	Maio	Jun.	Média semestral
A	52,3	44,7	36,8	37,4	26,0	18,8	36,0
B	80,6	58,6	35,4	20,1	12,3	9,0	36,0

Fonte: Dados fictícios.

Comparando os dados da tabela, observe que a região **B** apresentou os dois maiores (em vermelho) e os dois menores (em azul) índices pluviométricos, por isso sua variação pluviométrica foi maior do que a variação da região **A**. Em outras palavras, podemos dizer que a região **A**, em relação à região **B**, apresentou índices mais regulares (mais homogêneos), com menores oscilações pluviométricas durante esse período.

No exemplo, a média aritmética não foi suficiente para indicar qual das regiões teve as maiores, ou menores, oscilações pluviométricas. Quando precisamos caracterizar o grau de dispersão, ou de homogeneidade, de um conjunto de dados, utilizamos as **medidas de dispersão**.

Neste tópico, vamos estudar quatro medidas de dispersão: amplitude, desvio médio, variância e desvio padrão.

Amplitude

Você estudou, anteriormente, como calcular a amplitude total e a de cada intervalo quando agrupou os dados em classes para construir uma tabela de frequências. Essa medida pode ser usada para verificar a dispersão dos dados observados. Acompanhe, por exemplo, a seguinte situação.

Em uma produção de peças de metal para certo equipamento, o controle de qualidade precisa verificar o comprimento, em milimetro, dessas peças. Para isso, foram selecionadas, em dois dias, nove dessas peças, conforme indicado a seguir.

1º dia	234	234	231	233	235	234	234	234	234
2º dia	234	231	234	240	234	234	239	234	234

Para calcular a amplitude dos dados obtidos em cada dia, vamos identificar o menor e o maior valor observado em cada dia; depois, calculamos a diferença entre eles.

- 1º dia: o menor valor é 231 mm, e o maior, 235 mm; portanto, a amplitude é:
  235 mm − 231 mm = 4 mm
- 2º dia: o menor valor é 231 mm, e o maior, 240 mm; portanto, a amplitude é:
  240 mm − 231 mm = 9 mm

Observe que a amplitude do primeiro dia foi 4 mm, e a do segundo dia foi 9 mm. Isso indica que as peças produzidas no primeiro dia tiveram menor variação de medida.

Por se tratar de uma produção de peças de metal, provavelmente se tem uma tolerância aceitável de variação de medida, mas note que, no 2º dia, essa variação foi quase de 10 mm, ou seja, 1 cm.

Pense e responda

O controle de qualidade identificou que a maioria das peças dessa amostra está com a medida ideal para o funcionamento do equipamento em que essa peça será acoplada. Observando os valores de cada dia, qual é a medida ideal? Como é chamado, em Estatística, esse valor?

234 mm; moda

RED IVORY/SHUTTERSTOCK.COM

- Peça sendo usinada em um torno mecânico. Em usinagem, é essencial que as peças sejam produzidas de acordo com as medidas indicadas, pois isso influencia o funcionamento dos equipamentos em que serão usadas.

Desvio médio

Para estudar o desvio médio, vamos considerar as notas bimestrais de um estudante de Matemática durante um ano letivo.

Bimestre	1º	2º	3º	4º
Notas	5	8	6	9

Agora, vamos calcular a média aritmética das notas desse estudante:

$$\overline{x} = \frac{5 + 8 + 6 + 9}{4} = \frac{28}{4} = 7$$

Calculamos, em seguida, as diferenças entre cada uma das notas e a média aritmética. Essas diferenças são chamadas de **desvios em relação à média**, ou simplesmente **desvios**.

- $x_1 - \overline{x} = 5 - 7 = -2$
- $x_2 - \overline{x} = 8 - 7 = 1$
- $x_3 - \overline{x} = 6 - 7 = -1$
- $x_4 - \overline{x} = 9 - 7 = 2$

Definimos o **desvio médio** (d_m) como a média aritmética dos valores absolutos dos desvios ($|x_i - \overline{x}|$).

$$d_m = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \overline{x}|}{n}$$

Saiba que...

O símbolo $\sum_{i=1}^{n} A_i$ indica o somatório, ou seja, a soma dos valores de índice 1 até n para a expressão A_i. Por exemplo, $\sum_{i=1}^{3} i^2$ indica $1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$.

Em nosso exemplo, temos:

$$d_m = \frac{\sum_{i=1}^{4} |x_i - \bar{x}|}{4} = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + |x_3 - \bar{x}| + |x_4 - \bar{x}|}{4}$$

$$d_m = \frac{|-2| + |1| + |-1| + |2|}{4} = \frac{6}{4} = 1{,}5$$

Assim, o desvio médio das notas é 1,5. Isso significa que, na média, cada nota ficou 1,5 distante da nota média.

Variância e desvio padrão

A variância e o desvio padrão, assim como o desvio médio, são medidas que quantificam o grau de dispersão de um conjunto de dados em relação à média. Quanto maiores são a variância e o desvio padrão, maior é a dispersão dos dados em relação à média e vice-versa.

Definimos a **variância** (V_a) como a média aritmética dos quadrados dos desvios $(x_i - \bar{x})^2$.

$$V_a = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

O **desvio padrão** (D_p) é dado pela raiz quadrada da variância.

$$D_p = \sqrt{V_a}$$

A unidade de medida do desvio padrão é a mesma dos dados analisados.

Para exemplificar, observe a quantidade e a média de pontos que dois jogadores de basquete fizeram em quatro partidas de um campeonato.

Jogador	Partida 1	Partida 2	Partida 3	Partida 4	Média de pontos
A	12	20	8	32	18
B	15	19	17	21	18

DAN THORNBERG/SHUTTERSTOCK.COM

Acertar a bola na cesta de basquete pode valer 1, 2 ou 3 pontos, dependendo da situação ou da posição do jogador na quadra.

Observe, no quadro, que os dois jogadores têm a mesma média de 18 pontos. No entanto, a pontuação mínima e a máxima do jogador **B** foram 15 e 21 pontos, enquanto as do jogador **A** foram 8 e 32. Vamos analisar o grau de dispersão dessas pontuações em relação à média por meio da variância e do desvio padrão.

$$V_{a\ (\text{jogador } \mathbf{A})} = \frac{(12 - 18)^2 + (20 - 18)^2 + (8 - 18)^2 + (32 - 18)^2}{4} = \frac{336}{4} = 84$$

$$D_{p\ (\text{jogador } \mathbf{A})} = \sqrt{84} \simeq 9{,}2$$

$$V_{a\ (\text{jogador } \mathbf{B})} = \frac{(15 - 18)^2 + (19 - 18)^2 + (17 - 18)^2 + (21 - 18)^2}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

$$D_{p\ (\text{jogador } \mathbf{B})} = \sqrt{5} \simeq 2{,}2$$

O jogador **B** apresentou a menor variância e, consequentemente, o menor desvio padrão de pontuações. Isso aconteceu porque os menores desvios de pontos marcados em relação à média foram do jogador **B**. Nesse contexto, os dois jogadores tiveram a mesma média de pontos, mas podemos afirmar que o jogador **B** teve um desempenho mais equilibrado, mais regular, de pontos marcados nas quatro partidas ou que o desempenho do jogador **A** foi mais inconsistente, isto é, a quantidade de pontos marcados variou mais em cada partida.

Pense e responda

A variância pode ser um número negativo? O que significa um desvio padrão igual a zero?

Não, a variância é sempre um número não negativo. Se o desvio padrão é zero, então a variância também é zero; isso só acontece quando todos os valores do conjunto de dados são iguais.

ATIVIDADES RESOLVIDAS

5. Uma empresa, para aumentar a produção de anéis de vedação de borracha, comprou duas máquinas. O controle de qualidade registrou as massas, em grama, dos oito primeiros anéis fabricados por cada máquina.

Máquina 1	20	19	20	20	21	20	19	21
Máquina 2	20	20	19	20	20	20	21	20

Calcule os desvios médios das massas dos anéis de borracha produzidos em cada máquina. Em seguida, compare os dois valores e explique o que eles indicam.

Resolução

Primeiro, vamos calcular as massas médias ($\overline{x}$) dos anéis produzidos em cada máquina.

$$\overline{x}_{\text{máquina 1}} = \frac{20 + 19 + 20 + 20 + 21 + 20 + 19 + 21}{8} = \frac{160}{8} = 20$$

$$\overline{x}_{\text{máquina 2}} = \frac{20 + 20 + 19 + 20 + 20 + 20 + 21 + 20}{8} = \frac{160}{8} = 20$$

O desvio médio (d_m) é a média aritmética dos valores absolutos dos desvios, logo:

$$d_{m\,\text{máquina 1}} = \frac{|20-20| + |20-19| + |20-20| + |20-20| + |20-21| + |20-20| + |20-19| + |20-21|}{8} =$$

$$= \frac{0 + 1 + 0 + 0 + 1 + 0 + 1 + 1}{8} = \frac{4}{8} = 0{,}5$$

$$d_{m\,\text{máquina 2}} = \frac{|20-20| + |20-20| + |20-19| + |20-20| + |20-20| + |20-20| + |20-21| + |20-20|}{8} =$$

$$= \frac{0 + 0 + 1 + 0 + 0 + 0 + 1 + 0}{8} = \frac{2}{8} = 0{,}25$$

O desvio médio da máquina 1 foi 0,5 grama e o da máquina 2 foi 0,25 grama. Isso mostra que a máquina 2 foi mais eficiente em garantir pouca variação das massas dos anéis de borracha confeccionados.

6. Nos últimos anos, por causa das mudanças climáticas e da sazonalidade, produtos alimentícios têm sofrido grandes variações de preço. Observe o preço por kilograma de dois alimentos no primeiro semestre de 2024.

Preço por kilograma no primeiro semestre de 2024

Alimento \ Mês	Jan.	Fev.	Mar.	Abr.	Maio	Jun.
A	R$ 12,00	R$ 15,00	R$ 12,00	R$ 16,00	R$ 14,00	R$ 15,00
B	R$ 12,00	R$ 11,00	R$ 18,00	R$ 9,00	R$ 19,00	R$ 15,00

Fonte: Dados fictícios.

a) Calcule o desvio padrão dos preços de cada alimento. Em seguida, responda: qual dos dois alimentos sofreu a maior variação de preço?

b) Elabore um fluxograma com as etapas para calcular o desvio padrão de um conjunto de dados.

Resolução

a) Inicialmente, vamos calcular o preço médio por kilograma dos dois alimentos no semestre.

$$\overline{x}_A = \frac{12 + 15 + 12 + 16 + 14 + 15}{6} = 14 \qquad \overline{x}_B = \frac{12 + 11 + 18 + 9 + 19 + 15}{6} = 14$$

Em seguida, calculamos os desvios e os quadrados dos desvios.

A	$x_i - \bar{x}$	$12 - 14 = -2$	$15 - 14 = 1$	$12 - 14 = -2$	$16 - 14 = 2$	$14 - 14 = 0$	$15 - 14 = 1$
	$(x_i - \bar{x})^2$	$(-2)^2 = 4$	$(1)^2 = 1$	$(-2)^2 = 4$	$(2)^2 = 4$	$(0)^2 = 0$	$(1)^2 = 1$
B	$x_i - \bar{x}$	$12 - 14 = -2$	$11 - 14 = -3$	$18 - 14 = 4$	$9 - 14 = -5$	$19 - 14 = 5$	$15 - 14 = 1$
	$(x_i - \bar{x})^2$	$(-2)^2 = 4$	$(-3)^2 = 9$	$(4)^2 = 16$	$(-5)^2 = 25$	$(5)^2 = 25$	$(1)^2 = 1$

Agora, vamos determinar as variâncias.

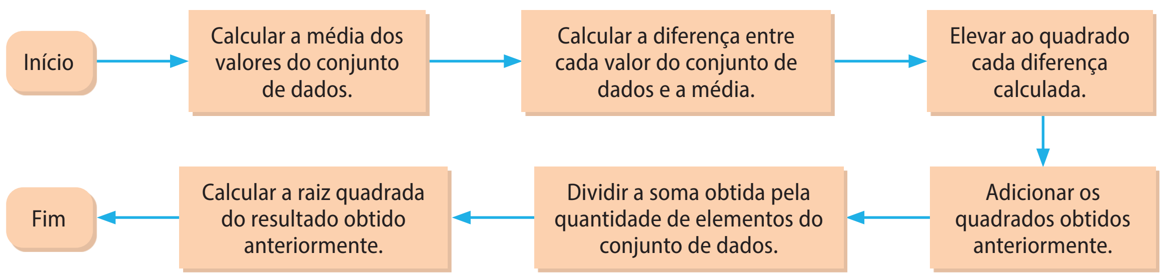
$V_{aA} = \dfrac{4 + 1 + 4 + 4 + 0 + 1}{6} \simeq 2{,}33$ $\qquad$ $V_{aB} = \dfrac{4 + 9 + 16 + 25 + 25 + 1}{6} \simeq 13{,}33$

Por fim, determinamos os desvios padrão.

$D_{pA} \simeq \sqrt{2{,}33} \simeq 1{,}53$ $\qquad$ $D_{pB} \simeq \sqrt{13{,}33} \simeq 3{,}65$

O alimento **B** sofreu a maior variação de preços, pois seu desvio padrão foi superior ao desvio padrão do alimento **A**.

b) Para calcular o desvio padrão de um conjunto de dados, podemos seguir as etapas indicadas no fluxograma a seguir.



SERGIO LIMA

ATIVIDADES

24. c) O atleta 2, pois tanto o desvio médio quanto o desvio padrão desse atleta foram inferiores ao desvio médio e ao desvio padrão do atleta 1.

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

24. Dois atletas anotaram seus tempos, em minuto, das cinco últimas meias maratonas.

Atleta 1	112	120	130	117	121
Atleta 2	115	124	122	120	119

a) Calcule o desvio médio dos tempos de cada atleta. $d_{m1} = 4{,}4$ $\quad d_{m2} = 2{,}4$

b) Calcule a variância e o desvio padrão dos tempos de cada atleta. $V_{a1} = 34{,}8$; $D_{p1} \simeq 5{,}9$ $V_{a2} = 9{,}2$; $D_{p2} \simeq 3{,}03$

c) Qual dos atletas teve uma *performance* mais regular nessas corridas? Justifique.

- A meia maratona, modalidade com percurso de aproximadamente 21 km, é uma prova bastante popular entre os corredores de rua. Meia maratona da Reserva, Rio de Janeiro (RJ). Fotografia de 2023.

CELSO PUPO/FOTOARENA

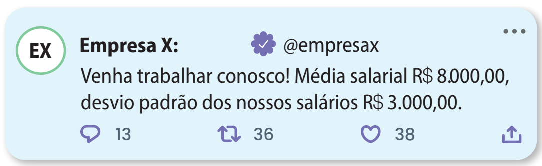
25. Um teste de qualidade estimou o tempo de duração, em mil horas, de cinco lâmpadas LED de duas marcas diferentes.

Marca 1	32	28	41	48	36
Marca 2	26	49	45	31	34

a) De acordo com essas estimativas, determine, para cada marca de lâmpada, a amplitude, o desvio médio e o desvio padrão desses tempos. $A_1 = 20$; $d_{m1} = 6$; $D_{p1} \simeq 6{,}99$ $A_2 = 23$; $d_{m2} = 8$; $D_{p2} \simeq 8{,}65$

b) Qual das marcas apresentou o desempenho mais regular? Por quê? A marca 1, pois as durações das lâmpadas dessa marca tiveram amplitude, desvio médio e desvio padrão inferiores às medidas correspondentes das lâmpadas da marca 2.

26. Duas empresas fizeram anúncios fora do padrão em suas redes sociais para incentivar profissionais a se candidatarem às vagas oferecidas.



SERGIO LIMA

Se você pudesse escolher uma dessas empresas para trabalhar, considerando apenas os salários, qual você escolheria? Justifique. Resposta pessoal. Ver as **Orientações para o professor**.

27. (Enem/MEC) Em uma corrida de regularidade, a equipe campeã é aquela em que o tempo dos participantes mais se aproxima do tempo fornecido pelos organizadores em cada etapa. Um campeonato foi organizado em 5 etapas, e o tempo médio de prova indicado pelos organizadores foi de 45 minutos por prova. No quadro, estão representados os dados estatísticos das cinco equipes mais bem classificadas.

Dados estatísticos das equipes mais bem classificadas (em minutos)

Equipes	Média	Moda	Desvio padrão
Equipe I	45	40	5
Equipe II	45	41	4
Equipe III	45	44	1
Equipe IV	45	44	3
Equipe V	45	47	2

Fonte: Dados fictícios.

Utilizando os dados estatísticos do quadro, a campeã foi a equipe alternativa **c**

a) I. **b)** II. **c)** III. **d)** IV. **e)** V.

28. Anote a medida da altura, em centimetro, de todos os estudantes da sua turma e faça o que se pede. Respostas pessoais.

a) Construa uma tabela de distribuição de frequências de dados agrupados, considerando intervalos com 2 cm de amplitude.

b) Calcule as medidas da altura média e da mediana.

c) Calcule o desvio padrão das medidas das alturas.

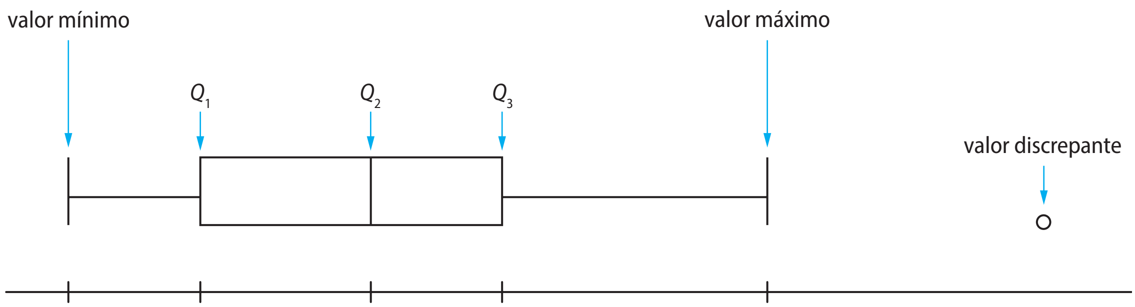
d) O que se pode concluir com base nos cálculos feitos?

29. Elabore um problema envolvendo a comparação de dois conjuntos de dados por meio de medidas estatísticas. Troque seu problema com um colega e resolva o problema elaborado por ele.
Resposta pessoal. Ver as **Orientações para o Professor**.

Box-plot

O *box-plot*, ou diagrama de caixa, é utilizado para representar a dispersão de dados de uma variável quantitativa. Sua estrutura consiste em uma caixa retangular com linhas saindo de suas extremidades e limitadas superior e inferiormente.

Ao construir um *box-plot*, usa-se um eixo real para localizar os pontos correspondentes aos valores: mínimo; máximo; discrepantes; do primeiro quartil (Q_1); do segundo quartil (Q_2); e do terceiro quartil (Q_3). Observe.



EDITORIA DE ARTE

Fonte: Dados fictícios.

Para determinar os quartis, os dados quantitativos devem ser organizados em ordem crescente. Os quartis dividem o conjunto em quatro partes com a mesma quantidade de elementos. Para isso, Q_2 é a mediana do conjunto de dados, Q_1 é a mediana dos dados inferiores a Q_2, e Q_3 é a mediana dos dados superiores a Q_2.

O exemplo a seguir mostra como construir um *box-plot*.

Em uma sala com 27 estudantes, o professor registrou, em ordem crescente, o tempo, em minuto, que cada um levou para fazer sua avaliação.

5; 21; 25; 25; 25; 28; 30; 32; 32; 32; 35; 36; 36; 38; 39; 40; 40; 40; 41; 43; 44; 45; 45; 45; 45; 50; 50

Para representar esses valores em um *box-plot*, podemos seguir os passos apresentados.

1º) Determinamos o valor do segundo quartil (Q_2).

Q_2 é a mediana do conjunto de dados. Como temos 27 dados em ordem crescente, a mediana será o 14º dado, então $Q_2 = 38$.

2º) Determinamos o valor do primeiro quartil (Q_1).

Q_1 é a mediana dos dados inferiores a Q_2. Há 13 dados inferiores a Q_2; logo, a mediana será o 7º dado, ou seja, $Q_1 = 30$.

3º) Determinamos o valor do terceiro quartil (Q_3).

Q_3 é a mediana dos dados superiores a Q_2. Nesse caso, a mediana será o 21º dado, isto é, $Q_3 = 44$.

$$\underbrace{5;\ 21;\ 25;\ 25;\ 25;\ 28}_{\text{6 elementos}};\ \underset{Q_1}{30};\ \underbrace{32;\ 32;\ 32;\ 35;\ 36;\ 36}_{\text{6 elementos}};\ \underset{Q_2}{38};\ \underbrace{39;\ 40;\ 40;\ 40;\ 41;\ 43}_{\text{6 elementos}};\ \underset{Q_3}{44};\ \underbrace{45;\ 45;\ 45;\ 45;\ 50;\ 50}_{\text{6 elementos}}$$

4º) Verificamos se existem **valores discrepantes**.

Um valor é considerado discrepante se for menor do que $Q_1 - 1{,}5(Q_3 - Q_1)$ ou maior do que $Q_3 + 1{,}5(Q_3 - Q_1)$, assim:

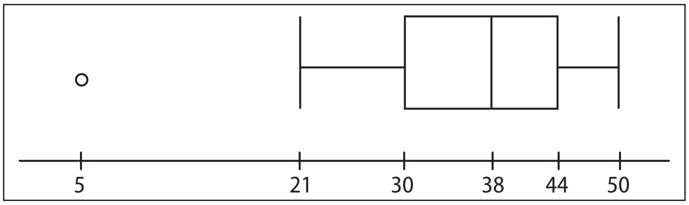
$Q_1 - 1{,}5(Q_3 - Q_1) = 30 - 1{,}5(44 - 30) = 9$ $\qquad Q_3 + 1{,}5(Q_3 - Q_1) = 44 + 1{,}5(44 - 30) = 65$

O valor 5 é um dado menor do que 9, portanto 5 é um valor discrepante.

5º) Identificamos os valores mínimo e máximo desconsiderando os valores discrepantes.
Valor mínimo = 21 Valor máximo = 50

6º) Desenhamos o *box-plot* considerando os valores encontrados.

Tempo que os estudantes levaram para fazer a avaliação (em minuto)



Fonte: Dados fictícios.

Saiba que...
O *box-plot* pode ser representado na vertical ou na horizontal.
Os valores discrepantes podem ser representados no diagrama por uma bolinha ou um asterisco.

Pelo diagrama, podemos identificar, por exemplo, que metade dos estudantes resolveu a avaliação em até 38 minutos, 25% dos estudantes demoraram, no mínimo, 44 minutos para solucionar a prova e 50% resolveram a avaliação no intervalo de 30 a 44 minutos.

» Diagrama de ramo e folhas

Um modo de organizar dados de uma variável quantitativa em ordem crescente e, ao mesmo tempo, mostrar sua distribuição de frequências é confeccionando um **diagrama de ramo e folhas**.

Acompanhe o exemplo.

Uma faculdade registrou em um quadro a idade de seus 32 professores.

Idade dos professores							
50	45	62	70	45	50	48	37
47	48	60	44	48	58	53	47
56	75	38	39	37	65	72	71
50	63	49	50	45	39	40	61

Para montar um diagrama de ramo e folhas com esses dados, podemos executar os seguintes passos.

1º) Colocamos as idades em ordem crescente.
37; 37; 38; 39; 39; 40; 44; 45; 45; 45; 47; 47; 48; 48; 48; 49; 50; 50; 50; 50; 53; 56; 58; 60; 61; 62; 63; 65; 70; 71; 72; 75

2º) Escrevemos em cada linha apenas as idades com dezenas iguais.
37; 37; 38; 39; 39
40; 44; 45; 45; 45; 47; 47; 48; 48; 48; 49
50; 50; 50; 50; 53; 56; 58
60; 61; 62; 63; 65
70; 71; 72; 75

3º) Montamos o diagrama em duas colunas, separadas por um traço vertical. Na primeira coluna, escrevemos os algarismos das dezenas de cada idade e, na segunda coluna, escrevemos os algarismos correspondentes das unidades de cada idade.

Idade dos professores

3	7 7 8 9 9
4	0 4 5 5 5 7 7 8 8 8 9
5	0 0 0 0 3 6 8
6	0 1 2 3 5
7	0 1 2 5

Legenda: 4 | 5 = 45 anos

Fonte: Dados fictícios.

Pelo diagrama de ramo e folhas construído, podemos concluir que:

- três professores têm 48 anos;
- a moda (M_o) das idades é 50 anos;
- 11 professores têm de 40 a menos de 50 anos;
- a amplitude das idades é 38 anos, pois $75 - 37 = 38$.

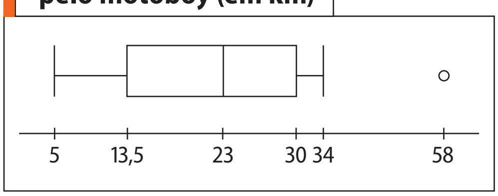
A primeira coluna do diagrama é denominada **ramo**, e a segunda, **folhas**. Os ramos e as folhas podem representar qualquer ordem de grandeza; por isso, o diagrama deve sempre ter uma legenda, indicando o que significam o ramo e as folhas. Observe alguns exemplos de legenda.

Legenda: 3 | 21 = 3,21 cm   Legenda: 42 | 6 = 426 kg

ATIVIDADES RESOLVIDAS

7. O diagrama de caixa representa as distâncias, em kilometro, das 50 entregas que um motoboy fez em um mês.

Distâncias percorridas pelo motoboy (em km)



EDITORIA DE ARTE

Fonte: Dados fictícios.

De acordo com o gráfico, classifique cada afirmação em verdadeira (V) ou falsa (F) e justifique sua resposta.

I. A viagem mais curta que o motoboy fez tinha 5 km, e a mais longa tinha 34 km.

II. Na metade das viagens, o motoboy percorreu, no mínimo, 23 km.

III. Em 49 das 50 entregas, o motoboy percorreu, no máximo, 30 km.

IV. Em 75% das viagens, o motoboy percorreu, pelo menos, 13,5 km.

Resolução

I. Falsa. A distância da viagem mais curta está correta. No entanto, a viagem mais longa tinha 58 km.

II. Verdadeira. O valor do segundo quartil, $Q_2 = 23$, é a mediana do conjunto de dados.

III. Falsa. Em 49 das 50 entregas, o motoboy percorreu, no máximo, 34 km.

IV. Verdadeira. 25% dos dados estão antes do primeiro quartil, $Q_1 = 13{,}5$; logo, em 75% das viagens, o motoboy percorreu, pelo menos, 13,5 km.

8. O diagrama de ramo e folhas a seguir apresenta a quantidade de passageiros que uma linha de ônibus transportou durante 41 dias seguidos. Analise o diagrama e responda às questões.

Quantidade de passageiros

15.	5 5 6
16*	0 2 2 3 3 4 4 4
16.	5 7 7 7 8 9 9 9 9 9
17*	1 2 2 2 3 4 4
17.	6 6 8 9 9
18*	0 0 0 2 3
18.	5 9
19*	2

Legenda: 17* | 1 = 171 passageiros
Legenda: 17. | 9 = 179 passageiros

Fonte: Dados fictícios.

a) Qual foi a quantidade mínima de passageiros transportados? E a máxima?

b) Quantos passageiros essa linha de ônibus transportou na maioria dos dias?

c) Qual é a mediana desse conjunto de dados? O que ela representa?

Resolução

a) A quantidade mínima foi 155 passageiros, e a máxima, 192.

b) Na maioria dos dias, a linha transportou 169 passageiros.

c) Há 41 dados em ordem crescente no diagrama, logo a mediana (M_d) é o 21º dado, isto é, $M_d = 169$. Ela indica que, na metade dos dias, foram transportados, no máximo, 169 passageiros.

ATIVIDADES

30. No quadro a seguir, apresenta-se o número de questões acertadas por estudante em determinado exame aplicado a 43 estudantes do Ensino Médio.

50	45	62	70	45
50	47	48	60	44
48	58	56	75	38
39	37	65	50	63
49	50	45	39	48
37	75	87	85	76
53	47	84	83	80
85	72	71	79	67
68	61	40		

a) Apresente esses dados em um diagrama de ramo e folhas. Ver as **Orientações para o professor**.

b) Determine a mediana e a moda de questões acertadas. mediana: 56 questões; moda: 50 questões

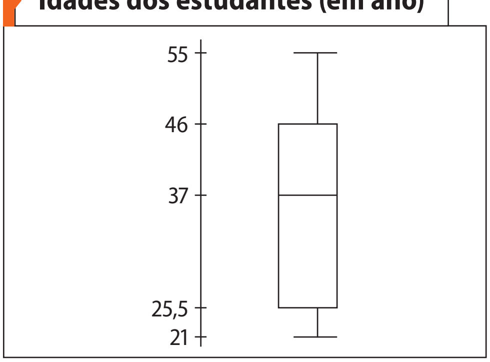
c) Calcule o percentual da turma que acertou, no mínimo, 70 questões. aproximadamente 30,23%

d) Agora, construa um histograma com esses dados considerando o primeiro intervalo como [30, 40[e representando as frequências absolutas no eixo vertical.
Ver as **Orientações para o professor**.

e) Qual das representações gráficas você achou que é mais adequada para representar os dados: o histograma ou o diagrama de ramo e folhas?

31. Observe o diagrama de caixa que representa as idades, em ano, dos estudantes de uma turma de Educação de Jovens e Adultos (EJA) e responda.

Idades dos estudantes (em ano)



Fonte: Dados fictícios.

a) Qual é a idade do estudante mais novo matriculado nessa turma? E a do estudante mais velho? 21 anos. 55 anos

b) Podemos dizer que 75% dos estudantes dessa turma têm menos do que 46 anos? Explique sua resposta. Ver as **Orientações para o professor**.

c) Há mais estudantes com idade entre 21 e 25,5 anos ou entre 46 e 55 anos? Justifique sua resposta. Ver as **Orientações para o professor**.

d) O que 37 indica nesse gráfico?
Ver as **Orientações para o professor**.

32. Elabore uma situação-problema envolvendo o diagrama de ramo e folhas a seguir. Troque sua situação-problema com a de um colega e resolva a situação proposta por ele. Depois, verifiquem se as resoluções estão corretas. Não se esqueça de dar um título ao diagrama e de adicionar uma legenda condizente com sua situação-problema. Resposta pessoal.

4.	0 0 2 2
4*	6 6 6 8 8 9
5.	4 4 4
5*	8 9
6*	5 6 8 8 8
7.	3 4 4 5
7*	7

Fonte: Dados fictícios.

33. Os dados indicam a validade, em meses, de 32 medicamentos estocados em uma farmácia.
Resposta pessoal.

50	45	62	70	45	50	48	37
47	48	60	44	48	58	53	47
56	75	38	39	37	65	72	71
50	63	49	50	45	39	40	61

Represente esses dados em um diagrama de caixa. Depois, elabore duas questões sobre seu diagrama e peça a um colega que as responda, enquanto você responde às questões dele. Por fim, confiram juntos as resoluções.

30. e) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes percebam que as duas representações são adequadas, dependendo da intenção de quem está fazendo o gráfico. O histograma permite visualizar de maneira mais imediata a frequência de cada intervalo, já o diagrama de ramo e folhas preserva cada dado da amostra.

EXPLORANDO A TECNOLOGIA

Orientar os estudantes a navegar pelo *site* do **GeoGebra**, pois nele há uma comunidade de discussão e muitas informações disponíveis, inclusive alguns tutoriais e materiais produzidos por professores.

Conhecendo o GeoGebra

O **GeoGebra** é um *software* de Matemática dinâmica que pode ser utilizado em todos os níveis de ensino. Trata-se de uma multiplataforma, pois tem portabilidade em todos os sistemas operacionais e pode ser instalada em computadores, *tablets* e *smartphones*.

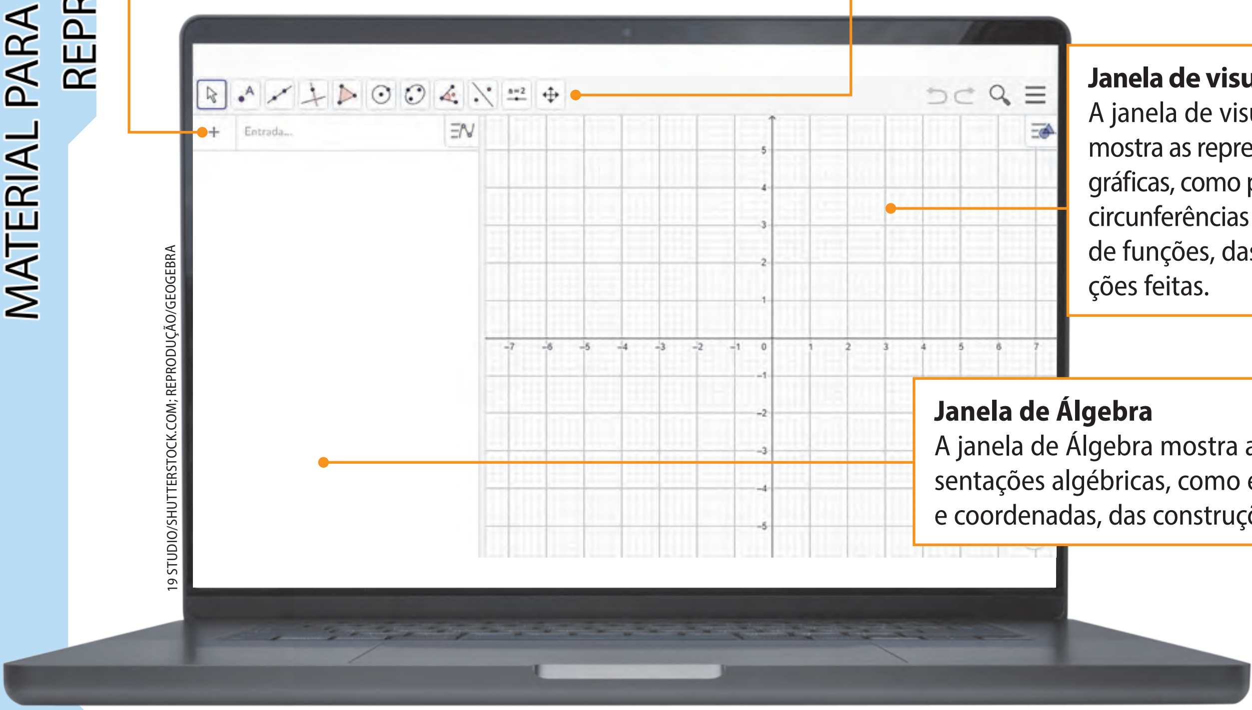
Sua instalação deve ser feita por meio do *site* oficial www.geogebra.org/download (acesso em: 23 jul. 2024), baixando-se o *software* GeoGebra Clássico 6 e seguindo-se as orientações de instalação.

O GeoGebra também pode ser usado em sua versão *on-line*, sem a necessidade de instalação, pelo *site* https://www.geogebra.org/classic (acesso em: 23 jul. 2024).

Ao abrir o *software* instalado ou a versão *on-line*, aparece uma tela inicial composta de várias janelas, com ferramentas e exibições específicas de acordo com a utilização. A seguir, apresentamos a tela inicial com algumas de suas funções.

Campo de entrada
No campo de entrada, é possível inserir coordenadas, equações, comandos ou funções. Ao pressionar a tecla ***Enter***, a representação algébrica do objeto é apresentada na janela de Álgebra, enquanto a representação gráfica é mostrada na janela de visualização.

Barra de ferramentas
A barra de ferramentas é composta de 11 caixas contendo ferramentas diversas, relacionadas dentro de seu subgrupo. Para acessá-las, basta clicar em cada caixa de ferramenta.



Janela de visualização
A janela de visualização mostra as representações gráficas, como polígonos, circunferências e gráficos de funções, das construções feitas.

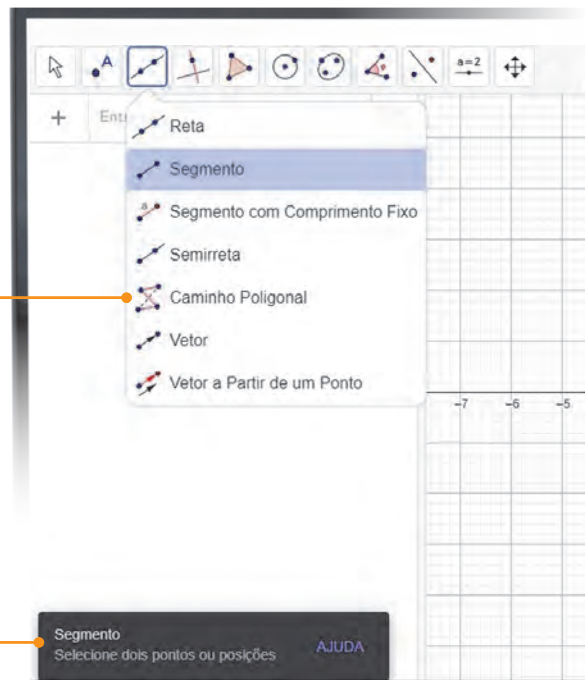
Janela de Álgebra
A janela de Álgebra mostra as representações algébricas, como equações e coordenadas, das construções feitas.

19 STUDIO/SHUTTERSTOCK.COM; REPRODUÇÃO/GEOGEBRA

Além da janela de Álgebra e da janela de visualização, que são mostradas na tela inicial padrão, o GeoGebra tem outras janelas, que, dependendo da construção que se deseja realizar, podem ser acionadas no *menu* **Exibir**. Quando necessário, essas outras janelas serão exibidas durante a realização das construções.

Todas as janelas do GeoGebra estão relacionadas dinamicamente, ou seja, ao se realizar uma alteração em algum objeto em uma delas, todas as representações desse mesmo objeto nas demais janelas serão alteradas automaticamente.

O GeoGebra utiliza linguagem e notação próprias, que podem diferir um pouco das utilizadas nesta Coleção. Por exemplo, para a separação da parte decimal de um número, o *software* usa o ponto no lugar da vírgula; para indicar as coordenadas de um ponto A qualquer, a notação é $A = (0{,}0)$, em vez de $A(0, 0)$. Ao longo da Coleção, conforme necessário, apresentaremos outras particularidades do GeoGebra.



REPRODUÇÃO/GEOGEBRA

Na barra de ferramentas, ao clicar na terceira caixa de ferramentas, estas opções ficam disponíveis.

Ao sobrepor o cursor do *mouse* sobre uma ferramenta ou selecioná-la, surge um boxe com orientações a respeito de como usá-la.

Criando diagrama de ramo e folhas e *box-plot* no GeoGebra

Neste Capítulo, estudamos como construir e interpretar um diagrama de ramo e folhas e um *box-plot*. Essas são importantes representações gráficas que servem para analisar a distribuição dos dados de um conjunto. Agora, vamos utilizar o GeoGebra para criar esses diagramas.

Inicialmente, devemos configurar o GeoGebra para auxiliar nossas construções. Depois de abri-lo, clique em **Exibir** e, em seguida, selecione **Planilha**. Vai aparecer uma janela com uma planilha ao lado da janela de visualização. Na sequência, clique no *menu* **Configurações** e, no ícone, clique na opção **EixoY** e desabilite a visualização do eixo y. Nessa construção, usaremos apenas o eixo horizontal.

Diagrama de ramo e folhas

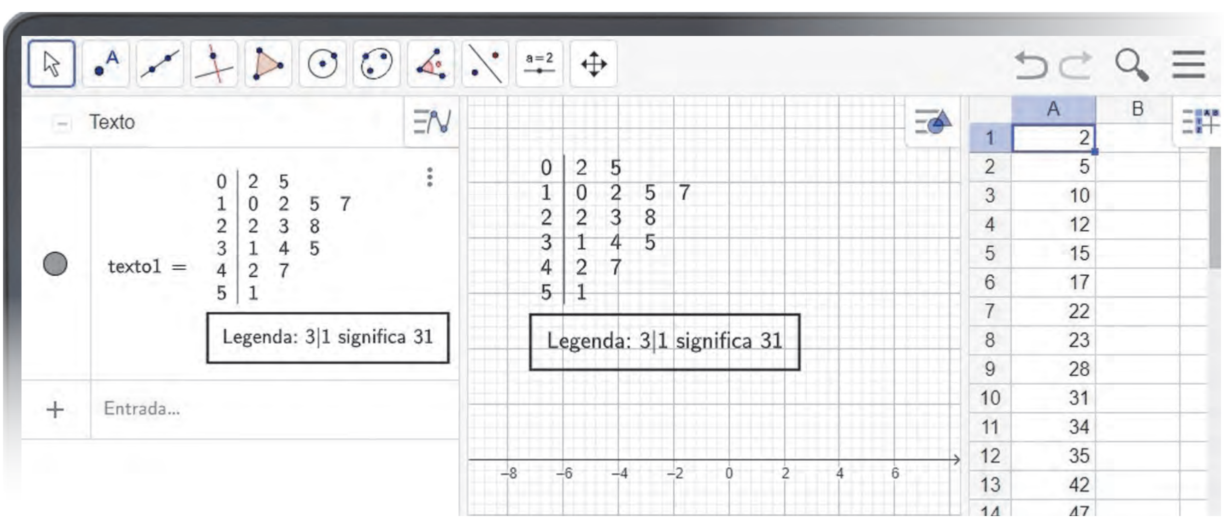
Para criar um diagrama de ramo e folhas, vamos considerar como exemplo a seguinte amostra das idades de 15 pessoas e seguir os passos indicados.

$A = \{2, 5, 10, 12, 15, 17, 22, 23, 28, 31, 34, 35, 42, 47, 51\}$

I. Digitamos na planilha os dados de nossa amostra na coluna **A** da seguinte forma: o número 2 na célula A1, o número 5 na célula A2, o número 10 na célula A3, e assim por diante.

II. Após digitar todos os elementos de nossa amostra, ela vai ocupar as células A1 a A15. Em seguida, digitamos, no campo de entrada, o comando "DiagramaDeCauleEFolhas(A1:A15)". Pressionando ***Enter***, o diagrama de ramo e folhas será criado na janela de Álgebra e aparecerá na janela de visualização.

É importante observar que podemos digitar os dados em qualquer coluna e indicar a célula inicial e a final da nossa lista de elementos, desde que eles ocupem uma mesma coluna.



19 STUDIO/SHUTTERSTOCK.COM; REPRODUÇÃO/GEOGEBRA

Por ser um texto, você pode deslocar o diagrama pela janela de visualização de acordo com sua necessidade.

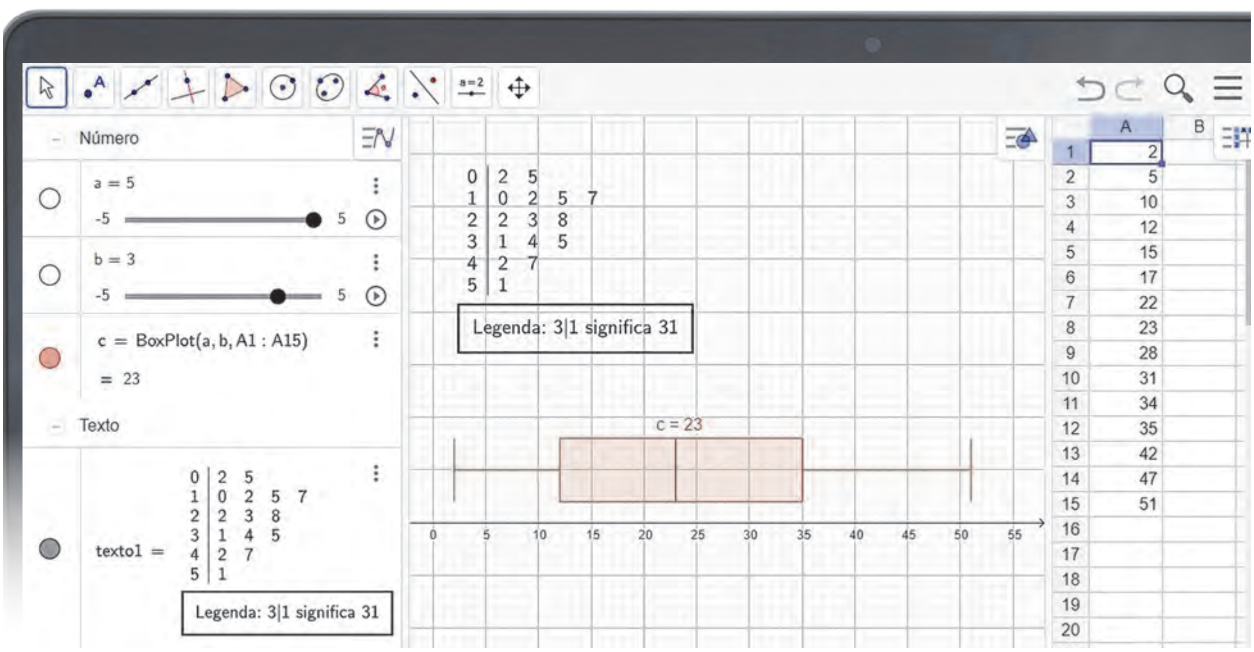
Box-plot

Para criar um *box-plot*, vamos utilizar o mesmo conjunto $A = \{2, 5, 10, 12, 15, 17, 22, 23, 28, 31, 34, 35, 42, 47, 51\}$ e o que já produzimos para o diagrama de ramo e folhas, acompanhando o seguinte passo.

I. Como os valores já estão digitados na planilha do GeoGebra, digitamos, no campo de entrada, o comando "BoxPlot(a,b,A1:A15)" e pressionamos ***Enter***.

Depois desse processo, o GeoGebra apresentará o *box-plot* referente à nossa amostra na janela de visualização. Pode ser que, por causa dos dados da amostra, o diagrama não apareça totalmente na tela. Caso isso ocorra, talvez seja necessário ajustar as dimensões da janela usando o botão **Reduzir** ou a ferramenta **Mover janela de visualização**, conforme a necessidade.

Observe que serão criados dois controles deslizantes na janela de Álgebra. O **Controle deslizante *a*** serve para deslocar o *box-plot* na vertical. Já o **Controle deslizante *b*** serve para ajustar a largura do *box-plot*, a fim de facilitar ou permitir sua leitura.



19 STUDIO/SHUTTERSTOCK.COM; REPRODUÇÃO/GEOGEBRA

1. Respostas pessoais. Espera-se que os estudantes percebam que somente no diagrama de ramo e folhas é possível identificar a frequência absoluta de cada dado e que no *box-plot* é mais fácil identificar a mediana, apesar de ser possível identificá-la também no diagrama de ramo e folhas.

Agora, faça o que se pede nas atividades a seguir.

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. Qual dos dois diagramas você achou que representa melhor os dados? Caso você precisasse identificar posteriormente a frequência absoluta de cada uma das idades, qual dos dois tipos de gráfico você escolheria? Em qual deles você acha que é possível identificar com mais facilidade a mediana do conjunto de dados?

2. Anote a idade de 10 pessoas de cada turma do Ensino Médio da escola em que você estuda. Escolha essas pessoas aleatoriamente. Em seguida, usando o GeoGebra, construa um diagrama de ramo e folhas e um *box-plot* com os dados coletados. Por fim, escreva uma conclusão a respeito do que você pôde observar por meio dos gráficos. Resposta pessoal.

3. Reúna-se a um colega, e comparem os gráficos construídos. Vocês, provavelmente, selecionaram pessoas diferentes para a amostra. Os gráficos ficaram parecidos? Resposta pessoal.

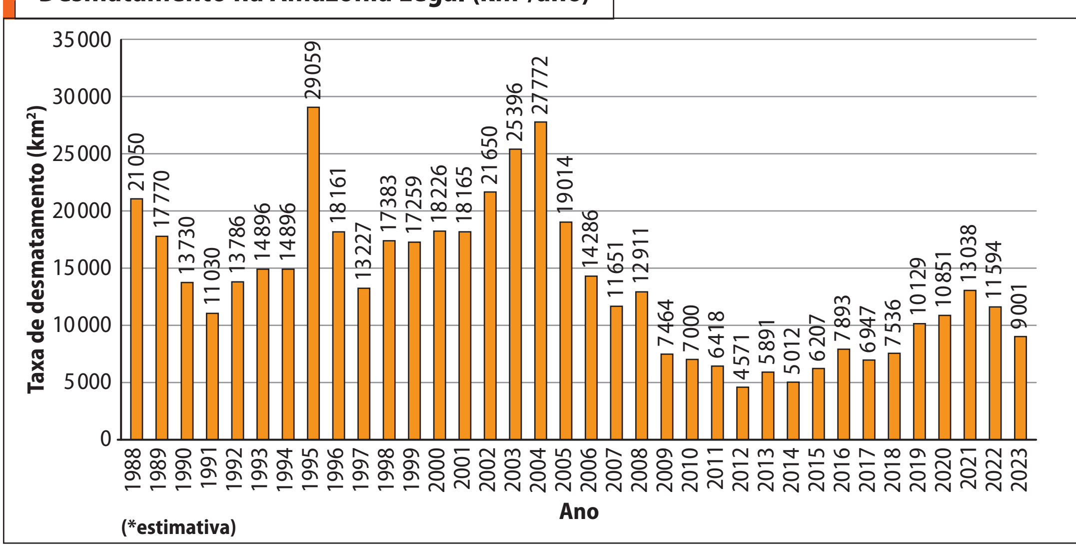
Amazônia Legal

Você já ouviu falar sobre a Amazônia Legal? Leia, a seguir, algumas informações sobre ela.

> [...] há o termo Amazônia Legal [...] instituído pelo governo brasileiro em 1953, buscando promover o desenvolvimento socioeconômico de estados da Região Amazônica que compartilhavam historicamente os mesmos desafios econômicos, políticos e sociais. Engloba a totalidade de oito estados (Acre, Amapá, Amazonas, Mato Grosso, Pará, Rondônia, Roraima e Tocantins) e parte do Maranhão (a oeste do meridiano de 44°W), totalizando 5 milhões de km². [...]
>
> [...]
>
> AMAZÔNIA? Rio Amazonas? Amazônia Legal? Arco do Desmatamento? [Brasília, DF]: ISPN, [2019 ou 2020]. Disponível em: https://ispn.org.br/biomas/amazonia/amazonia-legal/. Acesso em: 24 jul. 2024.
>
> O projeto PRODES realiza o monitoramento por satélites do desmatamento por corte raso na Amazônia Legal e produz, desde 1988, as taxas anuais de desmatamento na região, que são usadas pelo governo brasileiro para o estabelecimento de políticas públicas. [...]
>
> BRASIL. Coordenação-Geral de Observação da Terra. Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais. **Monitoramento do desmatamento da Floresta Amazônica brasileira por satélite**. São José dos Campos: Inpe, 2023. Disponível em: http://www.obt.inpe.br/OBT/assuntos/programas/amazonia/prodes. Acesso em: 24 jul. 2024.

Esse monitoramento permite que o governo tome ações para diminuir o desmatamento na Amazônia Legal. Observe o histórico de desmatamento na Amazônia Legal, segundo o projeto PRODES.

Desmatamento na Amazônia Legal (km²/ano)



SERGIO LIMA

Fonte dos dados: BRASIL. Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação. Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais. **Estimativa de desmatamento na Amazônia Legal para 2023 é de 9 001 km²**. São José dos Campos: Inpe, 2023. p. 7. Disponível em: https://www.gov.br/inpe/pt-br/assuntos/ultimas-noticias/estimativa-de-desmatamento-na-amazonia-legal-para-2023-e-de-9-001-km2/2023_1020_Nota_tecnica_Estimativa_Taxa_2023_SEI.pdf. Acesso em: 24 jul. 2024.

A seguir estão indicadas as taxas de desmatamento por estado, em km², obtidas pelo PRODES.

Área desmatada, em km², por estado

Ano \ Estados	AC	AM	AP	MA	MT	PA	RO	RR	TO	Amazônia Legal
2004	728	1232	46	755	11814	8870	3858	311	158	27772
2005	592	775	33	922	7145	5899	3244	133	271	19014
2006	398	788	30	674	4333	5659	2049	231	124	14286
2007	184	610	39	631	2678	5526	1611	309	63	11651
2008	254	604	100	1271	3258	5607	1136	574	107	12911
2009	167	405	70	828	1049	4281	482	121	61	7464
2010	259	595	53	712	871	3770	435	256	49	7000
2011	280	502	66	396	1120	3008	865	141	40	6418
2012	305	523	27	269	757	1741	773	124	52	4571
2013	221	583	23	403	1139	2346	932	170	74	5891
2014	309	500	31	257	1075	1887	684	219	50	5012
2015	264	712	25	209	1601	2153	1030	156	57	6207
2016	372	1129	17	258	1489	2992	1376	202	58	7893
2017	257	1001	24	265	1561	2433	1243	132	31	6947
2018	444	1045	24	253	1490	2744	1316	195	25	7536
2019	682	1434	32	237	1702	4172	1257	590	23	10129
2020	706	1512	24	336	1779	4899	1273	297	25	10851
2021	889	2306	17	350	2213	5238	1673	315	37	13038
2022	840	2594	14	271	1927	4162	1480	279	27	11594
2023*	597	1553	12	285	2086	3272	873	297	26	9001

(* Atualizado em 10/11/23)

Fonte dos dados: BRASIL. Coordenação-Geral de Observação da Terra. Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais. **Monitoramento do desmatamento da Floresta Amazônica brasileira por satélite**. São José dos Campos: Inpe, 2023. Disponível em: http://www.obt.inpe.br/prodes/. Acesso em: 24 jul. 2024.

Agora, faça o que se pede nas atividades a seguir.

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. Com base no gráfico e na tabela apresentados, a média aritmética é uma medida estatística indicada para representar os dados do desmatamento de 2004 a 2016? Explique sua resposta.

2. Reflita sobre suas atitudes perante o meio ambiente em que vive. Pense em situações do seu dia a dia que podem colaborar para o bem-estar do meio ambiente e em situações prejudiciais presenciadas por você ou noticiadas nos meios de comunicação. Depois, reúna-se a um colega, e analisem as situações descritas, verificando o que há em comum e diferente entre as atitudes de vocês. Resposta pessoal.

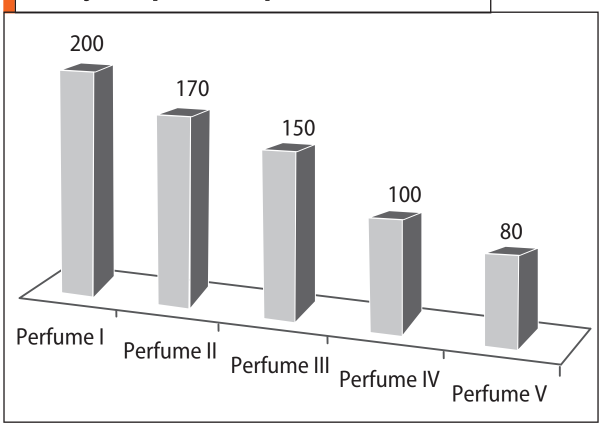
3. Utilizando os dados da tabela desta página, elabore uma postagem para redes sociais com gráficos sobre as taxas de desmatamento, com o objetivo de alertar as pessoas sobre a gravidade do problema. Além disso, compartilhe dicas e práticas, de acordo com o que você refletiu na atividade anterior, que possam colaborar para o bem-estar do meio ambiente. Resposta pessoal.

1. Resposta esperada: Não é uma medida estatística indicada para representar esses dados, pois houve muita variação nos valores desse período.

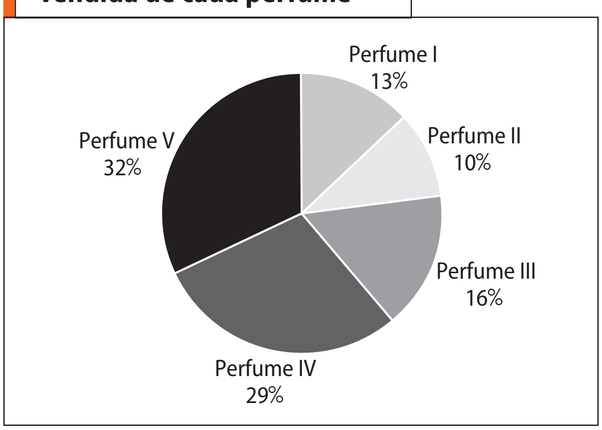
NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. (Enem/MEC) O gerente de uma loja de cosméticos colocou à venda cinco diferentes tipos de perfume, tendo em estoque na loja as mesmas quantidades de cada um deles. O setor de controle de estoque encaminhou ao gerente registros gráficos descrevendo os preços unitários de cada perfume, em real, e a quantidade vendida de cada um deles, em percentual, ocorrida no mês de novembro.

Preço do perfume por unidade (R$)



Porcentagem da quantidade vendida de cada perfume

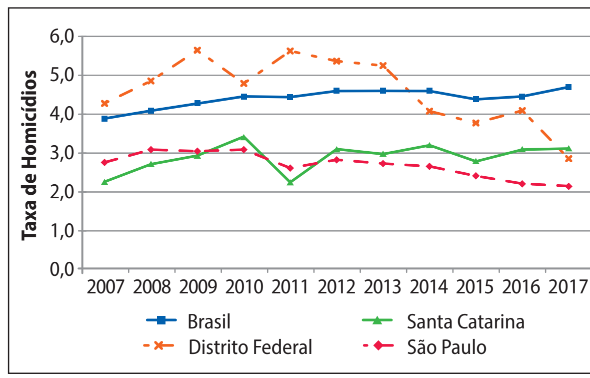


Dados a chegada do final de ano e o aumento das vendas, a gerência pretende aumentar a quantidade estocada do perfume do tipo que gerou a maior arrecadação em espécie, em real, no mês de novembro. alternativa **d**

Nessas condições, qual o tipo de perfume que deverá ter maior reposição no estoque?

a) I
b) II
c) III
d) IV
e) V

2. (Fuvest-SP) O Atlas da Violência, publicado em 2019 e organizado pelo Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada e Fórum Brasileiro de Segurança Pública, apresenta um estudo para melhor compreender a violência no país. Os dados que ali constam referem-se ao período de 2007 a 2017. Um dos capítulos desse documento trata, especificamente, da violência contra a mulher. O gráfico a seguir mostra a evolução da taxa de homicídios de mulheres (equivalente ao número de homicídios por 100 mil mulheres), de 2007 a 2017, no Brasil e nas três unidades federativas com as menores taxas em 2017.



ILUSTRAÇÕES: SERGIO LIMA

Ipea/FBSP. Atlas da Violência, 2019.

De acordo com os dados apresentados, é correto afirmar: alternativa **e**

a) Dentre as unidades federativas citadas, a que teve maior decréscimo na taxa de homicídios de mulheres no período entre 2014 e 2017 foi São Paulo.

b) As três unidades federativas indicadas tiveram um decréscimo na taxa de homicídios de mulheres em 2017 quando comparada com a taxa de 2007.

c) A taxa de homicídios de mulheres no Brasil em 2017 é maior do que a soma das taxas das três unidades federativas apresentadas neste mesmo ano.

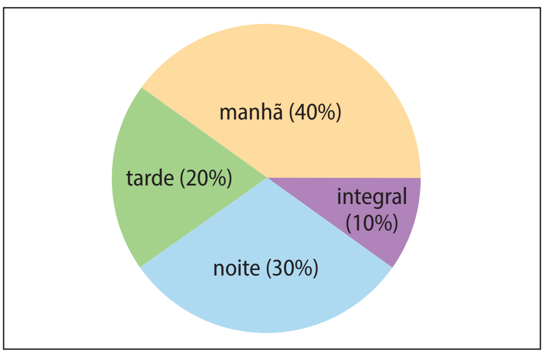
d) Dentre as unidades federativas apontadas, a que apresentou a maior taxa de homicídios de mulheres em 2017 é Santa Catarina, superando a taxa registrada nos demais estados da região Sul.

e) Dentre as unidades federativas mencionadas, a maior redução na taxa de homicídios de mulheres, entre 2016 e 2017, registrada na pesquisa ocorreu no Distrito Federal.

Saiba que...

A violência contra a mulher não ocorre somente na forma de violência física. A Lei Maria da Penha (Lei nº 11.340, de 7 de agosto de 2006) define cinco formas de violência doméstica e familiar contra a mulher: física, psicológica, sexual, patrimonial e moral. Qualquer pessoa, não só a vítima, pode denunciar. Há diversos canais de denúncia, sendo um deles o telefone 180, da Central de Atendimento à Mulher.

3. (Saresp-SP) Uma escola tem alunos nos turnos da manhã (40%), da tarde (20%) e da noite (30%), e, ainda, alunos no turno único de tempo integral (10%). O gráfico de "*pizza*" mostra essas porcentagens, ilustradas por setores circulares com ângulos proporcionais às porcentagens.



O ângulo, em graus, do setor de círculo correspondente ao turno da manhã é alternativa **a**

a) 144°. **b)** 108°. **c)** 90°. **d)** 120°. **e)** 72°.

4. (UFRGS-RS) Após a aplicação de uma prova de Matemática, em uma turma de Ensino Médio com 30 estudantes, o professor organizou os resultados, conforme a tabela a seguir. alternativa **b**

Número de estudantes	Nota
5	3,0
10	6,0
7	8,0
8	9,5

A nota mediana dessa prova de Matemática é

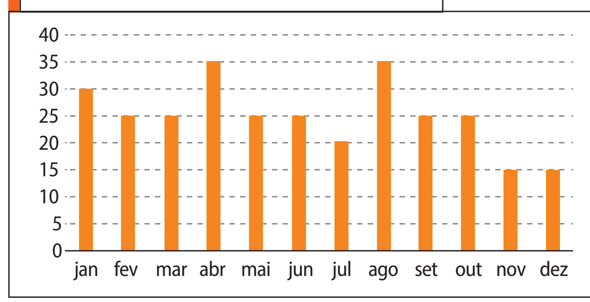
a) 6,0. **b)** 7,0. **c)** 8,0. **d)** 9,0. **e)** 9,5.

5. (UEA-AM) A média aritmética das notas das cinco melhores provas de matemática de uma turma é 8,0. Sabendo que somente duas dessas notas são iguais e que a média aritmética das outras três notas é 7,0, a nota que aparece repetida é alternativa **b**

a) 8,0. **b)** 9,5. **c)** 7,5. **d)** 9,0. **e)** 8,5.

6. (UERJ) O gráfico a seguir apresenta o quantitativo de mortes violentas de pessoas da comunidade LGBTQIA+, no ano de 2021, no Brasil.

Mortes violentas de LGBTQIA+ no Brasil em 2021

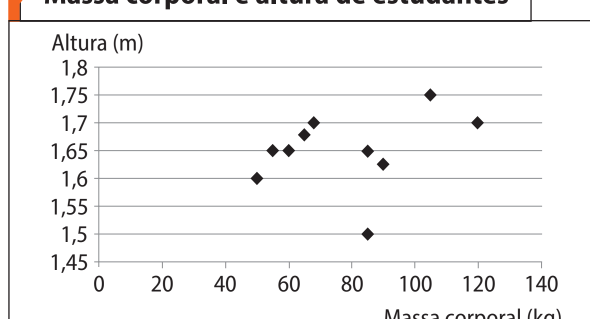


Adaptado de grupogaydabahia.com, 2022.

Com base nos dados do gráfico, calcule a média aritmética mensal de mortes violentas nessa comunidade, em 2021, no Brasil. 25 mortes

7. (Enem/MEC) Um professor, para promover a aprendizagem dos estudantes em estatística, propôs uma atividade. O objetivo era verificar o percentual de estudantes com massa corporal abaixo da média e altura acima da média de um grupo de estudantes. Para isso, usando uma balança e uma fita métrica, avaliou uma amostra de dez estudantes, anotando as medidas observadas. O gráfico apresenta a massa corporal, em kilograma, e a altura, em metro, obtidas na atividade.

Massa corporal e altura de estudantes



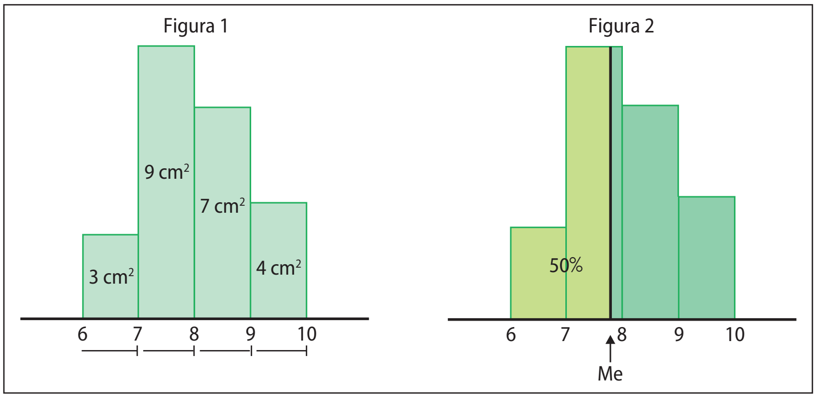
ILUSTRAÇÕES: SERGIO LIMA

Após a coleta dos dados, os estudantes calcularam a média dos valores obtidos, referentes à massa corporal e à altura, obtendo, respectivamente, 80 kg e 1,65 m.

Qual é o percentual de estudantes dessa amostra com massa corporal abaixo da média e altura acima da média? alternativa **b**

a) 10 **b)** 20 **c)** 30 **d)** 50 **e)** 70

8. (Unifesp-SP) Uma prova de estatística, valendo de 0 a 10 pontos, foi realizada por 253 alunos, sendo que nenhum tirou nota menor ou igual a 6. O histograma da figura 1 indica a distribuição das notas. Ainda que o eixo com a frequência de alunos em cada faixa de notas tenha sido omitido, foi fornecida a área de cada barra do histograma. A figura 2 ilustra o cálculo da mediana das notas.



ILUSTRAÇÕES: SERGIO LIMA

a) Calcule a porcentagem aproximada de alunos que tiraram nota menor ou igual a 7. Calcule a quantidade de alunos que tiraram nota maior que 8. 13%; 121 alunos

b) Calcule a média (*M*) e a mediana (*Me*) das notas usando aproximação de duas casas decimais, quando necessário.
$M \simeq 8,02$ e $Me \simeq 7,94$

9. (Enem/MEC) O procedimento de perda rápida de "peso" é comum entre os atletas dos esportes de combate. Para participar de um torneio, quatro atletas da categoria até 66 kg, Peso-Pena, foram submetidos a dietas balanceadas e atividades físicas. Realizaram três "pesagens" antes do início do torneio. Pelo regulamento do torneio, a primeira luta deverá ocorrer entre o atleta mais regular e o menos regular quanto aos "pesos". As informações com base nas pesagens dos atletas estão no quadro.

Atleta	1ª pesagem (kg)	2ª pesagem (kg)	3ª pesagem (kg)	Média	Mediana	Desvio padrão
I	78	72	66	72	72	4,90
II	83	65	65	71	65	8,49
III	75	70	65	70	70	4,08
IV	80	77	62	73	77	7,87

Após as três "pesagens", os organizadores do torneio informaram aos atletas quais deles se enfrentariam na primeira luta. alternativa **c**

A primeira luta foi entre os atletas

a) I e III. **b)** I e IV. **c)** II e III. **d)** II e IV. **e)** III e IV.

10. (FCC) O diagrama de ramo e folhas a seguir corresponde às idades dos 40 funcionários de um setor de um órgão público em uma determinada data. alternativa **a**

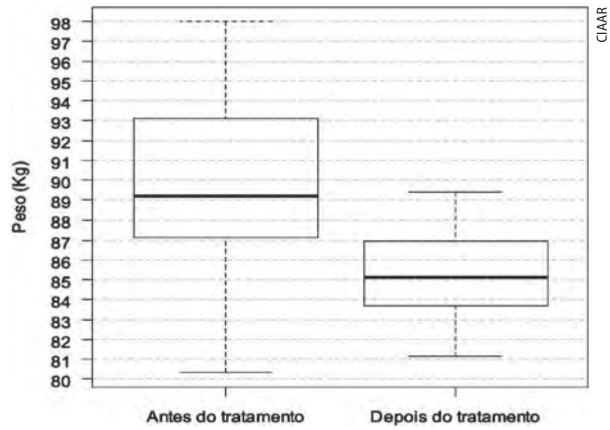
A soma da mediana e da moda destas idades é igual a

a) 67,0 **c)** 66,0 **e)** 65,0

b) 66,5 **d)** 65,5

1	8 8 9
2	0 1 1 2 2 2 7 8 8 9
3	1 3 3 3 3 4 4 4 5 6 7 8 8 8
4	0 1 2 2 3 4 8 9
5	1 5 8
6	2 5

11. (Ciaar) Observe o diagrama de caixa (*Box-plot*) do peso de 50 pacientes antes e após a realização de um tratamento.



Com base nas informações do gráfico, analise as afirmativas abaixo. alternativa **b**

I. Antes do tratamento, o peso mediano dos pacientes era superior a 87 kg.

II. Antes do tratamento, no mínimo, 25% dos pacientes pesavam 93 kg ou mais.

III. Após o tratamento, 75% ou mais dos pacientes passaram a pesar menos de 84 kg.

IV. Após o tratamento, 25% ou menos dos pacientes passaram a pesar de 83 kg a 87 kg.

Está(ão) correta(s) **apenas** a(s) afirmativa(s)

a) III.

b) I e II.

c) II e IV.

d) I, III e IV.

PARA REFLETIR

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Neste Capítulo, você estudou termos importantes da Estatística, calculou frequência absoluta e relativa de amostras de dados, explorou diferentes maneiras de representar informações de pesquisas, como tabelas e gráficos, analisou medidas de tendência central e medidas de dispersão de dados estatísticos, construiu e interpretou diagramas de ramo e folhas e *box-plot*.

Analise seu envolvimento com os estudos deste Capítulo. Para isso, reflita sobre as seguintes questões.

- Retome as questões da abertura deste Capítulo. Compare as respostas dadas às questões antes e depois do estudo do Capítulo. Elas mudaram? Explique. Resposta pessoal.
- Que relações você observa entre os assuntos estudados e sua vida? Resposta pessoal.
- Pense em uma situação em que você pode usar a frequência absoluta ou a frequência relativa e descreva-a. Resposta pessoal.
- Retome os tipos de representações gráficas que você estudou e faça um esquema ou um resumo com as principais características de cada tipo. Resposta pessoal.
- Escreva, com suas palavras, a diferença entre medidas de tendência central e medidas de dispersão. Resposta pessoal. Exemplo de resposta: As medidas de tendência central são usadas para representar um conjunto de dados, e as medidas de dispersão servem para analisar o quão dispersos estão os dados desse conjunto.
- Explique, com suas palavras, a importância da Estatística para os dias atuais. Resposta pessoal.

CAPÍTULO

3 INTRODUÇÃO ÀS FUNÇÕES E FUNÇÃO AFIM

Os **rikbaktsá** são um povo indígena brasileiro que vive na Região Centro-Oeste do país, no noroeste do estado de Mato Grosso. Eles se autodenominam "os seres humanos" e são conhecidos por sua habilidade com a canoagem.

Além das canoas, os rikbaktsá constroem diversos artefatos para o uso cotidiano, entre eles, flautas e apitos, usados em rituais. Os apitos (*byrykkwy*) podem ser confeccionados com cerâmica ou ouriços de castanhas e, geralmente, são usados pelas crianças. As flautas (*jokpepeheta*) no estilo pã têm adornos de penas de gavião-real e são tocadas por homens e mulheres.

O comprimento e a largura do material utilizado para construir uma flauta interferem no tipo de som produzido: flautas mais finas produzem sons agudos, enquanto flautas mais grossas emitem sons graves. Para construir suas flautas, os rikbaktsá utilizam medidas específicas com base em palmos. Observe algumas medidas utilizadas na confecção de flautas.

Nome da flauta	Comprimento em palmos
Sizezebyitsa	0,5 a 1,5
Izowytsik	4
Iharaiktsa	4,5
Tsapukte	5
Izowy	5,5

Se considerarmos que cada palmo equivale a aproximadamente 17 centímetros, é possível estabelecer uma relação direta entre o comprimento da flauta em palmos e seu valor em centímetros. Essa relação envolve a ideia de função, mais especificamente associada à função afim, assuntos que serão abordados neste Capítulo.

Fonte dos dados: POLEGATTI, Geraldo Aparecido. **A matemática Rikbaktsa para o povo Rikbaktsa**: um olhar da etnomatemática na Educação Escolar Indígena. 2013. Dissertação (Mestrado em Educação Agrícola) – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2013.

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Agora, reúna-se a um colega, e façam o que se pede em cada questão.

1. Determinem o comprimento aproximado mínimo e máximo, em centimetro, da flauta *sizezebyitsa*. 8,5 cm e 25,5 cm, respectivamente

2. Suponham que um artesão rikbaktsá queira construir uma flauta com 3 palmos de comprimento. Qual seria o comprimento aproximado dessa flauta em centimetro? 51 cm

3. Como podemos descobrir o comprimento aproximado, em centimetro, de qualquer flauta rikbaktsá? Espera-se que os estudantes respondam que basta calcular o produto entre 17 e a quantidade de palmos que a flauta tem de comprimento.

4. Vocês sabem o que é uma função? Expliquem. Resposta pessoal. É possível que os estudantes associem funções com relações de dependência ou utilizem exemplos para definir o que entendem por função.

IDINEI ZOTSITSA/ASSOCIAÇÃO INDÍGENA RIKBAKTSA TSIRIK

Povo indígena rikbaktsá na tradicional Festa da Seca. Aldeia Pé de Mutum, Terra Indígena Japuíra no município de Juara (MT). Fotografia de 2013.

A ideia de função

Saiba que...

Chamamos de **grandeza** o que pode ser expresso por uma medida, por exemplo: comprimento, área, volume e temperatura.

Muitas vezes nos deparamos com situações no dia a dia em que diferentes grandezas ou medidas estão associadas por uma relação de dependência.

Na situação apresentada na abertura, por exemplo, para saber a medida, em centimetro, do comprimento da flauta, precisamos saber a medida do comprimento dela em palmo. Nesse caso, dizemos que, entre outros fatores, a medida do comprimento em centimetro da flauta **depende** da medida do comprimento dela em palmo.

Também podemos verificar uma relação de dependência em um restaurante "por quilo": quanto maior a quantidade, em kilograma, de comida consumida, maior será o valor a ser pago por ela.

Pense e responda

Você identifica essa relação de dependência entre grandezas em outras situações do dia a dia? Quais?

Respostas pessoais.

Além das situações anteriores, podemos também pensar na relação de dependência entre o valor total de uma fatura de energia elétrica e a quantidade de energia consumida. Nesse caso, o valor da fatura depende da energia consumida: quanto menor o consumo, menor será o valor a ser cobrado na fatura.

Em geral, os valores que as grandezas podem assumir nessas relações são representados genericamente por **variáveis**, que podem ser classificadas em **variável dependente** e **variável independente**. Nas situações anteriores, temos:

Variável independente	Variável dependente
Comprimento da flauta em palmo	Comprimento da flauta em centimetro
Quantidade de comida consumida	Valor pago pela refeição
Quantidade de energia elétrica consumida	Valor da fatura de energia elétrica

- Geralmente, em restaurantes "por kilo", há uma grande variedade de saladas e legumes, alimentos importantes para uma refeição saudável e balanceada.

As situações apresentadas têm duas características em comum:

- **Todos os valores** que podem ser assumidos pela variável independente são associados a valores da variável dependente.
- Cada valor atribuído à variável independente está associado a **um único valor** da variável dependente.

Uma relação que possui essas duas características é chamada de **função**. Assim, podemos dizer que:

- a medida do comprimento da flauta, em centimetro, é função da medida do comprimento da flauta em palmo;
- o valor a ser pago em um restaurante "por kilo" é função da quantidade, em kilograma, de comida consumida;
- o valor de uma fatura de energia elétrica é função da quantidade de energia elétrica consumida.

Acompanhe outras situações que podem ser representadas por funções.

Situação 1

Observe, na tabela a seguir, as tarifas vigentes em 3 de abril de 2024 para os serviços de envio de carta não comercial e cartão-postal, praticadas pelos Correios para envios dentro do país.

AUTORIZAÇÃO DE USO: GERÊNCIA DE FILATELIA/CORREIOS

Cartela com selos para serviços postais dos Correios, lançada em dezembro de 2023, com a temática de jogos eletrônicos.

Carta não comercial e cartão-postal (vigência 03/04/2024)

Massa (g)	Preço básico (R$)
Até 20	2,55
Mais de 20 até 50	3,55
Mais de 50 até 100	4,95
Mais de 100 até 150	6,05
Mais de 150 até 200	7,15
Mais de 200 até 250	8,25
Mais de 250 até 300	9,45
Mais de 300 até 350	10,50
Mais de 350 até 400	11,60
Mais de 400 até 450	12,70
Mais de 450 até 500	13,80

Fonte dos dados: CORREIOS. **Correspondências**. [*S. l.*]: Correios, c2024. Localizável em: Preços do telegrama, carta, carta social e cecograma: Carta e cartão postal. Disponível em: https://www.correios.com.br/enviar/correspondencia/correspondencias. Acesso em: 9 jul. 2024.

Pense e responda

- Qual é o valor a ser pago por uma carta cuja massa é 160 g? R$ 7,15
- Qual é a massa máxima de uma carta para que sua tarifa não ultrapasse R$ 10,00? 300 g
- É possível que duas cartas não comerciais com preços básicos distintos tenham a mesma massa? não

Para determinar, com o uso da tabela, a relação entre massa e preço, escolhemos uma faixa de valores na coluna **Massa (g)** e lemos, na linha horizontal da tabela, o valor correspondente na coluna **Preço básico (R$)**. Por exemplo, se temos uma carta não comercial de 25 g, consideramos, na coluna **Massa (g)**, a célula "Mais de 20 até 50" e verificamos, na coluna **Preço básico (R$)**, o valor correspondente, ou seja, R$ 3,55.

Nessa situação, o preço básico da carta não comercial depende da massa da carta, e, com base nessa tabela, podemos obter outras informações a respeito da relação entre massa da carta não comercial e preço básico para envio.

Observe que a massa de cada carta não comercial a ser enviada corresponde a um único preço básico. Assim, dizemos que o preço básico para enviar uma carta não comercial é uma **função** da massa da carta. A massa da carta é a **variável independente**, e o preço básico é a **variável dependente**.

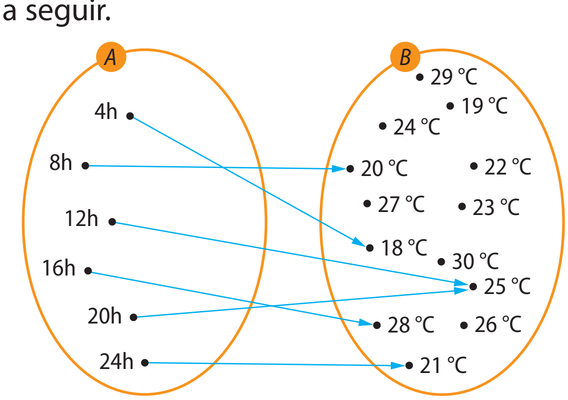
EDSON GRANDISOLI/PULSAR IMAGENS

Situação 2

Durante um dia, um centro de meteorologia realizou medições de temperatura, de quatro em quatro horas, no centro de uma cidade. A menor temperatura registrada foi 18 °C, e a maior, 28 °C. Observe a seguir as temperaturas obtidas, de acordo com o horário da medição.

Horário	4h	8h	12h	16h	20h	24h
Temperatura	18 °C	20 °C	25 °C	28 °C	25 °C	21 °C

Podemos também representar essas informações por meio de um esquema, conhecido como **diagrama de flechas**. Consideramos como elementos de um conjunto *A* os horários nos quais foram realizadas as medições e como elementos de um conjunto *B* alguns dos possíveis valores de temperatura verificados nesse dia, como indicado na imagem a seguir.



EDITORIA DE ARTE

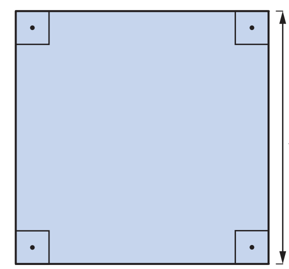
■ Estação meteorológica flutuante às margens do Rio Solimões, localizada na cidade de Tefé (AM). Fotografia de 2016.

Como cada um dos elementos do conjunto *A* está relacionado a um único elemento do conjunto *B*, podemos dizer que essa relação é uma **função**. Nessa situação, o horário em que foi realizada a medição é a variável independente, e a temperatura é a variável dependente.

No diagrama, podemos observar que, em dois horários distintos, a temperatura obtida pela medição foi 25 °C. Além disso, em nenhum dos horários em que foi realizada uma medição a temperatura registrada foi 19 °C, 22 °C, 23 °C, 24 °C, 26 °C, 27 °C, 29 °C ou 30 °C.

Situação 3

Para determinar a área *A* de um quadrado, multiplicamos a medida de seu lado ℓ por ela mesma, ou seja, elevamos ℓ ao quadrado. Podemos representar esse cálculo por meio da fórmula $A = \ell^2$.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Considerando *A* e ℓ números reais positivos, essa fórmula estabelece uma correspondência entre esses valores, de modo que a área de um quadrado é uma **função** da medida de seu lado. Por exemplo, se ℓ for igual a 5 cm, a área *A* será 25 cm².

Observe algumas medidas do lado de um quadrado e da área correspondente.

ℓ (u.c.) [unidade de comprimento]	1	2	3	10	50	100
***A* (u.a.) [unidade de área]**	1	4	9	100	2 500	10 000

Pense e responda

É possível haver dois quadrados de áreas distintas cujos lados tenham a mesma medida? não

Como a área do quadrado depende da medida de seu lado, a variável independente é a medida do lado, e a variável dependente é a área.

A fórmula da área de um quadrado pode ser interpretada como a **lei de formação** ou a **lei de correspondência** da função que relaciona a área *A* de um quadrado e a medida do lado ℓ correspondente.

Uma possível maneira de compreender a lei de formação de uma função é pensar em uma máquina que transforma a matéria-prima (variável independente) em produto final (variável dependente). Observe a seguir um esquema que ilustra como uma máquina "transforma" a medida do lado (ℓ) de um quadrado em sua respectiva área (*A*).

Saiba que...

Uma função que relaciona duas variáveis pode não ter uma expressão matemática que a represente. Por exemplo, a função que relaciona a temperatura e o horário de medição, vista anteriormente na situação **2**, não possui uma fórmula que a expresse.

Definição de função

Agora que você já acompanhou algumas situações que envolvem função, vamos conhecer a definição matemática desse tipo de relação e aprofundar o estudo desse conteúdo.

> Dados dois conjuntos não vazios, A e B, uma **função** de A em B é uma relação que associa **cada** elemento x de A a um **único** elemento y de B.

Saiba que...

- As letras x e y são muito utilizadas para representar as variáveis de uma função, mas podemos utilizar outras letras.
- A letra f, em geral, nomeia as funções, mas podemos ter também funções g, h etc. Assim, por exemplo, escrevemos $g: A \rightarrow B$ para designar a função g de A em B.

Para indicar uma função de A em B, podemos usar a seguinte notação:

$$f: A \rightarrow B \text{ (lê-se: } f \text{ de } A \text{ em } B\text{)}$$

A função f transforma x de A em y de B, o que pode ser escrito como $y = f(x)$ (lê-se: y é igual a f de x).

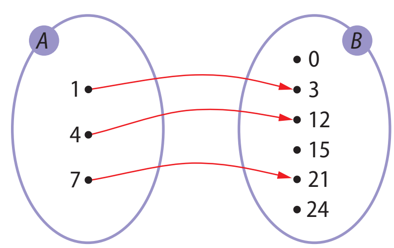
Vamos, agora, utilizar diagramas para analisar algumas relações entre conjuntos de números e, com base nessa análise, concluir se são ou não uma função. Acompanhe os exemplos a seguir.

a) Dados os conjuntos $A = \{1, 4, 7\}$ e $B = \{0, 3, 12, 15, 21, 24\}$, seja a relação de A em B expressa por $y = 3x$, com $x \in A$ e $y \in B$.

Observe que:

- todos os elementos de A estão associados a elementos de B;
- cada elemento de A está associado a um único elemento de B.

Nesse caso, a relação de A em B expressa por $y = 3x$ é uma **função de A em B** e corresponde à função "multiplicar por 3".



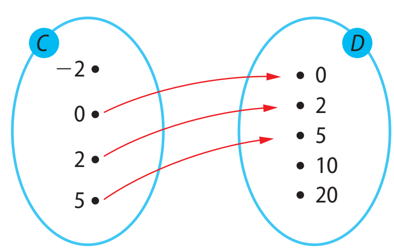
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

b) Dados os conjuntos $C = \{-2, 0, 2, 5\}$ e $D = \{0, 2, 5, 10, 20\}$, seja a relação de C em D expressa por $y = x$, com $x \in C$ e $y \in D$.

Observe que:

- existe um elemento de C (o número -2) que não está associado a nenhum elemento de D.

Portanto, a relação de C em D expressa por $y = x$ **não é uma função de C em D**.

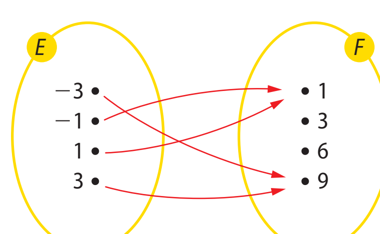


c) Dados os conjuntos $E = \{-3, -1, 1, 3\}$ e $F = \{1, 3, 6, 9\}$, seja a relação de E em F expressa por $y = x^2$, com $x \in E$ e $y \in F$.

Observe que:

- todos os elementos de E estão associados a elementos de F;
- cada elemento de E está associado a um único elemento de F.

Assim, a relação de E em F expressa por $y = x^2$ representa uma **função de E em F** e corresponde à função "elevar ao quadrado".

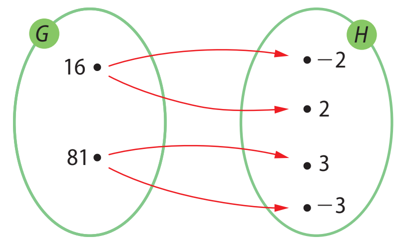


d) Dados os conjuntos $G = \{16, 81\}$ e $H = \{-3, -2, 2, 3\}$, seja a relação de G em H expressa por $y = \pm\sqrt[4]{x}$, com $x \in G$ e $y \in H$.

Observe que:

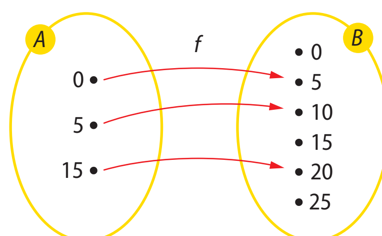
- todos os elementos de G estão associados a elementos de H;
- os elementos de G (tanto o número 16 quanto o 81) estão associados a mais de um elemento de H.

Nesse caso, a relação de G em H **não representa uma função de *G* em *H***, pois existe pelo menos um elemento de G que está associado a mais de um elemento de H.



» Domínio, contradomínio e conjunto imagem de uma função

Observe o diagrama que representa a função $f: A \to B$ definida por $y = x + 5$.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

O conjunto A chama-se **domínio** da função. Esse conjunto é constituído de todos os elementos x (variável independente) de A e é indicado por **D(*f*)**.

O conjunto B é chamado de **contradomínio** da função. Esse conjunto é constituído de todos os elementos y (variável dependente) de B e é indicado por **CD(*f*)**.

Assim, de acordo com o diagrama, temos:

- $D(f) = A = \{0, 5, 15\}$
- $CD(f) = B = \{0, 5, 10, 15, 20, 25\}$

Cada elemento x do domínio tem um correspondente y no contradomínio. A esse valor de y, associado a x pela função f, damos o nome de **imagem** de x pela função f e o indicamos por $\boldsymbol{y = f(x)}$.

Essa notação é muito comum e simplifica a linguagem, pois, em vez de dizermos "Qual é o valor de y quando x é igual a 15?", podemos dizer simplesmente "Qual é o valor de $f(15)$?".

Nesse caso, para obtermos o valor de y quando x é igual a 15, considerando a lei da função f, dada por $y = x + 5$, determinamos $f(15)$:

$$f(15) = 15 + 5 \Rightarrow f(15) = 20 \text{ ou } y = 20$$

O conjunto de todos os valores de y pertencentes a $CD(f)$, que são imagens de x pela função, é chamado de **conjunto imagem** da função. O conjunto imagem, indicado por **Im(*f*)**, é um subconjunto do contradomínio.

No exemplo anterior, temos: $Im(f) = \{5, 10, 20\}$

Uma função é precisamente definida quando explicitamos o domínio, o contradomínio e a sua lei de correspondência que associa cada elemento do domínio a um único elemento do contradomínio.

Quando o domínio e o contradomínio de uma função f não estão explicitados, subentende-se que $CD(f) = \mathbb{R}$ e $D(f) = \mathbb{R} - A$, em que A é o conjunto que contém os números reais para os quais a lei de correspondência da função f não está definida. Exemplos:

a) Na função f definida por $f(x) = x^3 - 2x^2 + 7$, x pode ser qualquer número real, ou seja: $D(f) = \mathbb{R}$ e $CD(f) = \mathbb{R}$.

b) A função f cuja lei é $f(x) = \dfrac{x+1}{x-3}$ não está definida quando $x = 3$, pois, para esse valor de x, o denominador dessa expressão se anula. Portanto, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3\}$ e $CD(f) = \mathbb{R}$.

c) Na função g definida por $g(x) = \sqrt{x}$, devemos desconsiderar qualquer valor de x que transforme o radicando em um número negativo, pois a raiz quadrada de um número negativo não está definida no conjunto dos números reais. Nesse caso, é preciso que $x \geqslant 0$. Portanto, $D(g) = \mathbb{R}_+$ e $CD(g) = \mathbb{R}$.

ATIVIDADES RESOLVIDAS

1. Em uma festa, os salgados são vendidos com desconto se comprados em maior quantidade, como indicado na tabela de preços a seguir.

Preço dos salgados

Quantidade de salgados	Preço (R$)
1	4,00
2	7,00
3	10,00
4	12,00
5 ou mais	2,50 cada salgado

Fonte: Dados fictícios.

Com base nesses dados, responda:

a) De acordo com a tabela, o preço é uma função da quantidade de salgados?

b) Qual é a variável independente nessa situação? E a variável dependente?

c) Qual é o valor a ser pago por 3 salgados? E por 6 salgados?

Resolução

a) Sim. O preço a ser pago é uma função da quantidade de salgados, pois cada quantidade corresponde a um único preço.

b) A variável independente é a quantidade de salgados comprados. A variável dependente é o preço a ser pago.

c) O valor a ser pago por 3 salgados é R$ 10,00. Por 6 salgados, o valor a ser pago é R$ 15,00, pois $6 \cdot 2{,}50 = 15{,}00$.

2. Marina é vendedora de uma loja de roupas, e seu salário mensal bruto é composto de uma parte fixa de R$ 1.500,00 mais uma comissão de 5% do valor total das vendas realizadas no mês.

a) Escreva a lei de formação que expressa o salário bruto de Marina.

b) Qual será o salário bruto de Marina se ela vender R$ 5.000,00 em mercadorias no mês?

c) Sabendo que, no mês passado, o salário bruto de Marina foi de R$ 2.750,00, qual foi o valor total das vendas realizadas por ela?

Resolução

a) Considerando S o salário mensal bruto de Marina, x o valor total de vendas efetuadas no mês e a parte fixa de R$ 1.500,00, temos:

$$S = 1500 + \frac{5}{100}x \Rightarrow S = 1500 + 0{,}05x$$

b) Fazendo $x = 5\,000$, temos:

$S = 1500 + 0{,}05x$

$S = 1500 + 0{,}05 \cdot 5\,000 = 1750$

Portanto, se Marina vender R$ 5.000,00, seu salário bruto no mês será R$ 1.750,00.

c) Sendo $S = 2750$, temos:

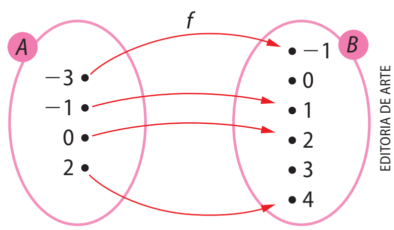
$2750 = 1500 + 0{,}05x$

$2750 - 1500 = 0{,}05x$

$x = \dfrac{1250}{0{,}05} = 25\,000$

Portanto, se Marina obteve um salário bruto de R$ 2.750,00, ela vendeu R$ 25.000,00 em mercadorias no mês.

3. Dada a função f: $A \to B$ definida por $f(x) = x + 2$ e representada no diagrama a seguir, identifique o domínio, o contradomínio e o conjunto imagem de f.



Resolução

Observando o diagrama, temos:

$D(f) = A = \{-3, -1, 0, 2\}$

$CD(f) = B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

$Im(f) = \{-1, 1, 2, 4\}$

4. Um tanque com capacidade de 20 litros está completamente cheio de água. Em determinado momento, abre-se uma torneira que o esvazia, segundo uma vazão de 2 litros por minuto.

a) Escreva a lei de formação da função que representa o volume de água V, em litro, que resta no tanque em relação ao tempo t, em minuto, até que o tanque fique vazio.

b) Em quanto tempo o tanque ficará vazio?

c) Que valores t pode assumir nessa função? Qual é o domínio da função V?

d) O valor $V = 30$ faz parte do conjunto imagem dessa função? Justifique sua resposta.

Resolução

a) Na situação apresentada, o intervalo de tempo t é a variável independente, e o volume de água V que resta no tanque é a variável dependente.

Atribuindo alguns valores a t, podemos construir o seguinte quadro.

t (min)	V (L)
0	20
1	$20 - 1 \cdot 2 = 18$
2	$20 - 2 \cdot 2 = 16$
3	$20 - 3 \cdot 2 = 14$
⋮	⋮
t	$20 - t \cdot 2 = 20 - 2t$

Com base nesse quadro, temos: $V(t) = 20 - 2t$.

b) O tanque fica vazio quando $V(t) = 0$. Assim, temos:

$V(t) = 20 - 2t \Rightarrow 0 = 20 - 2t \Rightarrow$

$\Rightarrow 2t = 20 \Rightarrow t = 10$

Logo, o tanque ficará vazio após 10 minutos.

c) Como a função está definida apenas até o tanque ficar vazio, o tempo t pode assumir valores no intervalo de tempo $0 \leqslant t \leqslant 10$.

Portanto, o domínio da função é: $D(V) =$
$= \{t \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant t \leqslant 10\}$ ou $D(V) = [0, 10]$.

d) Para saber se o valor $V = 30$ faz parte do conjunto imagem, vamos substituí-lo na lei da função e observar o valor de t obtido.

$V(t) = 20 - 2t \Rightarrow 20 - 2t = 30 \Rightarrow$

$\Rightarrow -2t = 10 \Rightarrow t = -5$

Como $t = -5$ não pertence ao domínio da função, concluímos que $V = 30$ não pertence ao conjunto imagem da função.

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. Nos itens a seguir, estão descritas algumas relações entre variáveis. Em cada caso, identifique a variável independente e a variável dependente.

a) O número de barras de chocolate que alguém compra e a quantia paga por elas.

b) O andar do apartamento em que uma pessoa mora e o tempo necessário para o elevador, a partir do térreo e sem nenhuma parada, chegar até o apartamento. Ver as **Orientações para o professor**.

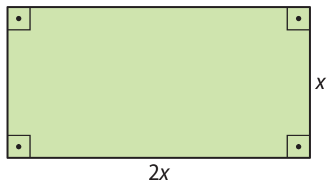
2. (Saresp-SP) As variáveis s e t estão relacionadas de acordo com a tabela ao lado:

t	1	2	3	4	5
s	0	3	8	15	24

A relação algébrica entre s e t é: alternativa **c**

a) $s = 2t - 2$ **b)** $s = t - 1$ **c)** $s = t^2 - 1$ **d)** $s = t^2$

3. O retângulo representado na figura tem lados que medem x e $2x$.



Expresse o perímetro P, a área A e a medida d da diagonal desse retângulo em função de x.
$P = 6x$; $A = 2x^2$; $d = x\sqrt{5}$

4. Arthur elaborou uma fórmula em uma planilha de cálculo e usou a lei geral $y = ax + b$, em que a e b são números inteiros. Em seguida, anotou alguns dos valores obtidos, como indicado a seguir.

x **(nº de entrada)**	***y*** **(nº de saída)**
0	3
1	5
2	7
3	9
4	11
5	13

Com base nessas informações, determine os valores de a e b e escreva a fórmula utilizada por Arthur. $a = 2$; $b = 3$; $y = 2x + 3$

5. (UFG-GO) Um padeiro fabrica 300 pães por hora. Considerando esse dado, pede-se:

a) a lei que representa o número de pães fabricados (p) em função do tempo (t); $p = 300t$

b) quantos pães são fabricados em 3 horas e 30 minutos? 1 050 pães

6. Dado o conjunto $A = \{-2, -1, 0, 1\}$, determine o conjunto imagem da função $f: A \to \mathbb{R}$ quando f for definida por:

a) $f(x) = x^3$ $\text{Im}(f) = \{-8, -1, 0, 1\}$

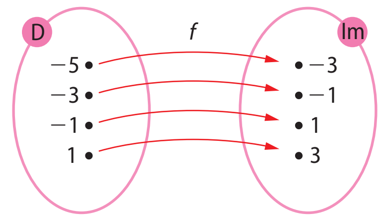
b) $f(x) = -x + 3$ $\text{Im}(f) = \{2, 3, 4, 5\}$

c) $f(x) = 1 - x^2$ $\text{Im}(f) = \{-3, 0, 1\}$

7. Os diagramas de flechas a seguir indicam o domínio e o conjunto imagem de uma função. Em cada caso, escreva uma possível lei de formação da função.

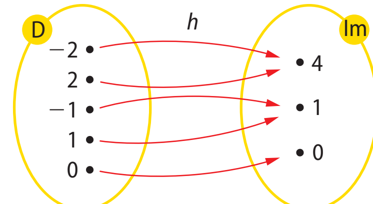
a) função f

Respostas possíveis:
$f(x) = x + 2$ ou $y = x + 2$



b) função h

$h(x) = x^2$ ou $y = x^2$



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

8. (Epcar-MG) Um pintor foi contratado para pintar a fachada do prédio do Comando da Epcar, em decorrência das comemorações do seu sexagésimo aniversário. Esse pintor cobra um valor fixo de 30 reais e mais uma quantia que depende da área pintada. A tabela seguinte indica o orçamento apresentado pelo pintor.

Área *x* pintada (em m²)	**Total *y* a pagar pela pintura (em reais) incluindo a parcela fixa**
5	40
10	50
15	60
20	70
30	90
40	110

Com base nos dados acima, classifique em (**V**) verdadeiro ou (**F**) falso cada item a seguir.

( ) O pintor cobra 30 reais mais 3 reais pelo metro quadrado pintado.

( ) Se foram pagos pela pintura 530 reais, então a área pintada foi de 250 m².

( ) Pela pintura de uma área correspondente a 150 m² seria cobrado menos de 300 reais.

Tem-se a sequência correta em: alternativa **c**

a) V – F – F

b) V – F – V

c) F – V – F

d) F – F – V

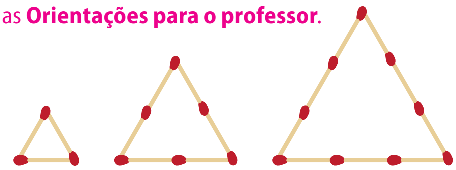
9. Determine o domínio das funções definidas por:

a) $h(x) = 4x - 5$ $D(h) = \mathbb{R}$

b) $j(x) = \dfrac{3}{1 + x}$
$D(j) = \mathbb{R} - \{-1\}$

c) $z(x) = \sqrt{2x}$
$D(z) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

10. Observe a sequência de triângulos cujos lados são formados por palitos de fósforo.
Ver as **Orientações para o professor**.



EDITORIA DE ARTE

a) Reproduza o quadro e complete-o com os valores que faltam.

Número de palitos em cada lado	Total de palitos em cada triângulo
1	3
2	6
3	
4	
5	
6	

b) Considere *x* o número de palitos em cada lado e *y* o total de palitos em cada triângulo para escrever uma sentença matemática que expresse *y* em função de *x*.

c) Qual é o domínio dessa função? E o conjunto imagem?

d) Quantos palitos deve ter cada lado para se construir um triângulo com 45 palitos?

11. Com base na ideia da atividade anterior, elabore um problema considerando uma sequência formada por quadrados construídos com palitos de fósforo. Troque o problema com um colega para que um resolva o problema elaborado pelo outro. Resposta pessoal.

12. O gerente de uma loja de eletrônicos verificou que, quanto mais ele anuncia em redes sociais, mais itens a loja vende. Essa relação pode ser expressa por uma função dada pela lei $y = \frac{3}{2}x + 80$, em que *y* representa o número de itens vendidos durante a semana e *x*, o número de anúncios publicados durante o mesmo período. Nessas condições, quantas vezes o gerente deverá anunciar em uma semana para que a loja venda 200 itens? 80 vezes

FÓRUM

Você sabia que *bullying* pela internet e pelas redes sociais agora é crime?

O chamado *cyberbullying* – intimidação sistemática mediante violência física ou psicológica, de modo intencional e repetitivo, realizado por meio de computadores, redes sociais e outros ambientes virtuais – agora é crime (lei nº 14.811/2024). Com a nova lei, espera-se reduzir o número de ataques virtuais, que cresceram nos últimos anos.

Outro tipo de crime que vem crescendo em ambiente virtual são os crimes de ódio. Esse tipo de crime é motivado por preconceito ou intolerância contra uma pessoa ou um grupo por causa de sua identidade, da orientação sexual, do gênero, da etnia, da nacionalidade, da religião e de outras características. Entre 2017 e 2022, o país registrou mais de 293,2 mil denúncias envolvendo discursos de ódio em ambiente virtual.

Se for vítima ou conhecer alguém que recebeu ataques ou ameaças, saiba que você ou um responsável pode denunciar de forma gratuita e anônima pelo Disque 100: basta ligar 100.

Elaborado com base em: BRASIL. Ministério dos Direitos Humanos e da Cidadania. **Incitação à violência contra a vida na internet lidera violações de direitos humanos com mais de 76 mil casos em cinco anos, aponta ObservaDH**. Brasília, DF: MDHC, 1 fev. 2024. Disponível em: https://www.gov.br/mdh/pt-br/assuntos/noticias/janeiro/incitacao-a-violencia-contra-a-vida-na-internet-lidera-violacoes-de-direitos-humanos-com-mais-de-76-mil-casos-em-cinco-anos-aponta-observadh. Acesso em: 10 jul. 2024.

Após ler o texto, faça o que se pede. Ver as **Orientações para o professor**.

- Reúna-se a alguns colegas, e pensem em ações para a prevenção desses problemas. Ao final, compartilhem suas ideias com a turma e discutam como colocá-las em prática.

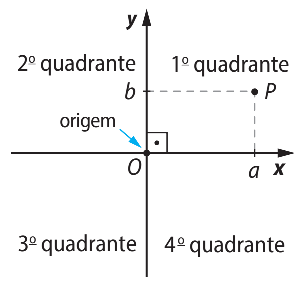
Gráfico de uma função

De modo geral, as funções podem ser representadas graficamente no **sistema cartesiano ortogonal**. Vamos relembrar algumas ideias e alguns conceitos desse sistema de coordenadas no caso bidimensional.

Sistema cartesiano ortogonal

Para determinar a localização de um ponto no plano, utilizamos o sistema cartesiano ortogonal, que é estabelecido por duas retas perpendiculares entre si, denominadas **eixos** do sistema cartesiano. Esses eixos representam retas reais, e o ponto *O*, de intersecção desses eixos, é a **origem** do sistema cartesiano.

O eixo horizontal (eixo *x*) é denominado **eixo das abscissas**, e o eixo vertical (eixo *y*) é denominado **eixo das ordenadas**. Esses eixos dividem o plano em quatro regiões, chamadas de **quadrantes**, como indicado na figura.

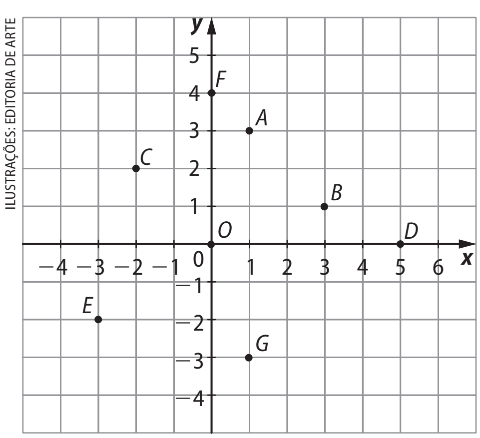


O ponto *P* representado na figura tem **coordenadas cartesianas** *a* e *b*, números reais que formam o **par ordenado (*a*, *b*)**. Indicamos assim: *P*(*a*, *b*).

O número real *a* é a **abscissa** do ponto *P*. Esse número é associado ao ponto de intersecção do **eixo *x*** com a reta paralela ao eixo *y* que passa por *P*. O número real *b* é a **ordenada** do ponto *P*. Esse número é associado ao ponto de intersecção do **eixo *y*** com a reta paralela ao eixo *x* que passa por *P*.

Qualquer ponto do plano pode ser localizado no sistema cartesiano, para isso usamos um par ordenado de números reais, que são as coordenadas do ponto. Observe, a seguir, como localizar alguns pontos no sistema cartesiano e verifique que os pontos *A*(1, 3) e *B*(3, 1) são pontos distintos e têm diferentes localizações no plano.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE



Pense e responda

Com base no sistema cartesiano representado, responda:
- Qual é o ponto de coordenadas (−3, −2)? ponto *E*
- Em qual quadrante está localizado o ponto *C*(−2, 2)? no 2º quadrante
- Construa um sistema cartesiano e localize nele os pontos de coordenadas (3, 0), (0, 3), (−4, 0) e (0, −4). Construção do estudante.

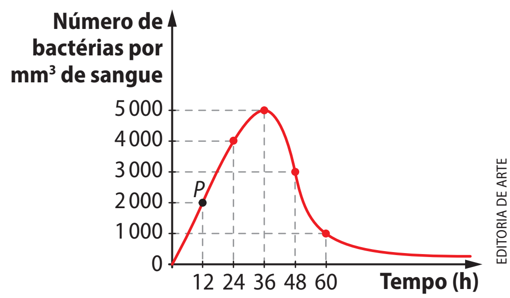
Observações:
- Dois pares ordenados (*a*, *b*) e (*c*, *d*) são iguais se, e somente se, $a = c$ e $b = d$.
- O ponto *O* (origem) tem coordenadas (0, 0).
- Os pontos dos eixos *x* e *y* não pertencem a nenhum dos quadrantes.
- Todo ponto do eixo *x* tem ordenada igual a zero.
- Todo ponto do eixo *y* tem abscissa igual a zero.

» Leitura e interpretação de gráficos

Um gráfico é uma representação geométrica de dados que nos permite visualizar relações entre grandezas.

Por exemplo, ao analisar o caso de um paciente em tratamento, infectado por determinado tipo de bactéria, um médico detectou que o número dessas bactérias, por milimetro cúbico de sangue, variou com o passar do tempo, conforme mostra o gráfico.

> **Evolução do número de bactérias no sangue**



Fonte: Dados fictícios.

Nesse exemplo, o tempo é dado em hora, o instante zero corresponde ao momento do contágio, e o número de bactérias é dado por mm^3 de sangue.

Para observar como o gráfico determina a correspondência entre o tempo e o número de bactérias, escolhemos um ponto *P* do gráfico e, em seguida, determinamos as coordenadas cartesianas desse ponto. Essa análise pode ser feita para qualquer ponto do gráfico.

Considere, por exemplo, o ponto *P* indicado no gráfico anterior e verifique que a abscissa do ponto *P* é 12 e a ordenada, 2 000, ou seja, as coordenadas do ponto *P* são (12, 2 000). Isso significa que, 12 horas após o contágio, havia 2 000 bactérias por milimetro cúbico (mm^3) de sangue no paciente.

De modo análogo, podemos obter outras informações por meio desse gráfico, entre elas:

- a quantidade máxima de bactérias observada em cada milimetro cúbico de sangue é identificada 36 horas após o contágio;
- 60 horas após o contágio, a quantidade de bactérias em cada milimetro cúbico de sangue é igual a 1000;
- o número de bactérias aumentou no intervalo de 0 a 36 horas.

Observe que cada instante corresponde a um único número de bactérias por milimetro cúbico de sangue. Assim, verificamos que o número de bactérias por milimetro cúbico de sangue varia em função do tempo transcorrido após o contágio. Além disso, dizemos que o tempo é a variável independente e que o número de bactérias por milimetro cúbico de sangue é a variável dependente.

MANJURUL/ISTOCK PHOTOS/GETTY IMAGES

■ Por meio dos exames de cultura de bactérias, é possível analisar o crescimento desses organismos nos diversos materiais biológicos, como sangue e urina. Essa análise é feita em laboratórios.

Pense e responda

Responda às questões a seguir de acordo com o gráfico sobre a evolução do número de bactérias no sangue do paciente.

- Qual é a quantidade máxima de bactérias por milimetro cúbico de sangue verificada nesse paciente? 5 000 bactérias por mm^3 de sangue
- Depois de 36 horas do contágio, é possível observar aumento no número de bactérias por milimetro cúbico de sangue nesse paciente? não

» Construção de gráficos

Para construir gráficos de funções no sistema cartesiano ortogonal, devemos considerar os valores do domínio da função no eixo x (eixo das abscissas) e as respectivas imagens no eixo y (eixo das ordenadas).

O gráfico da função é o conjunto de todos os pontos (x, y) do plano cartesiano tais que $y = f(x)$ com $x \in D(f)$.

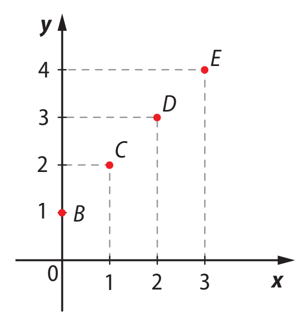
Como exemplo, vamos construir o gráfico da função $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $y = x + 1$, em que $A = \{0, 1, 2, 3\}$.

Iniciamos construindo o quadro com os valores de x pertencentes ao domínio e determinando as imagens de x pela função f, ou seja, os valores de $y = f(x)$, para representar os pontos obtidos no plano cartesiano.

x	y	
0	1	→ $B(0, 1)$
1	2	→ $C(1, 2)$
2	3	→ $D(2, 3)$
3	4	→ $E(3, 4)$

Observe que $D(f) = A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $Im(f) = \{1, 2, 3, 4\}$.

Como o conjunto A é finito, o gráfico de f é formado apenas pelos quatro pontos obtidos por meio do quadro: $B(0, 1)$, $C(1, 2)$, $D(2, 3)$ e $E(3, 4)$. Para concluir, representamos esses pontos no sistema cartesiano, como mostra a figura.



EDITORIA DE ARTE

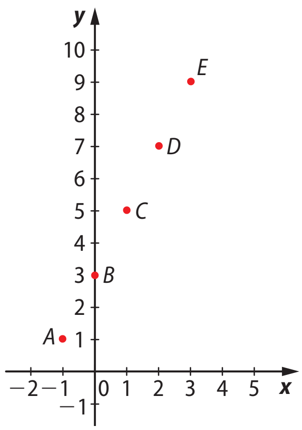
Agora, vamos construir o gráfico da função f dada por $f(x) = 2x + 3$, considerando três domínios distintos, e observar as semelhanças e as diferenças entre esses gráficos.

a) Considerando $D(f) = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$.

Inicialmente, construímos um quadro com os valores de $x \in D(f)$ e determinamos as imagens de x pela função f, ou seja, os valores de $y = f(x)$, para obter os respectivos pares ordenados.

x	$y = 2x + 3$	(x, y)
-1	$y = 2 \cdot (-1) + 3 = -2 + 3 = 1$	$(-1, 1)$
0	$y = 2 \cdot 0 + 3 = 0 + 3 = 3$	$(0, 3)$
1	$y = 2 \cdot 1 + 3 = 2 + 3 = 5$	$(1, 5)$
2	$y = 2 \cdot 2 + 3 = 4 + 3 = 7$	$(2, 7)$
3	$y = 2 \cdot 3 + 3 = 6 + 3 = 9$	$(3, 9)$

Em seguida, representamos, no sistema cartesiano, os pontos cujas coordenadas são os pares ordenados do quadro.

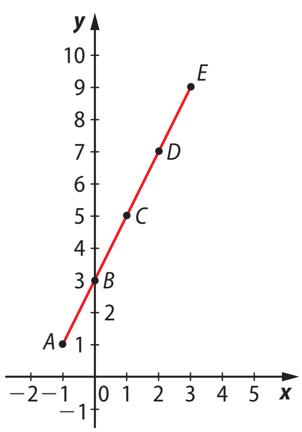


Como o domínio da função é o conjunto $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$, o gráfico de f é formado pelos pontos $A(-1, 1)$, $B(0, 3)$, $C(1, 5)$, $D(2, 7)$ e $E(3, 9)$, representados na figura.

b) Considerando $D(f) = [-1, 3]$.

Nesse caso, o domínio da função é um intervalo real, e os valores de x considerados no exemplo anterior pertencem a esse intervalo. Entretanto, no intervalo $[-1, 3]$, existem infinitos valores de x que têm imagem correspondente pela função f.

Quando representamos esses infinitos pontos no sistema cartesiano, obtemos um segmento de reta, que é o gráfico da função f quando $D(f) = [-1, 3]$.

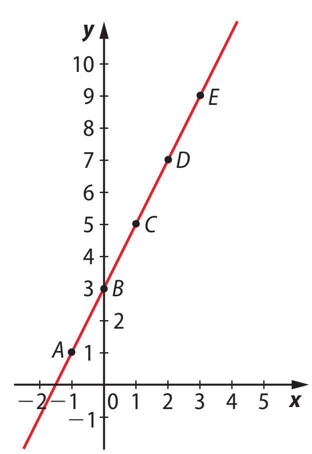


Observe que essa função não está definida para valores de x menores do que -1 nem para valores de x maiores do que 3.

c) Considerando $D(f) = \mathbb{R}$.

Nesse caso, o domínio de f é todo o conjunto dos números reais e, como nos exemplos anteriores, os pontos A, B, C, D e E fazem parte do gráfico da função. Além desses pontos, existem infinitos pontos que satisfazem à lei da função f.

O gráfico de f é uma reta em que todo valor de $x \in \mathbb{R}$ tem uma imagem pela função f, expressa por $y = f(x)$. Observe o gráfico da função f quando $D(f) = \mathbb{R}$.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

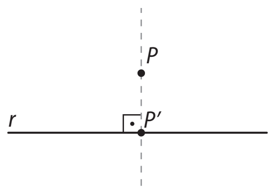
Portanto, apesar de a lei que define a função ser a mesma nos três casos apresentados, os gráficos são diferentes, pois dependem do domínio considerado.

» Domínio e imagem no gráfico de uma função

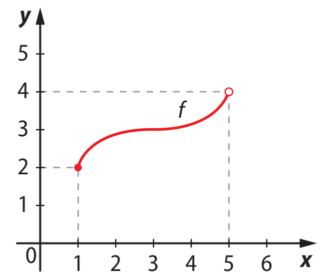
Considere o gráfico a seguir, que representa uma função f.

Saiba que...

A **projeção ortogonal** de um ponto P sobre uma reta r é o ponto P' determinado pela intersecção da reta r com a reta perpendicular a ela, passando por P.

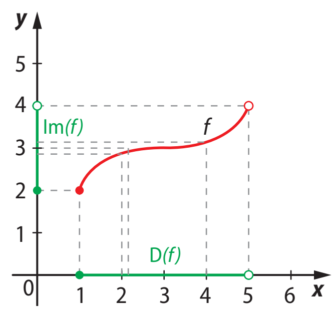


Se o ponto P é um ponto da reta r, a projeção ortogonal de P sobre r é o próprio P.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Para determinar o domínio e o conjunto imagem de f, projetamos os pontos do gráfico sobre os eixos x e y, como indicado a seguir.



O domínio da função f é o conjunto das abscissas de todos os pontos do gráfico. Note que o ponto (5, 4) não faz parte do gráfico. Portanto, a abscissa 5 não pertence ao domínio de f. Sendo assim, temos:

$$D(f) = [1, 5[\text{ ou } D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x < 5\}$$

O conjunto imagem da função f é o conjunto das ordenadas de todos os pontos do gráfico. Como o ponto (5, 4) não faz parte do gráfico, então a ordenada 4 não pertence ao conjunto imagem de f. Sendo assim, temos:

$$Im(f) = [2, 4[\text{ ou } Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant y < 4\}$$

ATIVIDADE RESOLVIDA

5. Os pares ordenados $(a - 1, 3)$ e $(-2, 2b + 1)$ representam o mesmo ponto P no sistema cartesiano.

a) Determine os valores de a e b.

b) Escreva as coordenadas do ponto P.

Resolução

a) Como os pares ordenados representam o mesmo ponto P, as abscissas $a - 1$ e -2 são iguais, assim como as ordenadas 3 e $2b + 1$. Então, obtemos os valores de a e de b resolvendo as seguintes equações:

$a - 1 = -2 \Rightarrow a = -2 + 1 \Rightarrow a = -1$

$2b + 1 = 3 \Rightarrow 2b = 3 - 1 \Rightarrow b = 1$

Portanto, $a = -1$ e $b = 1$.

b) Com os valores de a e b, substituímos em um dos pares ordenados para obter as coordenadas do ponto P.

$a - 1 = -1 - 1 = -2$

Portanto, as coordenadas de P são $(-2, 3)$.

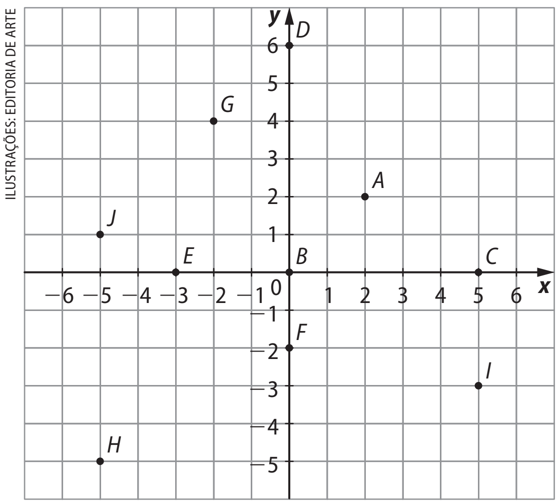
ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

13. Determine as coordenadas dos pontos indicados na figura.

13. $A(2, 2)$; $B(0, 0)$; $C(5, 0)$; $D(0, 6)$; $E(-3, 0)$; $F(0, -2)$; $G(-2, 4)$; $H(-5, -5)$; $I(5, -3)$; $J(-5, 1)$

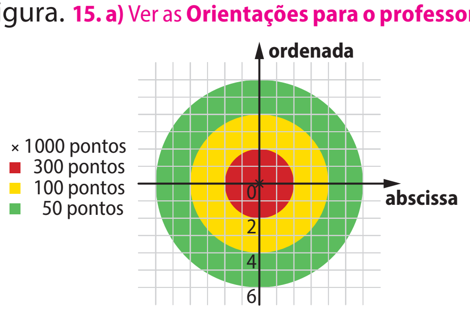
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE



14. Dados os pares ordenados $(2a - 3, b + 2)$ e $(5a - 1, 2b - 3)$ e sabendo que ambos representam o mesmo ponto no sistema cartesiano, quais são os valores de a e b? $a = -\frac{2}{3}$ e $b = 5$

15. (OBMEP) Manoel testa sua pontaria lançando 5 flechas que atingiram o alvo nos pontos A, B, C, D e E de coordenadas $A = (1, -1)$, $B = (2{,}5; 1)$, $C = (-1, 4)$, $D = (-4, -4)$ e $E = (6, 5)$.

A tabela mostra quantos pontos se ganha quando a flecha acerta um ponto dentro de cada uma das três regiões, conforme mostra a figura. **15. a)** Ver as **Orientações para o professor**.



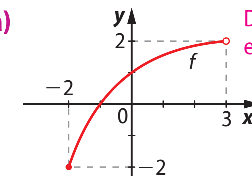
a) Marque os pontos A, B, C, D e E.

b) Quantas flechas ele acertou no interior do menor círculo? 1 flecha

c) Ao todo, quantos pontos Manoel fez? 500 pontos

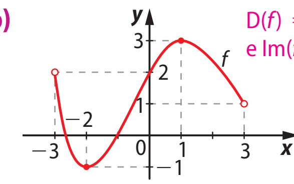
16. Os esboços dos gráficos a seguir representam funções reais de variável real. Observando-os, determine o domínio D(f) e o conjunto imagem Im(f) de cada função.

a)



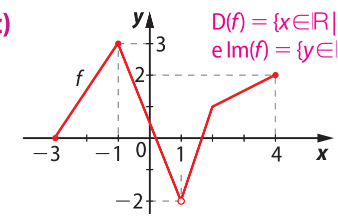
$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x < 3\}$ e $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant y < 2\}$

b)



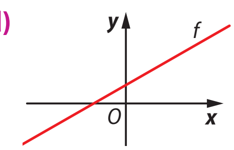
$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 3\}$ e $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant y \leqslant 3\}$

c)



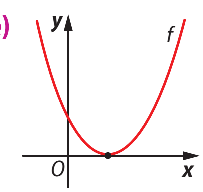
$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x \leqslant 4 \text{ e } x \neq 1\}$ e $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -2 < y \leqslant 3\}$

d)



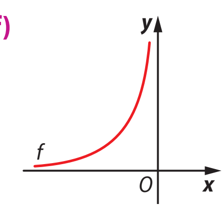
$D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}$

e)



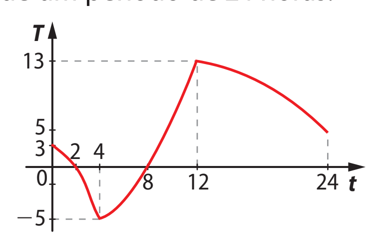
$D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 0\}$

f)



$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ e $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$

17. (UFV-MG) O gráfico a seguir ilustra a evolução da temperatura T (°C), em uma região ao longo de um período de 24 horas.



Determine:

a) os horários em que a temperatura atinge 0 °C; às 2 h e às 8 h

b) o intervalo de variação da temperatura ao longo das 24 horas; A temperatura varia de -5 °C a 13 °C.

c) os intervalos de tempo em que a temperatura é positiva. de 0 h às 2 h e de 8 h às 24 h

Função afim

Você sabe como é calculado o valor de uma corrida de táxi? Tudo depende de onde você está e para onde quer ir.

O valor de uma corrida de táxi está relacionado a duas tarifas: uma tarifa fixa, conhecida como bandeirada, e outra variável, que é cobrada por kilometro rodado e por outros fatores que possam influenciar esse valor, como o tempo do veículo parado no trânsito e o período do dia em que acontece a corrida.

A determinação dessas tarifas é incumbência das prefeituras; por isso, estados e até cidades dentro do mesmo estado podem ter valores diferentes. Como exemplo, conforme regulamentado pela Prefeitura de São Paulo, em 2024, no município de São Paulo (SP), na categoria Táxi Comum, o preço da bandeirada para o período das 6 h às 20 h era de R$ 6,00, e a taxa por kilometro rodado era de R$ 4,25. Além disso, havia a tarifa de R$ 51,00 por hora parada.

Desse modo, o preço *p* a ser cobrado por uma corrida de táxi depende, entre outros fatores, da distância *x* percorrida pelo táxi. Vamos estudar agora como podemos utilizar o conceito de função para analisar a relação entre esses valores.

Levando em consideração os dados apresentados do município de São Paulo (SP), suponha uma situação em que o táxi não cobre adicionalmente a hora parada e cujo período da corrida esteja dentro do horário das 6 h às 20 h. Nesse caso, o preço *p* a ser cobrado é composto de uma parte fixa, que é a bandeirada, e uma parte variável, correspondente à distância *x* percorrida.

Considerando R$ 6,00 o valor da bandeirada e R$ 4,25 o valor de cada kilometro rodado, podemos escrever a seguinte lei de formação para representar o preço *p* em função da distância *x*:

$$p(x) = 6{,}00 + 4{,}25x \text{ ou } y = 4{,}25x + 6$$

Observe que $p(x)$ ou y é o preço a ser cobrado (em reais) e x é a distância percorrida (em kilometro).

Pense e responda

Utilizando a lei de formação apresentada, calcule o preço cobrado por uma corrida de táxi cuja distância percorrida foi de 8 km.

R$ 40,00

▪ Taxímetro na tarifa 1 no município de São Paulo (SP). Fotografia de 2024.

JUNIOR ROZZO/ROZZO IMAGENS

Acompanhe, agora, outra situação que pode ser modelada e analisada por meio de uma função.

Um encanador foi contratado para resolver o problema de vazamento em uma residência e, para ter noção da quantidade de água desperdiçada e localizar o vazamento, fechou todos os registros até que a caixa-d'água de 1000 litros ficasse completamente cheia. Na rede em que detectou o vazamento, ele percebeu que 8 litros de água eram desperdiçados a cada hora.

Pense e responda

Determine quantos litros de água restarão na caixa se o vazamento durar 24 horas. 808 litros

A quantidade de água q (em litro) que resta na caixa-d'água é uma função do tempo t (em hora) e pode ser representada pela lei:

$$q(t) = 1000 - 8t \text{ ou } y = -8t + 1000$$

VINICIUS R. SOUZA/SHUTTERSTOCK

Os reservatórios de água devem permanecer tampados, contribuindo para a prevenção de doenças.

As leis de formação utilizadas para representar cada situação descrita anteriormente são exemplos de leis de função afim, que podemos definir da seguinte maneira:

> Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$, com a e b reais, é chamada de **função afim**.

Observe outros exemplos de leis de função afim.

a) $f(x) = 5x + 1$ ou $y = 5x + 1$

b) $g(x) = -\sqrt{2}x - 1$ ou $y = -\sqrt{2}x - 1$

c) $h(x) = -\frac{2}{5}x$ ou $y = -\frac{2}{5}x$

d) $z(x) = 14{,}90$ ou $y = 14{,}90$

Lembre-se de que x é a variável independente e y é a variável dependente na função afim dada por $y = ax + b$. Ao atribuir valores para a variável independente $\boldsymbol{x}$, obtemos $\boldsymbol{y}$, o **valor da função**. Observe alguns exemplos.

- Considerando a função dada por $f(x) = 5x + 1$, podemos calcular $f(3)$ da seguinte maneira: $f(3) = 5 \cdot 3 + 1 \Rightarrow f(3) = 16$
  Portanto, 16 é o valor da função f para $x = 3$.
- Considerando a função dada por $h(x) = -\frac{2}{5}x$, podemos calcular $h(-20)$ da seguinte maneira: $h(-20) = -\frac{2}{5} \cdot (-20) \Rightarrow h(-20) = 8$
  Portanto, 8 é o valor da função h para $x = -20$.

Em uma função afim dada por $f(x) = ax + b$, os números reais $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ são chamados **coeficientes** e, de acordo com seus valores, a função afim recebe alguns nomes particulares, que estudaremos a seguir.

Função polinomial do 1º grau

Quando o coeficiente ***a*** da função afim é **diferente de zero**, a função recebe o nome de função polinomial do 1º grau, pois a relação entre a variável dependente e a variável independente é expressa por um polinômio do 1º grau.

> Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$, com a e b reais e $a \neq 0$, é chamada de **função polinomial do 1º grau**.

Observe alguns exemplos de leis de função polinomial do 1º grau:

a) $f(x) = 2x - 1$, em que $a = 2$ e $b = -1$;

b) $y = 0{,}5x + \sqrt{2}$, em que $a = 0{,}5$ e $b = \sqrt{2}$;

c) $y = \frac{2}{3} + 2x$, em que $a = 2$ e $b = \frac{2}{3}$;

d) $f(x) = 4x$, em que $a = 4$ e $b = 0$.

Função linear

Considere, agora, a situação a seguir.

Certo modelo de veículo blindado consome, aproximadamente, 0,25 litro de combustível por kilometro rodado. Podemos dizer que a quantidade y de combustível consumido (em litro) é função da distância x percorrida (em kilometro) e pode ser indicada pela lei:

$$y = 0{,}25x$$

A lei para representar essa função é a lei de um tipo de função afim, conhecida também como função linear, que definimos da seguinte maneira:

> Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax$, com a real e $a \neq 0$, é chamada de **função linear**.

Porque ela também é da forma $f(x) = ax + b$, com a e b reais.

Pense e responda

Por que uma função linear é uma função afim?

Observe alguns exemplos de leis de função linear:

a) $f(x) = -7x$, em que $a = -7$;

b) $y = x\sqrt{3}$, em que $a = \sqrt{3}$;

c) $y = -\frac{x}{3}$, em que $a = -\frac{1}{3}$;

d) $y = x$, em que $a = 1$.

ERNESTO REGHRAN/PULSAR IMAGENS

Pense e responda

- Quantos litros de combustível são necessários para que esse modelo de veículo blindado percorra 20 km? 5 litros

■ O carro-forte é um veículo blindado utilizado no transporte de grandes quantias de dinheiro e de outros objetos de valor.

Função identidade

Quando $a = 1$ e $b = 0$, a função polinomial do 1º grau é expressa pela lei $f(x) = x$ e é chamada função identidade.

> A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$ é chamada de **função identidade**.

A função identidade recebe esse nome por associar cada valor de $x \in \mathbb{R}$ a ele mesmo. Por exemplo:

- $f(1) = 1$;
- $f(0,5) = 0,5$;
- $f(-3) = -3$;
- $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$.

Função linear e proporcionalidade

Retomando a situação que relaciona o consumo de combustível y (em litro) de um modelo de carro blindado e a distância x que ele percorre (em kilometro) por meio de uma função linear dada por $y = 0,25x$, podemos construir um quadro para analisar a relação entre alguns valores. Observe.

	***x* (em kilometro)**	***y* (em litro)**	
	1	0,25	
$\times 2$	2	0,50	$\times 2$
$\times 3$	3	0,75	$\times 3$
$\times 4$	4	1,00	$\times 4$
	⋮	⋮	
$\times 10$	10	2,50	$\times 10$

Perceba que, ao dobrarmos o valor de x, o valor correspondente de y também dobra. Se multiplicarmos x por 3, o valor correspondente de y também será multiplicado por 3, e assim sucessivamente.

Nesse caso, dizemos que as variáveis x e y representam grandezas diretamente proporcionais, e a constante de proporcionalidade k pode ser obtida pela razão $\frac{y}{x}$, quando $x \neq 0$.

$$k = \frac{0,25}{1} = \frac{0,50}{2} = \frac{0,75}{3} = \frac{1,00}{4} = \ldots = \frac{2,50}{10} = 0,25\text{, ou seja, } k = 0,25$$

> Em uma função linear, cuja lei de formação é dada por $y = ax$, quando $a > 0$, dizemos que as variáveis x e y representam **grandezas diretamente proporcionais**. A constante de proporcionalidade k é o coeficiente a da função.

Função constante

Outro tipo de função afim é a função constante, definida a seguir.

A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = b$, com b real, é chamada de **função constante**.

Saiba que...

Se $b = 0$, a função constante f é dada por $f(x) = 0$ para todo x real. Essa função é conhecida como **função nula**.

A função constante associa cada valor de $x \in \mathbb{R}$ sempre ao mesmo valor b. Nesse caso, o conjunto imagem da função constante é $\text{Im}(f) = \{b\}$.

Por exemplo, para a função constante f dada por $f(x) = 12$, todos os elementos de $D(f)$ têm imagem igual a 12. Observe alguns casos.

- $f(0) = 12$
- $f(-3) = 12$
- $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 12$
- $f(\sqrt{2}) = 12$

ATIVIDADES RESOLVIDAS

6. Vinícius trabalha como *DJ* e cobra um valor fixo de R$ 250,00, além de um valor adicional de R$ 110,00 por hora, para animar uma festa.

OZGURCANKAYA/E+/GETTY IMAGES

▪ O serviço de *DJ* é bastante requisitado em festas de debutantes e de casamentos.

a) Indicando por y o valor total cobrado por Vinícius, em reais, e por x a quantidade de horas trabalhadas, escreva a lei da função que relaciona y e x.

b) Essa lei de formação é de uma função afim? Justifique sua resposta.

c) Qual é o valor, em reais, que Vinícius receberá se trabalhar durante 2 horas em uma festa?

d) Sabendo que Vinícius recebeu R$ 635,00 pelo trabalho em determinada festa, por quantas horas ele prestou seu serviço?

Resolução

a) O valor y recebido por Vinícius depende da quantidade x de horas que ele trabalhou animando a festa. Assim, a lei que relaciona essas duas variáveis pode ser escrita como:
$y = 250 + 110x$ ou $y = 110x + 250$

b) Sim, essa lei de formação é de uma função afim, pois é do tipo $y = ax + b$, com a e b reais. Nesse caso, $a = 110$ e $b = 250$.

c) Se o tempo de animação da festa for de 2 horas, então substituímos x por 2 na lei da função e determinamos o valor de y correspondente:
$y = 250 + 110 \cdot 2 \Rightarrow y = 250 + 220 \Rightarrow y = 470$
Portanto, Vinícius receberá R$ 470,00 por 2 horas de trabalho na festa.

d) Sabendo que ele recebeu R$ 635,00, substituímos y por 635 na lei da função e determinamos o valor de x:
$635 = 250 + 110x \Rightarrow 110x = 385 \Rightarrow x = 3{,}5$
Portanto, ele prestou serviço nessa festa por 3,5h ou 3h30min.

Pense e responda

Observe a afirmação a seguir.
"O valor que Vinícius recebe é diretamente proporcional ao número de horas que trabalhou".
Reúna-se a um colega, e discutam-na. Ela é verdadeira? Justifiquem.

Não, pois a relação entre o valor que ele recebe e o número de horas trabalhadas não é dada por uma função linear.

7. (UEG-GO) Em uma fábrica, o custo de fabricação de 500 unidades de camisetas é de R$ 2.700,00, enquanto o custo para produzir 1000 unidades é de R$ 3.800,00. Sabendo que o custo das camisetas é dado em função do número produzido através da expressão $C(x) = qx + b$, em que x é a quantidade produzida e b é o custo fixo, determine:

a) Os valores de b e de q.

b) O custo de produção de 800 camisetas.

Resolução

a) De acordo com o enunciado:

- quando $x = 500$, temos $C(500) = 2700$;
- quando $x = 1000$, temos $C(1000) = 3800$.

Para determinar os valores de b e q, utilizamos essas informações, substituindo os valores correspondentes na lei $C(x) = qx + b$, e resolvemos o sistema a seguir.

$$\begin{cases} 2700 = 500q + b \\ 3800 = 1000q + b \end{cases}$$

Multiplicamos por (-1) a primeira equação do sistema e adicionamos membro a membro as duas equações, como indicado a seguir.

$$\oplus\ \begin{array}{rcl} -2700 & = & -500q - b \\ 3800 & = & 1000q + b \\ \hline 1100 & = & 500q \end{array}\ \oplus$$

Se $500q = 1100$, então $q = \frac{11}{5}$.

Substituindo q por $\frac{11}{5}$ na primeira equação do sistema, temos:

$$2700 = 500 \cdot \frac{11}{5} + b \Rightarrow b = 1600$$

Portanto, $b = 1600$ e $q = \frac{11}{5}$.

b) A lei da função que representa o custo das camisetas é $C(x) = \frac{11}{5}x + 1600$.

Substituindo $x = 800$ na lei da função, determinamos $C(800)$.

$$C(800) = \frac{11}{5} \cdot 800 + 1600 \Rightarrow C(800) = 3360$$

Portanto, o custo de produção de 800 camisetas é R$ 3.360,00.

8. Marcelo mora em um município onde é possível alugar patinetes elétricos para se locomover. A velocidade máxima permitida desses aparelhos é de 20 km/h, mas é recomendado que pessoas sem experiência não ultrapassem 12 km/h. Fazendo alguns cálculos para estimar o tempo que levaria utilizando um patinete elétrico de uma estação de metrô até o local onde trabalha, Marcelo considerou que manteria uma velocidade constante de 3 metros por segundo e fez um quadro para relacionar a distância percorrida, em metro, em função do tempo, em segundo.

Distância *d* (em metro)	3	6	9	12	15	...
Tempo *t* (em segundo)	1	2	3	4	5	...

Com base nessas informações, responda:

a) Qual é a lei da função que relaciona a distância d, em metro, a ser percorrida por Marcelo e o tempo t, em segundo?

b) As grandezas representadas por d e t são diretamente proporcionais? Justifique sua resposta.

c) Marcelo levou 10 minutos para realizar o deslocamento que pretendia nas condições que tinha planejado. Qual distância ele percorreu?

Resolução

a) De acordo com os dados apresentados, verifica-se que, a cada segundo, Marcelo vai percorrer 3 metros de distância.

Essa relação corresponde a uma função linear, que pode ser representada pela lei $d(t) = 3t$.

b) Sim. Essa função é linear, e o coeficiente a da função é igual a 3. Como $3 \neq 0$ e $3 > 0$, as grandezas representadas por d e t são grandezas diretamente proporcionais.

Também podemos verificar que, se multiplicarmos o valor de t por um número natural n, o valor correspondente de d também será multiplicado pelo mesmo número natural n.

c) Como Marcelo levou 10 minutos para realizar o percurso, isso equivale a 600 segundos, pois $10 \cdot 60 = 600$.

Substituindo $t = 600$ na lei da função, temos:

$d(600) = 3 \cdot 600 \Rightarrow d(600) = 1800$

Portanto, Marcelo percorreu 1800 metros.

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

18. Karina trabalha em um ateliê que confecciona sapatos e usa uma fórmula para calcular a numeração deles, de acordo com a medida de comprimento dos pés dos clientes.

KITREEL/SHUTTERSTOCK

■ Os profissionais que trabalham na confecção de sapatos sob medida utilizam técnica e criatividade na criação dos modelos.

A fórmula utilizada por Karina é dada por $y = 1{,}25x + 7$, em que y é a numeração do sapato e x, a medida de comprimento do pé, em centimetro. Quando o resultado não é um número natural, ela o arredonda para o número natural imediatamente maior do que o valor calculado.

a) Determine a numeração do sapato de um cliente de Karina cujo pé mede 27 cm. 41

b) Considere, agora, sua numeração de sapato e utilize essa fórmula para calcular a medida de comprimento x correspondente. Depois, use uma régua para medir o comprimento do seu pé e confira se o valor calculado é um valor aproximado da medida verificada. Resposta pessoal.

19. Considere as funções reais definidas a seguir.

Ver as **Orientações para o professor**.

I. $f(x) = 3x^2 - 5x + 4$

II. $g(x) = -2x + \sqrt{3}$

III. $h(x) = \frac{2}{5}x$

IV. $i(x) = 0{,}01$

a) Qual(is) dessas leis é(são) de função afim?

b) Classifique as funções afins em função polinomial do 1º grau, função linear e/ou função constante.

c) Para as funções afins, identifique os valores dos coeficientes a e b.

20. Dada a função definida por $f(x) = 5x - 2$, determine:

a) $f(2)$; 8

b) o valor de x para $f(x) = 0$. $x = \frac{2}{5}$

21. (Enem/MEC) Para concretar a laje de sua residência, uma pessoa contratou uma construtora. Tal empresa informa que o preço y do concreto bombeado é composto de duas partes: uma fixa, chamada de taxa de bombeamento, e uma variável, que depende do volume x de concreto utilizado. Sabe-se que a taxa de bombeamento custa R$ 500,00 e que o metro cúbico do concreto bombeado é de R$ 250,00. alternativa **d**

A expressão que representa o preço y em função do volume x, em metro cúbico, é

a) $y = 250x$

b) $y = 500x$

c) $y = 750x$

d) $y = 250x + 500$

e) $y = 500x + 250$

22. Considere uma função afim dada por $y = h(x)$. Sabendo que $h(1) = 4$ e $h(-2) = 10$, escreva a lei da função h e calcule $h\left(-\frac{1}{2}\right)$.

$h(x) = -2x + 6$; $h\left(-\frac{1}{2}\right) = 7$

23. Dada a função f definida por $f(x) = ax + 2$, determine o valor de a para que se tenha $f(4) = 20$. $\frac{9}{2}$

24. Sofia quer produzir folhetos com a propaganda de sua empresa. Na gráfica **A**, o valor da impressão desse folheto, por unidade, é R$ 0,30, e, na gráfica **B**, o valor, também por unidade, é R$ 0,25.

a) Escreva a fórmula que relaciona o valor y a ser pago pela impressão, em reais, com o número x de folhetos impressos em cada uma dessas gráficas. $y_A = 0{,}30x$ e $y_B = 0{,}25x$

b) Na gráfica **A**, o valor pago pela impressão é diretamente proporcional ao número de unidades impressas? E na gráfica **B**? Justifique. Ver as **Orientações para o professor**.

c) Se Sofia encomendar 1 000 folhetos na gráfica **B**, quantos reais gastará? R$ 250,00

25. Sabendo que f é uma função linear e que $f(-3) = 4$, determine o valor de $f(6)$. -8

26. Os lados de um retângulo medem x e $(x + 5)$, em metro.

a) Escreva a fórmula matemática que relaciona o perímetro p desse retângulo com a medida x. $p = 4x + 10$

b) Reproduza o quadro a seguir e complete-o com os valores que faltam.

x (em metro)	5	10	20	30		
p (em metro)					162	210

Ver as **Orientações para o professor**.

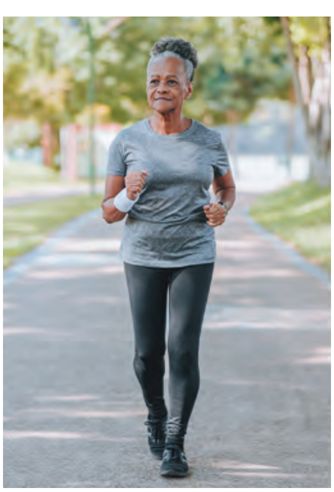
c) As grandezas p e x são diretamente proporcionais? Por quê? Não, pois a razão $\frac{p}{x}$ não é constante.

d) Quais devem ser as medidas dos lados desse retângulo para que o perímetro seja de 78 metros? 17 m e 22 m

27. (FGV-SP) Uma função polinomial f do 1º grau é tal que $f(3) = 6$ e $f(4) = 8$. Portanto, o valor de $f(10)$ é: alternativa **e**

a) 16
b) 17
c) 18
d) 19
e) 20

28. Considere que uma pessoa, caminhando a uma velocidade constante, percorra, em média, 80 centimetros a cada 1 segundo.



ANDRESWD/E+/GETTY IMAGES

- A caminhada é uma atividade física que pode ser realizada por pessoas de todas as idades, desde que avaliadas por um médico.

a) Escreva a fórmula que indica a distância percorrida d, em centimetro, em função do tempo t, em segundo. $d = 80t$

b) Nessa situação, a distância (d) e o tempo (t) são grandezas diretamente proporcionais? Justifique sua resposta. Ver as **Orientações para o professor**.

c) Quantos metros uma pessoa nessas condições percorrerá em 10 segundos? E em 40 segundos? 8 m; 32 m

d) Quantos segundos uma pessoa nessas condições levará para percorrer 100 metros? 125 s

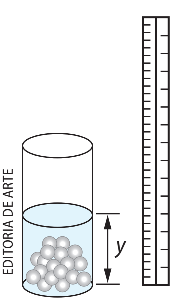
29. (UFC-CE) Seja f uma função real, de variável real, definida por $f(x) = ax + b$. Se $f(1) = -9$ e $b^2 - a^2 = 54$, calcule o valor de $a - b$. 6

Saiba que...

O produto da soma pela diferença de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo menos o quadrado do segundo termo.

$$(b + a) \cdot (b - a) = b^2 - a^2$$

30. (Enem/MEC) Um experimento consiste em colocar certa quantidade de bolas de vidro idênticas em um copo com água até certo nível e medir o nível da água, conforme ilustrado na figura a seguir. Como resultado do experimento, concluiu-se que o nível da água é função do número de bolas de vidro que são colocadas dentro do copo. O quadro a seguir mostra alguns resultados do experimento realizado.



EDITORIA DE ARTE

número de bolas (x)	nível da água (y)
5	6,35 cm
10	6,70 cm
15	7,05 cm

Disponível em: www.penta.ufrgs.br. Acesso em: 13 jan. 2009 (adaptado).

Qual a expressão algébrica que permite calcular o nível da água (y) em função do número de bolas (x)? alternativa **e**

a) $y = 30x$.
b) $y = 25x + 20{,}2$.
c) $y = 1{,}27x$.
d) $y = 0{,}7x$.
e) $y = 0{,}07x + 6$.

Gráfico da função afim

Estudamos que o gráfico de uma função f é o conjunto de todos os pontos (x, y) tais que $x \in D(f)$ e $y = f(x)$.

Em relação ao gráfico da função afim, pode-se demonstrar o seguinte teorema.

> O gráfico da função afim $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax + b$ é uma reta.

Quando o domínio de uma função f, tal que $f(x) = ax + b$, é um subconjunto de $\mathbb{R}$ diferente do próprio $\mathbb{R}$, o gráfico de f pode ser uma semirreta, um segmento de reta ou pontos de uma reta, como ocorre nos exemplos **a** e **b** das páginas **108** e **109**.

Com base no teorema, podemos localizar, no sistema cartesiano, dois pontos distintos pertencentes ao gráfico da função afim e traçar a reta correspondente.

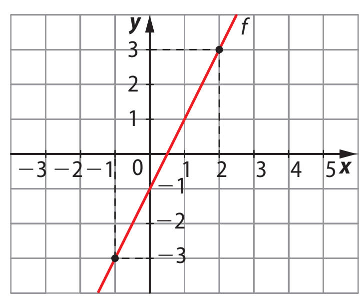
Inicialmente, construímos um quadro com dois valores de $x \in \mathbb{R}$ e determinamos os valores de $y = f(x)$ para obter os pares ordenados desses pontos. Em seguida, localizamos esses pontos no sistema cartesiano e traçamos a reta determinada por eles, que é o gráfico da função f.

Acompanhe alguns exemplos.

a) Gráfico da função afim definida por $f(x) = 2x - 1$

Primeiro, escolhemos dois valores reais para x e obtemos os pares ordenados de dois pontos pertencentes ao gráfico de f. Em seguida, traçamos o gráfico.

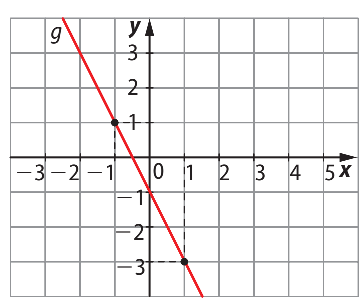
x	$y = 2x - 1$	(x, y)
-1	$y = 2 \cdot (-1) - 1 = -3$	$(-1, -3)$
2	$y = 2 \cdot 2 - 1 = 3$	$(2, 3)$



b) Gráfico da função afim definida por $g(x) = -2x - 1$

Inicialmente, escolhemos dois valores reais para x e obtemos os pares ordenados de dois pontos pertencentes ao gráfico de g. Em seguida, traçamos o gráfico.

x	$y = -2x - 1$	(x, y)
-1	$y = -2 \cdot (-1) - 1 = 1$	$(-1, 1)$
1	$y = -2 \cdot 1 - 1 = -3$	$(1, -3)$



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Pense e responda

Compare o gráfico da função f com o da função g. Depois, observe as leis dessas funções. Você identifica alguma semelhança e alguma diferença entre esses gráficos? Explique.

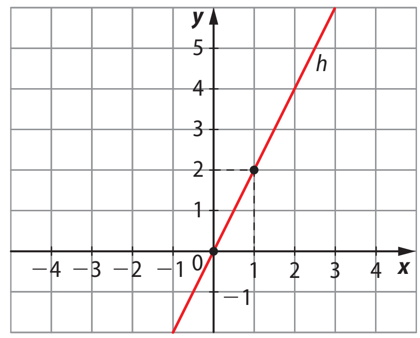
Espera-se que os estudantes percebam que o gráfico da função f e o da função g cruzam o eixo y no mesmo ponto, cuja ordenada corresponde ao coeficiente b dessas funções. O coeficiente a da função g é o oposto do coeficiente a da função f, e as retas são simétricas em relação ao eixo y.

c) Gráfico da função afim definida por $h(x) = 2x$

Observe que a função h é uma função linear. Como a lei de formação de uma função linear é da forma $y = ax$, substituindo $x = 0$ nessa lei, temos $y = a \cdot 0 = 0$.

Portanto, o gráfico da função linear sempre passa pelo ponto (0, 0), origem do sistema cartesiano.

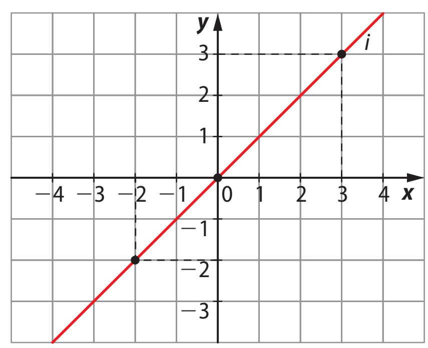
x	$y = 2x$	(x, y)
0	$y = 2 \cdot 0 = 0$	(0, 0)
1	$y = 2 \cdot 1 = 2$	(1, 2)



d) Gráfico da função afim definida por $i(x) = x$

Observe que a função i é a função identidade, que associa cada valor de x do domínio a ele mesmo. O gráfico da função i também passa pela origem do sistema cartesiano.

x	$y = x$	(x, y)
−2	$y = -2$	(−2, −2)
3	$y = 3$	(3, 3)



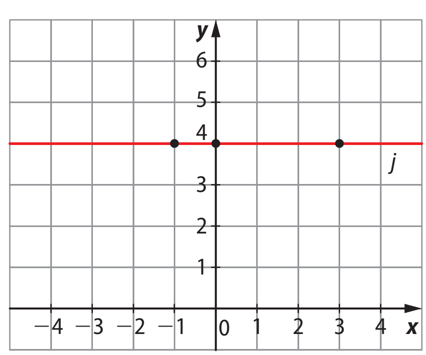
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

O gráfico da função identidade é a reta que contém a bissetriz dos quadrantes ímpares do plano cartesiano.

e) Gráfico da função afim definida por $j(x) = 4$

Observe que a função j é uma função constante. Para qualquer valor de x no domínio da função, y é igual a 4. Portanto, o gráfico é uma reta paralela ao eixo x que intersecta o eixo y no ponto (0, 4).

x	$y = 4$	(x, y)
−1	$y = 4$	(−1, 4)
3	$y = 4$	(3, 4)



O gráfico de uma função constante definida por $y = k$, em que $k \in \mathbb{R}$, é uma reta paralela ao eixo x que intersecta o eixo y no ponto $(0, k)$.

Pense e responda

Sobre os exemplos apresentados, responda:

- Em quais deles as variáveis x e y representam grandezas diretamente proporcionais? Justifique sua resposta.
- Nesse(s) caso(s), qual é a constante de proporcionalidade?

O exemplo **c**, cuja constante de proporcionalidade é 2, e o exemplo **d**, cuja constante de proporcionalidade é 1.

» Zero da função afim

Estudaremos, agora, o valor da variável independente que anula a função afim, mas, antes, apresentamos a seguinte definição.

> Em uma função $f: A \rightarrow B$, um valor de $x \in A$ tal que $f(x) = 0$ é chamado **zero da função** f.

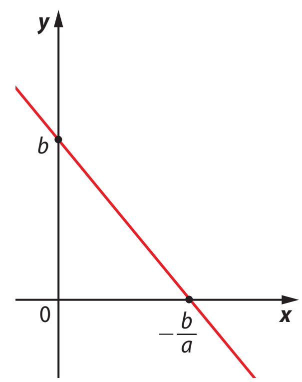
No caso da função afim, definida por $f(x) = ax + b$, quando $a \neq 0$, resolvemos a equação $f(x) = 0$, ou seja, $ax + b = 0$ para determinar o zero da função f. Nesse caso, temos:

$$ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

Logo, quando $a \neq 0$, o zero de uma função afim é dado por $x = -\dfrac{b}{a}$. O zero da função afim é a abscissa do ponto em que o gráfico intersecta o eixo x, como indicado na figura.

Se $a = 0$, temos duas situações:

- $b \neq 0$: nesse caso, temos uma função constante cujo gráfico não intersecta o eixo x; portanto, não há zero da função;
- $b = 0$: nesse caso, temos uma função constante dada por $y = 0$, conhecida também como função nula, cujo gráfico é uma reta coincidente com o eixo x; portanto, todo $x \in \mathbb{R}$ é zero da função nula.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Acompanhamos, em uma situação apresentada anteriormente, que, por causa de um vazamento, a quantidade de água q em uma caixa-d'água, em litro, varia em função do tempo t, em hora, de acordo com a lei $q(t) = -8t + 1000$.

Para saber em quanto tempo esse vazamento esvaziará a caixa-d'água, considerando que o registro de entrada de água na caixa permaneça fechado, podemos determinar o zero dessa função. Nesse caso, temos:

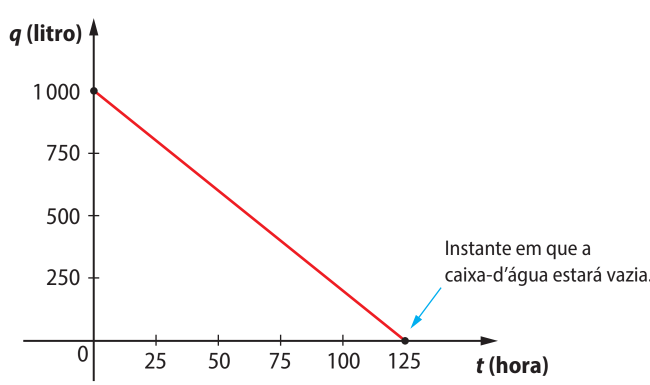
$$-8t + 1000 = 0 \Rightarrow -8t = -1000 \Rightarrow t = 125$$

Portanto, nas condições apresentadas, o vazamento esvaziará essa caixa-d'água em 125 horas. Geometricamente, essa situação também pode ser interpretada por meio do gráfico da função, como indicado a seguir.

Pense e responda

Analisando o gráfico da função q e a relação que ela representa, quais são o domínio e a imagem da função q?

$D(q) = [0, 125]$ e
$Im(q) = [0, 1000]$

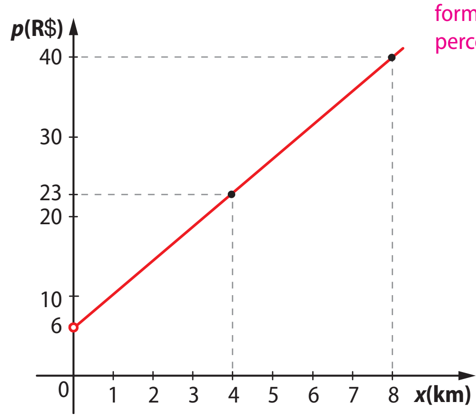


» Taxa de variação

Utilizamos, neste Capítulo, uma função dada por $p(x) = 4{,}25x + 6$ para representar a relação entre o preço de uma corrida de táxi, em reais, e a distância percorrida, em kilometro.

Observe a seguir o gráfico dessa função, verificando que, nessa situação, temos $x > 0$.

Espera-se que os estudantes respondam que o domínio da função é o conjunto formado pelos valores reais maiores do que 0, porque x representa a distância percorrida pelo táxi, e a distância percorrida pelo táxi é um valor positivo.



Pense e responda

- Por que, nessa situação, o domínio da função é o conjunto formado pelos valores reais de x maiores do que 0?
- Nessa função, qual é o acréscimo verificado no valor de p a cada variação de 1 km no valor de x? R$ 4,25

Perceba que, na situação apresentada, há uma variação nos valores da função p à medida que os valores correspondentes de x também variam. Estudaremos, agora, uma maneira de fazer essa análise utilizando a **taxa de variação média**.

Considerando uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e dois números reais x_1 e x_2, tais que $x_1 < x_2$, a **taxa de variação média da função** no intervalo $[x_1, x_2]$ é dada por $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

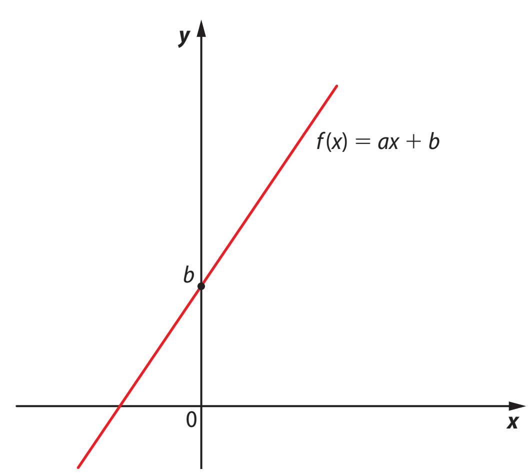
Podemos determinar a taxa de variação média da função afim $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = ax + b$, em um intervalo $[x_1, x_2]$, com $x_1 \neq x_2$, da seguinte maneira:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 + b - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a$$

Logo, a taxa de variação média da função afim definida por $f(x) = ax + b$, em relação a x, é dada pelo coeficiente a.

O coeficiente a é também conhecido como **coeficiente angular** ou **declividade da reta**, pois esse coeficiente está relacionado ao ângulo de inclinação da reta em relação ao eixo x quando os eixos coordenados apresentam a mesma escala.

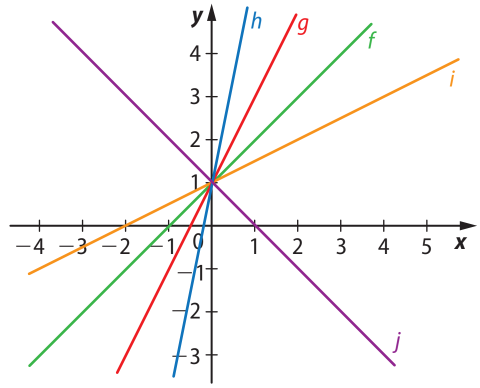
O coeficiente b, denominado **coeficiente linear** dessa reta, é a ordenada do ponto em que o gráfico da função afim intersecta o eixo y.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Observe e compare, em um mesmo sistema cartesiano, o gráfico de algumas funções afins, considerando diferentes valores de *a*.

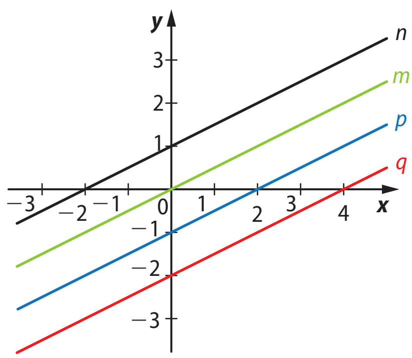
- $f(x) = x + 1$
- $g(x) = 2x + 1$
- $h(x) = 5x + 1$
- $i(x) = \frac{1}{2}x + 1$
- $j(x) = -x + 1$



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Observe e compare, agora, em um mesmo sistema cartesiano, o gráfico de algumas funções afins, considerando diferentes valores de *b*.

- $m(x) = \frac{1}{2}x$
- $n(x) = \frac{1}{2}x + 1$
- $p(x) = \frac{1}{2}x - 1$
- $q(x) = \frac{1}{2}x - 2$



Note que os gráficos das funções afins com o mesmo coeficiente *a* têm a mesma inclinação em relação ao eixo *x*, ou seja, são retas paralelas entre si.

Pense e responda

Em qual das representações é possível obter o gráfico de uma função por meio de um movimento de translação vertical do gráfico de outra: quando variamos o coeficiente *a* e fixamos o *b*, ou quando fixamos o coeficiente *a* e variamos o *b*? A representação com o coeficiente *a* fixo e o coeficiente *b* variando.

Agora, acompanhe a situação a seguir.

Interessado em comprar um apartamento, Maurício fez uma pesquisa em *sites* de vendas de imóveis focando as buscas em uma região de interesse. Após verificar uma grande quantidade de opções, ele calculou a média dos preços dos apartamentos por área e, com os dados, construiu o seguinte quadro.

Área do imóvel (em m²)	40	50	60	70	80	90	100
Valor médio (em milhares de reais)	200	250	320	440	510	620	690

Ele colocou os valores médios dos apartamentos em função da área em um aplicativo e observou, no gráfico gerado, que os pontos obtidos não estavam sobre uma única reta (Figura **1**), mas que era possível obter uma reta (Figura **2**) que o auxiliasse a analisar o comportamento desses valores.

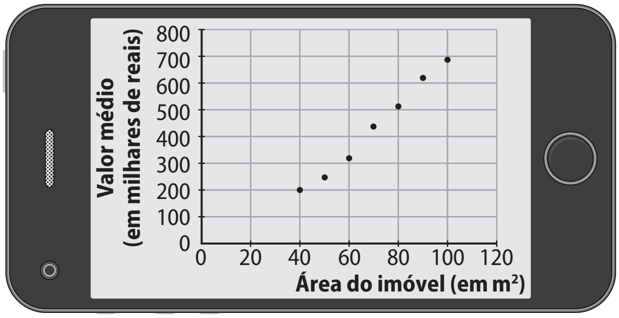


Figura **1**.

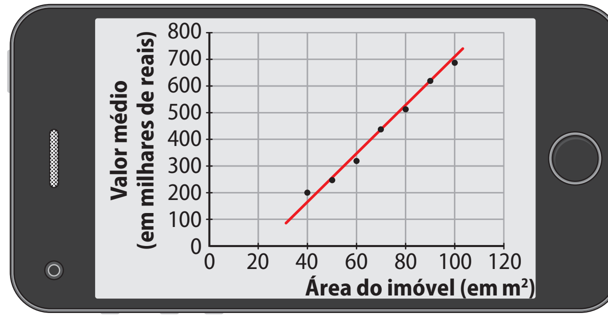


Figura **2**.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Maurício obteve a lei de uma função afim para que pudesse modelar essa situação e fazer uma estimativa do valor médio de apartamentos com área de 150 m^2. Observe como ele fez isso.

Inicialmente, Maurício utilizou os pontos (70, 440) e (90, 620), pertencentes à reta, para calcular o coeficiente *a*.

$$a = \frac{620 - 440}{90 - 70} = \frac{180}{20} = 9$$

Assim, ele escreveu a lei da função como $y = 9x + b$.

Em seguida, calculou o coeficiente linear *b* substituindo as coordenadas do ponto (70, 440) na lei da função.

$$440 = 9 \cdot 70 + b \Rightarrow b = 440 - 630 \Rightarrow b = -190$$

Desse modo, obteve a lei da função dada por $f(x) = 9x - 190$ e calculou $f(150)$.

$$f(150) = 9 \cdot 150 - 190 = 1350 - 190 = 1160$$

Portanto, a estimativa de Maurício é de que um apartamento com 150 m^2 de área tenha um valor médio próximo de R$ 1.160.000,00.

Pense e responda

Você identifica uma situação do dia a dia envolvendo a relação entre duas variáveis numéricas cujo comportamento pode ser analisado com o auxílio de uma função afim? Qual?

O preço de serviços em função do tempo é um exemplo de situação do dia a dia em que a relação entre duas variáveis numéricas pode ser representada por uma função afim.

ATIVIDADES RESOLVIDAS

9. Considere a função afim dada por $f(x) = -3x + 5$ e determine:

a) o valor da função para $x = 0$;

b) o zero da função.

Resolução

a) Para determinar $f(0)$, substituímos o valor de *x* na lei da função dada.

$f(0) = -3 \cdot 0 + 5 \Rightarrow f(0) = 5$

Portanto, o valor da função para $x = 0$ é $f(0) = 5$.

b) Para determinar o zero da função, devemos calcular *x* para que $f(x) = 0$. Assim, temos:

$-3x + 5 = 0 \Rightarrow -3x = -5 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$

Portanto, o zero da função é $x = \frac{5}{3}$.

10. Um automóvel anda a 72 km/h, o que equivale a 20 m/s, até o momento em que é freado. Com isso, sua velocidade v, em metro por segundo, varia em função do tempo t, em segundo, de acordo com a lei $v = 20 - 4t$, até o instante em que o automóvel para completamente ($v = 0$ m/s).

a) Qual é o instante em que o automóvel para completamente?

b) Qual é o domínio dessa função?

c) Construa o gráfico dessa função.

d) Qual é a taxa de variação da função v?

Resolução

a) Para obter o instante no qual o automóvel para completamente, determinamos o zero da função v.

$0 = 20 - 4t \Rightarrow 4t = 20 \Rightarrow t = 5$

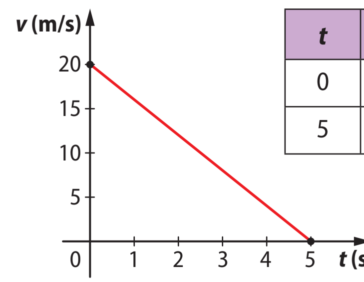
Portanto, o automóvel para completamente no instante $t = 5$ s.

b) A situação ocorre do instante inicial ($t = 0$ s) até o momento em que o automóvel para completamente ($t = 5$ s). Portanto, o domínio da função é $D(v) = [0, 5]$.

GRAIKI/MOMENT/GETTY IMAGES

■ Ao dirigir, é importante estar atento ao trânsito, respeitar a velocidade máxima permitida e manter a distância segura recomendada entre veículos.

c) Como a lei da função v é da forma $y = ax + b$ e $0 \leqslant t \leqslant 5$, o gráfico de v é um segmento de reta. Para construí-lo, escolhemos dois valores de t no domínio de v, obtemos os pares ordenados de dois pontos pertencentes ao gráfico, localizamos esses pontos no sistema cartesiano e traçamos o segmento, como indicado a seguir.

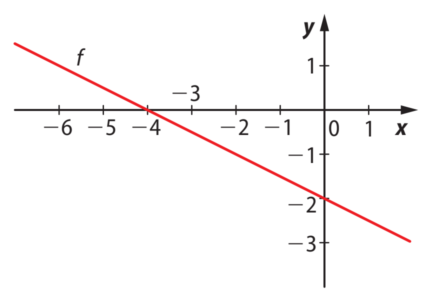


t	v	(t, v)
0	20	(0, 20)
5	0	(5, 0)

Observe que $D(v) = [0, 5]$ e $Im(v) = [0, 20]$.

d) Como a função v é dada na forma $y = ax + b$, a taxa de variação de v é dada pelo coeficiente a. Logo, a taxa de variação de v é -4.

11. Observe a seguir o gráfico da função afim f e determine a lei de formação dessa função.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Resolução

Como f é uma função afim, sua lei de formação é do tipo $f(x) = ax + b$.

Observando o gráfico, temos:

- -4 é o zero da função f, pois $f(-4) = 0$;
- -2 é o coeficiente linear do gráfico, pois é a ordenada do ponto em que o gráfico de f intersecta o eixo y. Assim, $b = -2$.

Substituindo esses valores na lei $y = ax + b$, obtemos o valor de a.

$0 = a \cdot (-4) + (-2) \Rightarrow -4a = 2 \Rightarrow a = -\dfrac{1}{2}$

Portanto, a lei de formação da função f é $f(x) = -\dfrac{1}{2}x - 2$.

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

31. Construa, no sistema cartesiano ortogonal, gráfico das funções afins dadas por: Ver as **Orientações para o professor**.

a) $f(x) = 2x + 1$

b) $g(x) = -x + 4$

c) $y = \frac{1}{2} - x$

d) $h(x) = -2x$

32. Determine o valor de p de modo que o gráfico da função definida por $f(x) = 3x + p - 2$ cruze o eixo y no ponto de ordenada 4. $p = 6$

33. Determine m de modo que o gráfico da função f dada por $f(x) = -2x + 4m + 5$ cruze o eixo x no ponto de abscissa 3. $m = \frac{1}{4}$

34. Determine o zero de cada uma das funções afins definidas a seguir.

a) $f(x) = -3x + 4$ $\frac{4}{3}$

b) $y = \frac{3}{8}x$ 0

c) $y = 2x + 8$ -4

d) $y = 6 + \frac{x}{4}$ -24

35. (Ufop-MG) O custo total da fabricação de determinado artigo depende do custo de produção, que é de R$ 45,00 por unidade fabricada, mais um custo fixo de R$ 2.000,00. Pede-se: Ver as **Orientações para o professor**.

a) A função que representa o custo total em relação à quantidade fabricada.

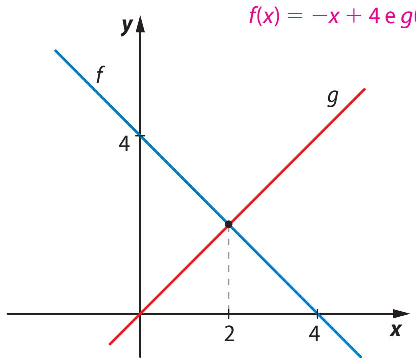
b) O custo total da fabricação de 10 unidades.

c) O número de unidades que deverão ser fabricadas para que o custo total seja de R$ 3.800,00.

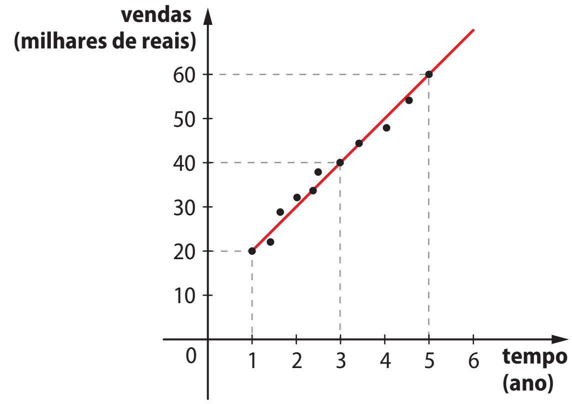
d) O gráfico da função custo total, destacando-se os dados obtidos nos itens anteriores.

36. Observe os gráficos das funções f e g e determine a lei de formação de cada uma delas.

$f(x) = -x + 4$ e $g(x) = x$



37. O gerente de uma loja de artigos para *pets* fez um levantamento das vendas da loja ao longo dos últimos cinco anos e observou que os valores poderiam ser aproximados por uma reta. Com base nos dados obtidos, construiu o gráfico que representa as vendas (em milhares de reais) em função do tempo (em ano).



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Observe o gráfico e faça o que se pede em cada caso.

a) Determine a lei de formação da função representada pelo gráfico. $y = 10x + 10$

b) Se as vendas da loja mantiverem a evolução apresentada nos últimos cinco anos, qual será a projeção de vendas para o sétimo ano de observação? R$ 80.000,00

c) Reúna-se a um colega, e respondam: as informações disponíveis são suficientes para responder aos itens anteriores? Há algum dado que não foi utilizado? Justifiquem suas respostas.
Ver as **Orientações para o professor**.

CASARSAGURU/E+/GETTY IMAGES

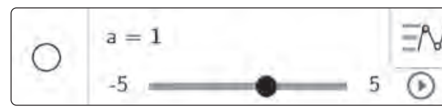
▪ O mercado de produtos para *pets* tem crescido bastante no Brasil.

Analisando os coeficientes da função afim

Vamos utilizar o **GeoGebra** para visualizar de que forma os coeficientes *a* e *b* de uma função afim influenciam o gráfico e verificar como esses coeficientes estão relacionados com transformações no plano.

Inicialmente, vamos observar como o coeficiente *a* influencia o gráfico da função, considerando a função linear *f*, definida por $f(x) = ax$. Para isso, siga os passos a seguir.

I. No campo de entrada do GeoGebra, digite "$f(x) = ax$" e pressione ***Enter***. O programa criará automaticamente um controle deslizante para o coeficiente *a*. Esse controle permitirá alterar o valor de *a* de forma dinâmica e ficará exibido na janela de Álgebra.



II. Inicialmente, o programa exibirá o gráfico da função *f* com o coeficiente *a* valendo 1. Altere a posição do ponto ao longo do controle para alterar o valor de *a* e observe o que acontece com o gráfico de *f*.

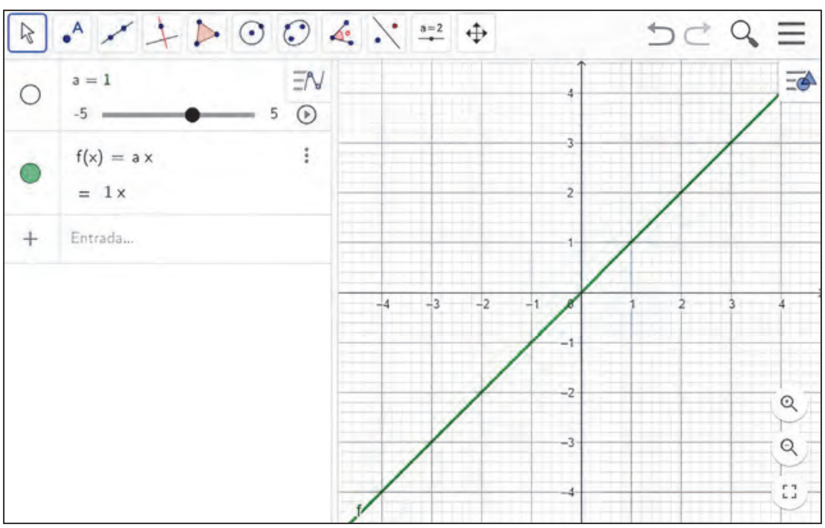


Gráfico de *f* quando $a = 1$.

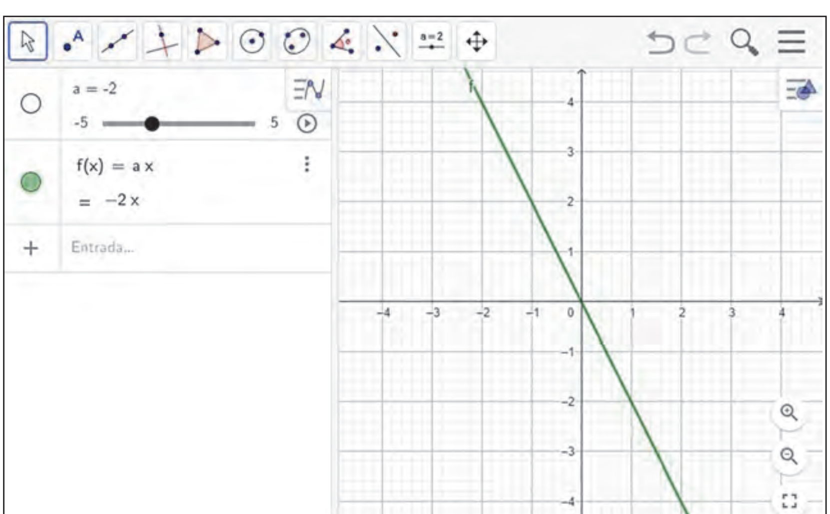
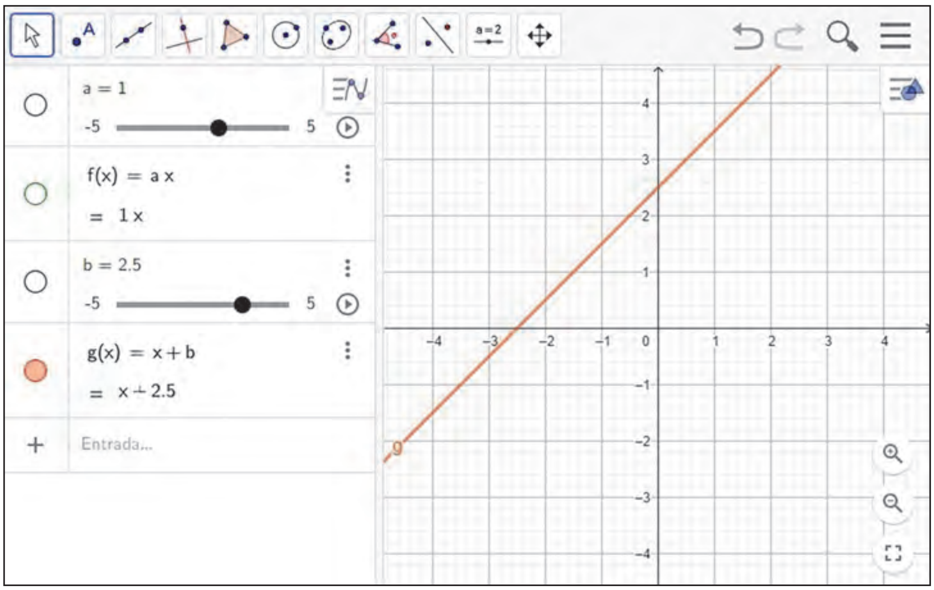


Gráfico de *f* quando $a = -2$.

IMAGENS: REPRODUÇÃO/GEOGEBRA

III. Por padrão, o controle deslizante é criado limitado ao intervalo $[-5, 5]$. Para alterá-lo, clique em cima do número -5 ou do 5. Com isso, o programa permitirá alterar esses números para os valores desejados.

Para analisar a influência do coeficiente *b*, digitamos "$g(x) = x + b$" no campo de entrada. Observe que um controle deslizante será criado também para o coeficiente *b*. Para facilitar a visualização da função *g*, oculte o gráfico da função *f*. Para isso, basta clicar no círculo colorido que aparece ao lado da lei de *f* na janela de Álgebra. Comentar com os estudantes que, ao digitar números decimais no campo de entrada do GeoGebra, deve-se utilizar ponto, em vez da vírgula. Por exemplo, para 2,5, deve-se digitar 2.5.



IMAGENS: REPRODUÇÃO/GEOGEBRA

■ Gráfico de *g* quando $b = 2{,}5$.

Agora, faça o que se pede nas atividades a seguir.

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Ver as **Orientações para o professor**.

1. Após ocultar a visualização do gráfico da função *g* e ativar novamente a visualização do gráfico da função *f*, deslize o controle para alterar o coeficiente *a* e observe as mudanças que ocorrem na reta. Descreva o que acontece com o gráfico.

2. Após ocultar a visualização do gráfico da função *f* e reativar a visualização do gráfico da função *g*, deslize o controle para alterar o coeficiente *b* e observe as mudanças no gráfico. O que acontece com a reta?

3. Até agora, analisamos cada coeficiente separadamente. Nesta atividade, vamos analisar os coeficientes *a* e *b* juntos em uma mesma função. Para facilitar, exclua as funções *f* e *g* clicando em cada reta e, em seguida, pressionando a tecla ***Delete*** do teclado. Observe que os controles deslizantes de *a* e *b* não serão excluídos. Após isso, digite "$h(x) = ax + b$" no campo de entrada. Movimente os controles e verifique a influência dos coeficientes juntos em uma única função. Considerando $a = -3$ e $b = 6$, em que ponto o gráfico da função *h* intersecta o eixo *x*?

DICA: Você pode usar a ferramenta **Interseção de Dois Objetos**, , para determinar o ponto solicitado.

Crescimento e decrescimento da função afim

Estudar o comportamento de uma função à medida que os valores do domínio aumentam ou diminuem nos permite verificar se essa função é crescente ou decrescente em um intervalo do seu domínio.

Uma função f é **crescente** em um intervalo $[a, b]$ de seu domínio $D(f)$ quando, para quaisquer valores de x_1 e x_2 desse intervalo, com $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) < f(x_2)$.

Uma função f é **decrescente** em um intervalo $[a, b]$ de seu domínio $D(f)$ quando, para quaisquer valores de x_1 e x_2 desse intervalo, com $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) > f(x_2)$.

No caso da função afim, temos as seguintes propriedades.

- **Propriedade 1**: A função afim é crescente se, e somente se, a taxa de variação for positiva.

  Demonstração

  Se $f(x) = ax + b$ é crescente, então, para quaisquer valores x_1 e x_2 do domínio de f, temos que:

  $x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) > f(x_1) \Leftrightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0 \Leftrightarrow ax_2 + b - (ax_1 + b) > 0 \Leftrightarrow ax_2 + b - ax_1 - b > 0 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow a(x_2 - x_1) > 0 \Leftrightarrow a > 0$

- **Propriedade 2**: A função afim é decrescente se, e somente se, a taxa de variação for negativa.

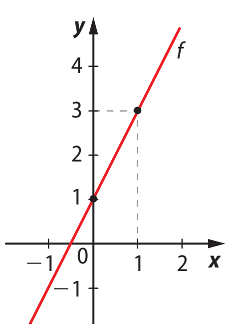
  Demonstração

  Se $f(x) = ax + b$ é decrescente, então, para quaisquer valores x_1 e x_2 do domínio de f, temos que:

  $x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) < f(x_1) \Leftrightarrow f(x_2) - f(x_1) < 0 \Leftrightarrow ax_2 + b - (ax_1 + b) < 0 \Leftrightarrow ax_2 + b - ax_1 - b < 0 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow a(x_2 - x_1) < 0 \Leftrightarrow a < 0$

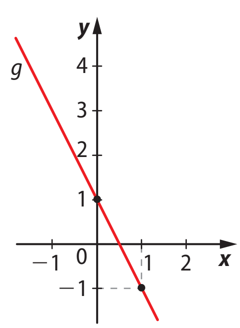
Observe os exemplos a seguir.

a) $f(x) = 2x + 1$ $(a > 0)$



- Aumentando os valores atribuídos a x, aumentam também os valores correspondentes da imagem $f(x)$. Assim, a função f é **crescente** em todo o seu domínio.

b) $g(x) = -2x + 1$ $(a < 0)$



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

- Aumentando os valores atribuídos a x, diminuem os valores correspondentes da imagem $g(x)$. Assim, a função g é **decrescente** em todo o seu domínio.

De modo geral, para uma função afim definida por $f(x) = ax + b$, temos:

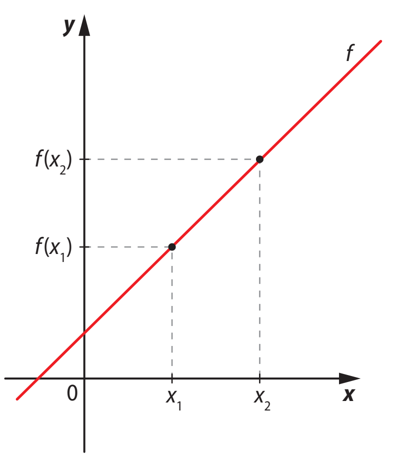
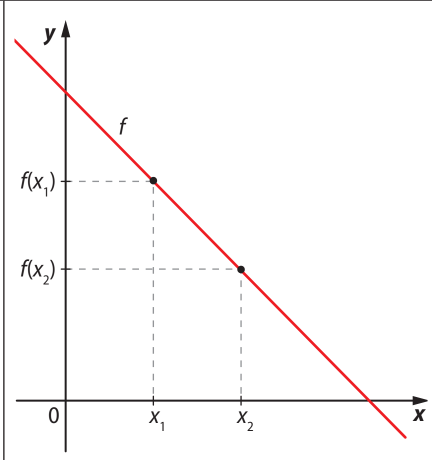
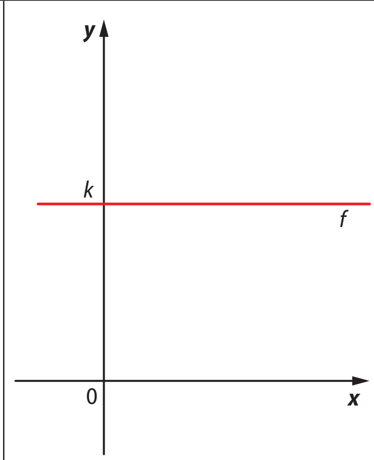
- se $a > 0$, então a função f é crescente;
- se $a < 0$, então a função f é decrescente;
- se $a = 0$, então a função f é constante.

Podemos também identificar se uma função afim é crescente ou decrescente observando a inclinação da reta que constitui o gráfico da função.

Pense e responda

Das situações que você já estudou neste Capítulo, identifique uma na qual a função afim correspondente é decrescente. Que relação podemos fazer entre a taxa de variação da função afim e o fato de ela ser decrescente?

Resposta pessoal. Resposta possível: A situação do vazamento de água, apresentada na página **113**. A função $q(t) = -8t + 1\,000$ é decrescente, pois $a = -8$, ou seja, sua taxa de variação é negativa.

$a > 0$	$a < 0$	$a = 0$
		
• O gráfico de uma função afim crescente é uma reta **ascendente**. • f é **crescente** se, e somente se: $\forall x_1, x_2 \in D(f), x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$	• O gráfico de uma função afim decrescente é uma reta **descendente**. • f é **decrescente** se, e somente se: $\forall x_1, x_2 \in D(f), x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$	• O gráfico de uma função constante é uma reta paralela ao eixo x. • f é **constante** se, e somente se: $\forall x \in D(f), f(x) = k$, para algum $k \in \mathbb{R}$

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Estudo do sinal da função afim

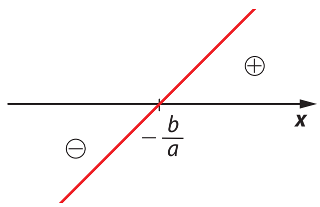
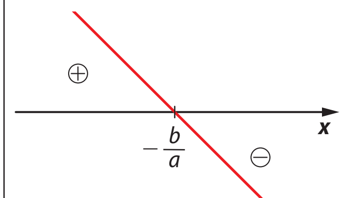
Para estudar o sinal de uma função, verificamos os elementos do seu domínio para os quais a imagem da função é um valor positivo, um valor negativo ou um valor nulo.

Considerando uma função f, de domínio $D(f)$, temos que:

- f é **positiva** para os valores de $x \in D(f)$ em que $f(x) > 0$;
- f é **negativa** para os valores de $x \in D(f)$ em que $f(x) < 0$;
- f é **nula** para os valores de $x \in D(f)$ em que $f(x) = 0$ (zeros da função).

Para estudar o sinal de uma função afim dada por $f(x) = ax + b$, considerando $a \neq 0$, podemos inicialmente determinar o zero da função, que genericamente pode ser escrito como $x = -\dfrac{b}{a}$.

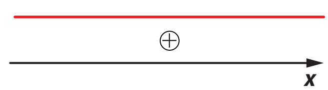
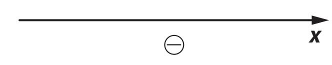
Em seguida, desenhamos um esboço do gráfico da função afim, levando em consideração o fato de ela ser crescente ($a > 0$) ou decrescente ($a < 0$). Por fim, analisamos esse esboço, como indicado a seguir.

$a > 0$	$a < 0$
 $f(x) = 0$ para $x = -\frac{b}{a}$ $f(x) > 0$ para $x > -\frac{b}{a}$ $f(x) < 0$ para $x < -\frac{b}{a}$	 $f(x) = 0$ para $x = -\frac{b}{a}$ $f(x) > 0$ para $x < -\frac{b}{a}$ $f(x) < 0$ para $x > -\frac{b}{a}$

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Observações:

- Se $a = 0$ e $b \neq 0$, a função afim é a função constante dada por $f(x) = b$. Nesse caso, temos:

$b > 0$	$b < 0$
 $f(x) > 0$ para todo $x \in D(f)$	 $f(x) < 0$ para todo $x \in D(f)$

- Se $a = 0$ e $b = 0$, a função afim é a função nula dada por $f(x) = 0$. Portanto, a função é nula para todos os valores de x do domínio.

Inequações polinomiais do 1º grau

Denominamos **inequação do 1º grau** na incógnita x toda desigualdade que pode ser escrita em uma das formas a seguir, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

- $ax + b \geqslant 0$
- $ax + b > 0$
- $ax + b \leqslant 0$
- $ax + b < 0$

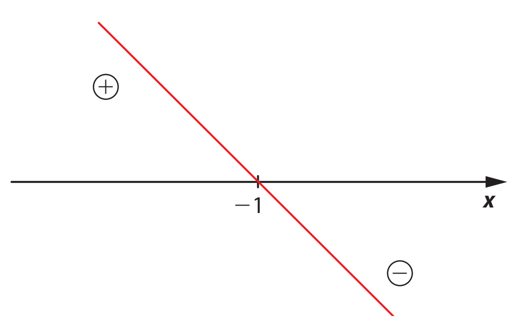
Solucionar uma inequação polinomial do 1º grau é estudar o sinal de uma função afim, por exemplo, resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $-x - 1 \geqslant 0$ é determinar para quais valores $x \in D(f)$ a função $f(x) = -x - 1$ assume valores positivos ou nulo, ou seja, quando $f(x) \geqslant 0$. Seguindo os procedimentos de estudo do sinal da função afim, fazemos:

1) Determinamos o zero da função.

$$-x - 1 = 0 \Rightarrow -x = 1 \Rightarrow x = -1$$

2) Esboçamos parcialmente o gráfico de f que é decrescente ($a < 0$).

Pelo gráfico, identificamos que $f(x) \geqslant 0$ quando $x \leqslant -1$. Logo, o conjunto solução da inequação é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1\}$.



ATIVIDADES RESOLVIDAS

12. Estude o sinal da função afim f definida por $f(x) = 2x - 4$.

Resolução

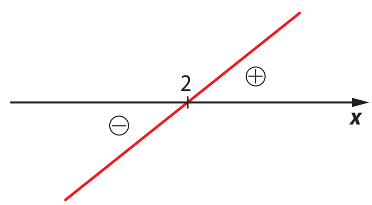
Essa função é crescente, pois $a > 0$.

O zero da função afim f é dado por:

$2x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{2} = 2$

Logo, a reta intersecta o eixo x no ponto de abscissa $x = 2$.

Esboçando o gráfico, temos:



Analisando o esboço do gráfico, concluímos que:

$f(x) = 0$ para $x = 2$;

$f(x) > 0$ para $x > 2$;

$f(x) < 0$ para $x < 2$.

13. O faturamento líquido relativo de certo produto, em reais, é calculado por $f(x) = 4x - 1000$. Nessa lei, $f(x)$ representa o faturamento líquido de x unidades vendidas. Determine a quantidade mínima de unidades que devem ser vendidas para que haja lucro nessa indústria.

Resolução

Determinar a quantidade mínima de unidades vendidas para que a indústria tenha lucro é determinar o valor mínimo de x para que se tenha $f(x) > 0$.

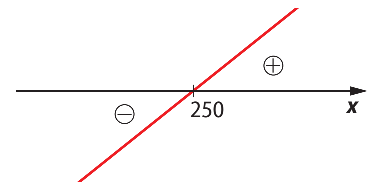
Observe que o domínio de $f(x)$ é o conjunto $\mathbb{N}$, pois x representa o número de unidades vendidas. Assim, o gráfico de f é formado por pontos alinhados, mas, como faremos apenas um esboço desse gráfico, traçaremos uma reta como se o domínio fosse o conjunto $\mathbb{R}$.

Essa função é crescente, pois $a > 0$.

Determinamos o zero da função:

$4x - 1000 = 0 \Rightarrow 4x = 1000 \Rightarrow x = 250$

Esboço do gráfico:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Analisando o esboço feito, temos:

$f(x) = 0$ para $x = 250$ (lucro zero);

$f(x) > 0$ para $\{x \in \mathbb{N} \mid x > 250\}$ (lucro);

$f(x) < 0$ para $\{x \in \mathbb{N} \mid x < 250\}$ (prejuízo).

Portanto, para haver lucro, é necessário vender pelo menos 251 unidades desse produto.

14. Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação $4x - 1 + 2(1 - 3x) \leqslant 0$.

Resolução

Primeiro, manipulamos algebricamente a inequação para deixá-la na forma $ax + b \leqslant 0$.

$4x - 1 + 2(1 - 3x) \leqslant 0$

$4x - 1 + 2 - 6x \leqslant 0$

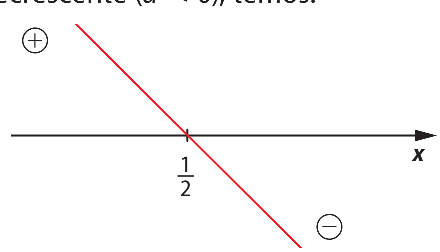
$-2x + 1 \leqslant 0$

Resolver a inequação $-2x + 1 \leqslant 0$ é estudar o sinal da função $f(x) = -2x + 1$ e determinar para quais valores $x \in D(f)$ temos $f(x) \leqslant 0$.

O zero dessa função é:

$-2x + 1 = 0 \Rightarrow -2x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

Esboçando parcialmente o gráfico de f, que é decrescente ($a < 0$), temos:



Pelo gráfico, identificamos que $f(x) \leqslant 0$ quando $x \geqslant \frac{1}{2}$. Portanto, o conjunto solução da inequação é $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{1}{2}\right\}$.

15. Paula vai estacionar seu carro e estava analisando os preços de dois estacionamentos.

- Estacionamento **A**: R\$ 10,00 fixos mais R\$ 4,00 por hora com o carro estacionado.
- Estacionamento **B**: R\$ 16,00 fixos mais R\$ 2,00 por hora com o carro estacionado.

Sabendo que a previsão é de que o carro fique estacionado durante 5 horas, qual é a opção mais vantajosa para Paula?

Resolução

Podemos escrever a lei que representa o valor cobrado pelo estacionamento, em reais, em função do tempo x, em hora, em cada caso e calcular o valor da função quando $x = 5$.

Estacionamento **A**

$f(x) = 10 + 4x$

$f(5) = 10 + 4 \cdot 5 = 30$

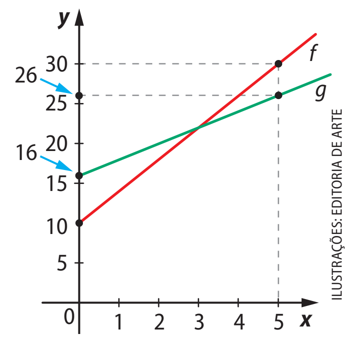
Estacionamento **B**

$g(x) = 16 + 2x$

$g(5) = 16 + 2 \cdot 5 = 26$

Nessas condições, a opção mais vantajosa para Paula é o estacionamento **B**.

Podemos representar essas duas funções em um mesmo sistema cartesiano e interpretá-las geometricamente, conforme apresentado a seguir.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Também é possível determinar o valor de x para o qual $f(x) = g(x)$:

$10 + 4x = 16 + 2x \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$

Nesse caso, se o carro ficar estacionado durante 3 horas, o valor pago será o mesmo em ambos os estacionamentos.

Se $x < 3$, $f(x) < g(x)$, portanto o estacionamento **A** é mais vantajoso.

Se $x > 3$, $g(x) < f(x)$, portanto o estacionamento **B** é mais vantajoso.

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

38. Identifique como crescente, decrescente ou constante cada função afim definida a seguir.

a) $y = \frac{2}{5}x + 1$ crescente

b) $y = -2x + 3$ decrescente

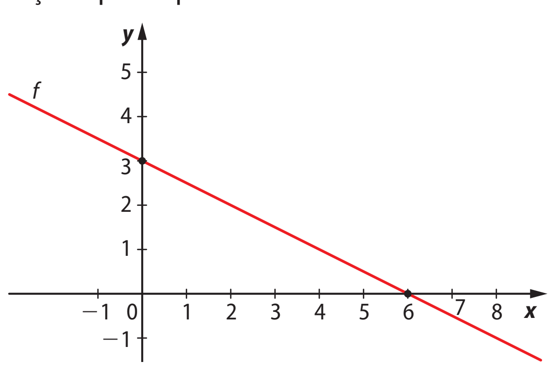
c) $f(x) = \sqrt{2}$ constante

d) $f(x) = 3{,}5 - 0{,}4x$ decrescente

e) $y = -5x$ decrescente

f) $f(x) = -6$ constante

39. Observe o gráfico da função afim a seguir e faça o que se pede.



a) A função representada é crescente, decrescente ou constante? Justifique sua resposta. A função é decrescente, pois a reta é descendente.

b) Determine a lei dessa função. $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$

c) Estude o sinal dessa função. $f(x) > 0$ para $x < 6$; $f(x) < 0$ para $x > 6$; $f(x) = 0$ para $x = 6$

40. Seja f uma função real de variável real definida por $f(x) = x(3 - x) + (x - 1)^2$.

a) Mostre que f é uma função afim. Ver as **Orientações para o professor**.

b) Determine o zero da função f. $x = -1$

c) Determine x de modo que $f(x) > 0$. $x > -1$

41. Estude o sinal de cada função a seguir. Ver as **Orientações para o professor**.

a) $f(x) = x + 5$

b) $y = -3x + 9$

c) $y = \frac{x}{3} - 1$

d) $f(x) = 2 - \frac{x}{2}$

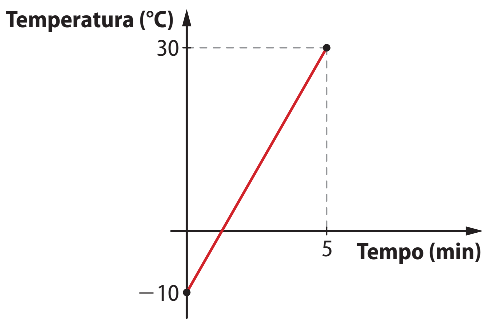
42. Uma função afim f é tal que seu gráfico intersecta o eixo x no valor de abscissa -3 e passa pelo ponto (1, 2). A partir dessas informações, faça o que se pede. **42. b)** $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$

a) Esboce o gráfico dessa função. Ver as **Orientações para o professor**.

b) Determine a lei de formação da função f.

c) Estude o sinal dessa função. $f(x) > 0$ para $x > -3$; $f(x) < 0$ para $x < -3$; $f(x) = 0$ para $x = -3$

43. Uma barra de metal com temperatura inicial de −10 °C foi aquecida até 30 °C. O gráfico a seguir representa a temperatura da barra em função do tempo.



a) Quanto tempo após o início da experiência a temperatura atingiu 0 °C? 1min15s

b) Em qual intervalo de tempo a temperatura da barra ficou positiva? E negativa?
positiva: $1{,}25 < t \leqslant 5$; negativa: $0 \leqslant t < 1{,}25$

44. (Vunesp-SP) Uma pessoa obesa, pesando num certo momento 156 kg, recolhe-se a um *spa* onde se anunciam perdas de peso de até 2,5 kg por semana. Suponhamos que isso realmente ocorra. Nessas condições:

a) Encontre uma fórmula que expresse o peso mínimo, P, que essa pessoa poderá atingir após n semanas. $P = 156 - 2{,}5n$

b) Calcule o número mínimo de semanas completas que a pessoa deverá permanecer no *spa* para sair de lá com menos de 120 kg de peso. 15 semanas

45. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações a seguir.

a) $5x - 2(x + 2) \geqslant 1 - (3 - 4x)$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2\}$

b) $\dfrac{3(x+1)}{2} - \dfrac{x-1}{4} \leqslant \dfrac{1}{2}$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1\}$

46. Quais são os valores de x, no conjunto dos números naturais, que satisfazem à inequação $7x - 8 < 4x + 1$? $S = \{0, 1, 2\}$

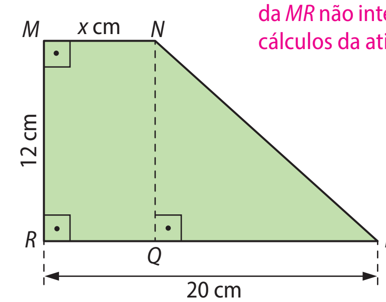
47. As medidas do comprimento e da largura de um retângulo são 10 cm e x cm, respectivamente. Calcule x para que:

a) a área do retângulo seja maior do que 50 cm²; $x > 5$

b) o perímetro do retângulo não seja menor do que 32 cm. $x \geqslant 6$

48. Observe a figura e, sabendo que $MNPR$ é um trapézio retângulo, responda às questões a seguir.

48. b) Sim, pois a medida da MR não interfere nos cálculos da atividade.

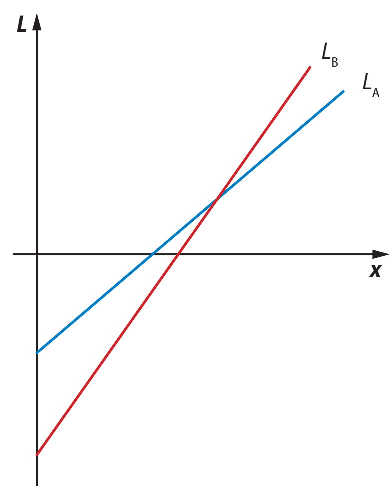


ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

a) Determine o maior valor inteiro de x de modo que a área do trapézio seja maior do que o dobro da área do retângulo $MNQR$. 6

b) Caso a medida do lado $\overline{MR}$ não fosse fornecida, ainda assim seria possível resolver o problema? Justifique sua resposta.

49. (FGV-SP) A figura fornece os gráficos dos lucros anuais L_A e L_B de duas empresas (em milhares de reais) em função da quantidade anual produzida e vendida (x).



As intersecções dos gráficos com os eixos são:

	L_A	L_B
eixo x	(50, 0)	(60, 0)
eixo y	(0, −500)	(0, −1000)

a) Obtenha L_A em função de x.
$L_A(x) = 10x - 500$, para $x \geqslant 0$

b) Para que valores de x o lucro L_B é superior ao L_A? $x > 75$

Transporte público sustentável

O setor de transportes no Brasil é responsável por uma parcela considerável das emissões dos gases de efeito estufa (GEE). Uma das iniciativas para a redução dessa parcela é a substituição de veículos a combustão por veículos elétricos, os quais têm, como principais vantagens, a não emissão de GEE e o baixo custo para carregamento e manutenção. Em contrapartida, o custo de aquisição, comparado ao de veículos a combustão, é bem maior.

Uma possibilidade que vem sendo fomentada pelo governo é a substituição da frota de ônibus a combustão por ônibus elétricos no transporte público para mobilidade urbana. No texto a seguir, são apresentadas algumas informações sobre o assunto.

[...]

A eletrificação do transporte público por ônibus é um dos grandes desafios do setor no país, principalmente para a mobilidade urbana coletiva. [...]

No Brasil, o transporte é responsável por 40% a 60% das emissões de gases de efeito estufa nas cidades, e tem potencial para diminuir em torno de 45% do total dessas emissões até 2050, de acordo com estudo da *Coalition for Urban Transitions*. A eletrificação das frotas, especialmente do sistema de transporte público coletivo, é apontada por especialistas em mobilidade como medida mais efetiva nesse sentido, com impacto positivo direto na saúde pública, mas também em outros, como uma melhor experiência dos usuários.

Sob o Acordo de Paris, o Brasil enfrenta o grande desafio de reduzir suas emissões de gases de efeito estufa em 43% nos próximos oito anos. Uma das medidas necessárias para atingir esse objetivo é a eletrificação do transporte público, que também pode gerar benefícios sociais de R$ 290 bilhões, segundo estudo que avalia cenários para a eletrificação de ônibus no Brasil. O relatório foi desenvolvido pela Plataforma Nacional de Mobilidade Elétrica (PNME) [...].

[...] O relatório do PNME sugere que, a longo prazo, os veículos movidos a energia elétrica irão substituir totalmente a frota de veículos movidos a *diesel*. Esta mudança irá refletir-se na redução das emissões de carbono na atmosfera, afetando também a qualidade de vida dos cidadãos por meio da melhoria da qualidade do ar.

No entanto, a Avaliação Prospectiva da Eletrificação dos Ônibus no Brasil orienta algumas mudanças para incentivar o uso de veículos elétricos.

MARCELO.MG.PHOTOS/SHUTTERSTOCK

Ônibus elétrico na cidade de São Paulo (SP). Fotografia de 2021. Essa capital é o município com a maior frota de ônibus elétricos do Brasil.

1. Espera-se que os estudantes respondam que se trata de uma medida que impacta drasticamente a redução da emissão de carbono e poluentes locais, trazendo consequências positivas ao combate às mudanças climáticas e benefícios significativos para a saúde da população. Além disso, o Brasil deve cumprir o Acordo de Paris e o relatório do Fórum Brasileiro de Mudanças Climáticas "*Zero Carbon Brazil* 2060".

2. Resposta pessoal. Os estudantes podem pesquisar informações em *sites* confiáveis, como o do Ministério do Meio Ambiente (disponível em: https://www.gov.br/mma/pt-br; acesso em: 11 jul. 2024) e o da Agência Brasil (disponível em: https://agenciabrasil.ebc.com.br; acesso em: 11 jul. 2024). Os estudantes podem apresentar informações a respeito de outras medidas, além da eletrificação do transporte, relacionadas com a redução das emissões de GEE que estão sendo ou serão adotadas pelo Brasil para atingir a meta do acordo.

No Brasil, essas políticas focaram na redução dos custos de aquisição de veículos, com pouco investimento em infraestrutura. Por exemplo, disponibilizar pontos de carregamento para veículos elétricos é um dos principais obstáculos à eletrificação dos transportes públicos. [...]

[...]

[...] O Brasil precisa tornar-se um país livre de carbono até 2060, e a eletrificação do transporte público contribuirá para essa transição energética, garantindo o cumprimento do Acordo de Paris e do relatório do Fórum Brasileiro de Mudanças Climáticas "*Zero Carbon Brazil* 2060". [...]

SERVIÇO BRASILEIRO DE APOIO ÀS MICRO E PEQUENAS EMPRESAS. **Eletrificação do setor de transporte**: futuro das cidades sustentáveis. [*S. l.*]: Sebrae, 11 fev. 2023. Disponível em: https://sebrae.com.br/sites/PortalSebrae/artigos/eletrificacao-do-setor-de-transporte-futuro-das-cidades-sustentaveis,15d4b542c5bb5810VgnVCM1000001b00320aRCRD. Acesso em: 11 jul. 2024.

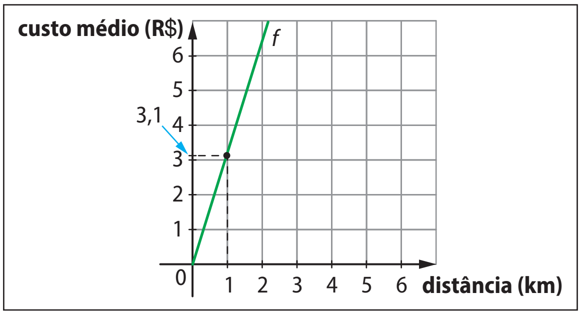
NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Agora, faça o que se pede.

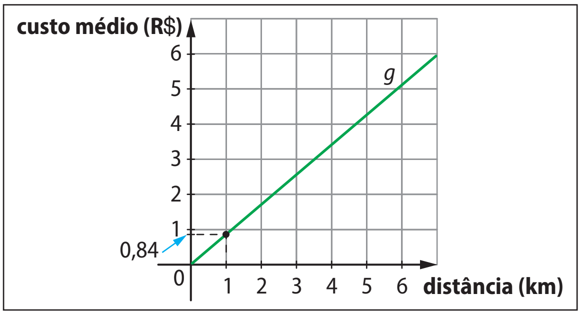
1. De acordo com o texto, por que a eletrificação do transporte público deve acontecer?

2. Pesquise e obtenha informações sobre o Acordo de Paris e o Brasil Carbono Zero em 2060 (*Zero Carbon Brazil* 2060). Em seguida, escreva um pequeno texto com as informações encontradas.

3. Os gráficos apresentam o custo médio de consumo de um ônibus a combustão (diesel) e de um ônibus elétrico (energia elétrica) em função da distância percorrida.



▪ Gráfico **1**: custo médio de consumo de um ônibus a combustão (diesel) em função da distância.



▪ Gráfico **2**: custo médio de consumo de um ônibus elétrico (energia elétrica) em função da distância.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Elaborados com base em: GONZAGA, Bernardo; BARROS, Rafaella. **Eletrificação de frotas de ônibus esbarra em custo bilionário**. [*S. l.*]: Poder 360, 30 maio 2022. Disponível em: https://www.poder360.com.br/economia/eletrificacao-de-frotas-de-onibus-esbarra-em-custo-bilionario. Acesso em: 11 jul. 2024.

a) Qual é o custo médio de consumo por kilometro percorrido de um ônibus a combustão e de um ônibus elétrico? ônibus a combustão: R$ 3,10; ônibus elétrico: R$ 0,84

b) Escreva as leis de formação das funções apresentadas nos gráficos. Em seguida, calcule o custo médio de consumo para cada tipo de ônibus apresentado percorrer 5 mil kilometros.
gráfico **1**: $f(x) = 3{,}1x$; R$ 15.500,00 gráfico **2**: $g(x) = 0{,}84x$; R$ 4.200,00

c) Considerando uma distância x percorrida, calcule a razão aproximada entre o custo médio dado pela função do gráfico **1** e o custo médio dado pela função do gráfico **2**. Explique o que essa razão significa. Resposta possível: Aproximadamente 3,69. Significa que o custo médio para um veículo a combustão percorrer determinada distância é de 3,69 vezes o de um veículo elétrico.

4. Junte-se a dois colegas, e pesquisem características dos veículos a combustão e dos veículos elétricos e, em seguida, confeccionem um cartaz comparativo entre eles. Essas informações podem estar relacionadas ao consumo, à potência, à eficiência, à manutenção, à emissão de gás carbônico, entre outras características.

Resposta pessoal. Cada grupo deve confeccionar um cartaz comparando os veículos a combustão e os elétricos. Algumas vantagens dos veículos elétricos em relação aos de combustão estão relacionadas a maior potência e eficiência, menor manutenção, não emissão de gás carbônico e maior economia para abastecimento. Entre as desvantagens estão o custo de aquisição, a demora para carregar e o acesso a fontes de abastecimento.

O surgimento dos gráficos

Leia o texto a seguir para conhecer um pouco mais sobre o uso dos gráficos em Matemática e em outras áreas de conhecimento, bem como sobre os primeiros estudiosos a usar esse tipo de representação em seus trabalhos e a repercussão disso ao longo da história.

Na matemática são utilizados gráficos para visualizar funções. Em outros campos, como o da biologia e da economia, os gráficos são utilizados principalmente para a apresentação de dados. Normalmente, as curvas matemáticas são representadas em um conjunto de dois eixos perpendiculares, denominados x e y, em duas dimensões. Todo ponto do plano pode ser identificado a partir de um “par ordenado” (x, y) que especifica sua distância aos eixos y e x. O mesmo conceito é utilizado para apresentar uma informação em três dimensões, acrescentando um terceiro eixo que se denomina convencionalmente z.

Esse sistema recebe o nome de coordenadas cartesianas em homenagem ao seu inventor, o matemático e filósofo francês René Descartes. Seu contemporâneo, Pierre de Fermat, desenvolveu ao mesmo tempo ideias semelhantes. Entretanto, seria mais lógico conceder o crédito da invenção a Nicole d’Oresme, quem, três séculos antes, utilizou eixos horizontais e verticais para demonstrar graficamente uma lei relativa à distância percorrida por dois objetos que se moviam em velocidades diferentes.

O descobrimento de Descartes do potencial de gráficos foi fundamental para o desenvolvimento da história da matemática, já que relacionou números a figuras geométricas. O que tornou possível representar figuras por meio de equações, unindo a álgebra à geometria para criar o campo da geometria analítica.

BROWN, Richard. **50 teorías matemáticas**: creadoras e imaginativas. Barcelona: Blume, 2012. p. 108. Tradução nossa.

BIBLIOTECA NACIONAL, PARIS, FRANÇA

[NICOLE Oresme em seus estudos]. *In*.: ORESME, Nicole. **Traité de l'esphère**. Paris: [*s. n.*], c.1400-c.1420. p. 1. Nicole d'Oresme (c. 1320-1382) foi um intelectual que viveu no século XIV e atuou em áreas do conhecimento como Filosofia, Matemática, Astronomia, Ciências Físicas e Naturais.

Para assistir

- PLANO cartesiano na arquitetura. [*S. l.*: *s. n.*], 2014. 1 vídeo (4 min). Publicado pelo canal Nova Escola. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=NISEGI7wY6A. Acesso em: 11 jul. 2024.
  Assista ao vídeo para conhecer um pouco mais a respeito do plano cartesiano e de seu uso na Arquitetura.

ATIVIDADES COMPLEMENTARES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

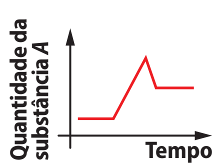
1. (UECE) Um equipamento eletrônico utilizado por uma indústria tem seu valor monetário continuamente reduzido em função do uso e do surgimento de novas tecnologias, dentre outros fatores. Se o valor monetário do equipamento decresce linearmente com o tempo, sabendo-se que foi adquirido há três anos pelo valor de R$ 180.000,00 e que hoje está avaliado em R$ 135.000,00, é correto afirmar que o valor monetário do equipamento daqui a dois anos será alternativa **a**

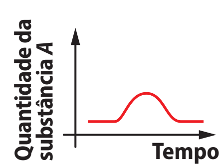
a) R$ 105.000,00.
b) R$ 115.000,00.
c) R$ 108.000,00.
d) R$ 112.000,00.

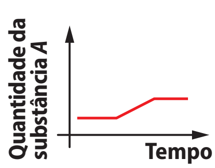
Uma função real de variável real decresce linearmente se é do tipo $f(x) = ax + b$, com a e b números reais constantes e $a < 0$.

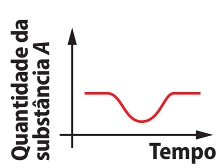
2. (Enem/MEC) Muitas vezes o objetivo de um remédio é aumentar a quantidade de uma ou mais substâncias já existentes no corpo do indivíduo para melhorar as defesas do organismo. Depois de alcançar o objetivo, essa quantidade deve voltar ao normal.

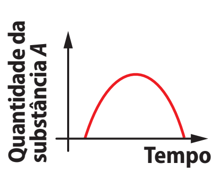
Se uma determinada pessoa ingere um medicamento para aumentar a concentração da substância *A* em seu organismo, a quantidade dessa substância no organismo da pessoa, em relação ao tempo, pode ser mais bem representada no gráfico: alternativa **d**

a)


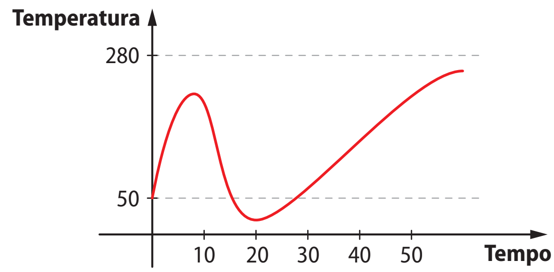
d)


b)


e)


c)


3. (FEI-SP) Durante o tratamento térmico de uma peça metálica, sua temperatura varia de acordo com o gráfico abaixo.

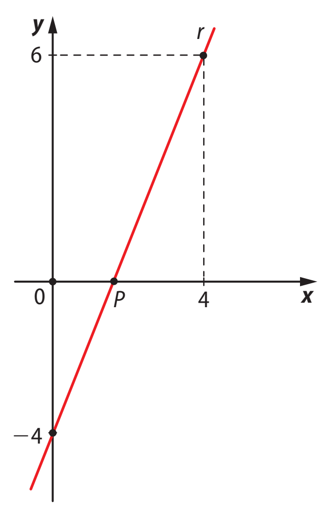


ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

É válido afirmar: alternativa **c**

a) a partir do instante $t = 10$, as temperaturas são crescentes.
b) a partir do instante $t = 5$, as temperaturas são decrescentes.
c) a partir do instante $t = 20$, as temperaturas são crescentes.
d) todas as temperaturas observadas são maiores do que 50.
e) há um determinado valor de temperatura que foi observado em 5 instantes diferentes.

4. (UEA-AM) A reta *r* passa pelos pontos (4, 6) e (0, −4) e intersecta o eixo das abscissas no ponto *P*, conforme mostra a figura.



O valor da abscissa do ponto *P* é alternativa **d**

a) 2
b) $\frac{5}{2}$
c) $\frac{3}{8}$
d) $\frac{8}{5}$
e) $\frac{3}{2}$

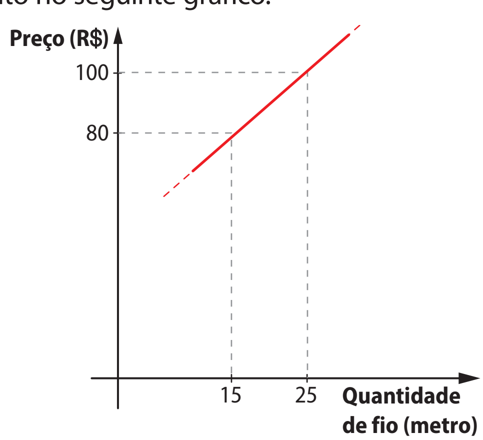
5. (Enem/MEC)

VENDEDORES JOVENS
Fábrica de LONAS
Vendas no Atacado
10 vagas para estudantes,
18 a 20 anos, sem experiência.
Salário: R$ 300,00 fixo + comissão
de R$ 0,50 por m² vendido.
Contato: 0xx97 – 43421167 ou
atacadista@lonaboa.com.br

Na seleção para as vagas deste anúncio, feita por telefone ou correio eletrônico, propunha-se aos candidatos uma questão a ser resolvida na hora.
Deveriam calcular seu salário no primeiro mês, se vendessem 500 m de tecido com largura de 1,40 m, e no segundo mês, se vendessem o dobro.
Foram bem-sucedidos os jovens que responderam, respectivamente, alternativa **c**

a) R$ 300,00 e R$ 500,00.
b) R$ 550,00 e R$ 850,00.
c) R$ 650,00 e R$ 1000,00.
d) R$ 650,00 e R$ 1300,00.
e) R$ 950,00 e R$ 1900,00.

6. (Epcar-MG) Para fazer uma instalação elétrica em sua residência, Otávio contatou dois eletricistas.
O Sr. Luiz, que cobra uma parte fixa pelo orçamento mais uma parte que depende da quantidade de metros de fio requerida pelo serviço. O valor total do seu serviço está descrito no seguinte gráfico:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Já o Sr. José cobra, apenas, R$ 4,50 por metro de fio utilizado e não cobra a parte fixa pelo orçamento.

Com relação às informações acima, é correto afirmar que: alternativa **d**

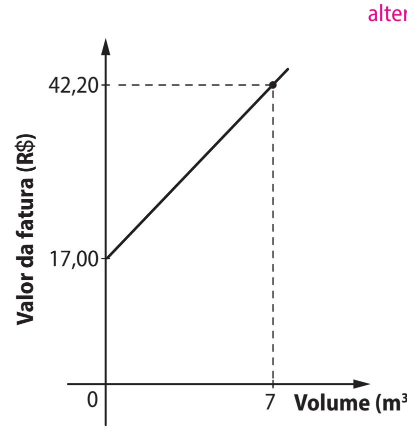
a) o valor da parte fixa cobrada pelo Sr. Luiz é maior do que R$ 60,00.
b) o Sr. Luiz cobra mais de R$ 2,50 por metro de fio instalado.
c) sempre será mais vantajoso contratar o serviço do Sr. José.
d) se forem gastos 20 m de fio não haverá diferença de valor total cobrado entre os eletricistas.

7. (UFPI) A função real de variável real, definida por $f(x) = (3 - 2a) \cdot x + 2$, é crescente quando:

a) $a > 0$.
b) $a < \frac{3}{2}$.
c) $a = \frac{3}{2}$.
d) $a > \frac{3}{2}$.
e) $a < 3$.

alternativa **b**

8. (Enem/MEC) Uma fatura mensal de água é composta por uma taxa fixa, independentemente do gasto, mais uma parte relativa ao consumo de água, em metro cúbico. O gráfico relaciona o valor da fatura com o volume de água gasto em uma residência no mês de novembro, representando uma semirreta.
alternativa **a**



Observa-se que, nesse mês, houve um consumo de 7 m³ de água. Sabe-se que, em dezembro, o consumo de água nessa residência, em metro cúbico, dobrou em relação ao mês anterior.

O valor da fatura referente ao consumo no mês de dezembro nessa residência foi

a) superior a R$ 65,00 e inferior a R$ 70,00.
b) superior a R$ 80,00 e inferior a R$ 85,00.
c) superior a R$ 90,00 e inferior a R$ 95,00.
d) superior a R$ 95,00.
e) inferior a R$ 55,00.

9. (IFPE) Os volumes de água *V*, medidos em litros, em dois reservatórios *A* e *B*, variam em função do tempo *t*, medido em minutos, de acordo com as seguintes relações:

$V_A(t) = 200 + 3t$ e $V_B(t) = 5\,000 - 3t$

Determine o instante *t* em que os reservatórios estarão com o mesmo volume. alternativa **d**

a) $t = 500$ minutos.
b) $t = 600$ minutos.
c) $t = 700$ minutos.
d) $t = 800$ minutos.
e) $t = 900$ minutos.

10. (UEA-AM) Considere as funções polinomiais do 1º grau $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = -x + 6$. Sobre essas funções, afirma-se que alternativa **d**

a) possuem pontos de máximo.
b) são crescentes.
c) possuem domínios diferentes.
d) têm o ponto (1, 5) em comum.
e) suas representações gráficas não se intersectam.

PARA REFLETIR

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Neste Capítulo, estudamos que, em algumas situações do dia a dia, o comportamento de uma grandeza depende do comportamento de outra. Estudamos também como podemos utilizar a ideia de função e o conceito de função afim para representar e analisar essas relações entre grandezas e entre conjuntos. Isso nos permite construir modelos que podem ser utilizados para fazer estimativas e possibilitar algumas tomadas de decisão de forma mais consciente.

Estudamos o conceito de função, bem como o domínio, o contradomínio e a imagem de funções, e aprendemos sobre função afim, representações gráficas, taxa de variação da função afim, zero da função, crescimento e decrescimento de funções, estudo de sinais da função afim e inequação do 1º grau.

Vamos refletir a respeito das aprendizagens do Capítulo **3**: Respostas pessoais.

- Nas páginas de abertura, foi apresentada uma situação que pode ser modelada por uma função afim. Depois de ter estudado o conteúdo deste Capítulo, você consegue reconhecer que esses conceitos podem auxiliá-lo a compreender e a analisar a situação apresentada na abertura? Você já tinha essa percepção antes de estudar esses conceitos?
- Você já conhecia algum dos conteúdos apresentados ao longo deste Capítulo? Qual(is)?
- Cite outras situações do dia a dia que envolvem a ideia de função e de função afim.
- Explique, com suas palavras, qual é a relação existente entre função linear e grandezas diretamente proporcionais.
- Explique, com suas palavras, o que é a variação em situações envolvendo grandezas.
- Cite uma situação envolvendo a variação entre duas grandezas e diga qual delas representa a variável dependente e qual representa a variável independente.

CAPÍTULO 4

FUNÇÃO QUADRÁTICA

O *Toxotes jaculatrix*, também conhecido como "peixe-arqueiro", é uma espécie que habita as águas do oceano Índico e do Pacífico Sul. Sua habilidade notável de caça consiste em atirar jatos de água em insetos, aranhas e até mesmo pequenos pássaros que estejam próximos à superfície da água. Com uma precisão incrível, esse peixe é capaz de ajustar o ângulo e a força do jato de água, derrubando suas presas e garantindo sua refeição.

Como parte de sua técnica, o peixe-arqueiro cria um vácuo em sua boca e, em seguida, dispara um jato de água com sua língua em direção à presa. Essa habilidade de arremesso de água é uma adaptação surpreendente que torna o peixe dessa espécie um mestre na arte da caça, demonstrando a engenhosidade e a versatilidade das criaturas aquáticas em seu ambiente natural.

A trajetória do jato de água é semelhante a uma parte de uma curva conhecida como parábola, que pode ser representada matematicamente por uma função quadrática, assunto que será estudado neste Capítulo.

Elaborado com base em: OCEANÁRIO DE LISBOA. Peixe-arqueiro, um mestre da física. **Um oceano para ensinar**, Lisboa, n. 30, p. 1-6, jul. 2024. Disponível em: https://oceanario.pt/wp-content/uploads/2024/09/Um-Oceano-para-Ensinar_ed30-jul2024_Oceanario-de-Lisboa.pdf. Acesso em: 11 out. 2024.

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Agora, reúna-se a um colega, e, juntos, façam o que se pede em cada questão.

1. Como vocês acham que o ângulo de lançamento afeta a trajetória do jato de água lançado pelo peixe-arqueiro? Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes percebam que, quanto maior o ângulo de lançamento, maior a altura do jato de água. O ângulo ideal para maior alcance horizontal é 45°.

2. Em uma função que associa o instante *x*, em segundo, a uma altura *y*, em centímetro, que o jato de água atinge após o lançamento, qual é a variável dependente e qual é a independente? Como a altura em que o jato se encontra depende do instante após ser lançado, então *x* é a variável dependente e *y*, a variável independente.

3. Citem outras situações em que é possível observar uma curva semelhante à curva da trajetória do jato de água. Resposta pessoal. Os estudantes podem citar lançamentos de bola, arcos na estrutura de algumas pontes, saltos de um atleta olímpico, entre outros exemplos.

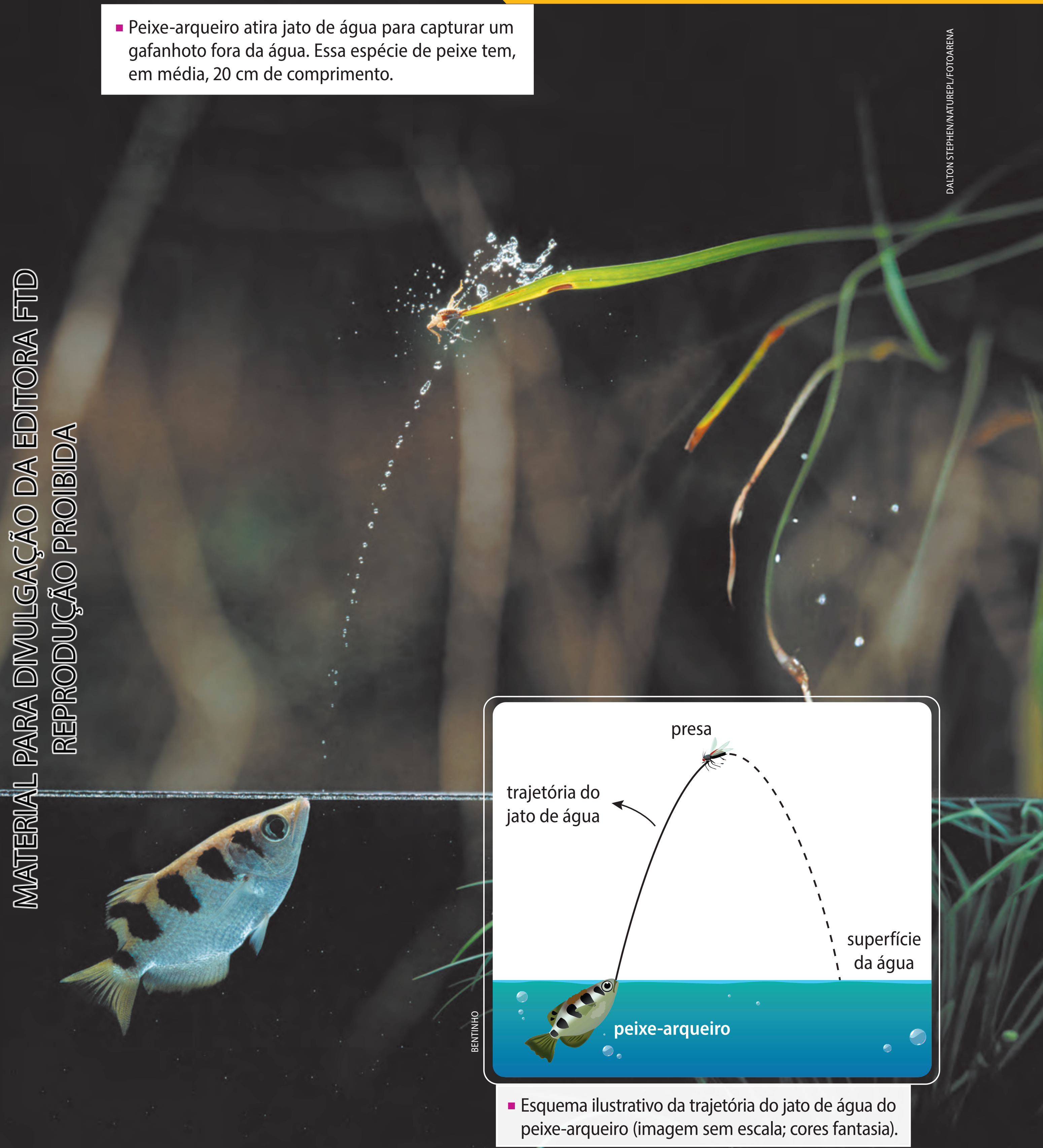
4. Resolvam as equações.

a) $x^2 = 25$ $S = \{-5, 5\}$

b) $x^2 - 4x = 0$ $S = \{0, 4\}$

c) $x^2 + 2x + 1 = 9$ $S = \{-4, 2\}$

- Peixe-arqueiro atira jato de água para capturar um gafanhoto fora da água. Essa espécie de peixe tem, em média, 20 cm de comprimento.



DALTON STEPHEN/NATUREPL/FOTOARENA

BENTINHO

- Esquema ilustrativo da trajetória do jato de água do peixe-arqueiro (imagem sem escala; cores fantasia).

Introdução

No Capítulo anterior, você estudou algumas ideias associadas aos conceitos de função e de função afim e aprendeu como esses conceitos matemáticos podem contribuir para a compreensão e a análise de situações do dia a dia. Neste Capítulo, ampliaremos esse estudo abordando as funções quadráticas.

Situações envolvendo trajetórias parabólicas, como lançamentos de projéteis, podem ser modeladas por meio de funções quadráticas, assim como certos tipos de movimentos estudados pela Física. Além disso, alguns objetos, como antenas parabólicas e faróis de veículos, são construídos utilizando-se propriedades da parábola, a curva que representa o gráfico de funções quadráticas. Na Arquitetura e na Engenharia, há muitos exemplos de construções que utilizam a curva da parábola.


VITORMARIGO/SHUTTERSTOCK.COM

A Igreja São Francisco de Assis da Pampulha, localizada na cidade de Belo Horizonte (MG), é uma obra famosa do arquiteto brasileiro Oscar Niemeyer (1907-2012) e possui abóbadas construídas sobre curvas parabólicas. Fotografia de 2023.

Função quadrática

A função quadrática também pode ser denominada função polinomial do 2º grau, pois as relações entre a variável dependente e a variável independente são expressas por polinômios do 2º grau.

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b, c reais e $a \neq 0$, é chamada de **função quadrática**.

Os números a, b e c são os **coeficientes** (ou parâmetros) da função, sendo a o coeficiente do termo x^2, b o coeficiente do termo x e c o coeficiente independente.

Pense e responda

Por que precisamos cumprir a condição $a \neq 0$ para definir a função quadrática?

Porque, para que um polinômio seja de 2º grau, é preciso que exista o termo em x^2. Caso tivéssemos $a = 0$, o termo ax^2 se anularia, e teríamos uma função definida por $f(x) = bx + c$, que é a lei de uma função afim.

Observe a seguir a lei de formação de algumas funções quadráticas.

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$, em que os coeficientes são: $a = 1$, $b = -3$ e $c = 2$.

b) $g(x) = 0{,}8x^2 - 1$, em que os coeficientes são: $a = 0{,}8$, $b = 0$ e $c = -1$.

c) $y = -x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x$, em que os coeficientes são: $a = -1$, $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $c = 0$.

d) $y = -5x^2$, em que os coeficientes são: $a = -5$, $b = 0$ e $c = 0$.

Não são leis de funções quadráticas:

- $h(x) = 7x$
- $y = x^4 + 2x^2$
- $y = 5x$

Agora, considere a situação a seguir.

Elisa possui uma loja que vende capas para celular. Estudando como maximizar os seus lucros, ela obteve uma função quadrática que modela o lucro diário L, em reais, da loja em relação ao preço pelo qual cada capa é vendida, também em reais. Essa função é dada pela lei $L(x) = -x^2 + 55x - 250$.

Saiba que...

A fórmula utilizada por Elisa considera certo preço de custo da capa e uma relação de dependência entre a quantidade de vendas e o preço de venda de cada capa.

Atribuir preços incorretos a um produto pode afetar a margem de lucro ou causar perda nas vendas, ocasionando prejuízo financeiro para o negócio.

HADRIAN/SHUTTERSTOCK.COM

Utilizando essa lei, Elisa calculou o lucro diário de sua loja supondo que cada capa fosse vendida a R$ 20,00. O cálculo que ela fez está representado a seguir.

$$L(20) = -(20)^2 + 55 \cdot 20 - 250$$

$$L(20) = -400 + 1\,100 - 250$$

$$L(20) = 450$$

Assim, Elisa verificou que vender cada capa a R$ 20,00 gera um lucro diário de R$ 450,00, considerando a função L.

Pense e responda

Com os dados apresentados na situação, é possível calcular quantas capas de celular a loja precisa vender diariamente para obter esse lucro de R$ 450,00? Justifique.

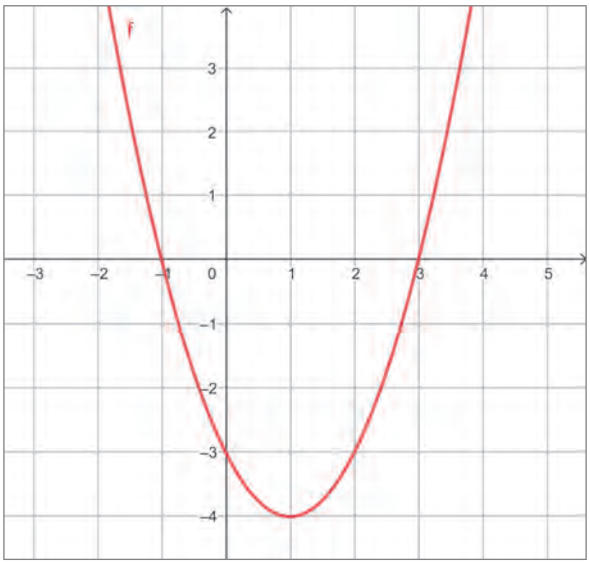
Não, pois, na lei da função, não há uma variável que corresponda à quantidade de capas.

Gráfico da função quadrática

Tomás utilizou o **GeoGebra** para observar como é o gráfico de uma função quadrática. Ele utilizou a lei de duas funções para representar os respectivos gráficos e obteve duas curvas, chamadas de parábolas, como podemos verificar a seguir.

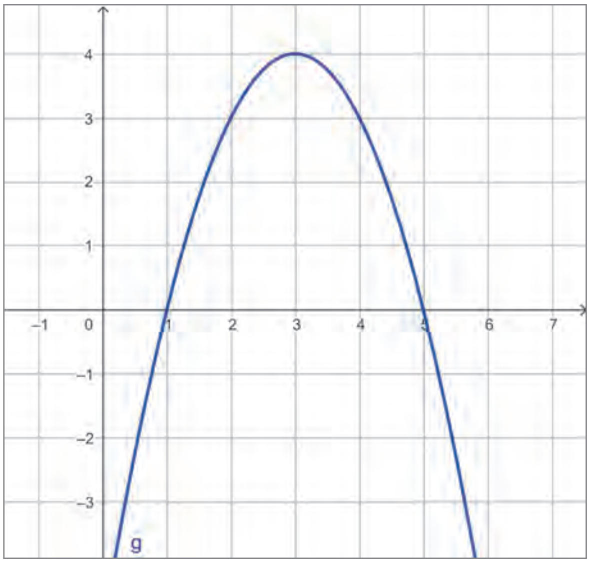
a) Gráfico da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

IMAGENS: REPRODUÇÃO/GEOGEBRA



- Os coeficientes da função f são: $a = 1$, $b = -2$ e $c = -3$. Note que, nesse caso, $a > 0$.

b) Gráfico da função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = -x^2 + 6x - 5$.



Pense e responda

Comparando o gráfico da função f com o gráfico da função g, que diferença você identifica?

Espera-se que os estudantes respondam que o gráfico da função f tem a "abertura" voltada para cima, e o gráfico da função g tem a "abertura" voltada para baixo.

- Os coeficientes da função g são: $a = -1$, $b = 6$ e $c = -5$. Note que, nesse caso, $a < 0$.

É possível demonstrar que o gráfico de uma função quadrática é uma **parábola** que pode ter sua **concavidade** voltada para cima, se o coeficiente a for positivo, ou para baixo, se a for negativo.

Destacamos também que, para qualquer função quadrática, o ponto de intersecção da parábola com o eixo y é o ponto de coordenadas $(0, c)$, em que c é o coeficiente independente na lei da função quadrática. Observe:

Considerando a lei $f(x) = ax^2 + bx + c$, temos $f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$; portanto, $f(0) = c$.

Assim como aprendemos no estudo de função afim, para construir o gráfico da função quadrática, podemos elaborar uma tabela com alguns valores de x e calcular os valores de y correspondentes para obtermos alguns pontos pertencentes ao gráfico da função dada. No entanto, no caso da função quadrática, precisamos de mais do que dois pontos para termos uma noção do traçado da parábola.

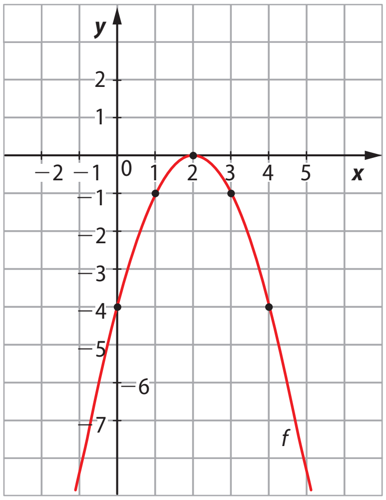
Acompanhe alguns exemplos.

a) Gráfico da função quadrática definida por $f(x) = -x^2 + 4x - 4$.

Inicialmente, construímos uma tabela com alguns valores de x e calculamos $y = f(x)$. Em seguida, localizamos, no sistema cartesiano, os pontos (x, y) pertencentes ao gráfico da função f e esboçamos a parábola que contém esses pontos.

Como $a < 0$, a parábola terá concavidade voltada para **baixo**.

x	$y = -x^2 + 4x - 4$	(x, y)
0	$y = -(0)^2 + 4 \cdot 0 - 4 = -4$	$(0, -4)$
1	$y = -(1)^2 + 4 \cdot 1 - 4 = -1 + 4 - 4 = -1$	$(1, -1)$
2	$y = -(2)^2 + 4 \cdot 2 - 4 = -4 + 8 - 4 = 0$	$(2, 0)$
3	$y = -(3)^2 + 4 \cdot 3 - 4 = -9 + 12 - 4 = -1$	$(3, -1)$
4	$y = -(4)^2 + 4 \cdot 4 - 4 = -16 + 16 - 4 = -4$	$(4, -4)$



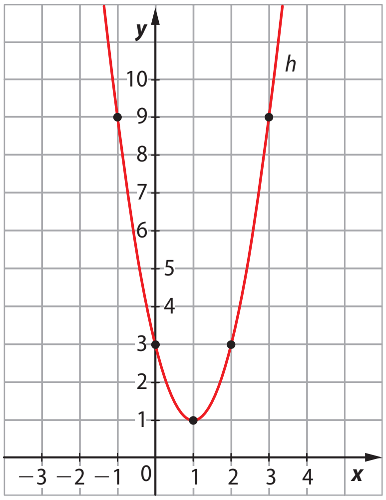
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

b) Gráfico da função quadrática definida por $h(x) = 2x^2 - 4x + 3$.

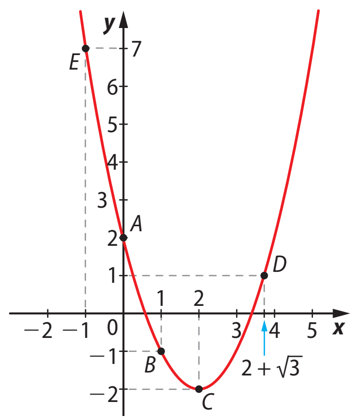
Assim como no exemplo anterior, construímos uma tabela com alguns valores de x e calculamos $y = h(x)$. Em seguida, localizamos, no sistema cartesiano, os pontos (x, y) pertencentes ao gráfico da função h e esboçamos a parábola que contém esses pontos.

Como $a > 0$, nesse caso, a parábola terá concavidade voltada para **cima**.

x	$y = 2x^2 - 4x + 3$	(x, y)
-1	$y = 2 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 3 = 2 + 4 + 3 = 9$	$(-1, 9)$
0	$y = 2 \cdot (0)^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 0 - 0 + 3 = 3$	$(0, 3)$
1	$y = 2 \cdot (1)^2 - 4 \cdot 1 + 3 = 2 - 4 + 3 = 1$	$(1, 1)$
2	$y = 2 \cdot (2)^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 8 - 8 + 3 = 3$	$(2, 3)$
3	$y = 2 \cdot (3)^2 - 4 \cdot 3 + 3 = 18 - 12 + 3 = 9$	$(3, 9)$



1. Considere o gráfico de uma função quadrática f representado a seguir e faça o que se pede em cada item.



EDITORIA DE ARTE

a) Sabendo que os pontos A, B, C, D e E pertencem ao gráfico de f, escreva a lei de formação dessa função.

b) Calcule $f(10) - f(6) + f(-1)$.

c) Todos os dados fornecidos pelo enunciado foram utilizados na resolução do item **a**? O que teria acontecido caso outros pontos tivessem sido escolhidos?

Resolução

a) A lei de formação da função quadrática é dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$. Para determinar a lei de formação da função representada pelo gráfico dado, precisamos obter os coeficientes a, b e c.

Inicialmente, escrevemos os pares ordenados dos pontos A, B, C, D e E:

$A(0, 2)$; $B(1, -1)$; $C(2, -2)$; $D(2+\sqrt{3}, 1)$; $E(-1, 7)$.

Sendo assim, verificamos que $f(0) = 2$, $f(1) = -1$, $f(2) = -2$, $f(2+\sqrt{3}) = 1$ e $f(-1) = 7$.

Sabemos que o ponto de intersecção da parábola com o eixo y é o ponto de coordenadas $(0, c)$, que corresponde ao ponto $A(0, 2)$. Então, concluímos que $c = 2$.

Para determinar os coeficientes a e b, escolhemos outros dois pontos quaisquer e substituímos suas coordenadas na lei de formação. Escolhendo os pontos B e C, temos:

$f(1) = -1 \Rightarrow a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 2 = -1 \Rightarrow$
$\Rightarrow a + b = -3$ (I)

$f(2) = -2 \Rightarrow a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 2 = -2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4a + 2b = -4$ (II)

As equações (I) e (II) formam um sistema de equações:

$$\begin{cases} a + b = -3 \\ 4a + 2b = -4 \end{cases}$$

Multiplicando ambos os membros da primeira equação por -2, temos:

$$\begin{cases} -2a - 2b = 6 \\ 4a + 2b = -4 \end{cases}$$

Adicionando, membro a membro, essas equações, temos:

$2a = 2$

$a = 1$

Substituindo $a = 1$ em (I), temos:

$1 + b = -3$

$b = -4$

Como $a = 1$, $b = -4$ e $c = 2$, a lei de formação da função f é $f(x) = x^2 - 4x + 2$.

b) $f(10) = 10^2 - 4 \cdot 10 + 2 = 100 - 40 + 2 = 62$

$f(6) = 6^2 - 4 \cdot 6 + 2 = 36 - 24 + 2 = 14$

$f(-1) = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 2 = 1 + 4 + 2 = 7$

Portanto:

$f(10) - f(6) + f(-1) = 62 - 14 + 7 = 55$

c) Observando a resolução do item **a**, percebemos que foram utilizadas as informações a respeito dos pontos A, B e C. Os pontos D e E não foram utilizados.

Caso tivéssemos escolhido os pontos D e E, em vez dos pontos B e C, teríamos chegado à mesma resposta.

2. Considere uma função quadrática h, definida por $h(x) = (3m - 15)x^2 + 6x - \frac{5}{4}$, com $m \in \mathbb{R}$. Determine o valor de m para que a parábola correspondente ao gráfico de h tenha concavidade voltada para cima.

Resolução

Para que o gráfico da função h tenha a concavidade voltada para cima, o coeficiente do termo x^2 deve ser maior do que zero. Nesse caso, temos:

$3m - 15 > 0$

$3m > 15$

$m > 5$

Portanto, o gráfico de h terá a concavidade voltada para cima para todo número real $m > 5$.

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. Considere a função definida por $f(x) = x^2 - 5x + 4$ e calcule:

a) $f(0)$ 4

b) $f(-4)$ 40

c) $f\left(\frac{1}{2}\right)$ $\frac{7}{4}$

d) $f(\sqrt{2})$ $6 - 5\sqrt{2}$

2. Um objeto é lançado para cima, a partir do solo, e sua altura h, em metro, varia em função do tempo t, em segundo, decorrido após o lançamento. Supondo que a lei dessa função seja $h(t) = 30t - 5t^2$, qual será a altura do objeto 3 segundos após o lançamento? 45 metros

3. A soma S dos n primeiros números naturais diferentes de zero $(1 + 2 + 3 + 4 + ... + n)$ pode ser calculada utilizando a função quadrática dada por $S(n) = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$.
Qual é a soma dos 50 primeiros números naturais diferentes de zero? 1 275

4. Mensalmente, uma fábrica produz x unidades de certo produto. Sua produção é vendida por $(500 - x)$ reais a unidade. Cada unidade desse produto tem um custo de R$ 100,00. Além disso, a fábrica tem uma despesa mensal fixa de R$ 10.000,00.

a) Sabendo que o lucro é calculado pela diferença entre a receita das vendas e a despesa, escreva a lei da função que determina o lucro mensal L dessa fábrica, em reais, em função de x. $L(x) = -x^2 + 400x - 10\,000$

b) De quantos reais será o lucro quando a fábrica vender 100 produtos? R$ 20.000,00

5. Uma função quadrática f é tal que $f(0) = 6$, $f(1) = 2$ e $f(-2) = 20$. Determine o valor de $f\left(\frac{1}{2}\right)$. $\frac{15}{4}$

6. Esboce, no sistema cartesiano, o gráfico de cada função quadrática definida a seguir. Ver as **Orientações para o professor**.

a) $y = -x^2$

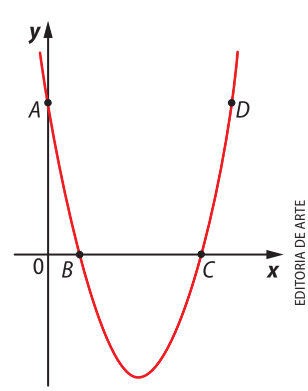
b) $y = x^2 - 4$

c) $y = -x^2 + 6x - 9$

d) $y = x^2 - 5x$

7. Determine o valor de m para que a parábola que representa a função definida por $y = 3x^2 - x + m$ passe pelo ponto (1, 6). $m = 4$

8. (UEA-AM) A representação gráfica, no plano cartesiano, da função $f(x) = x^2 - bx + c$, em que b e c são números reais, passa pelos pontos $A(0, 5)$, $C(5, 0)$ e D. alternativa **d**



Sabendo que os pontos A e D possuem a mesma ordenada, as coordenadas do ponto D são:

a) (5, 6)

b) (6, 0)

c) (5, 5)

d) (6, 5)

e) (6, 6)

EXPLORANDO A TECNOLOGIA

Os coeficientes da função quadrática e a parábola

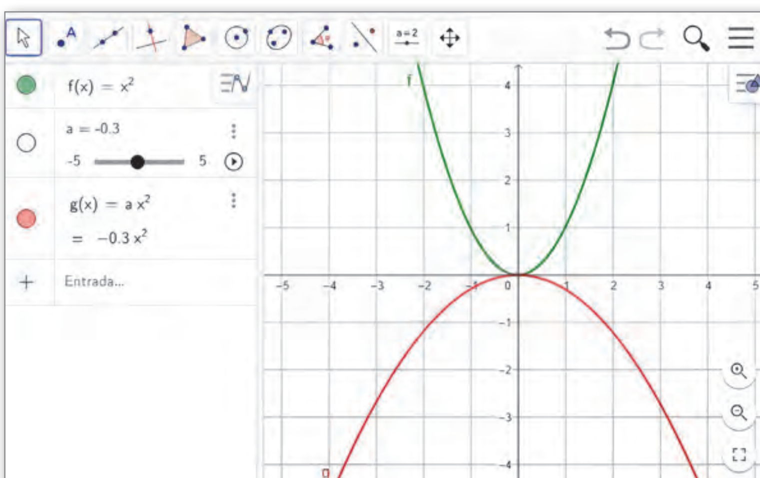
Aprendemos que o sinal do coeficiente *a* indica se a concavidade da parábola correspondente ao gráfico de uma função quadrática está voltada para cima ou para baixo.

Agora, vamos utilizar o **GeoGebra** para analisar como outras mudanças nos coeficientes da lei de uma função quadrática influenciam no gráfico correspondente.

Para isso, realize, inicialmente, a sequência de passos a seguir.

I. No campo de entrada do GeoGebra, digite "$f(x) = x$^2" e pressione ***Enter***.

II. No campo de entrada, digite "$g(x) = ax$^2" e pressione ***Enter***. Será criado, automaticamente, um controle deslizante para o coeficiente *a*. Altere a posição do ponto ao longo do controle para alterar o valor de *a* e observe o que acontece com o gráfico de *g*, comparando-o com o gráfico de *f*.



IMAGENS: REPRODUÇÃO/GEOGEBRA

Gráfico de *g* quando $a = -0{,}3$.

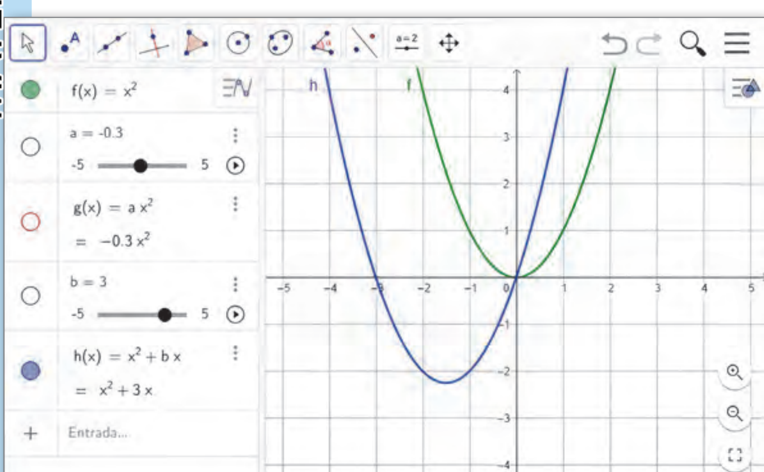
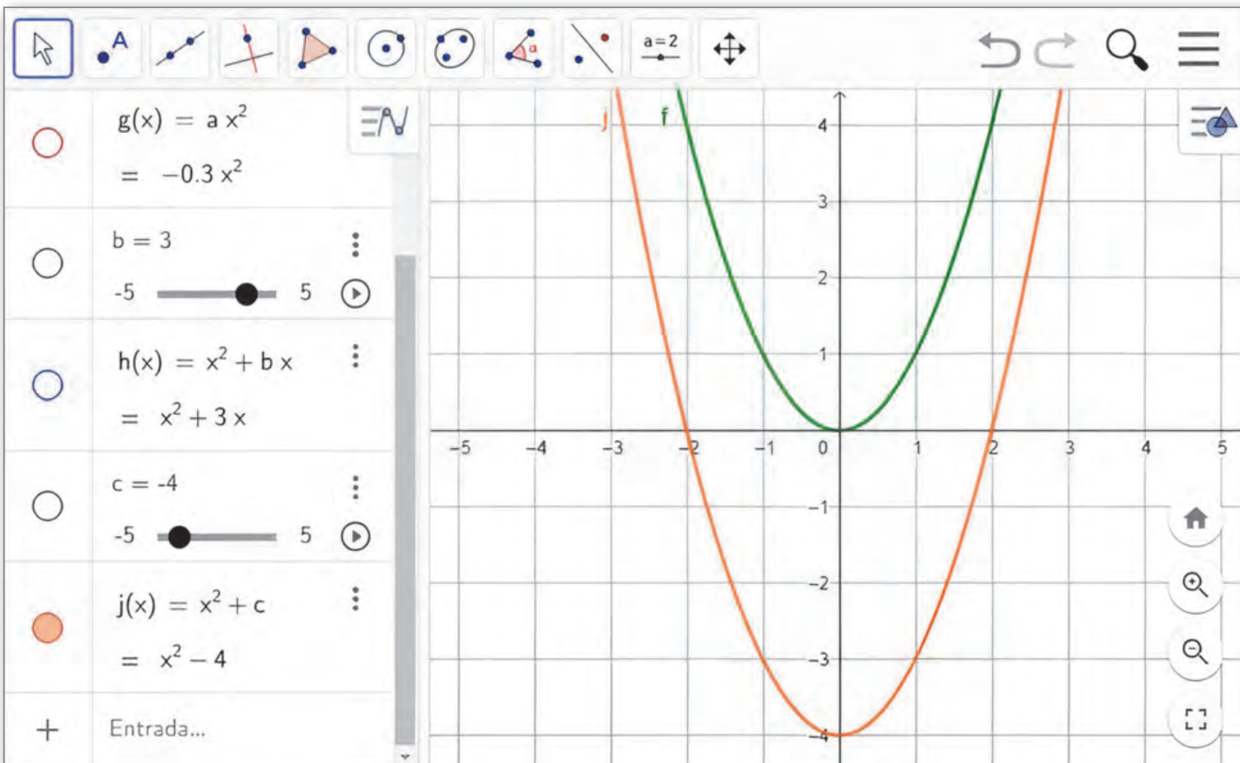


Gráfico de *h* quando $b = 3$.

III. Na janela de Álgebra, clique na bolinha colorida da lei da função *g* para ocultar o gráfico de *g*. Em seguida, no campo de entrada do GeoGebra, digite "$h(x) = x$^2 $+ bx$" e pressione ***Enter***. Um controle deslizante para o coeficiente *b* será criado. Altere a posição do ponto ao longo do controle para alterar o valor de *b* e observe o que acontece com o gráfico de *h*, comparando-o com o gráfico de *f*.

IV. Na janela de Álgebra, clique na bolinha colorida da lei da função h para ocultar o gráfico da função. No campo de entrada, digite "$j(x) = x$^2 $+ c$" e pressione ***Enter***. Um controle deslizante será criado para o coeficiente c. Altere a posição do ponto ao longo do controle para alterar o valor de c e observe o que acontece com o gráfico de j, comparando-o com o gráfico de f.



REPRODUÇÃO/GEOGEBRA

▪ Gráfico de j quando $c = -4$.

V. Na janela de Álgebra, clique nas bolinhas para ocultar ou exibir os gráficos construídos. Manipule-os e faça comparações, analisando o comportamento das funções.

Agora, faça o que se pede nas atividades a seguir. NÃO ESCREVA NO LIVRO. Ver as **Orientações para o professor**.

1. Ao deslizar o controle do coeficiente a, comparando o gráfico da função g com o da função f, o que você observou?

2. Ao deslizar o controle do coeficiente b, comparando o gráfico da função h com o da função f, o que você observou?

3. Ao deslizar o controle do coeficiente c, comparando o gráfico da função j com o da função f, o que você observou?

4. Na janela de Álgebra, clique nas bolinhas para ocultar os gráficos das funções f, g, h e j. Em seguida, no campo de entrada, digite "$t(x) = ax$^2 $+ bx + c$" e pressione ***Enter***. Manipule os controles para verificar o gráfico de diferentes funções, aproveitando para representar os gráficos de funções apresentadas anteriormente neste Capítulo.

Zeros da função quadrática

Já estudamos que o **zero** de uma função é um valor de x que anula a função, ou seja, o valor de x para o qual $\boldsymbol{f(x) = 0}$. Aprendemos também que, considerando a função afim, é possível determinar o zero da função definida por $f(x) = ax + b$ resolvendo a equação $ax + b = 0$.

Para determinar os zeros de uma função quadrática, devemos proceder de maneira análoga: os zeros da função quadrática dada por $y = ax^2 + bx + c$ são as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$.

Agora, vamos explorar como resolver equações polinomiais do 2º grau aplicando uma fórmula resolutiva, também conhecida como fórmula de Bhaskara, na qual os coeficientes a, b e c são utilizados. Acompanhe como obter a fórmula.

Considere a equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Procedimentos	
Considerar a equação $ax^2 + bx + c = 0$.	$ax^2 + bx + c = 0$
Multiplicar a equação por $4a$.	$4a \cdot ax^2 + 4a \cdot bx + 4a \cdot c = 4a \cdot 0$
Adicionar b^2 aos dois membros da equação.	$4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 = 0 + b^2$
Subtrair $4ac$ dos dois membros da equação.	$4a^2x^2 + 4abx + 4ac - 4ac + b^2 = b^2 - 4ac$
Identificar o trinômio quadrado perfeito.	$(2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot b + b^2 = b^2 - 4ac$
Fatorar o trinômio quadrado perfeito.	$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$
Extrair a raiz quadrada dos dois membros da equação.	$\sqrt{(2ax + b)^2} = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$
Subtrair b dos dois membros da equação.	$2ax + b - b = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$
Dividir a equação por $2a$ para isolar a incógnita x.	$\frac{2ax}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Portanto, a fórmula resolutiva da equação $ax^2 + bx + c = 0$ é dada por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ em que } \Delta = b^2 - 4ac$$

A expressão $b^2 - 4ac$, indicada pela letra grega Δ (delta), é denominada discriminante da equação polinomial do 2º grau. Determinar $\sqrt{\Delta}$ só tem sentido quando $\Delta \geqslant 0$, caso contrário, a equação não possui raízes reais.

Saiba que...

A fatoração de um trinômio quadrado perfeito resulta no produto notável quadrado da soma de dois termos ou no produto notável quadrado da diferença de dois termos.

$p^2 + 2pq + q^2 = (p + q)^2$

$p^2 - 2pq + q^2 = (p - q)^2$

Saiba que...

O motivo pelo qual apareceu o sinal $\pm$ no desenvolvimento da equação pode ser entendido por meio do seguinte exemplo simplificado.

Na equação $x^2 = 9$, busca-se um valor x que, elevado ao quadrado, resulte em 9. Nesse caso, há duas soluções, -3 e 3, pois $(-3)^2 = 9$ e $3^2 = 9$.

Desse modo, tem-se:

$x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

De modo geral,

$x^2 = m \Rightarrow x = \pm\sqrt{m}$.

Quando resolvemos a equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, utilizando a fórmula resolutiva, deparamo-nos com uma das três situações a seguir.

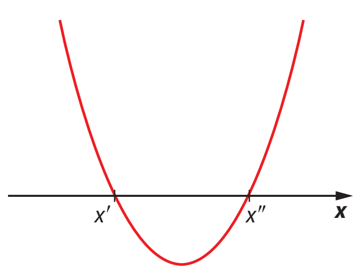
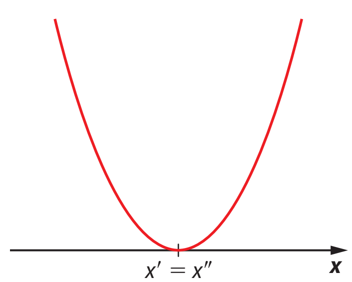
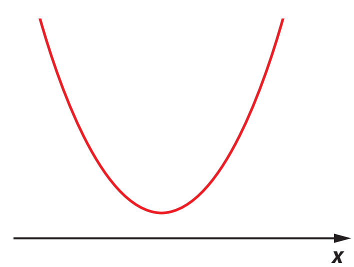
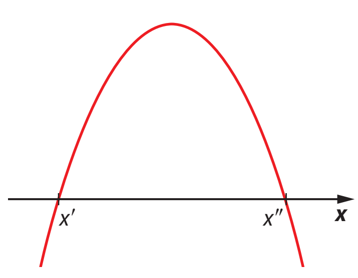
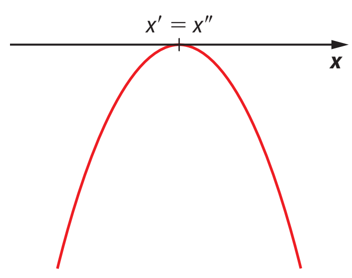
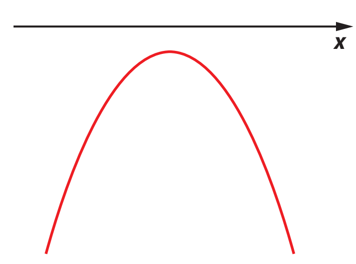
I. Se $\Delta > 0$, então a equação possui duas raízes reais e distintas.
Portanto, a função quadrática correspondente tem dois zeros:

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

II. Se $\Delta = 0$, então a equação possui duas raízes reais iguais.
Portanto, a função quadrática correspondente tem um zero:

$$x' = x'' = -\frac{b}{2a}$$

III. Se $\Delta < 0$, então a equação não possui raízes reais.
Portanto, a função quadrática correspondente não tem zero.

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			
	▪ Nesse caso, os zeros da função, x' e x'', são as abscissas dos dois pontos de intersecção do gráfico da função com o eixo x.	▪ Nesse caso, o zero da função é a abscissa do ponto de tangência do gráfico da função com o eixo x.	▪ Nesse caso, como não há zero da função, não há intersecção do gráfico da função com o eixo x.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Soma e produto das raízes de uma equação do 2º grau

Pense e responda

A soma das raízes reais de uma equação do 2º grau é -1 e o produto é -6. Quais são essas raízes? -3 e 2

Considerando x' e x'' as raízes reais da equação $ax^2 + bx + c = 0$, ou seja, $x' = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x'' = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, podemos calcular a soma e o produto dessas raízes, como se verifica a seguir.

$$x' + x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x' + x'' = \frac{-2b}{2a} \Rightarrow x' + x'' = -\frac{b}{a}$$

$$x' \cdot x'' = \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \Rightarrow x' \cdot x'' = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x' \cdot x'' = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} \Rightarrow x' \cdot x'' = \frac{4ac}{4a^2} \Rightarrow x' \cdot x'' = \frac{c}{a}$$

Portanto, a soma e o produto das raízes de uma equação do 2º grau são, respectivamente, $\boxed{x' + x'' = -\frac{b}{a}}$ e $\boxed{x' \cdot x'' = \frac{c}{a}}$.

Forma fatorada da equação do 2º grau

Saiba que...

A forma "fatorada" de um polinômio é assim chamada porque resulta em uma expressão algébrica na forma de uma multiplicação. O adjetivo "fatorada" vem de "fatores" de uma multiplicação.

Vamos utilizar a soma e o produto das raízes x' e x'' de uma equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, para obter a **forma fatorada** da lei de formação da função quadrática correspondente, que é dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$. Acompanhe a seguir.

Colocando em evidência o coeficiente a na lei da função, temos:

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \Rightarrow f(x) = a\left[x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a}\right]$$

Como $x' + x'' = -\frac{b}{a}$ e $x' \cdot x'' = \frac{c}{a}$, temos:

$$f(x) = a\,[x^2 - (x' + x'')x + x' \cdot x'']$$

Desenvolvendo e fatorando essa expressão, temos:

$$f(x) = a[x^2 - x'x - x''x + x'x'']$$

$$f(x) = a[x(x - x') - x''(x - x')]$$

$$f(x) = a(x - x')(x - x'')$$

Portanto, a forma fatorada da lei da função quadrática é:

$$\boxed{f(x) = a(x - x')(x - x'')}$$

ATIVIDADES RESOLVIDAS

3. Determine os zeros das funções quadráticas definidas a seguir.

a) $f(x) = x^2 - 25$
b) $g(x) = x^2 + 8x$
c) $h(x) = x^2 + 3x - 4$

Resolução

As equações do 2º grau em que algum dos coeficientes, *b*, *c* ou ambos, é nulo são chamadas de **equações do 2º grau incompletas**. Quando temos esse tipo de equação, é possível resolvê-la utilizando outros métodos, além da fórmula resolutiva, como será feito nos itens **a** e **b** a seguir.

a) Para encontrar os zeros da função *f*, devemos obter os valores de *x* para os quais $f(x) = 0$. Assim, devemos encontrar as raízes da equação do 2º grau:

$$x^2 - 25 = 0$$

Nesse caso, como $b = 0$, a equação é incompleta e pode ser resolvida isolando-se *x* diretamente:

$$x^2 - 25 = 0 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{25} \Rightarrow x = \pm 5$$

Portanto, a equação possui duas raízes, $x' = -5$ e $x'' = 5$. Sendo assim, os zeros da função *f* são -5 e 5.

b) Para encontrar os zeros da função *g*, basta encontrar as raízes da equação:

$$x^2 + 8x = 0$$

Nesse caso, como $c = 0$, a equação é incompleta e pode ser resolvida utilizando-se fatoração. Acompanhe.

$$x^2 + 8x = 0 \Rightarrow x(x + 8) = 0$$

Como o produto entre os fatores *x* e $x + 8$ é zero, então:

$$x = 0 \text{ ou } x + 8 = 0 \Rightarrow x = -8$$

Portanto, a equação possui duas raízes, $x' = 0$ e $x'' = -8$. Sendo assim, os zeros da função *g* são 0 e -8.

c) Para encontrar os zeros da função *h*, basta encontrar as raízes da equação:

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

Nesse caso, como $a = 1$, $b = 3$ e $c = -4$, a equação do 2º grau é completa. Ela pode ser resolvida usando a fórmula resolutiva $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, em que $\Delta = b^2 - 4ac$.

Desse modo, tem-se:

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 25$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} \Rightarrow x = \frac{-3 \pm 5}{2}$$

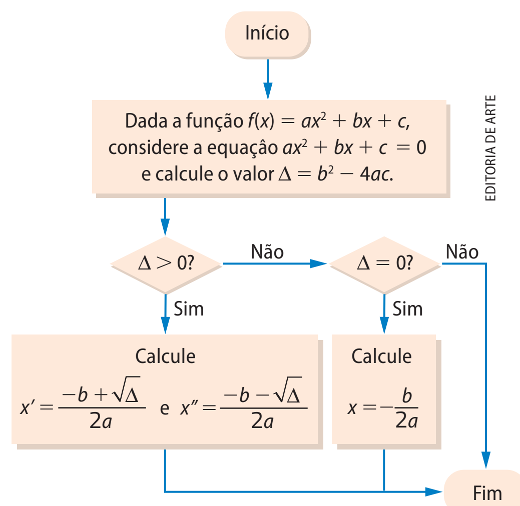
$$x' = \frac{-3 - 5}{2} = -4 \text{ e } x'' = \frac{-3 + 5}{2} = 1$$

Portanto, a equação possui duas raízes, $x' = -4$ e $x'' = 1$. Assim, os zeros da função *h* são -4 e 1.

4. Elabore um fluxograma que retorne, se houver, os zeros de uma função quadrática.

Resolução

Considerando que, dependendo do valor de Δ, a função quadrática terá dois zeros distintos, um único zero ou não possuirá zeros reais; então, um possível fluxograma seria:



EDITORIA DE ARTE

5. Seja a função definida por $h(x) = x^2 - 2x + 3k$. Sabendo que essa função tem um único zero, determine o valor real de *k*.

Resolução

A condição para que a função tenha apenas um zero é $\Delta = 0$.

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3k \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Delta = 4 - 12k$$

Fazendo $\Delta = 0$ em $\Delta = 4 - 12k$, temos:

$$4 - 12k = 0 \Rightarrow -12k = -4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow k = \frac{-4}{-12} \Rightarrow k = \frac{1}{3}$$

Portanto, para que *h* tenha um único zero, devemos ter $k = \dfrac{1}{3}$.

6. (UEA-AM) Durante um tratamento com medicina alternativa, uma pessoa deverá ingerir, apenas uma vez ao dia, durante os 10 primeiros dias do mês, determinado número de gotas de um medicamento. Sabendo que o número de gotas foi calculado através da função dada por $g(x) = -x^2 + 10x$, sendo $g(x)$ o número de gotas e x o dia do mês, com $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, é correto afirmar que essa pessoa ingeriu 16 gotas nos dias:

a) 2 e 8.
b) 2 e 9.
c) 3 e 8.
d) 3 e 9.
e) 5 e 6.

Resolução

Como $g(x)$ representa o número de gotas, considera-se $g(x) = 16$. Assim, temos:

$16 = -x^2 + 10x \Rightarrow x^2 - 10x + 16 = 0$

$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 36$

$x = \dfrac{-(-10) \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \dfrac{10 \pm 6}{2}$

Logo, $x' = 2$ e $x'' = 8$.

Portanto, a resposta é a alternativa **a**.

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

9. Determine, se existirem, os zeros das funções quadráticas definidas a seguir.

a) $y = x^2 - 6x + 5$ $x' = 1; x'' = 5$
b) $y = 3x^2 - 4x$ $x' = 0; x'' = \frac{4}{3}$
c) $y = -x^2 + x - 3$ A função não tem zeros.
d) $y = x^2 - 9$ $x' = -3; x'' = 3$
e) $y = -6x^2$ $x' = x'' = 0$
f) $y = 4x^2 - x + \frac{3}{5}$ A função não tem zeros.

10. Calcule k de modo que a função dada por $y = kx^2 - 2x + 3$ admita o valor 2 como um de seus zeros. $k = \frac{1}{4}$

11. Considerando a função definida por $f(x) = ax^2 + bx + 10$, determine a e b, sabendo que seus zeros são -2 e 5. Em seguida, faça um esboço do gráfico dessa função. Ver as **Orientações para o professor**.

12. Considere a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + 2mx + 16$. Determine $m \in \mathbb{R}$ de modo que:

a) a função f tenha um único zero; $m = \pm 4$
b) o gráfico da função f passe pelo ponto $(2, -4)$. $m = -6$

13. Determine o parâmetro real k de modo que a função $f(x) = x^2 - 2x + k$ tenha:

a) dois zeros; $k < 1$
b) um único zero; $k = 1$
c) nenhum zero. $k > 1$

14. (UFMG) Um certo reservatório, contendo 72 m^3 de água, deve ser drenado para limpeza. Decorridas t horas após o início da drenagem, o volume de água que saiu do reservatório, em m^3, é dado por $V(t) = 24t - 2t^2$. Sabendo-se que a drenagem teve início às 10 horas, o reservatório estará completamente vazio às: alternativa **b**

a) 14 horas.
b) 16 horas.
c) 19 horas.
d) 22 horas.

15. Dadas as funções definidas por $f(x) = (x + 1)(x - 3)$ e $g(x) = \frac{x}{2} + 3$, determine:

a) os pontos de intersecção da parábola com o eixo das abscissas; $(-1, 0)$ e $(3, 0)$

b) o ponto de intersecção da parábola com o eixo das ordenadas; $(0, -3)$

c) o ponto de intersecção da reta com o eixo das ordenadas; $(0, 3)$

d) o ponto de intersecção da reta com a parábola situado no 2º quadrante. $\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$

16. (UFPR) A distância que um automóvel percorre a partir do momento em que um condutor pisa no freio até a parada total do veículo é chamada de distância de frenagem. Suponha que a distância de frenagem d, em metros, possa ser calculada pela fórmula $d(v) = \frac{1}{120}(v^2 + 8v)$, sendo v a velocidade do automóvel, em kilometros por hora, no momento em que o condutor pisa no freio.

a) Qual é a distância de frenagem de um automóvel que se desloca a uma velocidade de 40 km/h? 16 m

b) A que velocidade um automóvel deve estar para que sua distância de frenagem seja de 53,2 m? 76 km/h

FÓRUM

Riscos do uso de celulares ao dirigir

Dirigir exige atenção plena. Quando o motorista desvia o foco para o celular, ao ler mensagens ou atender a chamadas, sua capacidade de reação fica comprometida, resultando em tempos de resposta mais longos. Esses segundos extras necessários para reagir podem fazer toda a diferença entre evitar um acidente ou se envolver em uma situação perigosa; por esse motivo, destaca-se a importância de manter o foco total na condução. Portanto, é essencial se conscientizar sobre os perigos associados à utilização do celular ao volante e reconhecer a importância de manter os olhos na estrada para prevenir acidentes e preservar vidas.

Converse com os colegas sobre a questão a seguir.

- Que estratégia você adotaria para conscientizar pessoas da comunidade sobre os perigos de usar o celular ao dirigir e a importância de manter o foco total na condução?
Ver as **Orientações para o professor**.

■ É importante dirigir com as duas mãos no volante e estar atento ao trânsito para evitar acidentes.

LARISA STEFANJUK/SHUTTERSTOCK.COM

Vértice da parábola

O vértice V da parábola de uma função quadrática f é um ponto do gráfico no qual identificamos uma mudança de comportamento de crescente para decrescente ou, ao contrário, de decrescente para crescente da função f. Isto é, seja $V(x_V, y_V)$ o vértice da parábola da função quadrática $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, se f é decrescente no intervalo $]-\infty, x_V]$, ela é crescente em $[x_V, +\infty[$, ou se f é crescente no intervalo $]-\infty, x_V]$, ela é decrescente em $[x_V, +\infty[$.

O eixo de simetria da parábola de uma função quadrática é a reta r, perpendicular ao eixo x, que passa pelo vértice V.

Observe, na figura 1, o gráfico de uma função quadrática f e o vértice $V(x_V, y_V)$ destacado.

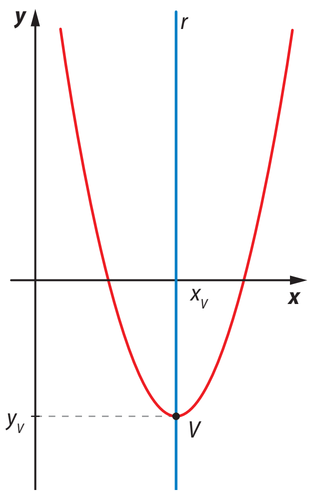
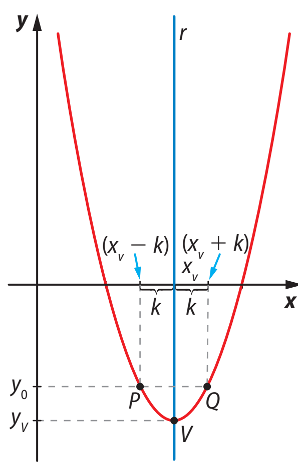


Figura 1. Nesse gráfico, estão destacados o ponto $V(x_V, y_V)$, que é o vértice da parábola, e a reta r, eixo de simetria da parábola.

Acompanhe a seguir uma maneira de obter as coordenadas do vértice.

Considere f uma função quadrática dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ e dois pontos pertencentes ao gráfico de f que têm ordenadas iguais. Sabemos que esses pontos estão à mesma distância do eixo de simetria da parábola e que este, por sua vez, é perpendicular ao eixo x e cruza esse mesmo eixo no ponto de abscissa x_V do vértice.

Podemos, então, indicar as coordenadas desses dois pontos por $P(x_V - k, y_0)$ e $Q(x_V + k, y_0)$, em que $k \neq 0$ é a diferença entre as abscissas de V e de P, e de Q e de V, como pode ser verificado na figura 2.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Figura 2.

Como as ordenadas dos pontos P e Q são iguais, temos:

$$f(x_V - k) = f(x_V + k)$$

Substituindo esses valores na lei da função f, temos:

$$a(x_V - k)^2 + b(x_V - k) + c = a(x_V + k)^2 + b(x_V + k) + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a(x_V^2 - 2x_Vk + k^2) + \cancel{bx_V} - bk + \cancel{c} = a(x_V^2 + 2x_Vk + k^2) + \cancel{bx_V} + bk + \cancel{c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{ax_V^2} - 2ax_Vk + \cancel{ak^2} - bk = \cancel{ax_V^2} + 2ax_Vk + \cancel{ak^2} + bk \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2ax_Vk - 2ax_Vk = bk + bk \Rightarrow -4ax_Vk = 2bk \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_V = \frac{2bk}{-4ak} \Rightarrow \boxed{x_V = -\frac{b}{2a}}$$

Para calcular a ordenada y_V do vértice, substituímos, na lei da função, o valor de x_V obtido. Nesse caso, temos:

$$y_V = f(x_V) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_V = a \cdot \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c \Rightarrow y_V = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_V = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} \Rightarrow y_V = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \Rightarrow \boxed{y_V = -\frac{\Delta}{4a}}$$

Portanto, as coordenadas do vértice da parábola são $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Saiba que...

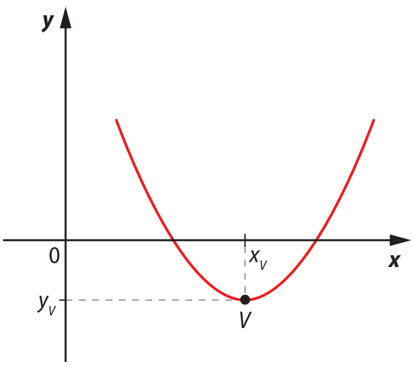
Para facilitar o esboço do gráfico de uma função quadrática, podem-se utilizar pontos específicos, como o vértice da parábola, o ponto em que a parábola intersecta o eixo y e, se houver, os zeros da função.

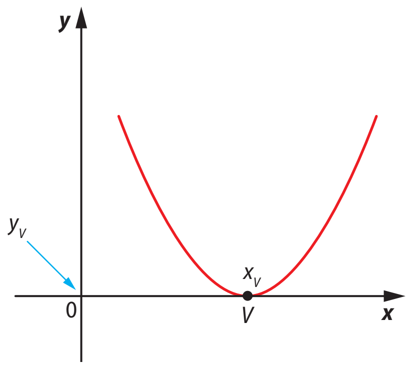
» Valor mínimo e valor máximo da função quadrática

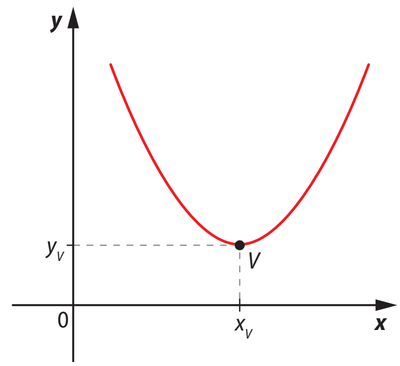
Ao esboçarmos o gráfico de uma função quadrática f, dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, consideramos o sinal do coeficiente a para identificar se a concavidade da parábola será voltada para cima ou voltada para baixo.

Utilizando esse esboço, podemos verificar, entre outras propriedades, que a função f tem um **valor mínimo** ou um **valor máximo**, que corresponde à **ordenada** do vértice da parábola.

Nesse caso, se $\boldsymbol{a > 0}$, a concavidade da parábola é voltada para cima, e temos três situações possíveis para o gráfico:

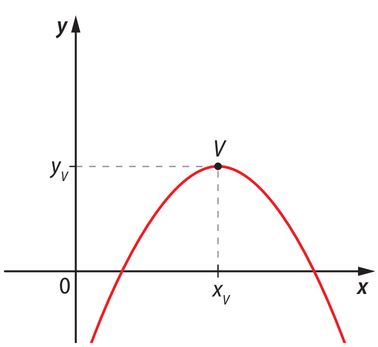


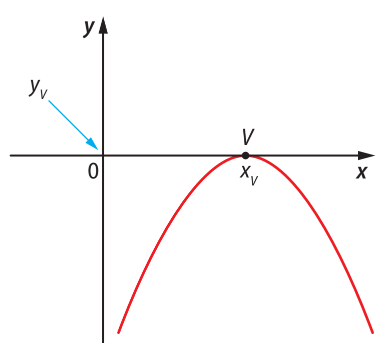


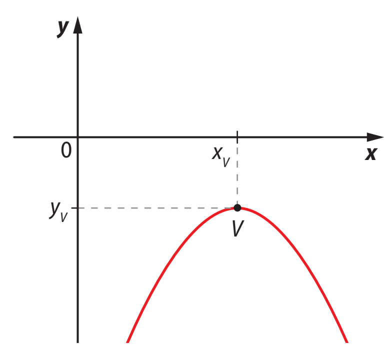


Observe que, nos três casos, o vértice V da parábola é o ponto cuja ordenada é o **menor valor** assumido pela função para todo $x \in D(f)$, chamado também de **ponto de mínimo** da função. A ordenada de V, que pode ser obtida por $y_V = -\dfrac{\Delta}{4a}$, é o **valor mínimo** da função, que ocorre quando $x_V = -\dfrac{b}{2a}$.

De maneira análoga, se $\boldsymbol{a < 0}$, a concavidade da parábola é voltada para baixo, e temos outras três possibilidades para o gráfico da função:







ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Considerando esses três casos, o vértice V da parábola é o ponto cuja ordenada é o **maior valor** assumido pela função para todo $x \in D(f)$, chamado também de **ponto de máximo** da função. A ordenada de V, que pode ser obtida por $y_V = -\dfrac{\Delta}{4a}$, é o **valor máximo** da função, que ocorre quando $x_V = -\dfrac{b}{2a}$.

Pense e responda

De acordo com a função L, qual é o lucro diário máximo que Elisa, a dona da loja de capas para celular, pode obter? R$ 506,25

Exploramos, no início deste Capítulo, uma situação na qual o lucro diário de uma loja de capas para celular é modelado por uma função quadrática. Nessa situação, o lucro L, em reais, é função do preço x pelo qual cada capa é vendida, também em reais, e é expresso por $L(x) = -x^2 + 55x - 250$.

Como, nesse caso, $a < 0$, a ordenada do vértice V da parábola é o maior valor assumido pela função.

Utilizando a coordenada x_V do vértice, podemos determinar o preço pelo qual cada capa deve ser vendida para que a loja obtenha o maior lucro diário, de acordo com essa função.

$$x_V = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_V = -\frac{55}{2(-1)} \Rightarrow x_V = \frac{55}{2} \Rightarrow x_V = 27{,}5$$

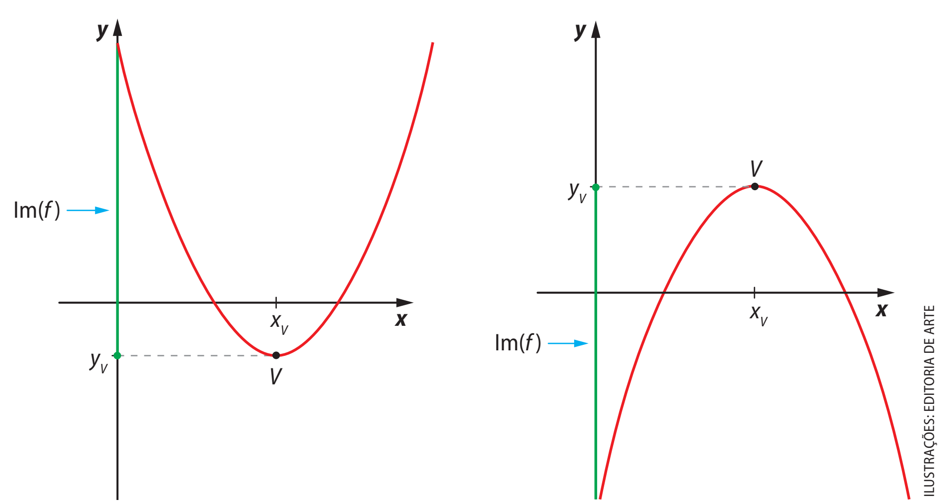
Logo, para que a loja obtenha o maior lucro diário, cada capa de celular deve ser vendida por R$ 27,50.

» Imagem da função quadrática

Utilizando as coordenadas do vértice da parábola correspondente ao gráfico de uma função quadrática f, podemos determinar o seu **conjunto imagem**.

Aprendemos que, quando $a > 0$, o vértice V é o ponto de mínimo da função, e $y_V = -\frac{\Delta}{4a}$ é o **valor mínimo** que a função assume, ou seja, é o menor valor de imagem da função.

Por outro lado, quando $a < 0$, o vértice V é o ponto de máximo da função, e $y_V = -\frac{\Delta}{4a}$ é o **valor máximo** que a função assume, ou seja, é o maior valor de imagem da função.



- Quando $a > 0$, $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant y_V\}$.
- Quando $a < 0$, $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant y_V\}$.

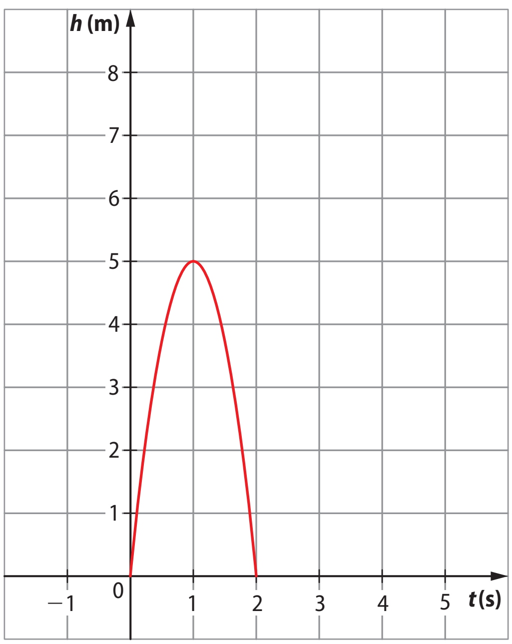
Crescimento e decrescimento da função quadrática

Estudamos anteriormente quando uma função real de variável real é crescente em um intervalo e quando ela é decrescente. Estudaremos, agora, o comportamento da função quadrática em relação a crescimento e decrescimento.

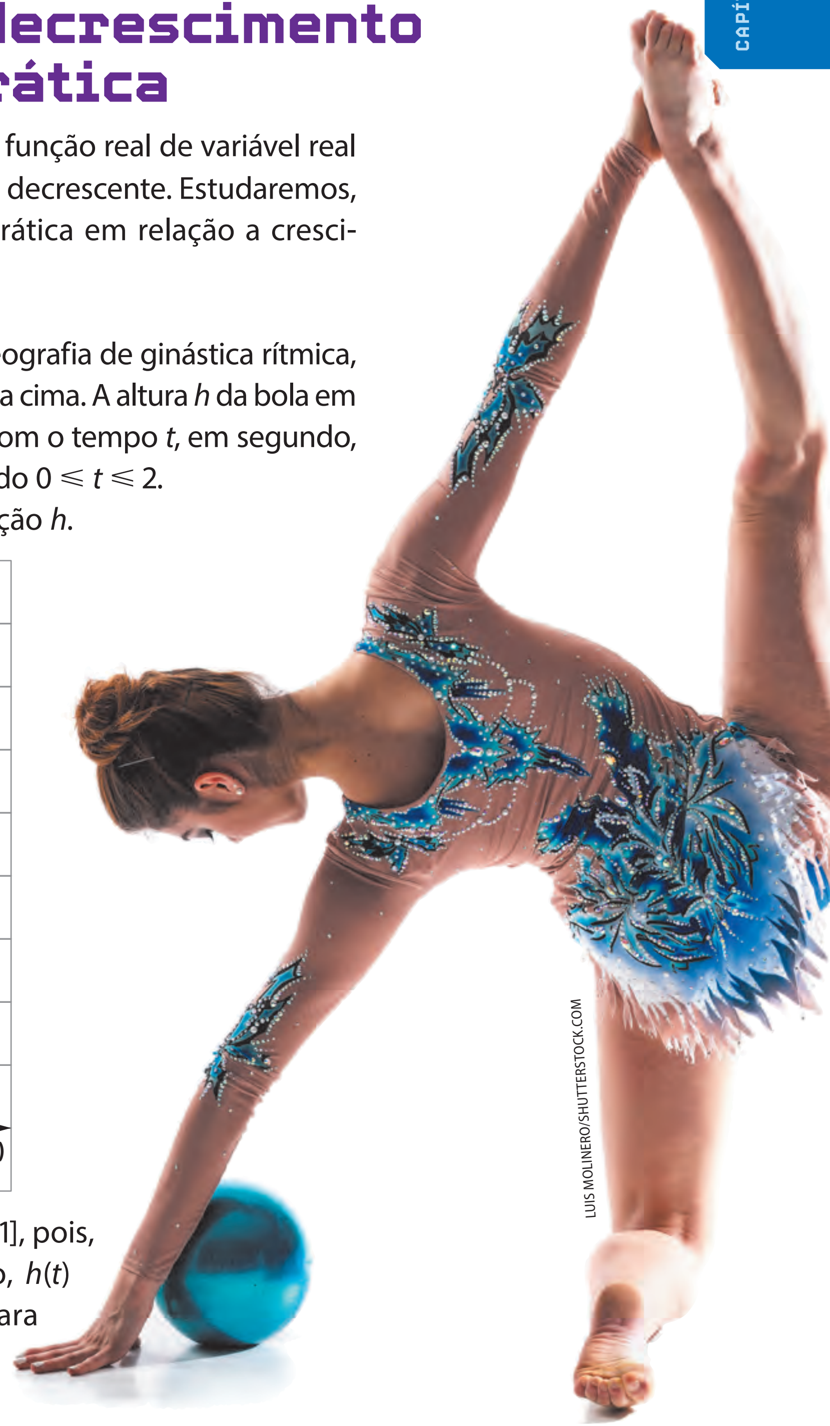
Acompanhe a situação a seguir.

Em determinado momento de uma coreografia de ginástica rítmica, uma bola é lançada do solo verticalmente para cima. A altura h da bola em relação ao solo, em metro, varia de acordo com o tempo t, em segundo, conforme a lei $h(t) = -5t^2 + 10t$, considerando $0 \leqslant t \leqslant 2$.

Observe o gráfico que representa a função h.



EDITORIA DE ARTE



LUIS MOLINERO/SHUTTERSTOCK.COM

A bola é um dos elementos da ginástica rítmica.

A função h é **crescente** no intervalo [0, 1], pois, à medida que t aumenta nesse intervalo, $h(t)$ também aumenta. Em outras palavras, para quaisquer valores de t_1 e t_2 pertencentes a [0, 1], com $t_1 < t_2$, temos $h(t_1) < h(t_2)$.

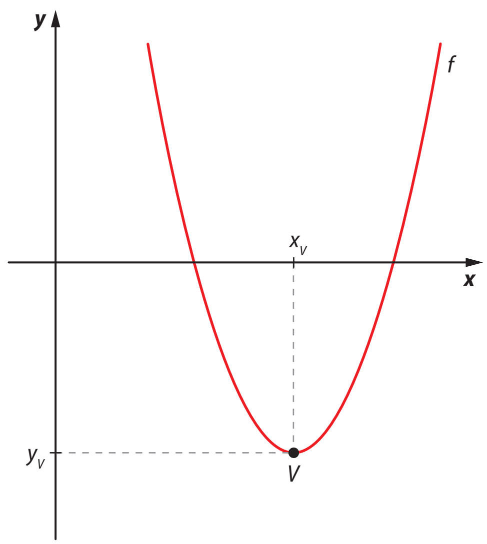
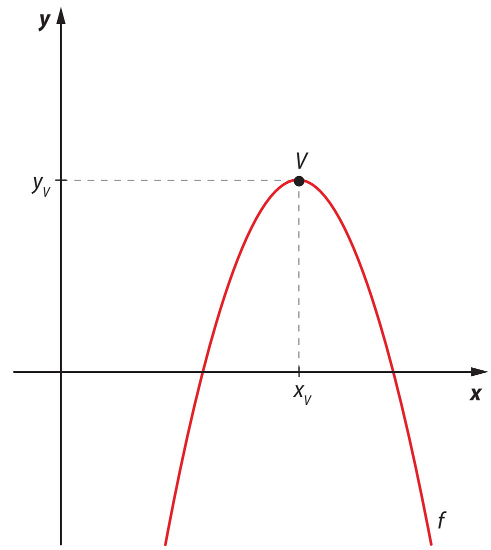
Por outro lado, a função h é **decrescente** no intervalo [1, 2], pois, à medida que t aumenta nesse intervalo, $h(t)$ diminui. Em outras palavras, para quaisquer valores de t_1 e t_2 pertencentes a [1, 2], com $t_1 < t_2$, temos $h(t_1) > h(t_2)$.

Pense e responda

- Qual é a altura máxima alcançada pela bola? Em que instante isso é observado? 5 metros. Isso acontece em $t = 1$ s.
- Podemos dizer que, à medida que t aumenta no intervalo [0, 2], $h(t)$ também aumenta?

Não. A partir de $t = 1$, à medida que t aumenta, $h(t)$ diminui.

De modo geral, podemos estudar o crescimento e o decrescimento da função quadrática definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$ com base no valor de a e na abscissa x_V do vértice da parábola, como indicado a seguir.

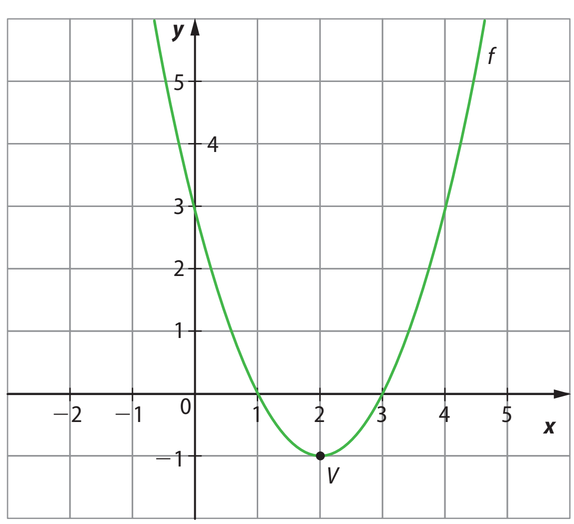
<table>
<tr><th>$a > 0$</th><th>$a < 0$</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>• A função f é decrescente no intervalo $]-\infty, x_V]$.
• A função f é crescente no intervalo $[x_V, +\infty[$.</td><td>• A função f é crescente no intervalo $]-\infty, x_V]$.
• A função f é decrescente no intervalo $[x_V, +\infty[$.</td></tr>
</table>

Considere, por exemplo, a função definida por $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

Calculando a abscissa x_V do vértice da parábola correspondente, temos:

$$x_V = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_V = -\frac{(-4)}{2 \cdot 1} \Rightarrow x_V = 2$$

Assim, como $a > 0$, essa função é decrescente no intervalo $]-\infty, 2]$ e crescente no intervalo $[2, +\infty[$. Isso também pode ser observado por meio do gráfico a seguir.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

ATIVIDADES RESOLVIDAS

7. Determine as coordenadas do vértice V da parábola que representa a função dada por $f(x) = -5x^2 + 3x - 1$.

Resolução

Os coeficientes da lei da função são $a = -5$, $b = 3$ e $c = -1$.

Além disso, $\Delta = 3^2 - 4 \cdot (-5) \cdot (-1) = -11$.

Calculando as coordenadas do vértice, obtemos:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2 \cdot (-5)} = \frac{3}{10}$$

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(-11)}{4 \cdot (-5)} = -\frac{11}{20}$$

Logo, as coordenadas do vértice são $\left(\frac{3}{10}, -\frac{11}{20}\right)$.

8. Determine as coordenadas do vértice da parábola que representa a função quadrática f cujos zeros são -5 e -3 e o coeficiente a é igual a 1.

Resolução

Podemos utilizar os zeros da função para escrever a lei de f na sua forma fatorada.

$f(x) = 1(x + 5)(x + 3) \Rightarrow f(x) = x^2 + 8x + 15$

Assim, os coeficientes da lei dessa função são $a = 1$, $b = 8$ e $c = 15$.

Calculando as coordenadas do vértice, obtemos:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2 \cdot 1} = -4$$

$y_V = f(x_V) \Rightarrow y_V = f(-4) \Rightarrow$

$\Rightarrow y_V = (-4)^2 + 8 \cdot (-4) + 15 \Rightarrow$

$\Rightarrow y_V = 16 - 32 + 15 = -1$

Portanto, o vértice da parábola que representa a função f tem coordenadas $(-4, -1)$.

9. Uma empresa calculou que a produção mensal de x unidades de um certo produto gera um lucro mensal, em reais, de $150 - \frac{x}{4}$ por unidade do produto. Responda aos itens.

a) Qual é a lei da função que representa o lucro, em reais, em relação à quantidade de produtos produzidos por mês?

b) Qual é o lucro máximo mensal que essa empresa pode ter com a venda desse produto?

Resolução

a) Para obter a lei dessa função, multiplicamos a quantidade de produtos produzidos por mês pelo valor correspondente ao lucro unitário. Assim, temos:

$$L(x) = x \cdot \left(150 - \frac{x}{4}\right) \Rightarrow L(x) = 150x - \frac{x^2}{4}$$

A lei da função é $L(x) = 150x - \frac{x^2}{4}$.

b) O lucro máximo mensal é obtido pelo cálculo da ordenada do vértice do gráfico dessa função.

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(150)^2}{4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)} =$$

$$= \frac{-22\,500}{-1} = 22\,500$$

Assim, o lucro máximo mensal é de R\$ 22.500,00.

10. Considere uma função quadrática $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

a) Em qual intervalo real essa função é crescente?

b) Determine o conjunto imagem dessa função.

Resolução

a) Como $a > 0$, a função f é crescente no intervalo $[x_V, +\infty[$.

Calculando a abscissa x_V do vértice da parábola, temos:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-3)}{2 \cdot 1} = \frac{3}{2}$$

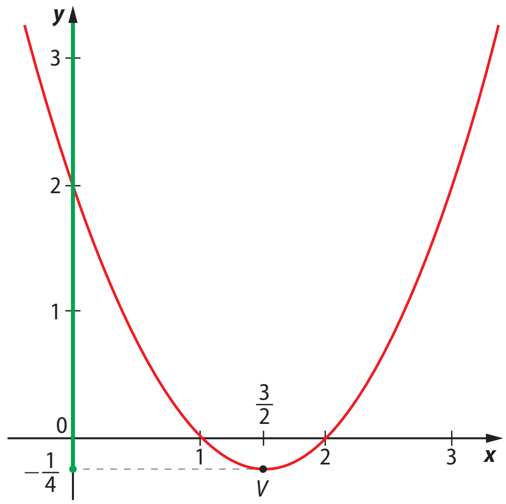
Logo, a função f é crescente no intervalo $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$.

b) Para determinar o conjunto imagem da função f, determinamos inicialmente a ordenada y_V do vértice da parábola. Nesse caso, temos:

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}{4}$$

$$y_V = -\frac{1}{4}$$

Como $a > 0$, o gráfico de f tem concavidade voltada para cima, e y_V é o valor mínimo da função, como podemos verificar a seguir.



Assim, $f(x) \geqslant -\frac{1}{4}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Portanto, $\text{Im}(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\frac{1}{4}\right\}$.

11. (EsPCEx-SP) Uma indústria produz mensalmente x lotes de um produto. O valor mensal resultante da venda deste produto é $V(x) = 3x^2 - 12x$ e o custo mensal da produção é dado por $C(x) = 5x^2 - 40x - 40$. Sabendo que o lucro é obtido pela diferença entre o valor resultante das vendas e o custo da produção, então o número de lotes mensais que essa indústria deve vender para obter lucro máximo é igual a

a) 4 lotes. **c)** 6 lotes. **e)** 8 lotes.
b) 5 lotes. **d)** 7 lotes.

Resolução

Inicialmente, determinamos a expressão do lucro $L(x)$ dessa indústria em função do número de lotes x produzidos em um mês.

Do enunciado, temos $L(x) = V(x) - C(x)$. Assim:

$L(x) = 3x^2 - 12x - (5x^2 - 40x - 40)$

$L(x) = 3x^2 - 12x - 5x^2 + 40x + 40$

$L(x) = -2x^2 + 28x + 40$

O gráfico da função correspondente ao lucro é uma parábola com a concavidade voltada para baixo, pois $a < 0$.

Portanto, o número de lotes mensais que devem ser produzidos para que a indústria obtenha lucro máximo é o valor da abscissa x_V do vértice.

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{28}{2 \cdot (-2)} = \frac{-28}{-4} = 7$$

Logo, a resposta é a alternativa **d**.

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

17. A trajetória de uma bola de futebol em uma cobrança de falta foi descrita por uma função quadrática que relaciona a altura h alcançada pela bola, em relação ao solo, e o deslocamento horizontal x da bola, sendo h e x dados em metro. Essa função é expressa por $h(x) = -\frac{x^2}{60} + 0,5x$.

a) Qual é a distância entre o ponto em que a bola sai do solo e o ponto em que a bola chega ao solo? 30 metros

b) Qual é a altura máxima atingida pela bola nessa trajetória? 3,75 metros

FOTOKOSTIC/SHUTTERSTOCK.COM

■ Nos lançamentos, a bola de futebol descreve uma trajetória parabólica.

18. Faça um esboço do gráfico das funções quadráticas a seguir. Indique o vértice da parábola, o ponto de intersecção da parábola com o eixo y e, se existirem, os zeros da função. Ver as **Orientações para o professor.**

a) $y = x^2 - 5x + 6$

b) $y = -x^2 + 4$

c) $y = x^2 - 4x + 4$

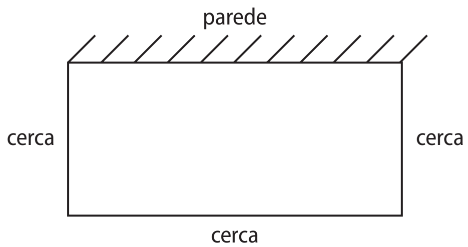
d) $y = x^2 + 2x + 5$

19. Determine o conjunto imagem das funções quadráticas definidas a seguir.

a) $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$ $\text{Im}(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -\frac{4}{3}\right\}$

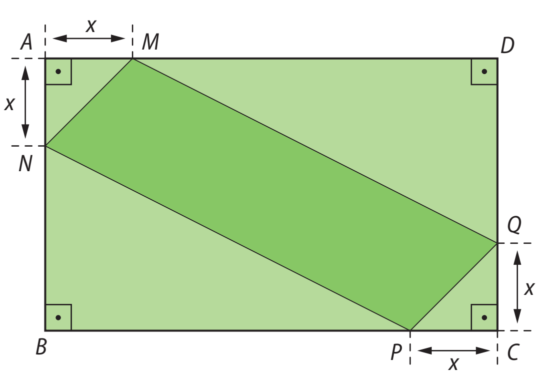
b) $g(x) = -2x^2 + 1$ $\text{Im}(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 1\}$

20. Murilo comprou 40 metros de cerca para fazer um cercado em formato de retângulo para seu cachorro no quintal de sua moradia. Ele vai aproveitar uma parede como um dos lados do cercado, de acordo com a figura a seguir.



Sabendo que ele vai utilizar toda a cerca comprada, qual é a área máxima que esse cercado poderá ter? 200 m²

21. (UFJF-MG) Sobre os lados do retângulo *ABCD*, de dimensões 30 cm e 50 cm, marcam-se os pontos *M*, *N*, *P* e *Q* de forma que a distância dos pontos *M* e *N* ao vértice *A* e dos pontos *P* e *Q* ao vértice *C* sejam iguais a *x* centímetros. Veja a figura abaixo:



Determine o valor de *x* de modo que o quadrilátero *MNPQ* tenha área máxima. 20 cm

22. (FEI-SP) Durante o processo de tratamento, uma peça de metal sofre uma variação de temperatura descrita pela função $f(t) = 2 + 4t - t^2$, $0 < t < 5$. Em que instante *t* a temperatura atinge seu valor máximo? $t = 2$

23. (Fuvest-SP) A dona de uma lanchonete observou que, vendendo um combo a R$ 10,00, 200 deles são vendidos por dia, e que, para cada redução de R$ 1,00 nesse preço, ela vende 100 combos a mais. Nessas condições, qual é a máxima arrecadação diária que ela espera obter com a venda desse combo? alternativa **c**

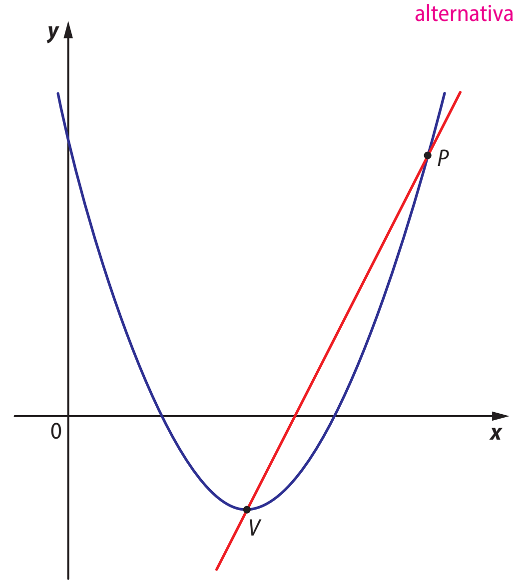
a) R$ 2.000,00.
b) R$ 3.200,00.
c) R$ 3.600,00.
d) R$ 4.000,00.
e) R$ 4.800,00.

24. (UEG-GO) O lucro de uma empresa é dado pela relação $R = L + C$, em que *L* é o lucro, *R* é a receita e *C* é o custo de produção. Numa empresa que produziu *x* unidades de um produto, verificou-se que $C(x) = 2x^2 + 2\,500x + 3\,000$ e $R(x) = x^2 + 7\,500x + 3\,000$.

a) Esboce o gráfico da função *L*.
Ver as **Orientações para o professor**.

b) Quantas unidades essa empresa deve produzir para obter o maior lucro possível?
2 500

25. (UEA-AM) Em um plano cartesiano, a parábola descrita pela função quadrática $f(x) = x^2 - 4x + 3$ tem vértice no ponto *V*, de abscissa 2, e passa pelo ponto *P* de abscissa 4.
alternativa **e**



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

A reta que passa pelos pontos *P* e *V* intersecta o eixo *y* no ponto de ordenada igual a

a) −2.
b) −1.
c) −4.
d) −3.
e) −5.

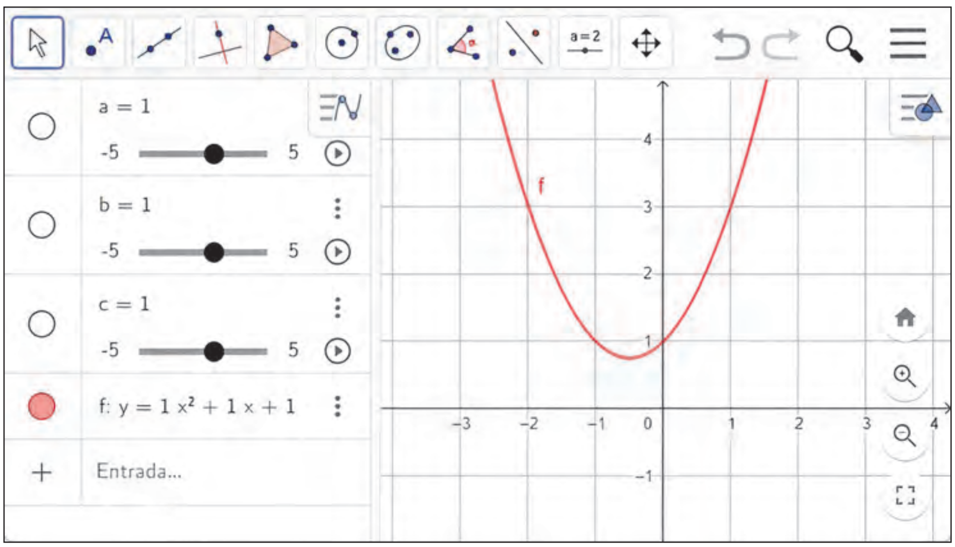
Valor máximo e valor mínimo

Estudamos como os coeficientes da lei de uma função quadrática influenciam no gráfico correspondente. Agora, vamos utilizar o **GeoGebra** para analisar também como esses coeficientes estão relacionados ao valor máximo e ao valor mínimo que uma função quadrática pode assumir.

Para isso, realize, inicialmente, a sequência de passos a seguir.

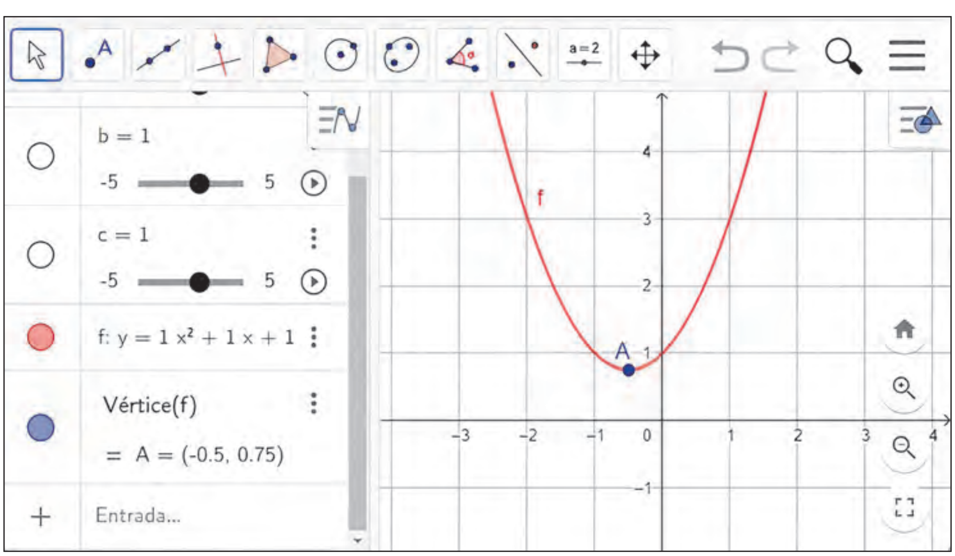
I. No campo de entrada do GeoGebra, digite "$y = ax$^2 $+ bx + c$" e pressione ***Enter***.

II. Serão exibidos o gráfico da função e os controles deslizantes dos coeficientes a, b e c. Observe que esses controles indicam, inicialmente, $a = b = c = 1$. Nesse caso, temos a representação do gráfico da função definida por $y = x^2 + x + 1$.

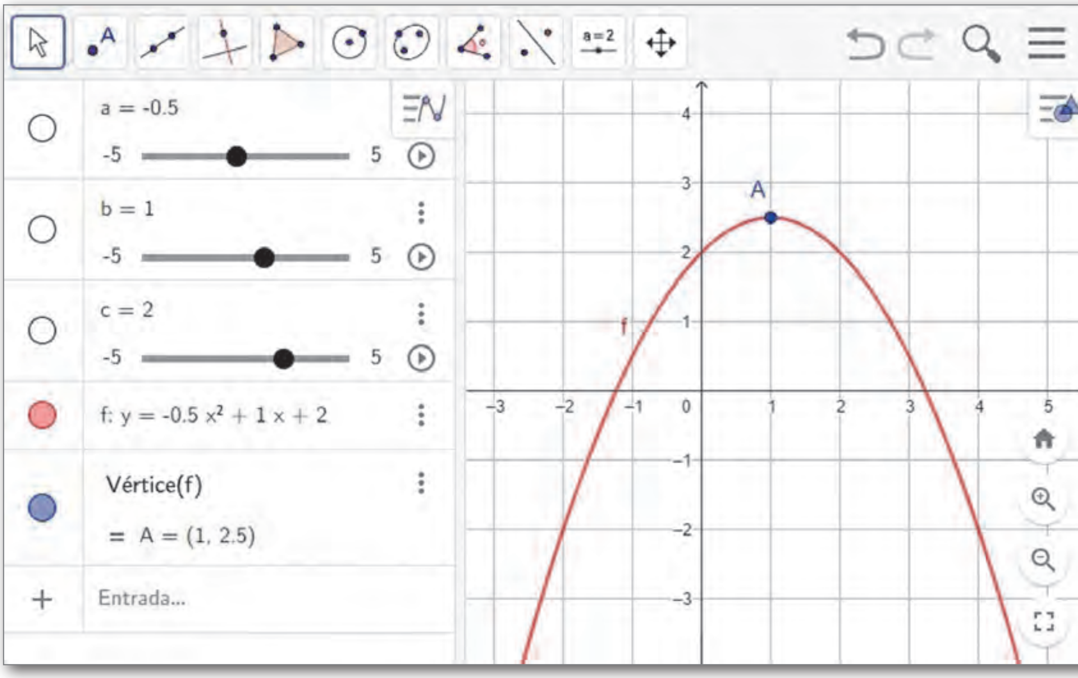


IMAGENS: REPRODUÇÃO/GEOGEBRA

III. Agora, no campo de entrada, digite "Vértice(f)" e observe que será exibido o ponto A, pertencente ao gráfico da função, correspondente ao vértice da parábola. Nesse caso, o vértice da parábola é o ponto de coordenadas $x_V = -0{,}5$ e $y_V = 0{,}75$.



IV. Mova o cursor do controle deslizante de cada coeficiente, observando as alterações no gráfico da função e nas coordenadas do ponto *A*.



IMAGENS: REPRODUÇÃO/GEOGEBRA

▪ Gráfico de *f* para $a = -0{,}5$, $b = 1$ e $c = 2$. Nesse caso, o vértice tem coordenadas $x_V = 1$ e $y_V = 2{,}5$.

Agora, aproveite a construção que você fez para realizar as atividades a seguir.

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. Qual coeficiente da lei da função quadrática devemos verificar para saber se o gráfico da função possui um ponto de máximo ou um ponto de mínimo? Justifique sua resposta. Ver as **Orientações para o professor**.

2. Utilizando o GeoGebra, indique o vértice da parábola, considerando os coeficientes a seguir.

a) $a = 2$, $b = 0$ e $c = 2$ $V(0, 2)$

b) $a = -1$, $b = 2$ e $c = -1$ $V(1, 0)$

c) $a = -2$, $b = -4$ e $c = -3$ $V(-1, -1)$

d) $a = 2$, $b = 4$ e $c = -1$ $V(-1, -3)$

3. Manipulando os controles deslizantes, determine os valores dos coeficientes *a*, *b* e *c* para os quais o vértice da parábola esteja localizado:

a) no terceiro quadrante;
Uma resposta possível: $a = 2$, $b = 4$ e $c = -1$

b) sobre o eixo *y*;
Uma resposta possível: $a = 3$, $b = 0$ e $c = 1$

c) sobre o eixo *x*.
Uma resposta possível: $a = 1$, $b = 0$ e $c = 0$

4. Clique com o botão direito do *mouse* em cima do vértice da parábola e selecione a opção **Exibir Rastro**. Depois, anime o coeficiente *b* clicando em ▶ na janela de Álgebra. O vértice descreve uma curva, qual você acha que é? Por quê? Respostas pessoais.

DICA: É possível alterar a cor do vértice para melhorar a visualização do rastro, se necessário. As opções de cores podem ser encontradas nas configurações do vértice.

Gestão de resíduos

Na sociedade atual, cada vez mais industrializada, utilizar os recursos naturais de forma sustentável é primordial para manter o meio ambiente em equilíbrio e não esgotar os recursos disponíveis no planeta. A Matemática pode contribuir para o planejamento realizado por empresas, considerando, por exemplo, a otimização do uso de matérias-primas.

Sobre o assunto, leia o texto a seguir.

Política Nacional de Resíduos Sólidos

A Lei nº 12.305/10, que institui a Política Nacional de Resíduos Sólidos (PNRS) [...] contém instrumentos importantes para permitir o avanço necessário ao País no enfrentamento dos principais problemas ambientais, sociais e econômicos decorrentes do manejo inadequado dos resíduos sólidos.

Prevê a prevenção e a redução na geração de resíduos, tendo como proposta a prática de hábitos de consumo sustentável e um conjunto de instrumentos para propiciar o aumento da reciclagem e da reutilização dos resíduos sólidos (aquilo que tem valor econômico e pode ser reciclado ou reaproveitado) e a destinação ambientalmente adequada dos rejeitos (aquilo que não pode ser reciclado ou reutilizado).


CHICO FERREIRA/PULSAR IMAGENS

Trabalhadora separa partes de resíduo sólido para reciclagem em São Gonçalo (RJ). Fotografia de 2024.

Institui a responsabilidade compartilhada dos geradores de resíduos: dos fabricantes, importadores, distribuidores, comerciantes, o cidadão e titulares de serviços de manejo dos resíduos sólidos urbanos na Logística Reversa dos resíduos e embalagens pré-consumo e pós-consumo.

Cria metas importantes que irão contribuir para a eliminação dos lixões e institui instrumentos de planejamento nos níveis nacional, estadual, microrregional, intermunicipal e metropolitano e municipal; além de impor que os particulares elaborem seus Planos de Gerenciamento de Resíduos Sólidos.

Também coloca o Brasil em patamar de igualdade aos principais países desenvolvidos no que concerne ao marco legal e inova com a inclusão de catadoras e catadores de materiais recicláveis e reutilizáveis, tanto na Logística Reversa quanto na Coleta Seletiva.

[...]

BRASIL. Ministério do Meio Ambiente. **Política Nacional de Resíduos Sólidos**. Brasília, DF: MMA, [201-]. Disponível em: https://antigo.mma.gov.br/cidades-sustentaveis/residuos-solidos/politica-nacional-de-residuos-solidos.html. Acesso em: 18 ago. 2024.

Logística reversa

[...]

[...] A PNRS define a logística reversa como um "instrumento de desenvolvimento econômico e social caracterizado por um conjunto de ações, procedimentos e meios destinados a viabilizar a coleta e a restituição dos resíduos sólidos ao setor empresarial, para reaproveitamento, em seu ciclo ou em outros ciclos produtivos, ou outra destinação final ambientalmente adequada".

[...]

BRASIL. Ministério do Meio Ambiente. **Logística reversa**. Brasília, DF: MMA, [201-]. Disponível em: https://antigo.mma.gov.br/cidades-sustentaveis/residuos-solidos/log%C3%ADstica-reversa.html. Acesso em: 18 ago. 2024.

DELFIM MARTINS/PULSAR IMAGENS

▪ Ponto de descarte de lixo reciclável (ecoponto) em praça de Fortaleza (CE). Fotografia de 2022.

Ver as **Orientações para o professor**.

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Agora, faça o que se pede nas atividades a seguir.

1. De acordo com os textos, quais são as propostas previstas na PNRS para a redução na geração de resíduos?

2. Uma fábrica de embalagens, considerando as propostas previstas na PNRS para a redução na geração de resíduos, está procurando otimizar a utilização de papelão na produção de caixas.
Os engenheiros construíram um modelo matemático que relaciona a quantidade de material desperdiçado com o tempo de produção de cada lote, utilizando a lei de uma função quadrática. Que conceito eles poderão utilizar para calcular o tempo de produção mais adequado para cumprir o objetivo?

ANDREI MAYATNIK/SHUTTERSTOCK.COM

▪ Linha de fabricação em empresa de caixas de papelão.

3. Reúna-se a dois colegas, e, juntos, pesquisem os conceitos de consumo consciente e de desperdício. Discutam o tema com os demais colegas e construam com a turma um painel expondo ações sustentáveis que podem ser adotadas por todos para minimizar o desperdício de recursos na moradia de cada um e na escola.

Para assistir

- CONHEÇA a Política Nacional de Resíduos Sólidos. [*S. l.*: *s. n.*], 2022. 1 vídeo (4 min). Publicado pelo canal SENAI Play. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=ha6aiQNWrtU. Acesso em: 25 jul. 2024.
  O vídeo apresenta algumas definições relacionadas ao tema de resíduos sólidos.

Investigando o comportamento de variáveis

Considere a situação proposta a seguir.

Um treinador está fazendo medições do tempo *t*, em segundo, que um atleta leva para atingir uma distância *d*, em metro, após iniciar uma corrida de treinamento para uma prova dos 100 metros rasos.

Observe, a seguir, os dados obtidos pelo treinador para o arranque do atleta nos primeiros 5 segundos.

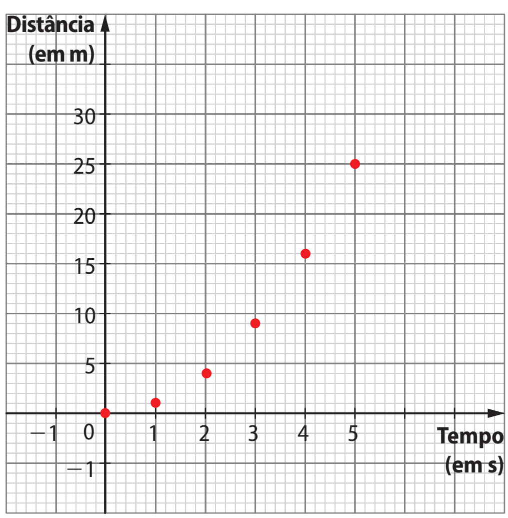
Saiba que...

Na situação, o corredor parte da largada com aceleração constante até atingir a linha de chegada.

Tempo (em segundo)	Distância (em metro)
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25

Após a obtenção dos dados, o treinador representou os valores obtidos em um plano cartesiano e obteve o esboço a seguir.

EDITORIA DE ARTE



Pense e responda

- Com base nas observações do treinador, pode-se afirmar que, nessa situação, as grandezas tempo e distância são grandezas diretamente proporcionais?

  Não são grandezas diretamente proporcionais.

- A resposta ao item anterior pode ser dada com base na análise do gráfico de pontos obtido pelo treinador? Justifique.

  Sim, o gráfico mostra que as grandezas envolvidas não são diretamente proporcionais, pois os pontos destacados não fazem parte de uma mesma reta.

- Que padrão pode ser observado nos valores referentes às medidas de distância obtidas?

  Espera-se que os estudantes respondam que os valores das distâncias são formados por números quadrados.

Com base na tabela e observando o gráfico, o treinador notou que, ao dobrar a medida do tempo, a distância percorrida era multiplicada por 4, ou seja, era multiplicada por 2^2, e que, ao triplicar o tempo, a distância era multiplicada por 9, ou seja, por 3^2.

Sendo *t* o tempo, em segundo, e *d* a distância, em metro, observando-se os valores da tabela, nota-se que:

Para $t = 0$, tem-se $d = 0 = 0^2$.
Para $t = 1$, tem-se $d = 1 = 1^2$.
Para $t = 2$, tem-se $d = 4 = 2^2$.
Para $t = 3$, tem-se $d = 9 = 3^2$.
Para $t = 4$, tem-se $d = 16 = 4^2$.
Para $t = 5$, tem-se $d = 25 = 5^2$.

SOLSTOCK/E+/GETTY IMAGES

■ A busca por tempos menores é parte importante para melhorar o desempenho de um atleta de corrida.

Sim, pois os pontos obtidos satisfazem à lei $d(t) = t^2$, que é a lei de uma função quadrática.

Portanto, percebe-se que, em cada medição, a medida da distância corresponde ao quadrado da medida do tempo. Desse modo, nessa situação, a lei da função que relaciona as variáveis t, em segundo, e d, em metro, pode ser expressa por $d(t) = t^2$.

Conforme acompanhamos, na situação apresentada, a relação entre a medida da distância e a medida do tempo pode ser expressa pela lei $d(t) = t^2$, que tem a forma da lei de uma função quadrática do tipo $y = ax^2$. Observamos também que, ao dobrar o valor de t, o valor correspondente de d fica multiplicado por 2^2. Ao triplicar o valor de t, o valor correspondente de d fica multiplicado por 3^2.

Isso acontece porque se trata de uma propriedade das funções quadráticas do tipo $y = ax^2$. Quando multiplicamos a variável x por uma constante real k, o valor correspondente de y é multiplicado por k^2.

Considere, agora, outra situação.

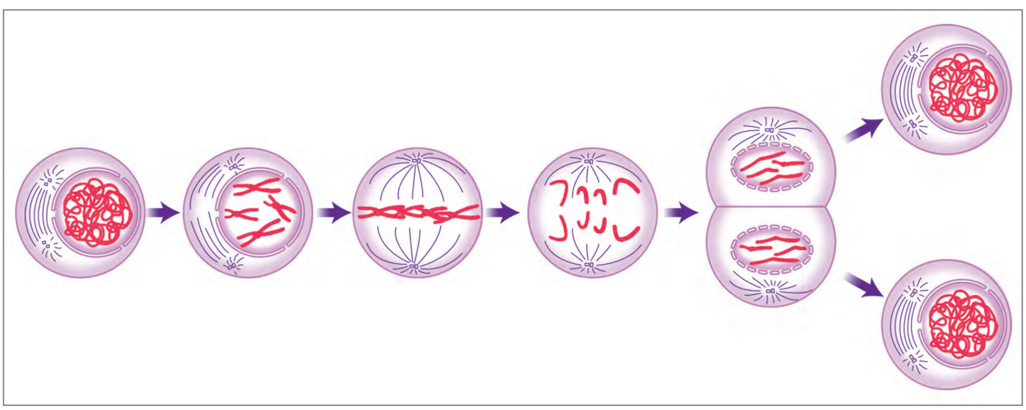
No processo de divisão celular conhecido como mitose, uma célula-mãe dá origem a duas células-filhas iguais a ela. Cada uma dessas células-filhas, por sua vez, pode se dividir em outras duas novas células, e assim sucessivamente, em diversas divisões.

Pense e responda

- A curva que contém os pontos do gráfico obtido pelo treinador é uma parábola? Por quê?
- De acordo com a lei da função, quantos metros o atleta percorre em 10 segundos? 100 metros
- Pesquise a respeito do recorde mundial para a prova dos 100 metros rasos e, com base nos dados encontrados, responda se você considera que a medida obtida no item anterior indica que o atleta da situação é de alto desempenho ou não.

O resultado anterior indica que o atleta é de alto desempenho, pois apresenta valores próximos aos de recordistas mundiais.

PAULO CÉSAR PEREIRA



Representação esquemática do processo de divisão celular por mitose (imagem sem escala; cores fantasia).

Na tabela, verificamos um modelo que conta a quantidade de células obtidas por meio desse tipo de divisão celular, considerando um processo contínuo a partir de uma única célula.

Quantidade de divisões	Quantidade de células
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32

Essa contagem não pode ser modelada por uma função quadrática que relaciona a quantidade de divisões no processo e a quantidade de células obtidas.

Verifique que, quando multiplicamos um número de divisões no processo por uma constante k, o número correspondente de células não fica multiplicado por k^2.

Comentar com os estudantes que, no estudo da função exponencial, realizado no Ensino Médio, eles terão um modelo matemático que poderá ser utilizado para representar essa situação.

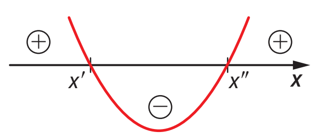
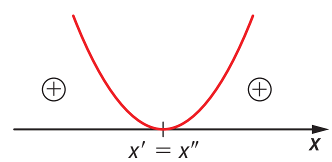
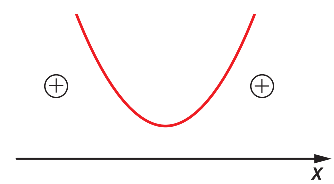
Estudo do sinal da função quadrática

Aprendemos que estudar o sinal de uma função definida por $y = f(x)$ significa determinar os valores reais de $x \in D(f)$ que tornam a função positiva ($f(x) > 0$), negativa ($f(x) < 0$) ou nula ($f(x) = 0$).

O estudo do sinal de uma função quadrática pode ser feito observando o esboço de sua representação gráfica, que, como já estudamos, é uma parábola.

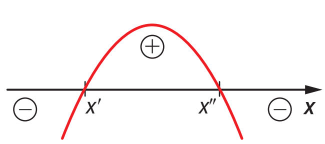
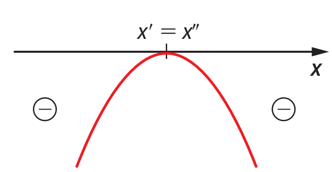
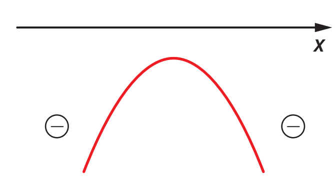
De acordo com a concavidade da parábola, relacionada ao coeficiente a, e com a quantidade de zeros da função, relacionada ao valor de Δ, podemos esboçar o gráfico de uma função quadrática e fazer o estudo de sinais, como verificado a seguir.

- Considerando $\boldsymbol{a > 0}$, temos as seguintes possibilidades:

$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
A função quadrática admite dois zeros reais distintos.  Nesse caso, temos: $f(x) > 0$ para $x < x'$ ou $x > x''$; $f(x) < 0$ para $x' < x < x''$; $f(x) = 0$ para $x = x'$ ou $x = x''$.	A função quadrática admite dois zeros reais iguais.  Nesse caso, temos: $f(x) = 0$ para $x = x' = x''$; $f(x) > 0$ para $x \neq x'$.	A função quadrática não admite zeros reais.  Nesse caso, temos: $f(x) > 0$ para todo x real.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

- Considerando $\boldsymbol{a < 0}$, temos as seguintes possibilidades:

$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
A função quadrática admite dois zeros reais distintos.  Nesse caso, temos: $f(x) < 0$ para $x < x'$ ou $x > x''$; $f(x) > 0$ para $x' < x < x''$; $f(x) = 0$ para $x = x'$ ou $x = x''$.	A função quadrática admite dois zeros reais iguais.  Nesse caso, temos: $f(x) = 0$ para $x = x' = x''$; $f(x) < 0$ para $x \neq x'$.	A função quadrática não admite zeros reais.  Nesse caso, temos: $f(x) < 0$ para todo x real.

Inequações polinomiais do 2º grau

Acompanhe a situação a seguir.

Um pequeno produtor de mel de abelha deseja vender sua produção em potes de mel. Dadas certas condições, como o custo de produção e a quantidade de unidades vendidas, ele sabe que o lucro semanal L, em reais, obtido com a venda do produto é modelado pela função $L(x) = -x^2 + 100x - 600$, em que x representa o preço, em reais, de cada pote de mel vendido.

Vamos, agora, resolver a seguinte questão:

Por quantos reais cada pote de mel deve ser vendido para que o produtor obtenha um lucro semanal maior do que R$ 1.000,00?

Para responder a essa questão, precisamos resolver a inequação $L(x) > 1000$.

Pense e responda

Utilizando o **GeoGebra**, represente o gráfico dessa função e descubra pelo menos um valor de x para o qual temos o lucro diário maior do que R$ 1.000,00.

Espera-se que, pela observação do gráfico construído, os estudantes deem como resposta algum valor de x entre 20 e 80.

Denominamos **inequação polinomial do 2º grau** na incógnita x toda desigualdade que pode ser reduzida a uma das formas a seguir, com a, b, $c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

- $ax^2 + bx + c \geqslant 0$
- $ax^2 + bx + c > 0$
- $ax^2 + bx + c \leqslant 0$
- $ax^2 + bx + c < 0$
- $ax^2 + bx + c \neq 0$

Observe alguns exemplos:

a) $x^2 - 3x + 1 \geqslant 0$ **b)** $-\sqrt{3}x^2 \leqslant 0$ **c)** $2x^2 - 5x < 0$

Ao resolver uma inequação do 2º grau, é preciso determinar os valores reais de x que satisfazem à inequação dada, o que é feito por meio do estudo do sinal da função quadrática correspondente.

Para determinar os valores de x para os quais $L(x) > 1000$, temos:

$-x^2 + 100x - 600 > 1000 \Rightarrow -x^2 + 100x - 1600 > 0$

Precisamos, então, estudar o sinal da função dada por: $f(x) = -x^2 + 100x - 1600$. Para isso, vamos obter os zeros da função e esboçar o seu gráfico.

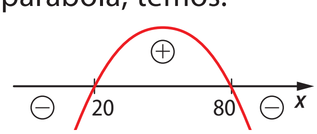
Considerando $-x^2 + 100x - 1600 = 0$, temos:

$\Delta = 100^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1600) = 3600$ (a função tem dois zeros reais distintos).

$$x = \frac{-100 \pm 60}{-2}$$

Logo, $x' = 20$ e $x'' = 80$.

Como $a < 0$, a concavidade da parábola é voltada para baixo. Fazendo um esboço da parábola, temos:



EDITORIA DE ARTE

Assim, $-x^2 + 100 - 1600 > 0$ para todos os valores reais de x tais que $20 < x < 80$.

Para que o produtor obtenha um lucro semanal maior do que R$ 1.000,00, o preço unitário de pote de mel deve ser maior do que R$ 20,00 e menor do que R$ 80,00.

ALENKADR/SHUTTERSTOCK.COM

O mel de abelha possui diversas propriedades benéficas à saúde humana, como propriedades anti-inflamatórias, antivirais e antifúngicas.

12. Considerando a função definida por $f(x) = -3x^2 + 2x + 1$, para quais valores de x verifica-se $f(x) \leqslant 0$?

Resolução

Para determinar os valores de x para os quais $f(x) \leqslant 0$, estudamos o sinal da função. Nesse caso, vamos obter os zeros da função e esboçar o seu gráfico.

Considerando $-3x^2 + 2x + 1 = 0$, temos:

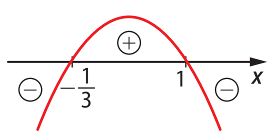
$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 1 = 16$$

Como $\Delta > 0$, a função tem dois zeros reais distintos.

$x = \dfrac{-2 \pm 4}{-6}$

Logo, $x' = -\dfrac{1}{3}$ e $x'' = 1$.

Como $a < 0$, a concavidade da parábola é voltada para baixo. Assim, temos:

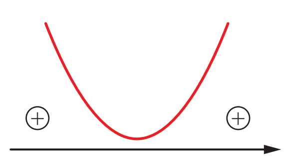


Portanto, $f(x) \leqslant 0$ para $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\dfrac{1}{3} \text{ ou } x \geqslant 1\right\}$.

13. Determine p de modo que a função dada por $f(x) = px^2 + (2p - 1)x + p$ assuma valores positivos para todo x real.

Resolução

Como se deseja que a função assuma valores positivos para todo x real, devemos ter $f(x) > 0$ para $x \in \mathbb{R}$. Fazendo um esboço do gráfico de f, temos:



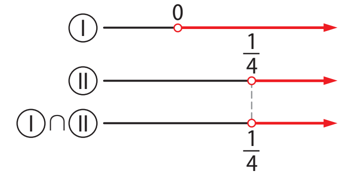
Como a parábola tem concavidade voltada para cima, $p > 0$. (I)

Como f não tem zero, $\Delta < 0$. Assim, temos:

$\Delta < 0 \Rightarrow (2p - 1)^2 - 4 \cdot p \cdot p < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4p^2 - 4p + 1 - 4p^2 < 0 \Rightarrow p > \dfrac{1}{4}$ (II)

Considerando as desigualdades (I) e (II), obtemos:



Logo, para que a função f seja sempre positiva, devemos ter $p > \dfrac{1}{4}$, com $p \in \mathbb{R}$.

14. (FGV-SP) O custo diário de produção de um artigo é $C = 50 + 2x + 0{,}1x^2$, onde x é a quantidade diária produzida. Cada unidade do produto é vendida por R$ 6,50. Entre que valores deve variar x para não haver prejuízo?

a) $19 \leqslant x \leqslant 24$
b) $20 \leqslant x \leqslant 25$
c) $21 \leqslant x \leqslant 26$
d) $22 \leqslant x \leqslant 27$
e) $23 \leqslant x \leqslant 28$

Resolução

Considerando que a quantidade diária produzida x seja vendida, a receita arrecadada $R(x)$ com a venda diária deve ser maior ou igual ao custo diário para que não haja prejuízo. A receita pode ser expressa por $R(x) = 6{,}5x$.

Nesse caso, temos:

$R(x) \geqslant C(x) \Rightarrow R(x) - C(x) \geqslant 0$

Logo:

$6{,}5x - (50 + 2x + 0{,}1x^2) \geqslant 0$

$6{,}5x - 50 - 2x - 0{,}1x^2 \geqslant 0$

$-0{,}1x^2 + 4{,}5x - 50 \geqslant 0$

Na resolução dessa inequação, obtemos os zeros da função dada por $y = -0{,}1x^2 + 4{,}5x - 50$ e esboçamos o gráfico correspondente.

Considerando $-0{,}1x^2 + 4{,}5x - 50 = 0$, temos:

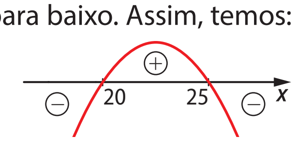
$\Delta = (4{,}5)^2 - 4 \cdot (-0{,}1) \cdot (-50) = 0{,}25$

Como $\Delta > 0$, a função tem dois zeros reais distintos.

$x = \dfrac{-4{,}5 \pm 0{,}5}{-0{,}2}$

Logo, $x' = 20$ e $x'' = 25$.

Como $a < 0$, a concavidade da parábola é voltada para baixo. Assim, temos:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Portanto, não haverá prejuízo quando $20 \leqslant x \leqslant 25$.

A resposta é a alternativa **b**.

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

26. Estude os sinais das funções definidas a seguir.

Ver as **Orientações para o professor**.

a) $f(x) = x^2 - 3x - 10$

b) $f(x) = -x^2 + 2x$

c) $f(x) = -4x^2 + 4x - 1$

d) $f(x) = x^2 - x + 10$

27. Dada a função definida por: $\left\{m \in \mathbb{R} \mid m < -\frac{1}{4}\right\}$
$f(x) = x^2 - (2m + 1)x + m^2$, determine m de modo que $f(x) > 0$ para todo x real.

28. Considerando uma função dada por
$f(x) = kx^2 - 2kx + k - 1$, calcule os valores de k para que $f(x)$ assuma valores negativos para todo x real. $\{k \in \mathbb{R} \mid k < 0\}$

29. Resolva as seguintes inequações do 2º grau.

a) $x^2 - 2x - 8 < 0$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 4\}$

b) $9x^2 - 8x - 1 \geqslant 0$ $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\frac{1}{9} \text{ ou } x \geqslant 1\right\}$

c) $-3x^2 + 2x - 1 > 0$ $S = \varnothing$

d) $-x^2 + 4x - 4 < 0$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$

30. Determine o conjunto solução da inequação:
$(2x - 5)(x - 4) - 7 \geqslant (x - 2)(x - 3)$
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 1 \text{ ou } x \geqslant 7\}$

31. Sabendo que $f(x) = x^2 - 3x + 8$, determine o conjunto solução da inequação $f(x) \geqslant 2f(1)$. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant 4\}$

32. (UFJF-MG) Considere a função $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $h(t) = -5t^2 + 7t + 6$. $\left\{t \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{5} \leqslant t \leqslant 1\right\}$

a) Para quais valores de t tem-se $h(t) \geqslant 8$?

b) Determine o conjunto imagem da função h.
$\text{Im}(h) =]-\infty, 8{,}45]$

33. (FGV-SP) O lucro mensal de uma empresa é dado por $L = -x^2 + 30x - 5$, onde x é a quantidade mensal vendida.

a) Qual o lucro mensal máximo possível?
R$ 220,00

b) Entre quais valores deve variar x para que o lucro mensal seja, no mínimo, igual a 195?
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 10 \leqslant x \leqslant 20\}$

34. (UERJ) Considere as seguintes funções, relativas a uma ninhada de pássaros:

$C = 5 + 10n$
C = custo mensal, em reais, para a manutenção de n pássaros

$V = -5n^2 + 100n - 320$
V = valor mensal arrecadado, em reais, com a venda de n pássaros, para $4 \leqslant n \leqslant 16$

Sabe-se que o lucro mensal obtido é determinado pela diferença entre os valores de venda V e custo C.

a) Determine os possíveis valores de n para que haja lucro nas vendas. $5 < n < 13$

b) Calcule o valor de n que proporciona o maior lucro possível e o valor, em reais, desse lucro. $n = 9$; R$ 80,00

35. (UFPB) Um fabricante de picolés distribui diariamente, com seus vendedores, caixas contendo, cada uma, 300 picolés. O lucro diário, em reais, na venda desses picolés, é dado pela função $L(n) = -200n^2 + 1600n - 2400$, onde n é o número de caixas vendidas. Considere as afirmações relativas ao lucro diário:

I. Para $2 < n < 6$ o fabricante terá lucro.

II. O lucro não poderá ser superior a R$ 1.000,00.

III. O lucro será máximo quando forem vendidos 1500 picolés.

Está(ão) correta(s) apenas: alternativa **a**

a) I e II.

b) I e III.

c) II e III.

d) I.

e) III.

36. (Mack-SP) Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função definida por $f(x) = -2x^2 + x + 1$, então os valores de x para os quais f assume valores positivos são

a) $-2 < x < 1$

b) $-1 < x < 2$

c) $-1 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$

d) $-1 < x < \frac{1}{2}$

e) $-\frac{1}{2} < x < 1$

alternativa **e**

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Galileu Galilei

Leia a seguir um texto sobre Galileu Galilei e algumas de suas contribuições para a Ciência. Observe a expressão que ele usou para descrever a relação entre a distância percorrida por um corpo em queda livre e o tempo de queda. Nessa lei, g é uma constante correspondente à aceleração gravitacional.

[...]

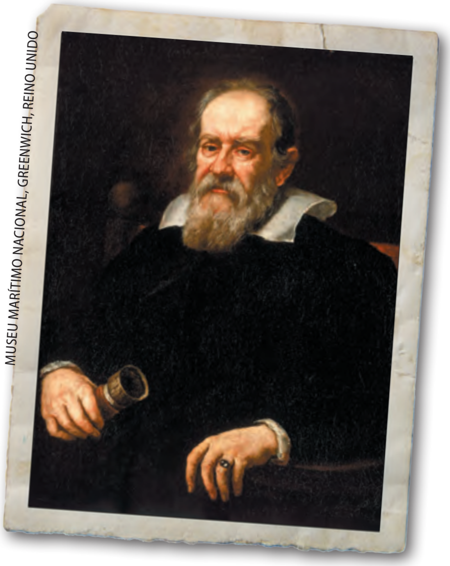
Galileu, filho de um nobre florentino empobrecido, nasceu em Pisa em 1564, no dia em que faleceu Michelangelo. Aos dezessete anos de idade foi encaminhado pelos pais à Universidade de Pisa para estudar medicina. Um dia, quando assistia a um serviço na Catedral de Pisa, seu espírito se distraiu observando o grande lustre de bronze suspenso da elevada abóbada. A lâmpada tinha sido posta para fora a fim de iluminar mais facilmente e, solta, oscilava para cá e para lá com amplitude que decrescia gradualmente. Usando as batidas de seu pulso para marcar o tempo, ele ficou surpreso ao verificar que o período de uma oscilação da lâmpada independia da amplitude do arco de oscilação. Posteriormente, por experiências, ele mostrou que o período de um pêndulo em movimento também independe do peso de sua massa oscilante, dependendo assim apenas do comprimento de sua haste. Relata-se que o interesse de Galileu pela ciência e pela matemática surgiu desse problema e foi estimulado, posteriormente, pela oportunidade de assistir a um curso de geometria na Universidade. Como resultado solicitou da família (e conseguiu) permissão para abandonar a medicina e dedicar-se à ciência e à matemática, campos para os quais possuía forte talento natural.

Aos vinte e cinco anos de idade Galileu foi indicado professor de matemática da Universidade de Pisa, tendo, segundo consta, realizado experiências públicas sobre a queda dos corpos enquanto exerceu essa função. Conta uma história que, perante uma multidão de estudantes, professores e religiosos, ele deixou cair dois pedaços de metal, um deles com peso dez vezes o do outro, do alto da torre de Pisa. Os dois pedaços chocaram-se contra o chão praticamente no mesmo momento, contrariando assim Aristóteles, segundo quem o corpo mais pesado teria de cair muito mais rapidamente do que o outro. Galileu estabeleceu a lei segundo a qual a distância percorrida por um corpo em queda livre é proporcional ao quadrado do tempo de queda, e que se traduz na fórmula familiar $s = \dfrac{gt^2}{2}$.

[...]

Devemos a Galileu o moderno espírito científico na forma de uma harmonia entre experiência e teoria. Ele fundou a mecânica dos corpos em queda livre, lançou os fundamentos da dinâmica em geral, e sobre esses fundamentos mais tarde Newton foi capaz de construir uma ciência.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004. p. 352-355.



■ SUSTERMANS, Justus. **Portrait of Galileo Galilei** [Retrato de Galileu Galilei]. 1636. Óleo sobre tela, 86,7 cm × 68,6 cm. Museu Marítimo Nacional, Greenwich, Reino Unido. Galileu Galilei (1564-1642), físico, matemático, astrônomo e filósofo italiano.

ATIVIDADES COMPLEMENTARES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. (UFMS) Um retângulo inicial, de perímetro 200 centimetros, sofre uma modificação tal que a medida de sua largura aumenta 20%, e a medida do seu comprimento diminui 20%. Determine a função que define a área A do novo retângulo, em centimetros quadrados, em relação à medida da largura do retângulo inicial x, em centimetros. alternativa **e**

a) $A(x) = 120x - 0{,}8x^2$
b) $A(x) = 120x + 0{,}8x^2$
c) $A(x) = 98x - 0{,}98x^2$
d) $A(x) = 80x - 1{,}2x^2$
e) $A(x) = 96x - 0{,}96x^2$

2. (UEPB) Um setor de uma metalúrgica produz uma quantidade N de peças dada pela função $N(x) = x^2 + 10x$, x horas após iniciar suas atividades diárias. Iniciando suas atividades às 6 horas, o número de peças produzidas no intervalo de tempo entre as 7 e as 9 horas será igual a: alternativa **b**

a) 50. **b)** 28. **c)** 25. **d)** 16. **e)** 39.

3. (PUCCamp-SP) Considere que a curva que fornece os níveis de oxigênio dissolvido, em µg/L, no período de 1900 a 1950, seja o arco de parábola definido por $y = -\frac{1}{50}x^2 - \frac{3}{50}x + \frac{51}{20}$, em que x representa o número de décadas contadas a partir de 1900 ($x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$). Nessas condições, no período de 1910 a 1930, o nível de oxigênio dissolvido decresceu em:

a) 0,24 µg/L.
b) 0,25 µg/L.
c) 0,26 µg/L.
d) 0,27 µg/L.
e) 0,28 µg/L.

alternativa **e**

4. (PUC-RS) A função quadrática tem diversas aplicações no nosso dia a dia. Na construção de antenas parabólicas, superfícies de faróis de carros e outras aplicações, são exploradas propriedades da parábola, nome dado à curva que é o gráfico de uma função quadrática. Seja $p(x) = mx^2 + nx + 1$. Se $p(2) = 0$ e $p(-1) = 0$, então os valores de m e n são, respectivamente, iguais a alternativa **a**

a) $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$.
b) -1 e 1.
c) 1 e $\frac{1}{2}$.
d) -1 e $-\frac{1}{2}$.

5. (Fuvest-SP) Considere a função polinomial $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. No plano cartesiano xy, a única intersecção da reta $y = 2$ com o gráfico de f é o ponto $(2, 2)$ e a intersecção da reta $x = 0$ com o gráfico f é ponto $(0, -6)$. O valor de $a + b + c$ é alternativa **b**

a) -2. **b)** 0. **c)** 2. **d)** 4. **e)** 6.

6. (Fuvest-SP) Os funcionários de um salão de beleza compraram um presente no valor de R$ 200,00 para a recepcionista do estabelecimento. No momento da divisão igualitária do valor, dois deles desistiram de participar e, por causa disso, cada pessoa que ficou no grupo precisou pagar R$ 5,00 a mais que a quantia originalmente prevista. O valor pago por pessoa que permaneceu na divisão do custo do presente foi: alternativa **d**

a) R$ 10,00.
b) R$ 15,00.
c) R$ 20,00.
d) R$ 25,00.
e) R$ 40,00.

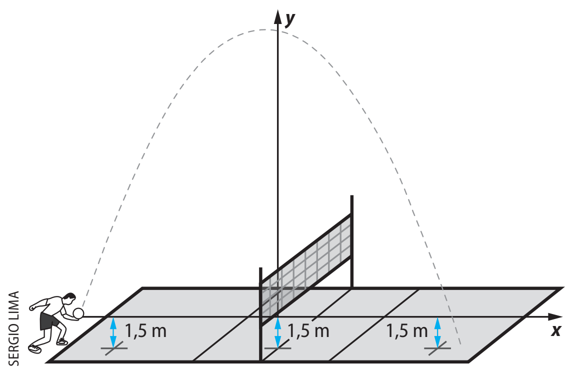
7. (UEA-AM) As funções f, g e h são funções reais, tais que $f(x) = -x + 2$, $g(x) = x + 1$ e $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. Com base nessas funções, é correto afirmar que a soma das raízes da função h é igual a alternativa **a**

a) 1. **b)** 2. **c)** -2. **d)** -1. **e)** 3.

8. (Udesc) A função quadrática cujo gráfico contém os pontos $(0, -9)$, $(1, 0)$ e $(2, 15)$ tem vértice em: alternativa **e**

a) $(-2, -13)$.
b) $(1, 0)$.
c) $(0, -9)$.
d) $(2, 15)$.
e) $(-1, -12)$.

9. (Enem/MEC) Em jogos de voleibol, um saque é invalidado se a bola atingir o teto do ginásio onde ocorre o jogo. Um jogador de uma equipe tem um saque que atinge uma grande altura. Seu recorde foi quando a batida do saque se iniciou a uma altura de 1,5 m do piso da quadra, e a trajetória da bola foi descrita pela parábola $y = -\frac{x^2}{6} - \frac{7x}{3} + 12$, em que y representa a altura da bola em relação ao eixo x (das abscissas) que está localizado a 1,5 m do piso da quadra, como representado na figura. Suponha que em todas as partidas algum saque desse jogador atinja a mesma altura do seu recorde. alternativa **d**



A equipe desse jogador participou de um torneio de voleibol no qual jogou cinco partidas, cada uma delas em um ginásio diferente. As alturas dos tetos desses ginásios, em relação aos pisos das quadras, são:

- ginásio I: 17 m;
- ginásio II: 18 m;
- ginásio III: 19 m;
- ginásio IV: 21 m;
- ginásio V: 40 m.

O saque desse atleta foi invalidado

a) apenas no ginásio I.
b) apenas nos ginásios I e II.
c) apenas nos ginásios I, II e III.
d) apenas nos ginásios I, II, III e IV.

10. (UEG-GO) Um lava jato tem 50 clientes fixos por semana e cada lavagem custa R$ 20,00. Sabe-se que a cada um real que o dono desse lava jato aumenta no preço da lavagem, ele perde 2 clientes. O valor do aumento que maximiza a arrecadação semanal desse lava jato é de

a) R$ 25,00.
b) R$ 20,00.
c) R$ 2,50.
d) R$ 10,00.
e) R$ 2,00.

alternativa **c**

11. (Acafe-SC) Um clube recreativo possui 800 sócios e cobra uma mensalidade de R$ 200,00 de cada sócio. Uma pesquisa de mercado indica que a cada R$ 1,00 de redução na mensalidade, há um aumento de 10 sócios. O valor da mensalidade que gera a maior receita é de:

a) R$ 120,00.
b) R$ 60,00.
c) R$ 140,00.
d) R$ 160,00.

alternativa **c**

12. (Ifal) Certo fabricante, segundo levantamentos estatísticos, percebe que seus clientes não têm comprado mais de 100 de seus produtos por compras. Para incentivar as compras em maior quantidade, ele estabelece um preço unitário p por produto dado por $p(x) = 400 - x$, onde x é a quantidade de produtos comprados, considerando uma compra de, no máximo, 300 produtos. Sabendo-se que a receita de uma empresa é o valor arrecadado com a venda de uma certa quantidade de produtos, qual a receita máxima que essa empresa pode ter quando fechar uma venda com um determinado cliente, na moeda corrente no Brasil? alternativa **d**

a) R$ 200,00.
b) R$ 400,00.
c) R$ 20.000,00.
d) R$ 40.000,00.
e) R$ 80.000,00.

13. (UERJ) Um número N, inteiro e positivo, que satisfaz à inequação $N^2 - 17N + 16 > 0$ é: alternativa **d**

a) 2.
b) 7.
c) 16.
d) 17.

14. (Uneb-BA) Um paciente compareceu a um Posto de Saúde apresentando febre de 40 °C, foi atendido e, duas horas depois, a febre havia diminuído para 38 °C. Sabendo-se que, nesse período, sua temperatura variou como uma função F do 2º grau, atingindo seu valor máximo, F_m, 30 min após o início do atendimento, é correto afirmar que o valor de $(F_m - 3{,}00)$ é

01) 36,25 °C.
02) 37,25 °C.
03) 38,25 °C.
04) 39,25 °C.
05) 40,25 °C.

alternativa **02**

15. (Enem/MEC) A Igreja de São Francisco de Assis, obra arquitetônica modernista de Oscar Niemeyer, localizada na Lagoa da Pampulha, em Belo Horizonte, possui abóbadas parabólicas. A seta na Figura 1 ilustra uma das abóbadas na entrada principal da capela. A Figura 2 fornece uma vista frontal desta abóbada, com medidas hipotéticas para simplificar os cálculos.

ENEM, 2017

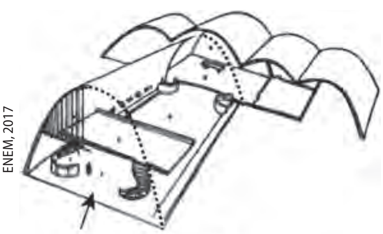


Figura 1

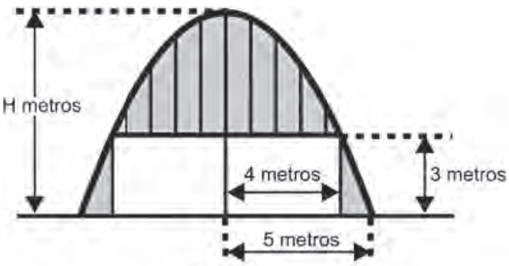


Figura 2

Qual a medida da altura H, em metro, indicada na Figura 2? alternativa **d**

a) $\frac{16}{3}$ **b)** $\frac{31}{5}$ **c)** $\frac{25}{4}$ **d)** $\frac{25}{3}$ **e)** $\frac{75}{2}$

PARA REFLETIR

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Neste Capítulo, aprendemos que as funções quadráticas podem ser utilizadas para modelar situações, bem como para descrever alguns tipos de movimento e de trajetórias estudados pela Física.

Estudamos o conceito matemático de função quadrática, as representações gráficas desse tipo de função, os vértices da parábola, os zeros da função quadrática, o crescimento e o decrescimento, o valor máximo e o valor mínimo que uma função quadrática pode assumir em um intervalo, bem como o estudo de sinais da função quadrática e as inequações do 2º grau.

Nas páginas de abertura, foi apresentada uma curiosa espécie de peixe que utiliza o lançamento de jatos de água para caçar. Depois de ter estudado o conteúdo deste Capítulo, você consegue reconhecer que a trajetória do jato de água pode ser modelada por uma função? Que tipo de função?

Vamos refletir a respeito das aprendizagens do Capítulo **4**:

- Você já conhecia algum dos conteúdos apresentados ao longo deste Capítulo? Qual(is)?
- Cite outras situações do dia a dia que envolvem a ideia de função quadrática.
- Identifique a relação entre o estudo da função quadrática e os conteúdos estudados na disciplina de Física ou em outra disciplina da área de Ciências da Natureza.
- Como o estudo de valor máximo e de valor mínimo de uma função quadrática pode ser usado para planejar formas de economizar e otimizar processos?
- Cite situações em que os conceitos estudados podem ajudar a tomar decisões e a resolver problemas do dia a dia. Respostas pessoais.

CAPÍTULO

5 FUNÇÃO EXPONENCIAL

A disseminação de informações falsas, conhecidas como *fake news*, é um fenômeno alarmante que se espalha de maneira veloz por meio da internet e, em especial, nas redes sociais. Essas notícias distorcem fatos e influenciam percepções públicas, podendo resultar em danos significativos.

Com a facilidade de compartilhamento e a ausência de verificação, as *fake news* têm o potencial de induzir comportamentos enganosos e até mesmo causar pânico. Para conter essa propagação, é fundamental verificar a veracidade das informações antes de compartilhá-las.

A rapidez com que uma *fake news* se espalha é impressionante: suponha que, em apenas 30 segundos, uma pessoa possa ler e compartilhar a notícia com outras duas, que, por sua vez, fazem o mesmo, compartilhando a notícia com mais duas pessoas cada uma e, assim, sucessivamente, gerando uma disseminação para mais de 1000 indivíduos em menos de cinco minutos! Esse padrão de propagação pode ser analisado por meio de uma função exponencial, conteúdo que será estudado neste Capítulo.

Elaborado com base em: AMARAL, Inês; SANTOS, Sofia José. Algoritmos e redes sociais: a propagação de *fake news* na era da pós-verdade. *In*: FIGUEIRA, João; SANTOS, Sílvio (org.). **As *fake news* e a nova ordem (des)informativa na era da pós-verdade**. Coimbra: Imprensa da Universidade de Coimbra, 2019. p. 63-85. Disponível em: https://estudogeral.uc.pt/bitstream/10316/96605/1/Algoritmos%20e%20redes%20sociais.pdf. Acesso em: 1 ago. 2024.

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Agora reúna-se a um colega, e respondam às questões.

1. Por que as *fake news* são criadas? Resposta pessoal. Os estudantes podem citar objetivos diversos, como: favorecer ideologias, disseminar preconceito, gerar pânico, promover difamação, entre outros.

2. Como podemos evitar a propagação de notícias falsas? Deem exemplos de ações de combate às *fake news*.

2. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes indiquem ações como verificação de fontes, validação das ideias descritas na publicação em outros materiais, verificação do respeito aos direitos humanos, entre outras.

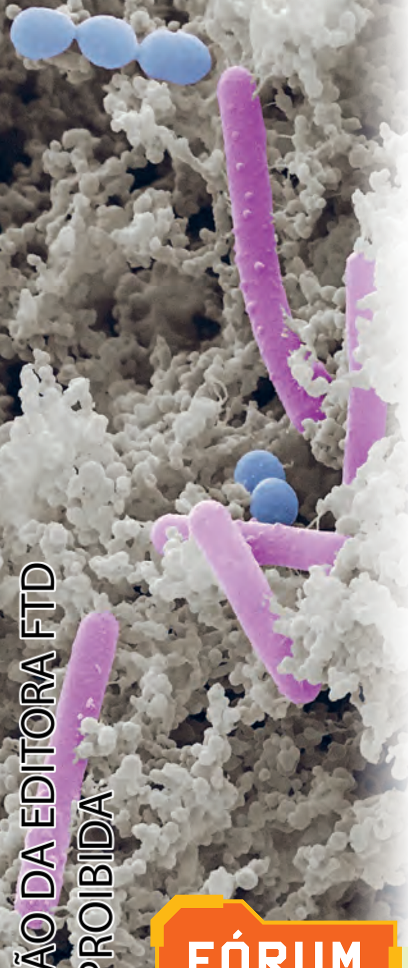
3. Uma pessoa compartilhou uma notícia falsa em seu perfil de uma rede social. Se essa notícia for compartilhada para duas pessoas no primeiro minuto e depois o compartilhamento dobrar a cada minuto, quantos compartilhamentos ocorrerão no 3º minuto? E no 5º minuto?
8 e 32 compartilhamentos, respectivamente

4. Efetue as operações e escreva as respostas em notação científica.

a) 6^4 $1{,}296 \cdot 10^3$ **b)** $0{,}5^3$ $1{,}25 \cdot 10^{-1}$ **c)** $\left(\frac{1}{11}\right)^{-2}$ $1{,}21 \cdot 10^2$ **d)** $\left(\frac{1}{400}\right)^{\frac{1}{2}}$ $5{,}0 \cdot 10^{-2}$

RAWPIXEL.COM/SHUTTERSTOCK.COM

- A propagação de *fake news* acontece de forma ampla e rápida.



POWER AND SYRED/SCIENCE PHOTO LIBRARY/FOTOARENA

Introdução

Nos alimentos derivados do leite fermentado, há bactérias que colaboram para o equilíbrio da flora intestinal, evitando a proliferação de bactérias nocivas, melhorando a absorção de nutrientes e fortalecendo nosso sistema imunológico.

Apesar de esses alimentos serem benéficos, o consumo em excesso pode acarretar alguns efeitos indesejados ao nosso organismo. Esses efeitos podem estar relacionados ao aumento do número de bactérias, que se reproduzem muito rapidamente.

Em geral, o crescimento de uma população de bactérias pode ser modelado por um tipo de função que estudaremos neste Capítulo: a função exponencial.

▪ Micrografia de dois tipos de bactéria presentes no iogurte. Um dos tipos tem formato arredondado e está colorizado em azul; o outro lembra um bastão e está colorizado em rosa; em branco, iogurte visto por meio do microscópio (imagem de microscopia eletrônica, aumento aproximado de 5 600 vezes; colorida artificialmente).

FÓRUM

Conservação de alimentos

A conservação de alimentos é um processo essencial para garantir a disponibilidade de alimentos seguros e nutritivos em todas as épocas do ano. Dentro desse vasto universo, os laticínios ocupam um lugar de destaque, oferecendo uma rica fonte de nutrientes, como cálcio e proteínas. No entanto, a composição específica desses alimentos torna-os particularmente suscetíveis à rápida proliferação de microrganismos, o que pode levar a uma perda acelerada e ao desperdício, se não forem armazenados corretamente.

Além disso, é importante observar atentamente o prazo de validade dos alimentos e consumi-los antes de seu vencimento. O prazo de validade é uma indicação da segurança e da qualidade dos alimentos e deve ser respeitado para garantir que não causem qualquer dano, pois ignorar esse aspecto pode resultar em riscos para a saúde, como o risco de infecção por bactérias, além de contribuir para o desperdício de alimentos que ainda estão próprios para consumo.

Para evitar o desperdício de laticínios e de alimentos em geral, devemos adotar práticas de compra e armazenamento conscientes. Comprar apenas a quantidade necessária de alimentos e armazená-los adequadamente pode ajudar a prolongar sua vida útil e reduzir a necessidade de descarte precoce. Além disso, é importante planejar as refeições com antecedência e usar técnicas de reaproveitamento criativas.

- Converse com os colegas e professores a respeito de outras práticas que podem ser utilizadas no dia a dia para evitar o desperdício de alimentos, especialmente produtos perecíveis, como os laticínios. Ver as **Orientações para o professor**.

Potenciação e radiciação

Antes de abordar o conteúdo de função exponencial, vamos retomar conhecimentos sobre **potenciação** e **radiciação**, pois serão essenciais no estudo desse tipo de função.

Potência com expoente natural

Acompanhe, a seguir, a definição de potenciação quando o expoente é um número natural.

Sendo a um número real e n um número natural, com $n \geqslant 2$, definimos a potência de base a e expoente n como o produto de n fatores iguais a a.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}}$$

Além disso, considerando a um número real, tem-se que:

- para $n = 1$, definimos $a^1 = a$.
- para $a \neq 0$ e $n = 0$, definimos $a^0 = 1$.

Exemplos:

a) $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$

b) $(\sqrt{2})^1 = \sqrt{2}$

c) $\left(-\frac{1}{2}\right)^7 = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{128}\right)$

d) $(-3)^0 = 1$

Potência com expoente inteiro

Para estender o conceito de potência para expoentes inteiros, vamos definir o que significa uma potência de expoente inteiro negativo.

Sendo a um número real não nulo ($a \neq 0$) e n um número inteiro, define-se:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Exemplos:

a) $6^{-1} = \frac{1}{6}$

b) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{64}\right)} = 64$

Propriedades da potenciação

É possível demonstrar que, dados a e b reais não nulos e m e n inteiros, são válidas as seguintes propriedades operatórias com expoentes inteiros.

1ª propriedade:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Exemplo: $3^4 \cdot 3^2 = 3^{4+2} = 3^6 = 729$

2ª propriedade:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^m : a^n = a^{m-n}$$

Exemplo: $\frac{4^5}{4^3} = 4^{5-3} = 4^2 = 16$

3ª propriedade:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Exemplo: $(6^2)^3 = 6^{2 \cdot 3} = 6^6 = 46\,656$

4ª propriedade:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Exemplo: $(5 \cdot 4)^3 = 5^3 \cdot 4^3 = 125 \cdot 64 = 8\,000$

5ª propriedade:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a^n}{b^n}\right)$$

Exemplo: $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$

» Notação científica

No meio científico, é comum nos depararmos com números muito grandes, como as distâncias entre os planetas, ou muito pequenos, como o tamanho de uma célula.

Quando queremos expressar números como esses, recorremos ao uso da **notação científica**, utilizando potências na base 10 para simplificar essas representações.

Sendo a um número real, tal que $1 \leqslant a < 10$, e n um número inteiro, a forma em notação científica de um número real não nulo é dada por: $a \cdot 10^n$

Exemplos:

a) O raio médio do Sol é de aproximadamente 696 000 000 metros; em notação científica, temos: 696 000 000 metros $= 6{,}96 \cdot 10^8$ metros (note que $n = 8$ e $a = 6{,}96$).

Pense e responda 1 nanometro $= 1 \cdot 10^{-9}$ metro

Pesquise sobre o nanometro e expresse 1 nanometro em metro, utilizando notação científica.

b) O diâmetro do átomo de hidrogênio é de aproximadamente 0,0000000001 metro; em notação científica, temos: 0,0000000001 metro $= 1{,}0 \cdot 10^{-10}$ metro (note que $n = -10$ e $a = 1{,}0$).

Para assistir

- O QUE é a nanotecnologia? [*S. l.*: *s. n.*], 2014. 1 vídeo (3 min). Publicado pelo canal Study Inalberta. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=oHgN4jtieTg. Acesso em: 1 ago. 2024.

  A palavra **nano** pode significar pequeno, muito pequeno. Quando nos referimos a medidas de comprimento, 1 nanometro equivale a 1 milionésimo de milimetro. Assista ao vídeo para saber mais.

Radiciação

Antes de abordarmos o conteúdo de potência com expoente racional, vamos retomar a definição de raiz enésima e as propriedades da operação de radiciação.

Sendo a um número real não negativo e n um número natural não nulo, a raiz enésima de a é o número real não negativo b, tal que $b^n = a$. Em símbolos, podemos escrever:

$$\underbrace{\sqrt[n]{a} = b}_{\text{Lê-se raiz enésima de } a \text{ é igual a } b.} \text{ se, e somente se, } b^n = a$$

- Para n ímpar e a um número real negativo, a raiz enésima de a é o número real negativo b, tal que $b^n = a$.
- Para n par e a um número real negativo, não podemos definir a raiz enésima real de a, pois não existe número real b, tal que $b^n = a$.

Exemplos:

a) $\sqrt[4]{16} = 2$ se, e somente se, $2^4 = 16$.

b) $\sqrt[2]{9} = 3$ se, e somente se, $3^2 = 9$.

c) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$ se, e somente se, $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.

d) $\sqrt[3]{-8} = -2$, porque $(-2)^3 = -8$.

e) $\nexists\, b \in \mathbb{R}$, tal que $\sqrt[2]{-4} = b$.

Propriedades da radiciação

Dados a e b números reais não negativos, m inteiro e n, p e q naturais não nulos, sendo q um divisor comum de n e m, apresentamos as seguintes propriedades.

1ª propriedade:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

Exemplo: $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2 \cdot 5} = \sqrt[3]{10}$

2ª propriedade:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Exemplo: $\sqrt[3]{27^4} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^4 = 3^4 = 81$

3ª propriedade:

$$\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[n \cdot p]{a}$$

Exemplo: $\sqrt[4]{\sqrt[3]{7}} = \sqrt[4 \cdot 3]{7} = \sqrt[12]{7}$

4ª propriedade:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}} \text{ e}$$
$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n : q]{a^{m : q}}$$

Exemplo: $\sqrt[4]{6^3} = \sqrt[4 \cdot 5]{6^{3 \cdot 5}} = \sqrt[20]{6^{15}}$

e $\sqrt[20]{6^{15}} = \sqrt[20 : 5]{6^{15 : 5}} = \sqrt[4]{6^3}$

5ª propriedade:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Exemplo: $\sqrt[3]{\frac{125}{8}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{5}{2}$

Potência com expoente racional

Acompanhe a seguir a definição de potência com expoente fracionário, sendo o numerador inteiro e o denominador natural diferente de 0.

> Se a é um número real positivo, m é inteiro e n é natural não nulo, define-se:
>
> $$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Exemplos:

a) $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$ **b)** $13^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{13^2}$ **c)** $\sqrt{21} = 21^{\frac{1}{2}}$ **d)** $\sqrt[4]{16^3} = 16^{\frac{3}{4}}$

Observação:

As potências com expoente racional têm as mesmas propriedades operatórias que as potências com expoente inteiro.

Exemplo:

$8^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{8^4} = \sqrt[3]{(4\,096)} = 16$ ou $8^{\frac{4}{3}} = (2^3)^{\frac{4}{3}} = 2^{3 \cdot \frac{4}{3}} = 2^4 = 16$

Potência com expoente irracional

Neste tópico, vamos aprender como calcular o valor de uma potência com expoente irracional.

Por exemplo, como calcular $10^{\sqrt{2}}$?

Para responder a essa pergunta, vamos considerar, inicialmente, aproximações racionais de $\sqrt{2}$ por falta, tomando os valores 1,4; 1,41; 1,414; ..., e por excesso, tomando os valores 1,5; 1,42; 1,415; ...

Usando uma calculadora científica, vamos listar alguns resultados e obter a melhor aproximação para $10^{\sqrt{2}}$.

n	10^n
1,4	25,11886432
1,41	25,70395783
1,414	25,94179362
1,4142	25,95374301
1,41421	25,95434062
1,414213	25,95451991
⋮	⋮

n	10^n
1,5	31,62277660
1,42	26,30267992
1,415	26,00159563
1,4143	25,95971977
1,41422	25,95493825
1,414214	25,95457967
⋮	⋮

De acordo com os resultados obtidos nos dois quadros, uma aproximação racional para $10^{\sqrt{2}}$ com quatro casas decimais é 25,9545.

$$25{,}95451991 < 10^{\sqrt{2}} < 25{,}95457967$$

Continuando esse processo, podemos encontrar uma aproximação racional para $10^{\sqrt{2}}$ com quantas casas decimais se deseje.

> Sendo *a* um número real positivo e *x* um número irracional, podemos obter aproximações racionais para o valor de a^x, com quantas casas decimais quisermos, atribuindo a *x* valores aproximados por falta e por excesso.

Para potências com expoente irracional, valem as mesmas propriedades operatórias das potências com expoente inteiro.

Exemplos:

a) $(10^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 10^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = 10^{\sqrt{2 \cdot 2}} = 10^2 = 100$

b) $2^{\pi} \cdot 2^{3\pi} = 2^{\pi + 3\pi} = 2^{4\pi}$

c) $9^{3\sqrt{5}} : 9^{\sqrt{5}} = 9^{3\sqrt{5} - \sqrt{5}} = 9^{2\sqrt{5}}$

d) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{\sqrt{3}} = \dfrac{2^{\sqrt{3}}}{5^{\sqrt{3}}}$

Calculando com o auxílio de uma calculadora

Geralmente, as calculadoras mais simples têm a tecla [√]. Com ela, podemos calcular a raiz quadrada de um número real maior do que ou igual a 0. Por exemplo: para calcular $\sqrt{2}$, pressionamos [√] [2] [=] e obtemos 1,414213562.

Agora, para calcular outras potências quaisquer, diferentes de $a^{\frac{1}{2}}$, será necessário utilizar uma calculadora científica que tenha a tecla [^]. Em alguns modelos, essa tecla aparece como [y^x] (com *y* representando a base da potência, e *x*, o expoente) ou [x^y] (com *x* representando a base da potência, e *y*, o expoente). Por exemplo: para calcular 2^{10}, pressionamos [2] [^] [1] [0] [=] ou [2] [y^x] [1] [0] [=] ou [2] [x^y] [1] [0] [=] e obtemos 1 024.

Entre as diferentes opções que uma calculadora científica pode oferecer, estão:

- o cálculo de uma raiz enésima. Por exemplo: para calcular $\sqrt[7]{123}$, pressionamos [7] [SHIFT] [^ ($\sqrt[x]{\ }$)] [1] [2] [3] [=] e obtemos 1,988647795;
- a utilização do número irracional π. Por exemplo: para calcular $2^{4\pi}$, pressionamos [2] [^] [(] [4] [×] [SHIFT] [EXP (π)] [)] [=] e obtemos 6 065,330793.

Observações:

A tecla [SHIFT] permite acionar as opções escritas acima das teclas na mesma cor da palavra *Shift*.

As teclas [(] e [)] devem ser utilizadas para indicar a ordem de cálculo das operações e identificar corretamente os termos de uma expressão a serem considerados.

Saiba que...

Os passos indicados e a quantidade de casas decimais em todos os exemplos podem variar ligeiramente dependendo do modelo da calculadora.

ATIVIDADES RESOLVIDAS

1. Calcule o valor de $\left(\frac{1}{243}\right)^{-\frac{2}{5}}$.

Resolução

Decompondo o número 243 em fatores primos, obtemos: $243 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

Logo, $243 = 3^5$.

Então: $\left(\frac{1}{243}\right)^{-\frac{2}{5}} = \left(\frac{1}{3^5}\right)^{-\frac{2}{5}}$

Como o expoente é negativo, aplicamos a definição $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Assim: $\left(\frac{1}{3^5}\right)^{-\frac{2}{5}} = (3^5)^{\frac{2}{5}}$

Aplicando a propriedade $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$, obtemos: $(3^5)^{\frac{2}{5}} = 3^{5 \cdot \frac{2}{5}} = 3^2 = 9$

Portanto, $\left(\frac{1}{243}\right)^{-\frac{2}{5}} = 9$.

2. Aplicando as propriedades da potenciação, calcule $(5^3 \cdot 5^6) : 5^{10}$.

Resolução

Usando as propriedades, temos: $(5^3 \cdot 5^6) : 5^{10} = 5^{3+6} : 5^{10} = 5^9 : 5^{10} = 5^{9-10} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$

3. Simplifique a expressão $\frac{(0{,}1)^5 \cdot (0{,}01)^4 \cdot 100}{(0{,}001)^3}$.

Resolução

Substituindo os números decimais por frações decimais e aplicando as propriedades de potências, temos:

$$\frac{\left(\frac{1}{10}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^4 \cdot 100}{\left(\frac{1}{1\,000}\right)^3} = \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{10^2}\right)^4 \cdot 10^2}{\left(\frac{1}{10^3}\right)^3} = \frac{(10^{-1})^5 \cdot (10^{-2})^4 \cdot 10^2}{(10^{-3})^3} = \frac{10^{-5} \cdot 10^{-8} \cdot 10^2}{10^{-9}} =$$

$$= \frac{10^{-5-8+2}}{10^{-9}} = \frac{10^{-11}}{10^{-9}} = 10^{-11} \cdot 10^9 = 10^{-11+9} = 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$$

4. (PUCCamp-SP) Efetuando-se $\sqrt[3]{\frac{14}{125} + \sqrt{\frac{3}{5} - \frac{11}{25}}}$, obtém-se:

a) $\frac{\sqrt[3]{14} + 2}{5}$ **b)** $\frac{\sqrt[3]{114}}{5}$ **c)** $\frac{6}{5}$ **d)** $\frac{4}{5}$ **e)** $\frac{3}{5}$

Resolução

Resolvendo as operações e aplicando as propriedades da radiciação, temos:

$$\sqrt[3]{\frac{14}{125} + \sqrt{\frac{3}{5} - \frac{11}{25}}} = \sqrt[3]{\frac{14}{125} + \sqrt{\frac{15-11}{25}}} = \sqrt[3]{\frac{14}{125} + \sqrt{\frac{4}{25}}} = \sqrt[3]{\frac{14}{125} + \frac{2}{25}} = \sqrt[3]{\frac{14+50}{125}} = \sqrt[3]{\frac{64}{125}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{4}{5}$$

Logo, $\sqrt[3]{\frac{14}{125} + \sqrt{\frac{3}{5} - \frac{11}{25}}} = \frac{4}{5}$.

A resposta correta é a alternativa **d**.

5. Utilize uma calculadora científica e determine valores reais aproximados para $9^{2\sqrt{5}}$ e $\frac{2^{\sqrt{3}}}{5^{\sqrt{3}}}$.

Resolução

Para calcular $9^{2\sqrt{5}}$, pressionamos [9] [^] [(] [2] [×] [√] [5] [)] [=] e obtemos 18 514,08427.

Para calcular $\frac{2^{\sqrt{3}}}{5^{\sqrt{3}}}$, pressionamos [(] [2] [^] [√] [3] [)] [÷] [(] [5] [^] [√] [3] [)] [=] e obtemos 0,204525605.

ATIVIDADES

1. f) $\sqrt{3^{-1}}$ ou $\sqrt{\frac{1}{3}}$; 0,577

1. Escreva, sob a forma de radical, as potências a seguir. Depois, com o auxílio de uma calculadora, calcule seu valor com aproximação de três casas decimais.

a) $5^{\frac{3}{4}}$ $\sqrt[4]{5^3}$; 3,344 **c)** $2^{\frac{1}{3}}$ $\sqrt[3]{2}$; 1,260 **e)** $\pi^{\frac{1}{4}}$ $\sqrt[4]{\pi}$; 1,331

b) $10^{\frac{1}{2}}$ $\sqrt{10}$; 3,162 **d)** $3^{0,25}$ $\sqrt[4]{3}$; 1,316 **f)** $3^{-\frac{1}{2}}$

2. Aplicando as propriedades gerais das potências, reduza a uma só potência os itens a seguir. Considere $a \neq 0$.

a) $3^4 \cdot 3^5$ 3^9 **d)** $\dfrac{10^{12}}{10^5}$ 10^7

b) $(x^3)^4$ x^{12} **e)** $(10^3)^2$ 10^6

c) $7^9 \cdot 7^4$ 7^{13} **f)** $a^{n+1} \cdot a^{n-2}$ a^{2n-1}

3. Escreva os números a seguir na forma de potência com expoente inteiro negativo. Considere $a \neq 0$.

a) $\dfrac{1}{3^2}$ 3^{-2} **c)** $\dfrac{1}{2^5}$ 2^{-5} **e)** $\dfrac{1}{2}$ 2^{-1}

b) $\dfrac{1}{10^4}$ 10^{-4} **d)** $\dfrac{1}{6^2}$ 6^{-2} **f)** $\dfrac{1}{a^2}$ a^{-2}

4. Usando uma calculadora científica, calcule cada potência com aproximação de três casas decimais.

a) $5^{1,5}$ 11,180 **e)** $2^{2,6}$ 6,063

b) $12^{\frac{1}{4}}$ 1,861 **f)** $\left(\dfrac{5}{3}\right)^{1,25}$ 1,894

c) $28^{0,25}$ 2,300 **g)** $3^{\sqrt{5}}$ 11,665

d) $3^{4,5}$ 140,296 **h)** $10^{\sqrt{3}}$ 53,957

5. Leia os itens a seguir e escreva os números em notação científica. Utilize a aproximação de três casas decimais.

a) A velocidade da luz no vácuo é igual a 299 793 458 m/s. $2,998 \cdot 10^8$

b) O diâmetro da Terra é cerca de 12 742 km. $1,274 \cdot 10^4$

c) O vírus influenza é uma partícula esférica que tem um diâmetro interno de aproximadamente 0,00011 mm. $1,1 \cdot 10^{-4}$

6. Efetue os cálculos a seguir e dê as respostas em notação científica.

a) $(2,0 \cdot 10^3) \cdot (4,0 \cdot 10^{-5})$ $8 \cdot 10^{-2}$

b) $(5,2 \cdot 10^6) : (1,3 \cdot 10^{-3})$ $4 \cdot 10^9$

c) $(1,5 \cdot 10^3) \cdot (2,0 \cdot 10^{-5}) \cdot (4,0 \cdot 10^{-8})$ $1,2 \cdot 10^{-9}$

7. (Unicamp-SP) $a = 27$; $b = -8$; $c = \frac{1}{9}$; $d = -\frac{1}{8}$

a) Calcule as seguintes potências: $a = 3^3$, $b = (-2)^3$, $c = 3^{-2}$ e $d = (-2)^{-3}$.

b) Escreva os números a, b, c e d em ordem crescente. $-8; -\frac{1}{8}; \frac{1}{9}; 27$

8. Qual é a metade de 2^{2012}? 2^{2011}

9. Determine o número que representa a expressão:

$$(4^{x+2} : 4^{x-2}) : (4^x : 4^{x-1})$$ 64

10. Determine o valor da expressão $\dfrac{3^{12} - 3^{11} - 3^{10}}{3^{11} + 3^{10} + 3^{10}}$. 1

11. Sendo $A = 12^n$, com $78 \leqslant n \leqslant 155$, qual é o maior valor natural de n para que o algarismo das unidades de A seja 6? $n = 152$

12. Calcule o valor das expressões a seguir, utilizando as propriedades da potenciação.

a) $(27 \cdot 8)^{-\frac{1}{3}}$ $\frac{1}{6}$ **d)** $\dfrac{7^{4,3} \cdot 7^{-2,6}}{7^{-0,3}}$ 49

b) $81^{\frac{7}{4}} \cdot 81^{-\frac{1}{2}}$ 243 $\frac{25}{4}$ **e)** $\left(\dfrac{1}{625}\right)^{-\frac{1}{4}} \cdot \left(\dfrac{64}{125}\right)^{-\frac{1}{3}}$

c) $\left(8^{\frac{4}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}$ $\frac{1}{4}$

13. O erro foi cometido na passagem 3: $5^{1+\sqrt{3}-\sqrt{3}+1} = 5^2 = 25$

13. Ao se resolver a expressão apresentada, cometeu-se um erro em uma das passagens. Descubra qual é esse erro, corrija-o e dê a resposta correta.

$5^{1+\sqrt{3}} : 5^{\sqrt{3}-1} = \dfrac{5^{1+\sqrt{3}}}{5^{\sqrt{3}-1}} =$ (passagem 1)

$= 5^{(1+\sqrt{3})-(\sqrt{3}-1)} =$ (passagem 2)

$= 5^{\cancel{1}+\sqrt{3}-\sqrt{3}-\cancel{1}} =$ (passagem 3)

$= 5^0 = 1$ (passagem 4)

14. (UFSM-RS) Determine o valor da expressão $\sqrt[3]{\dfrac{(60\,000) \cdot (0,00009)}{0,0002}}$. 30

15. (FEI-SP) Que número real representa a expressão $\dfrac{(0,1)^{-1} - (0,8)^0}{2^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}}$? $-\frac{1}{3}$

16. (Fuvest-SP) Sendo $x = (2^2)^3$, $y = 2^{2^3}$ e $z = 2^{3^2}$, qual é a potência que representa a expressão xyz? 2^{23}

17. (UFRGS-RS) Simplifique a expressão:

$$\frac{10^{10} + 10^{20} + 10^{30}}{10^{20} + 10^{30} + 10^{40}}$$ 10^{-10}

18. (PUC-SP) Escreva a expressão abaixo, em que $n \in \mathbb{Z}$, em sua forma mais simples:

$$\frac{(2^{n-1} + 2^n + 2^{n+1}) \cdot (3^{n-1} + 3^n + 3^{n+1})}{6^n + 6^{n+1}}$$ $\frac{13}{6}$

Função exponencial

Uma vez revisadas as propriedades básicas da potenciação e da radiciação, vamos agora estudar a função exponencial, que é um tipo de função real cuja definição apresentamos a seguir.

> A função $f\colon \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ dada por $f(x) = a^x$, com $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $a \neq 1$, é denominada função exponencial de base a.

Exemplos:

a) $f(x) = 2^x$ **b)** $f(x) = (0{,}4)^x$ **c)** $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ **d)** $f(x) = (\sqrt{5})^x$

Em uma função exponencial dada por $f(x) = a^x$, a base a deve ser positiva e diferente de 1, pois:

- Se $a < 0$, então $f(x) = a^x$ não estaria definida para todo x real. Por exemplo, supondo $a = -2$ e $x = \frac{1}{2}$, teríamos a potência $(-2)^{\frac{1}{2}}$ que não está definida em $\mathbb{R}$.
- Se $a = 1$, então $f(x) = a^x$ é uma função constante, pois: $f(x) = 1^x \Rightarrow f(x) = 1$ para todo x real.
- Se $a = 0$, então $f(x) = a^x$ não estaria definida para todo x real. Por exemplo, considerando $x = -2$, teríamos a potência $(0)^{-2}$ que não está definida em $\mathbb{R}$.

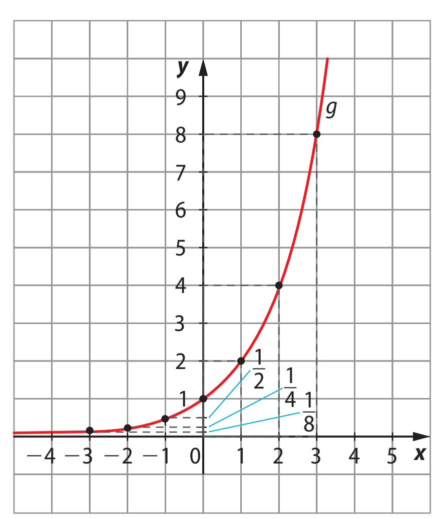
  Além disso, para $a = 0$ e $x > 0$, a função f seria constante e igual a zero.

Gráfico da função exponencial

Vamos, agora, esboçar o gráfico de algumas funções exponenciais. Observe os exemplos a seguir.

- Esboço do gráfico de $g(x) = 2^x$.

x	$g(x) = 2^x$
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

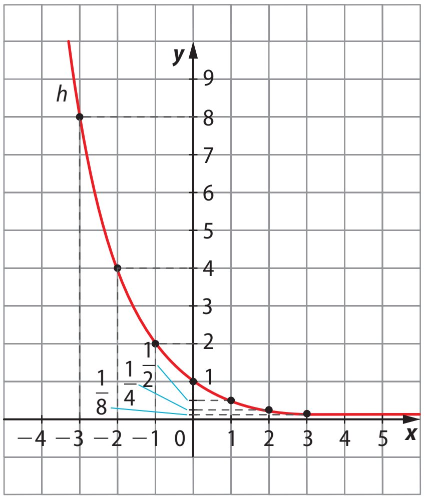


EDITORIA DE ARTE

Observe que os valores de 2^x aumentam conforme o valor de x aumenta. Essa característica pode ser observada sempre que $a > 1$.

- Esboço do gráfico de $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

x	$h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$



Observe que os valores de $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ diminuem conforme o valor de x aumenta. Essa característica pode ser observada sempre que $0 < a < 1$.

Considerando a função exponencial dada por $f(x) = a^x$ (com $a > 0$ e $a \neq 1$), temos:

- o domínio da função é $D(f) = \mathbb{R}$;
- o contradomínio da função é $CD(f) = \mathbb{R}_+^*$;
- o conjunto imagem da função é $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$.

Saiba que...

Os gráficos das funções g e h se aproximam do eixo x, mas não o tocam, e intersectam o eixo y no ponto (0, 1).

Pense e responda

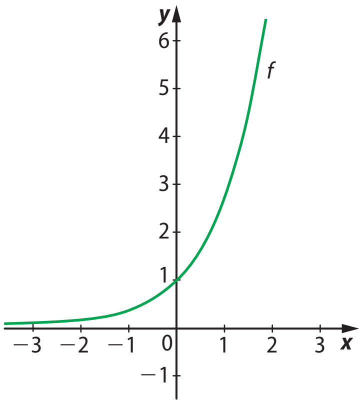
Podemos dizer que os gráficos das funções g e h, representados em um mesmo sistema cartesiano, são simétricos com relação ao eixo y?

sim, pois $g(x) = h(-x)$ e $g(-x) = h(x)$

A função $f(x) = e^x$

Vamos, agora, conhecer a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ definida por $f(x) = e^x$, que é uma função exponencial cuja base é o número e. Vários fenômenos das Ciências da Natureza podem ser modelados tomando-se como base essa função e ela também é utilizada em diversas aplicações dentro da própria Matemática.

Observe, a seguir, como é o gráfico dessa função.



Saiba que...

Conforme estudamos no Capítulo **1**, o número e, conhecido como número de Euler, é um número irracional cujo valor é 2,718281...

Pense e responda

- Em que ponto o gráfico da função intersecta o eixo y?
- Qual é o valor de $f(1)$? (0, 1); $f(1) = e$

A base da potenciação e o gráfico da função exponencial

Vamos utilizar o **GeoGebra** para analisar a influência da base a da potenciação no gráfico da função exponencial.

Para isso, acompanhe os passos a seguir.

Se achar necessário, lembrar aos estudantes que, por padrão, o controle deslizante é criado limitado ao intervalo $[-5, 5]$ e que, para alterar esse intervalo, basta clicar em cima do número -5 ou do 5 no controle deslizante e alterar esses números para os valores desejados.

I. No campo de entrada do GeoGebra, digite "$f(x) = a$ ^ x" e pressione ***Enter***.

II. O programa vai criar, na janela de Álgebra, um controle deslizante para o coeficiente a e exibirá, na janela de visualização, o gráfico da função f de acordo com o valor indicado no controle deslizante.

Ao ser criado, o controle aparece indicando $a = 1$. Mova o cursor do controle deslizante, alterando o valor de a, e observe o que acontece com o gráfico de f.

Observe que o valor indicado no controle, quando $a > 0$ e $a \neq 1$, representa o valor da base da função exponencial dada por $f(x) = a^x$.

Note que, quando f é a função exponencial, ela tem valores muito próximos de zero, mas nunca assume o valor zero, ou seja, não existe x tal que $f(x) = 0$. Você pode conferir esse fato dando *zoom* na tela do GeoGebra para aproximar o gráfico e verificar que ele nunca encosta no eixo x. Para isso, basta movimentar o botão ***Scroll*** do *mouse* para a frente ou utilizar o ícone 🔍.

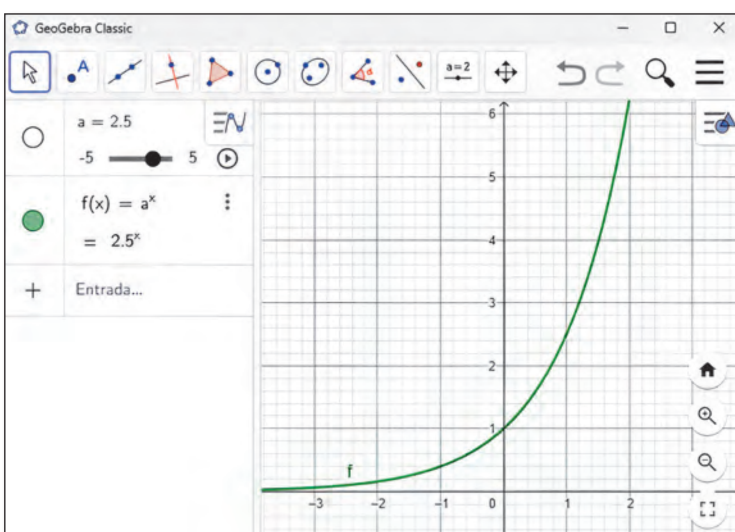


Gráfico de f quando $a = 2{,}5$.

1. a) Nenhum gráfico é exibido, pois $a < 0$ não é um valor válido para a na função.
b) O gráfico representa uma função decrescente.
c) O gráfico é uma reta paralela ao eixo x, pois a função definida é a função constante dada por $f(x) = 1^x = 1$.
d) O gráfico representa uma função crescente.

Agora, faça o que se pede nas atividades a seguir.

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. Movimente o cursor do controle deslizante e altere o valor de a. Analise as alterações no gráfico e registre o que acontece em cada caso a seguir.

a) Para $a < 0$; **b)** Para $0 < a < 1$; **c)** Para $a = 1$; **d)** Para $a > 1$.

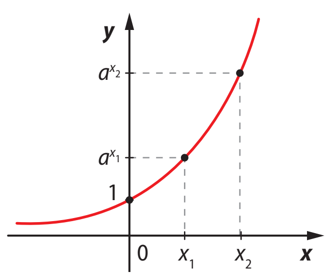
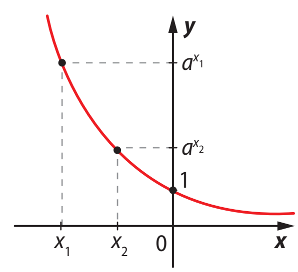
2. Em uma nova janela do GeoGebra, construa, agora, o gráfico da função definida por $g(x) = 2^{b \cdot x}$.
Para isso, digite "$g(x) = 2$ ^ $(b * x)$" no campo de entrada.
Altere o valor de b e analise o que acontece quando:

a) $b < 0$; A função é decrescente. **b)** $b > 0$. A função é crescente.

» Crescimento e decrescimento da função exponencial

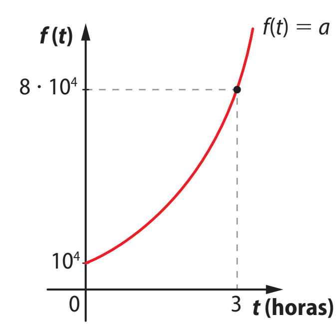
De acordo com os exemplos apresentados nas páginas 190 e 191 e com o estudo feito na página 192, podemos perceber que a base da potência a^x influencia o comportamento da função exponencial dada por $f(x) = a^x$.

De modo geral, considerando a função exponencial dada por $f(x) = a^x$, temos:

$a > 1$	$0 < a < 1$
	
▪ Quando $a > 1$, a função é **crescente**. $\forall x_1, x_2 \in D(f), x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$	▪ Quando $0 < a < 1$, a função é **decrescente**. $\forall x_1, x_2 \in D(f), x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$

ATIVIDADES RESOLVIDAS

6. O gráfico representado a seguir mostra a evolução do número de bactérias em certa cultura.
Quantas bactérias haverá, aproximadamente, nessa cultura decorridos 30 minutos do início das observações?



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Resolução

A partir da observação do gráfico, verificamos que a função é do tipo $f(t) = a \cdot b^t$ e contém os pontos $(0, 10^4)$ e $(3, 8 \cdot 10^4)$.
Dessa maneira:

- $f(0) = a \cdot b^0 = 10^4 \Rightarrow a = 10^4$
- $f(3) = a \cdot b^3 = 8 \cdot 10^4 \Rightarrow a \cdot b^3 = 8 \cdot 10^4$

Como $a = 10^4$, temos: $10^4 \cdot b^3 = 8 \cdot 10^4 \Rightarrow b^3 = \dfrac{8 \cdot 10^4}{10^4} \Rightarrow b^3 = 8 \Rightarrow b = 2$

Portanto, $f(t) = 10^4 \cdot 2^t$.

Adotamos $t = \dfrac{1}{2}$ para descobrir a quantidade de bactérias após 30 minutos (meia hora) do início das observações:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 10^4 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 10^4 \cdot \sqrt{2} \simeq 10^4 \cdot 1{,}41 \simeq 14\,100$$

Assim, haverá aproximadamente 14 100 bactérias nessa cultura.

7. (Unifei-MG) Sendo $f(x) = \left(\frac{5}{4}\right)^x$ para $x \in \mathbb{R}$, pode-se afirmar que:

a) o gráfico de f intersecta o eixo x em apenas um ponto.

b) f é decrescente.

c) o conjunto imagem de f é dado por $\text{Im}(f) =]0, +\infty[$.

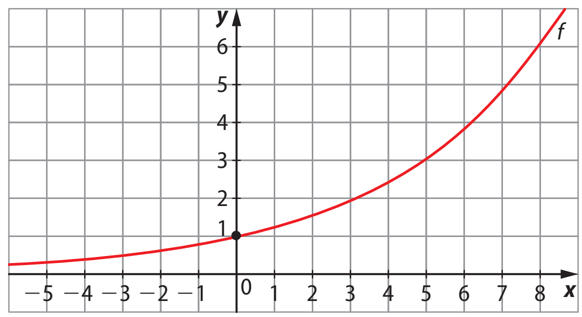
d) o gráfico de f intersecta o eixo y no ponto $\left(0, \frac{5}{4}\right)$.

e) $f(-1) = \frac{5}{4}$.

Resolução

Vamos esboçar o gráfico da função $f(x) = \left(\frac{5}{4}\right)^x$. Como $a > 1$, a função é crescente.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x) = \left(\frac{5}{4}\right)^x$	$\frac{16}{25}$	$\frac{4}{5}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{25}{16}$



Observamos que:

a) o gráfico de f não tem intersecção com o eixo x.

b) f é crescente.

c) o conjunto imagem de f é $\text{Im}(f) =]0, +\infty[$.

d) o gráfico de f intersecta o eixo y no ponto $(0, 1)$.

e) $f(-1) = \frac{4}{5}$

Portanto, a única afirmativa verdadeira é a correspondente à alternativa **c**.

8. Utilize uma calculadora científica e encontre valores reais aproximados para 2^{4e} e $e^{\frac{3}{2}}$.

Resolução

Para calcular 2^{4e}, pressionamos 2 ^ (4 × ALPHA ln (e^x / e)) = e obtemos 1875,588098.

Para calcular $e^{\frac{3}{2}}$, pressionamos ALPHA ln (e^x / e) ^ (3 ÷ 2) = e obtemos 4,481689070;

ou pressionamos ALPHA SHIFT ln (e^x / e) (3 ÷ 2) =, obtendo o mesmo resultado.

Saiba que...

Assim como a tecla SHIFT, a tecla ALPHA permite acionar as opções escritas acima das teclas na mesma cor da palavra *Alpha*.

Para ler

- ROBSON, David. Contágio por coronavírus: o que é o viés matemático que dificulta o combate à pandemia de covid-19. **BBC News Brasil**, [*s. l.*], 19 ago. 2020. Disponível em: https://www.bbc.com/portuguese/vert-fut-53822007. Acesso em: 1 ago. 2024.

  O texto aborda o "viés do crescimento exponencial" e comenta a dificuldade que nós, seres humanos, temos de compreender o rápido crescimento exponencial em comparação com o crescimento linear. Ele discute como essa percepção errônea dos dados impactou o enfrentamento da pandemia de covid-19.

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

19. Identifique como crescente ou decrescente as funções exponenciais definidas a seguir.

a) $f(x) = 5^x$ crescente

b) $f(x) = \left(\frac{1}{6}\right)^x$ decrescente

c) $f(x) = 2^{-x}$ decrescente

d) $f(x) = 3^{\frac{x}{2}}$ crescente

20. Esboce o gráfico das funções definidas a seguir. Depois, determine o domínio e a imagem de cada uma delas. Ver as **Orientações para o professor**.

a) $f(x) = 3^x$ $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$

b) $f(x) = 2^{x+1}$ $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$

c) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$

d) $f(x) = 2^x + 1$ $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 1\}$

21. Durante a aula de Matemática, o professor comentou sobre uma função que representava o crescimento de uma população de bactérias e escreveu na lousa $f(t) = 2^t$, para $t \geqslant 0$, em que t é dado em horas e $f(t)$ em milhares de bactérias.
Um estudante distraído copiou $f(t) = 2t$ e, portanto, seus cálculos não deram certo.

a) Esboce os gráficos das duas funções em um mesmo sistema de coordenadas. Ver as **Orientações para o professor**.

b) Observando os gráficos construídos no item **a**, existe algum valor de t para o qual as duas funções assumem valor igual? Se sim, qual(is)? sim, para $t = 1$ h e $t = 2$ h

c) O que você pode concluir sobre o crescimento dessas duas funções? Ambas são funções crescentes.

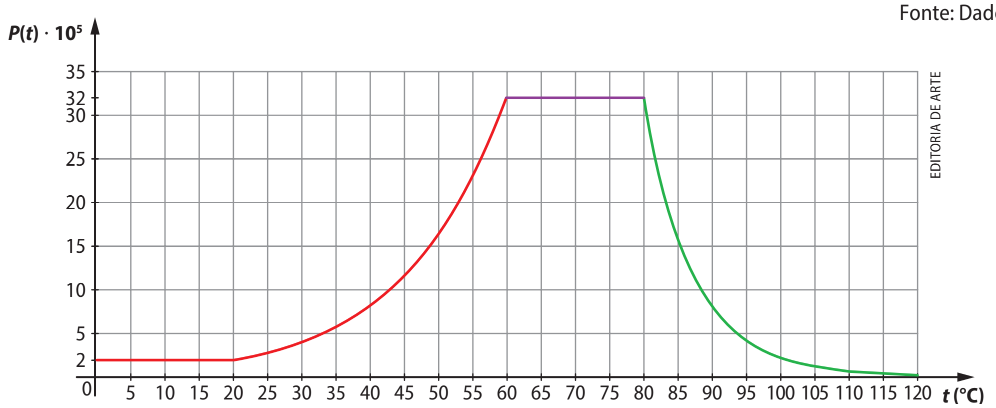
d) Para $t = 3$ h, qual é a diferença entre o número de bactérias nas duas funções? 2 000 bactérias

22. Uma amostra de bactérias foi estudada quanto ao seu crescimento e decrescimento populacional P, em centenas de milhares, em relação ao aumento da temperatura t, em °C. Nesse experimento, a temperatura foi aumentada progressivamente, partindo de 0 °C e terminando em 120 °C, em um período de 24 horas. Observe, a seguir, a tabela e o gráfico que descrevem a variação populacional dessa amostra.

Variação de uma população de bactérias em relação à temperatura

Temperatura (°C)	0	20	40	60	80	100	120
Quantidade de bactérias	$2 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^5$	$8 \cdot 10^5$	$32 \cdot 10^5$	$32 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^5$	$0{,}125 \cdot 10^5$

Fonte: Dados fictícios.



a) Para quais intervalos de temperatura a população de bactérias estudada aumentou, diminuiu ou se manteve estável? Aumentou no intervalo entre 20 °C e 60 °C; diminuiu no intervalo entre 80 °C e 120 °C; manteve-se estável nos intervalos entre 0 °C e 20 °C e entre 60 °C e 80 °C.

b) Se o aumento da população de bactérias é dado por $f(t) = 2^{0,1(t-10)}$ e a diminuição, por $g(t) = 32 \cdot 2^{-0,2(t-80)}$, calcule a quantidade aproximada de bactérias nessa amostra, quando a temperatura atingiu:

- 30 °C; 400 000 bactérias
- 50 °C; 1 600 000 bactérias
- 90 °C; 800 000 bactérias
- 110 °C. 50 000 bactérias

23. Para quais valores reais de k a função dada por $f(x) = (k - 3)^x$ é decrescente? $3 < k < 4$

24. Copie o quadro a seguir, referente às funções definidas por $f(x) = 3^x$, $g(x) = 3^x + 2$ e $h(x) = 3^{x-2}$, e complete-o.

lei da função \ x	−2	−1	0	1	2	3
$f(x) = 3x$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27
$g(x) = 3^x + 2$	$\frac{19}{9}$	$\frac{7}{3}$	3	5	11	29
$h(x) = 3^{x-2}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3

Agora, faça o que se pede.

Ver as **Orientações para o professor**.

a) Utilizando o **GeoGebra**, construa, em um mesmo sistema cartesiano, o gráfico de f, de g e de h.

b) Ao analisar os gráficos construídos, podemos dizer que f, g e h são funções crescentes ou decrescentes? crescentes

c) Determine o domínio e o conjunto imagem dessas funções. $D(f) = \mathbb{R}$, $D(g) = \mathbb{R}$ e $D(h) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \mathbb{R}^*_+$, $Im(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 2\}$ e $Im(h) = \mathbb{R}^*_+$

d) Descreva como seria o gráfico da função dada por $m(x) = 3^x - 2$, em relação ao gráfico de f, sem construí-lo. Ver as **Orientações para o professor**.

e) Descreva como seria o gráfico da função dada por $q(x) = 3^{x+2}$, em relação ao gráfico de f, sem construí-lo. Ver as **Orientações para o professor**.

f) Construa, em um mesmo sistema cartesiano, os gráficos das funções f, m e q e comprove as respostas dadas nos itens **d** e **e**. Ver as **Orientações para o professor**.

25. Um banco possui taxa de rendimento na poupança de 0,35% ao mês. Um cliente que possui poupança nesse banco depositou R$ 1.000,00 no mês de janeiro e, ao longo de 6 meses, não realizou saques nem depositou quantia a mais. Conforme os dados da tabela, responda às questões.

Valor disponível em poupança após 6 meses de aplicação

Mês	Poupança (R$)
Janeiro	1000,00
Fevereiro	$1000{,}00 \cdot 1{,}0035 = 1003{,}50$
Março	$1003{,}50 \cdot 1{,}0035 = 1007{,}01$
Abril	$1007{,}01 \cdot 1{,}0035 = 1010{,}53$
Maio	$1010{,}53 \cdot 1{,}0035 = 1014{,}07$
Junho	$1014{,}07 \cdot 1{,}0035 = 1017{,}62$

Fonte: Dados fictícios.

a) Qual é a taxa de variação média aproximada da poupança entre o sexto e o primeiro mês desse ano? R$ 3,52

b) Considerando que não houve saques nem depósitos nessa aplicação, determine a lei da função que representa o valor disponível em poupança em relação ao número de meses em que o valor inicial foi aplicado. $f(x) = 1\,000 \cdot (1{,}0035)^x$

c) Quanto esse cliente terá aproximadamente na poupança após 12 meses sem realizar saques ou depósitos? R$ 1.042,82

Saiba que...

Quando uma pessoa deposita o dinheiro em uma poupança e o deixa lá por algum tempo, dizemos que ela fez uma aplicação, recebendo juro por esse investimento. É como se o banco estivesse pagando pelo dinheiro emprestado.

Equações exponenciais

Toda equação cuja incógnita se apresenta no expoente de pelo menos uma potência de base real, positiva e diferente de 1, é denominada **equação exponencial**. Assim, são exemplos de equações exponenciais:

a) $2^x = 8$ **b)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = 0{,}25$ **c)** $5^{2x} + 5^x = 30$ **d)** $9^{x - \frac{1}{2}} - \frac{4}{3^{1-x}} = -1$

Vamos resolver as equações exponenciais nas quais ambos os membros da igualdade podem ser representados como potências de mesma base. Para isso, utilizamos a seguinte propriedade:

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Assim, para resolver, por exemplo, a equação $2^x = 8$, escrevemos o segundo membro da equação como uma potência de base 2:

$$2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3$$

Aplicando a propriedade descrita, temos:

$$2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$$

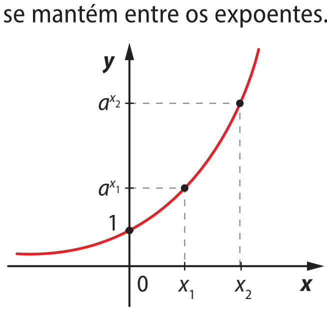
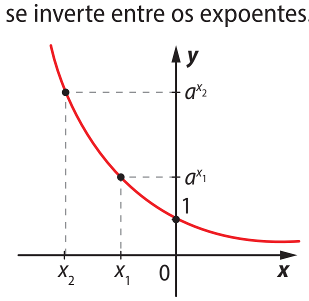
Portanto, o conjunto solução da equação $2^x = 8$ é $S = \{3\}$.

Inequações exponenciais

Toda desigualdade que apresenta incógnita no expoente de, pelo menos, uma potência de base real positiva e diferente de 1 é denominada **inequação exponencial**. Assim, são exemplos de inequações exponenciais:

a) $5^x < 1$ **b)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1} > 4^x$ **c)** $10^x \geqslant -0{,}1$ **d)** $2^{2x+1} \cdot 4^{x-1} \leqslant \frac{1}{32}$

Vamos resolver as inequações exponenciais nas quais ambos os membros da desigualdade podem ser representados como potências de mesma base. Com base no crescimento e no decrescimento da função exponencial, dada por $f(x) = a^x$, aplicamos as propriedades a seguir.

1º caso: $a > 1$ (função crescente)	2º caso: $0 < a < 1$ (função decrescente)
Quando a base da potência é maior do que 1, a relação de desigualdade entre as potências se mantém entre os expoentes.  $a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$ Conservamos o sentido da desigualdade.	Quando a base da potência está entre 0 e 1, a relação de desigualdade entre as potências se inverte entre os expoentes.  $a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$ Invertemos o sentido da desigualdade.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

ATIVIDADES RESOLVIDAS

9. Uma pesquisa feita por biólogos de uma reserva florestal mostrou que a população de uma espécie de certo animal está diminuindo a cada ano. A partir do ano em que se iniciou a pesquisa, o número desses animais seguia a lei matemática $N = N_0 \cdot 3^{-0,05t}$, com t em anos ($t \geqslant 0$) e $N_0 > 0$ correspondendo ao número de animais no início da pesquisa.

a) Calcule em quantos anos a população dessa espécie de animal estará reduzida à terça parte.

b) Qual era o número de animais dessa população quando a pesquisa foi iniciada, sabendo que, após 80 anos, restam apenas 12 indivíduos?

Resolução

a) Sendo N o número de animais no decorrer do tempo, podemos obter t resolvendo a equação:

$$N = \frac{N_0}{3} \Rightarrow \frac{N_0}{3} = N_0 \cdot 3^{-0,05t} \Rightarrow \frac{1}{3} = 3^{-0,05t} \Rightarrow \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{0,05t} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{0,05t}$$

Como as bases são iguais, positivas e diferentes de 1, concluímos que os expoentes são iguais. Assim:

$$0,05t = 1 \Rightarrow t = \frac{1}{0,05} \Rightarrow t = 20$$

Portanto, a população de animais será reduzida à terça parte após 20 anos.

b) Sabemos que, para $t = 80$, temos $N = 12$. Assim, para obtermos N_0, basta substituirmos t e N na lei de formação da função.

$$N = N_0 \cdot 3^{-0,05t} \Rightarrow 12 = N_0 \cdot 3^{-0,05 \cdot 80} \Rightarrow 12 = N_0 \cdot 3^{-4} \Rightarrow 12 = N_0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{4} \Rightarrow 12 = \frac{N_0}{81} \Rightarrow N_0 = 972$$

Portanto, havia 972 animais dessa espécie no início da pesquisa.

10. Resolva a equação $125^{x+1} = \frac{1}{\sqrt[3]{625}}$.

Resolução

Usando as propriedades de potências, vamos expressar o 1º e o 2º membros da equação como potências de mesma base.

$$125^{x+1} = \frac{1}{\sqrt[3]{625}} \Rightarrow (5^3)^{x+1} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^4}} \Rightarrow 5^{3x+3} = 5^{-\frac{4}{3}}$$

Como as bases são iguais, positivas e diferentes de 1, podemos igualar os expoentes:

$$3x + 3 = -\frac{4}{3} \Rightarrow \frac{9x+9}{3} = -\frac{4}{3} \Rightarrow 9x = -13 \Rightarrow x = -\frac{13}{9}$$

Portanto, o conjunto solução é $S = \left\{-\frac{13}{9}\right\}$.

11. Resolva a equação $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$.

Resolução

Aplicando as propriedades de potência, vamos reescrever o termo 4^x na base 2: $4^x = (2^2)^x = (2^x)^2$

Assim, podemos escrever a equação $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$ como: $(2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

Fazendo $2^x = y$, obtemos a equação do 2º grau na incógnita y: $y^2 - 5y + 4 = 0$

Resolvendo essa equação, obtemos:

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 \Rightarrow \Delta = 9$$

$$y = \frac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow y' = 4 \text{ e } y'' = 1$$

Voltando à igualdade $2^x = y$, temos:

- para $y = 4$, temos: $2^x = 4 \Rightarrow 2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2$;
- para $y = 1$, temos: $2^x = 1 \Rightarrow 2^x = 2^0 \Rightarrow x = 0$.

Portanto, o conjunto solução da equação é $S = \{0, 2\}$.

12. Resolva a inequação $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x-1} < \left(\frac{1}{3}\right)^{x+5}$.

Resolução

Como a base $\frac{1}{3}$ está entre 0 e 1, o sentido da desigualdade entre os expoentes se inverte:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{3x-1} < \left(\frac{1}{3}\right)^{x+5} \Rightarrow 3x - 1 > x + 5 \Rightarrow 2x > 6 \Rightarrow x > 3$$

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$.

13. Determine o conjunto solução da inequação $2^{2x+2} - 0{,}75 \cdot 2^{x+2} < 1$.

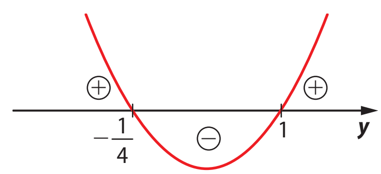
Resolução

Aplicando as propriedades de potências, temos:

$4 \cdot 2^{2x} - 0{,}75 \cdot 4 \cdot 2^{x} - 1 < 0$

Fazendo $2^x = y$, obtemos: $4y^2 - 3y - 1 < 0$

Fazendo o estudo do sinal da função dada por $f(y) = 4y^2 - 3y - 1$, temos o gráfico a seguir.



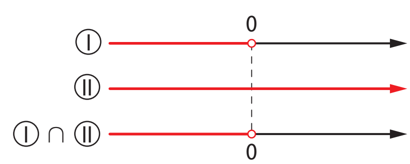
Logo: $-\frac{1}{4} < y < 1$

Lembrando que $2^x = y$, temos: $2^x < 1 \Rightarrow 2^x < 2^0 \Rightarrow x < 0$ (I)

Como 2^x será sempre um número positivo, independentemente do valor de x, temos:

$2^x > -\frac{1}{4}$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (II)

Fazendo (I) $\cap$ (II), temos a seguinte representação:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$.

14. O valor de um automóvel daqui a t anos é dado pela função $V(t) = 40\,000 \cdot (0{,}8)^t$. Após quantos anos de uso o valor desse automóvel será menor do que R$ 20.480,00?

Resolução

Do enunciado, temos:

$V(t) < 20\,480 \Rightarrow 40\,000 \cdot (0{,}8)^t < 20\,480$

Resolvendo essa inequação, obtemos:

$$40\,000 \cdot (0{,}8)^t < 20\,480 \Rightarrow (0{,}8)^t < \frac{20\,480}{40\,000} \Rightarrow (0{,}8)^t < \frac{512}{1000} \Rightarrow (0{,}8)^t < \frac{8^3}{10^3} \Rightarrow (0{,}8)^t < (0{,}8)^3$$

Como as bases são iguais a 0,8, que é maior do que zero e menor do que 1, temos: $t > 3$.

Portanto, o valor do automóvel será menor do que R$ 20.480,00 após 3 anos de uso.

26. Resolva as equações exponenciais a seguir.

a) $2^x = 64$ $S = \{6\}$

b) $10^x = 1000$ $S = \{3\}$

c) $9^x = 243$ $S = \left\{\frac{5}{2}\right\}$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{32}$ $S = \{5\}$

e) $\left(\frac{1}{4}\right)^{4x} = 0{,}25$ $S = \left\{\frac{1}{4}\right\}$

f) $4^x = \frac{1}{64}$ $S = \{-3\}$

g) $3^x = \sqrt{3}$ $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

h) $4^x = \sqrt[3]{32}$ $S = \left\{\frac{5}{6}\right\}$

27. Seja uma função definida por $f(x) = 5^{2x - 1}$, com $x \in \mathbb{R}$. Determine x para que:

a) $f(x) = 125$ $x = 2$

b) $f(x) = 1$ $x = \frac{1}{2}$

c) $f(x) = 0$ $\nexists\, x \in \mathbb{R} \mid 5^{2x-1} = 0$

d) $f(x) = \frac{1}{5}$ $x = 0$

28. Resolva as equações apresentadas.

a) $2^{x-2} = \frac{8}{2^{x-3}}$ $S = \{4\}$

b) $25^{2x+2} = \left(\frac{1}{5}\right)^{5x-1}$ $S = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$

c) $5^{x^2-2} : 25 = \left(\frac{1}{125}\right)^{-x}$ $S = \{-1, 4\}$

d) $\sqrt[3]{81^x} = \frac{1}{27}$ $S = \left\{-\frac{9}{4}\right\}$

29. Qual é o valor de x na equação $\frac{2^x + 2^{2x}}{2^{2x} - 1} = 2$? 1

30. (UFRJ) Considere que num recipiente, no instante $t = 0$, um número N_0 de bactérias está se reproduzindo normalmente. É aceito cientificamente que o número de bactérias num certo instante $t > 0$ é dado pela equação

$$N(t) = N_0K^t,$$

sendo $N(t)$ o número de bactérias no instante t e K uma constante que depende do tipo de bactéria. Suponhamos que, num certo instante, observou-se que havia 200 bactérias no recipiente reproduzindo-se normalmente. Passadas 12 horas, havia 600 bactérias. Após 48 horas do início da observação, quantas bactérias existirão? 16 200 bactérias

31. (Uespi) Determine o conjunto solução da equação $2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 224$. $S = \{4\}$

32. (PUC-MG) Determine o valor de x para satisfazer a equação $3^{3x-1} \cdot 9^{2x+3} = 27^{3-x}$. $x = \frac{2}{5}$

33. Qual é a solução da equação $8^x + 8^{x-1} + 8^{x+1} = 292$ no universo $\mathbb{R}$? $S = \left\{\frac{5}{3}\right\}$

34. (UFPR) Resolva a equação exponencial $1^x + 5^x + 25^x = 3$. $S = \{0\}$

35. Resolva a equação: $\frac{9^{5x-1}}{81^{2x-3}} = \frac{27^{5-3x}}{3^{2x-5}}$. $S = \left\{\frac{10}{13}\right\}$

36. (UFAL) Devido à desintegração radioativa, uma massa m_0 de carbono 14 é reduzida a uma massa m em t anos. As duas massas estão relacionadas pela fórmula $m = m_0 \cdot 2^{\left(\frac{-t}{5400}\right)}$. Nessas condições, em quantos anos 5 g da substância serão reduzidos a 1,25 g? 10 800 anos

37. (ITA-SP) Dê o conjunto verdade da equação exponencial $3 \cdot 5^{x^2} + 3^{x^2+1} - 8 \cdot 3^{x^2} = 0$. $S = \{-1, 1\}$

38. (ITA-SP) Resolva a equação $9^{x-\frac{1}{2}} - \frac{4}{3^{1-x}} = -1$. $S = \{0, 1\}$

39. (PUC-SP) Sejam $f(x) = 3^{x-1}$, $g(x) = 3^x$ e $s(x) = f(x) + g(x)$. Qual é o valor de x, tal que $s(x) = 4$? $x = 1$

40. (UFV-MG) Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3^x$. Determine os valores de $x \in \mathbb{R}$ tais que $f(x + 1) + f(-x + 4) = 36$. $x = 2$ ou $x = 1$

41. Uma represa utilizada como reservatório para o abastecimento de água de uma determinada região tem capacidade aproximada de 16 000 000 m³ num período de normalidade de chuvas. Após o início de um período de seca, a variação da quantidade de água desse reservatório passou a ser dada pela função $V(t) = V_0 \cdot 2^{-0{,}05t}$, sendo V_0 a capacidade da represa em um período de normalidade, t o número de meses de estiagem e $V(t)$ a quantidade de água nesse reservatório em m³ após t meses.

- Elabore uma questão com base nos dados do enunciado apresentado. Depois, troque a atividade criada por você com um colega e responda à questão elaborada por ele. Juntos, confiram as resoluções e as estratégias utilizadas por cada um. Resposta pessoal.

42. Determine o conjunto solução das inequações.

a) $2^{x^2 - 3x} \geqslant \frac{1}{4}$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 1 \text{ ou } x \geqslant 2\}$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} < \frac{1}{27}$ $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{3}{2}\right\}$

c) $(0,2)^{x-2} > 1$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$

d) $2^{x+1} \cdot 4^{x-1} \leqslant \frac{1}{32}$ $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\frac{4}{3}\right\}$

e) $\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^{1+2x} > \left(\frac{27}{8}\right)^{4x+3}$ $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{6}{7}\right\}$

f) $(0,04)^{\frac{x^2 - 2x}{2}} \geqslant 0,008$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 3\}$

43. Determine os valores reais de x que verificam a inequação $3^{x+1} + 3^{2+x} > 108$. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

44. Para quais valores de x a expressão $\sqrt{2^x + 2^{x+1} - 12}$ representa um número real? $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\}$

45. Determine o domínio D da função definida por:

a) $f(x) = \sqrt{2^x - 2^{1-x}}$ $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{1}{2}\right\}$

b) $g(x) = \sqrt{(0,1)^{x^2 - 5x} - (0,1)^{-6}}$ $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 3\}$

46. Determine a solução da inequação $4^x - 10 \cdot 2^x + 16 < 0$.
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 3\}$

47. Resolva em $\mathbb{R}$ a inequação $2^{1+x} + \sqrt{8} \geqslant \sqrt{72}$.
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{3}{2}\right\}$

48. Quais valores inteiros de x satisfazem a desigualdade $1 < 4^{\frac{x}{4}} \leqslant 64$?
$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

49. (UFAL) No universo $\mathbb{R}$, qual o conjunto solução da inequação $5^{x^2} \cdot 5^{2x-1} \cdot 5^{-3} < \frac{1}{5}$?
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x \leqslant 1\}$

50. Um botânico anotou diariamente o crescimento de uma planta e verificou que esse crescimento obedecia, de maneira aproximada, a uma função exponencial dada por $h(t) = 2,52 + 0,04 \cdot 3^{0,14t}$, em que t representa o número de dias aferidos, a partir do primeiro registro, e $h(t)$ indica a altura, em centimetro, da planta no dia t. Resposta pessoal.

- Elabore uma questão com base nos dados desse enunciado, utilizando as expressões **tempo mínimo** ou **tempo máximo**. Depois, troque a atividade criada por você com um colega e responda à questão elaborada por ele. Juntos, confiram as resoluções e as estratégias utilizadas por cada um.

51. (Unimontes-MG) Todos os valores de x que satisfazem a inequação $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} > \left(\frac{1}{4}\right)^{2x - \frac{3}{2}}$ estão no intervalo alternativa **d**

a) [2, 4].

b)]1, 2].

c) [0, 2].

d)]1, 3[.

52. (EsPCEx-SP) A quantidade de números inteiros ímpares que pertencem ao intervalo que satisfaz a inequação exponencial $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2 - 8x + 5} > 4$ é de: alternativa **b**

a) um número ímpar.

b) dois números ímpares.

c) três números ímpares.

d) quatro números ímpares.

e) cinco números ímpares.

53. (UFRN) Os modelos matemáticos que representam os crescimentos populacionais, em função do tempo, de duas famílias de microrganismos, B_1 e B_2, são expressos, respectivamente, por meio das funções $F_1(t) = t^2 + 96$ e $F_2(t) = 9 \cdot 2^t + 64$, para $t \geqslant 0$.

Com base nestas informações, é correto afirmar que: alternativa **b**

a) após o instante $t = 2$, o crescimento populacional de B_1 é maior que o de B_2.

b) após o instante $t = 2$, o crescimento populacional de B_1 é menor que o de B_2.

c) quando t varia de 2 a 4, o crescimento populacional de B_1 aumenta 10% e o de B_2 aumenta 90%.

d) quando t varia de 4 a 6, o crescimento populacional de B_1 cresce 20 vezes menos que o de B_2.

ZOLTAN ACS/SHUTTERSTOCK.COM; LSTOCKSTUDIO/SHUTTERSTOCK.COM

Radioatividade

Usinas nucleares para geração de energia e aparelhos de radioterapia para uso em Medicina Nuclear são algumas das aplicações da radioatividade. No entanto, elementos radioativos também podem ser matéria-prima para a produção de armamentos nucleares, que têm grande potencial de destruição. Para saber um pouco mais sobre o assunto, leia, a seguir, o trecho de um texto sobre decaimento radioativo.

Radioatividade

O esquecimento de uma rocha de urânio sobre um filme fotográfico virgem levou à descoberta de um fenômeno interessante: o filme foi velado (marcado) por "alguma coisa" que saía da rocha, na época denominada raios ou **radiações**.

Outros elementos pesados, com massas próximas à do urânio, como o **rádio** e o **polônio**, também tinham a mesma propriedade.

O fenômeno foi denominado **radioatividade** e os elementos que apresentavam essa propriedade foram chamados de **elementos radioativos**.

Comprovou-se que um núcleo muito energético, por ter excesso de partículas ou de carga, tende a estabilizar-se, emitindo algumas partículas.

[...]

O lixo atômico

Os materiais radioativos produzidos em Instalações Nucleares (Reatores Nucleares, Usinas de Beneficiamento de Minério de Urânio e Tório, Unidades do Ciclo do Combustível Nuclear), Laboratórios e Hospitais, nas formas sólida, líquida ou gasosa, que não têm utilidade, não podem ser simplesmente "jogados fora" ou "no lixo", por causa das radiações que emitem. Esses materiais, que não são utilizados em virtude dos riscos que apresentam, são chamados de **Rejeitos Radioativos**.

Na realidade, a expressão "lixo atômico" é um pleonasmo, porque qualquer lixo é formado por átomos e, portanto, é **atômico**. Ele passa a ter essa denominação popular quando é radioativo.

Tratamento de rejeitos radioativos

Os rejeitos radioativos precisam ser tratados, antes de serem liberados para o meio ambiente, se for o caso. Eles podem ser liberados quando o nível de radiação é igual ao do meio ambiente e quando não apresentam toxidez química.

ELENA TITA/GLOBAL IMAGES UKRAINE/GETTY IMAGES

▪ Em locais onde há presença de elementos radioativos, é obrigatório o uso de roupas especiais. Fotografia de socorristas durante treinamento na Ucrânia, 2023.

Rejeitos sólidos, líquidos ou gasosos podem ser, ainda, classificados, quanto à atividade, em rejeitos de **baixa**, **média** e **alta atividade**.

Os rejeitos de meia-vida curta são armazenados em locais apropriados (preparados), até sua atividade atingir um valor semelhante ao do meio ambiente, podendo, então, ser liberados. Esse critério de liberação leva em conta somente a atividade do rejeito. É evidente que materiais de atividade ao nível ambiental mas que apresentam toxidez química para o ser humano ou que são prejudiciais ao ecossistema não podem ser liberados sem um tratamento químico adequado.

YAROSLAV ASTAKHOV/ISTOCK/GETTY IMAGES

A radioatividade é utilizada em diversos exames diagnósticos, como a tomografia computadorizada.

Rejeitos sólidos de baixa atividade, como partes de maquinaria contaminadas, luvas usadas, sapatilhas e aventais contaminados, são colocados em sacos plásticos e guardados em tambores ou caixas de aço, após classificação e respectiva identificação. Os produtos de fissão, resultantes do combustível nos reatores nucleares, sofrem tratamento especial em **Usinas de Reprocessamento**, onde são separados e comercializados, para uso nas diversas áreas de aplicação de radioisótopos. Os materiais radioativos restantes, que não têm justificativa técnica e/ou econômica para serem utilizados, sofrem tratamento químico especial e são vitrificados, guardados em sistemas de contenção e armazenados em **Depósitos de Rejeitos Radioativos**.

[...]

CARDOSO, Eliezer de Moura. **Apostila educativa**: radioatividade. Rio de Janeiro: Comissão Nacional de Energia Nuclear, [2004]. p. 5; 14-15. Disponível em: https://repositorio.mcti.gov.br/bitstream/mctic/5363/1/2004__apostila_educativa_radioatividade.pdf. Acesso em: 23 ago. 2024.

Agora, faça o que se pede nas atividades a seguir.

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. De acordo com o texto, a descoberta da radioatividade se deu a partir de um fato ocorrido com qual tipo de rocha? rocha de urânio

2. Os átomos de um elemento químico radioativo possuem naturalmente a tendência de se desintegrarem, emitindo partículas e se transformando em outro elemento. Dessa maneira, com o passar do tempo, a quantidade original desse elemento diminui.
Suponha que certa quantidade de um elemento radioativo se decomponha conforme a função $M(t) = 50 \cdot 10^{\frac{-t}{70}}$, na qual $M(t)$ é a quantidade de massa radioativa (em grama) no tempo t (em anos).

a) Esboce o gráfico dessa função, identificando os pontos da função em que $t = 0$, $t = 35$ e $t = 70$.

b) Com base no gráfico esboçado, estime a quantidade de massa radioativa desse elemento quando $t = 10$.

c) Verifique se a sua estimativa estava correta, calculando $M(10)$ com o auxílio da calculadora.

Ver as **Orientações para o professor**.

3. As substâncias radioativas, ao atingirem a meia-vida, têm as suas massas iniciais reduzidas pela metade. Tomemos hoje 16 gramas de uma substância radioativa, cuja meia-vida é de 5 anos. A massa dessa substância, em grama, é uma função do tempo, em anos, contado a partir de hoje, dada por $M(n) = 16 \cdot 2^{\frac{-n}{5}}$. Se daqui a n anos sua massa for 2^{-111} gramas, qual será o valor de n? 575 anos

4. Reúna-se a mais dois colegas, e pesquisem alguns dos acidentes radioativos que marcaram a história. Quais foram as causas e consequências desses acidentes?
Produzam um *podcast* contando um pouco sobre os acidentes que vocês pesquisaram.
Ver as **Orientações para o professor**.

1. (PUC-RJ) Se $(1{,}2)^{-\frac{1}{2}} = x$, quanto vale $x^2 + 1$? alternativa **b**

a) 1

b) $\frac{11}{6}$

c) $\frac{6}{11}$

d) $\frac{10}{3}$

e) $-\frac{11}{6}$

2. (Unifor-CE) Simplificando a expressão $\frac{2^{6n} - 1}{2^{6n} + 2^{3n+1} + 1}$, na qual $n \in \mathbb{R}$, obtém-se: alternativa **e**

a) 0

b) 2^{3n}

c) $-\frac{1}{2^{3n}}$

d) $\frac{2^{3n} + 1}{2^{3n}}$

e) $\frac{2^{3n} - 1}{2^{3n} + 1}$

3. (Uneb-BA) Se $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{256}{81}$ e $\left(\frac{y}{3}\right)^2 = 729$, para x e y números reais, $y > 0$, então o valor de $y + 3x$ é alternativa **04**

01) 33

02) 48

03) 56

04) 69

05) 77

4. (IFMS) Um professor desafiou seus estudantes a resolverem a seguinte expressão:

$$\left(2^{-3{,}5} \times \sqrt{50}\right) + 0{,}125 + \frac{7}{28}$$

Assinale a alternativa que apresenta o resultado correto dessa expressão. alternativa **a**

a) 1

b) $\sqrt{2}$

c) 2^{-1}

d) 1,8

e) 2

5. (Enem/MEC) A cor de uma estrela tem relação com a temperatura em sua superfície. Estrelas não muito quentes (cerca de 3 000 K) nos parecem avermelhadas. Já as estrelas amarelas, como o Sol, possuem temperatura em torno dos 6 000 K; as mais quentes são brancas ou azuis porque sua temperatura fica acima dos 10 000 K.

A tabela apresenta uma classificação espectral e outros dados para as estrelas dessas classes.

Estrelas da Sequência Principal

Classe Espectral	O5	B0	A0	G2	M0
Temperatura	40 000	28 000	9 900	5 770	3 480
Luminosidade	$5 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^4$	80	1	0,06
Massa	40	18	3	1	0,5
Raio	18	7	2,5	1	0,6

■ Temperatura em Kelvin. Luminosidade, massa e raio, tomando o Sol como unidade.

Disponível em: http://www.zenite.nu. Acesso em: 1 maio 2010 (adaptado).

Se tomarmos uma estrela que tenha temperatura 5 vezes maior que a temperatura do Sol, qual será a ordem de grandeza de sua luminosidade? alternativa **a**

a) 20 000 vezes a luminosidade do Sol.

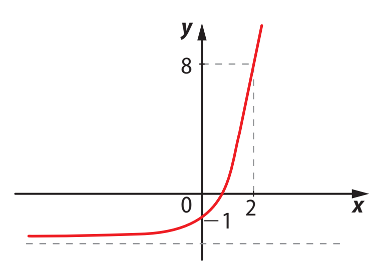
b) 28 000 vezes a luminosidade do Sol.

c) 28 850 vezes a luminosidade do Sol.

d) 30 000 vezes a luminosidade do Sol.

e) 50 000 vezes a luminosidade do Sol.

6. (AFA-SP) A função real f definida por $f(x) = a \cdot 3^x + b$, sendo a e b constantes reais, está graficamente representada abaixo.



EDITORIA DE ARTE

Pode-se afirmar que o produto $(a \cdot b)$ pertence ao intervalo real alternativa **a**

a) $[-4, -1[$

b) $[-1, 2[$

c) $[2, 5[$

d) $[5, 8]$

7. (Enem/MEC) O governo de uma cidade está preocupado com a possível epidemia de uma doença infectocontagiosa causada por bactéria. Para decidir que medidas tomar, deve calcular a velocidade de reprodução da bactéria. Em experiências laboratoriais de uma cultura bacteriana, inicialmente com 40 mil unidades, obteve-se a fórmula para a população:

$$p(t) = 40 \cdot 2^{3t}$$

em que t é o tempo, em hora, e $p(t)$ é a população, em milhares de bactérias.

Em relação à quantidade inicial de bactérias, após 20 min, a população será alternativa **d**

a) reduzida a um terço.

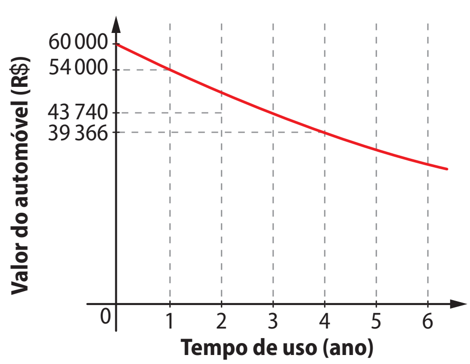
b) reduzida à metade.

c) reduzida a dois terços.

d) duplicada.

e) triplicada.

8. (Enem/MEC) Um modelo de automóvel tem seu valor depreciado em função do tempo de uso segundo a função $f(t) = b \cdot a^t$, com t em ano. Essa função está representada no gráfico.



Qual será o valor desse automóvel, em real, ao completar dois anos de uso? alternativa **c**

a) 48 000,00

b) 48 114,00

c) 48 600,00

d) 48 870,00

e) 49 683,00

9. (Unemat-MT) Certa substância se desintegra obedecendo à seguinte expressão: $Q(t) = k \cdot 2^{-0,5t}$, em que t é o tempo (em horas), k é uma constante real e $Q(t)$ é a quantidade da substância (em gramas), no tempo t.

Considerando que no instante inicial, $t = 0$, a quantidade de substância é de 800 g, assinale a alternativa que corresponde ao tempo necessário para que a quantidade dessa substância esteja reduzida a 25% do seu valor inicial. alternativa **b**

a) 2 h

b) 4 h

c) 6 h

d) 8 h

e) 10 h

10. (Mack-SP) O valor de x na equação

$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{9}\right)^{2x-2} = \dfrac{1}{27}$ é: alternativa **d**

a) tal que $2 < x < 3$.

b) negativo.

c) tal que $0 < x < 1$.

d) múltiplo de 2.

e) 3.

11. (UEL-PR) Se o número real k satisfaz à equação $3^{2k} - 4 \cdot 3^k + 3 = 0$, então k^2 é igual a: alternativa **b**

a) 0 ou $\dfrac{1}{2}$

b) 0 ou 1

c) $\dfrac{1}{2}$ ou 1

d) 1 ou 2

e) 1 ou 3

12. (UECE) Se o número real k é a solução da equação $9^{\sqrt{x}} - 8 \cdot 3^{\sqrt{x}} - 9 = 0$, então, o número k cumpre a seguinte condição: alternativa **d**

a) $1,5 < k < 3,5$.

b) $7,5 < k < 9,5$.

c) $5,5 < k < 7,5$.

d) $3,5 < k < 5,5$.

13. (EsPCEx-SP) Na pesquisa e desenvolvimento de uma nova linha de defensivos agrícolas, constatou-se que a ação do produto sobre a população de insetos em uma lavoura pode ser descrita pela expressão $N(t) = N_0 \cdot 2^{kt}$, sendo N_0 a população no início do tratamento, $N(t)$, a população após t dias de tratamento e k uma constante, que descreve a eficácia do produto. Dados de campo mostraram que, após dez dias de aplicação, a população havia sido reduzida à quarta parte da população inicial. Com estes dados, podemos afirmar que o valor da constante de eficácia deste produto é igual a: alternativa **b**

a) 5^{-1}

b) -5^{-1}

c) 10

d) 10^{-1}

e) -10^{-1}

14. (IFPR) Alguns objetos de uso contínuo sofrem desvalorização comercial, devido ao uso e desgaste ao longo do tempo. Ao comprar uma moto, temos que o valor de venda $V(t)$ da mesma, em função do tempo t de uso em anos, é dado pela seguinte função: $V(t) = 10\,000 \cdot (0,9)^t$. Dessa forma, essa moto poderá ser vendida por R$ 8.100,00, após quanto tempo de uso? alternativa **a**

a) 2 anos.
b) 1 ano.
c) 18 meses.
d) 36 meses.

15. (UFPB) Uma determinada indústria constatou que o gás expelido na fabricação dos seus produtos continha o poluente alfa em quantidade acima do recomendado, que é de no máximo 4 mg/L.

Visando resolver esse problema, instalou filtros para purificação do gás. Estudos mostram que, com esses filtros, a quantidade (q) do poluente alfa presente no gás, t horas após o processo de purificação ter sido iniciado, é dada por $q(t) = 2^{5 - 0,5t}$ mg/L. Com base nessas informações, identifique as afirmativas corretas: I, II, IV e V

I. A quantidade do poluente alfa presente no gás no instante em que o processo de purificação foi iniciado era de 32 mg/L. V

II. A quantidade do poluente alfa presente no gás, quatro horas após o início do processo de purificação, corresponde a um quarto da quantidade existente no instante em que o processo foi iniciado. V

III. A função utilizada para determinar a quantidade de poluentes no gás, $q(t)$, é crescente. F

IV. O tempo de purificação necessário para que a quantidade do poluente alfa presente no gás fique reduzida à metade da existente no instante em que o processo foi iniciado é de 2 horas. V

V. A quantidade do poluente alfa presente no gás estará conforme o recomendado a partir da 6ª hora após o instante em que o processo de purificação foi iniciado. V

16. (Vunesp-SP) Uma lagoa tem sofrido as consequências da poluição do ambiente e os pescadores reclamam, há muito tempo, da diminuição na quantidade de peixes. Após anos de denúncias, a prefeitura contratou, na última década, um pesquisador que vem acompanhando o desenvolvimento da vida aquática e da quantidade de peixes na lagoa. Após terminar suas experiências, ele concluiu que a quantidade n de peixes poderia ser calculada pela fórmula $n(T) = 10\,000 - 3^{\frac{T}{3} - 2}$, sendo T o tempo, em anos, medido a partir deste exato momento. De acordo com esse pesquisador, o número de peixes será igual a 9 271 daqui a:

a) 15 anos
b) 18 anos
c) 24 anos
d) 27 anos
e) 30 anos

alternativa **c**

17. (Unicamp-SP) O processo de resfriamento de um determinado corpo é descrito por: $T(t) = T_A + \alpha \cdot 3^{\beta t}$, onde $T(t)$ é a temperatura do corpo, em graus Celsius, no instante t, dado em minutos, T_A é a temperatura ambiente, suposta constante, e α e β são constantes. O referido corpo foi colocado em um congelador com temperatura de −18 °C. Um termômetro no corpo indicou que ele atingiu 0 °C após 90 minutos e chegou a −16 °C após 270 minutos.

a) Encontre os valores numéricos das constantes α e β. $\beta = -\frac{1}{90}$; $\alpha = 54$

b) Determine o valor de t para o qual a temperatura do corpo no congelador é apenas $\left(\frac{2}{3}\right)$ °C superior à temperatura ambiente. 360 minutos

18. (UECE) Uma cultura de bactérias cresce obedecendo à função $f(t) = c3^{2t}$, onde c é uma constante positiva e t é o tempo medido em horas. O valor de t para que a quantidade inicial de bactérias fique multiplicada por nove é

a) 1 hora.
b) $\frac{1}{2}$ hora.
c) 1 hora e meia.
d) 2 horas.

alternativa **a**

19. (UEA-AM) O ponto $A(5, 4)$ pertence à função $f(x) = 2^{x - k}$, e o ponto $B(2, 4)$ pertence à função $g(x) = k \cdot x + c$, em que c e k são números reais. O valor de $f(k) + g(1)$ é alternativa **b**

a) 3. **b)** 2. **c)** 0. **d)** 4. **e)** 1.

20. (Enem/MEC) Enquanto um ser está vivo, a quantidade de carbono 14 nele existente não se altera. Quando ele morre, essa quantidade vai diminuindo. Sabe-se que a meia-vida do carbono 14 é de 5730 anos, ou seja, num fóssil de um organismo que morreu há 5730 anos haverá metade do carbono 14 que existia quando ele estava vivo. Assim, cientistas e arqueólogos usam a seguinte fórmula para saber a idade de um fóssil encontrado: $Q(t) = Q_0 \cdot 2^{-\frac{t}{5730}}$ em que t é o tempo, medido em ano, $Q(t)$ é a quantidade de carbono 14 medida no instante t e Q_0 é a quantidade de carbono 14 no ser vivo correspondente.

Um grupo de arqueólogos, numa de suas expedições, encontrou 5 fósseis de espécies conhecidas e mediram a quantidade de carbono 14 neles existente. Na tabela temos esses valores juntamente com a quantidade de carbono 14 nas referidas espécies vivas.

Fóssil	Q_0	$Q(t)$
1	128	32
2	256	8
3	512	64
4	1024	512
5	2048	128

O fóssil mais antigo encontrado nessa expedição foi alternativa **b**

a) 1. **b)** 2. **c)** 3. **d)** 4. **e)** 5.

PARA REFLETIR

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Neste Capítulo, revisamos as propriedades da potenciação e da radiciação e apresentamos as potências com expoente real. Estudamos, também, que medidas muito grandes ou muito pequenas podem ser expressas em notação científica e que função, equações e inequações exponenciais são utilizadas para modelar o crescimento de uma população de bactérias, o decaimento de substâncias radioativas, além de outros fenômenos sociais e naturais.

Nas páginas de abertura, foram apresentadas informações sobre *fake news* e como sua rápida disseminação pode ser relacionada ao rápido crescimento de uma função exponencial. Você conseguiu reconhecer essa relação? Se sim, qual é a importância de estudá-la? Se não, retome o texto de abertura do Capítulo e as perguntas iniciais. Se possível, pesquise também em livros, revistas, jornais e *sites* sobre as *fake news*.

Vamos refletir sobre as aprendizagens do Capítulo **5**:

- Você já conhecia algum dos conteúdos apresentados ao longo deste Capítulo? Qual(is)? Respostas pessoais.
- Cite exemplos de outras situações em que podemos utilizar notação científica para expressar medidas. Resposta pessoal.
- Como podemos obter a aproximação de uma potência com expoente real? Fazemos sucessivas aproximações com um expoente racional, por falta e por excesso, e tomamos um valor que se repita nos dois casos e que atenda à necessidade.
- Qual é a condição para que uma função exponencial seja crescente? E decrescente? base *a* maior do que 1; base *a* entre 0 e 1
- Elabore um passo a passo sobre como calcular a raiz enésima de um número natural e de potências do tipo e^x com o auxílio de uma calculadora científica. Resposta pessoal.

CAPÍTULO

6 GRANDEZAS E MEDIDAS

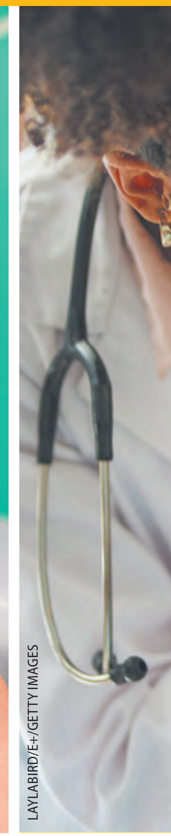
Quando uma pessoa passa pela triagem em uma consulta médica, o profissional da Enfermagem faz diversas medições, como a aferição da temperatura corporal, da pressão sanguínea, dos batimentos cardíacos e da oxigenação do sangue. No caso de bebês e crianças, também é comum fazer a medição da massa e da altura.

Essas informações são anotadas na ficha do paciente e repassadas ao médico que fará o atendimento. Por esse motivo, é importante que as medidas sejam obtidas de maneira precisa e correta, para que a saúde do paciente seja avaliada adequadamente.

Para que um profissional de Enfermagem faça as medições necessárias, ele deve estar munido de instrumentos de medida adequados e calibrados, como o aparelho de medir a pressão e a balança.

É importante destacar que a triagem médica tem funções diferentes em um consultório médico e em um pronto-socorro: no consultório, a triagem tem o papel de agilizar a consulta médica; já no pronto-socorro, a triagem tem a função de categorizar os casos, dando prioridade àqueles mais graves e urgentes.

PETER DAZELEY/THE IMAGE BANK/GETTY IMAGES



LAYLABIRD/E+/GETTY IMAGES

IZUSEK/E+/GETTY IMAGES

2. Respostas pessoais. Espera-se que os estudantes respondam: pressão sanguínea medida por um esfigmomanômetro; batimentos cardíacos e nível de oxigênio no sangue medidos por um oxímetro; temperatura corporal medida por um termômetro digital; e massa medida por uma balança.

3. Resposta pessoal. Os estudantes podem citar o relógio, o cronômetro e o calendário para medir o tempo, a régua, a trena e a fita métrica para medir comprimentos.

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Agora, reúna-se a um colega, e façam o que se pede em cada questão.

Ver as **Orientações para o professor**.

1. Vocês já repararam nas medições que são feitas em triagens médicas? Discutam sobre a importância desses procedimentos.

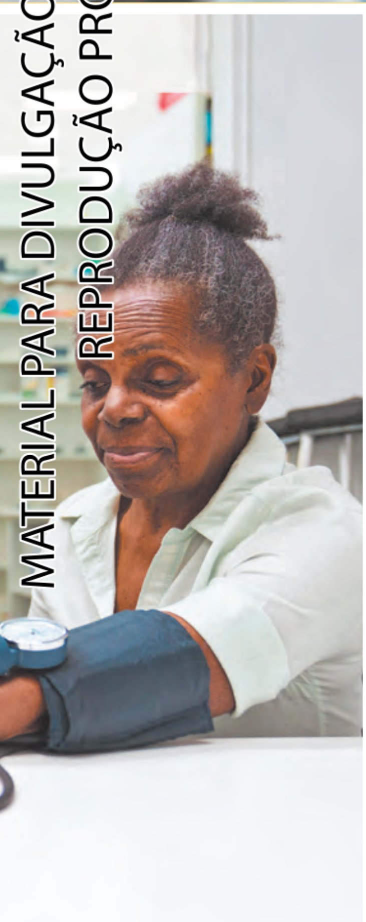
Resposta pessoal.

2. Nas imagens da abertura, o que vocês acreditam que está sendo medido? Vocês sabem o nome do instrumento utilizado em cada situação?

3. Além dos instrumentos de medida que aparecem nas imagens, que outros instrumentos de medida você conhece?

4. Que grandezas e que unidades de medida dessas grandezas você conhece? Elabore uma lista e compare-a com a do colega.

Resposta pessoal.



URBAZON/E+/GETTY IMAGES

Medições sendo realizadas em triagens médicas.

Introdução


SHOWCAKE/SHUTTERSTOCK.COM

Ao preparar um chá, interagimos com diversas propriedades físicas dos objetos.

No cotidiano, lidamos com propriedades físicas dos objetos a todo momento. Por exemplo, para preparar um chá, primeiro elevamos a temperatura da água em uma chaleira e, depois, transferimos a água quente para um recipiente adequado, como uma xícara ou uma caneca, sem exceder sua capacidade. Conforme a água é transferida de um recipiente para outro, sustentar a chaleira requer uma força menor, uma vez que diminui a massa de água que ela contém.

Nesse cenário simples, citamos a interação com quatro grandezas: temperatura, capacidade, força e massa.

Uma grandeza é uma propriedade mensurável. No dia a dia, medir uma grandeza é associar a ela um número, utilizando um instrumento apropriado.

Por exemplo, podemos utilizar o termômetro (instrumento) para aferir a temperatura (grandeza) de uma pessoa em grau Celsius, em que 1 °C (um grau Celsius) é a unidade de medida previamente adotada. Ou podemos usar uma trena (instrumento) para determinar o comprimento (grandeza) de uma sala em metro, em que 1 m (um metro) é a unidade de medida previamente adotada.

Comprimento, área e volume

Neste tópico, apresentaremos as noções básicas dos modelos matemáticos para a determinação de medidas das seguintes grandezas:

- Comprimento de um segmento de reta.
- Área de uma figura geométrica plana.
- Volume de um sólido geométrico.

Medir é estabelecer um sistema de comparação entre duas grandezas de mesma natureza, isto é, entre dois comprimentos, entre duas áreas ou entre dois volumes. Nesse sistema, uma das grandezas é adotada, previamente, como unidade de medida, e o resultado da comparação é um número que expressa quantas vezes a outra grandeza é maior, ou menor, do que a unidade adotada.

Segmento unitário

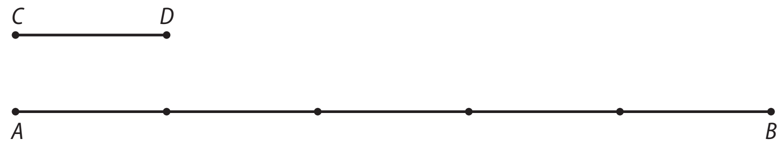
Suponha que queremos medir o comprimento do segmento $\overline{AB}$.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Para isso, vamos adotar o segmento $\overline{CD}$ como unidade de medida e admitir que a medida do seu comprimento será igual a 1, ou seja, uma unidade de comprimento (u.c.).

Nesse caso, o segmento $\overline{CD}$ é denominado **segmento unitário**.

Observe, na figura, que o segmento $\overline{CD}$ cabe exatamente 5 vezes no comprimento de $\overline{AB}$.



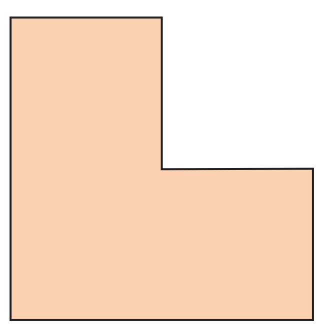
Portanto, a medida do comprimento de $\overline{AB}$ é 5 u.c. (cinco unidades de comprimento), ou seja, $\overline{AB}$ é cinco vezes maior do que a unidade de medida $\overline{CD}$ adotada.

O segmento adotado como unidade de medida da grandeza comprimento é denominado segmento unitário, e, por definição, a medida do seu comprimento será igual a 1 u.c. (uma unidade de comprimento).

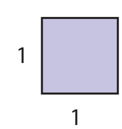
» Quadrado unitário

Imagine, agora, que queremos determinar a medida da área da região plana da figura geométrica *F*. Para isso, vamos adotar como unidade de medida o quadrado *Q*, cujo lado mede 1 u.c., e admitir que a medida de sua área será igual a 1, ou seja, uma unidade de área (u.a.).

Figura *F*



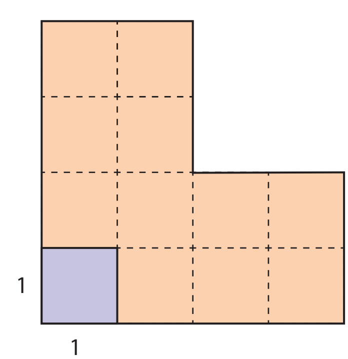
Quadrado *Q*



Nesse caso, o quadrado *Q* é denominado **quadrado unitário**.

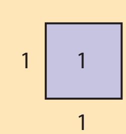
Observe, na figura, que o quadrado *Q* cabe exatamente 12 vezes na região plana da figura *F*.

Portanto, a medida da área da figura *F* é 12 u.a. (doze unidades de área), ou seja, a figura *F* é 12 vezes maior do que a unidade de medida *Q* adotada.



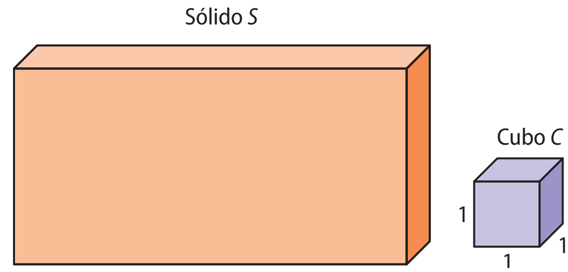
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

O quadrado cujo lado mede 1 u.c. (uma unidade de comprimento), adotado como unidade de medida da grandeza área, é denominado quadrado unitário, e, por definição, a medida da sua área será igual a 1 u.a. (uma unidade de área).



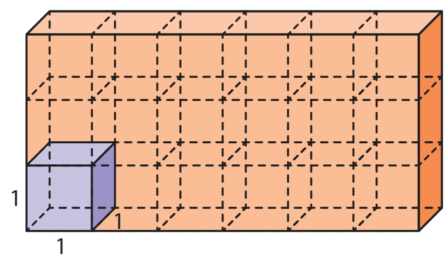
» Cubo unitário

Vamos, agora, medir o volume do espaço ocupado pelo sólido geométrico *S*. Para isso, vamos adotar como unidade de medida o cubo *C*, cuja aresta mede 1 u.c., e admitir que a medida do seu volume será igual a 1, ou seja, uma unidade de volume (u.v.).



Nesse caso, o cubo *C* é denominado **cubo unitário**.

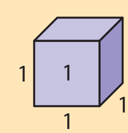
Observe, na figura, que o cubo *C* cabe exatamente 18 vezes no espaço ocupado pelo sólido *S*.



ILUSTRAÇÕES: SERGIO LIMA

Portanto, o volume do sólido *S* é 18 u.v. (dezoito unidades de volume), ou seja, o sólido *S* é 18 vezes maior do que a unidade de medida *C* adotada.

O cubo cuja aresta mede 1 u.c. (uma unidade de comprimento), adotado como unidade de medida da grandeza volume, é denominado cubo unitário, e, por definição, a medida do seu volume será igual a 1 u.v. (uma unidade de volume).



Saiba que...

Nesta obra, os termos "comprimento", "área" e "volume", dependendo do contexto, serão usados tanto para indicar grandezas quanto suas respectivas medidas.

Em nosso cotidiano, quando temos de medir ou indicar o comprimento, a área e o volume de objetos reais, em geral, adotamos unidades de medidas padronizadas. Acompanhe alguns exemplos.

- O kilometro (km), para indicar o comprimento de uma rua. Nesse contexto, temos de imaginar o segmento unitário do modelo matemático com 1 km de comprimento.
- O metro quadrado (m^2), para expressar a área de um terreno. Nesse exemplo, temos de imaginar os lados do quadrado unitário com 1 m de comprimento; portanto, por definição, sua área será igual a 1 m^2.
- O decimetro cúbico (dm^3), para quantificar o volume de água contido em um recipiente. Nesse caso, temos de imaginar as arestas do cubo unitário com 1 dm de comprimento; portanto, por definição, seu volume será igual a 1 dm^3.

Porém, nem sempre existiram unidades padronizadas. Conheça um pouco a história das unidades de medida no próximo tópico.

O Sistema Internacional de Unidades (SI)

Há mais de uma maneira possível de associar um número a uma grandeza. Para medir o comprimento de uma quadra poliesportiva, uma pessoa poderia contar a quantidade de passos que ela precisa dar para percorrê-la e associar essa quantidade ao comprimento da quadra. Nesse exemplo, essa pessoa poderia afirmar corretamente que o comprimento dessa quadra é igual a 22 passos. No entanto, caso outra pessoa fizesse a medição da mesma quadra, também usando a quantidade de passos, ela poderia obter outro valor, por ter passos menores que a primeira pessoa, afirmando, também corretamente, que o comprimento da quadra é igual a 31 passos. Nesses casos, dizemos que o passo é a unidade de medida empregada para fazer a medição do comprimento da quadra. Porém, apesar de ser uma unidade de medida válida, o passo não é uma unidade de medida usual, pois depende da pessoa que realiza a medição.

Para contornar esse problema, ao longo dos séculos, cientistas propuseram unidades de medida padrão, que independem das características físicas de quem realiza a medição. Acompanhe a linha do tempo a seguir.

Final do século XVIII
No caso da grandeza comprimento, a unidade de medida **metro** foi definida como uma fração específica da distância entre o Equador e o Polo Norte ao longo de um meridiano.

1799
A unidade metro foi redefinida como a distância entre duas marcas gravadas em uma barra de platina, as quais foram feitas de modo a corresponder à definição anterior. Essa barra de platina, conhecida como metro padrão, foi armazenada em Paris, na França, em uma sala com temperatura e umidade estáveis para minimizar variações no tamanho dela.

1875
Foi fundada a Conferência Geral de Pesos e Medidas (CGPM), uma organização internacional que atua como autoridade em todas as questões relacionadas às unidades de medida. Na ocasião, delegações de 17 países se reuniram para estabelecer um sistema de medidas internacionalmente aceito.

1889
Ocorre a primeira reunião da CGPM em Paris. Durante essa conferência, cópias do metro padrão original foram adotadas, e outras medidas foram tomadas para consolidar, internacionalmente, o sistema métrico.

1954
Desde sua fundação, a CGPM tem se reunido periodicamente, e, em sua 10ª reunião, foram adotadas como base as unidades de sete grandezas.

1960
Em sua 11ª reunião, a CGPM adotou o nome Sistema Internacional de Unidades (SI) para o sistema proposto seis anos antes.

SERGIO LIMA

As sete grandezas escolhidas pela CGPM não dependem umas das outras e são denominadas grandezas de base; suas unidades são conhecidas como unidades de base e podem ser observadas no quadro a seguir.

Grandeza de base	Unidade de base (símbolo)
Comprimento	metro (m)
Massa	kilograma (kg)
Tempo	segundo (s)
Temperatura termodinâmica	kelvin (K)
Quantidade de matéria	mol (mol)
Intensidade luminosa	candela (cd)
Corrente elétrica	ampere (A)

Saiba que...

Atualmente, no SI, o metro é definido em função da velocidade da luz no vácuo (c); o kilograma, em função da constante de Planck (h); o segundo, em função de determinado período de radiação ligado ao césio-133; o kelvin, em função da constante de Boltzmann (k); o mol, em função da constante de Avogadro (N_A); a candela, em função da eficácia luminosa de uma fonte de luz em uma frequência específica; e o ampere, em função da carga elementar do elétron (e).

Apesar de o SI contemplar todas as unidades de medida necessárias para medir as grandezas físicas, no dia a dia, costumamos utilizar algumas unidades de medida que não pertencem a esse sistema. Por exemplo:

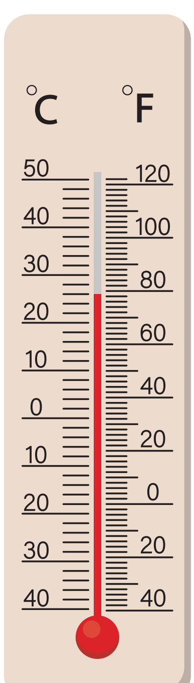
- A tonelada (unidade de medida de massa, que corresponde a 1 000 kg).
- O litro (unidade de medida de volume, que corresponde a 0,001 m^3).
- O minuto (unidade de medida de tempo, que corresponde a 60 s).
- A hora (unidade de medida de tempo, que corresponde a 3 600 s).
- O grau Celsius (unidade de medida de temperatura).

Pense e responda

No SI, a unidade de medida referente à grandeza ângulo plano é o radiano (rad). Que outra(s) unidade(s) de medida associada(s) a essa grandeza você conhece?

Resposta pessoal. Exemplo de resposta: o grau (°).

Embora a maioria dos países tenha adotado o SI como sistema oficial de medidas, alguns países não o adotaram por completo e continuam a utilizar sistemas de medidas diferentes em certos contextos. Os Estados Unidos e o Reino Unido são dois exemplos onde o **sistema imperial de medidas** é usado cotidianamente. Esse sistema inclui a polegada (in), o pé (ft), a jarda (yd) e a milha (mi) como unidades de medida de comprimento, a libra (lb) e a onça (oz) como unidades de medida de massa e o grau Fahrenheit (°F) como unidade de medida de temperatura.



BROVKO SERHII/SHUTTERSTOCK.COM

■ Nesse termômetro, é possível observar as escalas de temperatura nas unidades de medida grau Celsius (utilizada cotidianamente no Brasil) e grau Fahrenheit (utilizada cotidianamente nos Estados Unidos).

Escrita da medida de uma grandeza

Por convenção do SI, a notação utilizada para escrever a medida de uma grandeza é composta de um número, um espaço e uma unidade, por exemplo:

- 2 m (dois metros)
- 0,1 s (um décimo de segundo)

Interpretamos essas notações como um produto entre o número e a unidade, ou seja:

- $2\ m = 2 \cdot m$
- $0{,}1\ s = 0{,}1 \cdot s$

O primeiro exemplo mostra que o comprimento mensurado é duas vezes maior do que a unidade de medida adotada, no caso, o metro, e o segundo exemplo mostra que o tempo mensurado é dez vezes menor do que a unidade de medida adotada, no caso, o segundo.

Ao escrever a medida de uma grandeza como um produto, tanto o número quanto a unidade podem ser manipulados algebricamente, o que possibilita a conversão entre unidades e a utilização de prefixos por meio de manipulações algébricas.

Prefixos

O metro, que é uma unidade de base do SI, é bastante útil para medir vários comprimentos no nosso dia a dia. No entanto, há situações em que o metro não é a unidade mais conveniente. Por exemplo:

Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes citem altura de pessoas ou de edifícios, comprimento de veículos, entre outros.

Pense e responda

Que comprimentos você mediria utilizando a unidade de medida metro?

- A distância, em linha reta, entre os municípios mineiros Ouro Preto e Ouro Branco é 25 000 m.
- O comprimento da bactéria *Escherichia coli* pode chegar a apenas 0,000002 m.

Embora essas medidas estejam corretas, elas não são convenientes. Para casos como esses, utilizamos **múltiplos** e **submúltiplos** do metro.

Quando acrescentamos um prefixo à unidade de medida, compomos uma nova unidade, que é um múltiplo ou um submúltiplo da unidade de base. A seguir, apresentamos alguns dos prefixos adotados no SI, seus símbolos e seus fatores de multiplicação.

Prefixo	Símbolo	Fator
tera	T	10^{12}
giga	G	10^{9}
mega	M	10^{6}
kilo	k	10^{3}
hecto	h	10^{2}
deca	da	10^{1}
deci	d	10^{-1}
centi	c	10^{-2}
mili	m	10^{-3}
micro	µ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}
pico	p	10^{-12}

Assim, adicionando o prefixo kilo (k) à unidade metro (m), compomos a unidade múltipla do metro chamada kilometro (km), e, adicionando o prefixo micro (μ) à unidade metro (m), compomos a unidade submúltipla do metro chamada micrometro (μm). Conforme o quadro, temos:

- 10^3 m = 1 km
- 10^{-6} m = 1 μm

Desse modo, as medidas 25 000 m e 0,000002 m são equivalentes a:

$$25\,000\ \text{m} = 25 \cdot 1\,000\ \text{m} = 25 \cdot \underbrace{10^3\ \text{m}}_{1\ \text{km}} = 25\ \text{km}$$

$$0{,}000002\ \text{m} = 2 \cdot \underbrace{10^{-6}\ \text{m}}_{1\ \mu\text{m}} = 2\ \mu\text{m}$$

Assim, podemos expressar a distância entre os municípios Ouro Preto e Ouro Branco e o comprimento da bactéria *Escherichia coli* como 25 km e 2 μm, respectivamente.

De maneira geral, a unidade metro pode ser convertida para kilometro e para micrometro do seguinte modo:

$$10^3\ \text{m} = 1\ \text{km} \Rightarrow 1\ \text{m} = \frac{1}{10^3}\ \text{km}$$

$$10^{-6}\ \text{m} = 1\ \mu\text{m} \Rightarrow 1\ \text{m} = 10^6\ \mu\text{m}$$

DANIEL CYMBALISTA/FOTOARENA

- A unidade de medida mililitro (mL) é frequentemente utilizada para indicar a dosagem de medicamentos. (As imagens da página estão fora de proporção.)

Os prefixos apresentados no quadro anterior podem ser utilizados com outras unidades de medida além do metro, inclusive com várias unidades que não fazem parte do SI, como os múltiplos e submúltiplos do litro (kilolitro, hectolitro, decalitro, decilitro, centilitro e mililitro). No entanto, esses prefixos não são utilizados com as unidades de medida de tempo que não pertencem ao SI, como o minuto e a hora.

Já o kilograma, unidade de base para a grandeza massa, é um caso especial. Ele contém o prefixo kilo por motivos históricos. Por convenção, os múltiplos e submúltiplos dessa unidade de medida são obtidos pela substituição do prefixo kilo por outro, mantendo o radical da palavra (grama). Por exemplo, as unidades de medida micrograma e nanograma, que correspondem a 10^{-6} g e 10^{-9} g, respectivamente.

NUTTAPONG PUNNA/SHUTTERSTOCK.COM

- Exames de sangue podem medir a presença de certas substâncias até o nível de nanogramas. Realizar exames periodicamente é fundamental para monitorar a saúde e detectar precocemente possíveis problemas.

» Unidades de área

O metro quadrado (m^2) é a unidade de medida padrão do SI para a grandeza área, e o quadrado unitário, cujo lado mede 1 m de comprimento, terá, por definição, 1 m^2 de área.

As unidades múltiplas e submúltiplas do metro quadrado (m^2) utilizam fatores diferentes dos apresentados no quadro de prefixos. Observe a comparação entre alguns fatores do metro e do metro quadrado.

Unidade de comprimento	km	hm	dam	dm	cm	mm
Fator	10^3	10^2	10^1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
Unidade de área	km^2	hm^2	dam^2	dm^2	cm^2	mm^2
Fator	10^6	10^4	10^2	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}

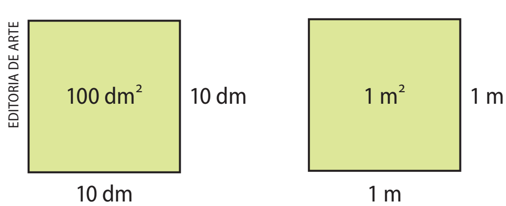
De acordo com o quadro de comparação, temos:

- $1 \text{ dm} = 10^{-1} \text{ m} \Rightarrow 1 \text{ dm} = \frac{1}{10} \text{ m}$
- $1 \text{ dm}^2 = 10^{-2} \text{ m}^2 \Rightarrow 1 \text{ dm}^2 = \frac{1}{100} \text{ m}^2$

Observe que, enquanto um decimetro equivale a um décimo do metro, um decimetro quadrado equivale a um centésimo do metro quadrado.

Para entender essa diferença, acompanhe o procedimento a seguir, que compara a medida da área de um quadrado, em decimetro quadrado (dm^2), à medida dessa mesma área, em metro quadrado (m^2).

A área de um quadrado, cujo lado mede 10 dm, é 100 dm^2, pois $10^2 = 100$. Entretanto, dez decimetros equivalem a um metro (10 dm = 1 m), ou seja, o mesmo quadrado tem 1 m de lado e, consequentemente, 1 m^2 de área.



Desse modo, temos:

$$100 \text{ dm}^2 = 1 \text{ m}^2 \Rightarrow \frac{100 \text{ dm}^2}{100} = \frac{1 \text{ m}^2}{100} \Rightarrow \text{dm}^2 = 10^{-2} \text{ m}^2$$

Portanto, um decimetro quadrado corresponde a um centésimo do metro quadrado. Podemos fazer esse procedimento, com adequações necessárias, para obter os demais fatores das unidades múltiplas e submúltiplas do metro quadrado.

Unidades de volume

O metro cúbico (m^3) é a unidade de medida padrão do SI para a grandeza volume, e o cubo unitário, cuja aresta mede 1 m de comprimento, terá, por definição, 1 m^3 de volume.

As unidades múltiplas e submúltiplas do metro cúbico (m^3) também utilizam fatores diferentes dos apresentados no quadro de prefixos. Observe.

Unidade	km^3	hm^3	dam^3	dm^3	cm^3	mm^3
Fator	10^9	10^6	10^3	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}

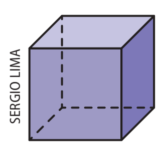
De acordo com o quadro e com o que estudamos anteriormente, temos que:

- $1\ dm = 10^{-1}\ m \Rightarrow 1\ dm = \frac{1}{10}\ m$
- $1\ dm^3 = 10^{-3}\ m^3 \Rightarrow 1\ dm^3 = \frac{1}{1000}\ m^3$

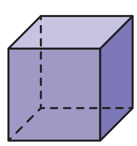
Nesse caso, enquanto um decimetro equivale a um décimo do metro, um decimetro cúbico equivale a um milésimo do metro cúbico.

Para entender essa diferença, acompanhe um modo de obter o fator do decimetro cúbico.

O volume de um cubo, cuja aresta mede 10 dm, é 1 000 dm^3, pois $10^3 = 1\,000$. Entretanto, dez decimetros equivalem a um metro (10 dm = 1 m), ou seja, o mesmo cubo tem 1 m de aresta e, consequentemente, 1 m^3 de volume.



Volume de 1 000 dm^3



Volume de 1 m^3

Desse modo, temos:

$$1000\ dm^3 = 1\ m^3 \Rightarrow \frac{1000\ dm^3}{1000} = \frac{1\ m^3}{1000} \Rightarrow 1\ dm^3 = 10^{-3}\ m^3$$

Assim, um decimetro cúbico corresponde a um milésimo do metro cúbico. De maneira análoga e com adequações necessárias, podemos obter os demais fatores das unidades múltiplas e submúltiplas do metro cúbico.

Saiba que...

O litro (L) é uma unidade de volume muito utilizada, a qual não pertence ao SI. O fator de conversão dessa unidade de medida para o metro cúbico é:

$$1\ L = 10^{-3}\ m^3$$

Manipulando essa relação, temos outras equivalências. Por exemplo:

- Um litro equivale a um decimetro cúbico ($1\ L = 1\ dm^3$).
- Mil litros correspondem a um metro cúbico ($1000\ L = 1\ m^3$).
- Um mililitro equivale a um centimetro cúbico ($1\ mL = 1\ cm^3$).

Instrumentos de medida

Em nosso cotidiano, para medidas de comprimento, estamos acostumados a utilizar alguns instrumentos, como a régua graduada, a fita métrica e a trena. Esses três instrumentos de medida costumam ser graduados em centimetros e milimetros e têm **precisão** de 1 mm.

precisão: a precisão de um instrumento de medida é a menor divisão na escala que ele adota.

Para profissionais que precisam de uma maior precisão em suas aferições, o paquímetro é uma opção. Esse instrumento costuma ter precisão de 0,1 mm, 0,05 mm e 0,02 mm.

Para assistir

- COMO usar um paquímetro: a régua turbinada. [*S. l.*: *s. n.*], 2016. 1 vídeo (6 min). Publicado pelo canal Manual do Mundo. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=BhMjGKfYscw. Acesso em: 26 ago. 2024.

  Assista ao vídeo para aprender, de modo simples, a usar um paquímetro.

KASARP STUDIO/SHUTTERSTOCK.COM

▪ Paquímetro sendo utilizado por mecânico para obter, com precisão, o comprimento de uma peça.

O micrômetro tem maior precisão do que o paquímetro: entre 0,01 mm e 0,001 mm. Em geral, ele é utilizado para medir objetos muito pequenos, como o diâmetro de um fio de cabelo.

Já para medidas de massa, utilizamos balanças. No entanto, para cada situação, há um tipo de balança mais adequado.

Em depósitos e indústrias, balanças de carga são amplamente utilizadas. Elas variam de formato e de capacidade dependendo da aplicação específica em que são utilizadas. A precisão das balanças de carga costuma ser de 0,1% da capacidade delas, o que significa, por exemplo, que uma balança de carga com capacidade de 10 t tem precisão de 10 kg.

Para uso doméstico, existe a balança de massa corporal, que é utilizada para aferir a massa corpórea, com precisão de 0,1 kg, e a balança culinária, que é utilizada para medir a massa de alimentos, com precisão de 1 g.

Em situações que exigem a medição precisa de massa, como em joalherias, laboratórios e indústria farmacêutica, são utilizadas balanças cuja precisão é em torno de 0,1 mg, podendo chegar a 0,01 mg em modelos avançados.

MIRIAM GIL ALBERT/SHUTTERSTOCK.COM

▪ Aferição da massa de uma substância em balança de precisão.

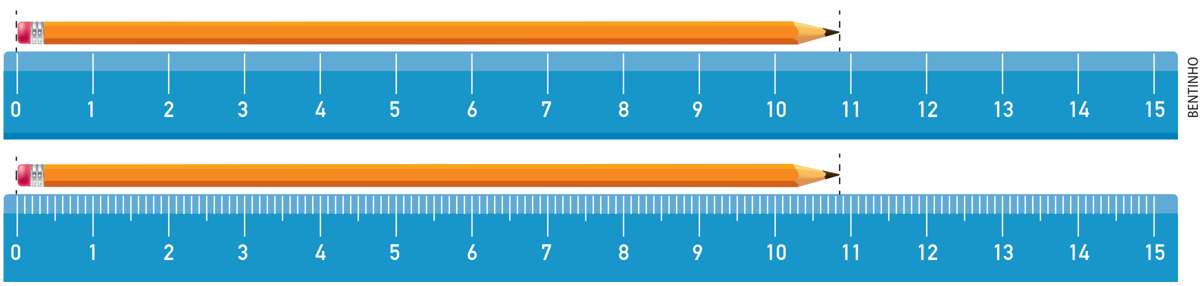
Além desses, existem outros instrumentos de medida. Acompanhe alguns exemplos.

- O cronômetro é um instrumento de medida de tempo e tem precisão de 1 centésimo de segundo.
- O copo medidor de líquidos mede o volume de líquidos. Ele é vendido em diferentes modelos, cada um com uma precisão própria, mas costuma variar entre 50 mL e 100 mL.
- O copo dosador de medicamentos, usado para medir o volume de medicamentos líquidos, tem precisão de poucos mililitros, sendo comum o copo dosador com precisão de 2,5 mL.
- O termômetro utilizado para medir temperatura corporal tem precisão de 0,1 °C, enquanto os termômetros que medem a temperatura ambiente e os que são utilizados na culinária têm precisão de 1 °C.

» Algarismos significativos e algarismos duvidosos

Quando utilizamos um instrumento para medir a grandeza de um objeto real, o resultado obtido é acompanhado de um erro, de uma imprecisão ocasionada pelas características do instrumento utilizado. Observe.

Vamos considerar duas medições para um lápis: a primeira delas feita com uma régua graduada em centimetro, e a segunda, com uma régua graduada em milimetro.



Na primeira medição, observamos que a ponta do lápis está entre os números 10 e 11, podendo concluir que o lápis tem mais de 10 cm e menos de 11 cm. Como a ponta está mais próxima do número 11 que do número 10, podemos estimar que a medida do lápis seja 10,8 cm. Note que a estimativa 10,9 cm, para a medida desse lápis por meio dessa régua, também seria válida.

Na segunda medição, observamos que a ponta do lápis está entre os números 10,8 e 10,9, podendo concluir que o lápis tem mais de 10,8 cm e menos de 10,9 cm. Como a ponta está entre esses números, podemos estimar que a medida do lápis seja 10,85 cm.

Para a medida 10,8 cm encontrada na primeira medição, dizemos que os algarismos 1 e 0 são certos e que o algarismo 8 é duvidoso, uma vez que ele foi estimado. Já para a medida 10,85 cm encontrada na segunda medição, dizemos que os algarismos 1, 0 e 8 são certos e que o algarismo 5 é duvidoso.

Chamamos de **algarismos certos** aqueles que são obtidos diretamente na medição e de **algarismos duvidosos** aqueles que são estimados por quem realiza a medição. Dizemos que todos os algarismos certos e o primeiro duvidoso são os algarismos significativos de uma medida.

Assim, podemos dizer que a medida 10,8 cm determinada com a primeira régua tem 3 algarismos significativos, enquanto a medida 10,85 cm determinada com a segunda régua tem 4 algarismos significativos.

ATIVIDADES RESOLVIDAS

1. (UTFPR) Convertendo 843 dm (decimetros) e 35 km (kilometros) para metros, obtemos, respectivamente:

a) 8,43 e 3500 metros.

b) 84,3 e 35000 metros.

c) 0,843 e 350 metros.

d) 8430 e 3,5 metros.

e) 84300 e 35 metros.

Resolução

Sabemos que 1 dm $= 10^{-1}$ m e 1 km $= 10^3$ m, logo:

843 dm $= 843 \cdot 10^{-1}$ m $= 84{,}3$ m

35 km $= 35 \cdot 10^3$ m $= 35\,000$ m

Portanto, as conversões corretas estão na alternativa **b**.

2. (UTFPR) Um salão pode ser revestido totalmente com 540 ladrilhos de 3600 cm², cada um. Assinale qual a área do salão.

a) 19,40 dm².

b) 1,94 km².

c) 0,194 hm².

d) 194000 mm².

e) 194,40 m².

Resolução

A área do salão é:

$540 \cdot 3600$ cm² $= 1\,944\,000$ cm²

Como 1 cm² $= 10^{-4}$ m², então:

$1\,944\,000$ cm² $= 1\,944\,000 \cdot 10^{-4}$ m² $= 194{,}40$ m²

A área do salão está expressa corretamente na alternativa **e**.

3. (Enem/MEC) Os tempos gastos por três alunos para resolver um mesmo exercício de matemática foram: 3,25 minutos; 3,4 minutos e 191 segundos.

O tempo gasto a mais, em segundo, pelo aluno que concluiu por último a resolução do exercício, em relação ao primeiro que o finalizou, foi igual a

a) 13.

b) 14.

c) 15.

d) 21.

e) 29.

Resolução

Para converter minutos (min) em segundos (s), utilizamos a seguinte equivalência:

1 min = 60 s

Assim, os tempos, em segundo, que os três alunos gastaram para resolver o exercício foram:

Aluno 1: 3,25 min $= 3{,}25 \cdot 60$ s $= 195$ s

Aluno 2: 3,4 min $= 3{,}4 \cdot 60$ s $= 204$ s

Aluno 3: 191 s

Portanto, o aluno que concluiu o exercício por último gastou 204 s, e o que concluiu primeiro gastou 191 s. Assim, a diferença de tempo entre eles é dada por:

204 s − 191 s = 13 s

Portanto, a resposta correta é a alternativa **a**.

4. (FGV-SP) Estima-se que, em determinado país, o consumo médio por minuto de farinha de trigo seja 4,8 toneladas. Nessas condições, o consumo médio por semana de farinha de trigo, em kilogramas, será aproximadamente:

a) $4{,}2 \cdot 10^5$

b) $4{,}8 \cdot 10^7$

c) $5{,}0 \cdot 10^7$

d) $4{,}6 \cdot 10^6$

e) $4{,}4 \cdot 10^6$

Resolução

Pelo enunciado, o consumo médio de farinha de trigo é $\dfrac{4{,}8 \text{ toneladas}}{\text{min}}$.

Sabemos que 1 semana tem 7 dias, que cada dia tem 24 horas e que cada hora tem 60 minutos. Assim:

$7 \cdot 24 \cdot 60 \text{ min} = 1 \text{ semana} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 \text{ min} = \dfrac{1}{10\,080} \text{ semana}$

Como o exercício pede um valor aproximado em notação científica, vamos arredondar 10080 para 10^4. Com isso, temos que:

$1 \text{ min} = \dfrac{1}{10^4} \text{ semana} \Rightarrow 1 \text{ min} = 10^{-4} \text{ semana}$

Além disso, sabemos que 1 tonelada $= 10^3$ kg.

Logo, o consumo médio, em kilograma por semana, será de aproximadamente:

$$\frac{4{,}8 \text{ toneladas}}{\text{min}} = \frac{4{,}8 \cdot 10^3 \text{ kg}}{10^{-4} \text{ semana}} =$$

$$= \frac{4{,}8 \cdot 10^{3-(-4)} \text{ kg}}{\text{semana}} = 4{,}8 \cdot 10^7 \frac{\text{kg}}{\text{semana}}$$

Portanto, a resposta correta é a alternativa **b**.

ATIVIDADES

4. c) Quantidade de ouro: 0,06 kg. A quantidade de minerais (1,5 kg) já está expressa usando uma unidade de base do SI (kg).

1. (UFPR) Na representação de grandezas físicas, são utilizados diferentes sistemas de unidades, sendo que o SI (Sistema Internacional de Unidades) é o sistema padrão utilizado pela comunidade científica. Uma unidade básica do SI, a unidade de medida do comprimento, é:

a) a milha.
b) o metro.
c) o pé.
d) a polegada.
e) a jarda.

alternativa **b**

2. (IFPE) Na disciplina Instalações de Refrigeração, do 6º período do curso de Refrigeração e Climatização do IFPE campus Recife, um estudante precisou fazer um orçamento para a compra de 8 metros de tubo de cobre. Ao pesquisar em algumas lojas, percebeu que o preço era informado de acordo com o comprimento do tubo, em centimetros ou em decimetros. Esse estudante concluiu que precisava fazer um orçamento de alternativa **c**

a) 8 000 centimetros de tubo.
b) 80 centimetros de tubo.
c) 800 centimetros de tubo.
d) 800 decimetros de tubo.
e) 8 000 decimetros de tubo.

3. (Enem/MEC) A *Chlamydia*, a menor bactéria do mundo, mede cerca de 0,2 micrometro (1 micrometro equivale à milionésima parte de um metro). Para ter uma noção de como é pequena a *Chlamydia*, uma pessoa resolveu descrever o tamanho da bactéria na unidade milimetro. alternativa **c**

A medida da *Chlamydia*, em milimetro, é

a) 2×10^{-1}
b) 2×10^{-2}
c) 2×10^{-4}
d) 2×10^{-5}
e) 2×10^{-7}

4. Leia um trecho da notícia a seguir e faça o que se pede.

> A Polícia Rodoviária Federal (PRF) apreendeu arma de fogo, ouro de garimpo ilegal, minério, e combustível de aviação contrabandeados durante abordagens neste fim de semana nas rodovias BR-174 e BR-401, em Roraima. [...]
>
> De acordo com a PRF, foram 22 munições, 60 gramas de ouro, 1,5 kg de minerais e 1,5 litro de combustível.
>
> PRF apreende arma de fogo, ouro, minérios e combustível de aviação contrabandeados em rodovias de Roraima. **G1**, Boa Vista, 15 abr. 2024. Disponível em: https://g1.globo.com/rr/roraima/noticia/2024/04/15/prf-apreende-arma-de-fogo-ouro-minerios-e-combustivel-de-aviacao-contrabandeados-em-rodovias-de-roraima.ghtml. Acesso em: 26 ago. 2024.

a) Liste as unidades de medida citadas no texto e as grandezas a que correspondem.

b) Expresse a quantidade de combustível apreendida utilizando uma unidade do SI.
Exemplos de resposta: 0,0015 m³; 1,5 dm³

c) Expresse as outras medidas utilizando uma unidade de base do SI.

5. (Cefet-RJ) Um relógio digital mostra as horas de 00:00 até 23:59. Em alguns momentos, o relógio mostra horas *seguidinhas*, isto é, apresenta sequência de quatro números consecutivos. Por exemplo, 12:34 é uma hora *seguidinha*.

De 12:34 até a próxima hora *seguidinha*, quantos minutos terão passado? alternativa **a**

a) 671
b) 661
c) 651
d) 641

6. (Enem/MEC) Com o intuito de fazer bombons para vender, uma doceira comprou uma barra de 2 kg de chocolate e 1 L de creme de leite. De acordo com a receita, cada bombom deverá ter exatamente 34 g de chocolate e 12 mL de creme de leite.

Respeitando os critérios estabelecidos, quantos bombons a doceira poderá fazer utilizando o máximo que puder os ingredientes comprados? alternativa **c**

a) 5
b) 8
c) 58
d) 71
e) 83

7. (IFCE) A carga de um caminhão é de 2 toneladas. Se já foram carregados 920 kg, a quantidade de kilogramas que ainda falta é

a) 1060.
b) 1080.
c) 1100.
d) 1120.
e) 1140.

alternativa **b**

4. a) Grama (g) – unidade de medida de massa; kilograma (kg) – unidade de medida de massa; litro (L) – unidade de medida de volume.

8. Faça a conversão das unidades de medida.

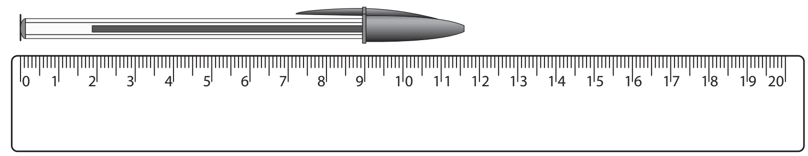
a) Uma área de 15 000 cm^2 equivale a quantos metros quadrados? 1,5 m^2

b) Um volume de 5 m^3 corresponde a quantos litros? 5 000 L

c) Uma área de 0,003 km^2 equivale a quantos centimetros quadrados? Escreva a resposta em notação científica. $3 \cdot 10^7$ cm^2

d) Um volume de 2 500 mL corresponde a quantos metros cúbicos? Escreva a resposta em notação científica. $2{,}5 \cdot 10^{-3}$ m^3

9. (Encceja/MEC) Uma criança está aprendendo a utilizar a régua e resolveu medir o comprimento de uma caneta, posicionando uma régua, graduada em centimetro, como ilustra a figura.



SERGIO LIMA

A medida do comprimento dessa caneta, em centimetro, é alternativa **c**

a) 11,0. **b)** 11,4. **c)** 11,6. **d)** 12,0.

10. No exercício anterior, quantos algarismos significativos tem a medida da caneta? Quantos desses algarismos são certos e quantos são duvidosos?

O comprimento 11,6 cm da caneta tem três algarismos significativos, dois deles são certos, e o outro é duvidoso.

11. (Encceja/MEC) Para efetuar a medida de uma grandeza, precisamos estabelecer uma unidade de medida como referência para, a partir daí, definir o comprimento, a área, a massa ou o que se quer medir. Observe a tirinha. alternativa **a**

ENCCEJA, 2020

SILVA, W. R. Disponível em: http://humorcomciencia.com. Acesso em: 12 set. 2019.

O personagem Caco, a fim de impressionar seu amigo, determinou a sua altura em um submúltiplo do metro, que é a unidade padrão no Sistema Internacional de Unidades para medir a grandeza comprimento. Pode-se considerar que ele não está sendo exagerado, pois a altura média de um animal adulto da sua espécie é de 1,50 m. Com base nessas informações, quantos centimetros devem ser somados à medida da altura de Caco para alcançar a média de altura de um animal adulto de sua espécie?

a) 70 **b)** 65 **c)** 7 **d)** 0,7

12. (UERJ)

UERJ, 2018

novaescola.org.br

Onça e libra são unidades de massa do sistema inglês. Sabe-se que 16 onças equivalem a 1 libra e que 0,4 onças é igual a x libras. O valor de x é igual a: alternativa **c**

a) 0,0125 **b)** 0,005 **c)** 0,025 **d)** 0,05

Unidades de grandezas derivadas

Chamamos de unidades de grandezas derivadas aquelas que podem ser obtidas por meio de uma razão ou de um produto de unidades de bases, ou de seus múltiplos ou submúltiplos. Vamos analisar alguns casos.

Velocidade

As unidades de medida mais utilizadas para a grandeza velocidade são o metro por segundo $\left(\frac{m}{s}\right)$ e o kilometro por hora $\left(\frac{km}{h}\right)$.

Para converter unidades que são indicadas por uma razão, dependendo do contexto, é necessário mudar as unidades das duas grandezas. O exemplo a seguir ilustra como converter km/h para m/s.

Considere a seguinte situação.

Um veículo se desloca a uma velocidade média de 72 km/h. Como podemos determinar essa velocidade em metro por segundo (m/s), que é a unidade padrão para velocidade no SI?

Primeiro, temos de estabelecer as equivalências entre as unidades de comprimento e entre as unidades de tempo.

Sabemos que $1 \text{ km} = 10^3 \text{ m}$.

Em relação à unidade de tempo, temos que $1 \text{ h} = 60 \text{ min}$ e $1 \text{ min} = 60 \text{ s}$.

Portanto:

$1 \text{ h} = 60 \text{ min} = 60 \cdot 60 \text{ s} = 3\,600 \text{ s}$

Substituindo as unidades km e h por suas respectivas equivalências, obtemos:

$$72 \text{ km/h} = \frac{72 \text{ km}}{\text{h}} = \frac{72 \cdot 10^3 \text{ m}}{3\,600 \text{ s}} = \frac{72\,000 \text{ m}}{3\,600 \text{ s}} = 20\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 20 \text{ m/s}$$

Logo, a velocidade média do veículo, em metro por segundo, é 20 m/s.

Saiba que...

É comum as unidades de medida de velocidade serem escritas no formato m/s e km/h. Independentemente da escrita, elas expressam uma razão entre as unidades das grandezas comprimento e tempo.

Pense e responda

Se um objeto se move a uma velocidade média de 25 m/s, qual é a velocidade desse objeto em kilometro por hora? 90 km/h

- A velocidade da luz no vácuo é 299 792 458 m/s. Isso significa que, a cada segundo, a luz viaja, aproximadamente, 300 000 km.

COFFEEKAI/ISTOCK/GETTY IMAGES

Densidade

Dizemos que a densidade é a grandeza que relaciona a massa de um objeto ao espaço que ele ocupa. Ela é determinada pela seguinte razão:

$$\text{densidade} = \frac{\text{massa}}{\text{volume}}$$

As unidades derivadas que são associadas à densidade são a razão entre unidades de medida de massa e unidades de medida de volume, sendo as mais comuns o kilograma por metro cúbico $\left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)$ e o grama por centimetro cúbico $\left(\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$.

Densidade superficial

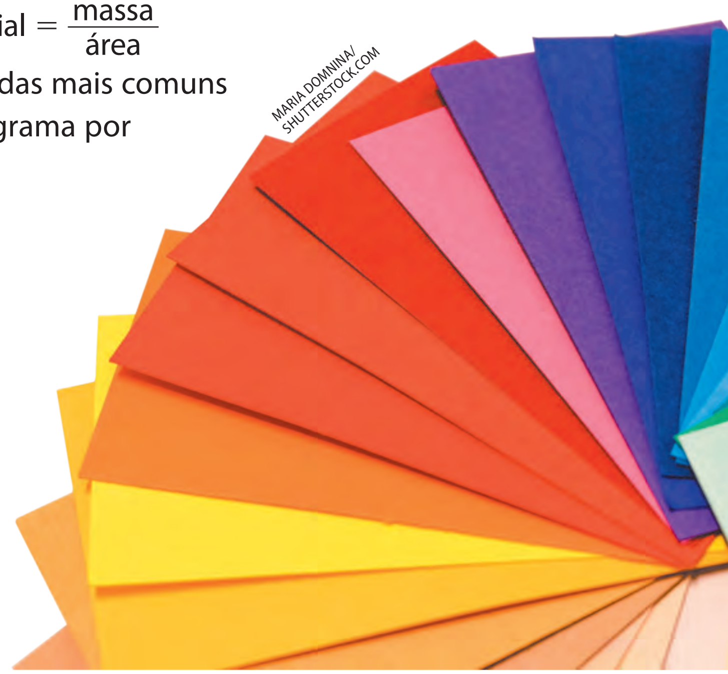
Quando se tratam de materiais, como tecidos e papéis, é comum relacionar a massa deles à área por meio da grandeza densidade superficial, que pode ser calculada pela seguinte razão:

$$\text{densidade superficial} = \frac{\text{massa}}{\text{área}}$$

Para densidade superficial, as unidades derivadas mais comuns são o kilograma por metro quadrado (kg/m^2) e o grama por metro quadrado (g/m^2).

Saiba que...

Nas indústrias têxtil e de papel, a densidade superficial costuma ser chamada de gramatura.


MARIA DOMNINA/SHUTTERSTOCK.COM

- A escolha da gramatura do papel para pintura ou impressão impacta a qualidade final do produto. Por exemplo, para imprimir fôlderes, que demandam uma resistência maior, é comum utilizar a gramatura de 120 g/m^2 a 150 g/m^2.

Densidade demográfica

A concentração de pessoas em determinada região geográfica é denominada densidade demográfica. A densidade demográfica é dada pela razão entre o número de habitantes de uma região e a área dessa região.

$$\text{densidade demográfica} = \frac{\text{número de habitantes da região}}{\text{área da região}}$$

A densidade demográfica é, geralmente, expressa em habitantes por kilometro quadrado (habitantes/km^2).

Essa medida é importante para entender como a população está distribuída em diferentes regiões, sendo útil para o planejamento urbano, para a distribuição de recursos, para o cálculo de impactos ambientais e para outros aspectos socioeconômicos. Alguns fatores que influenciam na densidade demográfica são o relevo, o clima, a disponibilidade de recursos e o desenvolvimento econômico.

FÓRUM

Populoso ou povoado?

O Brasil é um país populoso. De acordo com o Censo 2022, feito pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), a população do país é de mais de 200 milhões de habitantes; mas seria o Brasil um país povoado? Para responder a essa pergunta, devemos entender a diferença entre esses dois conceitos da Geografia.

Populoso se refere à quantidade de habitantes de uma região, sem considerar sua extensão territorial nem a distribuição da população.

Já **povoado** se refere à densidade demográfica. Uma região com uma densidade demográfica alta é considerada densamente povoada, mesmo que sua população não seja tão grande. Para isso, basta que sua área seja pequena, por exemplo.

Compreendendo isso, concluímos que o Brasil é um país populoso, pois sua população é muito grande, mas nem todo o país é densamente povoado, já que sua extensão territorial é muito grande, e a população está mal distribuída dentro do território.

Observe o mapa a seguir.

Densidade demográfica do Brasil – 2022

SONIA VAZ

Fonte: INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Atlas geográfico escolar**. 9. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2023. p. 118.

A distribuição desigual da população dentro de um território pode trazer grandes problemas sociais e econômicos, tanto para as regiões densamente povoadas como para as pouco povoadas.

Após a leitura do texto e a análise do mapa, faça o que se pede.

Ver as **Orientações para o professor**.

- Com seus colegas, façam um fórum de debate sobre os problemas causados pela má distribuição da população no território brasileiro e sobre as possíveis ações que poderiam reduzir essa distribuição desigual.

» Potência e consumo de energia elétrica

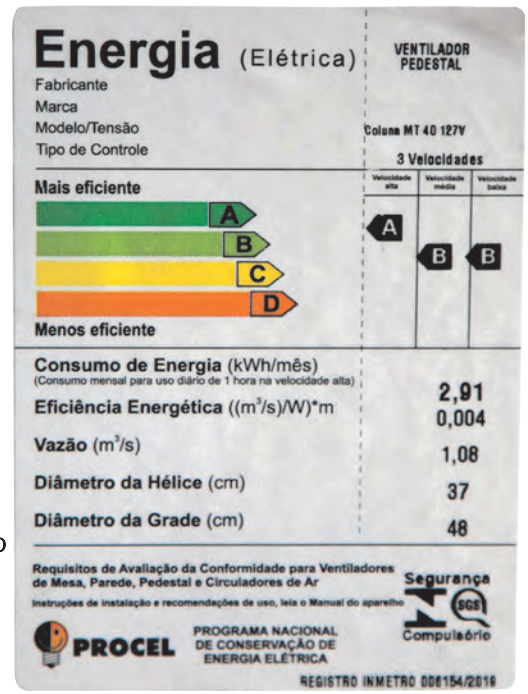
A unidade de medida de energia é o kilowatt-hora (kWh), obtida como produto entre as unidades de potência (kW) e de tempo (h), ou seja, kWh = kW · h. Essa unidade de medida representa a quantidade de energia consumida por um dispositivo ou por um sistema durante um período de tempo; ela é usada para cobranças de energia elétrica em domicílios e empresas.

Um kilowatt-hora é equivalente a 1 000 watts de potência utilizada continuamente por uma hora.

Para entender a maneira como calcular o consumo de energia, vamos tomar como exemplo um *notebook* cuja potência é 230 W, que fica ligado durante 8 h por dia, ao longo de 25 dias em um mês. Durante esse período de uso, a energia E gasta por esse equipamento é:

$$E = \overbrace{230\ \text{W}}^{\text{Potência}} \cdot \overbrace{25 \cdot 8\ \text{h}}^{\text{Tempo}} =$$
$$= 230 \cdot 10^{-3}\ \text{kW} \cdot 200\ \text{h} = 46\ \text{kWh}$$

Em uma região em que o preço do kWh é R$ 0,65, o custo gerado em um mês, considerando-se apenas esse aparelho, é 29,90 reais, pois 46 · 0,65 = 29,90.



JOA SOUZA/SHUTTERSTOCK.COM/PROCEL/INMETRO

- O Selo Procel, presente em eletrodomésticos vendidos no Brasil, indica o nível de eficiência energética do produto. Quando um aparelho tem alta eficiência energética, significa que ele utiliza a energia de maneira mais eficaz, reduzindo o consumo de energia elétrica.

ATIVIDADES RESOLVIDAS

5. (Eear-SP) A densidade é uma grandeza física que varia com a mudança da temperatura e da pressão, sendo que nos sólidos e nos líquidos essa variação é muito pequena, enquanto que nos gases é maior. No Sistema Internacional de Unidades (SI), a densidade é dada em kg/m³, porém, é muito comum o uso do g/cm³.

Dentre as alternativas a seguir, assinale aquela na qual está corretamente descrito o valor de 1 g/cm³ expresso em unidades do SI (kg/m³).

a) 0,001 **b)** 0,01 **c)** 100 **d)** 1000

Resolução

A unidade da densidade é indicada por uma razão entre as unidades de massa e de volume. Então, para converter 1 g/cm³ em kg/m³, precisamos mudar as duas unidades. Em relação à unidade de massa, sabemos que $1\ \text{g} = 10^{-3}\ \text{kg}$. Em relação à unidade de volume, temos $1\ \text{cm}^3 = 10^{-6}\ \text{m}^3$. Desse modo:

$$1\ \text{g/cm}^3 = 1\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = \frac{1 \cdot 10^{-3}\ \text{kg}}{10^{-6}\ \text{m}^3} =$$
$$= 10^3\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 1000\ \text{kg/m}^3$$

Portanto, a alternativa **d** é a correta.

6. (UFRGS-RS) Na última década do século XX, a perda de gelo de uma das maiores geleiras do hemisfério norte foi estimada em 96 km³. Se 1 cm³ de gelo tem massa de 0,92 g, a massa de 96 km³ de gelo, em kilogramas, é

a) $8{,}832 \cdot 10^{12}$.

b) $8{,}832 \cdot 10^{13}$.

c) $8{,}832 \cdot 10^{14}$.

d) $8{,}832 \cdot 10^{15}$.

e) $8{,}832 \cdot 10^{16}$.

Resolução

Segundo o enunciado, a densidade do gelo é $d = 0{,}92\ g/cm^3$.

Convertendo o volume de gelo para cm^3, obtemos: $V = 96\ km^3 = 96 \cdot 10^{15}\ cm^3$

Assim, a massa m, em grama, desse volume de gelo é:

$$d = \frac{m}{V} \Rightarrow \frac{0{,}92\ g}{cm^3} = \frac{m}{96 \cdot 10^{15}\ cm^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = \frac{0{,}92\ g \cdot 96 \cdot 10^{15}\ cm^3}{cm^3}$$

$m = 88{,}32 \cdot 10^{15}\ g$

Convertendo essa massa para kilogramas, obtemos:

$m = 88{,}32 \cdot 10^{15}\ g = 88{,}32 \cdot 10^{15} \cdot 10^{-3}\ kg =$
$= 8{,}832 \cdot 10^{13}\ kg$

Portanto, a massa de gelo, em kilograma, está expressa corretamente na alternativa **b**.

7. Denise tem uma confecção de vestidos e adquiriu 38 m^2 de tecido de linho para sua nova coleção. Sabendo que a gramatura do linho é 185 g/m^2, calcule a massa de tecido de linho, em kilograma, que Denise adquiriu.

Resolução

A gramatura do tecido corresponde à sua densidade superficial. Assim, temos:

$$\text{densidade superficial} = \frac{\text{massa}}{\text{área}}$$

$$\frac{185\ g}{m^2} = \frac{\text{massa}}{38\ m^2}$$

$$\text{massa} = \frac{185\ g \cdot 38\ m^2}{m^2}$$

massa $= 7\,030$ g

A relação entre as unidades de massa é $1\ g = 10^{-3}\ kg$, logo:

massa $= 7\,030\ g = 7\,030 \cdot 10^{-3}\ kg = 7{,}03\ kg$

Denise adquiriu 7,03 kg de tecido.

8. O município de Teresina, capital do Piauí, tem 1 391,293 km^2 de área e conta com uma população de 866 300 habitantes, de acordo com o Censo 2022, feito pelo IBGE. Qual é a densidade demográfica da capital piauiense?

Resolução

Pela definição de densidade demográfica, temos:

$$\text{densidade demográfica} = \frac{\text{número de habitantes}}{\text{área da região}}$$

$$\text{densidade demográfica} = \frac{866\,300\ \text{habitantes}}{1\,391{,}293\ km^2}$$

densidade demográfica $\simeq$
$\simeq 622{,}66$ habitantes/km^2

Portanto, a densidade demográfica de Teresina é aproximadamente 622,66 habitantes/km^2.

9. O que consome mais energia em Wh: três lâmpadas com potência 15 W ligadas durante 4 horas ou uma TV com potência 130 W ligada durante 1 hora e meia?

Resolução

A energia E_L gasta pelas lâmpadas é igual a:

$E_L = 3 \cdot 15\ W \cdot 4\ h = 180\ Wh$

A energia E_{TV} gasta pela TV é igual a:

$E_{TV} = 130\ W \cdot 1{,}5\ h = 195\ Wh$

Portanto, nas condições apresentadas, a TV consome mais energia.

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

13. (Enem/MEC)

> Se a tartaruga, a lesma e o caramujo apostassem uma corrida, a lesma chegaria em último lugar, o penúltimo colocado seria o caramujo e a primeira seria a tartaruga. Segundo o biólogo americano Branley Allan Branson, a velocidade “recorde” já registrada em pesquisas, por uma lesma, é de 16,5 centimetros por minuto.
>
> Disponível em: http://mundoestranho.abril.com.br. Acesso em: 6 jul. 2015.

Para uma reportagem, dispondo das velocidades recordes da tartaruga e do caramujo em metro por segundo, se faz necessário saber o fator de conversão da velocidade recorde da lesma para metro por segundo para divulgar uma comparação.

Com base nas informações, o fator de conversão da velocidade recorde da lesma para metro por segundo é alternativa **b**

a) $10^{-2} \times 60^{-2}$
b) $10^{-2} \times 60^{-1}$
c) $10^{-2} \times 60$
d) $10^{-3} \times 60^{-1}$
e) $10^{-3} \times 60$

14. Uma organização não governamental comunicou que, no último ano, foram retiradas cerca de 400 toneladas de resíduos de óleo das praias brasileiras. Qual é o volume, em metro cúbico (m^3), desse óleo, sabendo que sua densidade é de, aproximadamente, 0,8 g/cm^3? 500 m^3

15. (IFCE) Um tijolo tem massa de 2 kg e volume de 0,5 litro. A densidade do tijolo, em g/cm^3, é igual a alternativa **c**

a) 1. **b)** 3. **c)** 4. **d)** 2. **e)** 5.

16. (Enem/MEC)

> Um pé de eucalipto em idade adequada para o corte rende, em média, 20 mil folhas de papel A4. A densidade superficial do papel A4, medida pela razão da massa de uma folha desse papel por sua área, é de 75 gramas por metro quadrado, e a área de uma folha de A4 é 0,062 metro quadrado.
>
> Disponível em: http://revistagalileu.globo.com. Acesso em: 28 fev. 2013 (adaptado).

Nessas condições, quantos kilogramas de papel rende, em média, um pé de eucalipto?

a) 4 301
b) 1 500
c) 930
d) 267
e) 93

alternativa **e**

17. (Saresp-SP) A densidade demográfica é a razão entre o número total de habitantes e a área ocupada por eles. De acordo com o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), a densidade demográfica do município de Iporanga, em 2022, era de 3,5 habitantes por km^2. Sabendo que a área territorial daquele município, no mesmo ano, era de, aproximadamente, 1 150 km^2, o número total de habitantes no município, em 2022, de acordo com o IBGE, é um número entre alternativa **e**

a) 300 e 400 pessoas.
b) 400 e 500 pessoas.
c) 3 200 e 3 300 pessoas.
d) 40 200 e 40 300 pessoas.
e) 4 000 e 4 100 pessoas.

18. (ESPM-SP) Um município de 250 km^2 de área total tem uma população estimada de 30 000 habitantes, dos quais 40% moram na zona rural, que abrange 60% de sua superfície. A densidade demográfica da zona rural desse município é de: alternativa **a**

a) 80 hab/km^2
b) 60 hab/km^2
c) 70 hab/km^2
d) 90 hab/km^2
e) 50 hab/km^2

19. (Enem/MEC) Um dos conceitos mais utilizados nos estudos sobre a dinâmica de populações é o de densidade demográfica. Esta grandeza, para um local, é a razão entre o seu número de habitantes e a medida da área do seu território. Quanto maior essa razão, expressa em habitante por kilometro quadrado, se diz que mais densamente povoado é o local.

Querendo fazer uma visita de estudos ao local mais densamente povoado, entre um grupo de cinco escolhidos, um geógrafo coletou as informações sobre população e área territorial dos locais de seu interesse, obtendo os dados apresentados no quadro, referentes ao ano de 2014.

	População (nº habitantes)	Área (km^2)
Malta	400 000	300
Brasil	200 000 000	9 000 000
México	120 000 000	2 000 000
Namíbia	2 000 000	820 000
Ilha Norfolk	1 841	35

Disponível em: www.indexmundi.com. Acesso em: 13 nov. 2015 (adaptado).

Para cumprir seu objetivo de visita, qual dos locais apresentados deverá ser o escolhido pelo geógrafo? alternativa **a**

a) Malta.
b) Brasil.
c) México.
d) Namíbia.
e) Ilha Norfolk.

20. Pesquise, na conta de luz da residência onde você mora, o valor cobrado por kWh. Depois, escolha um eletrodoméstico e verifique a potência dele. Por fim, elabore um problema com as informações obtidas. Resposta pessoal.

Outras unidades de medida

Neste tópico, vamos estudar as unidades de medidas astronômicas, agrárias e de armazenamento e transferência de dados.

NAZARII_NESHCHERENSKYI/SHUTTERSTOCK.COM

- A estrela supergigante vermelha do cinturão de Orion, chamada Betelgeuse, está a aproximadamente 40,5 bilhões de ua de distância do Sol. Isso corresponde a, aproximadamente, 640 anos-luz. Representação de Betelgeuse e do Sol (imagem sem escala; cores fantasia).

Unidades de medidas astronômicas

Ao estabelecer um sistema de comparação entre duas grandezas de mesma natureza para obter uma medida, é conveniente que tanto a unidade de medida escolhida quanto a outra grandeza que será mensurada tenham a mesma magnitude. Por esse motivo, para calcular distâncias dentro do Sistema Solar, é utilizada a unidade astronômica (ua), que é definida do seguinte modo:

$$1 \text{ ua} = \text{distância da Terra ao Sol}$$

Uma unidade astronômica (ua) equivale a, aproximadamente, 149,6 milhões de kilometros.

Outra unidade de medida do Sistema Solar é o ano-luz, que tem a seguinte definição:

> O **ano-luz** é a distância que a luz viaja no vácuo durante 1 ano terrestre. Um ano-luz equivale a cerca de 9,46 trilhões de kilometros.

Unidades de medidas agrárias

Quando lidamos com propriedades rurais no Brasil, não é comum o uso das unidades do SI para descrever a área. Em vez disso, utilizamos as unidades de medidas agrárias, das quais a mais relevante é o **hectare** (ha). Convertendo essa unidade de medida para uma unidade do SI, obtemos:

$$1 \text{ ha} = 1 \text{ hm}^2 = 10\,000 \text{ m}^2$$

Outra unidade de medida agrária amplamente utilizada é o alqueire. No entanto, essa unidade de medida tem diferentes significados, dependendo da região do Brasil em que é utilizada. Destacamos três deles:

$$1 \text{ alqueire paulista} = 2{,}42 \text{ hm}^2 = 24\,200 \text{ m}^2$$
$$1 \text{ alqueire mineiro} = 4{,}84 \text{ hm}^2 = 48\,400 \text{ m}^2$$
$$1 \text{ alqueire baiano} = 9{,}68 \text{ hm}^2 = 96\,800 \text{ m}^2$$

- Em propriedades rurais, a área costuma ser expressa em hectares ou alqueires. Fazenda de criação de gado de corte em Mucajaí (RR). Fotografia de 2023.

CADU DE CASTRO

Unidades de armazenamento e de transferência de dados

Unidades de armazenamento e de transferência de dados desempenham um papel fundamental na era digital em que vivemos, uma vez que a quantidade de dados gerados e consumidos diariamente é exorbitante. Essas unidades são a base sobre a qual a tecnologia da informação se sustenta, possibilitando o armazenamento e a transferência não só de documentos de texto mas também de imagens, músicas, vídeos e *softwares* complexos.

STOCK-ASSO/SHUTTERSTOCK.COM

Computadores, *smartphones*, *tablets* e cartões de memória são exemplos de dispositivos eletrônicos que utilizam armazenamento de dados.

O *bit* e o *byte*

Para compreender o funcionamento das unidades de armazenamento, é essencial entender os conceitos de *bit* e de *byte*.

Um ***bit*** é a menor unidade de informação em sistemas digitais.

O *bit* pode assumir apenas dois valores distintos: 0 ou 1. Os computadores utilizam os *bits* para representar dados e executar operações lógicas e aritméticas.

Um ***byte*** é uma unidade de armazenamento de dados composta de 8 *bits*.

Isso significa que um *byte* pode representar $2^8 = 256$ valores diferentes, uma vez que cada um dos 8 *bits* pode assumir dois valores (0 ou 1). Os *bytes* são frequentemente usados para representar caracteres individuais de texto em sistemas de codificação. Além disso, o *byte*, cujo símbolo é B, é a unidade básica para medir o tamanho de arquivos e a capacidade de armazenamento de memória de dados em computadores e *smartphones*.

Como a informática utiliza um sistema binário, é conveniente utilizar unidades na base 2 como múltiplas do *byte*.

Historicamente, tanto na indústria quanto no comércio da informática, habituou-se ao uso de 1 KB para representar 1 024 *bytes* (2^{10} *bytes*), em vez de 1 000 *bytes*, assim como os outros prefixos também passaram a representar potências de base 2. Além disso, o símbolo de *kilobyte* costuma ser escrito com K maiúsculo, também por convenção histórica.

Observe como fica o quadro de prefixos da unidade *byte*, de acordo com o uso habitual na indústria e no comércio da informática.

Nome	Símbolo	Valor
byte	B	1 B
kilobyte	KB	2^{10} B
megabyte	MB	2^{20} B
gigabyte	GB	2^{30} B
terabyte	TB	2^{40} B
petabyte	PB	2^{50} B
exabyte	EB	2^{60} B

Saiba que...

Embora ainda não seja consenso, tem sido indicada a inclusão da letra "i" nos prefixos do SI para representar as unidades múltiplas do *byte* do seguinte modo: KiB, MiB, GiB e assim para todas as unidades múltiplas que representam potências de base 2.

Taxa de transferência

Provavelmente, você já deve ter notado que as empresas que fornecem internet anunciam seus pacotes de modo parecido aos da propaganda a seguir.

BENTINHO

Estamos acostumados a lidar com capacidades de celulares, computadores e arquivos, então há uma tendência a achar que esses prefixos se referem a *megabytes* e *gigabytes*. Porém, não é esse o caso.

Quando se trata de internet, o que importa é a **taxa de transferência**, que é a quantidade de dados que pode ser transferida em determinado período de tempo. Quanto maior a taxa de transferência, mais rápida é a internet contratada.

As unidades de medida de taxa de transferência de dados são *bits* por segundo (bps) e seus múltiplos: *kilobits* por segundo (kbps), *megabits* por segundo (Mbps), *gigabits* por segundo (Gbps), e assim por diante.

Desse modo, a propaganda oferece três opções de taxa de transferência: 500 Mbps, 700 Mbps e 1 Gbps.

Aqui cabe um ponto de atenção: é muito comum uma pessoa que tenha contratado um plano de internet de 500 Mbps achar que o *download* de um arquivo de 500 MB será feito em 1 segundo. Isso é um erro. É preciso se atentar às unidades: 500 *megabits* por segundo e 500 *megabytes*. Então, são necessários 8 segundos para fazer esse *download*, uma vez que cada *byte* é composto de 8 *bits*.


PROSTOCK-STUDIO/SHUTTERSTOCK.COM

Pense e responda

Você sabe o que significam os termos "*download*" e "*upload*"? Pesquise a respeito e compartilhe o que encontrou com os colegas.

Download é o processo de receber dados de um servidor remoto em um dispositivo local, como um computador, um *smartphone* ou um *tablet*. *Upload* é o inverso do *download*, ou seja, é o processo de enviar dados de um dispositivo local para um servidor remoto, como um *site* da internet, um servidor de armazenamento em nuvem ou um servidor de *e-mail*.

- O acesso à internet permite que o usuário tenha contato com filmes, séries, músicas e jogos. Além disso, o usuário pode estudar de modo independente ou por meio de plataformas de ensino a distância (EaD) e trabalhar de maneira remota.

ATIVIDADES RESOLVIDAS

10. Considerando que a velocidade da luz no vácuo é $3 \cdot 10^8$ m/s, calcule 1 ano-luz em kilometro.

Resolução

Sabemos que 1 ano tem 365 dias, cada dia tem 24 horas, cada hora tem 60 minutos e cada minuto tem 60 segundos. Portanto, ao converter 1 ano para segundos, obtemos:

$1 \text{ ano} = 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s} = 31\,536\,000 \text{ s} =$
$= 3{,}1536 \cdot 10^7 \text{ s}$

Assim, temos:

$$3 \cdot 10^8 \text{ m/s} = \frac{1 \text{ ano-luz}}{3{,}1536 \cdot 10^7 \text{ s}}$$

$1 \text{ ano-luz} = (3{,}1536 \cdot 10^7 \text{ s}) \cdot (3 \cdot 10^8 \text{ m/s})$

$1 \text{ ano-luz} = 9{,}4608 \cdot 10^{15} \text{ m}$

$1 \text{ ano-luz} = 9{,}4608 \cdot 10^{15} \cdot 10^{-3} \text{ km} =$
$= 9{,}4608 \cdot 10^{12} \text{ km}$

Portanto, 1 ano-luz equivale a $9{,}4608 \cdot 10^{12}$ km.

11. (Enem/MEC) A maior piscina do mundo, registrada no livro *Guiness*, está localizada no Chile, em San Alfonso del Mar, cobrindo um terreno de 8 hectares de área.

Sabe-se que 1 hectare corresponde a 1 hectometro quadrado.

Qual é o valor, em metros quadrados, da área coberta pelo terreno da piscina?

a) 8
b) 80
c) 800
d) 8 000
e) 80 000

Resolução

Fazendo as conversões de unidades, obtemos:

$8 \text{ ha} = 8 \text{ hm}^2 = 8 \cdot 10^4 \text{ m}^2 = 80\,000 \text{ m}^2$

Portanto, a área, em metro quadrado, coberta pelo terreno da piscina está expressa na alternativa **e**.

12. Giovana contratou um pacote de internet de 35 Mega para sua residência e quer fazer o *download* de um filme de 3,5 GB.

a) Qual é a taxa de transferência do pacote de internet contratado por Giovana?

b) Quanto tempo levará o *download* do filme escolhido por Giovana?

Resolução

a) Sabemos que 35 Mega de internet corresponde a uma taxa de transferência de 35 *megabits* por segundo (Mbps).

b) Convertendo 3,5 GB para *megabits*, obtemos:

$3{,}5 \text{ GB} = 3{,}5 \cdot 2^{10} \text{ MB} = 3{,}5 \cdot 2^{10} \cdot 2^3 =$
$= 3{,}5 \cdot 2^{13}$ *megabits*

A cada segundo são transferidos 35 *megabits*, então o tempo t de *download* é:

$$t = \frac{3{,}5 \cdot 2^{13}}{35} \text{ s} = 819{,}2 \text{ s} \simeq 14 \text{ min}$$

O *download* será concluído em, aproximadamente, 14 min.

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

21. (UFPR) Ao apresentar informações sobre grandezas físicas, a correta utilização de unidades de medida é tão importante quanto os valores numéricos dessas grandezas. O uso incorreto da unidade de medida pode alterar consideravelmente os resultados obtidos numa dada medida, podendo, inclusive, invalidar o processo. Considerando essas informações, uma unidade de medida de comprimento é o/a: alternativa **a**

a) ano-luz.
b) atmosfera.
c) tesla.
d) watt.
e) hertz.

22. (UFAM) Desconsiderando o Sol, a estrela mais próxima da Terra é a Alfa Centauri (Rigil Kentaurus), a uma distância de aproximadamente 4,4 anos-luz. Sabendo que 1 ano-luz $\simeq$ $\simeq 9{,}5 \times 10^{15}$ m, podemos afirmar que a estrela Alfa Centauri dista aproximadamente ______ de nós. alternativa **b**

Assinale a alternativa que completa, **CORRETAMENTE**, a lacuna do texto:

a) $4{,}1 \times 10^{13}$ km
b) $4{,}2 \times 10^{13}$ km
c) $4{,}2 \times 10^{15}$ km
d) $4{,}2 \times 10^{16}$ km
e) $4{,}1 \times 10^{16}$ km

23. (Enem/MEC) Medir distâncias sempre foi uma necessidade da humanidade. Ao longo do tempo fez-se necessária a criação de unidades de medidas que pudessem representar tais distâncias, como, por exemplo, o metro. Uma unidade de comprimento pouco conhecida é a Unidade Astronômica (UA), utilizada para descrever, por exemplo, distâncias entre corpos celestes. Por definição, 1 UA equivale à distância entre a Terra e o Sol, que em notação científica é dada por $1{,}496 \times 10^2$ milhões de kilometros.
Na mesma forma de representação, 1 UA, em metro, equivale a alternativa **e**

a) $1{,}496 \times 10^5$ m
b) $1{,}496 \times 10^6$ m
c) $1{,}496 \times 10^8$ m
d) $1{,}496 \times 10^{10}$ m
e) $1{,}496 \times 10^{11}$ m

24. Comunidades quilombolas são grupos formados por descendentes de africanos escravizados, que mantiveram sua cultura ao longo dos séculos, ocupando e preservando territórios conhecidos como quilombos. Essas comunidades são reconhecidas pela Constituição Federal de 1988 e têm direito à posse de suas terras, bem como à proteção de sua identidade cultural e ao desenvolvimento sustentável de seus modos de vida tradicionais.

CADU DE CASTRO/PULSAR IMAGENS

■ Casas em comunidade quilombola de Mangabeira, em Mocajuba (PA). Fotografia de 2022.

Leia um trecho da notícia a seguir sobre os territórios quilombolas.

Territórios quilombolas são as áreas menos desmatadas do país

Em 38 anos, comunidades perderam 4,7% de vegetação nativa

Os territórios quilombolas brasileiros figuram na lista de áreas com menor desmatamento do país. Segundo levantamento divulgado na quarta-feira (13) pelo MapBiomas, no período de 1985 a 2022, a perda de vegetação nativa nesses territórios foi de 4,7%, enquanto áreas privadas registraram porcentagem de 25%.

Conforme ressalta o MapBiomas, foram destruídos 240 mil hectares de vegetação nativa, ao longo dos 38 anos analisados.

BOND, Letycia. Territórios quilombolas são as áreas menos desmatadas do país. **Agência Brasil**, São Paulo, 14 dez. 2023. Disponível em: https://agenciabrasil.ebc.com.br/geral/noticia/2023-12/territorios-quilombolas-sao-areas-menos-desmatadas-do-pais. Acesso em: 26 ago. 2024.

O texto menciona a área de vegetação nativa destruída em hectares. Escreva essa medida em kilometro quadrado. 2 400 km^2

25. (Etec-SP)

Todos aqueles que tiveram oportunidade de lidar com imóveis rurais se depararam com uma unidade de medida de terras denominada alqueire, o que usualmente vem seguido de uma dúvida: será o alqueire mineiro, com seus 4,84 ha, o paulista, equivalente a 2,42 ha, ou até mesmo o chamado alqueirão, com 19,36 ha?

<http://tinyurl.com/nk237dd> Acesso em: 15.08.2015.

O Sr. João tem terras produtivas e sabe que pode colher 48 sacas de soja por hectare de plantação. Em sua fazenda, ele plantou 5 alqueires paulistas de soja. alternativa **b**
Assim sendo, o número de sacas que o Sr. João espera colher é mais próximo de

a) 250.
b) 580.
c) 840.
d) 1160.
e) 4640.

26. (Enem/MEC) Os computadores operam com dados em formato binário (com dois valores possíveis apenas para cada dígito), utilizando potências de 2 para representar quantidades. Assim, tem-se, por exemplo: 1 kB $= 2^{10}$ *Bytes*, 1 MB $= 2^{10}$ kB e 1 GB $= 2^{10}$ MB, sendo que $2^{10} = 1024$. Nesse caso, tem-se que kB significa *kilobyte*, MB significa *megabyte* e GB significa *gigabyte*. Entretanto, a maioria dos fabricantes de discos rígidos, *pendrives* ou similares adotam preferencialmente o significado usual desses prefixos, em base 10. Assim, nos produtos desses fabricantes, 1 GB $= 10^3$ MB $= 10^6$ kB $= 10^9$ *Bytes*. Como a maioria dos programas de computadores utilizam as unidades baseadas em potências de 2, um disco informado pelo fabricante como sendo de 80 GB aparecerá aos usuários como possuindo, aproximadamente, 75 GB.
Um disco rígido está sendo vendido como possuindo 500 *gigabytes*, considerando unidades em potências de 10.
Qual dos valores está mais próximo do valor informado por um programa que utilize medidas baseadas em potências de 2? alternativa **a**

a) 468 GB
b) 476 GB
c) 488 GB
d) 500 GB
e) 533 GB

27. (Enem/MEC) Uma unidade de medida comum usada para expressar áreas de terrenos de grandes dimensões é o hectare, que equivale a 10 000 m². Um fazendeiro decide fazer um loteamento utilizando 3 hectares de sua fazenda, dos quais 0,9 hectare será usado para a construção de ruas e calçadas e o restante será dividido em terrenos com área de 300 m² cada um. Os 20 primeiros terrenos vendidos terão preços promocionais de R$ 20.000,00 cada, e os demais, R$ 30.000,00 cada. Nas condições estabelecidas, o valor total, em real, obtido pelo fazendeiro com a venda de todos os terrenos será igual a alternativa **c**

a) 700 000.
b) 1 600 000.
c) 1 900 000.
d) 2 200 000.
e) 2 800 000.

28. (Enem/MEC) Computadores utilizam, por padrão, dados em formato binário, em que cada dígito, denominado de *bit*, pode assumir dois valores (0 ou 1). Para representação de caracteres e outras informações, é necessário fazer uso de uma sequência de *bits*, o *byte*. No passado, um *byte* era composto de 6 *bits* em alguns computadores, mas atualmente tem-se a padronização que o *byte* é um octeto, ou seja, uma sequência de 8 *bits*. Esse padrão permite representar apenas 2^8 informações distintas.
Se um novo padrão for proposto, de modo que um *byte* seja capaz de representar pelo menos 2 560 informações distintas, o número de *bits* em um *byte* deve passar de 8 para alternativa **b**

a) 10.
b) 12.
c) 13.
d) 18.
e) 20.

29. Qual é a taxa de transferência, em Mbps, que permite o *download* de um arquivo de 4,8 GB em 16 minutos? 40,96 Mbps

Conhecendo a planilha eletrônica

A planilha eletrônica é uma ferramenta muito útil em diversas situações do dia a dia e na resolução de problemas matemáticos. Com ela, cálculos recorrentes, por exemplo, podem ser feitos rapidamente com a criação de uma fórmula adequada ou utilizando uma fórmula disponível no banco de dados do *software*.

Existem planilhas eletrônicas de diversos fabricantes, mas todas elas funcionam de maneira muito semelhante. Aqui, vamos utilizar a planilha eletrônica do **Libre Office**, que pode ser baixada gratuitamente no *site* oficial https://pt-br.libreoffice.org/ (acesso em: 28 ago. 2024).

Taxa de transferência

As propagandas das principais operadoras de internet do Brasil costumam anunciar a taxa de transferência de *download*. Um erro comum é achar que a taxa de transferência de *upload* contratada é igual à de *download*. No entanto, esta costuma ser bem menor, podendo ser 10% da primeira.

Vamos utilizar o Libre Office para fazer uma planilha que relacione os tamanhos dos arquivos e seus respectivos tempos de *download* e de *upload*. Para isso, acompanhe a sequência de passos a seguir.

I. Na célula A1, digite "Nome do arquivo".
   Na célula B1, digite "Tamanho do arquivo (MB)".
   Na célula C1, digite "Taxa de transferência de *download* (Mbps)".
   Na célula D1, digite "Taxa de transferência de *upload* (Mbps)".
   Na célula E1, digite "Tempo de *download* (segundo)".
   Na célula F1, digite "Tempo de *upload* (segundo)".

K18

	A	B	C	D	E	F
1	Nome do arquivo	Tamanho do arquivo (MB)	Taxa de transferência de *download* (Mbps)	Taxa de transferência de *upload* (Mbps)	Tempo de *download* (segundo)	Tempo de *upload* (segundo)
2						
3						
4						

II. Nas células A2, A3 etc., digite os nomes dos arquivos que você deseja analisar.
   Nas células B2, B3 etc., digite os tamanhos dos arquivos correspondentes em *megabytes* (MB).
   Nas células C2, C3 etc., digite as taxas de transferência de *download* em *megabits* por segundo (Mbps).
   Nas células D2, D3 etc., digite as taxas de transferência de *upload* em *megabits* por segundo (Mbps).

E2

	A	B	C	D	E	F
1	Nome do arquivo	Tamanho do arquivo (MB)	Taxa de transferência de *download* (Mbps)	Taxa de transferência de *upload* (Mbps)	Tempo de *download* (segundo)	Tempo de *upload* (segundo)
2	Exemplo 1	670	350	35		
3	Exemplo 2	875	500	50		
4						
5						

IMAGENS: REPRODUÇÃO/ LIBREOFFICE

III. Na célula E2, insira a seguinte fórmula para calcular o tempo de *download* (sempre sem as aspas): “=B2*8/C2”.

Essa fórmula converte o tamanho do arquivo de MB para *megabits* (multiplicando por 8) e divide esse tamanho pela taxa de transferência de *download* em Mbps, para obter o tempo de *download* em segundo.

Arraste a alça de preenchimento da célula E2 para baixo, para copiar a fórmula para as outras linhas.

E2 | f_x Σ ▾ = | =B2*8/C2

IV. Na célula F2, insira a seguinte fórmula para calcular o tempo de *upload*: “=B2*8/D2”.

Essa fórmula converte o tamanho do arquivo de MB para *megabits* (multiplicando por 8) e divide esse tamanho pela taxa de transferência de *upload* em Mbps, para obter o tempo de *upload* em segundo.

Arraste a alça de preenchimento da célula F2 para baixo, para copiar a fórmula para as outras linhas.

F2 | f_x Σ ▾ = | =B2*8/D2

V. Preencha outros valores nas colunas A, B, C e D, conforme a necessidade, para calcular os tempos de *download* e de *upload* de outros arquivos.

H7 | f_x Σ ▾ =

	A	B	C	D	E	F
1	Nome do arquivo	Tamanho do arquivo (MB)	Taxa de transferência de *download* (Mbps)	Taxa de transferência de *upload* (Mbps)	Tempo de *download* (segundo)	Tempo de *upload* (segundo)
2	Exemplo 1	670	350	35	15,3142857142857	153,142857142857
3	Exemplo 2	875	500	50	14	140
4	Exemplo 3	1520	200	20	60,8	608
5						

IMAGENS: REPRODUÇÃO/LIBREOFFICE

Agora, faça o que se pede nas atividades a seguir.

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Ver as **Orientações para o professor**.

1. Considerando uma taxa de transferência de *download* de 400 Mbps e uma taxa de transferência de *upload* igual a 20% da primeira, calcule os tempos de *download* e de *upload* de um arquivo de 650 MB. tempo de *download*: 13 s; tempo de *upload*: 65 s

2. Considerando uma taxa de transferência de *download* de 1 Gbps e uma taxa de transferência de *upload* igual à metade desse valor, calcule os tempos de *download* e de *upload* de um arquivo de 17 GB. tempo de *download*: 136 s; tempo de *upload*: 272 s

3. O que é mais rápido: fazer o *download* de um arquivo de 890 MB a uma taxa de transferência de 300 Mbps ou o *download* de um arquivo de 1 GB a uma taxa de transferência de 350 Mbps? É mais rápido fazer o segundo *download*, pois ele demora, aproximadamente, 22,86 s para ser concluído, enquanto o primeiro leva 23,73 s.

4. Pesquise as taxas de transferência de *download* e de *upload* de duas operadoras de internet em seu município e calcule os tempos de *download* e de *upload* de um arquivo de 700 MB em cada uma dessas operadoras. Resposta pessoal.

Iluminação

A iluminação é parte essencial da nossa vida cotidiana, desempenhando um papel importante no modo como interagimos com os ambientes. Ao escolhermos fontes de luz mais eficientes, utilizamos soluções de iluminação mais econômicas e sustentáveis. Leia um trecho do texto a seguir, que trata desse assunto.

O que é a Lâmpada LED?

Os *Light Emitting Diodes* são componentes eletrônicos que geram luz com baixo consumo de energia. Nas embalagens das lâmpadas LED há sempre três tipos de informações:

- O fluxo luminoso em lúmens (lm) – quantidade de luz emitida.
- A potência em Watts (W) – consumo de energia elétrica.
- Eficiência luminosa (lm/W) – relação do fluxo luminoso com a potência.

A lâmpada LED é mais econômica porque sua eficiência luminosa é maior do que a das outras lâmpadas. Ou seja, gasta menos energia para gerar a mesma iluminação.

As LED podem durar, dependendo do modelo, pelo menos vinte e cinco vezes mais do que as lâmpadas incandescentes e quatro vezes mais do que as fluorescentes compactas. Entretanto, o tempo (em horas de funcionamento) estimado na embalagem não significa o tempo que ela vai levar para queimar e sim o período que a lâmpada passará a funcionar com mais ou menos 70% da capacidade luminosa original. Cabe destacar que alguns fatores não relacionados com a qualidade do produto podem afetar sua durabilidade, como oscilações da rede elétrica ou mau contato no ponto de instalação.

[...]

Ademais, as LED geram menor risco para a saúde dos consumidores e para o meio ambiente, pois não contêm mercúrio na sua constituição, como é o caso das fluorescentes compactas. Podem, inclusive, ser descartadas em lixo comum.

Elas também possuem várias outras vantagens em relação às outras tecnologias: não emitem radiação ultravioleta e infravermelha (sendo mais confortável para os olhos) e são mais difíceis de quebrar. Mesmo que isso aconteça, um revestimento especial impede que cacos se espalhem pelo ambiente preservando a saúde e a segurança do usuário.

O custo das lâmpadas LED, entretanto, ainda é mais alto do que o das outras. Porém, considerando o baixo custo de sua manutenção – em função da maior durabilidade – e a redução do custo na conta de luz, o gasto maior na sua compra poderá ser compensado.

INSTITUTO NACIONAL DE METROLOGIA, QUALIDADE E TECNOLOGIA. **Lâmpada LED**. Brasília, DF: Inmetro, [2015]. p. 4-5. Disponível em: https://www.gov.br/inmetro/pt-br/centrais-de-conteudo/publicacoes/cartilhas/lampadaled.pdf. Acesso em: 28 ago. 2024.

IRINA GUTYRYAK/SHUTTERSTOCK.COM

■ Substituir lâmpadas incandescentes por lâmpadas de LED pode reduzir o consumo de energia elétrica sem comprometer a iluminação dos ambientes.

No quadro a seguir, apresentamos um comparativo entre o fluxo luminoso e a potência de lâmpadas incandescentes, fluorescentes e de LED.

Fluxo luminoso	Potência		
1600 lm	100 W	23 W	18 W
1100 lm	75 W	19 W	13 W
800 lm	60 W	14 W	10 W
450 lm	40 W	9 W	6 W

Fonte dos dados: HAKIMI, David. **Como calcular a intensidade de luz necessária em seus ambientes**. Tradução: Camilla Sbeghen. [*S. l.*]: ArchDaily, 5 jul. 2018. Disponível em: https://www.archdaily.com.br/br/897537/como-calcular-a-intensidade-de-luz-necessaria-em-seus-ambientes. Acesso em: 28 ago. 2024.

SOMCHAI SOM/SHUTTERSTOCK.COM

Agora, faça o que se pede nas atividades a seguir.

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. Considerando o fluxo luminoso de 450 lm, calcule a eficiência luminosa das lâmpadas incandescente, fluorescente e de LED. 11,25 lm/W; 50 lm/W; 75 lm/W

2. Considerando que uma residência utilize 5 lâmpadas incandescentes de 800 lm, ligadas durante 5 horas por dia, e que o preço do kWh na região é de R$ 0,80, quanto seria economizado por mês (considerando-se o mês de 30 dias), se todas as lâmpadas fossem substituídas por lâmpadas de LED, mantendo-se o fluxo luminoso? R$ 30,00

3. Que tipo de lâmpada você utiliza em sua residência? É possível reduzir o consumo de energia substituindo algumas delas? Respostas pessoais.

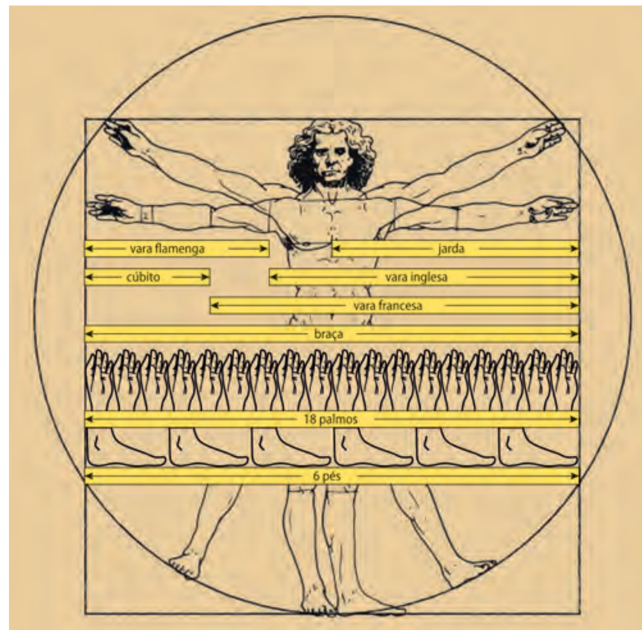
4. Junte-se a dois colegas, e produzam um panfleto informativo sobre os diferentes tipos de lâmpadas e sobre a economia que pode ser gerada com a escolha de tipos mais eficientes de iluminação. Resposta pessoal.

Sobre unidades de medida

Leia, a seguir, um trecho do texto que fala sobre as unidades de medida arcaicas, usadas desde antes da criação do Sistema Internacional de Unidades.

No Comprimento do Braço

Muitos dos primeiros sistemas de medidas, da China até a América Pré-Colombiana, eram baseados em dimensões do corpo humano ou objetos comuns, como grãos de trigo. Os americanos (e ingleses mais antigos) ainda medem pequenas distâncias em pés, e um grão ainda é usado como unidade de peso (é o peso de um grão de cevada, e tem permanecido constante por mais de 1000 anos). A medida de ouro e pedras preciosas, o quilate, tem sua origem nas sementes de alfarroba usadas originalmente pelos joalheiros árabes para pesar metais e pedras preciosos. A alfarroba tem sementes notavelmente uniformes no peso, tornando-as ideais para medir artigos muito valiosos.



BENTINHO

Reprodução do Homem Vitruviano, de Leonardo da Vinci, que mostra algumas unidades de medida históricas.

O cúbito, a unidade de comprimento familiar do Antigo Testamento, com a qual Noé mediu sua arca, era uma medida egípcia igual à distância do cotovelo até a ponta dos dedos. Ela era subdividida em outras unidades que também se relacionavam com partes do corpo:

1 cúbito = 28 dígitos (um dígito é a largura de um dedo)

4 dígitos = 1 palmo

5 dígitos = 1 mão

12 dígitos = 1 vão pequeno

14 dígitos = 1 vão grande

Mas o corpo humano existe em todos os tamanhos e formas, portanto a “mão” de uma pessoa pode ser igual ao “palmo” de outra. Para superar as dificuldades óbvias e eliminar o potencial para disputas, eram necessárias medidas padronizadas. Os bastões de um cúbito usado no Egito eram todos copiados de um padrão real feito com granito preto medindo 524 mm (20,62 polegadas). O sistema conseguiu impor a uniformidade. A Grande Pirâmide em Gizé foi construída sobre uma base quadrada de 440 por 440 cúbitos com uma variação de não mais de 0,05 por cento em qualquer um dos lados – resultando em uma precisão de 115 mm em 230,5 metros.

ROONEY, Anne. **A história da matemática**: desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito. Tradução: Mario Fecchio. São Paulo: M.Books do Brasil, 2012. p. 66-67.

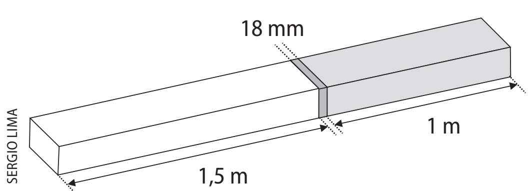
ATIVIDADES COMPLEMENTARES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. (UFPR) A medição de grandezas físicas envolve o uso de unidades que sejam apropriadas a essas grandezas. Uma dada grandeza pode ser descrita por mais de uma unidade, de acordo com a situação envolvendo essa grandeza. Considerando essas informações, assinale a alternativa que apresenta corretamente uma unidade utilizada para medidas de tempo. alternativa **c**

a) m (metro)
b) N (newton)
c) s (segundo)
d) V (volt)
e) K (kelvin)

2. (Enem/MEC) Atendendo à encomenda de um mecânico, um soldador terá de juntar duas barras de metais diferentes. A solda utilizada tem espessura de 18 milimetros, conforme ilustrado na figura.



Qual o comprimento, em metros, da peça resultante após a soldagem? alternativa **d**

a) 2,0230
b) 2,2300
c) 2,5018
d) 2,5180
e) 2,6800

3. (Saresp-SP) Em países como a Inglaterra, utiliza-se a polegada como unidade de medida de comprimento. Sabendo-se que 1 polegada corresponde a 2,54 cm, um quarteirão que tem 2 500 polegadas de comprimento tem como correspondente uma medida alternativa **c**

a) entre 100 metros e 150 metros.
b) entre 150 metros e 200 metros.
c) entre 50 metros e 100 metros.
d) maior do que 200 metros.
e) menor do que 50 metros.

4. (Enem/MEC) Os países anglófonos, como a Inglaterra, o Canadá, a Austrália e outros, são países que utilizam dois sistemas de unidades para a identificação de distâncias: o Sistema Internacional, com o kilometro (km), e o CGS, com a milha (mi). Nas rodovias canadenses, por exemplo, as placas de sinalização de distâncias apresentam dois valores, um em km e outro em mi, com esta última equivalente a aproximadamente 1 610 metros.
Um turista brasileiro, habituado ao Sistema Internacional, em viagem por uma dessas rodovias, verifica em dado momento uma placa indicando a distância até a cidade a que ele se destina, onde está escrito 50 mi e *XX* km, com o valor da distância em kilometro ilegível. Qual o valor, desprezando as casas decimais, que deveria estar escrito na placa, para identificar a distância *XX*, em kilometro, até a cidade destino?

a) 8
b) 31
c) 80
d) 310
e) 805

alternativa **c**

5. (Enem/MEC) O Sistema Métrico Decimal é o mais utilizado atualmente para medir comprimentos e distâncias. Em algumas atividades, porém, é possível observar a utilização de diferentes unidades de medida. Um exemplo disso pode ser observado no quadro.

Unidade	Equivalência
Polegada	2,54 centimetros
Jarda	3 pés
Jarda	0,9144 metro

Assim, um pé, em polegada, equivale a

a) 0,1200.
b) 0,3048.
c) 1,0800.
d) 12,0000.
e) 36,0000.

alternativa **d**

6. (PUC-RJ) Alberto olha o relógio e vê que ele marca 14h 15min. Exatamente 1 000 minutos mais tarde, Alberto volta a olhar o relógio. Sabendo-se que o relógio é preciso, que horas ele marca nesse momento? alternativa **d**

a) 4h 15min
b) 4h 45min
c) 5h 55min
d) 6h 55min
e) 7h 35min

7. **(CMRJ)** A Tenente Íris, bibliotecária do CMRJ, transferirá o acervo da biblioteca para novas instalações, situadas dois andares acima.

No caminho para a nova biblioteca, a tenente sempre usará um elevador, cuja capacidade máxima é de 400 kilogramas. E, em todas as viagens, sempre terá o auxílio do Soldado João, com seu carrinho, como pode ser observado na figura.

CMRJ, 2021

A tabela a seguir nos mostra a quantidade de livros que serão transferidos para as novas instalações.

Disciplina	Quantidade de livros	Massa de cada livro
Matemática	330	2 100 dg
Ciências Naturais	390	0,280 kg
História	450	3,15 hg
Geografia	510	43,7 dag

Sabe-se que a tenente tem massa de 75 kg, o soldado, de 73 kg e o carrinho, de 30 kg.

Qual o número mínimo de viagens de subida que eles farão para transportar todos os livros da tabela? alternativa **c**

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 5

8. (UPF-RS) Um hospital armazena um tipo de medicamento em recipientes de 4 decagramas. Sabendo que 1 decagrama equivale a 10 gramas e que 1 grama equivale a 1000 miligramas, o número de doses de 1 miligrama existentes em um recipiente de 4 decagramas é:

a) 40 000 **c)** 4 **e)** 4 000
b) 0,004 **d)** 400

alternativa **a**

9. (Enem/MEC) É comum as cooperativas venderem seus produtos a diversos estabelecimentos. Uma cooperativa láctea destinou 4 m^3 de leite, do total produzido, para análise em um laboratório da região, separados igualmente em 4 000 embalagens de mesma capacidade. Qual o volume de leite, em mililitro, contido em cada embalagem? alternativa **e**

a) 0,1 **b)** 1,0 **c)** 10,0 **d)** 100,0 **e)** 1 000,0

10. (Fuvest-SP) Em fevereiro de 2021, um grupo de físicos da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) publicou um artigo que foi capa da importante revista *Nature*. O texto a seguir foi retirado de uma reportagem do *site* da UFMG sobre o artigo:

> O nanoscópio, prossegue Ado Jorio (professor da UFMG), ilumina a amostra com um microscópio óptico usual. O foco da luz tem o tamanho de um círculo de 1 micrometro de diâmetro. "O que o nanoscópio faz é inserir uma nanoantena, que tem uma ponta com diâmetro de 10 nanometros, dentro desse foco de 1 micrometro e escanear essa ponta. A imagem com resolução nanométrica é formada por esse processo de escaneamento da nanoantena, que localiza o campo eletromagnético da luz em seu ápice", afirma o professor.
>
> Itamar Rigueira Jr. "Nanoscópio da UFMG possibilita compreender estrutura que torna grafeno supercondutor". Adaptado. Disponível em: https://ufmg.br/comunicacao/noticias/. Gadelha A C *et al.* (2021), Nature,590, 405-409, doi: 10.1038/s41586-021-03252-5.

Com base nos dados mencionados no texto, a razão entre o diâmetro do foco da luz de um microscópio óptico usual e o diâmetro da ponta da nanoantena utilizada no nanoscópio é da ordem de: alternativa **d**

a) 0,0001 **c)** 1 **e)** 10 000
b) 0,01 **d)** 100

11. (UEG-GO) Em 2017, o jogador de futebol francês Kylian Mbappé chegou a 36 km/h em um jogo, mantendo consigo a bola em domínio. Qual é a velocidade do jogador em m/s?

a) 3,6 **c)** 10,8 **e)** 14,4
b) 7,2 **d)** 10,0

alternativa **d**

12. (Fatec-SP) alternativa **c**

> Um attosegundo é uma unidade de tempo que representa um bilionésimo de um bilionésimo de segundo. Um femtosegundo é também uma unidade de tempo que representa um milionésimo de um bilionésimo de segundo. Sabe-se que o processo que permite a visão depende da interação da luz com pigmentos da retina e leva cerca de 200 femtosegundos para ocorrer.
>
> Fonte dos dados: <http://tinyurl.com/ov3ur4z> Acesso em: 17.09.2015. Adaptado.

Dessa forma, o tempo em que a luz interage com os pigmentos da retina, em attosegundos, é igual a

a) 2 000. **b)** 20 000. **c)** 200 000. **d)** 2 000 000. **e)** 20 000 000.

13. (UFPR) No ano de 2018, a densidade populacional da cidade de Curitiba foi estimada em 4 406,96 habitantes por kilometro quadrado. Supondo que a área territorial da cidade seja de 435 km^2, o número que mais se aproxima da população estimada de Curitiba em 2018 é: alternativa **c**

a) 1 916 610. **b)** 1 916 760. **c)** 1 917 027. **d)** 1 917 045. **e)** 1 917 230.

14. (Vunesp-SP) Procurando economizar energia, Sr. Artur substituiu seu televisor de LCD de 100 W por um de LED de 60 W, pelo qual pagou R$ 1.200,00. Considere que o Sr. Artur utilizará seu novo televisor, em média, durante cinco horas por dia e que 1 kWh de energia elétrica custe R$ 0,50. O valor pago pelo novo televisor corresponderá à energia elétrica economizada devido à troca dos televisores em, aproximadamente, alternativa **b**

a) 450 meses. **b)** 400 meses. **c)** 600 meses. **d)** 550 meses. **e)** 500 meses.

PARA REFLETIR

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Na introdução do Capítulo, estudamos o que é grandeza e o que significa medir uma grandeza. Na sequência, compreendemos como foi organizado o Sistema Internacional de Unidades (SI) e como funciona esse sistema. Além disso, estudamos algumas unidades de medida que não fazem parte do SI.

Depois, estudamos unidades de medida dadas pela razão ou pelo produto de outras, além de unidades astronômicas, agrárias, de armazenamento e de transmissão de dados.

Vamos refletir a respeito das aprendizagens do Capítulo **6**: Respostas pessoais.

- Você já conhecia algum(ns) dos conteúdos apresentados ao longo deste Capítulo? Qual(is)?
- Você acha que somente as unidades de medida do SI são suficientes para interagirmos com o mundo à nossa volta?
- Elabore um esquema para sintetizar as conversões entre as unidades múltiplas e submúltiplas do metro. Em seguida, faça o mesmo para as unidades múltiplas e submúltiplas do metro quadrado e do metro cúbico.

CAPÍTULO

7 PROPORCIONALIDADE E SEMELHANÇA

Você sabia que as televisões são comercializadas por polegadas? Você sabe o que significa, por exemplo, uma televisão de 60 polegadas?

A polegada, que equivale a 2,54 centímetros, é uma unidade de medida de comprimento usada em países como a Inglaterra e os Estados Unidos. A quantidade de polegadas anunciada em um aparelho corresponde à medida da diagonal da tela, ou seja, anunciar uma TV de 70 polegadas significa dizer que a medida da diagonal da tela tem 70 polegadas ou, aproximadamente, 177,8 cm.

Além das televisões, essa unidade de medida é usada para descrever o tamanho de monitores de computador e de dispositivos móveis, como *smartphones* e *tablets*. As telas mais comuns de celulares variam de 4 a 5,5 polegadas, enquanto as de televisores podem variar entre 24 e 100 polegadas.

A medida da diagonal de um retângulo está diretamente relacionada às dimensões desse retângulo. Portanto, conhecendo as medidas da base e da altura de uma tela, podemos aplicar o teorema de Pitágoras para saber quantas polegadas ela tem. Neste Capítulo, vamos explorar esse teorema e as propriedades de semelhança de figuras geométricas.

Televisores de 50 polegadas à venda em loja de departamento.

LUCIANA WHITAKER/PULSAR IMAGENS

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Forme dupla com um colega, e façam o que se pede em cada questão.

1. Pesquisem por que a unidade de medida se chama “polegadas”.
Porque a origem da medida está ligada ao uso de dedos polegares.

2. Qual é, aproximadamente, a medida de comprimento da diagonal de uma TV de 100 polegadas em centimetros? aproximadamente 254 cm

3. Com o auxílio de régua e esquadro ou compasso, desenhem um retângulo de dimensões $6{,}5 \times 14$ centimetros para representar a tela de um celular. Utilizando o teorema de Pitágoras, calculem quantas polegadas, aproximadamente, tem a tela de celular desenhada. Espera-se que os estudantes encontrem valores próximos a 6 polegadas. A diagonal do retângulo tem aproximadamente 15,4 cm.

Proporcionalidade

Nesta coleção, já estudamos algumas razões, como a razão áurea e razões entre grandezas de naturezas distintas, por exemplo, a velocidade e a densidade. Vamos agora estudar o conceito de razão entre segmentos de reta.

Segmentos de reta proporcionais

Podemos comparar as medidas de dois segmentos de reta por meio de uma razão. Definimos que a **razão entre dois segmentos de reta** é o quociente entre as respectivas medidas desses segmentos, tomadas na mesma unidade. Por exemplo, a razão entre dois segmentos de reta, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, de medidas respectivamente iguais a 16 cm e 80 cm, é dada por:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{16}{80} = \frac{1}{5} \text{ ou } 0{,}2$$

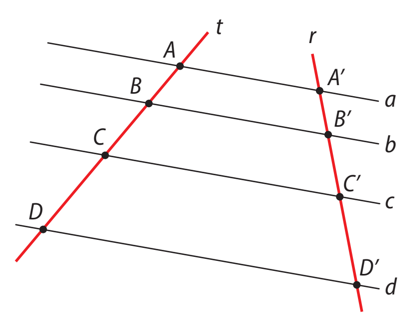
Dizemos que a razão entre AB e CD é $\frac{1}{5}$ ou 0,2. A ordem de leitura e escrita de uma razão é importante. Assim, a razão entre CD e AB é $\frac{80}{16} = 5$, ou seja, se $AB \neq CD$, temos que $\frac{AB}{CD} \neq \frac{CD}{AB}$.

Agora, considere os segmentos de reta $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$. Dizemos que, nessa ordem, $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$ são **proporcionais** se, e somente se, a razão entre as medidas dos dois primeiros segmentos de reta for igual à razão entre as medidas dos dois últimos, ou seja: $\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH}$.

Feixe de retas paralelas

Duas ou mais retas paralelas entre si, pertencentes a um mesmo plano, formam um **feixe de retas paralelas**. Uma reta que intersecta esse feixe de paralelas é chamada de **reta transversal**. Na figura, as retas a, b, c e d formam um feixe de retas paralelas, e as retas r e t são as transversais. Além disso, definimos:

- A e A' são **pontos correspondentes**, assim como B e B', C e C', D e D'.
- $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ são **segmentos correspondentes**, assim como $\overline{BC}$ e $\overline{B'C'}$, $\overline{CD}$ e $\overline{C'D'}$, $\overline{AC}$ e $\overline{A'C'}$, $\overline{AD}$ e $\overline{A'D'}$, $\overline{BD}$ e $\overline{B'D'}$.



$a \parallel b \parallel c \parallel d$

Saiba que...

Para simplificar a escrita e quando isso não causar dificuldade de entendimento, em alguns momentos desta coleção não faremos distinção entre segmentos e suas medidas, bem como entre ângulos e suas medidas. Assim, usaremos com o mesmo significado expressões como "circunferência de raio de medida r" e "circunferência de raio r", assim como "lado de medida L" e "lado L" ou "altura de medida h" e "altura h", por exemplo.

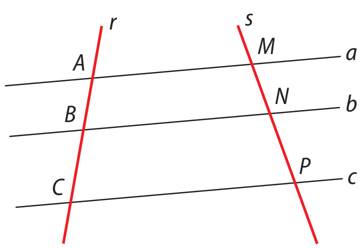
» Teorema de Tales

A proporcionalidade pode ser utilizada em diversos casos do nosso cotidiano. Nesse sentido, o **teorema de Tales**, que será apresentado a seguir, trata da relação entre os segmentos de reta determinados por um feixe de retas paralelas e duas retas transversais. Por meio desse teorema, podemos realizar cálculos para determinar, por exemplo, distâncias que não podem ser medidas diretamente.

Vamos enunciar o teorema e, em seguida, apresentar sua demonstração.

> Se duas retas são transversais a um feixe de retas paralelas, então dois segmentos quaisquer de uma das retas transversais são proporcionais aos segmentos correspondentes da outra reta.

Observe a figura e uma possível proporção obtida pelo teorema de Tales.



$$a \,/\!/\, b \,/\!/\, c \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{MN}{NP}$$

Pense e responda

A partir da figura apresentada, quais outras proporções podem ser consideradas pelo teorema de Tales?

$\frac{BC}{AB} = \frac{NP}{MN}$; $\frac{BC}{AC} = \frac{NP}{MP}$; $\frac{AC}{AB} = \frac{MP}{MN}$

Com base nessa figura, podemos considerar outras proporções, como: $\frac{AB}{AC} = \frac{MN}{MP}$ ou $\frac{AC}{BC} = \frac{MP}{NP}$.

Demonstração

Primeiro, vamos apresentar duas propriedades dos triângulos, que serão usadas na demonstração do teorema de Tales.

- **1ª propriedade**

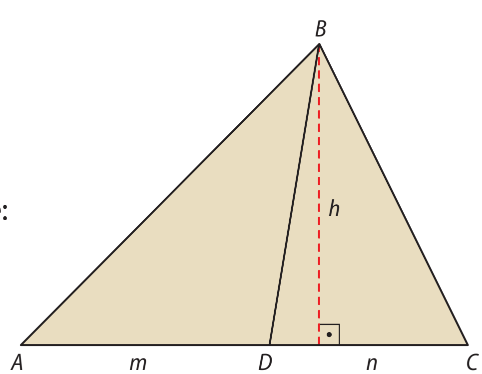
Considere o triângulo *ABC*, uma ceviana $\overline{BD}$ qualquer, com extremidade no vértice *B*, e a altura *h* do triângulo, de modo que a área do triângulo *ABD* é igual a A_1, a área do triângulo *BDC* é igual a A_2, $AD = m$ e $DC = n$.

Temos que:

$$A_1 = \frac{m \cdot h}{2} \text{ e } A_2 = \frac{n \cdot h}{2}$$

Dividindo A_1 por A_2, tem-se:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{m \cdot h}{2}}{\frac{n \cdot h}{2}} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{m}{n}$$



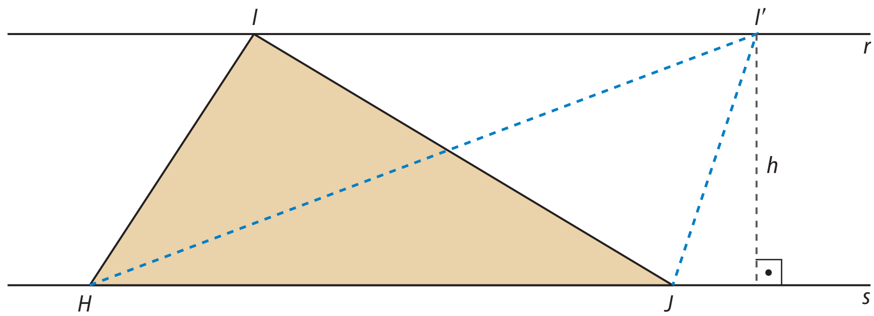
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Saiba que...

- Tales, matemático e filósofo que viveu no século VI a.C., era natural da cidade de Mileto, na Grécia, por isso ficou conhecido como Tales de Mileto.
- Ceviana de um triângulo é um segmento de reta que tem como extremidades um dos vértices do triângulo e um ponto no lado oposto a esse vértice.

- **2ª propriedade**

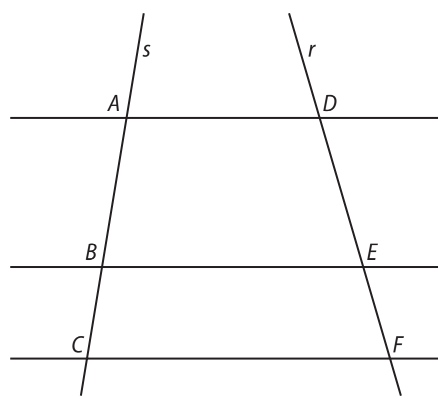
Dadas duas retas paralelas r e s, considere um triângulo HIJ e outro $HI'J$, ambos com a base $\overline{HJ}$ pertencente a s e vértices I e I' como pontos da reta r.



Podemos concluir que a área do triângulo HIJ é igual à área do triângulo $HI'J$, pois ambos têm a mesma base $\overline{HJ}$ e a mesma altura h. Portanto, qualquer triângulo formado pela base $\overline{HJ}$ que tenha o vértice oposto a essa base como um ponto da reta r terá a mesma área do triângulo HIJ.

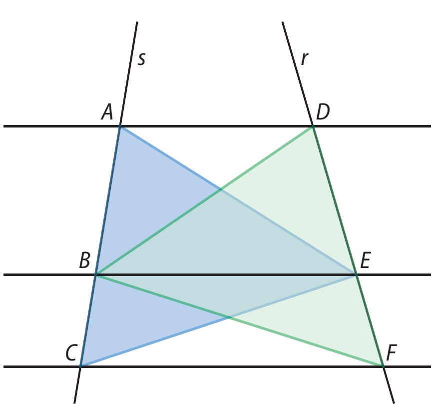
- **Demonstração do teorema de Tales**

Dados um feixe de retas paralelas e duas transversais que intersectam esse feixe, obtemos os pontos A, B, C, D, E e F, conforme a figura a seguir.



Vamos provar que os segmentos de reta formados são proporcionais, de modo que $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$.

Para isso, vamos construir os triângulos ACE e DFB, conforme a figura a seguir.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Sejam as áreas S_1, S_2, S_3 e S_4 dos triângulos AEB, BEC, DBE e EBF, respectivamente. Pela 1ª propriedade, temos:

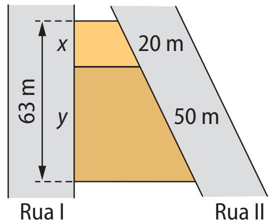
$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{AB}{BC} \text{ e } \frac{S_3}{S_4} = \frac{DE}{EF}$$

De acordo com a 2ª propriedade: $S_1 = S_3$ e $S_2 = S_4$

Portanto: $\frac{S_1}{S_2} = \frac{S_3}{S_4} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$

ATIVIDADES RESOLVIDAS

1. A figura a seguir representa dois terrenos cujas laterais são paralelas. De acordo com a figura, determine as medidas *x* e *y*.



Resolução

Pelo teorema de Tales, temos:

$\dfrac{20 + 50}{20} = \dfrac{x + y}{x}$ (I)

$\dfrac{20 + 50}{50} = \dfrac{x + y}{y}$ (II)

Substituindo $x + y$ por 63 em (I), temos:

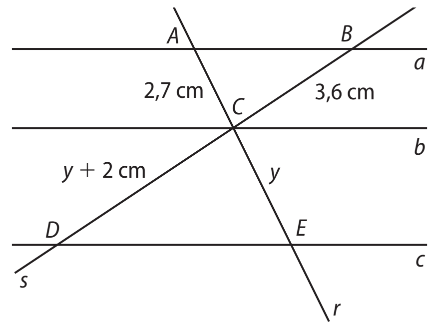
$\dfrac{70}{20} = \dfrac{63}{x} \Rightarrow \dfrac{7}{2} = \dfrac{63}{x} \Rightarrow 7x = 126 \Rightarrow x = 18$

Substituindo $x + y$ por 63 em (II), temos:

$\dfrac{70}{50} = \dfrac{63}{y} \Rightarrow \dfrac{7}{5} = \dfrac{63}{y} \Rightarrow 7y = 315 \Rightarrow y = 45$

Portanto, as medidas são $x = 18$ m e $y = 45$ m.

2. Na figura a seguir, $a \parallel b \parallel c$. Determine a medida do segmento $\overline{CD}$.



Resolução

Aplicando o teorema de Tales, temos:

$\dfrac{2{,}7}{y} = \dfrac{3{,}6}{y + 2} \Rightarrow 2{,}7 \cdot (y + 2) = 3{,}6y \Rightarrow$

$\Rightarrow 2{,}7y + 5{,}4 = 3{,}6y \Rightarrow 3{,}6y - 2{,}7y = 5{,}4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0{,}9y = 5{,}4 \Rightarrow y = \dfrac{5{,}4}{0{,}9} \Rightarrow y = 6$

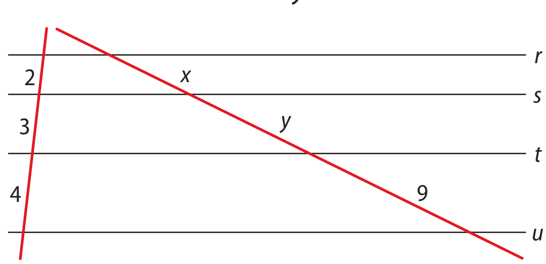
Portanto, $CD = 6$ cm $+ 2$ cm $= 8$ cm.

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. Uma pessoa tem 1,95 m de altura e, em determinado instante, sua sombra mede 2,60 m. Calcule a razão entre a medida da altura da pessoa e a medida de sua sombra naquele instante. $\frac{3}{4}$

2. Na figura a seguir, as retas *r*, *s*, *t* e *u* são paralelas. Com as informações fornecidas, deseja-se calcular as medidas *x* e *y* indicadas.

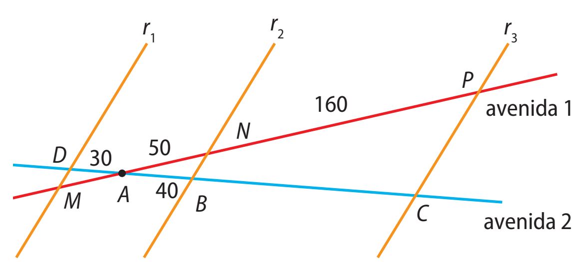


ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

a) A partir das informações dadas, é possível resolver o problema? Sim. Ver as **Orientações para o professor**.

b) Se for possível, resolva o problema. Se não for possível, indique quais informações estão faltando para que as medidas possam ser encontradas. $x = 4{,}5$; $y = 6{,}75$

3. Duas avenidas se encontram em um ponto *A*. Essas avenidas intersectam três ruas, r_1, r_2 e r_3, que são paralelas entre si. Os segmentos de reta $\overline{AD}$, $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ representam quarteirões da avenida 2. Na figura, estão indicados os comprimentos, em metro, de alguns quarteirões.



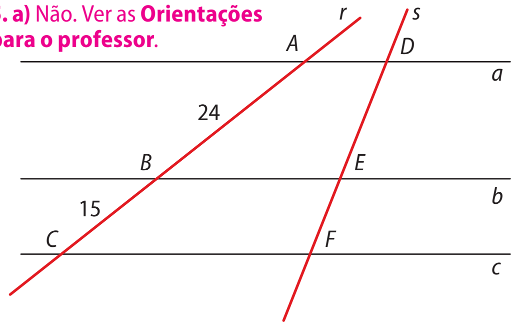
Determine os comprimentos dos quarteirões representados pelos segmentos de reta $\overline{BC}$ e $\overline{AM}$. $BC = 128$ m; $AM = 37{,}5$ m

4. Considerando que $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{MN}$ e $\overline{PQ}$ são proporcionais nessa ordem e sabendo que $AB = (x + 3)$ cm, $CD = (x - 2)$ cm, $MN = 40$ cm e $PQ = 30$ cm, calcule as medidas dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. $AB = 20$ cm; $CD = 15$ cm

5. b) Resposta possível: É preciso saber a medida do segmento $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ ou $\overline{DF}$.

5. Observe a figura a seguir, em que as retas *a*, *b* e *c* são paralelas, e as medidas são dadas em centimetro.

5. a) Não. Ver as **Orientações para o professor**.



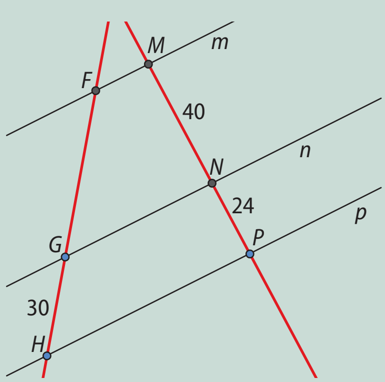
Deseja-se determinar as medidas dos segmentos $\overline{DE}$ e $\overline{EF}$.

a) A partir das informações dadas, é possível resolver o problema?

b) Se for possível, resolva o problema. Se não for possível, indique quais informações estão faltando para que as medidas possam ser encontradas.

6. Os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$ são proporcionais. A soma das medidas dos dois primeiros segmentos equivale a 12, e a diferença entre essas medidas é igual a 2. Com relação aos dois últimos segmentos, sabemos que a medida do primeiro é o triplo da medida do segundo menos duas unidades. Nessas condições, determine a soma das medidas de todos os segmentos. 15

7. Clara precisa resolver o seguinte problema em sua aula de Matemática:

> Na figura a seguir, as retas *m*, *n* e *p* são paralelas. Determine a medida do segmento $\overline{FH}$.
>
> 
>

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

7. a) Sim. Espera-se que os estudantes justifiquem utilizando o teorema de Tales.

Para resolver o problema, Clara utilizou a proporção $\frac{FH - 30}{30} = \frac{40}{24}$. Reúna-se a um colega, e respondam às questões.

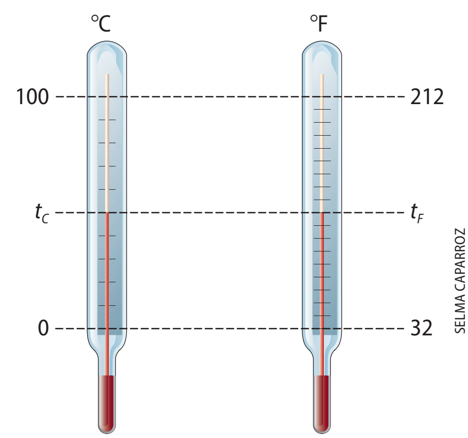
a) A proporção apresentada por Clara está correta? Justifiquem a resposta.

b) Essa proporção resolve o problema? Justifiquem a resposta. Sim. Ver as **Orientações para o professor**.

c) Existe outra proporção que resolve o problema? Se sim, escrevam-na.

Sim. Resposta possível: $\frac{FH}{30} = \frac{64}{24}$.

8. A unidade de medida de temperatura usada no Brasil é o grau Celsius (°C). Em alguns países do mundo, como nos Estados Unidos, a unidade de medida padrão é o grau Fahrenheit (°F). Para converter uma medida de temperatura de uma unidade para outra, usamos uma escala de correspondência, como indica a figura a seguir.



SELMA CAPARROZ

Agora, observe a fotografia.

JORDI_COR/SHUTTERSTOCK.COM

■ Termômetro digital registra a temperatura em graus Fahrenheit.

Qual é a temperatura indicada na fotografia na escala Celsius? aproximadamente 38,28 °C

Figuras semelhantes

Semelhança é a característica do que é semelhante. Na linguagem do dia a dia, dois objetos são semelhantes quando são "parecidos".

Em Matemática, o conceito de semelhança usado em figuras geométricas é diferente daquele de uso cotidiano. Podemos associar a ideia de figuras semelhantes à ampliação ou redução de uma imagem, mantendo proporcionalmente a sua forma.

É o que acontece, por exemplo, quando damos *zoom* em uma fotografia no celular ou no computador: ela é ampliada, mas as proporções são mantidas.

Agora, observe as imagens a seguir em que a fotografia foi ampliada da situação **A** para a situação **B**.

4,5 cm

3 cm

Figura **A**.

6 cm

4 cm

ANETAPICS/SHUTTERSTOCK.COM

Figura **B**.

Quando ampliamos (ou reduzimos) a fotografia proporcionalmente, as medidas dos ângulos são preservadas e as medidas dos segmentos correspondentes aos da fotografia original são aumentadas (ou reduzidas) na mesma razão.

No caso do exemplo, essa razão de ampliação é dada por:

$$\frac{4}{3} \text{ ou } \frac{6}{4,5}$$

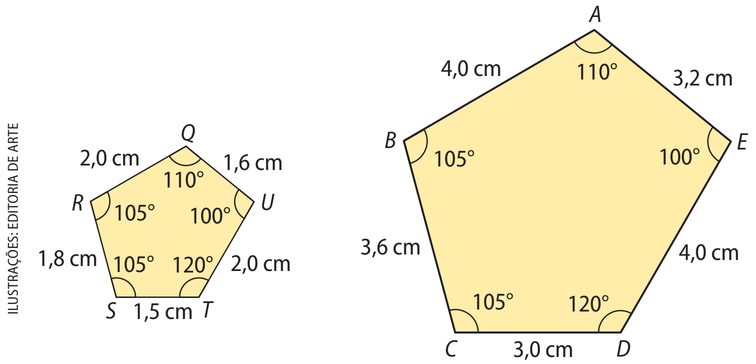
Assim, dizemos que a fotografia original e a ampliada (ou a reduzida) são **figuras semelhantes**. A seguir, vamos formalizar esse conceito de semelhança para os polígonos.

GEORGE DOLGIKH/
SHUTTERSTOCK.COM

O gesto de "pinça" é utilizado para dar *zoom* em imagens no celular.

Polígonos semelhantes

Considere os pentágonos *QRSTU* e *ABCDE* representados a seguir.



Saiba que...

Os ângulos $\hat{Q}$ e $\hat{A}$ são **ângulos correspondentes**, assim como os pares de ângulos $\hat{R}$ e $\hat{B}$, $\hat{S}$ e $\hat{C}$, $\hat{T}$ e $\hat{D}$, $\hat{U}$ e $\hat{E}$.

Vamos analisar alguns de seus elementos.

Comparando as medidas dos ângulos internos, observe que $\hat{Q}$ e $\hat{A}$ possuem a mesma medida: 110°. Isso também pode ser indicado como:

$$\text{med}(\hat{Q}) = \text{med}(\hat{A}) = 110°$$

Comparando os demais pares de ângulos, ordenadamente, temos:

$$\text{med}(\hat{R}) = \text{med}(\hat{B}) = 105° \qquad \text{med}(\hat{T}) = \text{med}(\hat{D}) = 120°$$

$$\text{med}(\hat{S}) = \text{med}(\hat{C}) = 105° \qquad \text{med}(\hat{U}) = \text{med}(\hat{E}) = 100°$$

Note que os ângulos correspondentes dos pentágonos têm a mesma medida, isto é, são congruentes. Nesse caso, escrevemos:

$$\hat{Q} \cong \hat{A} \quad \hat{R} \cong \hat{B} \quad \hat{S} \cong \hat{C} \quad \hat{T} \cong \hat{D} \quad \hat{U} \cong \hat{E}$$

Analisando as medidas dos lados correspondentes, *QR* e *AB*, temos:

$$QR = 2{,}0 \text{ cm e } AB = 4{,}0 \text{ cm}$$

Comparando, ordenadamente, as medidas dos pares de lados correspondentes, temos:

$$RS = 1{,}8 \text{ cm e } BC = 3{,}6 \text{ cm} \qquad TU = 2{,}0 \text{ cm e } DE = 4{,}0 \text{ cm}$$

$$ST = 1{,}5 \text{ cm e } CD = 3{,}0 \text{ cm} \qquad UQ = 1{,}6 \text{ cm e } EA = 3{,}2 \text{ cm}$$

Perceba que os lados correspondentes são proporcionais:

$$\frac{QR}{AB} = \frac{2{,}0}{4{,}0} = \frac{1}{2} \qquad \frac{ST}{CD} = \frac{1{,}5}{3{,}0} = \frac{1}{2} \qquad \frac{UQ}{EA} = \frac{1{,}6}{3{,}2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{RS}{BC} = \frac{1{,}8}{3{,}6} = \frac{1}{2} \qquad \frac{TU}{DE} = \frac{2{,}0}{4{,}0} = \frac{1}{2}$$

Como os ângulos internos são ordenadamente congruentes e os lados correspondentes dos pentágonos são proporcionais, dizemos que os pentágonos *QRSTU* e *ABCDE* são semelhantes.

Indicamos: pentágono *QRSTU* $\sim$ pentágono *ABCDE*

símbolo de semelhança

Podemos definir que:

> Dois polígonos são **semelhantes** quando satisfazem duas condições: os ângulos correspondentes são congruentes e os lados correspondentes são proporcionais.

Observações:

- Os lados (ou ângulos) correspondentes também são chamados de lados (ou ângulos) **homólogos**.
- O número k obtido pela razão entre as medidas dos lados homólogos é chamado de **razão de semelhança**. No exemplo dado, temos $k = \frac{1}{2}$.
- Se dois polígonos são semelhantes e têm razão de semelhança k, então a razão entre as respectivas alturas, entre os perímetros ou entre quaisquer outras medidas lineares correspondentes também é k.

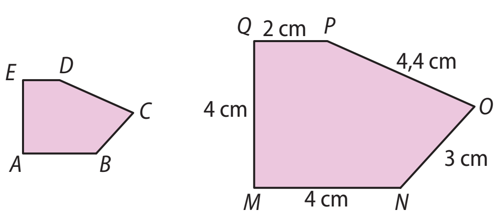
Dois polígonos são **congruentes** se eles são semelhantes e a razão de semelhança é 1.

Saiba que...

Se duas figuras **A** e **B** são semelhantes e têm, nessa ordem, razão de semelhança $k > 1$, então a figura **A** é uma ampliação da figura **B**. Se a razão de semelhança for $k < 1$, então a figura **A** será uma redução da figura **B**.

ATIVIDADE RESOLVIDA

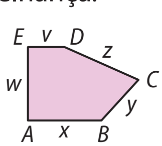
3. Os pentágonos *ABCDE* e *MNOPQ* são semelhantes. Sabendo que o perímetro do pentágono *ABCDE* é 8,7 cm, determine a medida de seus lados.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Resolução

Indicando as medidas dos lados do pentágono *ABCDE* por x, y, z, v e w, como mostrado na imagem, escrevemos a expressão que indica a razão de semelhança:



$$\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NO} = \frac{CD}{OP} = \frac{DE}{PQ} = \frac{EA}{QM}$$

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4{,}4} = \frac{v}{2} = \frac{w}{4}$$

Indicando o perímetro dos polígonos por P, temos:

$P_{MNOPQ} = 2 + 4{,}4 + 3 + 4 + 4 = 17{,}4$

Como observado anteriormente, a razão entre os perímetros de polígonos semelhantes é igual à razão de semelhança entre eles.

Assim:

$$\frac{P_{ABCDE}}{P_{MNOPQ}} = \frac{8{,}7}{17{,}4} = \frac{1}{2}$$

Além disso, podemos escrever:

$\frac{x}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2$

$\frac{y}{3} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 1{,}5$

$\frac{z}{4{,}4} = \frac{1}{2} \Rightarrow z = 2{,}2$

$\frac{v}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow v = 1$

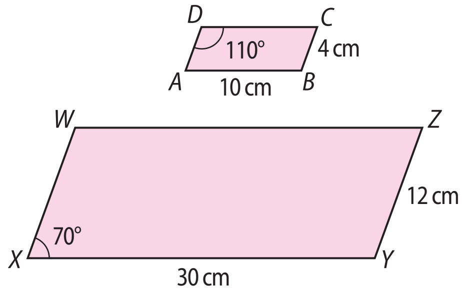
$\frac{w}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow w = 2$

Portanto, $AB = 2$ cm, $BC = 1{,}5$ cm, $CD = 2{,}2$ cm, $DE = 1$ cm e $EA = 2$ cm.

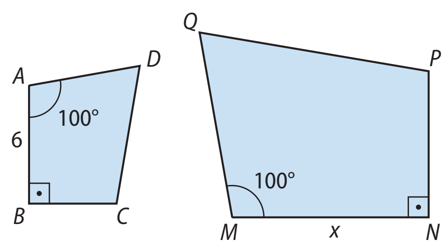
ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

9. Verifique se os paralelogramos *ABCD* e *XYZW* são semelhantes. São semelhantes.



10. Os quadriláteros *ABCD* e *MNPQ* a seguir são semelhantes, e o lado $\overline{AB}$ do primeiro corresponde ao lado $\overline{MN}$ do segundo. Se a razão de semelhança do quadrilátero *ABCD* para o quadrilátero *MNPQ* é de $\frac{3}{5}$, determine a medida do lado $\overline{MN}$ do quadrilátero *MNPQ*. 10



11. Sobre polígonos semelhantes e congruentes, é correto afirmar que: alternativa **d**

a) se as medidas dos lados de um dos polígonos são iguais às medidas dos lados do outro, eles são congruentes.

b) dois polígonos com número de lados diferentes podem ser semelhantes.

c) dois polígonos semelhantes são sempre congruentes.

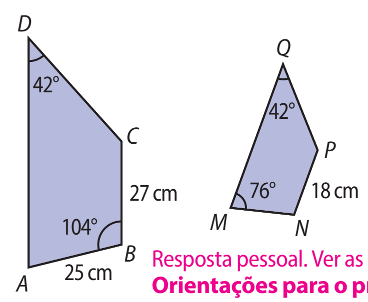
d) dois polígonos congruentes são sempre semelhantes.

e) dois polígonos são semelhantes se as somas das medidas dos ângulos internos desses polígonos são iguais.

12. A razão de semelhança entre dois decágonos regulares é $\frac{3}{5}$. Se o perímetro do decágono que possui o maior lado é 720 mm, qual é a medida do lado, em centímetro, do outro decágono? 4,32 cm

13. Os tampos de duas mesas retangulares são semelhantes. A razão de semelhança entre as medidas dos lados do maior para o menor é 1,5. Se as dimensões do tampo da mesa menor são 3,5 m e 2,5 m, determine o perímetro do tampo da mesa maior. 18 m

14. Os trapézios *ABCD* e *MNPQ* representados a seguir são semelhantes.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Resposta pessoal. Ver as **Orientações para o professor**.

Reúna-se a um colega, elaborem duas perguntas que envolvam os dados dessas figuras e respondam-nas.

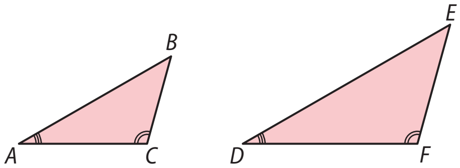
Semelhança de triângulos

Aprendemos que, estabelecida uma correspondência entre os vértices, dois polígonos são semelhantes quando se verificam duas condições: os ângulos correspondentes são congruentes e os lados homólogos são proporcionais.

Entretanto, os triângulos constituem um caso especial. É possível estabelecer um conjunto de critérios mínimos que garantam a semelhança entre dois triângulos sem que seja necessário verificar as três congruências dos ângulos e a proporcionalidade entre todos os lados. Esses conjuntos de critérios podem ser demonstrados e são conhecidos como **casos de semelhança**. A seguir, apresentamos três deles.

Casos de semelhança de triângulos

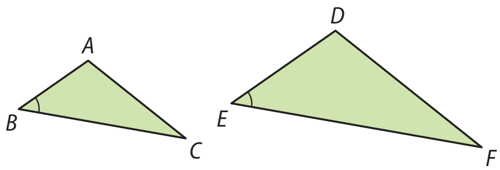
1º caso: Ângulo, Ângulo (AA)



$$\left.\begin{matrix}\hat{A} \cong \hat{D}\\ \hat{C} \cong \hat{F}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

Se dois triângulos possuem dois ângulos internos ordenadamente congruentes, então esses triângulos são semelhantes.

2º caso: Lado, Ângulo, Lado (LAL)

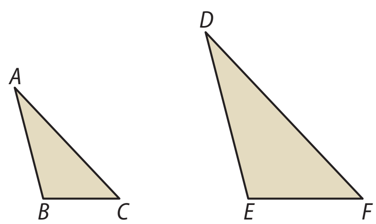


$$\left.\begin{matrix}\hat{B} \cong \hat{E}\\ \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

Se dois triângulos possuem dois lados correspondentes proporcionais e os ângulos formados por esses lados são congruentes, então esses triângulos são semelhantes.

3º caso: Lado, Lado, Lado (LLL)

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

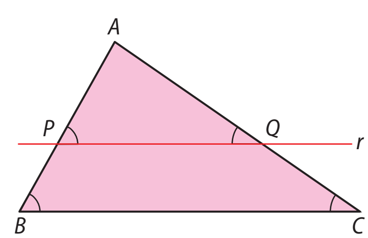


$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

Se dois triângulos possuem os três lados correspondentes proporcionais, então esses triângulos são semelhantes.

Propriedade da semelhança de triângulos

Consideremos o triângulo *ABC*. Nele, vamos traçar uma reta *r*, paralela ao lado $\overline{BC}$, que vai intersectar o lado $\overline{AB}$ no ponto *P* e o lado $\overline{AC}$ no ponto *Q*.



Do paralelismo de *r* com o lado $\overline{BC}$, temos $\hat{P} \cong \hat{B}$ e $\hat{Q} \cong \hat{C}$, que são ângulos correspondentes.

Assim, os triângulos *APQ* e *ABC* têm ângulos ordenadamente congruentes. Portanto, pelo caso AA de semelhança, concluímos que $\triangle APQ \sim \triangle ABC$.

De maneira geral, temos que:

Toda reta paralela a um lado de um triângulo que intersecta os outros dois lados em pontos distintos determina um novo triângulo semelhante ao primeiro.

Consequências da semelhança de triângulos

A partir da semelhança de triângulos, algumas consequências podem ser demonstradas. A seguir, apresentamos duas delas.

1ª consequência

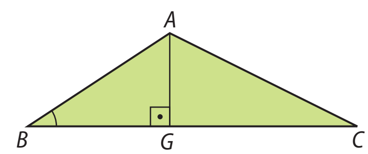
Se a razão de semelhança entre as medidas dos lados de dois triângulos é igual a k, então:

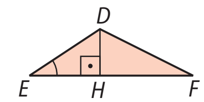
- a razão entre os perímetros também é k;
- a razão entre as medidas de duas alturas homólogas também é k;
- a razão entre as medidas de duas bissetrizes homólogas também é k;
- a razão entre as áreas é igual a k^2.

Vamos demonstrar que a razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes (de razão de semelhança k) é k^2.

Demonstração

Considere os triângulos ABC e DEF, tais que $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, como mostram as figuras. Então, pela semelhança de triângulos, temos:





$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = k$$

Considerando as alturas homólogas $\overline{AG}$ e $\overline{DH}$, temos, pelo caso AA de semelhança, $\triangle ABG \sim \triangle DEH$. Então, podemos escrever:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AG}{DH} = k$$

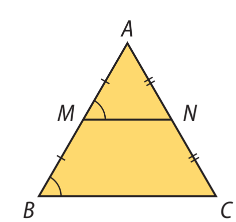
Calculando as respectivas áreas, indicadas por S, temos:

- Área $\triangle ABC$: $S_1 = \dfrac{BC \cdot AG}{2}$
- Área $\triangle DEF$: $S_2 = \dfrac{EF \cdot DH}{2}$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{BC \cdot AG}{2}}{\frac{EF \cdot DH}{2}} = \frac{BC \cdot AG}{EF \cdot DH} = \frac{BC}{EF} \cdot \frac{AG}{DH} = k \cdot k = k^2$$

2ª consequência

Se um segmento de reta une os pontos médios de dois lados de um triângulo, então esse segmento de reta é paralelo ao terceiro lado, e sua medida é metade da medida do terceiro lado.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Demonstração

Os pontos M e N são os pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente. Daí, temos que $AM = MB$ e $AN = NC$.

Assim, os triângulos AMN e ABC são semelhantes pelo caso LAL, pois o ângulo $\hat{A}$ é comum aos dois triângulos e $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{1}{2}$.

Logo, pela semelhança dos triângulos, temos que:

- $\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{1}{2}$
- $\hat{M} \cong \hat{B}$
- $\hat{N} \cong \hat{C}$

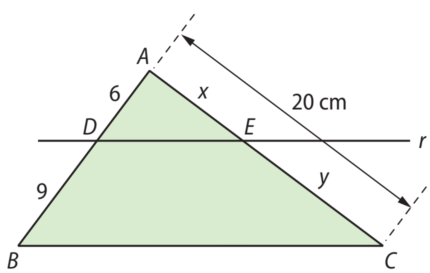
Portanto, como os ângulos $\hat{M}$ e $\hat{B}$ são congruentes, assim como o par de ângulos $\hat{N}$ e $\hat{C}$, temos que $\overline{MN} \,//\, \overline{BC}$.

ATIVIDADES RESOLVIDAS

4. Considere um triângulo ABC e uma reta r paralela ao lado $\overline{BC}$. As intersecções de r com $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são os pontos D e E, respectivamente, de modo que $AD = 6$ cm e $DB = 9$ cm. Se o lado $\overline{AC}$ do triângulo mede 20 cm, determine as medidas dos segmentos de reta formados pela intersecção da reta r com o lado $\overline{AC}$.

Resolução

Por meio das informações presentes no enunciado, é possível construir a seguinte figura, em que x e y representam as medidas dos segmentos de reta $\overline{AE}$ e $\overline{EC}$, respectivamente, determinados em $\overline{AC}$ pela reta r.



Pela propriedade da semelhança, os triângulos ABC e ADE são semelhantes. Então, podemos escrever:

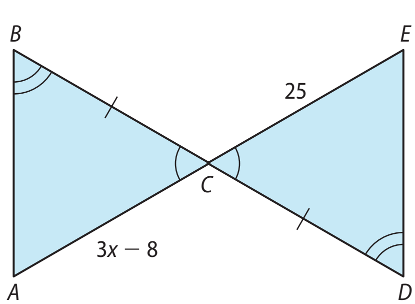
$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \Rightarrow \frac{15}{6} = \frac{20}{x} \Rightarrow 15x = 120 \Rightarrow x = 8$$

$$x + y = 20 \Rightarrow 8 + y = 20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 20 - 8 \Rightarrow y = 12$$

Portanto, $AE = 8$ cm e $EC = 12$ cm.

5. Observe a figura a seguir e determine o valor de x.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Resolução

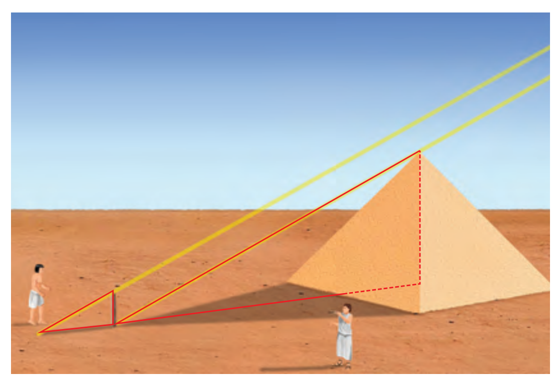
De acordo com a figura, os lados $\overline{BC}$ e $\overline{DC}$ são congruentes, assim como os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{D}$ e os ângulos $B\hat{C}A$ e $D\hat{C}E$ (opostos pelo vértice). Então, pelo caso AA de semelhança, podemos afirmar que $\triangle BCA \sim \triangle DCE$, com razão de semelhança igual a 1, pois $\frac{BC}{DC} = 1$.

Portanto, os triângulos são também congruentes. Assim, temos:

$$\overline{AC} \cong \overline{EC} \Rightarrow 3x - 8 = 25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x = 25 + 8 \Rightarrow 3x = 33 \Rightarrow x = 11$$

6. Conta-se que Tales de Mileto foi desafiado a medir a altura da grande pirâmide de Quéops. Para isso, ele usou os seus conhecimentos de proporcionalidade e semelhança de triângulos e a ideia de que os raios solares são paralelos e incidem com a mesma inclinação sobre a superfície terrestre. Observe a figura a seguir.



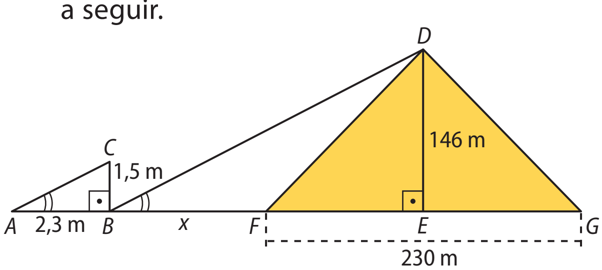
SELMA CAPARROZ

- Esquema que representa o modo como Tales de Mileto, em aproximadamente 600 a.C., calculou a altura da pirâmide de Quéops. Os elementos da ilustração não estão em proporção.

Supondo que a estaca fincada no chão tinha altura igual a 1,5 metro e a sombra dessa estaca, 2,3 metros, e sabendo que o lado da base quadrada da pirâmide tem medida igual a 230 metros e que a altura encontrada por Tales foi de 146 metros, determine a medida da sombra da pirâmide no solo no momento da medição.

Resolução

Como os raios solares incidem com a mesma inclinação sobre a superfície terrestre, podemos representar a situação com o esquema a seguir.



Nesse esquema, BC é a medida da altura e AB é a medida da sombra da estaca; $BF = x$ é a medida da sombra da pirâmide; $FE = 115$ m é a distância do centro da pirâmide ao lado que está de frente para a estaca; e DE é a altura da pirâmide.

Os triângulos ABC e BED são semelhantes pelo caso AA. Logo, temos a seguinte proporção:

$$\frac{BC}{ED} = \frac{AB}{BF + FE} \Rightarrow \frac{1{,}5}{146} = \frac{2{,}3}{x + 115} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1{,}5 \cdot (x + 115) = 2{,}3 \cdot 146 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1{,}5x + 172{,}5 = 335{,}8 \Rightarrow 1{,}5x = 335{,}8 - 172{,}5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1{,}5x = 163{,}3 \Rightarrow x \simeq 108{,}9$$

Portanto, a medida da sombra da pirâmide de Quéops no momento da medição era aproximadamente igual a 108,9 metros.

ATIVIDADES

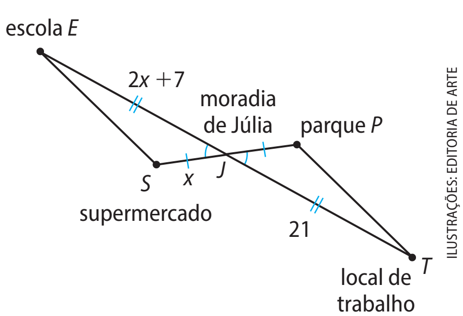
NÃO ESCREVA NO LIVRO.

15. (UEMA) Um prédio e um poste projetam simultaneamente sombras de 20 m e 4 m, respectivamente. Se a altura do poste é 5 m, pode-se concluir que a altura do prédio é:

a) 25 m
b) 20 m
c) 16 m
d) 15 m
e) 10 m

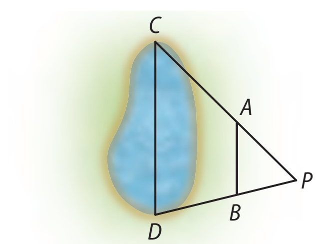
alternativa **a**

16. A moradia de Júlia está situada na metade do caminho entre a escola e o local de trabalho dela. Júlia observou que a moradia também fica exatamente na metade do caminho entre o supermercado e o parque. Sabe-se que a distância entre a escola e a moradia de Júlia é de $(2x + 7)$ km, e a distância da moradia de Júlia até o local de trabalho dela é de 21 km. Além disso, a distância entre o supermercado e a moradia de Júlia é x km, conforme a imagem a seguir. Para ir até o parque, saindo da moradia dela, quantos quilometros Júlia deverá percorrer? 7 km



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

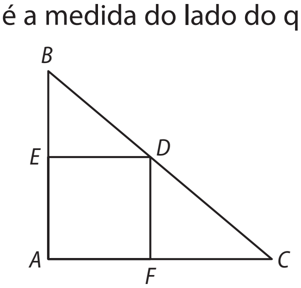
17. (UFV-MG) Para determinar o comprimento de uma lagoa, utilizou-se o esquema indicado pela figura abaixo, onde os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são paralelos.



Sabendo-se que $AB = 36$ m, $BP = 5$ m e $DP = 40$ m, o comprimento CD da lagoa, em metros, é: alternativa **c**

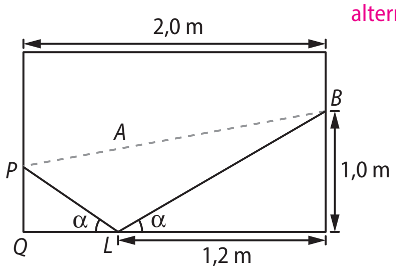
a) 248 **b)** 368 **c)** 288 **d)** 208 **e)** 188

18. Considere o triângulo ABC a seguir, de modo que $AB = 5$ cm e $AC = 7$ cm. O polígono $AFDE$ é um quadrado, tal que os pontos D, E e F pertencem aos lados $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente. De acordo com as informações, qual é a medida do lado do quadrado? alternativa **c**



a) 2 cm
b) 3 cm
c) $\frac{35}{12}$ cm
d) $\frac{5}{7}$ cm
e) 1,5 cm

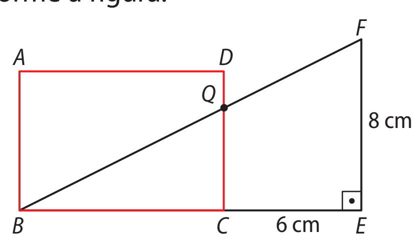
19. (Cefet-MG) A ilustração a seguir representa uma mesa de sinuca retangular, de largura e comprimento iguais a 1,5 e 2,0 m, respectivamente. Um jogador deve lançar a bola branca do ponto *B* e acertar a preta no ponto *P*, sem acertar em nenhuma outra, antes. Como a amarela está no ponto *A*, esse jogador lançará a bola branca até o ponto *L*, de modo que a mesma possa rebater e colidir com a preta. alternativa **a**



Se o ângulo da trajetória de incidência da bola na lateral da mesa e o ângulo de rebatimento são iguais, como mostra a figura, então a distância de *P* a *Q*, em cm, é aproximadamente

a) 67 **b)** 70 **c)** 74 **d)** 81

20. (UEA-AM) Considere o retângulo *ABCD* e o triângulo retângulo *BEF*, com a hipotenusa $\overline{BF}$ intersectando o lado $\overline{DC}$ do retângulo, no ponto *Q*, e os pontos *B*, *C* e *E* alinhados, conforme a figura.



Sabendo que $EF = 8$ cm, $BE = 15$ cm, $CE = 6$ cm e $DQ = 1{,}2$ cm, a área do retângulo *ABCD* é igual a alternativa **b**

a) 72,0 cm².
b) 54,0 cm².
c) 63,0 cm².
d) 67,5 cm².
e) 58,5 cm².

21. (Unicamp-SP) Uma rampa de inclinação constante, como a que dá acesso ao Palácio do Planalto em Brasília, tem 4 metros de altura na sua parte mais alta. Uma pessoa, tendo começado a subi-la, nota que após caminhar 12,3 metros sobre a rampa está a 1,5 metro de altura em relação ao solo.

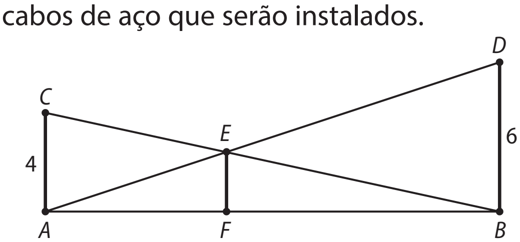
a) Faça uma figura ilustrativa da situação descrita. Ver as **Orientações para o professor**.

b) Calcule quantos metros a pessoa ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa. 20,5 m

22. (Fuvest-SP) Um marceneiro possui um pedaço de madeira no formato de um triângulo retângulo, cujos catetos medem 12 cm e 35 cm. A partir desta peça, ele precisa extrair o maior quadrado possível, de tal forma que um dos ângulos retos do quadrado coincida com o ângulo reto do triângulo. A medida do lado do quadrado desejado pelo marceneiro está mais próxima de alternativa **c**

a) 8,0 cm. **b)** 8,5 cm. **c)** 9,0 cm. **d)** 9,5 cm. **e)** 10,0 cm.

23. (Enem/MEC) O dono de um sítio pretende colocar uma haste de sustentação para melhor firmar dois postes de comprimentos iguais a 6 m e 4 m. A figura representa a situação real na qual os postes são descritos pelos segmentos *AC* e *BD* e a haste é representada pelo segmento *EF*, todos perpendiculares ao solo, que é indicado pelo segmento de reta *AB*. Os segmentos *AD* e *BC* representam cabos de aço que serão instalados.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Qual deve ser o valor do comprimento da haste *EF*? alternativa **c**

a) 1 m **b)** 2 m **c)** 2,4 m **d)** 3 m **e)** $2\sqrt{6}$ m

24. Os lados de um triângulo medem 10 cm, 12 cm e 18 cm. Determine as medidas dos lados de um triângulo semelhante ao anterior cujo perímetro é 60 cm. 15 cm, 18 cm e 27 cm

- Elabore uma atividade parecida com essa, alterando as medidas dos lados do triângulo e o perímetro do triângulo semelhante. Depois, troque-a com a atividade de um colega e resolvam as atividades um do outro. Resposta pessoal.

CONEXÕES com...

CIÊNCIAS HUMANAS E SOCIAIS APLICADAS

Picos mais altos do Brasil

Você conhece os picos mais altos do Brasil? O Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) fez a última atualização das altitudes dos picos em março de 2018. Leia o texto a seguir sobre esse assunto.

Geociências: IBGE revê as altitudes de sete pontos culminantes

[...]

A determinação da altitude em locais de difícil acesso sempre representou um grande desafio para o campo das geociências. No passado, a alternativa era o nivelamento barométrico, realizado com o barômetro, instrumento criado no século 17 e utilizado para medir a pressão atmosférica, altitude e mudanças no tempo. No entanto, os valores obtidos apresentavam imprecisões da ordem de metros. Com o advento das técnicas de posicionamento associadas aos Sistemas Globais de Navegação por Satélites (GNSS), em especial ao Sistema de Posicionamento Global (GPS), os levantamentos passaram a fornecer coordenadas (latitude, longitude e altitude) com alta precisão.

Utilizando a tecnologia GPS, em maio de 2004, o IBGE iniciou o projeto Pontos Culminantes, com o objetivo de determinar altitudes mais precisas para os picos mais elevados do Brasil, utilizando equipamentos de rastreamento GPS associados às modernas técnicas de posicionamento preciso por satélites. O projeto, executado em cooperação com o Instituto Militar de Engenharia (IME), foi concluído em 2005, com a medição do Monte Roraima (Serra de Pacaraíma, RR, divisa entre Brasil, Venezuela e Guiana) e outros seis pontos culminantes: Pico da Neblina (Serra do Imeri, AM), Pico 31 de Março (Serra do Imeri), Pico da Bandeira (Serra do Caparaó), Pico Pedra da Mina (Serra da Mantiqueira), Pico das Agulhas Negras (Serra da Mantiqueira) e Pico Cristal (Serra do Caparaó).

[...]

GEOCIÊNCIAS: IBGE revê as altitudes de sete pontos culminantes. Rio de Janeiro: Agência IBGE notícias, 19 mar. 2018. Disponível em: https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-sala-de-imprensa/2013-agencia-de-noticias/releases/15275-geociencias-ibge-reve-as-altitudes-de-sete-pontos-culminantes. Acesso em: 29 set. 2024.

Observe a altitude dos picos mais altos do Brasil.

Altitude anterior e revista de sete pontos culminantes no Brasil

Ponto culminante	Nova altitude (m)	Altitude anterior (m)
Pico da Neblina	2 995,30	2 993,78
Pico 31 de março	2 974,18	2 972,66
Pico da Bandeira	2 891,32	2 891,98
Pico Pedra da Mina	2 798,06	2 798,39
Pico das Agulhas Negras	2 790,94	2 791,55
Pico do Cristal	2 769,05	2 769,76
Monte Roraima	2 734,05	2 734,06

Fonte dos dados: GEOCIÊNCIAS: IBGE revê as altitudes de sete pontos culminantes. Rio de Janeiro: Agência IBGE Notícias, 19 mar. 2018. Disponível em: https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-sala-de-imprensa/2013-agencia-de-noticias/eleases/15275-geociencias-ibge-reve-as-altitudes-de-sete-pontos-culminantes. Acesso em: 9 set. 2024.

■ Serra do Imeri, no Parque Nacional do Pico da Neblina, em Santa Isabel do Rio Negro (AM). Fotografia de 2022.

ANDRE DIB/PULSAR IMAGENS

O Pico da Neblina está localizado na serra do Imeri, no Amazonas, na fronteira com a Venezuela e a Colômbia, e dá nome ao Parque Nacional do Pico da Neblina, que foi criado em 1979 com o objetivo de proteger a riqueza natural da região amazônica.

Você sabia que existem alguns métodos para calcular grandes comprimentos sem aparelhos sofisticados e, ainda assim, obter resultados confiáveis? Tal medição utiliza conceitos da semelhança de triângulos, que estudamos neste Capítulo.

Agora, faça o que se pede nas atividades a seguir.

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. De acordo com a tabela que acompanha o texto, percebe-se que houve uma diferença entre as medidas antigas e as atuais dos pontos culminantes. Qual foi o motivo dessa diferença?
Ver as **Orientações para o professor**.

2. Essa mesma tabela traz dados sobre sete picos. Reúna-se a mais um colega, e pesquisem a localização de cada um deles. Depois, respondam:

a) Em quais estados do Brasil esses picos estão localizados?

b) Pesquisem se há algum pico próximo da cidade em que vocês moram. Qual é a altura dele?
A resposta depende do local em que os estudantes residem.

3. Em determinada hora do dia, Cláudio estava passeando pelo Parque Nacional do Pico da Neblina e reparou que a sua sombra tinha um comprimento de 1,5 m. Nesse mesmo momento, qual seria a distância entre a extremidade da sombra produzida pelo Pico da Neblina e a projeção no solo do ponto mais alto do pico, considerando que a altura do pico é 2 995,3 m e que a altura de Cláudio é 1,8 m?
A distância seria de, aproximadamente, 2 496,08 m.

4. Reúna-se a alguns colegas e façam uma pesquisa na internet para saber o que é um relatório de experimento científico e como se realiza o método de medição de alturas utilizando um prato com água. Depois, façam o que se pede em cada item. Ver as **Orientações para o professor**.

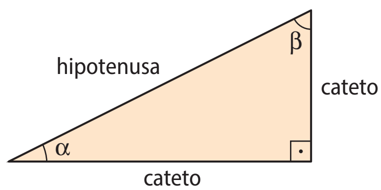
a) Escolham um edifício, uma torre ou uma construção de seu município e empreguem o método de medição do prato com água. Feito isso, façam um relatório do experimento, que deve conter: materiais usados, tipo e local da construção medida, procedimento detalhado, incluindo a teoria matemática, e, por fim, conclusões obtidas.

b) Apresentem o relatório do experimento para a turma de vocês em sala de aula. Depois, conversem sobre a experiência.

2. a) Picos da Neblina e 31 de março – Amazonas; Pico da Bandeira – Espírito Santo/Minas Gerais; Pico Pedra da Mina – Minas Gerais/São Paulo; Pico das Agulhas Negras – Rio de Janeiro; Pico do Cristal – Minas Gerais; Monte Roraima – Roraima.

Relações métricas no triângulo retângulo

No Ensino Fundamental, você estudou que, na Geometria Euclidiana, a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer é igual a 180°. Assim, como um triângulo retângulo tem um ângulo interno medindo 90°, podemos concluir que a soma das medidas dos outros dois ângulos agudos também é 90°, ou seja, esses ângulos agudos do triângulo retângulo são complementares. Além disso, o lado oposto ao ângulo reto é o maior lado, chamado de **hipotenusa**. Os outros dois lados, perpendiculares entre si, são chamados de **catetos**.

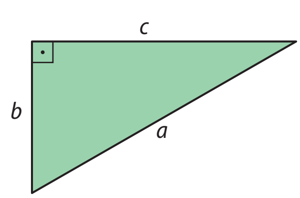


$$\alpha + \beta = 90°$$
$$\beta = 90° - \alpha$$

Teorema de Pitágoras

Provavelmente você estudou no Ensino Fundamental o teorema de Pitágoras, uma conhecida relação entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo. Vamos relembrar esse teorema:

> Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos:
> $$a^2 = b^2 + c^2$$



Em que:

- a é a medida da hipotenusa;
- b e c são as medidas dos catetos.

Observe, a seguir, uma das muitas demonstrações desse teorema.

Demonstração

Considere o triângulo retângulo representado na figura **1**, em que a é a medida da hipotenusa e b e c são as medidas dos catetos. Queremos provar que $a^2 = b^2 + c^2$.

Com quatro triângulos retângulos congruentes a esse, construímos um quadrado $MNPQ$, cujo lado mede $(b + c)$.

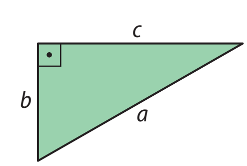
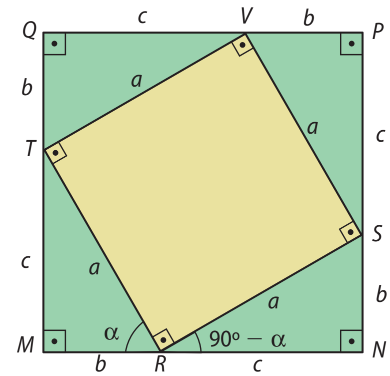


Figura **1**.

Na figura **2**, observe que, inscrito ao quadrado *MNPQ*, temos o quadrilátero *TRSV*. Vamos mostrar que o quadrilátero *TRSV* é um quadrado. Acompanhe:

- Os quatro lados de *TRSV* são congruentes, pois são as hipotenusas dos triângulos retângulos.
- Os ângulos internos de *TRSV* são retos, pois, em cada um dos seus vértices, por exemplo, em *R*, temos três ângulos adjacentes suplementares, sendo dois deles os ângulos agudos do triângulo retângulo, e o outro, o ângulo interno de *TRSV* com vértice em *R*. Como os ângulos agudos do triângulo retângulo medem α e $90° - \alpha$, o ângulo interno $\hat{R}$ do quadrilátero *TRSV* mede 90°. De maneira análoga, podemos provar que os outros ângulos internos $-$ $\hat{T}$, $\hat{S}$ e $\hat{V}$ $-$ do quadrilátero *TRSV* são retos.



■ Figura **2**.

Assim, fica demonstrado que o quadrilátero *TRSV* é um quadrado.

Agora, considere:

- A_{MNPQ} a área do quadrado *MNPQ*;
- A_{TRSV} a área do quadrado *TRSV*;
- $A_{\triangle}$ a área do triângulo retângulo dado.

Da figura **2**, obtemos:

$A_{MNPQ} = A_{TRSV} + 4 \cdot A_{\triangle}$

$(b + c)^2 = a^2 + 4\left(\dfrac{b \cdot c}{2}\right)$

Desenvolvendo essa expressão, temos:

$b^2 + \cancel{2bc} + c^2 = a^2 + \cancel{2bc}$

Portanto: $a^2 = b^2 + c^2$

Para assistir

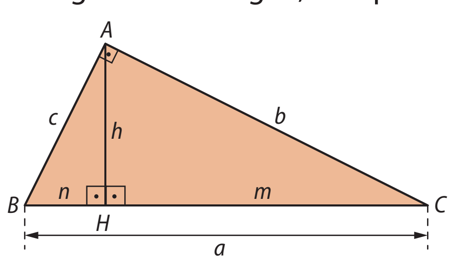
- TEOREMA de Pitágoras: diferentes demonstrações. [*S. l.*: *s. n.*], 2017. 1 vídeo (1 min). Publicado pelo canal IVEPESP. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=EfdXwHb0afM. Acesso em: 9 set. 2024.

Assista a uma animação que apresenta alguns modos diferentes de mostrar a validade do teorema de Pitágoras.

» Outras relações métricas no triângulo retângulo

Além do teorema de Pitágoras, existem outras relações métricas entre os elementos de um triângulo retângulo. Inicialmente, vamos identificar esses elementos.

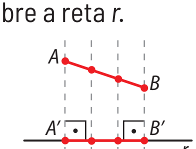
Consideremos o triângulo retângulo *ABC* a seguir, em que:



- $\overline{BC}$ é a hipotenusa de medida *a*.
- $\overline{AC}$ é o cateto de medida *b*.
- $\overline{AB}$ é o cateto de medida *c*.
- $\overline{AH}$ é a altura relativa à hipotenusa de medida *h*.
- $\overline{BH}$ é a projeção ortogonal, de medida *n*, do cateto $\overline{AB}$ sobre a hipotenusa.
- $\overline{HC}$ é a projeção ortogonal, de medida *m*, do cateto $\overline{AC}$ sobre a hipotenusa.

Saiba que...

A projeção ortogonal de um segmento de reta $\overline{AB}$ sobre uma reta *r* é um segmento de reta obtido pela projeção ortogonal de todos os seus pontos sobre a reta *r*.



$\overline{A'B'}$ é a projeção ortogonal do segmento de reta $\overline{AB}$ sobre a reta *r*.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Podemos observar que $\overline{AH}$ dividiu o triângulo retângulo ABC em outros dois triângulos também retângulos: HBA e HAC.

Provemos que os triângulos ABC, HBA e HAC são semelhantes.

Os triângulos ABC e HAC são semelhantes pelo caso AA, pois eles têm o ângulo $\hat{C}$ em comum e um ângulo reto. O mesmo ocorre com os triângulos ABC e HBA, semelhantes pelo caso AA, pois têm o ângulo $\hat{B}$ em comum e um ângulo reto.

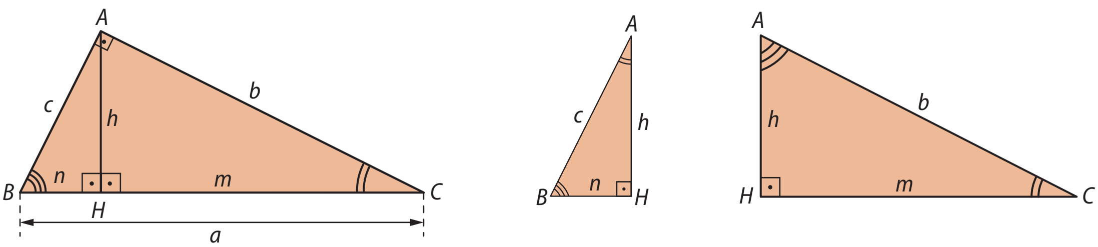
Como os triângulos ABC e HBA são retângulos e os ângulos agudos de um triângulo retângulo são complementares, tem-se:

med($\hat{C}$) + med($\hat{B}$) = med($\hat{B}$) + med($B\hat{A}H$), em que $\hat{C} \cong B\hat{A}H$ e, novamente, pelo caso de semelhança AA, os triângulos HBA e HAC são semelhantes.

Assim, concluímos que os três triângulos são semelhantes.

A partir da semelhança entre os triângulos formados, podemos estabelecer as relações apresentadas a seguir.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE



Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida de um cateto é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da respectiva projeção do cateto sobre a hipotenusa:

- Como $\triangle ABC \sim \triangle HAC$, temos: $\frac{a}{b} = \frac{b}{m} \Rightarrow$ $b^2 = a \cdot m$
- Como $\triangle ABC \sim \triangle HBA$, temos: $\frac{a}{c} = \frac{c}{n} \Rightarrow$ $c^2 = a \cdot n$

Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das medidas das projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa:

- Como $\triangle HAC \sim \triangle HBA$, temos: $\frac{h}{n} = \frac{m}{h} \Rightarrow$ $h^2 = m \cdot n$

Em qualquer triângulo retângulo, o produto das medidas dos catetos é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da altura relativa à hipotenusa:

- Como $\triangle ABC \sim \triangle HAC$, temos: $\frac{a}{b} = \frac{c}{h} \Rightarrow$ $a \cdot h = b \cdot c$

Com as duas primeiras relações métricas obtidas, podemos também demonstrar o teorema de Pitágoras. Note que, com a adição das equações, temos:

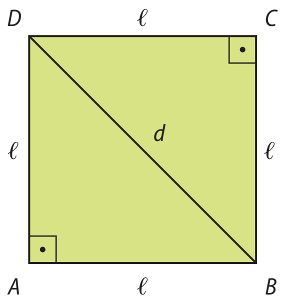
$b^2 + c^2 = a \cdot m + a \cdot n \Rightarrow b^2 + c^2 = a \cdot (m + n)$

Como $m + n = a$, e fazendo a substituição necessária na equação encontrada, finalizamos a demonstração:

$b^2 + c^2 = a \cdot a \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$

ATIVIDADES RESOLVIDAS

7. Considere o quadrado, cujo lado mede ℓ e cuja diagonal mede d. Calcule o valor de d em função de ℓ.

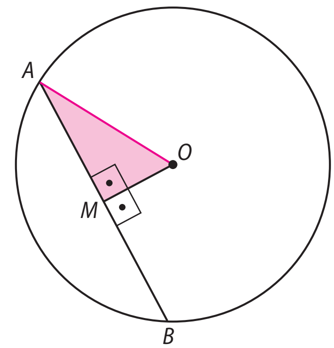


Resolução

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo *BCD*, temos:

$d^2 = \ell^2 + \ell^2 \Rightarrow d^2 = 2\ell^2 \Rightarrow d = \sqrt{2\ell^2} \Rightarrow$
$\Rightarrow d = \ell\sqrt{2}$

8. A circunferência tem raio desconhecido. Sobre ela, marcam-se uma corda $\overline{AB}$ de 8 cm de comprimento e um segmento $\overline{OM}$ perpendicular a $\overline{AB}$ de 2 cm de comprimento, de modo que *M* é um ponto de $\overline{AB}$ e *O* é o centro da circunferência. Com esses dados, determine a medida do raio da circunferência.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Resolução

Na figura dada, traçando-se um raio de *O* a *B*, forma-se o triângulo isósceles *AOB*, pois *OA* = *OB* (raios) e, como $\overline{OM}$ é perpendicular à base $\overline{AB}$, temos *AM* = *MB*. Logo, *M* é ponto médio da corda $\overline{AB}$. Então:

$AM = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{8}{2} \Rightarrow AM = 4$

Considerando o triângulo retângulo *OMA* e aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

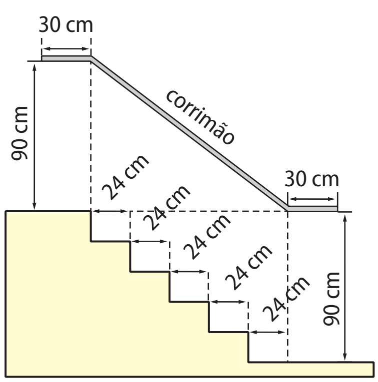
$(OA)^2 = (OM)^2 + (AM)^2 \Rightarrow (OA)^2 = 2^2 + 4^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow OA^2 = 20 \Rightarrow OA = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Portanto, o raio da circunferência mede $2\sqrt{5}$ cm.

ATIVIDADES

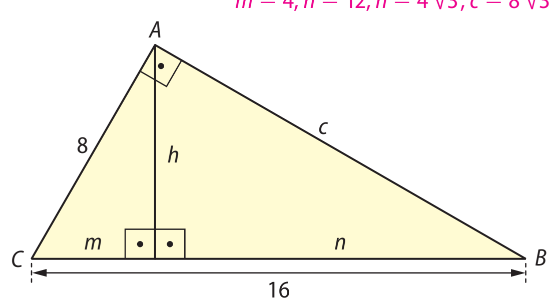
NÃO ESCREVA NO LIVRO.

25. (Enem/MEC) Na figura apresentada abaixo, que representa o projeto de uma escada com 5 degraus da mesma altura, o comprimento total do corrimão é igual a: alternativa **d**



a) 1,8 m
b) 1,9 m
c) 2,0 m
d) 2,1 m
e) 2,2 m

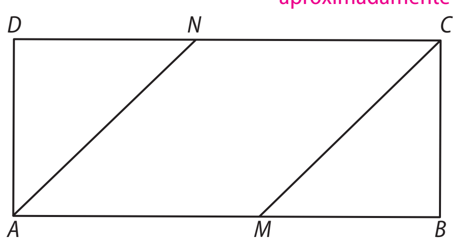
26. No triângulo retângulo *ABC*, determine as medidas *m*, *n*, *h* e *c* indicadas.
$m = 4$; $n = 12$; $h = 4\sqrt{3}$; $c = 8\sqrt{3}$



27. (UnB-DF) Em um triângulo retângulo, um dos catetos mede 16 metros. Determine, em metros, a medida da hipotenusa, sabendo que a medida desta excede a medida de outro cateto em oito metros. 20 m

28. Um triângulo retângulo tem sua hipotenusa medindo 5 cm e a altura relativa a essa hipotenusa com medida de 2,4 cm. Com as informações fornecidas, é possível determinar as medidas, em centimetro, dos catetos? Justifique. Se não for possível, explicite pelo menos uma informação que tornaria possível resolver o problema. Não, pois faltam dados. Ver as **Orientações para o professor**.

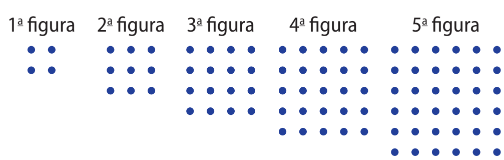
29. (FGV-SP) Na figura a seguir, *ABCD* é um retângulo e *AMCN* é um losango. aproximadamente 16 cm



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Determine a medida do segmento $\overline{NB}$, sabendo que $AB = 2AD = 20$ cm.

30. (UERJ) Segundo historiadores da matemática, a análise de padrões como os ilustrados a seguir possibilitou a descoberta das triplas pitagóricas. alternativa **b**

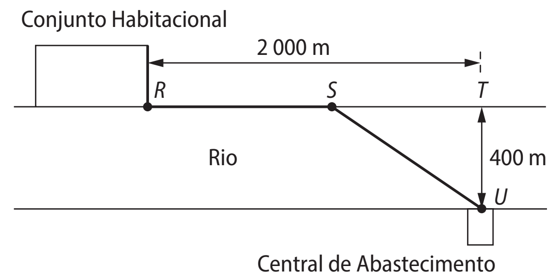


Observe que os números inteiros 3^2, 4^2 e 5^2, representados respectivamente pelas 2ª, 3ª e 4ª figuras, satisfazem ao Teorema de Pitágoras. Dessa forma (3, 4, 5) é uma tripla pitagórica. Os quadrados representados pelas 4ª, 11ª e nª figuras determinam outra tripla pitagórica, sendo o valor de n igual a:

a) 10 **c)** 14
b) 12 **d)** 16

31. (Unitau-SP) Uma rede de água potável ligará uma central de abastecimento, situada à margem de um rio de 400 m de largura (considerada constante), a um conjunto habitacional, situado na outra margem, através dos pontos *USR*, como mostra a figura.

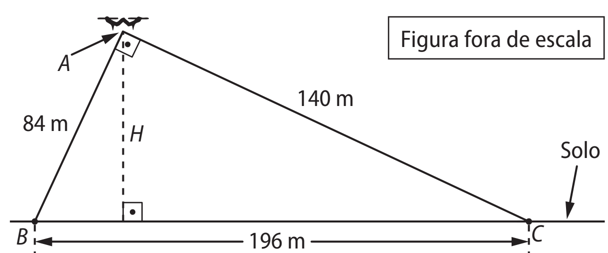
O custo da instalação da tubulação através do rio é de R$ 830,00 o metro, enquanto, em terra, custa R$ 400,00. alternativa **d**



Se a distância do conjunto habitacional até o ponto *S* for igual a 1 700 metros, pode-se afirmar, CORRETAMENTE, que o custo de instalação da rede de água potável será de:

a) R$ 1.611.000,00 **d)** R$ 1.095.000,00
b) R$ 1.012.000,00 **e)** R$ 1.321.000,00
c) R$ 1.132.000,00

32. (Unichristus) Um *drone*, em um ponto *A*, foi utilizado para localizar os focos de um incêndio na mata. Esse *drone* está a uma altura *H* do solo e detecta dois focos de incêndio nos pontos *B* e *C*, de acordo com a figura abaixo.



A distância do ponto *A* (*drone*) até o ponto *B* é de 84 m, a distância do ponto *A* (*drone*) até o ponto *C* é de 140 m, e a distância entre os pontos *B* e *C* é de 196 m. Se o triângulo *ABC* é retângulo em *A*, a altura *H* do *drone* em relação ao solo é igual a alternativa **d**

a) 45 m. **c)** 55 m. **e)** 65 m.
b) 50 m. **d)** 60 m.

33. Elabore um problema que possa ser resolvido usando uma ou mais relações métricas em um triângulo retângulo. Passe seu problema para um colega resolver e resolva o problema elaborado por ele. Resposta pessoal.

FÓRUM

Uso de *drones* e conservação ambiental

Você sabe o que são *drones*? Também chamados de veículos aéreos não tripulados (vants), esses equipamentos têm sido utilizados em muitos setores, desde entregas de compras *on-line*, passando por inteligência policial, até manejo e fiscalização de áreas de conservação ambiental. Leia a reportagem a seguir, que trata desse último uso.

Resex usará *drone* para identificar desmatamento

[...]

A Resex Ipaú-Anilzinho contará agora com *drone* para ajudar a preservar a Unidade de Conservação [UC]. O objetivo é melhorar a capacidade de monitoramento aéreo das alterações da cobertura vegetal da Resex. O trabalho é fruto da parceria entre o Instituto Chico Mendes de Conservação da Biodiversidade (ICMBio) e o Instituto Federal do Pará (IFPA), do Campus Tucuruí.

[...]

Um dos diferenciais desse tipo de equipamento é a capacidade de capturar imagens do alto e realizar a gravação de vídeos com estabilidade. Há também o Sistema de Detecção de Obstáculos para que o quadricóptero possa desviar de objetos e evitar acidentes e a função Smart Return Home para que, com ajuda do GPS, o equipamento volte automaticamente para o ponto inicial.

De acordo com o chefe da Resex, a implementação de tecnologias de aerolevantamento no combate ao desmatamento ilegal na região da UC garante maior celeridade de atuação da equipe de trabalho e, até mesmo, otimização de recursos. [...]

INSTITUTO CHICO MENDES DE CONSERVAÇÃO DA BIODIVERSIDADE. **Resex usará *drone* para identificar desmatamento**. Brasília, DF: ICMBio, 5 abr. 2019. Disponível em: https://www.gov.br/icmbio/pt-br/assuntos/noticias/ultimas-noticias/resex-usara-drone-para-identificar-desmatamento. Acesso em: 9 set. 2024.

Saiba que...

- Resex é a abreviação de reserva extrativista. As reservas extrativistas são áreas protegidas pelo governo federal. Elas são implementadas com o objetivo de conservar o bioma e a população originária local.
- Ipaú-Anilzinho é uma resex localizada na Vila Anilzinho, na cidade de Baião, no estado do Pará.

Após ler o texto, faça o que se pede a seguir. Ver as **Orientações para o professor**.

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

- Em pequenos grupos, pesquisem sobre as Unidades de Conservação (UCs) no Brasil: o que são, quais são seus objetivos e sua importância ecológica e como são classificadas. Listem exemplos dessas unidades localizadas em nosso país. Depois, promovam um fórum, em grupos maiores ou com toda a turma, para apresentar o resultado das pesquisas e debater a importância da preservação dos ecossistemas e da biodiversidade.

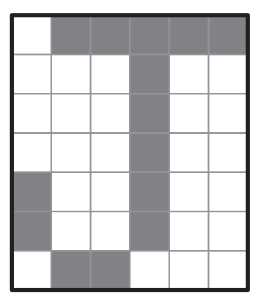
JRSLOMPO/SHUTTERSTOCK.COM

Drone sobrevoa rio em Bariri (SP). Fotografia de 2022.

O *pixel* e a formação da imagem

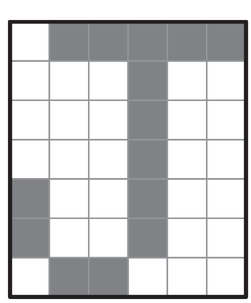
O computador é uma máquina que pode ser programada, o que significa que é possível criar uma sequência de instruções para que ele execute determinada função. Para programá-lo, é necessário usar uma linguagem de programação, a fim de garantir que as instruções sejam passadas de maneira precisa e coesa. Essas linguagens de programação são escritas por nós, seres humanos, e interpretadas pelo computador como uma linguagem de máquina, que é uma grande sequência de números.

Se os computadores só armazenam números, como eles reproduzem as imagens? Primeiro, é necessário pensar em como são as telas. Os visores dos computadores são compostos de uma grade de pontos, e cada um desses pontos é chamado de ***pixel***. Em uma tela em preto e branco, o *pixel* pode assumir uma dessas duas cores. Dessa maneira, as imagens, assim como tudo que aparece em uma tela, são formadas por uma junção de *pixels* pretos e brancos, como a letra J a seguir.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Portanto, para que o computador armazene a imagem, basta que ele guarde quais *pixels* são de cada cor. Uma possível maneira de fazer isso é associar uma sequência de números a cada linha, de maneira que se descreva quais *pixels* devem ser brancos e quais devem ser pretos. Investigue a imagem a seguir e observe como essa associação é feita para a letra **J**!



Linha 1: 1, 5
Linha 2: 3, 1, 2
Linha 3: 3, 1, 2
Linha 4: 3, 1, 2
Linha 5: 0, 1, 2, 1, 2
Linha 6: 0, 1, 2, 1, 2
Linha 7: 1, 2, 3

Os números indicam as quantidades de quadrinhos que serão pintados de branco ou de preto.

Pense e responda

Observe a sequência descrita para armazenar a imagem da letra **J** e responda às questões.

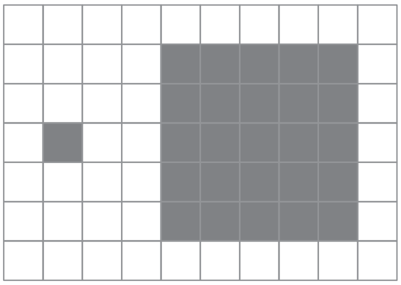
- Qual é o motivo de esses valores estarem atrelados a essas linhas?
- Por que algumas linhas começam com zero? Qual é o impacto disso na imagem?
- O que as linhas com o mesmo código têm em comum?

Quando a sequência começa com zero, isso significa que o primeiro quadradinho da linha será preto.

As linhas com o mesmo código produzem imagens iguais.

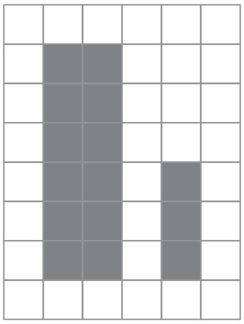
O primeiro dígito do código se refere à quantidade de *pixels* brancos que estão mais à esquerda da tela. Já o segundo dígito descreve quantos *pixels* pretos existem depois dos brancos. O terceiro indica quantos brancos há a seguir, e assim por diante até obter toda a informação da linha dessa sequência numérica. Esse processo é feito linha a linha. Observe que, se o primeiro *pixel* for preto, o código começará com um zero.

As imagens na tela podem ser ampliadas, e as proporções são mantidas. Observe como ficaria a ampliação de um *pixel* em cinco vezes, isto é, a figura semelhante a um único *pixel* com razão de semelhança 5.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Da mesma maneira, as imagens podem ser reduzidas. Observe agora como seria a redução de um retângulo 6×2 com razão de semelhança 0,5.



Agora, faça o que se pede na atividade a seguir. NÃO ESCREVA NO LIVRO.

- Em uma malha quadriculada: Ver as **Orientações para o professor**.

a) desvende a imagem armazenada por um computador com o seguinte código:

Linha 1: 0, 7
Linha 2: 0, 1, 5, 1
Linha 3: 0, 1, 5, 1
Linha 4: 0, 1, 5, 1
Linha 5: 0, 1, 1, 3, 1, 1
Linha 6: 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1
Linha 7: 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1
Linha 8: 0, 7

b) crie uma nova figura, com base na imagem do item anterior, com razão de semelhança 2 e escreva o código de armazenamento dessa imagem. Ver as **Orientações para o professor**.

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Na Babilônia, mil anos antes de Pitágoras

Leia a seguir o trecho de um texto sobre a Matemática na Babilônia.

Uma vez, vi um carpinteiro marcar dois cortes perpendiculares na madeira: pegou um barbante de comprimento 12 dm, formou um triângulo com lados de comprimentos 3, 4 e 5 dm, e usou o fato de que o ângulo entre os lados menores é reto. Não sei se sabia por que funciona, mas aposto que ignorava que a técnica já era usada 4000 anos atrás.

Plimpton 322, uma tábua de argila encontrada nas escavações da Mesopotâmia e datada de 1800 a.C., é um dos mais famosos documentos matemáticos antigos. Tem inscrita uma tabela com 15 linhas e 4 colunas de números (na notação sexagesimal da Babilônia) que formam triplas pitagóricas, ou seja, triplas de números inteiros a, b e c (por exemplo, $a = 3$, $b = 4$ e $c = 5$) tais que $a^2 + b^2 = c^2$.

Placa de argila Plimpton 322. Mesopotâmia, 1800 a.C. (As imagens da página estão fora de proporção.)

A maioria dos especialistas acredita que se trata de uma lista de exemplos para uso em sala de aula. Mas a inscrição também aponta um método de cálculo das triplas – mais de mil anos antes de Pitágoras! – que mostra um conhecimento de geometria que se pensava só ter sido alcançado na Grécia.

Um leitor chamou a minha atenção para outro documento matemático da Babilônia identificado recentemente. A peça, uma placa circular de argila chamada Si.427, data de 1900 a 1600 a.C. Ela foi escavada em Bagdá em 1894, mas foi dada como perdida até que o pesquisador australiano Daniel Mansfield a localizou no Museu Arqueológico de Istambul.

Si.427 contém um dos exemplos mais antigos de aplicação da trigonometria, a um dos problemas que mais motivaram o avanço da matemática no Egito e na Mesopotâmia: a redistribuição de terras. Ela é uma espécie de registro de imóvel, contendo informações legais e geométricas sobre um terreno que foi dividido para que fosse vendida a metade dele.

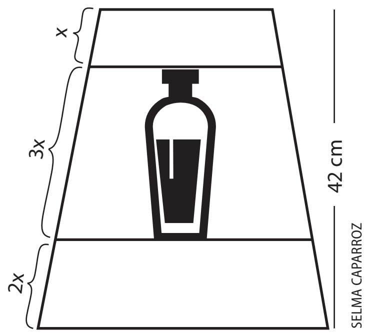
Para fazer essa divisão de forma precisa, é importante saber traçar perpendiculares a uma reta dada. É aí que os dois documentos se conectam: um método prático de obter a perpendicularidade é construindo triângulos cujos lados têm comprimentos dados por alguma tripla pitagórica, tal como fez o meu carpinteiro.

Assim, os problemas práticos colocados por Si.427 podem ser resolvidos utilizando a “teoria” contida em Plimpton 322. [...]

VIANA, Marcelo. Na Babilônia, mil anos antes de Pitágoras. **Folha de S.Paulo**, São Paulo, 17 ago. 2021. Disponível em: https://www1.folha.uol.com.br/colunas/marceloviana/2021/08/na-babilonia-mil-anos-antes-de-pitagoras.shtml?origin=folha. Acesso em: 29 jun. 2024.

Placa de argila Si.427. Babilônia, 1900 a.C.-1600 a.C.

1. (Unifor-CE)



A figura acima mostra um armário de banheiro que tem o formato de um trapézio. A altura total do armário é de 42 cm e ele está dividido em três compartimentos. As medidas de um dos lados de cada compartimento estão indicadas na figura.
Desprezando a espessura das divisórias, podemos afirmar que no compartimento do meio podemos colocar um produto com altura máxima de alternativa **d**

a) 10 cm.
b) 14 cm.
c) 18 cm.
d) 21 cm.
e) 25 cm.

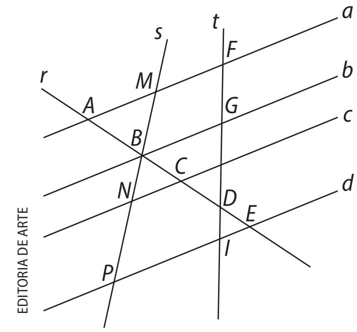
2. (Unemat-MT) A sombra de uma pessoa que tem 1,80 m de altura mede 60 cm. No momento, a seu lado, a sombra projetada de um poste mede 2,00 m. Se mais tarde, a sombra do poste diminuir 50 cm, a sombra da pessoa passará a medir: alternativa **b**

a) 30 cm
b) 45 cm
c) 48 cm
d) 36 cm
e) 25 cm

3. (IFSC) Para determinar a altura de um poste, Ana utilizou o seguinte artifício, com o auxílio de uma colega: mediu sua sombra e a do poste, obtendo 2,4 m e 3,7 m, respectivamente. Se Ana tem 1,5 m de altura, então é CORRETO afirmar que a altura do poste é de: alternativa **b**

a) 1,0 m
b) 2,3 m
c) 5,9 m
d) 2,6 m
e) 2,0 m

4. (Epcar-MG) Observe a figura a seguir:



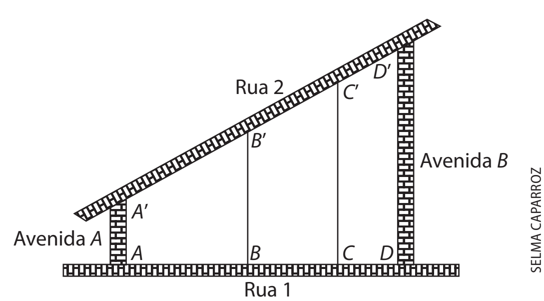
Nela, as retas *a*, *b*, *c* e *d* são paralelas e são interceptadas pelas retas transversais *r*, *s* e *t*.
Assim, as medidas dos segmentos, em cm, são:

$AB = y$	$BC = 9$	$CD = 10$
$DE = 4$	$FG = z$	$GH = m$
$HD = 5$	$DI = 2$	$MN = 16$
$BN = 6$	$BP = x$	

A soma $AB + FH$, em cm, é dada por um número divisível por: alternativa **a**

a) 3
b) 4
c) 7
d) 11

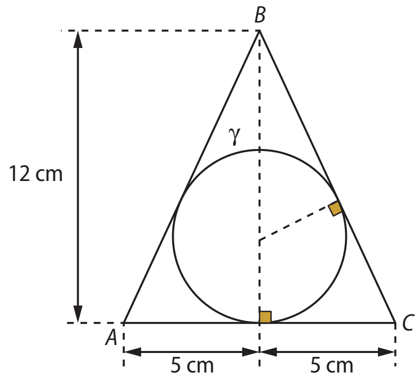
5. (UFU-MG) Uma área delimitada pelas Ruas 1 e 2 e pelas Avenidas *A* e *B* tem a forma de um trapézio $ADD'A'$, com $AD = 90$ m e $A'D' = 135$ m, como mostra o esquema da figura abaixo.



Tal área foi dividida em terrenos $ABB'A'$, $BCC'B'$ e $CDD'C'$, todos na forma trapezoidal, com bases paralelas às avenidas tais que $AB = 40$ m, $BC = 30$ m e $CD = 20$ m.
De acordo com essas informações, a diferença, em metros, $A'B' - C'D'$ é igual a: alternativa **b**

a) 20.
b) 30.
c) 15.
d) 45.

6. (UEA-AM) A circunferência γ está inscrita no triângulo isósceles *ABC* de altura 12 cm e base medindo 10 cm, conforme a figura:

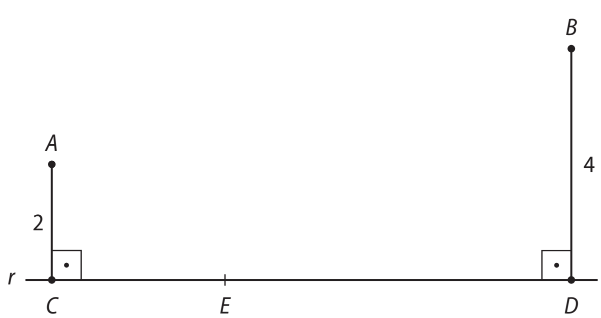


O raio da circunferência γ mede alternativa **d**

a) $\frac{16}{3}$ cm **c)** $\frac{18}{7}$ cm **e)** $\frac{12}{5}$ cm

b) $\frac{14}{5}$ cm **d)** $\frac{10}{3}$ cm

7. (Fuvest-SP) Na figura abaixo, as distâncias dos pontos *A* e *B* à reta *r* valem 2 e 4. As projeções ortogonais de *A* e *B* sobre essa reta são os pontos *C* e *D*. Se a medida de $\overline{CD}$ é 9, a que distância de *C* deverá estar o ponto *E*, do segmento $\overline{CD}$, para que $C\hat{E}A \cong D\hat{E}B$? alternativa **a**



a) 3

b) 4

c) 5

d) 6

e) 7

8. (IFPE) Ramon, Alexandre e Milton são alunos do curso de Informática no *Campus* Afogados da Ingazeira e estão testando um robô para participar de olimpíadas de robótica. Um dos exercícios testes consistia em fazer o robô realizar os seguintes comandos:

I. andar 30 cm em linha reta;

II. realizar um giro de 90° à direita;

III. andar mais 40 cm em linha reta;

IV. retornar ao ponto inicial no menor percurso possível.

Sobre o trajeto percorrido pelo robô, neste teste, é CORRETO afirmar que: alternativa **a**

a) forma um triângulo retângulo cuja hipotenusa mede 50 cm.

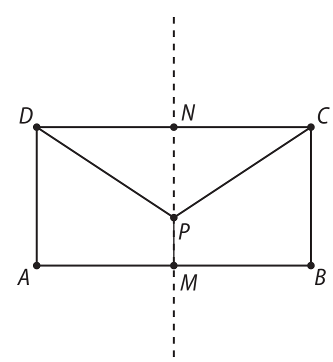
b) forma um triângulo retângulo cujo perímetro mede 100 cm.

c) forma um triângulo retângulo e isósceles.

d) forma um paralelogramo cujo perímetro mede 140 cm.

e) forma um paralelogramo cujas diagonais medem 50 cm.

9. (UFRGS-RS) Considere o retângulo *ABCD* de lados $AB = 4$ e $AD = 2$ e o ponto médio *M* de $\overline{AB}$. Traçando a reta mediatriz do lado $\overline{AB}$, determina-se o segmento $\overline{MN}$, com *N* na intersecção da mediatriz com $\overline{DC}$. Considere um ponto *P* construído sobre o segmento $\overline{MN}$, e os segmentos $\overline{PD}$ e $\overline{PC}$, como mostra a figura abaixo.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Tomando *x* como a medida do segmento $\overline{PN}$, considere *S*(*x*) a função que expressa a soma das medidas dos segmentos $\overline{PM}$, $\overline{PD}$ e $\overline{PC}$ em função de *x*. alternativa **e**

Para $0 \leq x \leq 2$, *S*(*x*), entre as alternativas abaixo, é

a) $S(x) = x + 2\sqrt{x^2 + 4}$.

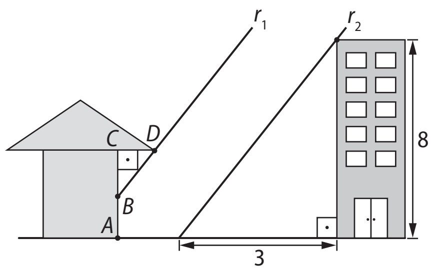
b) $S(x) = (2 - x) + 2(x^2 + 4)$.

c) $S(x) = (2 - x) + \sqrt{x^2 + 4}$.

d) $S(x) = x + \sqrt{x^2 + 4}$.

e) $S(x) = (2 - x) + 2\sqrt{x^2 + 4}$.

10. (Cefet-MG) Na figura a seguir, o segmento $\overline{AC}$ representa uma parede cuja altura é 2,9 m. A medida do segmento $\overline{AB}$ é 1,3 m, o segmento $\overline{CD}$ representa o beiral da casa. Os raios de sol r_1 e r_2 passam ao mesmo tempo pela casa e pelo prédio, respectivamente. alternativa **a**

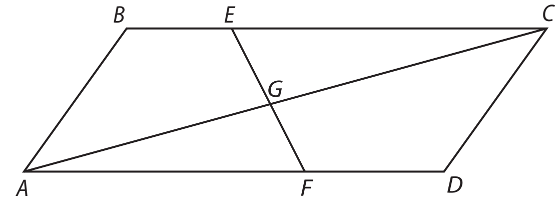


ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Se r_1 é paralelo com r_2, então, o comprimento do beiral, em metros, é:

a) 0,60 **b)** 0,65 **c)** 0,70 **d)** 0,75

11. (FGV-SP) O paralelogramo *ABCD*, indicado na figura, é tal que $BE = \frac{BC}{4}$, $DF = \frac{AD}{3}$ e *G* é a intersecção de $\overline{EF}$ com $\overline{AC}$.



A área do triângulo *GCE* supera a do triângulo *GAF* em, aproximadamente: alternativa **a**

a) 27%
b) 25%
c) 21%
d) 11%
e) 6%

PARA REFLETIR

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Neste Capítulo, estudamos o conceito de proporcionalidade aplicado à Geometria. Conhecemos o teorema de Tales, que tem como princípio a proporcionalidade entre medidas de segmentos de reta e pode ser aplicado a diversas situações de cálculo de distâncias, inclusive as inacessíveis ou de difícil medição.

Trabalhamos as noções de figuras congruentes e figuras semelhantes, em particular os triângulos. Além disso, trabalhamos as relações métricas no triângulo retângulo e o teorema de Pitágoras.

Nas páginas de abertura, fizemos uma discussão sobre a medida de polegadas no comércio de televisões e sobre o que representa essa medida. Você conseguiu responder às perguntas?

Vamos refletir a respeito das aprendizagens do Capítulo **7**: Respostas pessoais.

- Você já conhecia algum dos conteúdos apresentados ao longo deste Capítulo? Qual(is)?
- Cite algumas situações do dia a dia nas quais pode ser aplicado o teorema de Tales.
- Explique a diferença entre congruência e semelhança.
- Dê exemplos de situações do dia a dia nas quais pode ser aplicado o teorema de Pitágoras.

CAPÍTULO

8 TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO


SEVENTYFOUR/SHUTTERSTOCK.COM

A acessibilidade é um direito fundamental dos cidadãos, independentemente das condições físicas deles. A criação de rampas é essencial para garantir que pessoas com mobilidade reduzida possam ter acesso aos espaços com dignidade e autonomia.

Rampas bem projetadas não apenas facilitam o deslocamento mas também promovem a integração e a participação plena dessas pessoas na sociedade. Portanto, é fundamental que os gestores públicos e privados priorizem a implementação de rampas acessíveis, contribuindo para uma cidade mais inclusiva e igualitária.

A norma NBR 9050 estabelece padrões técnicos para a construção dessas rampas, garantindo que elas sejam seguras e adequadas para cadeirantes, pessoas idosas, gestantes e pessoas com outras limitações de locomoção. Além de atender a exigências legais, investir em acessibilidade é uma questão de inclusão social e respeito à diversidade.

Segundo a norma NBR 9050, a inclinação máxima permitida para uma rampa de acesso é de 8,33%, e essa inclinação é calculada por meio de uma fórmula relacionada às razões trigonométricas do triângulo retângulo, assunto abordado neste Capítulo.

Elaborado com base em: ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 9050**: acessibilidade a edificações, mobiliário, espaços e equipamentos urbanos. 4. ed. Rio de Janeiro: ABNT, 2020.

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Agora, reúna-se a um colega, e façam o que se pede em cada questão.

1. Vocês acham importante que os locais tenham rampas de acesso para pessoas com mobilidade reduzida? Por quê?

2. Por que é necessária uma norma que regulamente a inclinação de rampas de acesso?

3. Na escola em que vocês estudam há rampas de acesso? Que outras ações são importantes para garantir a acessibilidade a pessoas com mobilidade reduzida?

4. Desenhem uma rampa de acessibilidade em perspectiva. A vista lateral da rampa desenhada por vocês pode ser associada a que figura geométrica plana? A inclinação da rampa é expressa por qual elemento dessa figura?

1. Respostas pessoais. Espera-se que os estudantes respondam que é importante a criação de rampas adequadas para a acessibilidade de pessoas com mobilidade reduzida, pois o acesso aos espaços públicos e privados é um direito de todos.
2. Espera-se que os estudantes percebam que a regulamentação é importante, porque rampas muito inclinadas dificultam ou impossibilitam a subida e a descida.
3. Respostas pessoais. A norma NBR 9050 estabelece que haja rampas de acesso nas escolas, bem como espaços planos e/ou elevadores que facilitem a locomoção de pessoas com mobilidade reduzida.
4. Respostas pessoais. Espera-se que os estudantes respondam que o triângulo retângulo é a figura que pode ser associada à vista lateral de rampas de acessibilidade e que a inclinação da rampa depende do menor ângulo agudo do triângulo retângulo.

- Rampas de acesso são fundamentais à acessibilidade de pessoas com mobilidade reduzida.

Introdução

O significado da palavra trigonometria, do grego *trigonon*, "triângulo", e *metron*, "medida", remete ao estudo das relações entre as medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo.

A origem da Trigonometria é incerta. No entanto, é possível afirmar que alguns de seus recursos já eram aplicados por antigas civilizações do Mediterrâneo e pela civilização egípcia. Além disso, o desenvolvimento dessa área da Matemática teve grande progresso com as necessidades geradas pelas navegações, pela Astronomia e pela **Agrimensura**.

Agrimensura: ramo da Engenharia dedicado ao estudo de medições, mapeamento e características físicas de terras.

Ao longo dos séculos, diversos estudiosos, como Eratóstenes (c. 276 a.C.-c. 194 a.C.), Hiparco de Niceia (c. 180 a.C.-c. 125 a.C.) e Johann Müller (1436-1476), dedicaram-se ao estudo da Trigonometria, fazendo importantes contribuições para o desenvolvimento e o aperfeiçoamento desse ramo da Matemática.

[...]

O astrônomo Hiparco de Niceia [...] ganhou o direito de ser chamado "o pai da Trigonometria" pois, na segunda metade do século II a.C., fez um tratado em doze livros em que se ocupou da construção do que deve ter sido a primeira tabela trigonométrica [...] Hiparco fez esses cálculos para usá-los em seus estudos de Astronomia. [...]

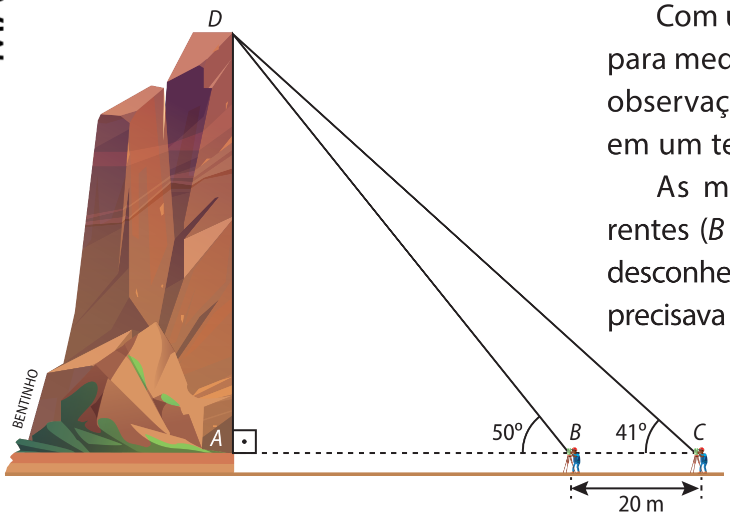
[...]

UM POUCO da história da trigonometria. São Paulo: E-Cálculo: Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 4 fev. 2009. Disponível em: http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_trigonometria.htm. Acesso em: 7 ago. 2024.

KENWIEDEMANN/ISTOCK PHOTOS/GETTY IMAGES

- Entre outras contribuições, Hiparco mediu com exatidão a duração do ano e a distância entre a Terra e a Lua. [HIPARCO no Observatório de Alexandria]. *In*: RIDPATH, John Clark. **Cyclopedia universal history [Enciclopédia da história universal]**. Cincinnati: The Jones Brothers Publishing Company, 1885. v. 1. Ilustração.

Neste Capítulo, vamos estudar a Trigonometria aplicada aos triângulos retângulos e resolver problemas geométricos que envolvem ângulos e distâncias, como o apresentado a seguir.



Com um teodolito mecânico, aparelho óptico usado para medir ângulos, um agrimensor mediu o ângulo de observação entre sua posição e o topo de um barranco em um terreno acidentado, conforme o esquema.

As medidas foram tomadas de dois locais diferentes (B e C), e a distância até a base do barranco era desconhecida, assim como a altura dele, que o agrimensor precisava determinar.

Vamos conhecer as razões trigonométricas que podem ser aplicadas a situações como essa, de medição indireta.

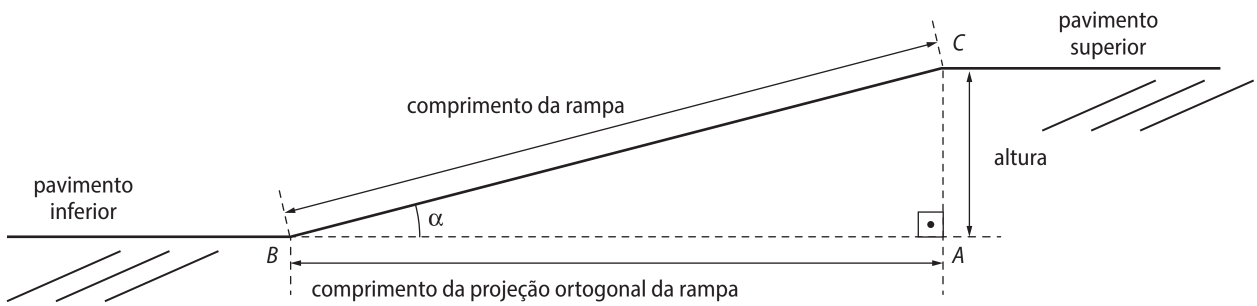
Razões trigonométricas no triângulo retângulo

No Capítulo anterior, foram exploradas algumas relações métricas entre diferentes elementos de um triângulo retângulo, as quais consideravam apenas medidas de segmentos no triângulo. Agora, vamos estudar as razões trigonométricas, que estabelecem relações entre os ângulos agudos e as medidas dos lados do triângulo.

Seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo

O Estatuto da Criança e do Adolescente (ECA), sancionado em 13 de julho de 1990, estabelece, entre outros itens, o direito à educação de todas as crianças e adolescentes, sem discriminação de qualquer natureza. Dessa maneira, é necessário que as escolas sejam acessíveis, contando, por exemplo, com rampas e portas de largura adequada para a passagem de cadeiras de rodas. Além disso, essas construções devem seguir as medidas estabelecidas pela norma NBR 9050.

Observe a ilustração a seguir, que mostra um projeto para a construção de uma rampa de acesso em que estão destacados a altura do desnível entre os pavimentos, o comprimento da rampa, o comprimento da projeção ortogonal da rampa sobre o pavimento inferior e o ângulo α formado pelo encontro da rampa com esse pavimento.



EDITORIA DE ARTE

Note que o triângulo *ABC* é um triângulo retângulo. Com suas medidas, podemos estabelecer as seguintes razões:

- k_1 é a razão entre a altura do desnível e o comprimento da rampa;
- k_2 é a razão entre o comprimento da projeção ortogonal da rampa e o comprimento da rampa;
- k_3 é a razão entre a altura do desnível e o comprimento da projeção ortogonal da rampa.

Por exemplo, se a razão k_1 for igual a $\frac{1}{8}$, isso significa que, a cada 1 cm na altura do desnível, temos 8 cm no comprimento da rampa.

Pense e responda

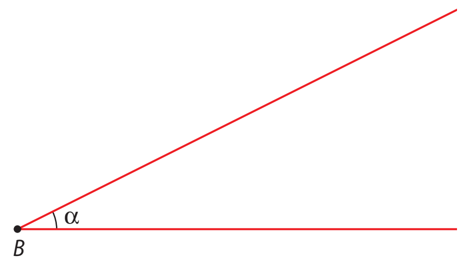
O que significa dizer que a razão k_3 vale 0,08, ou seja, $\frac{8}{100}$?

Significa que, a cada 8 cm na altura do desnível, tem-se 100 cm no comprimento horizontal da rampa.

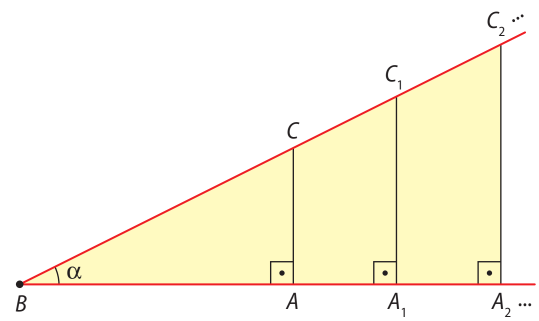
A inclinação da rampa, ou seja, o quão íngreme ela é, depende da medida do ângulo α e está relacionada à razão k_3 entre a altura do desnível e o comprimento da projeção ortogonal da rampa, conforme estudaremos ainda neste Capítulo.

As razões k_1, k_2 e k_3, estabelecidas para o triângulo dado anteriormente, recebem nomes especiais. Vamos estudar as definições matemáticas de cada uma delas.

Observe na figura um ângulo agudo α de vértice *B*.



Sobre uma das semirretas que determina um dos lados do ângulo, tomamos arbitrariamente os pontos A, A_1, A_2, ... e, por esses pontos, traçamos segmentos perpendiculares ao lado $\overrightarrow{BA}$, que intersectam o outro lado do ângulo nos pontos C, C_1, C_2, ..., respectivamente. Obtemos, assim, os triângulos retângulos ABC, A_1BC_1, A_2BC_2, ..., que são semelhantes entre si pelo caso AA (Ângulo, Ângulo).



Seno

Pela semelhança dos triângulos, podemos determinar a seguinte proporção:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A_1C_1}{BC_1} = \frac{A_2C_2}{BC_2} = \ldots$$

Qualquer triângulo retângulo semelhante ao triângulo *ABC*, isto é, com um ângulo de medida α e outro reto, terá o mesmo valor (constante) como resultado da razão entre o par de segmentos envolvidos na relação anterior. Ou seja, essa razão depende apenas do ângulo α, e não das medidas dos lados do triângulo.

Considerando o ângulo agudo α como referência, temos que essa relação é a razão entre a medida do **cateto oposto ao ângulo** α e a medida da **hipotenusa**, chamada de **seno de** α (**sen** α). Assim, escrevemos:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$$

Cosseno

Considerando novamente a semelhança dos triângulos, podemos determinar a seguinte proporção:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B}{BC_1} = \frac{A_2B}{BC_2} = \ldots$$

Essa relação é a razão entre a medida do **cateto adjacente ao ângulo α** e a medida da **hipotenusa**, chamada de **cosseno de α** (**cos α**). Assim, escrevemos:

$$\cos\alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$$

Tangente

Ainda considerando a semelhança dos triângulos, podemos determinar a seguinte proporção:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{A_1C_1}{A_1B} = \frac{A_2C_2}{A_2B} = \ldots$$

Essa relação é a razão entre a medida do **cateto oposto ao ângulo** α e a medida do **cateto adjacente ao ângulo α**, chamada de **tangente de α** (**tg α**). Assim, escrevemos:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo } \alpha}$$

As razões sen α, cos α e tg α são chamadas de **razões trigonométricas** em relação ao ângulo α.

Pense e responda

Supondo que, na figura anterior, o outro ângulo agudo dos triângulos retângulos seja nomeado β, quais são as expressões que indicam o seno, o cosseno e a tangente desse ângulo?

Resposta possível: considerando o triângulo *ABC*, tem-se: $\text{sen}\,\beta = \frac{AB}{BC}$, $\cos\beta = \frac{AC}{BC}$ e $\text{tg}\,\beta = \frac{AB}{AC}$

» Relações entre razões trigonométricas

Vamos estudar algumas relações envolvendo seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo α.

1ª relação

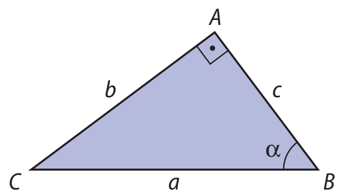
A soma do quadrado do seno de um ângulo agudo α com o quadrado do cosseno desse mesmo ângulo agudo α é igual a 1, ou seja:

$$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Essa relação é chamada de **relação fundamental da Trigonometria**.

Demonstração

Considere o triângulo *ABC*, retângulo em *A*, conforme a figura a seguir.



Sendo $\text{sen}\,\alpha = \frac{b}{a}$ e $\cos\alpha = \frac{c}{a}$, temos:

$$\begin{cases} \text{sen}^2\,\alpha = \dfrac{b^2}{a^2} \quad \text{(I)} \\ \cos^2\alpha = \dfrac{c^2}{a^2} \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Adicionando (I) e (II), membro a membro, obtemos:

$$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} \Rightarrow \text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = \frac{b^2 + c^2}{a^2} \quad \text{(III)}$$

Como o triângulo *ABC* é retângulo, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \text{(IV)}$$

Substituindo (IV) em (III), temos: $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Assim, fica demonstrada a relação fundamental da Trigonometria.

2ª relação

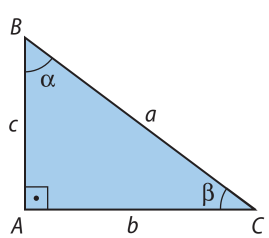
O seno de um ângulo agudo é igual ao cosseno de seu complemento, ou seja:

$$\text{sen}\,\alpha = \cos(90° - \alpha)$$

Demonstração

Considerando o triângulo *ABC* a seguir, retângulo em *A*, temos:

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE



$$\begin{cases} \text{sen}\,\alpha = \dfrac{b}{a} = \cos\beta \\ \text{sen}\,\beta = \dfrac{c}{a} = \cos\alpha \end{cases}$$

Como $\alpha + \beta = 90°$, obtemos: $\beta = 90° - \alpha$ ou $\alpha = 90° - \beta$. Assim, temos: $\text{sen}\,\alpha = \cos(90° - \alpha)$ ou $\text{sen}\,\beta = \cos(90° - \beta)$

Desse modo, a 2ª relação está demonstrada.

Saiba que...

- Para facilitar a escrita e quando isso não causar dificuldade de entendimento, em alguns momentos nesta Coleção, não faremos distinção entre os ângulos e suas respectivas medidas. Por exemplo, ao escrever "sen 30°" ou "seno de 30°", estaremos nos referindo ao seno do ângulo cuja medida é 30°.
- Ângulos complementares são dois ângulos cuja soma de suas medidas é igual a 90°.

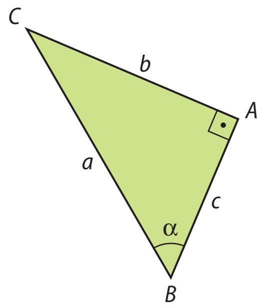
3ª relação

A tangente de um ângulo agudo α é igual à razão entre o seno e o cosseno desse mesmo ângulo agudo α, ou seja:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$$

Demonstração

Considerando o triângulo *ABC* a seguir, temos:



$$\text{sen}\ \alpha = \frac{b}{a} \text{ e } \cos\alpha = \frac{c}{a}$$

Dividindo sen α por cos α, obtemos:

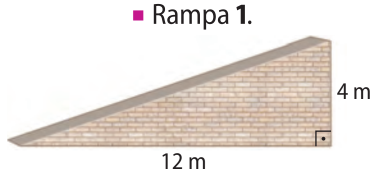
$$\frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{a}\cdot\frac{a}{c} = \frac{b}{c} = \text{tg}\ \alpha$$

Assim, a 3ª relação está demonstrada.

ATIVIDADES RESOLVIDAS

1. Observe a representação de duas rampas com ângulos de inclinação diferentes. É possível determinar qual das duas rampas tem maior inclinação? Explique.

Rampa **1**.



Rampa **2**.

Resolução

Sim. Podemos determinar qual das duas rampas tem a maior inclinação calculando a razão entre a altura e o comprimento horizontal, que é equivalente à tangente do ângulo de inclinação.

Sendo α e β os ângulos de inclinação das rampas **1** e **2**, respectivamente, temos:

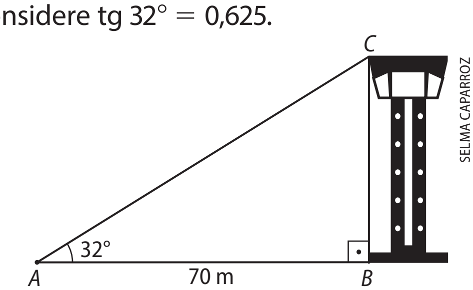
$$\text{tg}\ \alpha = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \qquad \text{tg}\ \beta = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Agora, comparamos as duas razões:

$\frac{1}{4} = \frac{3}{12} < \frac{4}{12}$. Isso significa que, para um mesmo comprimento horizontal (12 m), a rampa **1** corresponde a uma altura de 3 m, enquanto a rampa **2** corresponde a uma altura de 4 m.

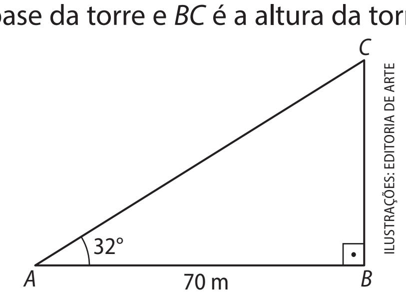
Então, podemos concluir que a rampa **2** tem maior inclinação do que a **1**.

2. Para medir a altura de uma torre, uma topógrafa se situa no ponto *A*, a 70 m da base da torre. Em seguida, com o teodolito, mira o ponto mais alto da torre e verifica que o ângulo dessa linha visual com a horizontal (ângulo de observação) é de 32°, como indica a figura. Sabendo que a distância do teodolito ao chão é desprezível, calcule a altura da torre. Considere tg 32° = 0,625.



Resolução

Vamos representar a situação na figura a seguir, em que *AB* é a distância da topógrafa até a base da torre e *BC* é a altura da torre.



Para determinar a altura da torre, vamos usar o valor de tg 32°, dado no enunciado.

$$\text{tg}\ 32° = \frac{BC}{AB} \Rightarrow 0{,}625 = \frac{BC}{70} \Rightarrow BC = 43{,}75$$

Portanto, a altura da torre é 43,75 m.

3. Sabendo que α é um ângulo agudo de um triângulo retângulo *ABC* e que $\cos(90° - \alpha) = \frac{1}{3}$, calcule o valor da $\text{tg}\ \alpha$.

Resolução

Como $\text{sen}\ \alpha = \cos(90° - \alpha)$, então: $\text{sen}\ \alpha = \frac{1}{3}$

Pela relação fundamental, temos:

$$\text{sen}^2\ \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{8}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Como o ângulo α é agudo, só o valor positivo nos interessa, pois definimos seno, cosseno e tangente como razões de medidas dos lados do triângulo. Assim, essas razões não podem ser negativas. Usaremos esse fato ao longo de todo este Capítulo.

Então: $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

Pela 3ª relação, obtemos:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \text{tg}\ \alpha = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{tg}\ \alpha = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \text{tg}\ \alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{tg}\ \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

4. Use uma calculadora científica para efetuar o que é pedido nos itens.

a) Qual é o valor aproximado de sen 30°, de cos 30° e de tg 30°?

b) Determine o valor do ângulo α para o qual $\text{sen}\ \alpha \simeq 0{,}75$.

Resolução

a) Inicialmente, é preciso indicar a unidade de medida de ângulo que será usada, no caso, o grau. Para isso, na calculadora, escolha o modo D ou *Deg* – abreviaturas de *degree*, em inglês, que significa "grau". Em seguida, pressione as teclas correspondentes para efetuar os cálculos.

- Para calcular o seno de 30°, devemos pressionar as teclas:

sin 3 0 = 0.5

- Para calcular o cosseno de 30°, devemos pressionar as teclas:

cos 3 0 = 0.866025403

- Para calcular a tangente de 30°, devemos pressionar as teclas:

tan 3 0 = 0.577350269

Portanto, $\text{sen}\ 30° = 0{,}5$, $\cos 30° \simeq 0{,}866$ e $\text{tg}\ 30° \simeq 0{,}577$.

b) Para determinar o valor do ângulo α, vamos usar a função sin^{-1} (sin) da calculadora. Normalmente, ela fica na mesma tecla da função sin e é preciso usar a tecla SHIFT para acioná-la. Assim, para obter o ângulo desejado, devemos pressionar as teclas:

SHIFT sin^{-1} (sin) 0 . 7 5 = 48.59037789

Portanto, o ângulo cujo seno é aproximadamente 0,75 é 49°.

Saiba que...

- Na maioria das calculadoras científicas, o seno de um ângulo é indicado por "sin", e a tangente é indicada por "tan".
- A sequência de teclas pode variar dependendo do modelo da calculadora. Em alguns casos, digita-se primeiro o valor do ângulo e depois a razão desejada.

Para acessar

- NAKAMURA, Juliana. **O que é teodolito e como ele é usado na topografia?** [Florianópolis]: Sienge, 15 jul. 2019. Disponível em: https://www.sienge.com.br/blog/teodolito-topografia/. Acesso em: 7 ago. 2024.
Artigo que traz informações detalhadas sobre o funcionamento do teodolito e suas limitações.

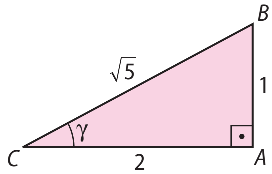
ATIVIDADES

2. a) Tangente. No triângulo retângulo formado, h é a medida do cateto oposto ao ângulo de inclinação e c é a medida do cateto adjacente.
b) Significa que a razão entre a altura do desnível e o comprimento da projeção da rampa é de $\frac{8}{100}$.

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. Em cada caso, calcule o seno, o cosseno e a tangente do ângulo agudo destacado.

a)

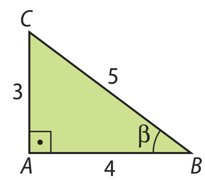


$\text{sen}\ \gamma = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$\cos \gamma = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\text{tg}\ \gamma = \frac{1}{2}$

b)



$\text{sen}\ \beta = \frac{3}{5}$

$\cos \beta = \frac{4}{5}$

$\text{tg}\ \beta = \frac{3}{4}$

2. Retomando a situação da construção da rampa da página 277, a NBR 9050 estabelece que a inclinação deve ser calculada de acordo com a expressão $i = \frac{h \cdot 100}{c}$, em que:

- i é a inclinação, em %;
- h é a altura do desnível;
- c é o comprimento da projeção ortogonal da rampa sobre o piso inferior.

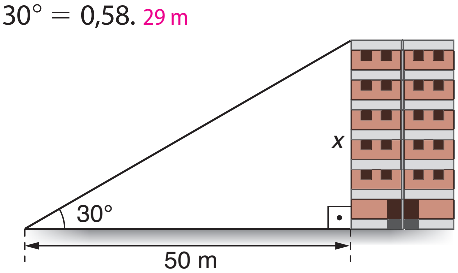
Além disso, para desníveis de até 0,80 m, a inclinação permitida deve estar entre 6,25% e 8,33%.

Com base nessas informações, responda.

a) A expressão da inclinação pode ser relacionada com que razão trigonométrica? Justifique.

b) O que significa uma inclinação de 8%?

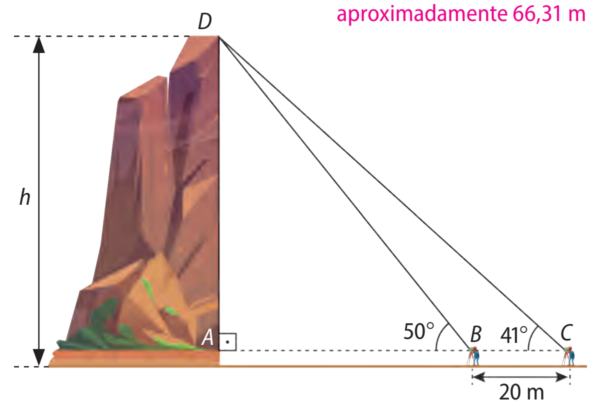
3. Quando os raios do sol formam o ângulo de 30° com o plano do chão, obtém-se a medida de 50 m para a sombra de um prédio. Qual é a altura aproximada desse prédio? Adote tg 30° = 0,58. 29 m



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

4. Em um triângulo retângulo, um cateto mede 15 cm, e a hipotenusa, 17 cm. Calcule o seno, o cosseno e a tangente do maior ângulo agudo desse triângulo. $\text{sen}\ \alpha = \frac{15}{17}$; $\cos \alpha = \frac{8}{17}$; $\text{tg}\ \alpha = \frac{15}{8}$

5. Retomando a situação da introdução do Capítulo, determine a altura h do barranco, sabendo que o teodolito está a 1,6 m do solo, alinhado com a base do barranco. Considere tg 41° = 0,87 e tg 50° = 1,19.
aproximadamente 66,31 m

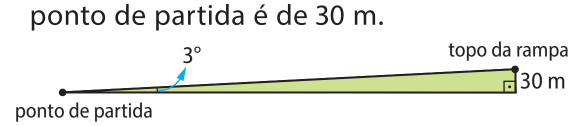


BENTINHO

6. Considere duas pessoas a 4 km de distância uma da outra, localizadas em dois pontos A e B no solo. A pessoa no ponto A, olhando na direção de B, avistou, segundo um ângulo de 50° (com a horizontal), um helicóptero. No mesmo instante, a pessoa no ponto B, olhando na direção de A, avistou o mesmo helicóptero segundo um ângulo de 45° (com a horizontal). Aproximadamente, a que altura do solo o helicóptero estava naquele momento? Considere sen 45° = cos 45° e tg 50° $\simeq$ 1,19.
aproximadamente 2,17 km ou 2 170 m

7. (Vunesp-SP) Um ciclista sobe, em linha reta, uma rampa com inclinação de 3 graus a uma velocidade constante de 4 metros por segundo.

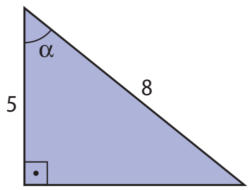
A altura do topo da rampa em relação ao ponto de partida é de 30 m.



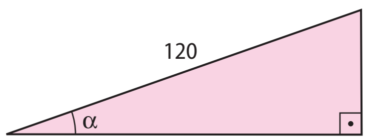
Use a aproximação sen 3° $\simeq$ 0,05 e responda.
O tempo, em minutos, que o ciclista levou para percorrer completamente a rampa é: alternativa **a**

a) 2,5.
b) 7,5.
c) 10.
d) 15.
e) 30.

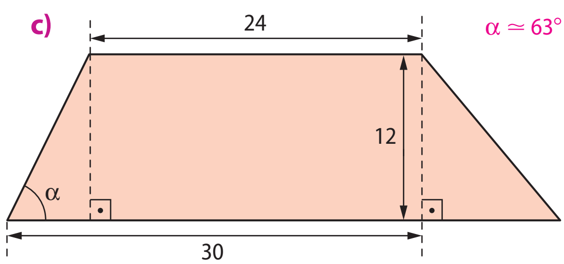
8. Determine a medida aproximada, em grau, do ângulo α de cada figura. Utilize uma calculadora científica.

a) 

$\alpha \simeq 51°$

b) 

$\alpha \simeq 19°$

c) 

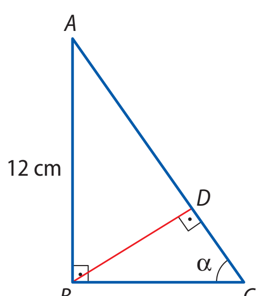
$\alpha \simeq 63°$

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

9. Considerando sen $10° = 0{,}17$, sen $65° = 0{,}90$ e cos $50° = 0{,}64$, calcule:

a) cos 25° 0,90 **b)** cos 80° 0,17 **c)** sen 40° 0,64

10. (UEA-AM) A figura mostra os triângulos retângulos *ABC* e *BCD*, em que $AB = 12$ cm e $m(B\hat{C}D) = \alpha$. alternativa **a**



fora de escala

Sabendo que sen $\alpha = 0{,}8$ e que o ponto *D* está sobre o lado $\overline{AC}$, a medida do segmento $\overline{DC}$ é igual a

a) 5,4 cm. **c)** 4,5 cm. **e)** 7,2 cm.
b) 3,6 cm. **d)** 6,3 cm.

11. A soma dos comprimentos das bases de um trapézio retângulo vale 30 m. A base maior mede o dobro da menor. Calcule a altura do trapézio, sabendo que seu ângulo obtuso mede 150°. Considere sen $30° = 0{,}5$. $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ m

12. (UECE) Um cabo de aço, medindo *c* metros de comprimento, é estendido em linha reta fixado em três pontos, a saber: *P* e *Q* em seus extremos e *M* em um ponto intermediário. O ponto *P* está localizado no solo plano horizontal e os pontos *M* e *Q* estão localizados nos altos de duas torres erguidas verticalmente no mesmo solo. As medidas, em metros, das alturas das torres e a distância entre elas são respectivamente *h*, *H* e *d*. Se *x* é a medida em graus do ângulo que o cabo estendido faz com o solo, então, é correto dizer que a medida, em metros, da diferença entre a altura da torre maior e a altura da torre menor é igual a alternativa **b**

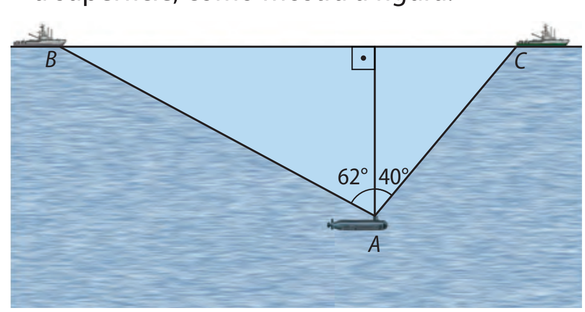
a) $c \cdot \text{tg}\,(x)$. **c)** $\frac{c \cdot h}{H}\,\text{tg}\,(x)$.

b) $d \cdot \text{tg}\,(x)$. **d)** $\frac{d \cdot h}{H}\,\text{tg}\,(x)$.

13. Uma pessoa, distante 10 m de um prédio, observa o topo dele sob um ângulo de 58°. Ao afastar-se desse prédio, ainda observa o topo, porém, agora, sob um ângulo de 22°. Calcule a altura do prédio e a distância de afastamento entre os pontos de observação. Adote tg $22° = 0{,}4$ e tg $58° = 1{,}6$.

O prédio tem 16 metros de altura, e a pessoa se afastou 30 metros.

14. Um submarino *A*, que se encontra a uma profundidade de 400 m no mar, detecta dois barcos *B* e *C* na superfície da água sob ângulos de 62° e 40°, respectivamente, medidos entre a direção dos barcos e a direção perpendicular à superfície, como mostra a figura.



SELMA CAPARROZ

Qual é a distância aproximada entre os dois barcos? Adote tg $62° = 1{,}9$ e tg $40° = 0{,}8$. 1080 m

15. Elabore um problema parecido com o da atividade **14**, que envolva uma pessoa localizada no solo observando dois *drones* situados no ar, à mesma altura do solo e a distâncias diferentes da pessoa. Depois, resolva o problema e compartilhe com a turma. Resposta pessoal.

FÓRUM

Estatuto da Criança e do Adolescente (ECA)

O Estatuto da Criança e do Adolescente (ECA), lei nº 8.069, de 13 de julho de 1990, representa um marco legal na proteção e na promoção dos direitos fundamentais de crianças e adolescentes no Brasil, desde a gestação até a maioridade.

Um dos pontos do ECA é a perspectiva inclusiva, reconhecendo crianças e adolescentes como sujeitos de direitos, dotados de autonomia progressiva e em processo de desenvolvimento físico, mental, moral, espiritual e social. Isso implica que as necessidades e os interesses desses indivíduos devem ser considerados em todas as esferas da vida social e jurídica.

Ao estabelecer direitos, como o acesso à educação de qualidade, a proteção contra o trabalho infantil e o direito à convivência familiar e comunitária, o ECA promove a construção de uma sociedade mais justa e equitativa. Garante-se, assim, que crianças e adolescentes possam desenvolver todo o potencial que possuem, contribuindo para o bem-estar coletivo e o desenvolvimento político, social e econômico do país.

Além disso, o ECA estabelece medidas protetivas para situações de violência, abuso, negligência e exploração, garantindo que crianças e adolescentes tenham mecanismos eficazes para buscar ajuda e proteção. Essas medidas incluem desde o acolhimento institucional até o fortalecimento dos vínculos familiares e comunitários.

ARMANDINHO, DE ALEXANDRE BECK

BECK, Alexandre. [Por um mundo onde...]. **Diário de Santa Maria**, Santa Maria, 2019. Tirinha do Armandinho.

Após ler o texto, discuta com os colegas a questão a seguir.

- Vocês já conheciam o ECA? Por que é importante que haja uma lei que estabeleça direitos específicos para esse grupo etário, em vez de simplesmente se aplicarem os mesmos direitos concedidos aos adultos? Ver as **Orientações para o professor**.

Para ler

- TURMA da Mônica em: o Estatuto da Criança e do Adolescente. São Paulo: Instituto Mauricio de Sousa, 2021. Disponível em: https://www.institutomauriciodesousa.org.br/fazendo-a-diferenca/publicacoes/a-turma-da-monica-em-o-estatuto-da-crianca-e-do-adolescente-2/. Acesso em: 7 ago. 2024.

  Revista em quadrinhos gratuita criada em parceria com o Ministério da Educação para difundir, com linguagem acessível, os principais aspectos do Estatuto da Criança e do Adolescente.

© INSTITUTO MAURICIO DE SOUSA

Capa do gibi da turma da Mônica sobre o Estatuto da Criança e do Adolescente.

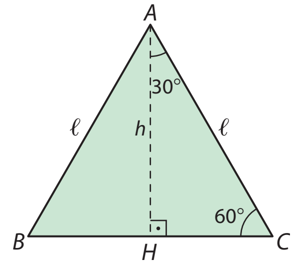
Ângulos de 30°, de 45° e de 60°

As razões trigonométricas relacionadas aos ângulos de 30°, de 45° e de 60° podem ser obtidas por meio de cálculos que utilizam as medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo equilátero e de um triângulo retângulo isósceles, como mostrado a seguir.

> **Saiba que...**
> Em alguns textos, é possível que você encontre a expressão "ângulos notáveis" para se referir aos ângulos de 30°, de 45° e de 60°.

Seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30° e de 60°

Considere um triângulo equilátero *ABC*, no qual ℓ é a medida dos lados e *h* é a medida da altura relativa ao lado $\overline{BC}$, conforme mostra a figura.



Como o triângulo *ABC* é equilátero, temos que $BH = HC = \frac{\ell}{2}$. Assim, no triângulo retângulo *AHC*, reto em *H*, aplicamos o teorema de Pitágoras para calcular a altura *h*:

$$\ell^2 = h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow h = \sqrt{\ell^2 - \frac{\ell^2}{4}} = \sqrt{\frac{3\ell^2}{4}} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

E obtemos as seguintes razões:

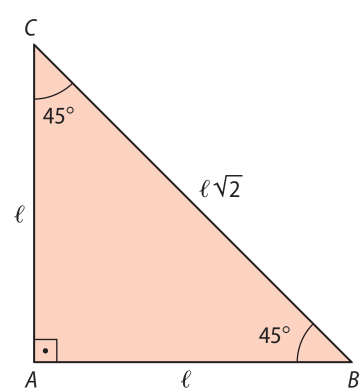
- $\text{sen } 30° = \dfrac{\frac{\ell}{2}}{\ell} = \dfrac{\ell}{2} \cdot \dfrac{1}{\ell} = \dfrac{1}{2}$
- $\text{sen } 60° = \dfrac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\ell} = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{1}{\ell} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos 30° = \dfrac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\ell} = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{1}{\ell} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos 60° = \dfrac{\frac{\ell}{2}}{\ell} = \dfrac{\ell}{2} \cdot \dfrac{1}{\ell} = \dfrac{1}{2}$
- $\text{tg } 30° = \dfrac{\frac{\ell}{2}}{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\ell}{2} \cdot \dfrac{2}{\ell\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$
- $\text{tg } 60° = \dfrac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\frac{\ell}{2}} = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{2}{\ell} = \sqrt{3}$

Seno, cosseno e tangente do ângulo de 45°

Considere um triângulo retângulo e isósceles *ABC*, conforme a figura a seguir, no qual ℓ é a medida dos catetos e $\ell\sqrt{2}$ é a medida da hipotenusa, que pode ser determinada pelo teorema de Pitágoras.

Com base nesse triângulo *ABC*, obtemos as seguintes razões:

- $\text{sen } 45° = \dfrac{\ell}{\ell\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $\cos 45° = \dfrac{\ell}{\ell\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $\text{tg } 45° = \dfrac{\ell}{\ell} = 1$



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Podemos organizar as razões trigonométricas dos ângulos de 30°, de 45° e de 60° em um quadro, como o apresentado. Elas serão bastante utilizadas nas resoluções das atividades, evitando a necessidade de fazer cálculos com valores aproximados.

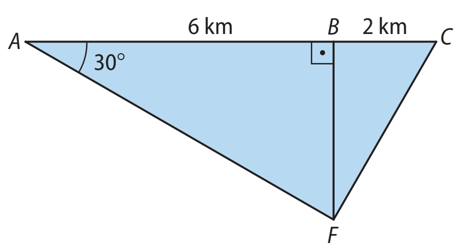
	30°	**45°**	**60°**
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

ATIVIDADES RESOLVIDAS

5. (UFV-MG) Um navio, navegando em linha reta, passa sucessivamente pelos pontos *A*, *B* e *C*. O comandante, quando o navio está em *A*, observa um farol *F* e determina que o ângulo $F\hat{A}C$ mede 30°. Após navegar 6 km até o ponto *B*, ele verifica que o ângulo $F\hat{B}C$ mede 90°. Calcule a distância, em km, que separa o farol *F* do navio quando este se encontra no ponto *C*, situado a 2 km do ponto *B*.

Resolução

A figura representa a situação.



Do triângulo retângulo *ABF*, obtemos:

$\text{tg } 30° = \frac{BF}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{BF}{6} \Rightarrow \text{BF} = 2\sqrt{3}$

Logo, a distância *BF* é igual a $2\sqrt{3}$ km.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo *BCF*, temos:

$(CF)^2 = (BF)^2 + (BC)^2$

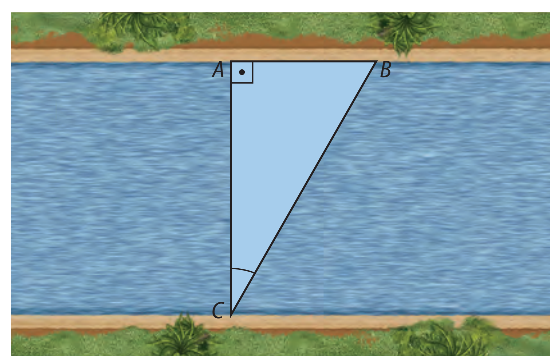
$(CF)^2 = (2\sqrt{3})^2 + 2^2$

$CF = \sqrt{16}$

$CF = 4$, pois $CF > 0$.

Portanto, a distância entre o farol e o navio no ponto *C* é de 4 km.

6. Suponha que um rio apresente um trecho de margens retas e paralelas, conforme mostra a figura.

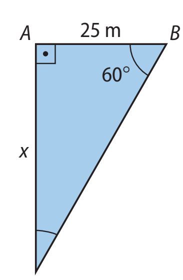


SELMA CAPARROZ

Os pontos *A* e *B* pertencem a uma das margens e *C* pertence à outra. Sabendo que $\text{med}(A\hat{B}C) = 60°$, $\text{med}(B\hat{A}C) = 90°$ e $AB = 25$ m, calcule a largura *AC* do rio.

Resolução

Considere o triângulo *ABC*, sendo $AC = x$.



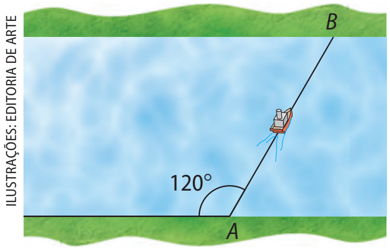
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Temos:

$\text{tg } 60° = \frac{x}{25} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{x}{25} \Rightarrow x = 25\sqrt{3}$

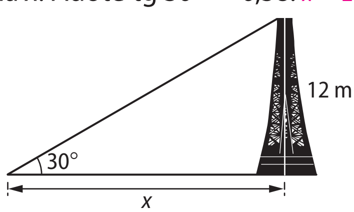
Portanto, a largura do rio é de $25\sqrt{3}$ m.

16. Um barco parte de *A* para atravessar um rio. A direção de seu deslocamento forma um ângulo de 120° com a margem do rio, conforme a figura. Sendo a largura do rio 60 m, qual é a distância *AB* percorrida pelo barco? $40\sqrt{3}$ m

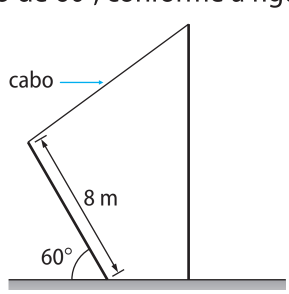


17. Uma escada, que mede 2,20 m de comprimento, acha-se apoiada em uma parede vertical e forma um ângulo de 60° com o plano horizontal. Determine a que altura o topo da escada se encontra do chão. Adote $\sqrt{3} = 1{,}73$. 1,903 m

18. Uma torre vertical de 12 metros de altura é vista sob um ângulo de 30° por uma pessoa que se encontra a uma distância *x* do centro de sua base. O plano da base da torre está no nível dos olhos do observador. Determine a distância *x*. Adote tg 30° = 0,58. $x \simeq 20{,}7$ m

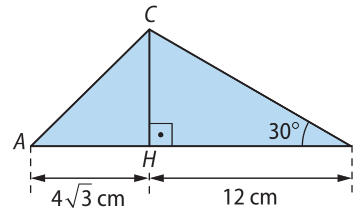


19. (UFG-GO) Para dar sustentação a um poste telefônico, utilizou-se um outro poste com 8 m de comprimento, fixado ao solo a 4 m de distância do poste telefônico, inclinado sob um ângulo de 60°, conforme a figura abaixo.



Considerando-se que foram utilizados 10 m de cabo para ligar os dois postes, determine a altura do poste telefônico em relação ao solo.
$(6 + 4\sqrt{3})$ m

20. No triângulo *ABC* a seguir, $\overline{CH}$ é a altura relativa ao lado $\overline{AB}$.

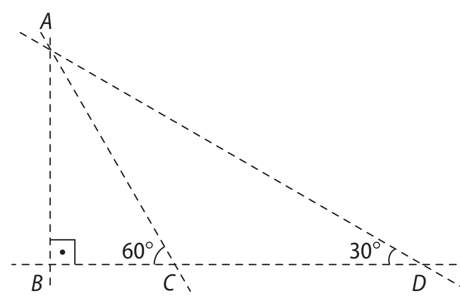


Determine:

a) a medida de $\overline{CH}$. Adote tg 30° $= \dfrac{\sqrt{3}}{3}$; $4\sqrt{3}$ cm

b) a medida do ângulo $B\hat{A}C$. 45°

21. (IFSC) A ilustração a seguir representa a planta das ruas de uma cidade. A rua representada pelo segmento $\overline{BC}$ tem 50 m de comprimento. Um dos engenheiros do projeto de pavimentação dessas ruas esqueceu de indicar algumas distâncias. Considerando que um de seus técnicos efetuou os cálculos, é CORRETO afirmar que o total de metros da rua que vai do ponto *A* até o ponto *D* é de: alternativa **e**



a) $50\sqrt{3}$ m.

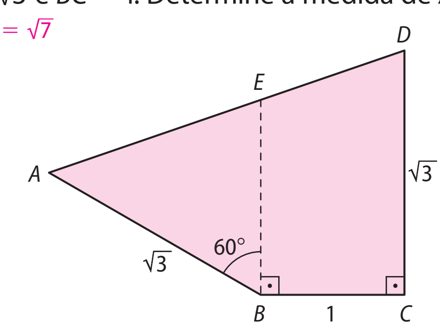
b) $150\sqrt{3}$ m.

c) 50 m.

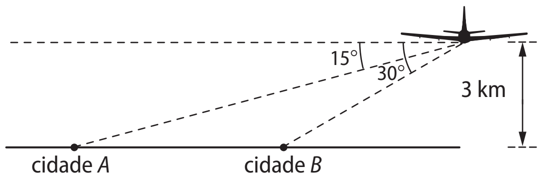
d) 100 m.

e) $100\sqrt{3}$ m.

22. (Fuvest-SP) No quadrilátero *ABCD* da figura abaixo, *E* é um ponto sobre o lado $\overline{AD}$ tal que o ângulo $A\hat{B}E$ mede 60° e os ângulos $E\hat{B}C$ e $B\hat{C}D$ são retos. Sabe-se ainda que $AB = CD = \sqrt{3}$ e $BC = 1$. Determine a medida de $\overline{AD}$.
$AD = \sqrt{7}$



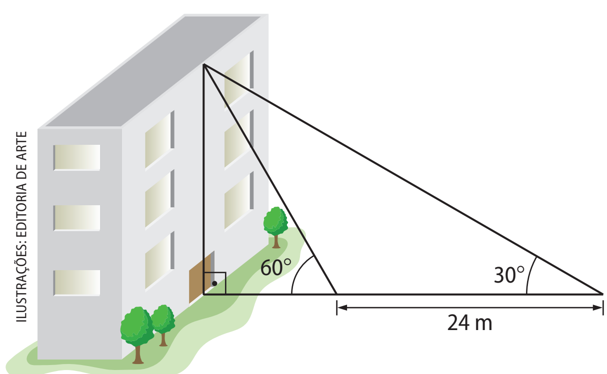
23. (UFV-MG) Um passageiro em um avião avista duas cidades, A e B, sob ângulos de 15° e 30°, respectivamente, conforme a figura a seguir:



Se o avião está a uma altitude de 3 km, a distância entre as cidades A e B é: alternativa **e**

a) 7 km.
b) 5,5 km.
c) 5 km.
d) 6,5 km.
e) 6 km.

24. A partir de um ponto, observa-se o topo de um prédio sob um ângulo de 30°. Caminhando 24 m em direção ao prédio, atinge-se outro ponto, de onde se vê o topo do prédio segundo um ângulo de 60°.



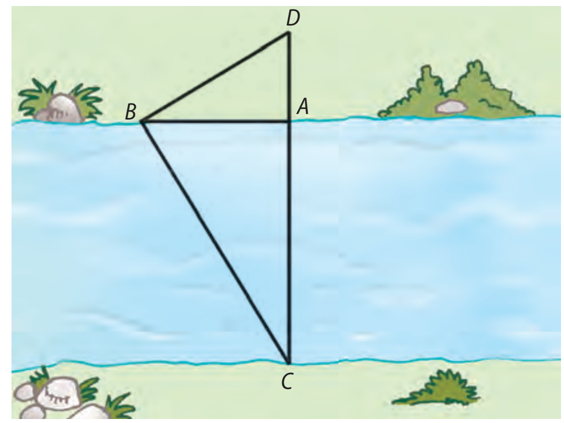
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Desprezando a altura do observador, calcule, em metro, a altura do prédio. $12\sqrt{3}$ m

25. (UECE) As medidas dos ângulos internos de um triângulo são respectivamente 30°, 60° e 90°. Se a medida do maior lado deste triângulo é 4 cm, então, a medida, em cm, da altura relativa a este lado é alternativa **c**

a) $\sqrt{2}$.
b) $\sqrt{6}$.
c) $\sqrt{3}$.
d) $\sqrt{5}$.

26. (Unicamp-SP) Para medir a largura $\overline{AC}$ de um rio, um homem usou o seguinte procedimento: localizou um ponto B de onde podia ver na margem oposta o coqueiro C, de forma que o ângulo $A\hat{B}C$ fosse 60°; determinou o ponto D no prolongamento de $\overline{CA}$, de forma que o ângulo $C\hat{B}D$ fosse 90°. Medindo AD = = 40 metros, achou a largura do rio. Determine essa largura e explique o raciocínio. AC = 120 m
Ver as **Orientações para o professor.**



ALBERTO DE STEFANO

27. (UECE) José caminhou na praia em linha reta deslocando-se do ponto X ao ponto Y, perfazendo o total de 1 200 m. Quando estava no ponto X, vislumbrou um navio ancorado no ponto Z de tal modo que o ângulo YXZ era de aproximadamente 60 graus. Ao chegar ao ponto Y verificou que o ângulo XYZ era de 45 graus. Nessas condições, a distância do navio à praia, em metros, é aproximadamente igual a alternativa **b**

a) 720.
b) 760.
c) 780.
d) 740.

Nota: Considere tg (60°) aproximadamente igual a $\frac{19}{11}$.

28. Reúna-se a três colegas para fazer a **atividade de campo** indicada a seguir. Resposta pessoal.

- Primeiro, construam teodolitos caseiros seguindo a instrução disponível no vídeo www.youtube.com/watch?v=jkv_9EoVKJU (acesso em: 7 ago. 2024).
- Em seguida, procurem, na escola ou no entorno dela, alturas ou distâncias de difícil medição direta.
- Utilizem os teodolitos conforme as instruções do vídeo para obter as medidas necessárias.
- Por fim, façam os cálculos adequados para determinar as alturas escolhidas.

EXPLORANDO A TECNOLOGIA

Razões trigonométricas usando o GeoGebra

Estudamos que as razões trigonométricas em um triângulo retângulo não dependem da medida dos lados, e sim do ângulo em questão. Nesta seção, com o auxílio do **GeoGebra**, vamos comprovar esse fato com a construção de dois triângulos retângulos semelhantes. Para isso, siga a sequência de passos a seguir.

I. Para a construção, não vamos precisar da malha quadriculada nem dos eixos. Portanto, para ocultar esses elementos, na janela de visualização, clique em qualquer ponto com o botão direito do *mouse* e, depois, tire a seleção de **Exibir Eixos** e de **Exibir Malha** para desabilitar os eixos e a malha quadriculada.

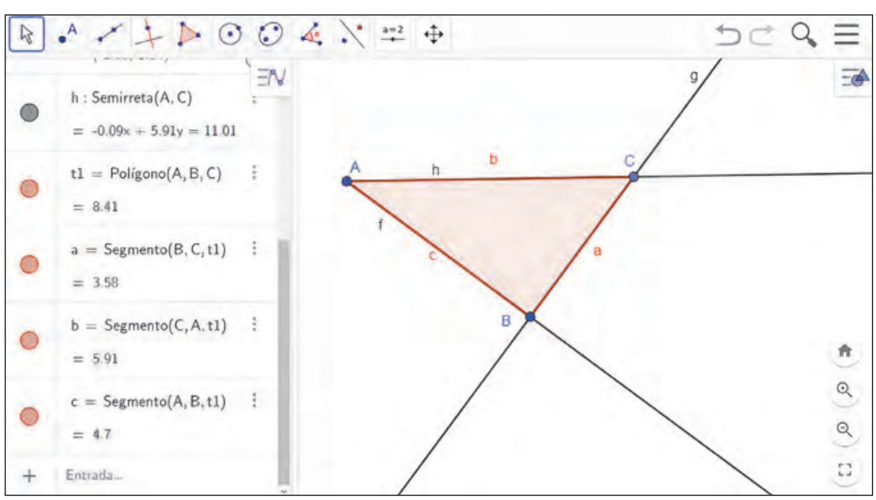
II. Com a ferramenta **Semirreta**, construa uma semirreta $\overrightarrow{AB}$.

III. Usando a ferramenta **Reta Perpendicular**, construa uma reta perpendicular à semirreta $\overrightarrow{AB}$ que passe pelo ponto B.

IV. Na reta perpendicular, com a ferramenta **Ponto**, construa um ponto C.

V. Usando novamente a ferramenta **Semirreta**, construa a semirreta $\overrightarrow{AC}$.

VI. Utilizando a ferramenta **Polígono**, clique sobre os pontos A, B, C e A, nessa ordem, para construir o triângulo ABC. A construção, até o momento, estará similar à imagem.



IMAGENS: REPRODUÇÃO/GEOGEBRA

VII. Agora, construa um ponto D, na semirreta $\overrightarrow{AB}$, que seja diferente de A e diferente de B. Esse ponto pode estar em qualquer lugar dessa semirreta.

VIII. Construa uma reta perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ que passe por D.

IX. Com a ferramenta **Intersecção de Dois Objetos**, construa o ponto E, clicando diretamente na intersecção entre a semirreta $\overrightarrow{AC}$ e a reta perpendicular construída.

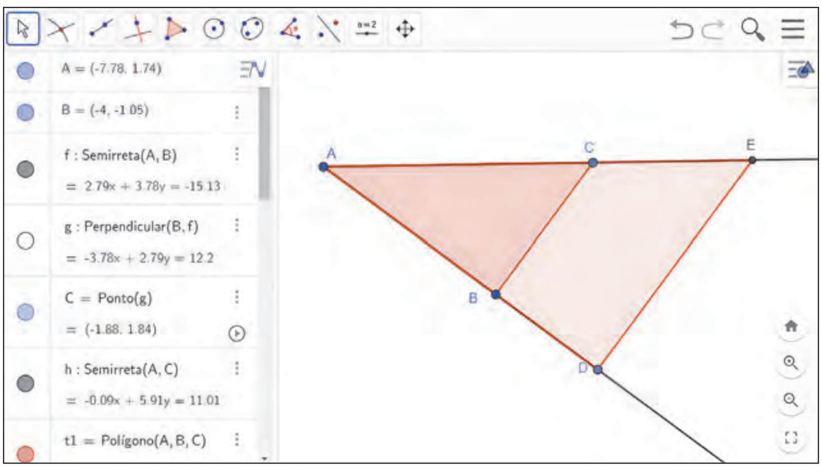
X. Utilizando novamente a ferramenta **Polígono**, clique sobre os pontos A, D, E e A, nessa ordem, para construir o triângulo ADE.

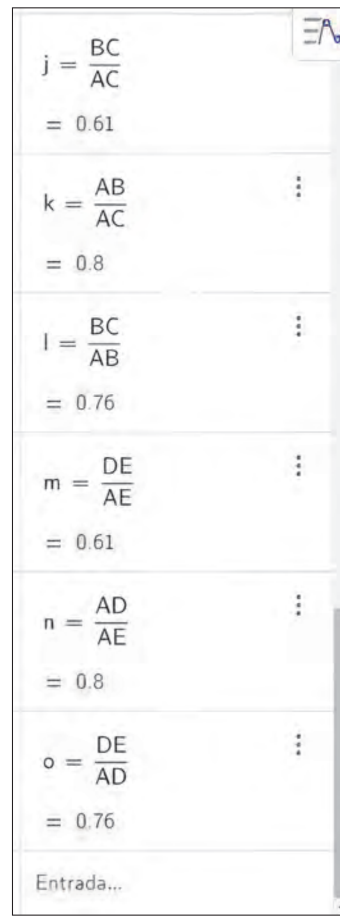
XI. Agora, vamos ocultar alguns itens da construção para facilitar a visualização.

Com a ferramenta **Mover**, , selecione o elemento a ser ocultado e clique sobre ele com o botão direito do *mouse* para abrir a janela de opções; em seguida, tire a seleção de **Exibir Objeto** para esconder algum objeto da construção. Vamos ocultar as retas $\overleftrightarrow{DE}$ e $\overleftrightarrow{BC}$.

Vamos ocultar, também, o nome de alguns elementos, mantendo apenas o nome dos pontos *A*, *B*, *C*, *D* e *E*. Para isso, basta selecionar cada objeto e, com o botão direito do *mouse*, tirar a seleção de **Exibir Rótulo**.

A construção ficará similar a esta.





IMAGENS: REPRODUÇÃO/GEOGEBRA

XII. No campo de entrada, digite "*BC/AC*". Na janela de Álgebra, aparecerá o número indicado pela letra *j*, que representa a razão $j = \frac{BC}{AC}$. Em seguida, digite "*AB/AC*", que será representado pela letra *k*, e "*BC/AB*", que será representado pela letra *l*.

Digite, em seguida, "*DE/AE*", "*AD/AE*" e "*DE/AD*", que serão representados, respectivamente, pelas letras *m*, *n* e *o*.

Observe, na imagem, como ficará a janela de Álgebra.

Note que alguns dos números têm valores iguais.

Janela de Álgebra após o passo XII.

Agora, faça o que se pede nas atividades a seguir. Ver as **Orientações para o professor**. NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. Os triângulos *ABC* e *ADE* construídos são semelhantes. Indique o caso de semelhança e justifique.

2. Ao observar a janela de Álgebra, percebemos que *j* tem o mesmo valor de *m*, assim como os pares de números *k* e *n*, e *l* e *o*. O que essas razões representam? O que se pode concluir com essa informação?

3. Utilize a ferramenta **Ângulo**, , e meça o ângulo com vértice em *A*. Em seguida, com a ferramenta **Mover**, altere a posição dos pontos *A*, *B* e *D* e descreva o que aconteceu com os valores do ângulo e das razões e o que se pode concluir com essa informação.

4. Altere a posição do ponto *C*. A igualdade entre os pares de razões observada anteriormente se manteve?

A matemática do *skate*

Altas manobras radicais, jovens atletas em ação e um estilo de vida. Estamos falando do *skate*, que entrou para o programa olímpico em Tóquio 2020. Mas a origem do esporte é na década de 1920, nos Estados Unidos, quando os jovens começaram a prender eixos e rodinhas em pedaços de madeira para se divertirem.

[...]

No final dos anos 50, quando não havia ondas no litoral da Califórnia, surfistas tentavam imitar as manobras que faziam na água usando rodas e eixos fixados em pranchas de madeira.

No Brasil, o *skate* chegou nos anos 60, primeiro no Rio de Janeiro, provavelmente trazido por filhos de norte-americanos e pelos brasileiros que viajavam para os Estados Unidos na época. Os *skateboards* evoluíram e atualmente são compostos por um *deck* de madeira, chamado de *shape* no Brasil, eixos de alumínio e as rodas de aderência para cada tipo de terreno. Para andar e consequentemente fazer as manobras é necessária uma combinação de impulso com os pés, equilíbrio e técnica.

O Brasil conta com nomes históricos da modalidade, bem antes da entrada nos Jogos Olímpicos, como Bob Burnquist, Sandro Dias, o Mineirinho, Letícia Buffoni, entre outros.

[...]

COMITÊ OLÍMPICO DO BRASIL. ***Skate***: história. Rio de Janeiro: COB, c2024. Disponível em: https://www.cob.org.br/time-brasil/esportes/1-skate. Acesso em: 7 ago. 2024.

Saiba que...

Na segunda edição do *skate* nas Olimpíadas de Paris, em 2024, o Brasil conquistou duas medalhas de bronze: Rayssa Leal na categoria *street* e Augusto Akio na categoria *park*.

EZRA SHAW/GETTY IMAGES

- Skatista Augusto Akio, conhecido como "Japinha", na final da categoria *park* masculina dos Jogos Olímpicos de Paris (França), na qual ganhou a medalha de bronze. Fotografia de 2024.

Você já andou de *skate*? Tem vontade? Você sabia que, para construir uma rampa de *skate*, podemos utilizar alguns conceitos de Trigonometria estudados neste Capítulo? Observe a fotografia.

Note que a vista lateral de parte da rampa tem um formato semelhante ao de um triângulo retângulo. Podemos usar os conceitos de seno, cosseno e tangente para determinar as medidas da rampa de *skate*.

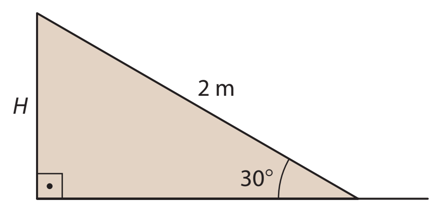
Acompanhe a situação a seguir.

DILIP BHOYE/E+/GETTY IMAGES

■ Existem vários tipos e tamanhos de rampas para a prática de *skate*.

Qual é a altura de uma rampa de *skate*, sabendo que sua inclinação é de 30° e que a placa de madeira que servirá de pista a ser colocada na parte inclinada tem o formato de um quadrado com lado de medida igual a 2 m? Observe a representação da lateral da rampa apresentada nesta situação.

Observe que a medida H, que queremos determinar, é a do cateto oposto em relação ao ângulo de 30° e que a medida 2 m é a da hipotenusa. Logo, utilizaremos o seno. Como sen $30° = 0{,}5$, temos:



$$\text{sen } 30° = \frac{H}{2} \Rightarrow 0{,}5 = \frac{H}{2} \Rightarrow H = 1$$

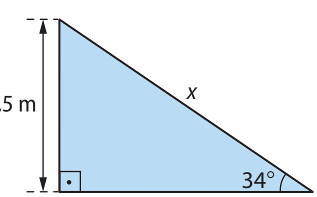
Assim, essa rampa tem 1 m de altura.

Agora, faça o que se pede nas atividades a seguir.

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. O *skate* se tornou esporte olímpico a partir dos Jogos Olímpicos de Tóquio 2020. Você conhece alguém que pratica esse esporte? Na sua cidade, há espaços para essa prática? Converse com os colegas e com o professor a respeito disso. Respostas pessoais.

2. No *skate*, há diversas modalidades e percursos. A minirrampa é utilizada por iniciantes para aprenderem as manobras. Normalmente, sua altura varia entre 1 metro e 2 metros e 40 centímetros. Considere a minirrampa representada e calcule a distância aproximada que o *skatista* vai percorrer do topo da pista até a base. aproximadamente 2,68 m



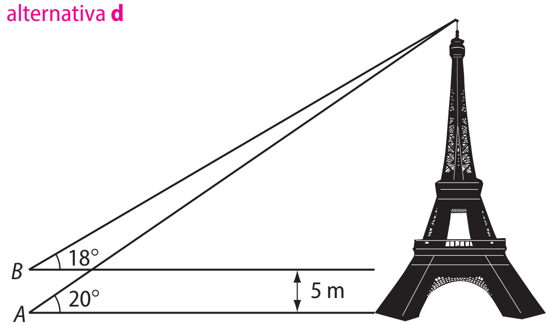
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

3. Você já ouviu falar sobre *skate* de dedos? Reúna-se em grupos, e pesquisem sobre essa modalidade. Depois, construam uma pista de *skate* de dedos utilizando material reciclável e as noções de Trigonometria e apresentem-na para os outros grupos. Ver as **Orientações para o professor**.

Para assistir

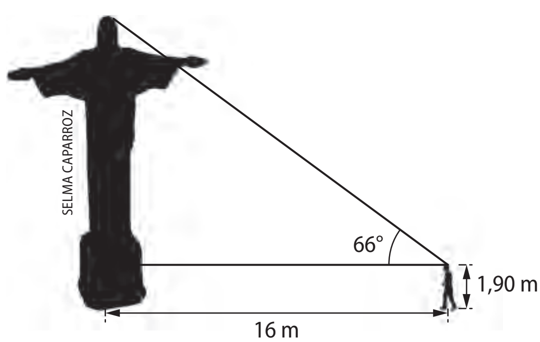
- VIDA sobre rodas. Direção: Daniel Baccaro. São Paulo: Goma Filmes, 2010. *Streaming* (109 min). Documentário que conta a trajetória do *skate* no Brasil nas décadas de 1980 e 1990.
- MINDING The Gap. Direção: Bing Liu. EUA: ITVS/Kartemquin Films, 2018. *Streaming* (93 min). Documentário que narra a vida e as amizades de três jovens de Rockford (Illinois), Estados Unidos, unidos pelo amor ao *skate*.

1. (UFAL) De um ponto *A*, situado no mesmo nível da base de uma torre, o ângulo de elevação do topo da torre é de 20°. De um ponto *B*, situado na mesma vertical de *A* e 5 m acima, o ângulo de elevação do topo da torre é de 18°. Qual a altura da torre? Dados: use as aproximações tg 20° $\simeq$ 0,36 e tg 18° $\simeq$ 0,32.
alternativa **d**



a) 42 m
b) 43 m
c) 44 m
d) 45 m
e) 46 m

2. (UFPel-RS) João viajou para o Rio de Janeiro e, como ele queria muito conhecer o Cristo Redentor, ficou horas admirando e tentando advinhar a altura da bela estátua. alternativa **e**



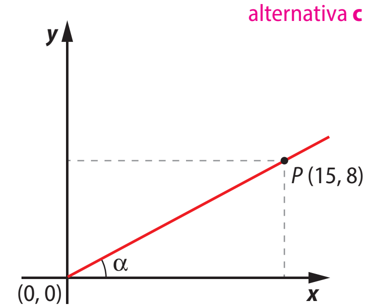
Considerando a figura e que tg 66° $\simeq$ 2,246, a altura aproximada do Cristo Redentor é de

a) 22 metros.
b) 48 metros.
c) 112 metros.
d) 55 metros.
e) 38 metros.
f) I.R.

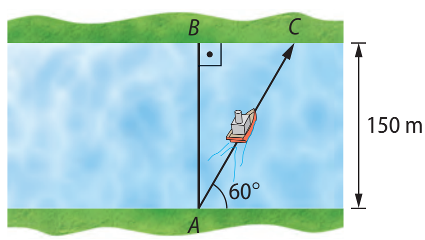
Nota: nesse vestibular, o candidato tem pontos descontados caso escolha uma alternativa incorreta. Ao selecionar a alternativa I.R., que indica "ignoro a resposta", ele elimina essa possibilidade.

3. (Comvest) Na figura abaixo, o valor de sen α é:
alternativa **c**

a) $\frac{15}{8}$
b) $\frac{30}{8}$
c) $\frac{8}{17}$
d) $\frac{15}{17}$



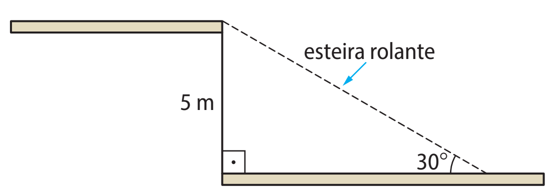
4. (UFMG) A figura abaixo representa a travessia de um barco num rio de margens paralelas, cuja largura é de 150 m. O barco, saindo de *A* em direção ao ponto *B*, foi arrastado pela correnteza, indo em direção ao ponto *C*, segundo um ângulo de 60° com a margem.



A distância, em metros, percorrida por esse barco foi de: alternativa **d**

a) 75.
b) $100\sqrt{2}$.
c) $96\sqrt{3}$.
d) $100\sqrt{3}$.

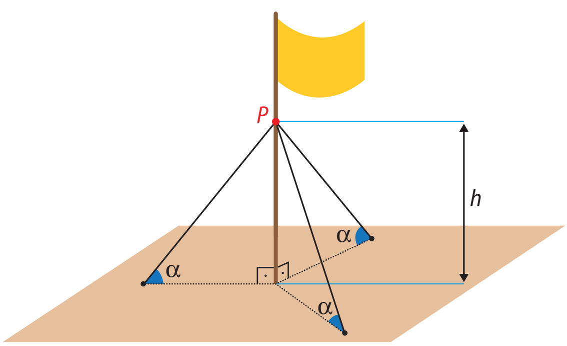
5. (IFSP) É comum encontrar em grandes supermercados esteiras rolantes para facilitar o deslocamento das pessoas. A figura a seguir mostra a esteira rolante de supermercado. Considerando os dados apresentados, o comprimento da parte da esteira rolante que liga um andar ao outro é: alternativa **b**



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

a) 5 m.
b) 10 m.
c) 15 m.
d) 20 m.
e) 25 m.

6. (Enem/MEC) O mastro de uma bandeira foi instalado perpendicularmente ao solo em uma região plana. Devido aos fortes ventos, três cabos de aço, de mesmo comprimento, serão instalados para dar sustentação ao mastro. Cada cabo de aço ficará perfeitamente esticado, com uma extremidade num ponto P do mastro, a uma altura h do solo, e a outra extremidade, num ponto no chão, como mostra a figura.



Os cabos de aço formam um ângulo α com o plano do chão.

Por medida de segurança, há apenas três opções de instalação:

- opção I: $h = 11$ m e $\alpha = 30°$
- opção II: $h = 12$ m e $\alpha = 45°$
- opção III: $h = 18$ m e $\alpha = 60°$

A opção a ser escolhida é aquela em que a medida dos cabos seja a menor possível.

Qual será a medida, em metro, de cada um dos cabos a serem instalados? alternativa **c**

a) $\frac{22\sqrt{3}}{3}$

b) $11\sqrt{2}$

c) $12\sqrt{2}$

d) $12\sqrt{3}$

e) 22

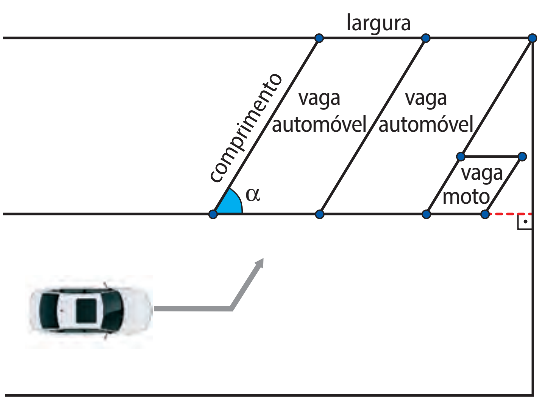
7. (Fuvest-SP) No Código de Obras e Edificações da Prefeitura de São Paulo, encontra-se a regulamentação para vagas de estacionamento em um edifício para diferentes tipos de veículos. De acordo com o código, as dimensões de uma vaga de estacionamento são estabelecidas de acordo com o tipo de veículo, conforme a seguinte tabela:

Tabela: Dimensões das vagas de estacionamento em função do tipo de veículo (medidas em metros).

Tipos de veículos	Vagas para estacionamento	
	Largura	Comprimento
Automóvel	2,20	4,50
Carro para pessoa com deficiência	3,70	5,50
Moto	1,00	2,00
Utilitário	2,50	5,50
Caminhão leve	3,10	8,00

Código de Obras e Edificações da Prefeitura de São Paulo. Adaptado.

Na figura a seguir, é apresentada parte de um projeto de garagem para um edifício. Foram projetadas vagas para automóveis e uma vaga para moto, no formato de paralelogramo, com ângulo α de medida 60°.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Observação: A imagem não está em escala.

Após a vaga da moto, restou um espaço na garagem. Os responsáveis pela obra estão avaliando a possibilidade de colocar algum objeto que possa ser utilizado pelos condôminos do edifício. Qual a medida do segmento destacado (tracejado) nesse espaço?

a) 0,75 m

b) 1,15 m

c) 1,25 m

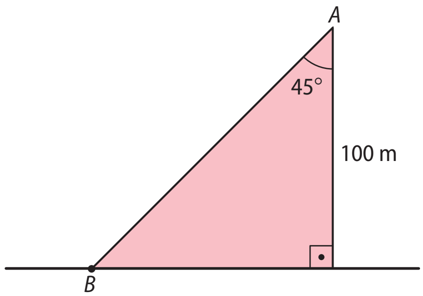
d) 2,20 m

e) 2,25 m

alternativa **c**

Note e adote: $\cos(60°) = 0{,}5$; $\text{sen}(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

8. (IFRS) Um *drone* se encontra a 100 m de altura no ponto *A* da figura abaixo, filmando um objeto que se encontra no ponto *B*. O ângulo de rotação de sua câmera com o objeto é de 45°. A distância do *drone* até o objeto que está sendo filmado, em m, é: alternativa **b**



a) $\frac{200\sqrt{3}}{3}$.

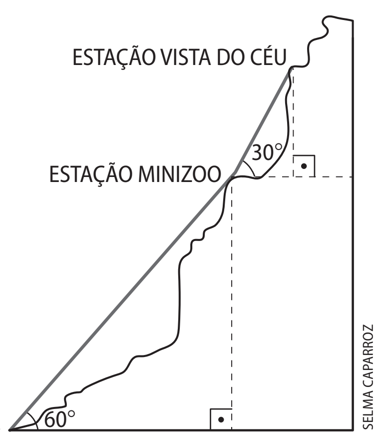
b) $100\sqrt{2}$.

c) 145.

d) $100\sqrt{3}$.

e) 200.

9. (UFV-MG) Um grupo de amigos resolveu fazer uma viagem para um parque ecológico. Eles chegam à Estação Central e partem em um teleférico que faz a primeira parada na Estação Minizoo, a segunda parada na Estação Vista do Céu.



Suponha que o comprimento total do cabo utilizado nesse teleférico seja de 480 metros, que esse cabo permaneça sempre totalmente esticado e que o comprimento dele da Estação Central à Estação Minizoo seja o triplo do comprimento do cabo da Estação Minizoo à Estação Vista do Céu.

É CORRETO afirmar que a altura da Estação Vista do Céu em relação à Estação Central é: (Adote $\sqrt{3} = 1{,}7$) alternativa **c**

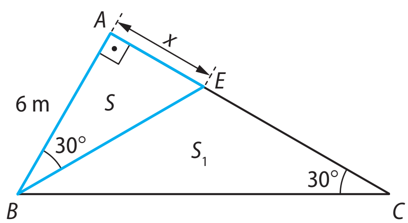
a) 364 metros.

b) 365 metros.

c) 366 metros.

d) 367 metros.

10. (UEA-AM) Um jardim, representado na figura pelo triângulo retângulo *ABC*, foi dividido em dois canteiros, *S* e S_1, por uma grade, indicada pelo segmento $\overline{BE}$.



Sabendo que $AB = 6$ m, o perímetro do triângulo *ABE* é igual a: alternativa **c**

a) $4 + 10\sqrt{3}$ m.

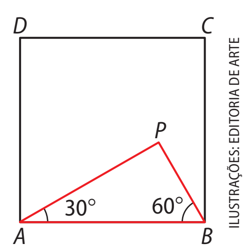
b) $12\sqrt{3}$ m.

c) $6 + 6\sqrt{3}$ m.

d) $14\sqrt{3}$ m.

e) $6 + 10\sqrt{3}$ m.

11. (USCS-SP) Em um cartão quadrado *ABCD*, de área igual a 256 cm², destaca-se uma região triangular *ABP*, conforme mostra a figura.



O perímetro da região delimitada pelo triângulo *ABP* é igual a: alternativa **d**

a) $8(2 + \sqrt{2})$ cm.

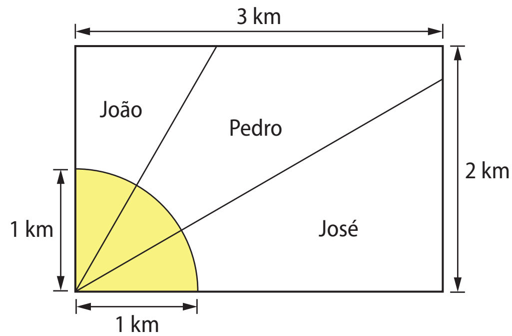
b) $6(3 + \sqrt{3})$ cm.

c) $24\sqrt{3}$ cm.

d) $8(3 + \sqrt{3})$ cm.

e) $32\sqrt{3}$ cm.

12. (Enem/MEC) Ao morrer, o pai de João, Pedro e José deixou como herança um terreno retangular de 3 km × 2 km que contém uma área de extração de ouro delimitada por um quarto de círculo de raio 1 km a partir do canto inferior esquerdo da propriedade. Dado o maior valor da área de extração de ouro, os irmãos acordaram em repartir a propriedade de modo que cada um ficasse com a terça parte da área de extração, conforme mostra a figura.



EDITORIA DE ARTE

Em relação à partilha proposta, constata-se que a porcentagem da área do terreno que coube a João corresponde, aproximadamente, a: alternativa **e**

a) 50% **b)** 43% **c)** 37% **d)** 33% **e)** 19%

PARA REFLETIR

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Neste Capítulo, iniciamos o estudo da Trigonometria no triângulo. Utilizando o modelo matemático de uma rampa, analisamos a sua inclinação e as relações entre as suas medidas para conhecer as ideias de seno, cosseno e tangente, que, em seguida, foram definidas matematicamente. Assim, exploramos os triângulos retângulos para determinar as relações entre as razões trigonométricas.

Nas páginas de abertura, conhecemos um pouco sobre a NBR 9050, norma que regulamenta a construção de rampas para pessoas com mobilidade reduzida. Na **Introdução**, foi apresentado um problema de determinação da altura usando um teodolito mecânico. Depois de ter estudado o conteúdo deste Capítulo, você consegue compreender como as relações trigonométricas auxiliam na medida de distâncias inacessíveis?

Vamos refletir a respeito das aprendizagens do Capítulo **8**: Respostas pessoais.

- Você já conhecia algum conceito de Trigonometria? Se sim, qual?
- Como você descreveria as razões trigonométricas em um triângulo retângulo?
- Dê exemplos de outras situações do dia a dia em que é necessário determinar comprimentos (distâncias ou alturas) inacessíveis ou de difícil medição.
- O trabalho feito com o **GeoGebra** contribuiu para o seu entendimento das razões trigonométricas? Explique.

RESPOSTAS DAS ATIVIDADES

Capítulo 1 – Conjuntos

Atividades

1. **a)** $A = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18\}$
   b) $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$
   c) $C = \{0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49\}$
   d) $D = \{\text{Lua}\}$
   e) $E = \{\text{p, d, r}\}$
2. **a)** V **b)** F **c)** V **d)** V **e)** F **f)** F
   - Respostas possíveis: **b)** $1 \in B$; **e)** $4 \notin B$; **f)** $3 \notin B$
3. **a)** $\{6, 7, 8, 9\}$ **c)** $\{7, 9, 11\}$
   b) $\{4, 6, 8, 10\}$
4. **a)** $\{2, 4, 6\}$; $\{2, 4, 8\}$; $\{2, 6, 8\}$; $\{4, 6, 8\}$
   b) $\{2, 4, 6, 8\}$
5. 1
6. **a)** $\{a, b\}$; $\{a, c\}$; $\{a, d\}$; $\{b, c\}$; $\{b, d\}$; $\{c, d\}$
   b) 6 pares
7. **a)** V **c)** F **e)** V **g)** V
   b) V **d)** F **f)** V **h)** V
8. **a)** $A \subset B$ **c)** $A \subset D$ **e)** $B \subset D$
   b) $A \subset C$ **d)** $B \not\subset C$ **f)** $C \not\subset D$
9. **a)** $A \subset B$ **b)** $A \subset C$ **c)** $B \not\subset C$
10. **a)** V **c)** V **e)** F **g)** F
    b) F **d)** V **f)** V **h)** F
11. Alternativas **a**, **b**, **d**, **e**, **f**, **g** e **h**.
12. Alternativa **d**.
13. 4 conjuntos
14. $A = B = C$
15. **a)** $A \cap B = \{11, 12\}$
    b) $A \cap C = \{12, 14\}$
    c) $B \cup C = \{11, 12, 14, 16, 18\}$
    d) $C \cup D = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 18\}$
    e) $(A \cup B) \cup C = \{0, 11, 12, 13, 14, 16, 18\}$
    f) $(A \cap C) \cap D = \varnothing$
16. **a)** $A - B = \{m\}$
    b) $A - C = \{m, n\}$
    c) $B - C = \{n\}$
    d) $(A \cap B) - C = \{n\}$
    e) $(A - C) \cap (B - C) = \{n\}$
    f) $A - \varnothing = \{m, n, p, q\}$
17. **a)** $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 9\}$
    b) $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$
    c) $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
    d) $B \cap C = \{2, 6\}$
    e) $A \cap B \cap C = \{2\}$
    f) $A - C = \{1, 3, 9\}$
    g) $(A \cap C) - B = \{4\}$
18. **a)** $\{10, 11\}$ **b)** $\{0\}$ **c)** $\varnothing$
19. $\complement_A^E = A - E = \{3, 4, 5\}$
20. **a)** $\complement_U^A = U - A = \{1, 3, 4, 6, 7\}$
    b) $\complement_U^B = U - B = \{0, 2, 4, 6\}$
    c) $\complement_U^E = U - E = \{0, 1, 3, 5, 7\}$
21. **a)** $\{3, 6, 15, 30\}$ **c)** $\{1, 2, 5, 10, 25, 50\}$
    b) $\{0, 4, 8, ...\}$ **d)** $\{0, 35, 70, ...\}$
22. 99 elementos
23. 340 pessoas
24. **a)** 260 estudantes **c)** 470 estudantes
    b) 120 estudantes **d)** 160 estudantes
25. **a)** 36 esportistas **c)** 20 esportistas
    b) 59 esportistas
26. **a)** $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
    b) $C = \{-2, -1, 1, 2, 3\}$
27. Respostas possíveis:
    a) $M = \{x \in \mathbb{N} \mid 6 \leqslant x \leqslant 8\}$
    b) $T = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leqslant -1\}$
28. **a)** $\in$ **b)** $\notin$ **c)** $\in$ **d)** $\notin$ **e)** $\in$ **f)** $\notin$
29. **a)** $A = \{0, 2, 4, ...\}$ **b)** $B = \{0, 1, 4, 9, ...\}$
30. $n(A \cap B) = 5$
31. Sim, são iguais.
32. **a)** $\notin$ **b)** $\in$ **c)** $\notin$ **d)** $\in$
33. **a)** $\frac{32}{99}$ **b)** $\frac{2\,713}{999}$
34. **a)** $A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$
    b) $B = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$
    c) $C = \{1, 2, 3, 6\}$
    d) 6
35. 3, 9, 21, 27, 33, 39, 51, 57, 63 e 69
36. 15 e 16
37. **a)** $M = \left\{\frac{5}{11}\right\}$ **c)** $P = \{-2, 1, 3\}$
    b) $N = \left\{\frac{3}{2}\right\}$ **d)** $S = \{5\}$
38. Alternativa **d**.
39. Alternativa **d**.
40. Alternativa **c**.
41. Alternativa **a**.
42. **a)** $A = \varnothing$
    b) $B = \{-\sqrt{7}, \sqrt{7}\}$
    c) $C = \{1\}$
    d) $D = \{-1, 1\}$
    e) $E = \left\{\frac{3}{28}\right\}$
    f) $F = \{-2, 2\}$
43. **a)** Aproximadamente 1,866.
    b) Aproximadamente 0,616.
44. Respostas possíveis:
    a) $a = \sqrt{2}$ e $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$
    b) $a = \sqrt{2}$ e $b = -\sqrt{2}$
45. Alternativa **b**.
46. **a)** $\{x \in \mathbb{R} \mid 6 \leqslant x \leqslant 10\}$
    b) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leqslant 5\}$
    c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -6 < x < 0\}$
    d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$
    e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$
48. **a)** $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 4\}$
    b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$
    c) $\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{2} < x < 5\}$
    d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \frac{1}{2}\right\}$
49. **a)** $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 5\}$
    b) $\{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x \leqslant 1 \text{ ou } 2 \leqslant x \leqslant 3\}$
    c) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 5\}$
    d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -2\}$
50. **a)** $]-4, -1[$ **b)** $]-2, -1[\cup]2, 4[$
51. Alternativa **b**.

Atividades complementares

1. Alternativa **c**.
2. Alternativa **e**.
3. Alternativa **c**.
4. Alternativa **e**.
5. Alternativa **a**.
6. Alternativa **d**.
7. Alternativa **c**.
8. Alternativa **a**.
9. Alternativa **a**.
10. Alternativa **d**.
11. Alternativa **d**.

Capítulo 2 – Noções de Estatística

Atividades

1. Alternativa **c**.
2. **a)** Quantitativos.
   b) 120; 131; 137; 144; 149; 151; 160; 163; 170; 172; 179; 181; 181; 187; 188; 189; 192; 193; 193; 199; 202; 205; 205; 210; 211; 217; 220; 226; 234; 239
   c) 119 km
   e) Afirmação **III**.
3. Alternativa **d**.
4. **a)** 4%
   b) 60%
   c) O percentual foi próximo de 50%.
5. Alternativa **c**.
6. Alternativa **c**.
7. Gráfico de linha.
8. **a)** Gráfico de barras.
9. **a)** O erro é que a soma dos percentuais resulta em 106% ao invés de 100%.
10. Resposta pessoal.
11. Resposta pessoal.
12. Alternativa **b**.
13. Alternativa **c**.
14. Alternativa **d**.
15. Alternativa **c**.
16. Alternativa **d**.
17. **I)** Verdadeira. **II)** Falsa.
18. Aproximadamente 167,08.
19. 4,5
20. Alternativa **e**.
21. **a)** Aproximadamente 151,3 minutos.
    b) 152,5 minutos
22. **a)** Resposta pessoal.
    b) Resposta pessoal.
23. **a)** A idade mediana aumentou em todas as Unidades da Federação.
    b) Não.
    c) Aumentou 6 anos.
    d) Resposta pessoal.
    e) Resposta pessoal.
24. **a)** $d_{m1} = 4{,}4$; $d_{m2} = 2{,}4$
    b) $V_{a1} = 34{,}8$; $D_{p1} \simeq 5{,}9$; $V_{a2} = 9{,}2$; $D_{p2} \simeq 3{,}03$
    c) O atleta 2 teve uma *performance* mais regular.
25. **a)** $A_1 = 20$; $d_{m1} = 6$; $D_{p1} \simeq 6{,}99$; $A_2 = 23$; $d_{m2} = 8$; $D_{p2} \simeq 8{,}65$
    b) Marca 1.
26. Resposta pessoal.

27. Alternativa **c**.
28. a) Resposta pessoal.
b) Resposta pessoal.
c) Resposta pessoal.
d) Resposta pessoal.
29. Resposta pessoal.
30. b) Mediana: 56 questões; moda: 50 questões.
c) Aproximadamente 30,23%.
e) Resposta pessoal.
31. a) Mais novo: 21 anos; mais velho: 55 anos.
b) Sim.
c) Há mais estudantes entre 46 e 55 anos.
d) O número 37 indica que metade dos estudantes tem idade abaixo de 37 anos; a outra metade, acima de 37 anos.
32. Resposta pessoal.
33. Resposta pessoal.

Atividades complementares

1. Alternativa **d**.
2. Alternativa **e**.
3. Alternativa **a**.
4. Alternativa **b**.
5. Alternativa **b**.
6. 25 mortes
7. Alternativa **b**.
8. a) 13%; 121 alunos
b) $M \simeq 8{,}02$; $Me \simeq 7{,}94$
9. Alternativa **c**.
10. Alternativa **a**.
11. Alternativa **b**.

Capítulo 3 – Introdução às funções e função afim

Atividades

1. a) Variável independente: número de barras de chocolate; variável dependente: preço a ser pago.
b) Variável independente: andar do apartamento em que uma pessoa mora; variável dependente: tempo necessário para o elevador chegar ao apartamento.
2. Alternativa **c**.
3. $P = 6x$; $A = 2x^2$; $d = x\sqrt{5}$
4. $a = 2$; $b = 3$; $y = 2x + 3$
5. a) $p = 300t$ **b)** 1 050 pães
6. a) $\text{Im}(f) = \{-8, -1, 0, 1\}$
b) $\text{Im}(f) = \{2, 3, 4, 5\}$
c) $\text{Im}(f) = \{-3, 0, 1\}$
7. Respostas possíveis:
a) $f(x) = x + 2$ ou $y = x + 2$
b) $h(x) = x^2$ ou $y = x^2$
8. Alternativa **c**.
9. a) $D(h) = \mathbb{R}$
b) $D(j) = \mathbb{R} - \{-1\}$
c) $D(z) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
10. b) $f(x) = 3x$ ou $y = 3x$
c) $D(f) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$; $\text{Im}(f) = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, ...\}$
d) 15 palitos
11. Resposta pessoal.
12. 80 vezes
13. $A(2, 2)$; $B(0, 0)$; $C(5, 0)$; $D(0, 6)$; $E(-3, 0)$; $F(0, -2)$; $G(-2, 4)$; $H(-5, -5)$; $I(5, -3)$; $J(-5, 1)$
14. $a = -\frac{2}{3}$; $b = 5$
15. b) 1 flecha **c)** 500 pontos
16. a) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 3\}$; $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -2 \leq y < 2\}$
b) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 3\}$; $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 3\}$
c) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 4 \text{ e } x \neq 1\}$; $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -2 < y \leq 3\}$
d) $D(f) = \mathbb{R}$; $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$
e) $D(f) = \mathbb{R}$; $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$
f) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$; $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$
17. a) Às 2 h e às 8 h.
b) A temperatura varia de -5 °C a 13 °C.
c) De 0 h às 2 h e de 8 h às 24 h.
18. a) 41 **b)** Resposta pessoal.
19. a) As funções II, III e IV.
b) II: função polinomial do 1º grau; III: função polinomial do 1º grau e função linear; IV: função constante
c) II) $a = -2$ e $b = \sqrt{3}$; III) $a = \frac{2}{3}$ e $b = 0$; IV) $a = 0$ e $b = 0{,}01$
20. a) 8 **b)** $x = \frac{2}{5}$
21. Alternativa **d**.
22. $h(x) = -2x + 6$; $h\left(-\frac{1}{2}\right) = 7$
23. $\frac{9}{2}$
24. a) $y_A = 0{,}30x$ e $y_B = 0{,}25x$
b) Sim; sim.
c) R$ 250,00
25. -8
26. a) $p = 4x + 10$ **d)** 17 m e 22 m
c) Não.
27. Alternativa **e**.
28. a) $d = 80t$ **c)** 8 m; 32 m
b) Sim. **d)** 125 s
29. 6
30. Alternativa **e**.
32. $p = 6$
33. $m = \frac{1}{4}$
34. a) $\frac{4}{3}$ **b)** 0 **c)** -4 **d)** -24
35. a) $f(x) = 45x + 2\,000$
b) R$ 2.450,00
c) 40 unidades
36. $f(x) = -x + 4$ e $g(x) = x$
37. a) $y = 10x + 10$ **c)** Sim.
b) R$ 80.000,00
38. a) Crescente. **d)** Decrescente.
b) Decrescente. **e)** Decrescente.
c) Constante. **f)** Constante.
39. a) A função é decrescente.
b) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$
c) $f(x) = 0$ para $x = 6$; $f(x) > 0$ para $x < 6$; $f(x) < 0$ para $x > 6$
40. b) $x = -1$ **c)** $x > -1$
41. a) $f(x) = 0$ para $x = -5$; $f(x) > 0$ para $x > -5$; $f(x) < 0$ para $x < -5$
b) $y = 0$ para $x = 3$; $y > 0$ para $x < 3$; $y < 0$ para $x > 3$
c) $y = 0$ para $x = 3$; $y > 0$ para $x > 3$; $y < 0$ para $x < 3$
d) $f(x) = 0$ para $x = 4$; $f(x) > 0$ para $x < 4$; $f(x) < 0$ para $x > 4$
42. b) $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$
c) $f(x) = 0$ para $x = -3$; $f(x) > 0$ para $x > -3$; $f(x) < 0$ para $x < -3$
43. a) 1min15s
b) positiva: $1{,}25 < t \leq 5$; negativa: $0 \leq t < 1{,}25$
44. a) $P = 156 - 2{,}5n$ **b)** 15 semanas
45. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1\}$
46. $S = \{0, 1, 2\}$
47. a) $x > 5$ **b)** $x \geq 6$
48. a) 6 **b)** Sim.
49. a) $L_A(x) = 10x - 500$, para $x \geq 0$
b) $x > 75$

Atividades complementares

1. Alternativa **a**.
2. Alternativa **d**.
3. Alternativa **c**.
4. Alternativa **d**.
5. Alternativa **c**.
6. Alternativa **d**.
7. Alternativa **b**.
8. Alternativa **a**.
9. Alternativa **d**.
10. Alternativa **d**.

Capítulo 4 – Função quadrática

Atividades

1. a) 4 **b)** 40 **c)** $\frac{7}{4}$ **d)** $6 - 5\sqrt{2}$
2. 45 metros
3. 1 275
4. a) $L(x) = -x^2 + 400x - 10\,000$
b) R$ 20.000,00
5. $\frac{15}{4}$
7. $m = 4$
8. Alternativa **d**.
9. a) $x' = 1$; $x'' = 5$
b) $x' = 0$; $x'' = \frac{4}{3}$
c) A função não tem zeros.
d) $x' = -3$; $x'' = 3$
e) $x' = x'' = 0$
f) A função não tem zeros.
10. $k = \frac{1}{4}$
11. $a = -1$; $b = 3$
12. a) $m = \pm 4$ **b)** $m = -6$
13. a) $k < 1$ **b)** $k = 1$ **c)** $k > 1$
14. Alternativa **b**.
15. a) $(-1, 0)$ e $(3, 0)$ **c)** $(0, 3)$
b) $(0, -3)$ **d)** $\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$
16. a) 16 m **b)** 76 km/h
17. a) 30 metros **b)** 3,75 metros
18. a) Quando $x = 0$, $y = 6$; vértice: $V\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$; zeros: $x' = 2$ e $x'' = 3$.

b) Quando $x = 0$, $y = 4$; vértice: $V(0, 4)$; zeros: $x' = -2$ e $x'' = 2$.

c) Quando $x = 0$, $y = 4$; vértice: $V(2, 0)$; zero: $x' = x'' = 2$.

d) Quando $x = 0$, $y = 5$; vértice: $V(-1, 4)$; A função não possui zeros.

19. a) $\mathrm{Im}(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -\frac{4}{3}\right\}$

b) $\mathrm{Im}(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 1\}$

20. 200 m^2 **23.** Alternativa **c**.

21. 20 cm **24. b)** 2 500

22. $t = 2$ **25.** Alternativa **e**.

26. a) $f(x) = 0$ para $x = -2$ ou $x = 5$; $f(x) > 0$ para $x < -2$ ou $x > 5$; $f(x) < 0$ para $-2 < x < 5$

b) $f(x) = 0$ para $x = 0$ ou $x = 2$; $f(x) > 0$ para $0 < x < 2$; $f(x) < 0$ para $x < 0$ ou $x > 2$

c) $f(x) = 0$ para $x = \frac{1}{2}$; $f(x) < 0$ para todo x real diferente de $\frac{1}{2}$

d) $f(x) > 0$ para todo x real

27. $\left\{m \in \mathbb{R} \mid m < -\frac{1}{4}\right\}$

28. $\{k \in \mathbb{R} \mid k < 0\}$

29. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 4\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{1}{9} \text{ ou } x \geq 1\right\}$

c) $S = \varnothing$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$

30. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1 \text{ ou } x \geq 7\}$

31. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } x \geq 4\}$

32. a) $S = \left\{t \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{5} \leq t \leq 1\right\}$

b) $\mathrm{Im}(h) =]-\infty, 8{,}45]$

33. a) R$ 220,00

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 10 \leq x \leq 20\}$

34. a) $5 < n < 13$ **b)** $n = 9$; R$ 80,00

35. Alternativa **a**. **36.** Alternativa **e**.

Atividades complementares

1. Alternativa **e**. **9.** Alternativa **d**.
2. Alternativa **b**. **10.** Alternativa **c**.
3. Alternativa **e**. **11.** Alternativa **c**.
4. Alternativa **a**. **12.** Alternativa **d**.
5. Alternativa **b**. **13.** Alternativa **d**.
6. Alternativa **d**. **14.** Alternativa **02**.
7. Alternativa **a**. **15.** Alternativa **d**.
8. Alternativa **e**.

Capítulo 5 – Função exponencial

Atividades

1. a) $\sqrt[4]{5^3}$; 3,344 **d)** $\sqrt[4]{3}$; 1,316

b) $\sqrt{10}$; 3,162 **e)** $\sqrt[4]{\pi}$; 1,331

c) $\sqrt[3]{2}$; 1,260 **f)** $\sqrt{\frac{1}{3}}$; 0,577

2. a) 3^9 **c)** 7^{13} **e)** 10^6
b) x^{12} **d)** 10^7 **f)** a^{2n-1}

3. a) 3^{-2} **c)** 2^{-5} **e)** 2^{-1}
b) 10^{-4} **d)** 6^{-2} **f)** a^{-2}

4. a) 11,180 **d)** 140,296 **g)** 11,665
b) 1,861 **e)** 6,063 **h)** 53,957
c) 2,300 **f)** 1,894

5. a) $2{,}998 \cdot 10^8$ **c)** $1{,}1 \cdot 10^{-4}$
b) $1{,}274 \cdot 10^4$

6. a) $8 \cdot 10^{-2}$ **b)** $4 \cdot 10^9$ **c)** $1{,}2 \cdot 10^{-9}$

7. a) $a = 27$; $b = -8$; $c = \frac{1}{9}$; $d = -\frac{1}{8}$

b) -8; $-\frac{1}{8}$; $\frac{1}{9}$; 27

8. 2^{2011} **10.** 1

9. 64 **11.** $n = 152$

12. a) $\frac{1}{6}$ **b)** 243 **c)** $\frac{1}{4}$ **d)** 49 **e)** $\frac{25}{4}$

13. 25 **15.** $-\frac{1}{3}$ **17.** 10^{-10}

14. 30 **16.** 2^{23} **18.** $\frac{13}{6}$

19. a) Crescente. **c)** Decrescente.
b) Decrescente. **d)** Crescente.

20. a) $D(f) = \mathbb{R}$; $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^*_+$

b) $D(f) = \mathbb{R}$; $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^*_+$

c) $D(f) = \mathbb{R}$; $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^*_+$

d) $D(f) = \mathbb{R}$; $\mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 1\}$

21. b) Sim; $t = 1$ e $t = 2$.

c) Ambas as funções são crescentes.

d) 2 000 bactérias

22. a) Aumentou no intervalo entre 20 °C e 60 °C; diminuiu no intervalo entre 80 °C e 120 °C; manteve-se estável nos intervalos entre 0 °C e 20 °C e entre 60 °C e 80 °C.

b) 400 000 bactérias; 1 600 000 bactérias; 800 000 bactérias; 50 000 bactérias

23. $3 < k < 4$

24. b) Todas as funções são crescentes.

c) $D(f) = \mathbb{R}$ e $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^*_+$; $D(g) = \mathbb{R}$ e $\mathrm{Im}(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 2\}$; $D(h) = \mathbb{R}$ e $\mathrm{Im}(h) = \mathbb{R}^*_+$

d) O gráfico de m equivale ao gráfico de f com um deslocamento de todos os pontos desse gráfico em 2 unidades na vertical para baixo.

e) O gráfico de q equivale ao gráfico de f com um deslocamento de todos os pontos desse gráfico em 2 unidades na horizontal para a esquerda.

25. a) R$ 3,52

b) $f(x) = 1\,000 \cdot (1{,}0035)^x$

c) R$ 1.042,82

26. a) $S = \{6\}$ **e)** $S = \left\{\frac{1}{4}\right\}$

b) $S = \{3\}$ **f)** $S = \{-3\}$

c) $S = \left\{\frac{5}{2}\right\}$ **g)** $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

d) $S = \{5\}$ **h)** $S = \left\{\frac{5}{6}\right\}$

27. a) $x = 2$ **c)** $\nexists\, x \in \mathbb{R} \mid 5^{2x-1} = 0$

b) $x = \frac{1}{2}$ **d)** $x = 0$

28. a) $S = \{4\}$ **c)** $S = \{-1, 4\}$

b) $S = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$ **d)** $S = \left\{-\frac{9}{4}\right\}$

29. 1 **30.** 16 200 bactérias

31. $S = \{4\}$

32. $x = \frac{2}{5}$ **36.** 10 800 anos

33. $S = \left\{\frac{5}{3}\right\}$ **37.** $S = \{-1, 1\}$

34. $S = \{0\}$ **38.** $S = \{0, 1\}$

35. $S = \left\{\frac{10}{13}\right\}$ **39.** $x = 1$

40. $x = 2$ ou $x = 1$

41. Resposta pessoal.

42. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1 \text{ ou } x \geq 2\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{3}{2}\right\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{4}{3}\right\}$

e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{6}{7}\right\}$

f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 3\}$

43. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

44. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$

45. a) $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{1}{2}\right\}$

b) $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 3\}$

46. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 3\}$

47. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{3}{2}\right\}$

48. $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

49. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 1\}$

50. Resposta pessoal.

51. Alternativa **d**.

52. Alternativa **b**. **53.** Alternativa **b**.

Atividades complementares

1. Alternativa **b**. **9.** Alternativa **b**.
2. Alternativa **e**. **10.** Alternativa **d**.
3. Alternativa **04**. **11.** Alternativa **b**.
4. Alternativa **a**. **12.** Alternativa **d**.
5. Alternativa **a**. **13.** Alternativa **b**.
6. Alternativa **a**. **14.** Alternativa **a**.
7. Alternativa **d**. **15.** I, II, IV e V
8. Alternativa **c**. **16.** Alternativa **c**.

17. a) $\beta = -\frac{1}{90}$; $\alpha = 54$ **b)** 360 minutos

18. Alternativa **a**.

19. Alternativa **b**. **20.** Alternativa **b**.

Capítulo 6 – Grandezas e medidas

Atividades

1. Alternativa **b**. **2.** Alternativa **c**.

3. Alternativa **c**.

4. a) Grama (g) e kilograma (kg) – unidades de medida de massa; litro (L) – unidade de medida de volume.

b) Exemplos de resposta: 0,0015 m^3; 1,5 dm^3.

c) Quantidade de ouro: 0,06 kg. A quantidade de minerais (1,5 kg) já está expressa usando uma unidade de base do SI (kg).

5. Alternativa **a**. **6.** Alternativa **c**.

7. Alternativa **b**.

8. a) 1,5 m^2 **c)** $3 \cdot 10^7$ cm^2

b) 5 000 L **d)** $2{,}5 \cdot 10^{-3}$ m^3

9. Alternativa **c**.
10. O comprimento 11,6 cm da caneta tem três algarismos significativos, dois deles são certos, e o outro é duvidoso.
11. Alternativa **a**.
12. Alternativa **c**.
13. Alternativa **b**.
14. 500 m^3
15. Alternativa **c**.
16. Alternativa **e**.
17. Alternativa **e**.
18. Alternativa **a**.
19. Alternativa **a**.
20. Resposta pessoal.
21. Alternativa **a**.
22. Alternativa **b**.
23. Alternativa **e**.
24. 2 400 km^2
25. Alternativa **b**.
26. Alternativa **a**.
27. Alternativa **c**.
28. Alternativa **b**.
29. 40,96 Mbps

Atividades complementares

1. Alternativa **c**.
2. Alternativa **d**.
3. Alternativa **c**.
4. Alternativa **c**.
5. Alternativa **d**.
6. Alternativa **d**.
7. Alternativa **c**.
8. Alternativa **a**.
9. Alternativa **e**.
10. Alternativa **d**.
11. Alternativa **d**.
12. Alternativa **c**.
13. Alternativa **c**.
14. Alternativa **b**.

Capítulo 7 – Proporcionalidade e semelhança

Atividades

1. $\frac{3}{4}$
2. **a)** Sim. **b)** $x = 4{,}5$; $y = 6{,}75$
3. $BC = 128$ m e $AM = 37{,}5$ m
4. $AB = 20$ cm e $CD = 15$ cm
5. **a)** Não.
   b) É preciso saber a medida de $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ ou $\overline{DF}$.
6. 15
7. **a)** Sim. **b)** Sim.
   c) Sim. Resposta possível: $\frac{FH}{30} = \frac{64}{24}$.
8. Aproximadamente 38,28 °C.
9. São semelhantes.
10. 10
11. Alternativa **d**.
12. 4,32 cm
13. 18 m
14. Resposta pessoal.
15. Alternativa **a**.
16. 7 km
17. Alternativa **c**.
18. Alternativa **c**.
19. Alternativa **a**.
20. Alternativa **b**.
21. **b)** 20,5 m
22. Alternativa **c**.
23. Alternativa **c**.
24. 15 cm, 18 cm e 27 cm
25. Alternativa **d**.
26. $m = 4$; $n = 12$; $h = 4\sqrt{3}$; $c = 8\sqrt{3}$
27. 20 m
28. Não, pois faltam dados.
29. Aproximadamente 16 cm.
30. Alternativa **b**.
31. Alternativa **d**.
32. Alternativa **d**.
33. Resposta pessoal.

Atividades complementares

1. Alternativa **d**.
2. Alternativa **b**.
3. Alternativa **b**.
4. Alternativa **a**.
5. Alternativa **b**.
6. Alternativa **d**.
7. Alternativa **a**.
8. Alternativa **a**.
9. Alternativa **e**.
10. Alternativa **a**.
11. Alternativa **a**.

Capítulo 8 – Trigonometria no triângulo retângulo

Atividades

1. **a)** $\text{sen}\ \gamma = \frac{\sqrt{5}}{5}$; $\cos \gamma = \frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\text{tg}\ \gamma = \frac{1}{2}$
   b) $\text{sen}\ \beta = \frac{3}{5}$; $\cos \beta = \frac{4}{5}$; $\text{tg}\ \beta = \frac{3}{4}$
2. **a)** Tangente.
   b) Significa que a razão entre a altura do desnível e o comprimento da projeção da rampa é de $\frac{8}{100}$.
3. 29 m
4. $\text{sen}\ \alpha = \frac{15}{17}$; $\cos \alpha = \frac{8}{17}$; $\text{tg}\ \alpha = \frac{15}{8}$
5. Aproximadamente 66,31 m.
6. Aproximadamente 2,17 km ou 2 170 m.
7. Alternativa **a**.
8. **a)** $\alpha \simeq 51°$ **b)** $\alpha \simeq 19°$ **c)** $\alpha \simeq 63°$
9. **a)** 0,90 **b)** 0,17 **c)** 0,64
10. Alternativa **a**.
11. $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ m
12. Alternativa **b**.
13. O prédio tem 16 metros de altura, e a pessoa se afastou 30 metros.
14. 1 080 m
15. Resposta pessoal.
16. $40\sqrt{3}$ m
17. 1,903 m
18. Aproximadamente 20,7 m.
19. $(6 + 4\sqrt{3})$ m
20. **a)** $4\sqrt{3}$ cm **b)** 45°
21. Alternativa **e**
22. $AD = \sqrt{7}$
23. Alternativa **e**.
24. $12\sqrt{3}$ m
25. Alternativa **c**.
26. $AC = 120$ m
27. Alternativa **b**.
28. Resposta pessoal.

Atividades complementares

1. Alternativa **d**.
2. Alternativa **e**.
3. Alternativa **c**.
4. Alternativa **d**.
5. Alternativa **b**.
6. Alternativa **c**.
7. Alternativa **c**.
8. Alternativa **b**.
9. Alternativa **c**.
10. Alternativa **c**.
11. Alternativa **d**.
12. Alternativa **e**.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS COMENTADAS

ALMEIDA, Lourdes W. de; SILVA, Karina P. da; VERTUAN, Rodolfo Eduardo. **Modelagem matemática na educação básica**. São Paulo: Contexto, 2016.
Essa obra proporciona oportunidades de integração envolvendo atividades normalmente desenvolvidas nas aulas de Matemática e em situações do dia a dia, no que tange a aspectos econômicos, sociais e ambientais.

BARUFI, Maria Cristina B.; LAURO, Maira M. **Funções elementares, equações e inequações**: uma abordagem utilizando microcomputador. 1. ed. São Paulo: CAEM-IME/USP, 2001.
Esse material aborda aspectos sobre o ensino de funções afim e quadrática a partir do uso de *softwares*.

BOYER, Carl B. **História da matemática**. 3. ed. Tradução: Helena de Castro. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.
O livro aborda fatos e estudos da História da Matemática, destacando a fascinante relação da humanidade com números, formas e padrões ao longo do tempo.

BRASIL. **Lei nº 13.415, de 16 de fevereiro de 2017**. Altera as Leis nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, e 11.494, de 20 de junho 2007, que regulamenta o Fundo de Manutenção e Desenvolvimento da Educação Básica e de Valorização dos Profissionais da Educação, a Consolidação das Leis do Trabalho [...]. Brasília, DF: Presidência da República, [2023]. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2015-2018/2017/lei/l13415.htm. Acesso em: 7 out. 2024.
Lei que alterou a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf. Acesso em: 7 out. 2024.
Documento oficial contendo um conjunto de orientações que norteia a (re)elaboração dos currículos de referência das escolas das redes pública e privada de ensino de todo o Brasil. Traz os conhecimentos essenciais, as competências, as habilidades e

as aprendizagens pretendidas para crianças e jovens em cada etapa da Educação Básica.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Currículos e Educação Integral. **Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica**. Brasília, DF: MEC: SEB: Dicei, 2013. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/media/seb/pdf/d_c_n_educacao_basica_nova.pdf. Acesso em: 18 out. 2024.

As Diretrizes Curriculares Nacionais (DCNs) são normas obrigatórias para a Educação Básica que orientaram a elaboração da BNCC. Elas são discutidas, concebidas e fixadas pelo Conselho Nacional de Educação (CNE).

BRASIL. Ministério da Saúde. Secretaria de Atenção à Saúde. Departamento de Atenção Básica. **Guia alimentar para a população brasileira**. 2. ed. Brasília, DF: MS, 2014. Disponível em: https://bvsms.saude.gov.br/bvs/publicacoes/guia_alimentar_populacao_brasileira_2ed.pdf. Acesso em: 7 out. 2024.
Apresenta aspectos sobre os alimentos saudáveis e contribui para a adequação de uma rotina de alimentação saudável.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Temas Contemporâneos Transversais na BNCC**: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília, DF: MEC: SEB, 2019. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/contextualizacao_temas_contemporaneos.pdf. Acesso em: 7 out. 2024.
Documento explicativo sobre os temas transversais a serem abordados na Educação Básica.

CARRANO, Paulo; DAYRELL, Juarez. Juventude e Ensino Médio: quem é este aluno que chega à escola. *In*: DAYRELL, Juarez; CARRANO, Paulo; MAIA, Carla L. **Juventude e Ensino Médio**: sujeitos e currículos em diálogo. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2014. Disponível em: https://educacaointegral.org.br/wp-content/uploads/2015/01/livro-completo_juventude-e-ensino-medio_2014.pdf. Acesso em: 7 out. 2024.
Como o próprio título indica, trata-se de um texto que procura "descrever" o jovem atual.

CARVALHO, João P. de. Um problema de Fibonacci. **Revista do Professor de Matemática (RPM)**, São Paulo, n. 17, [201-]. Disponível em: http://www.rpm.org.br/cdrpm/17/2.htm. Acesso em: 7 out. 2024.
Apresenta uma explicação sobre a história do matemático Leonardo Fibonacci e como ele chegou à sequência de Fibonacci.

COELHO, José Renato P. **O GeoGebra no ensino das funções exponenciais**. 2016. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Laboratório de Ciências Matemáticas, Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campos dos Goytacazes, 2016. Disponível em: https://uenf.br/posgraduacao/matematica/wp-content/uploads/sites/14/2017/09/30052016Jos%C3%A9-Renato-Paveis-Coelho.pdf. Acesso em: 7 out. 2024.
O material explora a utilização do *software* GeoGebra e de planilhas no estudo das funções exponenciais.

COSTA, Antonio Carlos G. da; VIEIRA, Maria A. **Protagonismo juvenil**: adolescência, educação e participação democrática. Salvador: Fundação Odebrecht: FTD, 2000.
O livro apresenta, de forma sistematizada, diversos estudos sobre protagonismo juvenil, com relatos de estudantes que vivenciaram, durante a vida escolar deles, ações protagonistas e os impactos dessa experiência em suas trajetórias acadêmica e profissional.

CRESPO, Antônio A. **Estatística fácil**. 19. ed. São Paulo: Saraiva, 2009.
O livro apresenta conceitos básicos e avançados de Estatística de maneira direta e simplificada, contextualizando com dados e problemas reais. Em todos os tópicos, há problemas e exercícios relacionados aos conceitos recém-apresentados.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Etnomatemática**: elo entre as tradições e a modernidade. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.
O autor, que é um dos precursores da pesquisa em etnomatemática no Brasil, apresenta seus pensamentos sobre a área, definhando esse campo de pesquisa e construindo um histórico da pesquisa etnomatemática no Brasil e no exterior. Nesse contexto, o autor discute também o conceito de cultura, que está intimamente relacionado ao conceito de etnomatemática. Ao longo de toda a obra, há discussões sobre a importância e a relevância desses estudos para a sala de aula.

DOMINGUES, Hygino H.; IEZZI, Gelson. **Álgebra moderna**. 4. ed. reimp. São Paulo: Atual, 2003.
Essa obra apresenta conceitos matemáticos, como conjuntos, funções, entre outros, destacando demonstrações e a importância de uma linguagem formal na escrita matemática.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.
O livro aborda vários fatos e estudos da Matemática organizados de forma cronológica.

FAZENDA, Ivani C. A. **Interdisciplinaridade**: história, teoria e pesquisa. 18. ed. Campinas: Papirus, 2012. (Coleção Magistério: Formação e Trabalho Pedagógico).
Essa obra propõe reflexões sobre a construção de um saber mais integrado e livre, destacando a integração de diferentes áreas de conhecimento, permeando o processo de ensino e aprendizagem.

GOWERS, Timothy. **Matemática**: uma breve introdução. Lisboa: Gradiva, 2008.
O autor Timothy Gowers é professor de Matemática na Universidade de Cambrigde e ganhador da medalha Fields, que equivale ao prêmio Nobel para a área da Matemática. Nessa obra, ele explica, de maneira simples, as diferenças fundamentais entre a Matemática escolar e a Matemática acadêmica. Ele também aborda questões filosóficas sobre a natureza dos conhecimentos matemáticos historicamente construídos pela humanidade, proporcionando uma compreensão de conceitos abstratos de modo intuitivo, como números complexos e infinito. Pare ler esse livro, é necessário apenas o conhecimento da Matemática escolar.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Censo demográfico 2022**: população e domicílios: primeiros resultados. Rio de Janeiro: IBGE, 2023. Disponível em: https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv102011.pdf. Acesso em: 21 out. 2024.
Documento que apresenta os primeiros resultados de população e domicílios referentes ao Censo 2022.

KENSKI, Vani M. **Educação e tecnologias**: o novo ritmo da informação. 8. ed. Campinas: Papirus, 2012. (Coleção Papirus Educação).
Essa obra busca refletir sobre as relações entre educação e tecnologias, evitando jargões, teorias e abordagens específicas desses campos de conhecimento, de modo que as discussões propostas sejam mais acessíveis a todos.

LIMA, Elon L. *et al*. **A matemática do Ensino Médio**. 11. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016. (Coleção Professor de Matemática, 1 v.).
Livro que aborda conceitos matemáticos desenvolvidos no Ensino Médio, destacando demonstrações e atividades de aprofundamento.

LOPES, Celi E.; NACARATO, Adair M. (org.). **Escritas e leituras na educação matemática**. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.
Livro que traz um compilado de artigos discutindo perspectivas consideradas fundamentais no ensino de Matemática, que deve focalizar os saberes do estudante, incentivando a criação dos próprios procedimentos e o desenvolvimento do raciocínio e da criatividade, priorizando a aquisição e a comunicação em linguagem matemática.

MACHADO, Nilson José. **Epistemologia e didática**: as concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente. 6. ed. São Paulo: Cortez, 2005.
Essa obra apresenta reflexões que buscam articular questões epistemológicas e ações docentes, bem como analisar formas usuais do trabalho escolar propondo alternativas didáticas.

MELO, Marcela Camila P. de; JUSTULIN, Andresa Maria. A resolução de problemas: uma metodologia ativa na construção do conceito de semelhança de triângulos. *In*: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 15., 2019, Londrina. **Anais** [...]. Londrina: Sociedade Brasileira de Educação Matemática – Regional Paraná, 2019. Disponível em: http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/EPREM/XV_EPREM/paper/viewFile/1019/881. Acesso em: 7 out. 2024.
Apresentação teórica e prática da metodologia de resolução de problemas.

MONTEIRO, Martha S.; CERRI, Cristina. **História dos números complexos**. São Paulo: Centro de Aperfeiçoamento de Ensino de Matemática: Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 2001. Disponível em: https://www.ime.usp.br/~martha/caem/complexos.pdf. Acesso em: 7 out. 2024.
Apresenta informações sobre o desenvolvimento dos números complexos ao longo da história.

MORGADO, Augusto César. **Matemática discreta**. Rio de Janeiro: SBM, 2015.
O livro apresenta tópicos sobre números naturais, progressões, análise combinatória, probabilidade, médias e princípio das gavetas. Ele também tem um capítulo sobre Matemática financeira, no qual explica como funciona os dois tipos de sistemas de amortização utilizados nos financiamentos em geral.

ORGANIZAÇÃO DAS NAÇÕES UNIDAS PARA A EDUCAÇÃO, A CIÊNCIA E A CULTURA. **Declaração Mundial sobre Educação para Todos**: satisfação das necessidades básicas de aprendizagem, Jomtien, 1990. Brasília, DF: Unesco, 1990. Disponível em: https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000086291_por. Acesso em: 7 out. 2024.
Documento importante para conhecimento do professor e que foi um dos suportes para a elaboração da BNCC.

PASQUAL JÚNIOR, Paulo Antonio. **Pensamento computacional e tecnologias**: reflexões sobre a educação no século XXI. Caxias do Sul: Educs, 2020.
Mostra os preceitos básicos do pensamento computacional como uma série de ferramentas mentais para a decomposição do problema e para o reconhecimento de padrões, de abstração e de algoritmo de resolução em um contexto de aprendizagem ativa, na qual o sujeito aprenderá por meio de ações próprias. Dessa forma, discute-se o desenvolvimento computacional na educação à luz das metodologias ativas de aprendizagem.

PATERLINI, Roberto R. Técnicas de máximos e de mínimos. **Revista do Professor de Matemática (RPM)**, São Paulo, n. 35, [201-]. Disponível em: http://www.rpm.org.br/cdrpm/35/6.htm. Acesso em: 7 out. 2024.
Artigo no qual são investigadas situações-problema por meio de diferentes técnicas para se encontrar os valores de máximo ou de mínimo da função.

POMMER, Wagner M. O número de Euler: possíveis abordagens no ensino básico. **Nilson José Machado**, São Paulo, 2010. Seminário sobre Ensino de Matemática apresentado no Programa de pós-graduação da Faculdade de Educação da USP (Feusp). Disponível em: https://www.nilsonjosemachado.net/sema20100831.pdf. Acesso em: 7 out. 2024.
Esse material apresenta aspectos históricos sobre o número de Euler que contribuem para ampliar o estudo sobre o tema.

PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.
Nessa obra, são apresentadas algumas vantagens em se trabalhar com investigações matemáticas em sala de aula, destacando o estabelecimento de conjecturas, reflexões e formalização do conhecimento matemático pelos estudantes.

PORTAL DA OBMEP. Rio de Janeiro, c2024. *Site*. Disponível em: https://portaldaobmep.impa.br/. Acesso em: 7 out. 2024.
Portal que disponibiliza materiais teóricos, videoaulas e atividades interativas sobre Matemática na Educação Básica.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.
Esse é o primeiro livro de história da Matemática publicado no Brasil, escrito por uma autora que apresenta um olhar crítico de como a história da matemática tem sido contada ao longo do tempo.

SKOVSMOSE, Ole. **Educação matemática crítica**: a questão da democracia. Tradução: Abgail Lins e Jussara de Loiola Araújo. 6. ed. Campinas: Papirus, 2013. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).
Nesse livro, as discussões destacam a importância da perspectiva democrática na educação matemática e seu caráter emancipatório, enfatizando o papel da modelagem na educação matemática.

SOARES, Evanildo C. **Uma investigação histórica sobre os logaritmos com sugestões didáticas para a sala de aula**. 2011. Dissertação (Mestrado em Ciências Naturais e Matemática) – Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2011. Disponível em: https://repositorio.ufrn.br/bitstream/123456789/16070/1/EvanildoCS_DISSERT.pdf. Acesso em: 7 out. 2024.
Explora o trabalho com logaritmos em situações de sala de aula, considerando uma perspectiva histórica.

WAGNER, Eduardo. Por que as antenas são parabólicas? **Revista do Professor de Matemática (RPM)**, São Paulo, n. 33, [201-]. Disponível em: http://rpm.org.br/cdrpm/33/3.htm. Acesso em: 7 out. 2024.
Artigo que apresenta uma reflexão sobre a forma parabólica das antenas.

ZABALA, Antoni; ARNAU, Laia. **Como aprender e ensinar competências**. Tradução: Carlos Henrique Lucas Lima. Porto Alegre: Artmed, 2010.
Uma obra que apresenta um novo enfoque no ensino e na aprendizagem de competências, priorizando as capacidades cognitivas, em relação à aquisição de conhecimento.

SIGLAS DOS EXAMES OFICIAIS

Acafe-SC: Associação Catarinense das Fundações Educacionais
AFA-SP: Academia da Força Aérea
Cefet-MG: Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
Cefet-RJ: Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca
Cesgranrio-RJ: Centro de Seleção de Candidatos ao Ensino Superior do Grande Rio
Ciaar: Centro de Instrução e Adaptação da Aeronáutica
CMRJ: Colégio Militar do Rio de Janeiro
Comvest: Comissão Permanente para os Vestibulares
Eear-SP: Escola de Especialistas da Aeronáutica
Encceja/MEC: Exame Nacional para Certificação de Competências de Jovens e Adultos
Enem/MEC: Exame Nacional do Ensino Médio
Epcar-MG: Escola Preparatória de Cadetes do Ar
EsPCEx-SP: Escola Preparatória de Cadetes do Exército
ESPM-SP: Escola Superior de Propaganda e *Marketing*
Etec-SP: Escola Técnica Estadual
Fatec-SP: Faculdade de Tecnologia
FCC: Fundação Carlos Chagas
FEI-SP: Centro Universitário FEI
FGV-SP: Fundação Getulio Vargas
Fuvest-SP: Fundação Universitária para o Vestibular
Ifal: Instituto Federal de Alagoas
IFCE: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará
IFMS: Instituto Federal de Mato Grosso do Sul
IFPE: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Pernambuco
IFPI: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí
IFPR: Instituto Federal do Paraná
IFRS: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul
IFS-SE: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Sergipe
IFSC: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Santa Catarina
IFSP: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
ITA-SP: Instituto Tecnológico de Aeronáutica
Mack-SP: Universidade Presbiteriana Mackenzie
OBMEP: Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
PUCCamp-SP: Pontifícia Universidade Católica de Campinas
PUC-MG: Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
PUC-RJ: Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
PUC-RS: Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul
PUC-SP: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Saresp-SP: Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo
Udesc: Universidade do Estado de Santa Catarina
UEA-AM: Universidade do Estado do Amazonas
UECE: Universidade Estadual do Ceará
UEG-GO: Universidade Estadual de Goiás
UEL-PR: Universidade Estadual de Londrina
UEMA: Universidade Estadual do Maranhão
UEPB: Universidade Estadual da Paraíba
UERJ: Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Uespi: Universidade Estadual do Piauí
UFAL: Universidade Federal de Alagoas
UFAM: Universidade Federal do Amazonas
UFC-CE: Universidade Federal do Ceará
UFF-RJ: Universidade Federal Fluminense
UFG-GO: Universidade Federal de Goiás
UFJF-MG: Universidade Federal de Juiz de Fora
UFMG: Universidade Federal de Minas Gerais
UFMS: Universidade Federal do Mato Grosso do Sul
Ufop-MG: Universidade Federal de Ouro Preto
UFPel-RS: Universidade Federal de Pelotas
UFPB: Universidade Federal da Paraíba
UFPI: Universidade Federal do Piauí
UFPR: Universidade Federal do Paraná
UFRGS-RS: Universidade Federal do Rio Grande do Sul
UFRJ: Universidade Federal do Rio de Janeiro
UFRN: Universidade Federal do Rio Grande do Norte
UFS-SE: Universidade Federal de Sergipe
UFSC: Universidade Federal de Santa Catarina
UFSM-RS: Universidade Federal de Santa Maria
UFT-TO: Universidade Federal do Tocantins
UFU-MG: Universidade Federal de Uberlândia
UFV-MG: Universidade Federal de Viçosa
UnB-DF: Universidade de Brasília
Uneb-BA: Universidade do Estado da Bahia
Unemat-MT: Universidade do Estado de Mato Grosso Carlos Alberto Reyes Maldonado
Unicamp-SP: Universidade Estadual de Campinas
Unichristus: Centro Universitário Christus
Unifei-MG: Universidade Federal de Itajubá
Unifesp-SP: Universidade Federal de São Paulo
Unifor-CE: Universidade de Fortaleza
Unimontes-MG: Universidade Estadual de Montes Claros
Unitau-SP: Universidade de Taubaté
UPF-RS: Universidade de Passo Fundo
USCS-SP: Universidade Municipal de São Caetano do Sul
UTFPR: Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Vunesp-SP: Fundação para o Vestibular da Universidade Estadual Paulista

ORIENTAÇÕES PARA O PROFESSOR

Caro professor,

Atualmente, o ensino de Matemática, assim como o de outras áreas do conhecimento, está pautado pelas indicações presentes nos documentos oficiais do governo, principalmente na Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

As perspectivas desse trabalho estão voltadas para atender aos estudantes do século XXI, reconhecendo que "as rápidas transformações na dinâmica social contemporânea nacional e internacional, em grande parte decorrentes do desenvolvimento tecnológico, atingem diretamente as populações jovens e, portanto, suas demandas de formação"[1].

Diante desse cenário, ensinar Matemática hoje significa desenvolver nos estudantes competências e habilidades apoiadas em noções, conceitos e métodos matemáticos que lhes possibilitem empregar estratégias próprias e criar soluções por meio da observação, da análise, do estabelecimento de conexões e do levantamento de conjecturas, percebendo e expressando regularidades.

Promover tais ações nos estudantes requer que você, professor, tenha domínio dos conteúdos da área, identifique as dificuldades de aprendizagem deles e, com o apoio de estudos da Educação Matemática, ajude-os a superá-las, favorecendo a autonomia e a cooperação em sala de aula.

Cientes disso, e com a intenção de contribuir para o trabalho docente, elaboramos estas **Orientações para o professor**, nas quais, além das discussões sobre os conteúdos e os métodos de ensino, procuramos fornecer subsídios para o seu trabalho como professor, por meio de comentários a respeito das seções e dos conteúdos abordados e de sugestões de leituras complementares, a fim de colaborar para a sua formação.

Na parte específica de cada volume, oferecemos observações e sugestões que visam enriquecer os temas abordados nos capítulos, tanto no aspecto teórico quanto no metodológico. Além disso, apresentamos as respostas e as resoluções das atividades, proporcionando uma compreensão mais completa dos conteúdos.

Para finalizar, desejamos a você muito sucesso em seu trabalho e esperamos que estas orientações possam ajudar a aprimorar sua prática pedagógica.

Os autores.

[1] BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. Brasília, DF: MEC, 2018. p. 462. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 11 set. 2024.

SUMÁRIO

PARTE GERAL

PARTE ESPECÍFICA

Estrutura da obra

Esta Coleção é formada por três volumes, um para cada série do Ensino Médio, sendo cada um constituído por um conjunto de objetos de conhecimento que estão integrados na própria Matemática. Além disso, apresentam também situações cuja contextualização evidencia modelos matemáticos que representam fatos e fenômenos de outras áreas de conhecimento que estão presentes no cotidiano, em especial a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

Ela foi elaborada tendo em vista atender à BNCC, contemplando propostas de trabalho que promovam o desenvolvimento das competências gerais e específicas e das habilidades presentes nesse documento, sem, no entanto, deixar de lado suas características essenciais de atendimento às expectativas de professores e estudantes do Ensino Médio.

Tal estruturação pode ser observada em todos os volumes da Coleção, uma vez que essas integrações são ressaltadas em várias das seções que compõem os capítulos – **Abertura**, **Conexões com...** e **História da Matemática**. Há também destaques sobre alguns aspectos do conhecimento matemático, que embasam reflexões sobre temas transversais e pontos curiosos de sua presença na vida e no desenvolvimento humano, apontados nos boxes **Fórum**, **Saiba que**... e **Pense e responda**. Essas seções e esses boxes possibilitam ao professor uma exploração mais dinâmica do material, podendo indicar aos estudantes por qual das propostas iniciar o trabalho.

Cada um dos livros que compõem esta Coleção está estruturado da forma descrita a seguir.

A proposta da **Abertura** de capítulo é apresentar uma contextualização de aplicação do conteúdo que será abordado. Considerando a diversidade possível de uso dos conteúdos matemáticos, ora são apresentadas situações atuais, ora situações que envolvem a história da Matemática ou que tratam de alguma profissão, porém sempre tendo em vista o estabelecimento de uma relação entre o que está sendo apresentado e os conteúdos a serem desenvolvidos no capítulo. O professor poderá usá-la para um levantamento diagnóstico dos conhecimentos prévios que os estudantes já possuem sobre o conteúdo a ser desenvolvido.

A seção **Atividades resolvidas** tem por princípio a apresentação de uma forma organizada de resolução e de emprego da linguagem matemática. Um aspecto dessa seção a ser considerado e analisado tanto pelos professores como pelos estudantes é que há situações nas quais diferentes caminhos são discutidos para se chegar à solução de uma questão, destacando-se, assim, o fato de que não há um modo único de resolução em Matemática e de que, portanto, os estudantes têm liberdade para criar estratégias próprias de resolução.

Com as **Atividades**, busca-se a familiarização dos estudantes com os conteúdos estudados no capítulo, tanto com relação a problemas envolvendo diferentes contextos do dia a dia quanto com questões específicas para a sistematização de procedimentos necessários para utilização desses conhecimentos em diferentes situações. Estão presentes nessa seção questões do Enem e de vestibulares de instituições de Ensino Superior de todas as regiões do país, questões de olimpíadas nacionais e questões elaboradas pelos autores, para que os estudantes tenham maiores oportunidades de desenvolvimento das competências e habilidades abordadas em cada capítulo.

A seção **Conexões com...** explora temas diversos, com foco na interdisciplinaridade e com o propósito de desenvolver a competência leitora, a cidadania e o senso crítico dos estudantes. A seção apresenta um texto seguido de algumas questões que relacionam a Matemática com temas do cotidiano, explorando gráficos, infográficos, tabelas etc. que se conectem com o conteúdo tratado no capítulo. As questões apresentadas nessa seção são principalmente voltadas a atividades investigativas a serem realizadas em duplas ou em grupos colaborativos e vão exigir processos reflexivos e/ou tomadas de decisão sobre intervenções na comunidade. Outro aspecto importante dessa seção é o fato de, em muitas propostas, os estudantes serem convidados a apresentar suas produções à comunidade escolar, o que possibilita o desenvolvimento de sua comunicação matemática.

A seção **História da Matemática** aborda fatos históricos ligados à Matemática, a fim de contextualizar o conteúdo abordado no capítulo e/ou apresentar o desenvolvimento e a evolução de determinada ideia ou teoria ao longo do tempo. A abordagem histórica é sempre um modo interessante de motivar os estudantes para as possibilidades de criação em Matemática e de destacar aspectos referentes à observação, à análise e à percepção de regularidades que estão por trás dessas descobertas.

Explorando a tecnologia é uma seção que promove o desenvolvimento e/ou o aprofundamento de conhecimentos matemáticos por meio da exploração de *softwares* livres, propiciando um trabalho interativo com alternativas para investigar possibilidades de resolução e para analisar consequências em uma representação ao se fazerem modificações em outra, por exemplo. Para esse trabalho, há orientações iniciais de como utilizar o *software* indicado para cada situação, além da indicação do endereço para o *download* e de orientações para sua instalação. O pensamento computacional também poderá ser desenvolvido por meio de atividades chamadas de desplugadas, isto é, que não dependem do uso do computador, as quais colocam em evidência o emprego da lógica de programação.

A seção **Atividades complementares** tem por objetivo apresentar questões presentes em exames oficiais, como Enem, olimpíadas nacionais e vestibulares realizados em todas as regiões brasileiras, priorizando-se os mais recentes. Sua presença no livro e as possíveis discussões a serem realizadas pelos professores a partir delas apontam para a necessidade da sistematização de alguns aspectos e procedimentos abordados no capítulo.

Com a seção **Para refletir**, os estudantes são incentivados a realizar reflexões a fim de identificar possíveis conexões com o que foi estudado no capítulo e de avaliar sua aprendizagem com relação às ações desenvolvidas no decorrer do trabalho. É uma ótima oportunidade para a realização da autoavaliação pelos estudantes.

Além dessas seções, os volumes apresentam também boxes que enriquecem as propostas apresentadas e ampliam as possibilidades de desenvolvimento das competências gerais da BNCC.

No boxe **Fórum**, é apresentada uma situação referente a algum tema contemporâneo que tenha relação com o conteúdo abordado no capítulo. Em seguida, são propostas algumas questões, com o intuito de promover debates e/ou trocas e compartilhamento de conhecimentos. Tais ações exigem a mobilização de estratégias de debate e de construção de argumentação coerente para defesa do ponto de vista. Além disso, há a possibilidade de esse boxe ser utilizado em momentos *on-line*, por meio de grupos fechados de discussão em *e-mail*, rede social ou aplicativos de troca de mensagens.

O **Pense e responda** é um boxe que traz perguntas curtas e diretas sobre propostas a serem investigadas pelos estudantes, incentivando-os a elaborar hipóteses e buscar sua comprovação ou negação.

O boxe **Saiba que...** tem como função principal fornecer uma dica interessante ou uma informação relevante a respeito do conteúdo. Pode ser referente à teoria apresentada ou a uma determinada forma de resolução de um problema e pode ser utilizado para implementar o conteúdo apresentado.

Nos boxes **Para ler**, **Para assistir**, **Para acessar** e **Para ouvir**, como o próprio nome indica, são fornecidas sugestões de livros, *links*, filmes, *podcasts* etc. Sua finalidade é fornecer um canal confiável com informações complementares a respeito do tópico em estudo.

Pressupostos teóricos e metodológicos

Os pressupostos teóricos e metodológicos que fundamentam esta Coleção foram cuidadosamente construídos com base nas pesquisas mais recentes em Educação Matemática e nas orientações oficiais do Ministério da Educação (MEC), especialmente a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Esta Coleção proporciona oportunidades para o planejamento de aulas baseadas em metodologias ativas que promovem o protagonismo dos estudantes no processo de aprendizagem, aliadas ao uso pedagógico de tecnologias digitais e ao pensamento computacional. O pluralismo de ideias é aspecto central, criando um ambiente que valoriza a diversidade cultural e promove a cultura de paz e o respeito às diferenças.

Além disso, no decorrer dos volumes, é possível encontrar abordagens relacionadas aos Temas Contemporâneos Transversais conectados aos conteúdos matemáticos. Também são consideradas as exigências de avaliações externas, como o Enem e os vestibulares, de modo a preparar os estudantes para esses desafios com uma visão crítica e contextualizada.

A Coleção busca não apenas ensinar Matemática de maneira formal, mas também contribuir para a formação de uma visão interdisciplinar e integradora. Para isso, sempre que possível, apresenta a Matemática de forma integrada com as outras áreas do conhecimento, em específico, com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. A obra incentiva o uso do raciocínio lógico e do pensamento crítico em conjunto com a compreensão de questões sociais e ambientais que afetam a vida cotidiana. A construção de conhecimentos é realizada de forma colaborativa e reflexiva, sempre com ênfase no desenvolvimento da autonomia intelectual e emocional dos estudantes e na promoção de uma cidadania ativa e ética.

Objetivos da obra

- Incentivar discussões justas e respeitosas, a fim de promover a socialização de ideias, a prática colaborativa e o respeito ao outro e às diferenças.
- Refletir sobre aspectos relacionados à saúde física e emocional, como prática de esportes, conhecimento dos nutrientes presentes nos alimentos, formas de prevenção e de controle de doenças, entre outros, de modo a promover a tomada de decisões conscientes e responsáveis com base na análise de dados.
- Refletir, discutir e argumentar sobre questões relacionadas à necessidade de conservação do meio ambiente, tais como desmatamento, efeito estufa, urbanização e gestão de resíduos, utilizando, para isso, a interpretação de dados e o conhecimento científico.
- Compreender e fazer uso da linguagem matemática e de suas diferentes representações (simbólica, algébrica e gráfica), ampliando as possibilidades de se comunicar, ler e interpretar o mundo.
- Apropriar-se de diferentes tipos de raciocínio lógico-matemático (indução, dedução e raciocínio por analogia) para solucionar problemas, comunicar-se (oralmente e por escrito), argumentar e inferir.
- Compreender e analisar a produção e a circulação de textos de divulgação científica e de mídias sociais, considerando os elementos que constituem esses textos (em termos de gêneros discursivos) e os procedimentos de leitura multimodal e inferencial.
- Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para compreender, analisar e propor soluções para situações do cotidiano e demandas econômicas do dia a dia, incluindo temas como inflação, juros, orçamento, financiamento e empréstimo, refletindo sobre questões sociais relacionadas ao uso do dinheiro e a alternativas, como o uso de planilhas eletrônicas, que possibilitem controlar gastos e poupar.
- Apropriar-se da linguagem e dos conceitos de conjuntos, suas propriedades e as operações que podem ser feitas nessa estrutura, a fim de fazer uso desse conhecimento nos diversos campos da Matemática e no cotidiano.
- Ser capaz de aplicar o conceito de função na modelagem de situações em diversos contextos e identificar momentos em que a tecnologia pode ser uma aliada nesse processo, solucionando problemas que envolvam funções afins, funções quadráticas, funções exponenciais, funções logarítmicas, funções definidas por mais de uma sentença e funções trigonométricas.
- Ser capaz de identificar e aplicar o conceito de sequências em diferentes contextos da Matemática e do cotidiano, identificando padrões e regularidades em experimentações, com ou sem uso de tecnologia, propondo conjecturas e generalizações.
- Diferenciar demonstrações matemáticas de experimentações empíricas (visualização de desenhos, construção de modelos materiais, medições de grandezas, entre outros), identificando hipótese e tese em propriedades e teoremas matemáticos, compreendendo sua demonstração e validando seus resultados pelo método dedutivo.
- Apropriar-se do conceito de matrizes, suas principais aplicações em diferentes áreas de conhecimento e em situações do cotidiano, suas propriedades e das operações que podem ser realizadas com esse tipo de representação.
- Consolidar a noção de sistemas de equações lineares para interpretar, modelar e resolver situações em diversos contextos e identificar momentos em que a tecnologia pode ser uma aliada nesse processo.
- Investigar e registrar, por meio de fluxograma, quando possível, o algoritmo que resolve um problema, utilizando conceitos iniciais de linguagem de programação escritos em linguagem corrente e/ou matemática.
- Analisar e compreender problemas e demandas do cotidiano para refletir e propor ações e soluções que utilizem conceitos como perímetro, área, volume, massa, capacidade, entre outras grandezas.
- Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras. Compreender e utilizar as unidades de medida dessas diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), e expressar, quando necessário, medidas em notação científica, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro.
- Utilizar representações que possibilitem a aplicação de relações métricas e trigonométricas na resolução de problemas, consolidando as noções de congruência e de semelhança de polígonos.
- Apropriar-se do conceito de transformações geométricas e das propriedades relacionadas a essas transformações para analisar elementos da natureza e de diferentes produções humanas, bem como construir figuras e modelos geométricos que possibilitem compreender e solucionar problemas do dia a dia.

- Refletir e debater sobre questões relacionadas aos resultados de pesquisas estatísticas divulgadas pela mídia, assim como elaborar e executar essas pesquisas para investigar questões e problemas do mundo contemporâneo, comunicando os resultados por meio de relatórios contendo gráficos adequados e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão, utilizando ou não recursos tecnológicos.
- Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvam a contagem de possibilidades e o cálculo de probabilidades.
- Identificar fenômenos e experimentos aleatórios e recorrer a análises probabilísticas para tomar decisões conscientes e responsáveis.

A etapa do Ensino Médio

O Ensino Médio tem passado por mudanças nos últimos anos. Novas ideias, discussões e propostas circulam constantemente nas comunidades escolares e nos órgãos voltados à Educação.

Essa etapa tem grande importância para a formação dos jovens e, consequentemente, para o futuro do país, por isso o interesse em investir em reformas que permitam construir o Ensino Médio desejado.

Espera-se que o Ensino Médio faça, de maneira competente, a articulação entre o Ensino Fundamental e o Ensino Superior/vida profissional, para que os estudantes possam consolidar, ampliar e utilizar as competências e habilidades desenvolvidas na etapa anterior, chegando à vida adulta, pessoal e profissional, com as capacidades e qualidades necessárias.

Espera-se também que, durante o Ensino Médio, os estudantes cultivem e aprimorem habilidades sociais, morais e emocionais para as etapas seguintes da vida, como respeito, cooperação, tolerância, equilíbrio emocional e resiliência.

Com base nessas expectativas, importantes mudanças aconteceram nos últimos anos. A carga horária foi ajustada, e a organização curricular sofreu alterações. Para garantir as aprendizagens desejadas em todo o território nacional, foi proposta a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que norteia não apenas a etapa do Ensino Médio, mas toda a Educação Básica.

Com novos direcionamentos, ficou estabelecida a etapa do Ensino Médio composta pela formação geral básica, com carga horária mínima de 2 400 horas, e pelos itinerários formativos, com carga horária mínima de 600 horas.

A formação geral básica consiste no ensino obrigatório das áreas apresentadas na BNCC e dos respectivos componentes curriculares.

- Linguagens e suas Tecnologias: Artes, Educação Física, Língua Inglesa e Língua Portuguesa
- Matemática e suas Tecnologias: Matemática
- Ciências da Natureza e suas Tecnologias: Biologia, Física e Química
- Ciências Humanas e Sociais Aplicadas: História, Geografia, Sociologia e Filosofia

Os itinerários formativos correspondem à parte flexível do currículo, e cada estudante pode escolhê-los de acordo com seus interesses, dentro das quatro áreas do conhecimento da BNCC.

Cabe ao Conselho Nacional de Educação, em conjunto com os sistemas de ensino, estabelecer diretrizes nacionais contendo orientações e objetivos de aprendizagem, que devem ser contemplados nos itinerários. Além disso, também fica estabelecido que cada instituição de ensino deverá ofertar, pelo menos, dois itinerários.

Tomando por base as competências e habilidades apresentadas pela BNCC, que garantem as aprendizagens essenciais para esta etapa da Educação Básica, cabe aos sistemas de ensino e às escolas construir seus norteadores curriculares. Nesse sentido, cada sistema de ensino vem, desde 2019, (re)elaborando seus currículos estaduais, considerando não apenas os documentos normativos, como a BNCC e as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCNs), mas também as características e as necessidades regionais, suas culturas locais e os anseios dos estudantes.

Os referenciais curriculares devem servir de base para que as unidades escolares, em conjunto com seus professores, desenhem seus planejamentos curriculares e definam as estratégias pedagógicas e metodológicas que serão adotadas, bem como a forma como os materiais didáticos disponíveis podem ser utilizados para atender aos objetivos a serem atingidos.

As mudanças descritas começaram a ser implantadas, de maneira gradual, a partir de 2025. Educadores e autoridades da Educação prosseguem avaliando o processo, buscando corrigir rumos e aprimorar propostas que foram assertivas. Assim, o Ensino Médio que todos desejamos ainda está em construção.

A BNCC

Os desafios impostos à educação escolar de um público múltiplo e dinâmico inserido em uma efervescência de desenvolvimento em todas as áreas, provocada principalmente pelo avanço tecnológico, exigem um novo olhar e um posicionamento sobre a abordagem que deve ser dada ao conhecimento a ser construído e à constituição de um sujeito consciente de toda a contribuição que ele pode dar ao mundo de modo geral.

Para que essa **formação integral** seja possível, estudos em Educação e construções curriculares de diferentes países têm indicado que o ensino precisa estar orientado ao desenvolvimento de competências e habilidades.

A BNCC também apresenta tal posicionamento e, diante do fato de que diferentes significados têm sido atribuídos ao termo **competência**, ela apresenta a definição que adota:

> [...] **competência** é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho.[2]

No que tange ao termo **habilidade**, o documento também especifica:

> As **habilidades** expressam as aprendizagens essenciais que devem ser asseguradas aos alunos nos diferentes contextos escolares.[3]

Em outro trecho, esse documento destaca que o desenvolvimento de competências exige que

> [...] as decisões pedagógicas devem estar orientadas para o desenvolvimento de competências. Por meio da indicação clara do que os alunos devem "saber" (considerando a constituição de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores) e, sobretudo, do que devem "saber fazer" (considerando a mobilização desses conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho) [...][4]

Dessa forma, a BNCC delega à escola uma função social urgente, tendo em vista o mundo globalizado e a consequente necessidade de pessoas que "saibam fazer" e que tenham a capacidade de planejar e resolver problemas, que saibam ler o mundo por meio de palavras, imagens, fatos, números, códigos e outras linguagens, usando esses recursos para saber agir e conviver.

As **competências gerais** apresentadas pela BNCC têm o propósito do desenvolvimento integral do estudante:

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

[2] BRASIL, ref. 1, p. 8.
[3] BRASIL, ref. 1, p. 29.
[4] BRASIL, ref. 1, p. 13.

8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.[5]

Tendo em vista que a proposta de ensino é o desenvolvimento de competências, deve-se repensar o estudo de conteúdos, o que não significa menosprezá-los, mas sim mudar o foco do trabalho com eles. Ao longo das orientações específicas de cada capítulo, são destacados os momentos propícios para o desenvolvimento das competências gerais da BNCC. A memorização de fatos e/ou procedimentos referentes aos conteúdos abordados nos diferentes componentes curriculares não precisa ser totalmente abandonada, porém ela deve fazer sentido para os estudantes. Dentro do possível, as situações propostas devem buscar estabelecer integração entre as diferentes áreas, possibilitando o emprego de noções e conhecimentos matemáticos, geográficos, biológicos etc., além do domínio da língua.

Esses elementos apontam que o ensino por competências exige o repensar da prática docente. O professor precisa reconhecer que os objetos de conhecimento devem ser apresentados, sempre que possível, por meio de situações e problemas contextualizados que provoquem conflitos e exijam que os estudantes mobilizem seus processos cognitivos de observação, visualização, compreensão, organização, análise e síntese como suporte para a elaboração de uma argumentação consistente. É necessário lembrar que muitas situações matemáticas podem ser contextualizadas por meio de questões internas à própria Matemática e por meio da análise de seus procedimentos.

Temas Contemporâneos Transversais (TCTs) e competências socioemocionais

Trazer para a sala de aula problematizações sobre temas vividos pelas pessoas em seu dia a dia que influenciam suas vidas é uma forma de tratar os **Temas Contemporâneos Transversais (TCTs)**, que são referidos na BNCC. Esses temas não se vinculam a uma determinada área ou disciplina escolar, ao contrário, devem ser abordados por todas elas. Eles devem ser considerados como um conjunto de aprendizagens essenciais e indispensáveis a que todos os estudantes, crianças, jovens e adultos, têm direito.

A importância desse trabalho é a possibilidade de transformar a escola em um espaço voltado para a compreensão da realidade social e dos direitos e responsabilidades de todos em relação à vida pessoal, coletiva e ambiental. Esses temas são indicados por serem "aqueles que são intensamente vividos pelas comunidades, pelas famílias, pelos estudantes e pelos educadores no dia a dia, que influenciam e são influenciados pelo processo educacional"[6].

Observe a seguir os temas propostos[7].

- **Ciência e Tecnologia**: Ciência e Tecnologia;
- **Meio ambiente**: Educação Ambiental e Educação para o Consumo;
- **Economia**: Trabalho, Educação Financeira e Educação Fiscal;
- **Saúde**: Saúde e Educação Alimentar e Nutricional;
- **Cidadania e Civismo**: Vida Familiar e Social, Educação para o Trânsito, Educação em Direitos Humanos, Direitos da Criança e do Adolescente e Processo de envelhecimento, respeito e valorização do Idoso;
- **Multiculturalismo**: Diversidade Cultural e Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras.

---

5 BRASIL, ref. 1, p. 9-10.
6 BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Temas Contemporâneos Transversais na BNCC**: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília, DF: MEC: SEB, 2019. p. 7. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/contextualizacao_temas_contemporaneos.pdf. Acesso em: 9 set. 2024.
7 BRASIL, ref. 6, p. 13.

É preciso considerar as possibilidades de integração dos assuntos específicos de cada área com esses temas, pois eles têm caráter social e político e são um caminho promissor para os estudantes reconhecerem suas reais possibilidades de ação sobre a realidade em que vivem. Ao mesmo tempo, essa integração pode contribuir muito para a valorização dos conhecimentos escolares. Além disso, essa abordagem é profundamente significativa para a construção da cidadania e para a participação ativa do estudante na vida em sociedade. Ao longo das orientações específicas de cada capítulo, são destacadas as situações presentes na obra que desenvolvem os Temas Contemporâneos Transversais (TCTs), apresentando-se sugestões de como desenvolver esse trabalho.

O trabalho com os TCTs tem grande potencial para que atitudes e valores sejam colocados em discussão dentro da sala de aula.

A incorporação de atitudes e valores pelos estudantes está intimamente ligada ao desenvolvimento de **competências socioemocionais**. Tais competências são consideradas fundamentais para a construção de um percurso escolar que promova a educação integral dos estudantes, preparando-os para sua vida futura.

Tais competências dizem respeito ao relacionamento com os outros e consigo mesmo, à compreensão e gestão das emoções, ao estabelecimento e alcance de objetivos, à tomada de decisões autônomas e responsáveis e ao enfrentamento de situações adversas de maneira criativa e construtiva.

Estudos e discussões analisando quais estudantes que se saem melhor em atividades escolares indicam aqueles que apresentam características como organização, persistência, resiliência, enfrentamento e resolução de conflitos com controle da frustração e da ansiedade, além de autoestima, confiança e criatividade. Com base nessas conclusões, torna-se, então, evidente que o desenvolvimento cognitivo do jovem não se dá de modo isolado do seu desenvolvimento socioemocional. Desse modo, o professor assume um papel fundamental, tanto na criação de novas atividades quanto no planejamento e na condução das rotinas e ações que já têm lugar na escola. O professor, como mediador, pode integrar a esses momentos propostas na quais os estudantes, distribuídos em duplas, trios ou quartetos, possam discutir e colaborar entre si na resolução de problemas.

Em trabalhos colaborativos, o objetivo não é a homogeneização do pensamento e do conhecimento dos sujeitos participantes. Deve-se rejeitar o autoritarismo e a condução pedagógica com motivação hierárquica. Ao contrário, a colaboração entre os pares tem como objetivo a reconstrução do conhecimento dos participantes. Para isso, é importante respeitar a individualidade de cada sujeito, seus recursos e seu ritmo pessoal. Esse tipo de trabalho permite que as pessoas nele envolvidas passem a reconhecer o que sabem, o que os outros sabem e o que todos não sabem, resultando na busca de superação dos limites de cada um e do grupo como um todo.

Para que esse tipo de interação ocorra nos grupos colaborativos, é essencial que o professor determine os participantes, reunindo-os não pela amizade ou pela proximidade de localização na sala, mas por características que possibilitem que todos tenham voz no grupo e sejam considerados como participantes necessários. Essa ação favorece o desenvolvimento da autoestima, da confiança e da criatividade, o que promoverá o desenvolvimento cognitivo dos estudantes, além de fornecer as bases para a aceitação social.

A mediação do professor é o ponto-chave de todo esse processo, por meio de suas intervenções, com a acolhida de diferentes pontos de vista e com discussões realizadas principalmente com perguntas que instiguem os estudantes a justificar seus posicionamentos e suas conclusões. As questões podem ser do tipo: Todos chegaram a essa conclusão ou alguém teve alguma consideração um pouco diferente dessa?; E se fosse de tal forma? Vocês pensaram nessa outra possibilidade?; Vocês levaram em consideração outros pontos de vista?; Apoiaram-se no que já estudamos antes a respeito desse assunto?; Que tal estudarem também em outros livros e *sites* para dar maior respaldo ao que estão afirmando? etc.

A BNCC e o ensino de Matemática

No Ensino Médio, a área de Matemática e suas Tecnologias, de acordo com a BNCC, tem a responsabilidade de aproveitar todo o potencial já constituído pelos estudantes no Ensino Fundamental para promover ações que ampliem o letramento matemático iniciado na etapa anterior. O conceito de letramento matemático considerado pelo documento apoia-se naquele utilizado pelo Programa Internacional de Avaliação dos Estudantes (Pisa). Assim, é

> [...] definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. [...][8]

Desse modo, pretende-se que, ao final do Ensino Médio, os estudantes tenham se apropriado de seu papel como cidadãos nos contextos social, político, cultural e econômico.

Tal posicionamento exige que a postura no trato com as propostas matemáticas escolares considere a busca de problemas fora da Matemática, de modo a proporcionar aos estudantes a consciência de que essa área do conhecimento se abre para muitas outras, nas quais ela pode ser utilizada como uma ferramenta de compreensão e análise. Porém, é preciso destacar que a presença da Matemática nas diversas áreas do conhecimento não ocorre somente por meio dos registros fornecidos pelos fatos e fenômenos estudados, mas também pelo seu amplo conjunto de procedimentos de cálculo, análise, medição e estimativa dos fenômenos da realidade e de suas relações. Esse fato é o que traz a necessidade de também se trabalhar de modo cuidadoso a linguagem, as definições e os procedimentos matemáticos que darão suporte às resoluções dos problemas.

As competências específicas e as habilidades vinculadas à área de Matemática apresentadas na BNCC expressam esses aspectos, conferindo a professores e estudantes maiores oportunidades de reconhecer a presença da Matemática em situações reais e em outras áreas do conhecimento. A Matemática pode ser identificada na base de uma série de processos que organizam a vida contemporânea, ao mesmo tempo que aponta os conhecimentos específicos a serem construídos, como apresentado a seguir.

Competência específica 1 – Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

(**EM13MAT101**) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(**EM13MAT102**) Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.

(**EM13MAT103**) Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.

(**EM13MAT104**) Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.

(**EM13MAT105**) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).

(**EM13MAT106**) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).

Competência específica 2 – Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

(**EM13MAT201**) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.

(**EM13MAT202**) Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos.

[8] BRASIL, ref. 1, p. 266.

(**EM13MAT203**) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.

Competência específica 3 – Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

(**EM13MAT301**) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(**EM13MAT302**) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(**EM13MAT303**) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.

(**EM13MAT304**) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.

(**EM13MAT305**) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.

(**EM13MAT306**) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.

(**EM13MAT307**) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(**EM13MAT308**) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

(**EM13MAT309**) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(**EM13MAT310**) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.

(**EM13MAT311**) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.

(**EM13MAT312**) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.

(**EM13MAT313**) Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro.

(**EM13MAT314**) Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.).

(**EM13MAT315**) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

(**EM13MAT316**) Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).

Competência específica 4 – Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

(**EM13MAT401**) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.

(**EM13MAT402**) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.

(**EM13MAT403**) Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.

(**EM13MAT404**) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(**EM13MAT405**) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

(**EM13MAT406**) Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de *softwares* que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra.

(**EM13MAT407**) Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (*box-plot*), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise.

Competência específica 5 – Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

(**EM13MAT501**) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.

(**EM13MAT502**) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.

(**EM13MAT503**) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.

(**EM13MAT504**) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.

(**EM13MAT505**) Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.

(**EM13MAT506**) Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.

(**EM13MAT507**) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

(**EM13MAT508**) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

(**EM13MAT509**) Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.

(**EM13MAT510**) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.

(**EM13MAT511**) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.[9]

Nesta Coleção, as oportunidades de reconhecer a presença da Matemática em situações reais e em outras áreas do conhecimento se dão em vários momentos, como na **Abertura** de cada capítulo, nas seções **Atividades resolvidas** e **Atividades**, bem como na seção **Conexões**, entre outras. Esses são os elementos que dão suporte ao professor para propor aos estudantes os trabalhos em grupos colaborativos em diferentes situações de investigação.

O ensino da Matemática e o papel do professor

Nessa etapa da Educação Básica, há que se considerar que o desenvolvimento intelectual dos jovens permite maior capacidade de abstração e potencializa o pensar de modo rigoroso e criativo na resolução de problemas. Desse modo, a finalidade dos estudos não é apenas saber os conceitos e procedimentos matemáticos, mas saber usá-los como suporte para a realização de uma reflexão crítica em relação:

- à própria aprendizagem, que inclui o desenvolvimento do pensamento computacional e dos diferentes tipos de raciocínio lógico-matemáticos (indução, dedução e raciocínio por analogia);
- aos contextos sociais contemporâneos, isto é, a produção, a circulação e a recepção de textos de divulgação científica e de mídias sociais, considerando os elementos que constituem esses textos (em termos de gêneros discursivos) e procedimentos de leitura multimodal e inferencial.

Para contemplar essas metas, o professor pode se valer de vários recursos pedagógicos e metodológicos que façam com que o trabalho desenvolvido atenda aos objetivos estabelecidos em seu planejamento escolar, considerando e respeitando as particularidades e necessidades dos estudantes. Nesse sentido, esta Coleção busca trazer subsídios diversificados para desenvolver uma ação pedagógica que vai além da apresentação de conceitos e técnicas. Além disso, são descritas a seguir algumas metodologias de ensino e o pensamento computacional, propiciando uma reflexão sobre a prática docente. É importante ressaltar que a escolha de qual metodologia utilizar e do momento pedagógico no qual ela deve ser aplicada cabe ao professor. O livro didático não determina o emprego de uma ou outra metodologia; no entanto, ele oferece suporte para a estruturação e o desenvolvimento da atividade docente.

Atividades investigativas

Pensar sobre o ensino de Matemática exige pensar o que significa aprender Matemática. As perspectivas atuais de educadores matemáticos consagram que, para aprender Matemática, é preciso fazer Matemática.

Esse fazer significa se engajar em uma atividade que promova a observação e a análise de dados e informações, o estabelecimento de conexões e relações, a criação de conjecturas, a identificação e a expressão de regularidades, a busca de explicações, a criação de soluções, a invenção de estratégias próprias que envolvam noções, conceitos e procedimentos matemáticos, a validação de suas produções e a comunicação com os pares.

Assim, ensinar Matemática é, para um professor, criar as condições que possibilitarão que os estudantes façam Matemática. Embora possa parecer que essa seja uma missão impossível, na verdade, trata-se de promover, em sala de aula, uma atitude investigativa por parte dos estudantes, possibilitando-lhes mobilizar sua intuição e seus conhecimentos antigos em alternativas diversas de exploração. Esse tipo de atividade

> ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e o professor.[10]

Tendo como pressuposto que todos podem produzir Matemática, nas suas diferentes expressões, as atividades de investigação podem contribuir para aulas de Matemática mais dinâmicas e interessantes.

[9] BRASIL, ref. 1, p. 532-541.
[10] PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003. p. 23.

Chamar o estudante a agir como um matemático não implica trabalhar obrigatoriamente com problemas muito difíceis. Ponte, Brocardo e Oliveira[11] destacam que, ao contrário, investigar significa trabalhar questões que nos interpelam e, por isso, constitui uma poderosa forma de construir conhecimento. Assim, é em torno de um ou mais problemas que uma investigação matemática se desenvolve, porém as descobertas que ocorrem durante a busca da solução podem ser tão ou mais importantes do que a própria solução.

Aulas de investigação podem representar um desafio à prática do professor, pois elas demandam um equilíbrio entre garantir que o trabalho dos estudantes ocorra e seja significativo do ponto de vista do conhecimento matemático e conceder a eles o ambiente necessário para que desenvolvam sua autonomia, possibilitando a autoria da investigação.

Considerando esse equilíbrio, o professor precisa interagir com os estudantes para estar ciente de suas necessidades e características particulares, sem perder de vista os aspectos gerais da gestão da situação didática. Desse modo, o professor é levado a desempenhar diversos papéis no decorrer de uma atividade de investigação.

Criar o cenário e desafiar os estudantes: o sucesso de uma investigação depende do ambiente de aprendizagem que se cria na sala de aula, de modo que o estudante se sinta à vontade e lhe seja dado tempo para pensar, colocar questões, explorar suas ideias e exprimi-las. Dependendo da situação proposta, é preciso disponibilizar aos estudantes materiais diversos para manipulação ou consulta, sendo o livro didático o ponto de partida essencial para as suas buscas e pesquisas.

Ao propor uma atividade, é fundamental garantir que todos os estudantes entendam o sentido da tarefa proposta e aquilo que se espera deles no decurso da aula, de modo que compreendam o que significa investigar e aprender a fazê-lo. A proposta inicial da tarefa não pode ser demasiadamente pormenorizada sobre o que é para ser feito, uma vez que a interpretação pelo estudante do que se propõe é um dos objetivos dessas aulas, esperando-se que ele evolua para realizá-la autonomamente.

O professor precisa dar uma atenção especial à própria tarefa docente, escolhendo questões ou situações iniciais e colocadas no decorrer da atividade que, potencialmente, constituam um verdadeiro desafio aos estudantes.

Acompanhar o progresso dos estudantes: uma vez que os estudantes já estejam em processo de investigação, cabe ao professor manter uma posição de retaguarda, procurando compreender como eles estão pensando. Para isso, pode-se fazer questionamentos ou solicitar explicações.

É um desafio para o professor perceber aonde os estudantes querem chegar, uma vez que ele pode não ter acompanhado todo o processo de discussão dentro do grupo. Aqui o professor deve considerar que os estudantes podem ainda não ter os registros organizados e que sua comunicação matemática oral pode ser limitada e conter erros, precisando, assim, esforçar-se para compreendê-los, evitando corrigir cada afirmação ou conceito matemático apresentado de forma imprecisa.

Acompanhar o progresso dos estudantes possibilita ao professor sinalizar que eles podem continuar, por estarem indo na direção correta, intervir, de acordo com a necessidade do grupo, ou fornecer apoio mais direto para influenciar positivamente o trabalho deles.

A avaliação do desenvolvimento dos estudantes durante a atividade pode também levar o professor a decidir conceder mais tempo para a investigação, fazer uma pequena discussão intermediária com toda a turma ou passar à discussão final.

Apoiar o trabalho dos estudantes: na condução da aula, o apoio a ser dado precisa estar pautado na manutenção dos aspectos característicos do processo investigativo. Assim, a intervenção do professor pode assumir várias formas, como colocar questões, fornecer ou recordar informações relevantes, fazer sínteses e promover a reflexão por parte dos estudantes.

A postura interrogativa é a que o professor deve privilegiar, e suas questões podem ter diferentes intenções, como a de esclarecer ideias, próprias e dos jovens, a de refazer uma questão proposta por um estudante, para que ele pense melhor sobre a dúvida levantada, ou a de transformar uma questão em uma sugestão orientadora para a atividade.

Essa postura tem, também, a função de ajudar os estudantes a compreender que o papel principal do professor é apoiá-los em seu trabalho, e não simplesmente dizer se estão certos ou não, o que, aliás, deve ocorrer cada vez menos nessas aulas.

Em alguns momentos, a atividade investigativa pode sofrer bloqueio, porque os estudantes não com-

[11] PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, ref. 10.

preendem certos conceitos ou representações importantes para a sua continuidade. A intervenção do professor nesses momentos precisa ser a de fornecer ou recordar conceitos anteriormente estudados, para que os estudantes possam dar continuidade à tarefa.

Outra prática importante por parte do professor é a de promover a reflexão dos estudantes sobre o trabalho realizado e ajudá-los a fazer uma síntese da atividade, descrevendo avanços e recuos, os objetivos que tinham em mente e as estratégias que seguiram.

Raciocinar matematicamente: em atividades de investigação, é natural que os estudantes apresentem questões ou conjecturas em que o professor não havia pensado antes. É preciso avaliar rapidamente se será apropriado parar para refletir com os estudantes ou deixar isso para um momento posterior.

Construir o raciocínio matemático com os estudantes pode ser interessante, pois é uma oportunidade de eles acompanharem o desenvolvimento da ideia, enquanto o professor pensa em voz alta, colocando a questão debatida em termos matemáticos e buscando a sua justificativa.

Tudo o que foi exposto até este ponto deixa claro que, em toda atividade de investigação, devem ser dados tempo e oportunidade aos estudantes para que possam organizar e desenvolver seus modos de pensar, expressá-los para os colegas e para o professor e registrá-los utilizando linguagem matemática adequada. Desse modo, será possível a todos reconhecer o valor dos processos matemáticos, adquirir confiança em sua capacidade de fazer Matemática e, finalmente, tornarem-se aptos a resolver problemas.

No entanto, isso não quer dizer que as atividades matemáticas a serem propostas se restrinjam apenas às investigativas. Depois de propor problemas de investigação, o professor deve abordar problemas de familiarização com o novo conhecimento, apresentando diferentes domínios matemáticos e contextos.

Os contextos podem variar entre propostas envolvendo aspectos da história da Matemática, explorações de situações envolvendo a Etnomatemática, e, como os jovens estão conectados o tempo todo – inclusive durante as aulas –, atividades envolvendo as Tecnologias da Informação e Comunicação são potencialmente ricas nesse processo.

Nesta Coleção, há inúmeras possibilidades para se desenvolver uma atividade investigativa, por exemplo, na seção **Explorando a tecnologia** do Capítulo 3, “Introdução às funções e função afim”, do Volume 1, o estudante é conduzido a analisar, por meio de um simulador virtual, as relações entre os coeficientes da função afim e sua representação gráfica.

Metodologias ativas

Todos temos consciência de que a educação formal não acontece apenas no espaço físico da sala de aula, e, atualmente, considerando as possibilidades de uso das tecnologias que promovem uma integração de diferentes espaços e tempos, esse fato se tornou mais evidente. Dessa forma, é necessário fornecer aos estudantes possibilidades de aprendizagem que rompam com sua atitude passiva e ultrapassem o espaço físico da sala de aula.

Se queremos que os estudantes sejam proativos, precisamos adotar metodologias nas quais eles se envolvam em atividades cada vez mais complexas, em que tenham de tomar decisões e avaliar os resultados, com apoio de materiais relevantes. Se queremos que sejam criativos, eles precisam experimentar inúmeras novas possibilidades de mostrar sua iniciativa[12].

Segundo Morán[13], os estudantes devem ser mobilizados por meio de desafios e atividades bem planejadas e avaliadas por meio de acompanhamento do professor. Tais desafios contribuem para mobilizar competências intelectuais, emocionais, pessoais e de comunicação.

Ainda segundo o mesmo autor, as metodologias ativas são o ponto de partida para processos de reflexão, de integração cognitiva e de generalização. Desafios e atividades propostos devem ser do tipo investigativo, que exigem aprender pela descoberta por meio de pesquisas, análise de situações e identificação dos diferentes aspectos envolvidos, reconhecendo regularidades, fazendo escolhas e validando as conclusões.

As metodologias ativas mais aplicadas são a aprendizagem por projetos, a aprendizagem por resolução de problemas, a sala de aula invertida e a rotação por estações.

12 MORÁN, José. Mudando a educação com metodologias ativas. *In*: SOUZA, Carlos Alberto de; MORALES, Ofelia Elisa T. (org.). **Convergências midiáticas, educação e cidadania**: aproximações jovens. Ponta Grossa: Proex: UEPG, 2015. (Coleção Mídias Contemporâneas, v. 2, p. 15-33). Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4941832/mod_resource/content/1/Artigo-Moran.pdf. Acesso em: 30 set. 2024.

13 MORÁN, ref. 12.

Na **metodologia por projetos**, os estudantes são motivados a trabalhar de forma colaborativa em propostas interdisciplinares nas quais se abordam conceitos-chave dos objetos de conhecimento envolvidos. As aprendizagens são vinculadas a experiências e interesses deles, o que implica questionamento constante e reconstrução de certezas. Os conteúdos surgem de acordo com o desenvolvimento da pesquisa e são explorados de modo mais profundo do que se tivessem sido determinados previamente. O ponto de partida deve ser a definição de uma questão central, que irá determinar o que investigar. Em seguida, um conjunto de certezas provisórias e dúvidas temporárias estará presente ao longo da pesquisa, podendo também o professor prever a amplitude do projeto a partir dos conhecimentos prévios que os estudantes apresentam. A busca de informação na internet, em livros, revistas, entre outros meios, vai requerer a elaboração de registros importantes para o processo em desenvolvimento e para a socialização de ideias.

A **metodologia de resolução de problemas** propõe uma abordagem em que a construção do conhecimento se faz a partir de problemas geradores, propostos como ponto de partida para o ensino de conceitos e conteúdos matemáticos. O problema matemático é apresentado antes de se iniciar o conteúdo, e o estudante, ao resolvê-lo, construirá um conceito que ainda não conhece. Segundo Huanca e Onuchic, pesquisadores citados por Melo e Justulin[14], nessa metodologia "os professores, através e durante a resolução dos problemas, devem fazer conexões entre diferentes ramos da Matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos"[15]. Allevato e Onuchic indicam que as atividades podem ser organizadas em dez etapas:

(1) proposição do problema,
(2) leitura individual,
(3) leitura em conjunto,
(4) resolução do problema,
(5) observar e incentivar,
(6) registro das soluções na lousa,
(7) plenária,
(8) busca do consenso,
(9) formalização do conteúdo e
(10) proposição e resolução de novos problemas.[16]

Se surgirem dúvidas, o professor poderá auxiliar, porém as ações são exclusivamente dos estudantes; o docente age como observador e incentivador, estimulando o trabalho em grupo, incentivando a reflexão e a troca de ideias entre eles. Depois de os grupos concluírem suas resoluções, um representante é convidado a registrar na lousa sua resolução, esteja certa ou errada. Diante das respostas, os estudantes são convidados a refletir e a discutir os diferentes métodos utilizados na solução. Depois desse momento, o professor busca, com toda a turma, chegar a um consenso sobre o resultado obtido. Ao final das discussões, o professor formaliza o conteúdo matemático do qual emergiu o problema gerador, institucionaliza os conceitos, destaca diferentes formas operatórias e/ou demonstra propriedades específicas do assunto. É importante que sejam propostos novos problemas relacionados ao conteúdo que foi formalizado, para a familiarização com o novo conhecimento e reconhecimento de sua aplicação em diferentes contextos.

A **sala de aula invertida** se caracteriza por inverter o ciclo típico das aulas, no qual o professor apresenta o conteúdo e este é aplicado. Nessa metodologia, os estudantes devem ter contato antecipado com o conhecimento necessário antes da aula, para que, no ambiente da sala de aula possam interagir de forma ativa para esclarecer, trabalhar e aplicar o conhecimento com o qual tiveram contato. Embora muitas pesquisas apontem resultados positivos do emprego dessa metodologia, há também pesquisadores que apresentam críticas a ela. Segundo Valente[17], citado por Honório[18], alguns críticos destacam a dependência que esse modelo tem da tecnologia, o que pode criar um ambiente de aprendizagem desigual, tanto em termos do acesso à tecnologia quanto à motivação para os estudos independentes. Outra crítica é a da possibilidade de o estudante ir para a sala de aula sem se preparar, não tendo, com isso, condições de acompanhar as discussões ou

[14] MELO, Marcela Camila P. de; JUSTULIN, Andresa Maria. A resolução de problemas: uma metodologia ativa na construção do conceito de semelhança de triângulos. *In*: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 15., 2019, Londrina. **Anais** […]. Londrina: Sociedade Brasileira de Educação Matemática – Regional Paraná, 2019. p. 1-14. Disponível em: http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/EPREM/XV_EPREM/paper/viewFile/1019/881. Acesso em: 29 set. 2024.

[15] HUANCA; ONUCHIC, 2011, *apud* MELO; JUSTULIN, ref. 14, p. 5.

[16] ALLEVATO; ONUCHIC, 2014, *apud* MELO; JUSTULIN, ref. 14, p. 5.

[17] VALENTE, 2014, *apud* HONÓRIO, ref. 18, p. 2.

[18] HONÓRIO, Hugo Luiz G. Sala de aula invertida: uma abordagem colaborativa na aprendizagem de matemática: estudos iniciais. *In*: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 20., 2016, Curitiba. **Anais** […]. Curitiba: UFPR, 2016. p. 1-12. Disponível em: http://www.ebrapem2016.ufpr.br/wp-content/uploads/2016/04/gd6_Hugo_Hono%CC%81rio.pdf. Acesso em: 29 set. 2024.

prejudicando as interações possíveis. No entanto, essas críticas são rebatidas, com base justamente nessas interações entre os participantes do processo colaborativo, que tem como paradigma o predomínio da comunicação, da coordenação e da cooperação, o que faz com que as aprendizagens possam ocorrer. Nesse modelo, o professor disponibiliza materiais, normalmente em ambiente virtual (videoaula, tutorial, textos e questões) de acordo com seu planejamento de trabalho e, na sala de aula, dá *feedback* aos estudantes, de modo a esclarecer dúvidas e corrigir erros, pois, agora, seu papel é amparar, e não mais transmitir informações.

Na **metodologia de rotação por estações de aprendizagem**, os estudantes são divididos em pequenos grupos, que participarão de algumas estações de trabalho, sendo recomendado que, em pelo menos uma delas, a proposta envolva o uso de ambiente virtual. Essas estações podem estar alocadas em diferentes ambientes da escola. Os grupos executam um rodízio pelas estações, cada uma contendo uma atividade que se comunica com o objetivo central da aula. As estações precisam ser planejadas de forma que sejam independentes, sem exigência de algum pré-requisito ou exercício prévio, levando em consideração que cada grupo iniciará as atividades em uma estação diferente. Desse modo, o professor necessita ocupar-se de diferentes ações que cercam o planejamento das estações: definir quantas, quais serão e qual deve ser a quantidade de estudantes em cada estação; organizar o(s) espaço(s); delimitar o tempo necessário para cada estação e o tempo limite para a mudança de estação de trabalho; e pensar nos recursos didáticos necessários para cada estação. As propostas em cada estação podem variar, abrangendo tarefas de leitura, escrita, produção, discussão, realização de exercícios, atividades em plataformas virtuais, atividades envolvendo aplicativos e recursos tecnológicos, podendo, por exemplo, haver uma estação com o professor, uma na qual se realizem atividades individualizadas e uma com computadores para o desenvolvimento da atividade *on-line*.

Um exemplo de recurso desta Coleção para o uso de metodologias ativas é a atividade **12** do Capítulo 1, “Pesquisa Estatística”, do Volume 2, que pode ser desenvolvida por meio de uma metodologia por projetos. Nessa atividade, os estudantes organizam-se em grupos para realizar um estudo seguindo as etapas de uma pesquisa estatística.

Pensamento computacional

O desenvolvimento do pensamento computacional, iniciado no Ensino Fundamental, pode ser aprofundado nesta etapa da escolaridade. A BNCC aponta que esse tipo de pensamento

> [...] envolve as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos.[19]

Desse modo, ele pode ser entendido como um processo de formulação e resolução de problemas cujas soluções são representadas por meio de passos claros, de forma que uma pessoa ou uma máquina possam executá-los eficazmente. Esse processo envolve ações de pensamento que tratam da decomposição do problema em etapas, do reconhecimento de padrões e suas repetições, da abstração e da generalização que permitem a construção de algoritmos e, por fim, da avaliação da solução.

Para auxiliar os estudantes a desenvolver seu pensamento computacional, é necessário orientá-los para que empreguem estas quatro ações no momento da resolução de problemas:

- **ponto de partida**: decomposição do problema em partes, dividindo-o em problemas menores e mais fáceis de manejar. Tal ação, além de tornar todo o processo de solução mais explícito, facilita a detecção de erros pelo caminho.
- **reconhecimento de padrões**: essa ação é composta de dois momentos; no primeiro, devem-se buscar características e/ou propriedades que sejam comuns às várias partes do problema decomposto e que possam ser replicadas em cada uma delas; no segundo, deve ocorrer uma busca de soluções já utilizadas anteriormente que possam ser empregadas no problema atual, mesmo que com adaptações. Esse segundo momento é o passo necessário para a próxima ação.
- **abstração e generalização**: trata-se de identificar, em uma situação, os elementos que não são relevantes, reduzindo, assim, o foco de atenção aos detalhes substanciais para a resolução do problema. Nesse movimento, é possível detectar características/propriedades comuns a um conjunto de dados, identificar, por generalização, os procedimentos ou algoritmos que poderão ser adotados e, por fim, escrever o algoritmo. Reconhecer tipos de estruturas que podem ser reaplicadas faz os problemas se tornarem mais simples.

[19] BRASIL, ref. 1, p. 474.

- **avaliação**: ela ocorre a todo momento, desde que se toma conhecimento do problema a resolver até se chegar ao algoritmo que o resolve. É necessário que, em cada uma das ações, aspectos como eficácia, consumo de recursos, rapidez, facilidade, abrangência da solução, entre outros, sejam analisados para que se tenha, ao final, um resultado mais robusto e confiável. Outra característica da avaliação é a de manter controle sobre as necessidades e propósitos das estratégias adotadas, para prevenir que pequenos erros de percurso se tornem grandes complicações ao final.

Muitos dos problemas discutidos em sala de aula podem ser analisados sob esse ponto de vista, sendo recomendado propor aos estudantes que representem as soluções por meio de fluxogramas que descrevam o processo de solução ou que realizem descrições orais e/ou escritas do passo a passo de suas resoluções.

Por outro lado, é também necessário que, no planejamento de sequências de trabalho e de ações pedagógicas a serem desenvolvidas em sala de aula, sejam consideradas as descobertas recentes, as novas tecnologias e a sua influência no conhecimento científico. Nesse contexto, destaca-se a importância do recurso a tecnologias digitais e aplicativos para o ensino e a aprendizagem matemática. Nesta Coleção, a seção **Explorando a tecnologia**, presente em todos os volumes, relaciona explorações matemáticas a *softwares* específicos, que atendem ao proposto na BNCC referente à cultura digital:

> fluência no uso da tecnologia digital para expressão de soluções e manifestações culturais de forma contextualizada e crítica.[20]

Os *softwares* explorados na Coleção são o **GeoGebra**, o **LibreOffice** e o **Scratch**, todos eles gratuitos e de fácil acesso *on-line*.

O GeoGebra é um *software* específico de Matemática voltado para o estudo de Geometria, Álgebra, Planilhas de Cálculo, Gráficos, Probabilidade e Estatística. Ele é conhecido como um *software* de matemática dinâmica por proporcionar movimentações e modificações do objeto matemático construído, permitindo, assim, o desenvolvimento de processos investigativos nas diferentes frentes estudadas, graças à interconexão que possui entre Geometria, Álgebra e planilha de cálculo. Em todos os capítulos em que se propõe sua utilização, há uma sugestão de uso com suporte para sua exploração pelos estudantes.

O LibreOffice também é apresentado nesta Coleção como um recurso gratuito para o uso de planilhas eletrônicas, edição de fórmulas matemáticas e gráficos, além de textos e apresentações. Nos capítulos em que seu uso é sugerido, há indicações de possibilidades de exploração pelos estudantes, cabendo ao professor mobilizar os processos investigativos por meio de questões que os incentivem a realizar ações de busca para a aprendizagem esperada.

O Scratch é um *software* voltado para a programação de animações ou jogos, utilizando imagens e sons disponíveis. Essa programação é feita a partir de blocos com os comandos básicos para a movimentação pretendida do personagem em cena. Seu uso em sala de aula é favorecido por ser extremamente intuitivo e visual, com manipulação simples de suas estruturas e da construção dos comandos. Esse recurso dá respaldo ao trabalho do desenvolvimento do pensamento computacional, pois favorece a capacidade analítica de antecipação da ação que se espera do personagem, montada por meio de blocos preestabelecidos, passíveis de serem encaixados uns aos outros de acordo com a lógica desejada. Sua aplicação também tem caráter investigativo, uma vez que os resultados podem ser imediatamente testados e observados na tela, de modo a permitir a análise do erro e sua correção a cada etapa construída.

Avaliação

Perrenoud[21] nos explica, em sua obra **Avaliação: da excelência à regulação das aprendizagens**, que ensinar, aprender e avaliar são ações que precisam ser coesas, equilibradas, para que professor e estudantes atinjam seus objetivos. Uma ação se liga à outra, como em um círculo.

Avaliar não é o final do processo, é um recurso a serviço do desenvolvimento do estudante e um instrumento importante para o professor, que atua como agente regulador da aprendizagem. Quando o professor planeja cada estratégia de avaliação, deve ter claros os objetivos a alcançar.

- Quais são as habilidades que se pretende verificar?
- Quais são os objetos do conhecimento que devem ser aplicados pelo estudante?
- Qual ou quais competências serão desenvolvidas?

É com base nesse planejamento que a estratégia deve ser criada, e não o contrário.

[20] BRASIL, ref. 1, p. 474.
[21] PERRENOUD, Phillipe. **Avaliação**: da excelência à regulação das aprendizagens: entre duas lógicas. Porto Alegre: Artmed, 1999.

É importante compartilhar com os estudantes os objetivos do instrumento de avaliação, para que eles sejam parte do processo e possam saber como e quando serão avaliados.

Cada resultado de avaliação deve ser analisado por ambas as partes, a fim de dar significado ao conceito ou nota atribuída. Com base na análise, definem-se as ações que serão necessárias – tanto do professor como do estudante. A implementação das ações faz com que se retome o círculo de ensinar, aprender e avaliar.

Diversificar as estratégias de avaliação é essencial para promover um aprendizado mais inclusivo e eficaz. Cada indivíduo tem habilidades e fragilidades distintas, e oferecer diferentes formas de avaliação permite que cada um seja reconhecido em suas áreas de maior competência, enquanto é incentivado a desenvolver habilidades nas áreas que acha mais desafiadoras. Assim, o professor cria um ambiente de aprendizado mais equilibrado e justo.

A área de Matemática no Ensino Médio é fértil para oferecer aos estudantes instrumentos diversificados de avaliação. Seu caráter de linguagem e instrumento para as demais ciências possibilita resolver problemas variados presentes em inúmeras áreas do conhecimento.

Concomitantemente, capacidades como formular e testar hipóteses, deduzir, generalizar e argumentar são desenvolvidas pelo pensamento matemático. A estrutura e as características da Matemática propiciam o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, tanto práticos quanto teóricos. Ao lidar com esses desafios, o estudante exercita e consolida as estruturas de pensamento necessárias para enfrentar situações diversas.

A seguir, são apresentados cinco modelos avaliativos, que podem ser combinados de acordo com os objetivos específicos do curso no Ensino Médio.

1. Avaliação diagnóstica
Utilizada, em geral, no início de um período (ano, semestre etc.) para verificar se o estudante tem os pré-requisitos necessários para adquirir novos conhecimentos. Por meio dela, pode-se conhecer o estágio de aprendizagem de cada indivíduo, salientando-se que seu objetivo não é classificar o estudante, mas detectar a presença ou a fragilidade de alguma habilidade. Os resultados podem levar a um replanejamento para o período ou a um trabalho específico com grupos de estudantes. Este tipo de avaliação pode ser precedido por uma sondagem oral com a turma, fazendo-se perguntas que facilitem resgatar conhecimentos, conceitos e definições, enfim, que sejam pré-requisitos importantes para o prosseguimento dos estudos. Os estudantes podem registrar tudo o que for lembrado, com mediação do professor. Em seguida, pode-se apresentar algumas questões para resolução individual que verifiquem as principais habilidades.
2. Avaliação formativa
Foca no processo de ensino-aprendizagem e é contínua, sendo composta de instrumentos diversificados aplicados ao longo de um período. O estudante recebe *feedbacks* de seu desempenho em cada atividade avaliativa e, com o professor, decide que ações podem ser tomadas para aprimorar seu desempenho. O professor avalia seu próprio trabalho com base nos resultados dos estudantes, verificando se é preciso rever conteúdos, reforçar habilidades etc. Os instrumentos avaliativos podem e devem contemplar atividades orais e escritas, atividades individuais, em duplas e em grupos, pesquisa, mapas conceituais, projetos, portfólios etc., proporcionando ao estudante oportunidades variadas e suficientes para demonstrar suas habilidades.
3. Avaliação somativa
É o modelo mais comumente utilizado, constando de provas dissertativas ou do tipo teste aplicadas ao final de um período. O objetivo é medir o grau de domínio do estudante a respeito de determinados saberes. Em geral, atribui-se uma nota ou conceito para o desempenho, sendo, portanto, uma avaliação classificatória. A presença deste modelo é importante no Ensino Médio, pois provavelmente os jovens terão contato com exames vestibulares e concursos na vida adulta. A ideia é que esse não seja o único tipo de avaliação proposto. Pode fazer parte da avaliação, sendo combinada com os outros modelos de avaliação.
4. Avaliação comparativa
Este modelo de avaliação compara o desempenho do estudante com o de outros estudantes na mesma fase de ensino. Pode ser utilizado de maneiras diferentes: • comparar o desempenho dos estudantes de uma turma com os de outra do mesmo ano, na mesma escola, aplicando-se a ambas as turmas a mesma avaliação. • comparar o desempenho dos estudantes de escolas distintas utilizando-se uma avaliação externa (Saeb, Saresp e Enem, por exemplo). A comparação dos resultados permite identificar se o desempenho está de acordo com as expectativas e, se necessário, implementar ações que minimizem discrepâncias.

5. Avaliação ipsativa
Neste modelo, o mesmo estudante é avaliado em momentos diferentes. Compara-se a situação do estudante no início da observação com a situação no final do período escolhido (bimestre, semestre, ano etc.). Não há comparação com outros colegas. O envolvimento do estudante é importante, pois a definição dos parâmetros que serão observados deve ser feita em parceria com ele. Ao longo do tempo, o estudante recebe *feedbacks* do professor, discute seus progressos ou dificuldades e repensa suas estratégias de estudo. A autoavaliação do estudante é um instrumento que complementa este modelo, incluindo aspectos de conteúdo e de postura de aprendizagem.

Outro aspecto da avaliação a ser tratado é o da autoavaliação, que contribui para incentivar o estudante a tomar consciência de seu próprio percurso de aprendizagem e se responsabilizar pelo seu empenho em avançar.

Nessa perspectiva, entende-se que a autoavaliação é um componente importante ao ser utilizada como instrumento da avaliação formativa, pois auxilia os estudantes a adquirir uma capacidade cada vez maior de analisar suas próprias responsabilidades, atitudes, comportamento, pontos fortes e fracos, sua condição de aprendizagem e suas necessidades para atingir os objetivos. Com o exercício constante da autoavaliação, os estudantes serão capazes de desenvolver sentimentos de responsabilidade pessoal e de apreciação da força dos empenhos individuais e de grupo. Além disso, aprendem a encarar prontamente as capacidades em várias empreitadas e a afinar suas potencialidades e contribuições, além de desenvolver a capacidade de análise contínua, na qual consideram o que já aprenderam, o que ainda não aprenderam, os aspectos facilitadores e os dificultadores do trabalho, conseguindo planejar as próprias ações. Além disso, a autoavaliação também incentiva os jovens a pensar sobre si mesmos e os conduz a uma modalidade de apreciação que se pratica durante a vida inteira, ajudando-os a avançar em sua autonomia.

A autoavaliação também deve ser orientada pelo professor, por meio de questões que incentivem os estudantes a refletir sobre suas ações durante a realização das atividades. No quadro a seguir, há exemplos de questões para esse fim.

AUTOAVALIAÇÃO
1. Entre os assuntos abordados, qual você considerou o mais interessante? E o menos interessante? Explique suas escolhas.
2. Comparando o trabalho de seu grupo com o dos outros grupos, como você avalia a produção de vocês?
3. Considerando a avaliação feita anteriormente, você acha que a produção do seu grupo poderia ter sido melhor? Em qual(is) aspecto(s)?
4. Como você avalia a participação de cada um dos integrantes de seu grupo na realização do trabalho? Como você se classifica dentro do seu grupo de trabalho: colaborativo(a), proativo(a), coordenador(a), inovador(a), organizador(a)?
5. As discordâncias entre você e seus colegas de grupo ocorreram de modo a chegarem a um consenso, com respeito pelas ideias do outro e com a construção de argumentação consistente, proposta com cordialidade? Dê um exemplo.
6. Você e seu grupo criaram estratégias para evitar distrações e manter a concentração, o esforço e a motivação durante a realização das tarefas? Dê um exemplo.
7. Durante as apresentações dos vários grupos, você se manteve envolvido e participante das discussões? O que você aprendeu que não sabia?
8. Quais conhecimentos matemáticos você adquiriu com a elaboração desse trabalho?
9. Quais conhecimentos de outras áreas você adquiriu com a elaboração desse trabalho?
10. Em que medida a seção **Para refletir** contribuiu para a análise de sua aprendizagem em cada um dos capítulos que compuseram os temas desse período?

A seguir são apresentados momentos do Livro do Estudante que podem ser usados para explorar alguns dos modelos de avaliação apresentados.

As **Aberturas** de capítulo contêm questões que possibilitam uma avaliação diagnóstica. Geralmente, elas mobilizam competências e habilidades relacionadas ao Ensino Fundamental – Anos Finais (EFAF), permitindo ao professor obter informações que contribuam para o planejamento das aulas.

As seções **Atividades**, distribuídas ao longo de cada capítulo, têm como finalidade constituir um instrumento de avaliação formativa (contínua), além de gerar novas oportunidades de aprendizagem, contribuindo para a assimilação e a compreensão dos conceitos matemáticos estudados até o momento. Nesse sentido, recomenda-se explicar aos estudantes que as atividades são um momento de avaliação que ocorre durante o ensino e aprendizagem da Matemática, pois, ao fazer as atividades, os estudantes poderão identificar suas aptidões, preferências e dificuldades, informações importantes para que eles reflitam e autorregulem seu próprio processo de aprendizagem. Ao mesmo tempo, as resoluções dessas atividades podem fornecer ao professor dados significativos para compreender o desenvolvimento de cada estudante. Por isso, as orientações específicas de cada capítulo apresentam, como sugestão, atividades cuja análise das resoluções pode contribuir para avaliar a evolução de cada estudante e para orientar seus estudos.

A seção **Atividades complementares**, apresentadas no final de cada capítulo, tem caráter de avaliação formativa relacionada ao preparo dos estudantes para os exames de larga escala que ocorrem ao término do Ensino Médio, em específico, o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) e os vestibulares, que são porta de entrada para cursos universitários. Uma possibilidade é solicitar a formação de duplas para a resolução dessas atividades. Quando todos finalizarem, por meio de um sorteio, estabelecer uma ordem para cada dupla explicar para a turma a resolução de uma dessas atividades. Com isso, além da correção, é possível sanar as dúvidas e verificar o desempenho dos estudantes. Além disso, as apresentações orais em Matemática desempenham papel relevante em relação aos objetivos de ensino. Ao expor seu raciocínio perante os colegas, o estudante trabalha sua capacidade de comunicação e argumentação, o que possibilita ao professor avaliar o progresso dos estudantes em relação ao domínio das aprendizagens envolvidas.

A seção final do capítulo, **Para refletir**, possibilita aos estudantes a oportunidade de realizar uma autoavaliação em relação ao seu processo de aprendizagem. Essa etapa contribui para o desenvolvimento da autopercepção e da autonomia, pois compreender seus avanços e investigar suas dificuldades é uma maneira de se perceber no processo de aprendizagem e incentivar um agir de forma responsável e comprometida. Além disso, a reflexão permite identificar a necessidade de retomar e/ou aprofundar alguns dos tópicos estudados. Um modo de utilizar essa seção como instrumento de avaliação é analisar o progresso dos estudantes de maneira qualitativa. Por exemplo, pode-se solicitar a entrega das atividades propostas nessa seção e classificar o trabalho realizado nos seguintes níveis:

- Não demonstra compreensão das perguntas, apresentando apenas respostas incorretas e incompletas;
- Demonstra alguma compreensão das perguntas, mas muitas respostas estão incompletas ou incorretas;
- Demonstra compreensão das perguntas, mas algumas respostas estão incompletas ou incorretas.
- Demonstra compreensão das perguntas, com boa organização e apresentação, estando a maioria das respostas corretas e completas.

Desse modo, é possível avaliar a pertinência das respostas em relação às situações propostas, a relevância e a correção dos aspectos matemáticos envolvidos, a qualidade da argumentação, bem como a clareza e a organização do raciocínio utilizado.

Bibliografia consultada e comentada

- BARUFI, Maria Cristina B.; LAURO, Maira M. **Funções elementares, equações e inequações**: uma abordagem utilizando microcomputador. 1. ed. São Paulo: CAEM-IME/USP, 2001. v. 1.

  O livro aborda aspectos do ensino de funções afim e quadrática a partir do uso de *softwares*.
- BOYER, Carl B. **História da matemática**. 4. ed. Tradução: Elza Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 2002.

  O livro aborda fatos e estudos da história da Matemática.
- BRASIL. **Lei nº 14.945, de 31 de julho de 2024**. Altera a Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996 (Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional), a fim de definir diretrizes para o ensino médio, e as Leis nºs 14.818, de 16 de janeiro de 2024, 12.711, de 29 de agosto de 2012, 11.096, de 13 de janeiro de 2005, e 14.640, de 31 de julho de 2023. Brasília, DF: Presidência da República, 2024. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2023-2026/2024/lei/l14945.htm. Acesso em: 24 out. 2024.

Lei que alterou a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional e estabeleceu uma mudança na estrutura do Ensino Médio, definindo a carga horária mínima dos estudantes na escola de 1 000 horas anuais e definindo uma nova organização curricular, mais flexível, que contemple a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 11 set. 2024.

  Documento oficial contendo um conjunto de orientações que norteia a (re)elaboração dos currículos de referência das escolas das redes pública e privada de ensino de todo o Brasil. Traz os conhecimentos essenciais, as competências, as habilidades e as aprendizagens pretendidas para crianças e jovens em cada etapa da Educação Básica.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Currículos e Educação Integral. **Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica**. Brasília, DF: MEC: SEB: Dicei, 2013. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/media/seb/pdf/d_c_n_educacao_basica_nova.pdf. Acesso em: 25 set. 2024.

  As Diretrizes Curriculares Nacionais (DCNs) são normas obrigatórias para a Educação Básica e orientaram a elaboração da BNCC. Elas são discutidas, concebidas e fixadas pelo Conselho Nacional de Educação (CNE).
- BRASIL. Ministério da Saúde. Secretaria de Atenção à Saúde. Departamento de Atenção Básica. **Guia alimentar para a população brasileira**. 2. ed. Brasília, DF: MS, 2014. Disponível em: https://bvsms.saude.gov.br/bvs/publicacoes/guia_alimentar_populacao_brasileira_2ed.pdf. Acesso em: 29 set. 2024.

  Apresenta aspectos sobre alimentos saudáveis e contribui para a adequação de uma rotina de alimentação saudável.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Temas Contemporâneos Transversais na BNCC**: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília, DF: MEC: SEB, 2019. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/contextualizacao_temas_contemporaneos.pdf. Acesso em: 11 set. 2024.

  Documento explicativo sobre os Temas Contemporâneos Transversais (TCTs) a serem abordados na Educação Básica.
- CARRANO, Paulo; DAYRELL, Juarez. Juventude e Ensino Médio: quem é este aluno que chega à escola. *In*: DAYRELL, Juarez; CARRANO, Paulo; MAIA, Carla L. **Juventude e Ensino Médio**: sujeitos e currículos em diálogo. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2014. p. 101-133. Disponível em: https://educacaointegral.org.br/wp-content/uploads/2015/01/livro-completo_juventude-e-ensino-medio_2014.pdf. Acesso em: 29 set. 2024.

  Como o próprio título indica, trata-se de um texto que procura “descrever” o jovem atual.
- CARVALHO, João P. de. Um problema de Fibonacci. **Revista do Professor de Matemática (RPM)**, São Paulo, n. 17, [201-]. Disponível em: http://www.rpm.org.br/cdrpm/17/2.htm. Acesso em: 29 set. 2024.

  Apresenta a história de Fibonacci e uma explicação sobre como ele chegou à sequência conhecida como sequência de Fibonacci.
- COELHO, José Renato P. **O GeoGebra no ensino das funções exponenciais**. 2016. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Laboratório de Ciências Matemáticas, Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campos dos Goytacazes, 2016. Disponível em: https://uenf.br/posgraduacao/matematica/wp-content/uploads/sites/14/2017/09/30052016Jos%C3%A9-Renato-Paveis-Coelho.pdf. Acesso em: 29 set. 2024.

  O material explora a utilização do *software* **GeoGebra** e de planilhas no estudo das funções exponenciais.
- CORREIA, Rosangela P. **Dos erros aos acertos**: o processo de avaliação na aprendizagem: perspectiva compensatória ou emancipatória? Porto Alegre: Dialética, 2023.

  A obra fala sobre como a avaliação pode ajudar o estudante a corrigir os erros ou a se libertar deles.
- DAMIANI, Magda F. Entendendo o trabalho colaborativo em educação e revelando seus benefícios. **Educar**, Curitiba, n. 31, p. 213-230, 2008. Disponível em: https://www.scielo.br/pdf/er/n31/n31a13.pdf. Acesso em: 29 set. 2024.

  Reflexões sobre o trabalho colaborativo e seu uso em sala de aula.
- EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

  O livro aborda vários fatos e estudos da Matemática cronologicamente.
- HIPPOLYTO, Luzia de Q. A avaliação educacional da matemática no ensino médio: avanços ou retrocessos? *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2016, São Paulo. **Anais** [...]. São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2016. Disponível em: https://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/8479_4409_ID.pdf. Acesso em: 29 set. 2024.

  O texto revisa como a avaliação de matemática mudou no Brasil ao longo dos anos e a compara com práticas internacionais, além de discutir os desafios que os educadores enfrentam.
- HOFFMANN, Jussara. **Avaliação mediadora**: uma prática em construção da pré-escola à universidade. 8. ed. Porto Alegre: Mediação, 1996.

  O texto aborda a avaliação como algo contínuo e humanizado, por meio da qual o professor media o aprendizado, auxiliando o estudante a se desenvolver.

- HONÓRIO, Hugo Luiz G. Sala de aula invertida: uma abordagem colaborativa na aprendizagem de matemática: estudos iniciais. *In*: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 20., 2016. Curitiba. **Anais** [...]. Curitiba: UFPR, 2016. Disponível em: http://www.ebrapem2016.ufpr.br/wp-content/uploads/2016/04/gd6_Hugo_Hono%CC%81rio.pdf. Acesso em: 29 set. 2024.

  Reflexões sobre a metodologia ativa de sala de aula invertida com base em sua aplicação prática.
- LIMA, Elon L. *et al*. **A matemática do Ensino Médio**. Rio de Janeiro: SBM, 2016. v. 1.

  Livro que aborda os conceitos de conjuntos, números e funções.
- LUCKESI, Cipriano. **Avaliação da aprendizagem escolar**: estudos e proposições. São Paulo: Cortez, 2018.

  A obra defende uma avaliação mais focada no aprendizado do que em notas, ajudando o estudante a crescer sem se prender a erros.
- LUCKESI, Cipriano. Tipificação da avaliação em educação: uma questão epistemológica. *In*: LUCKESI, Cipriano. **Luckesi**: avaliação em educação. Salvador, 6 jul. 2016. Disponível em: https://luckesi.blogspot.com/2016/07/109-tipificacao-da-avaliacao-em.html. Acesso em: 26 set. 2024.

  Nesse artigo, há reflexões sobre as adjetivações aplicadas ao ato de avaliar, discutindo como são colocadas de acordo com os momentos de sua execução.
- MELO, Marcela Camila P. de; JUSTULIN, Andresa Maria. A resolução de problemas: uma metodologia ativa na construção do conceito de semelhança de triângulos. *In*: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 15., 2019, Londrina. **Anais** [...]. Londrina: Sociedade Brasileira de Educação Matemática – Regional Paraná, 2019. Disponível em: http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/EPREM/XV_EPREM/paper/viewFile/1019/881. Acesso em: 29 set. 2024.

  Apresentação teórica e prática da metodologia ativa de resolução de problemas.
- MONTEIRO, Martha S.; CERRI, Cristina. **História dos números complexos**. São Paulo: Centro de Aperfeiçoamento de Ensino de Matemática: Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 2001. Disponível em: https: //www.ime.usp.br/~martha/caem/complexos.pdf. Acesso em: 29 set. 2024.

  Texto que apresenta informações sobre o desenvolvimento dos números complexos ao longo da história.
- MORÁN, José. Mudando a educação com metodologias ativas. *In*: SOUZA, Carlos Alberto de; MORALES, Ofelia Elisa T. (org.). **Convergências midiáticas, educação e cidadania**: aproximações jovens. Ponta Grossa: Proex: UEPG, 2015. (Coleção Mídias Contemporâneas, v. 2). Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4941832/mod_resource/content/1/Artigo-Moran.pdf. Acesso em: 30 set. 2024.

  Discussões do pesquisador brasileiro sobre a importância do trabalho com metodologias ativas no ensino atual.
- PERRENOUD, Phillipe. **Avaliação**: da excelência à regulação das aprendizagens: entre duas lógicas. Porto Alegre: Artmed, 1999.

  A obra explora a avaliação como ferramenta para acompanhar o aprendizado, comparando a busca pela excelência ao processo de monitoramento constante.
- PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

  Nessa obra, são apresentadas algumas vantagens de se trabalhar com investigações matemáticas em sala de aula, destacando-se o estabelecimento de conjecturas, reflexões e formalização do conhecimento matemático pelos estudantes.
- SANTOS, Emily. Não é brincadeira, é *bullying*: entenda comportamentos que configuram crime e saiba como agir. **G1**, São Paulo, 7 abr. 2024. Disponível em: https://g1.globo.com/educacao/noticia/2024/04/07/nao-e-brincadeira-e-bullying-entenda-comportamentos-que-configuram-crime-e-saiba-como-agir.ghtml. Acesso em: 24 out. 2024.

  A reportagem apresenta informações estatísticas sobre *bullying*, quais são os principais sinais e como agir diante dessa situação em ambiente escolar.
- SOARES, Evanildo C. **Uma investigação histórica sobre os logaritmos com sugestões didáticas para a sala de aula**. 2011. Dissertação (Mestrado em Ciências Naturais e Matemática) – Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2011. Disponível em: https://repositorio.ufrn.br/bitstream/123456789/16070/1/EvanildoCS_DISSERT.pdf. Acesso em: 29 set. 2024.

  A dissertação explora o trabalho com logaritmos em situações de sala de aula, considerando uma perspectiva histórica.
- TARDIF, Maurice. **Saberes docentes e formação profissional**. Petrópolis: Vozes, 2002.

  Nessa obra, o autor discute e qualifica os saberes que servem de base ao ofício de professor.
- ORGANIZAÇÃO DAS NAÇÕES UNIDAS PARA A EDUCAÇÃO, A CIÊNCIA E A CULTURA. **Declaração Mundial sobre Educação para Todos**: satisfação das necessidades básicas de aprendizagem, Jomtien, 1990. Brasília, DF: Unesco, 1990. Disponível em: https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000086291_por. Acesso em: 29 set. 2024.

  Documento importante para conhecimento do professor e que foi um dos suportes para a elaboração da BNCC.
- WAGNER, Eduardo. Por que as antenas são parabólicas? **Revista do Professor de Matemática (RPM)**, São Paulo, n. 33, [201-]. Disponível em: http://rpm.org.br/cdrpm/33/3.htm. Acesso em: 29 set. 2024.

  Artigo que apresenta uma reflexão sobre a forma parabólica das antenas.

Comentários e sugestões de abordagem para este Volume

O objetivo deste material é oferecer subsídios para a atividade docente, que assume um papel relevante dentro do complexo processo de ensino-aprendizagem, de forma articulada com as propostas apresentadas no Livro do estudante.

Nas **Orientações para o professor**, há uma descrição explicando de que forma estão sendo contempladas neste Volume as habilidades, as competências específicas e as competências gerais da BNCC. Em seguida, são apresentadas estratégias para auxiliar o processo de ensino-aprendizagem, de forma a contribuir para o desenvolvimento dessas competências e habilidades. Além disso, há sugestões de atividades complementares, instrumentos avaliativos e referências de outros materiais atualizados que podem ser utilizados. Vale ressaltar que esta obra não pretende ser a única referência de consulta nem apresentar soluções completas para os desafios enfrentados pelos professores, mas sim constituir uma alternativa para auxiliar a atividade docente e o processo de ensino-aprendizagem, contribuindo para a otimização do planejamento de aulas, sem deixar de respeitar a autonomia do docente que age de acordo com os desafios reais da comunidade escolar e da turma em que atua lecionando.

Este Volume é organizado em 8 capítulos. O quadro a seguir apresenta uma sugestão de cronograma, considerando 200 dias letivos, consequentemente, 40 semanas de aula. A proposta contempla 34 semanas, considerando 6 semanas para ajustes, avaliações e outras demandas pedagógicas.

Para planejamentos bimestrais, recomenda-se considerar 9 semanas de aula para cada bimestre; para planejamentos trimestrais, 12 semanas; e, para planejamentos semestrais, 17 semanas. No entanto, é importante que o professor avalie sua realidade e realize as adequações necessárias conforme o calendário escolar, de modo a privilegiar o desenvolvimento dos estudantes de acordo com suas necessidades e com as escolhas feitas pela comunidade escolar.

Semana	Capítulo	Tópicos
1ª	1	Conjuntos, tipos de conjuntos e subconjuntos
2ª	1	Operações entre conjuntos e Fórum
3ª	1	Conjuntos numéricos: naturais, inteiros e racionais
4ª	1	Conjuntos numéricos: irracionais e reais e História da Matemática
5ª	1	Conexões, Explorando a tecnologia, Atividades complementares e Para refletir
6ª	2	O que é Estatística, Fórum e Tabela de frequências
7ª	2	Gráficos
8ª	2	Medidas de tendência central e Medidas de dispersão
9ª	2	Medidas de dispersão, *Box-plot* e Diagrama de ramo e folhas
10ª	2	Explorando a tecnologia, Conexões, Atividades complementares e Para refletir
11ª	3	A ideia de função, Definição de função e Domínio, contradomínio e conjunto imagem de uma função
12ª	3	Fórum e Gráfico de uma função
13ª	3	Função afim e Gráfico da função afim
14ª	3	Explorando a tecnologia, Crescimento e decrescimento da função afim e Estudo do sinal da função afim
15ª	3	Conexões, História da Matemática, Atividades complementares e Para refletir
16ª	4	Função quadrática e Gráfico da função quadrática
17ª	4	Explorando a tecnologia, Zeros da função quadrática e Fórum
18ª	4	Vértice da parábola e Crescimento e decrescimento da função quadrática
19ª	4	Explorando a tecnologia, Conexões e Investigando o comportamento de variáveis
20ª	4	Estudo do sinal da função quadrática, História da Matemática, Atividades complementares e Para refletir
21ª	5	Introdução, Fórum, Potenciação e radiciação
22ª	5	Função exponencial
23ª	5	Explorando a tecnologia, Crescimento e decrescimento da função exponencial, Equações exponenciais e Inequações exponenciais
24ª	5	Conexões, Atividades complementares e Para refletir
25ª	6	Introdução, Comprimento, área e volume e Sistema Internacional de Unidades (SI)
26ª	6	Unidades de grandezas derivadas, Fórum, Potência e consumo de energia elétrica e Outras unidades de medida

Semana	Capítulo	Tópicos
27ª	6	Explorando a tecnologia, Conexões, História da Matemática, Atividades complementares e Para refletir
28ª	7	Proporcionalidade, Figuras semelhantes e Polígonos semelhantes
29ª	7	Semelhança de triângulos e Conexões
30ª	7	Relações métricas no triângulo retângulo e Fórum
31ª	7	Explorando a tecnologia, História da Matemática, Atividades complementares e Para refletir
32ª	8	Introdução e Razões trigonométricas no triângulo retângulo
33ª	8	Fórum e Ângulos de 30°, de 45° e de 60°
34ª	8	Explorando a tecnologia, Conexões, Atividades complementares e Para refletir

Para todos os blocos semanais, estão disponíveis atividades resolvidas e atividades propostas. Recomenda-se a seleção de parte das atividades para ser desenvolvida em sala de aula (individualmente, em duplas ou grupos maiores) e outra parte para ser realizada fora do horário de aula.

Professor, caso tenha alunos PcD (Pessoa com Deficiência), recomenda-se a leitura dos textos a seguir.

- SILVA, Luciene de Castro. **O lúdico e o conteúdo adaptado**: uma proposta para o ensino de matemática voltada ao aluno surdo incluso no ensino médio. 2016. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Departamento de Matemática e Estatística (Demat), Universidade Federal de São João Del-Rei, São João Del-Rei, 2016. Disponível em: http://dspace.nead.ufsj.edu.br/trabalhospublicos/handle/123456789/84. Acesso em: 30 out. 2024.
- BORGES, José Antonio; BORGES, Pedro Paixão. Matemática para alunos cegos: novas tecnologias desenvolvidas na UFRJ ampliam o acesso de estudantes com deficiência visual à disciplina, inclusive no ensino superior. **Ciência hoje**, Rio de Janeiro, n. 348, out. 2018. Infinitas possibilidades. Disponível em: https://cienciahoje.org.br/artigo/matematica-para-alunos-cegos/. Acesso em: 30 out. 2024.

No *site* Educ@, disponível em: http://educa.fcc.org.br/scielo.php?lng=pt (acesso em: 30 out. 2024), é possível encontrar trabalhos acadêmicos e artigos relacionados à inclusão de alunos PcD.

Capítulo 1 Conjuntos

Orientações

Neste Capítulo, são estudados conceitos relacionados a **Conjuntos**. Pretende-se que os estudantes possam se apropriar desses conceitos, das propriedades relacionadas, da linguagem utilizada, retomando e ampliando a compreensão sobre conjuntos numéricos, de modo que sejam capazes de fazer uso desse conhecimento nos diversos campos da Matemática e na análise de problemas sociais. As discussões e atividades propostas visam contribuir para o desenvolvimento das competências específicas 2, 4 e 5 da área de Matemática e suas Tecnologias. Os estudantes também são convidados a discutir sobre alimentação saudável, o que possibilita desenvolver a competência geral 8, destacando o autoconhecimento e o cuidado da saúde física e mental.

No tópico **Propriedades da relação de inclusão**, recomenda-se explicar que:

- a **propriedade antissimétrica** é utilizada quando se deseja demonstrar que dois conjuntos A e B são iguais. Para isso, prova-se que todo elemento do conjunto A pertence ao conjunto B e que todo elemento do conjunto B pertence ao conjunto A;
- a **propriedade transitiva** é a base do raciocínio dedutivo, denominado silogismo.

Acompanhe um exemplo de silogismo: Todo ser vivo é mortal. Os gatos são seres vivos, logo são mortais. Esse raciocínio é expresso por meio da linguagem de conjuntos do seguinte modo:

Considere A o conjunto dos mortais, B o conjunto dos seres vivos e C o conjunto dos gatos. A primeira afirmação é representada pela relação de inclusão $B \subset A$ (B é um subconjunto de A), e a afirmação "os gatos são seres vivos" é representada por $C \subset B$ (C é um subconjunto de B). Logo, pela propriedade transitiva, $C \subset A$ (C é um subconjunto de A), o que significa que "os gatos são mortais".

No tópico **Operações entre conjuntos**, o primeiro boxe **Saiba que...** apresenta informações sobre a distinção entre os conectivos **ou** e **e**, assim como a relação entre as operações de **união** e de **intersecção de conjuntos**. É importante enfatizar essa reflexão, de modo que o estudante compreenda os conceitos envolvidos. Esse estudo incentiva a competência geral 7, pois auxilia os estudantes no desenvolvimento da capacidade argumentativa. Sugere-se propor a eles atividades complementares que incentivem essa reflexão. Uma possibilidade é apresentada a seguir.

Leia a afirmação a seguir e, com base nela, responda às questões em cada item.

Flávia estuda Matemática às segundas-feiras **ou** às sextas-feiras.

a) Flávia pode ter estudado Matemática somente na segunda-feira? Resposta: Sim.

b) Flávia pode ter estudado Matemática somente na sexta-feira? Resposta: Sim.

c) Flávia pode ter estudado Matemática somente na quarta-feira? Resposta: Não.

d) Flávia pode ter estudado Matemática na segunda--feira e na sexta-feira também? Resposta: Sim.

e) Flávia pode ter estudado Matemática na segunda-feira, na quarta-feira e na sexta-feira? Resposta: Sim.

A mesma atividade pode ser refeita, mas com a frase "Flávia estuda Matemática nas segundas-feiras e nas sextas-feiras.". Nesse caso, as respostas são: **a)** Não; **b)** Não; **c)** Não; **d)** Sim; **e)** Sim.

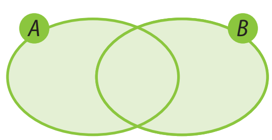
A situação do item **d** pode gerar dúvidas, pois é possível entender equivocadamente que o conectivo **ou** admite apenas uma das possibilidades (apenas *A* ou apenas *B*). Para que a primeira afirmação seja verdadeira, basta que Flávia estude em um dos dois dias (segunda-feira ou sexta-feira), mas isso não exclui outras possibilidades. Da mesma maneira, na situação do item **e**, ambas as afirmações são verdadeiras.

Para melhor compreensão das **Propriedades da união e da intersecção de conjuntos**, recomenda-se propor uma atividade complementar aos estudantes: elaborar diagramas de Venn para representar algumas das propriedades enunciadas. O *software* **InteractiVenn**, disponível em http://www.interactivenn.net (acesso em: 1 out. 2024), é uma ferramenta *on-line* que pode ser utilizada para essa finalidade.

Exemplos:

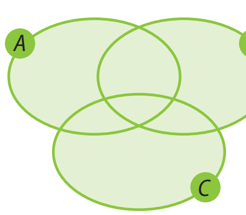
- Propriedade comutativa da união: $A \cup B = B \cup A$

Observar se os estudantes compreendem que fazer a união dos elementos do conjunto *A* com os elementos do conjunto *B* é equivalente a fazer a união dos elementos do conjunto *B* com os do conjunto *A*.



- Propriedade associativa da união: $(A \cup B) \cup C =$ $= A \cup (B \cup C)$

Observar se os estudantes compreendem que fazer primeiro a união dos elementos dos conjuntos *A* e *B* e depois acrescentar a essa união os elementos do conjunto *C* é equivalente a fazer a união dos elementos dos conjuntos *B* e *C* e depois juntá-los aos elementos do conjunto *A*.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Além disso, o tópico **Propriedades da união e da intersecção de conjuntos** é uma oportunidade para se iniciar um trabalho com demonstrações. Pode-se, por exemplo, apresentar as demonstrações das propriedades comutativa da união e associativa da intersecção, conforme apresentado a seguir, e solicitar aos estudantes as demonstrações das demais propriedades.

Propriedade comutativa da união:

$x \in A \cup B \Rightarrow x \in A$ ou $x \in B \Rightarrow x \in B$ ou $x \in A \Rightarrow x \in B \cup A$

Propriedade associativa da intersecção:

$x \in (A \cap B) \cap C \Rightarrow x \in A \cap B$ e $x \in C \Rightarrow x \in A$ e $x \in B$ e $x \in C \Rightarrow x \in A$ e $x \in B \cap C \Rightarrow x \in A \cap (B \cap C)$

O boxe **Fórum** oportuniza o desenvolvimento de reflexões a respeito das diferenças entre as pessoas, mostrando como é possível promover estratégias que permitam a inclusão de todas elas em diferentes aspectos da vida. Além disso, o debate permite conhecer diferentes tipos de esporte e refletir sobre campeonatos. Essa atividade pode ser mais bem aprofundada se feita com o professor de Educação Física, da área de Linguagens e suas Tecnologias, em um trabalho interdisciplinar.

Propõe-se aos estudantes que, em grupos, pesquisem sobre os jogos Parapan-Americanos, a fim de que exercitem suas autonomias no processo de aprendizagem e que desenvolvam a competência de buscar informações em fontes confiáveis.

Esses jogos são um evento multidesportivo, realizado a cada quatro anos e organizado pelo Comitê Paralímpico das Américas.

Para ampliar a preparação para o debate, sugere-se propor aos estudantes que, em duplas ou trios, pesquisem a respeito de um dos esportes adaptados presentes nesse evento para apresentá-lo ao restante da turma, de modo a ampliar o conhecimento de todos.

No debate, recomenda-se incentivar reflexões visando à empatia e ao acolhimento às pessoas com deficiência, promovendo o respeito e estimulando a troca de saberes e culturas. Pode-se orientar uma conversa sobre cooperação, de modo que se estimule o respeito às diferenças, a valorização da diversidade de indivíduos e a eliminação de preconceitos. Desse modo, colabora-se para o desenvolvimento da competência geral 9.

No boxe **Pense e responda** do tópico **Conjunto dos números inteiros**, espera-se que os estudantes compreendam que o conjunto dos números naturais está contido no conjunto dos números inteiros. Assim, todo número natural também é um número inteiro. Também se espera que eles entendam que existem elementos no conjunto dos números inteiros que não fazem parte do conjunto dos números naturais. Pode-se propor aos estudantes que representem cada situação em um diagrama de Venn. É interessante que eles se conscientizem de que, para justificarem a negativa ao segundo questionamento desse boxe, precisam apenas apresentar um exemplo do fato, como "-2 é um número inteiro, mas não é um número natural". Desse modo, os estudantes desenvolvem capacidade de argumentação e de formação matemática, contribuindo para o desenvolvimento da competência específica 5 da área de Matemática e suas Tecnologias. Nesse sentido, e refletindo sobre o pensamento dedutivo, recomenda-se trabalhar com os estudantes o vídeo **Conclusões precipitadas**, do *site* Matemática Multimídia da Unicamp, disponível em https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1075 (acesso em: 1 out. 2024).

Para aprofundar o trabalho sobre implicações e lógica, recomenda-se o material **O que é lógica matemática?**, disponível em https://cdnportaldaobmep.impa.br/portaldaobmep/uploads/material_teorico/1xoebyf256iv.pdf (acesso em: 1 out. 2024).

No tópico **Alguns números irracionais famosos**, uma possibilidade para se iniciar o estudo do **número pi (π)** é a realização da atividade a seguir.

Materiais: régua, compasso, barbante e calculadora (opcional).

Modo de fazer: com o uso da régua e do compasso, cada estudante constrói uma circunferência com determinada medida de diâmetro. Colocando o barbante sobre a circunferência, é possível medir, de modo aproximado, o comprimento dela. Na lousa, recomenda-se construir um quadro com três colunas: diâmetro (d), comprimento (C) e razão $\left(\frac{C}{d}\right)$. Em seguida, preencher o quadro com os dados de cada estudante e, com o auxílio da calculadora, realizar a divisão entre C e d, ou seja, escrever a fração $\left(\frac{C}{d}\right)$ na sua representação correspondente na forma decimal. Após preencher o quadro, é importante realizar uma reflexão sobre as semelhanças e as diferenças observadas. Espera-se que os valores fiquem próximos de 3,14, porém erros de medição causarão discrepâncias. Caso haja diferenças muito grandes, convém orientar os estudantes a refazer as medições, o que será uma oportunidade para auxiliá-los na aprendizagem.

Para explorar demais aspectos do número π, sugere-se a leitura dos seguintes artigos:

- DIA do pi: para que se usa a mais famosa constante matemática. **BBC News Brasil**, [*s. l.*], 14 mar. 2018. Disponível em: https://www.bbc.com/portuguese/geral-43405566. Acesso em: 1 out. 2024.
  O artigo apresenta curiosidades, como a data de comemoração do número, e explica sua importância para além da Geometria: em celulares, GPS (Sistema de Posicionamento Global) e relógios.
- ORTEGA, Rodrigo. Para que serve a sequência do π? **Mundo Estranho**, São Paulo, 22 fev. 2024. Disponível em: https://super.abril.com.br/mundo-estranho/para-que-serve-a-sequencia-do-%CF%80. Acesso em: 1 out. 2024.
  O artigo apresenta exemplos de aplicação do número π na Física e no automobilismo.

Após a leitura, pode-se propor aos estudantes que, em grupos, pesquisem sobre as aplicações citadas nos artigos, aprofundando os estudos.

Sobre o tópico **O número de Euler (*e*)**, recomendam-se os artigos:

- PRECIOSO, Juliana Conceição; PEDROSO, Hermes Antonio. História do número *e*: gênese e aplicações. **Matemática e Estatística em Foco**, Uberlândia, v. 1, n. 1, p. 31-44, 2013. Disponível em: http://www.seer.ufu.br/index.php/matematicaeestatisticaemfoco/article/view/13913. Acesso em: 1 out. 2024.
- POMMER, Wagner M. O número de Euler: possíveis abordagens no ensino básico. **Nilson José Machado**, São Paulo, p. 1-14, 2010. Seminário sobre Ensino de Matemática apresentado no Programa de pós-graduação da Faculdade de Educação da USP (Feusp). Disponível em: https://www.nilsonjosemachado.net/sema20100831.pdf. Acesso em: 1 out. 2024.

Esses dois artigos apresentam aspectos históricos que podem ser trabalhados com os estudantes. Além disso, eles relacionam o número de Euler com aspectos da Matemática financeira, da função logarítmica, das funções exponenciais e da hipérbole, indicando possibilidades para o trabalho em aula. As sugestões podem ser, em um primeiro momento, indicadas aos estudantes e, posteriormente, aprofundadas, quando o foco do estudo for as funções exponenciais, por exemplo.

Outra possibilidade de aprofundamento no tema é trabalhar o texto a seguir, em parceria com o professor de Língua Inglesa, da área de Linguagens e suas Tecnologias.

- O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **The number *e***. Escócia: MacTutor: Universidade St. Andrews, 2001. Disponível em: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/e/. Acesso em: 1 out. 2024.

No tópico **Intervalos reais**, são apresentados dois diferentes modos de representar intervalos reais, bem como seus respectivos símbolos, contribuindo para o desenvolvimento da competência específica 4 da área de Matemática e suas Tecnologias.

A seção **História da Matemática** trata da descoberta, pelos pitagóricos, do conceito de grandezas incomensuráveis e de sua relação com os números irracionais, contribuindo para a competência geral 1.

Conforme exemplificado na seção, duas grandezas de mesma espécie são comensuráveis quando a razão entre elas pode ser expressa por um número racional. Caso contrário, se a razão entre essas duas grandezas não pode ser expressa por um número racional, dizemos que são incomensuráveis.

A descoberta de que duas grandezas de mesma natureza podem não ter uma medida em comum teve consequências importantes, pois ajudou a explicar, por exemplo, o caráter formal e abstrato da Geometria, à medida que as grandezas incomensuráveis desafiam os sentidos ao admitir que sempre é possível encontrar um segmento tão pequeno, que seja múltiplo comum de ambos os segmentos que se queira comparar.

Além do exemplo de que o lado e a diagonal do quadrado são segmentos incomensuráveis, também é possível citar a incomensurabilidade do diâmetro de uma circunferência e do comprimento de uma circunferência.

Para se aprofundar no assunto, a seguinte leitura é sugerida:

- ROQUE, Tatiana. **História da matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

Nessa obra, a autora explica algumas hipóteses sobre a descoberta da incomensurabilidade e sobre como a pesquisa das grandezas incomensuráveis foi positiva, possibilitando o desenvolvimento contínuo da Matemática e de novas técnicas para lidar com razões e proporções.

A partir do Tema Contemporâneo Transversal Educação Alimentar e Nutricional na seção **Conexões com…**, são propostos textos e atividades que permitem refletir sobre a importância de uma alimentação balanceada para a saúde e sobre a tomada de decisões conscientes que melhorem a qualidade de vida, contribuindo, assim, para a competência específica 2 da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

Esse trabalho pode ser feito com os professores de Educação Física, da área de Linguagens e suas Tecnologias, e de Biologia, da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, favorecendo a aprendizagem.

Recomenda-se que a atividade **1** seja realizada a partir de uma conversa coletiva, de modo que os estudantes possam compartilhar suas ideias e escutar as dos colegas, ampliando suas considerações. Outras perguntas relacionadas aos hábitos alimentares dos estudantes podem contribuir com a discussão: Como são seus hábitos alimentares? Isso é uma preocupação na vida de vocês? Quais são as possibilidades e as dificuldades para melhorar esses hábitos? Dessa maneira, essa atividade permite desenvolver a competência geral 8, uma vez que esse é um momento de examinar e pensar sobre o cuidado de si com autocrítica.

Na atividade **2**, estuda-se o Índice de Massa Corpórea (IMC) como uma maneira de a Matemática contribuir para a investigação de problemas de saúde e fornecer indicativos para a tomada de decisão com fundamento, desenvolvendo, assim, a competência específica 2 da área de Matemática e suas Tecnologias. Após a compreensão do cálculo do IMC, sugere-se trabalhar o texto a seguir, da Associação Brasileira para o Estudo da Obesidade e da Síndrome Metabólica (Abeso), que mostra as conclusões da análise de diversas pesquisas realizadas com adultos (de 46 anos, em média) sobre IMC alto. Tem-se que:

> [...]
>
> [...] Cada 5 kg/m² adicional [no IMC] traduziu-se em um aumento de 40% na mortalidade por doenças do coração, derrames e demais problemas vasculares; de 60% a 120% para diabetes, doenças de fígado e rins; de 10% na mortalidade por câncer; e de 20% de aumento em pessoas com doenças pulmonares.
>
> [...]

SANTOS, Beth. **IMC alto leva a aumento da mortalidade**. São Paulo: Abeso, 20 mar. 2009. Disponível em: http://www.abeso.org.br/atitude-saudavel/imc. Acesso em: 1 out. 2024.

Apesar dos apontamentos das pesquisas citadas anteriormente, é importante observar que o IMC tem limitações e que seu resultado não deve ser interpretado isoladamente, pois não diz respeito aos índices de gordura, os quais variam de acordo com a idade, o sexo, a etnia e a prática esportiva. As Diretrizes Brasileiras de Obesidade, também da Abeso, dispõem o seguinte:

> [...]
>
> O IMC (calculado através da divisão do peso em kg pela altura em metros elevada ao quadrado, kg/m²) é o cálculo mais usado para avaliação da adiposidade corporal. O IMC é um bom indicador, mas não totalmente correlacionado com a gordura corporal. É simples, prático, sem custo. Pode haver diferenças na composição corporal em função do sexo, idade, etnia, no cálculo de indivíduos sedentários quando comparados a atletas, na presença de perda de estatura em idosos devido à cifose, em edemaciados, etc. O IMC não distingue massa gordurosa de massa magra, podendo ser menos preciso em indivíduos mais idosos, em decorrência da perda de massa magra e diminuição do peso, e superestimado em indivíduos musculosos. O IMC não reflete a distribuição da gordura corporal. [...] a medida da distribuição de gordura é importante na avaliação de sobrepeso e obesidade porque a gordura visceral (intra-abdominal) é um fator de risco potencial para a doença, independentemente da gordura corporal total. Indivíduos com o mesmo IMC podem ter diferentes níveis de massa gordurosa visceral. A distribuição de gordura abdominal é claramente influenciada pelo sexo: para algum acúmulo de gordura corporal, o homem tem, em média, o dobro da quantidade de gordura abdominal em relação à mulher antes da menopausa. Além disso, o IMC não é indicador do mesmo grau de gordura em populações diversas, particularmente por causa das diferentes proporções corporais.
>
> [...]
>
> [...] Portanto, o ideal é que o IMC seja usado em conjunto com outros métodos de determinação de gordura corporal. A combinação de IMC com medidas da distribuição de gordura

pode ajudar a resolver alguns problemas do uso do IMC isolado.

[...]

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA PARA O ESTUDO DA OBESIDADE E DA SÍNDROME METABÓLICA. **Diretrizes brasileiras de obesidade 2016**. 4. ed. São Paulo: Abeso, 2016. Disponível em: https://abeso.org.br/wp-content/uploads/2019/12/Diretrizes-Download-Diretrizes-Brasileiras-de-Obesidade-2016.pdf. Acesso em: 1 out. 2024.

No boxe **Pense e responda**, propõe-se aos estudantes que identifiquem os conceitos matemáticos mobilizados durante o estudo da seção **Conexões com...**. Essa identificação é importante para que os estudantes percebam a utilidade dos conceitos matemáticos na compreensão dos Temas Contemporâneos Transversais.

A seção **Explorando a tecnologia** contribui para o desenvolvimento da habilidade EM13MAT315, pois os estudantes aprenderão como escrever um algoritmo que resolve problemas que envolvem a quantidade de elementos de um conjunto e registrar, por meio de um fluxograma, um algoritmo que resolve um conjunto de problemas do mesmo tipo.

É importante que os passos do algoritmo sejam lidos, um a um, com o diagrama que o representa. Sugere-se que os estudantes identifiquem os símbolos no fluxograma e sigam as etapas para resolver o problema apresentado. É válido solicitar aos estudantes que busquem as informações de cada passo no enunciado do problema. Recomenda-se que os estudantes comparem o fluxograma com o algoritmo apresentado.

Na atividade **2**, espera-se que os estudantes escrevam, minimamente, que é necessário ter uma escova e um creme dental, abrir o creme dental, colocar o creme dental na escova, abrir a torneira, molhar a parte da escova com o creme, fechar a torneira, escovar os dentes, abrir a torneira novamente, enxaguar a boca e a escova, fechar a torneira, guardar a escova, fechar e guardar o creme. Depois, os estudantes devem elaborar um fluxograma com base no algoritmo que eles fizeram. O desenvolvimento dessa atividade estimula a competência específica 3 da área de Matemática e suas Tecnologias. É interessante que os estudantes troquem os algoritmos e o fluxograma entre si para que um colega possa testá-los e apontar melhorias, se necessário.

Na atividade **3**, é importante compartilhar com a turma os diferentes fluxogramas criados pelos estudantes e validá-los. Se julgar oportuno, organizar os estudantes em duplas ou trios para resolver essa tarefa.

Avaliação

A atividade **2** da Abertura do Capítulo possibilita uma avaliação diagnóstica das seguintes habilidades relacionadas aos conjuntos numéricos que foram trabalhadas no Ensino Fundamental – Anos Finais.

(**EF09MA01**) Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade).

(EF09MA02) Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica.

No tópico **Conjuntos numéricos** são estudadas as principais propriedades e aplicações dos conjuntos dos números naturais, dos números inteiros, dos números racionais, dos números irracionais e dos números reais. Ao término dos estudos, pode-se propor uma atividade interativa sobre conjuntos numéricos, disponível em https://portaldaobmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=87&tipo=5 (acesso em: 1 out. 2024). Dessa maneira, é possível verificar se os estudantes compreenderam as relações entre os conjuntos e as características dos elementos que os compõem.

A seguir, sugestões de atividades cujas análises de suas resoluções podem contribuir para avaliar a evolução de cada estudante e orientar seus estudos.

1ª avaliação formativa: atividades **9** e **13** (página 17).
2ª avaliação formativa: atividades **17** e **24** (página 23).
3ª avaliação formativa: atividades **32** e **38** (página 31).
4ª avaliação formativa: atividades **44** e **47** (página 39).

Capítulo 2 Noções de Estatística

Orientações

Neste Capítulo, os estudantes exploram noções de **Estatística**, a fim de utilizarem estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar várias situações a partir da análise de tabelas, gráficos e pesquisas estatísticas divulgadas por diferentes meios, o que favorece principalmente o desenvolvimento da competência específica 1 da área de Matemática e suas Tecnologias e, de modo particular, o desenvolvimento da habilidade EM13MAT102. Além disso, esse estudo possibilita compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos para construir modelos e resolver problemas, analisando os resultados e colaborando com o desenvolvimento das competências específicas 3 e 4 da área de Matemática e suas Tecnologias e, em particular, o desenvolvimento das habilidades EM13MAT316, EM13MAT406 e EM13MAT407.

A **Abertura** do Capítulo apresenta dados estatísticos relacionados ao envelhecimento populacional no Brasil.

O texto possibilita um diálogo com os estudantes a respeito dos desafios enfrentados pela sociedade brasileira acerca desse assunto. Pode-se explicar aos estudantes que o Brasil possui o **Estatuto da Pessoa Idosa**, que foi instituído pela lei nº 10.741, garantindo à pessoa idosa diversos direitos, como o direito à vida, à dignidade, ao respeito e à convivência familiar e comunitária. Vale ressaltar que o termo "pessoa" é utilizado para combater a desumanização do envelhecimento. O Estatuto é uma medida que visa confrontar o preconceito que existe contra o envelhecimento e trazer dignidade e respeito a essa parcela da população, além de assegurar-lhe gratuitamente o acesso aos medicamentos e ao transporte público. O Estatuto completo está disponível em https://www.gov.br/mdh/pt-br/centrais-de-conteudo/pessoa-idosa/estatuto-da-pessoa-idosa.pdf/view (acesso em: 1 out. 2024).

Espera-se que, ao realizarem as atividades **2** e **3**, os estudantes identifiquem se os direitos das pessoas idosas com as quais convivem são respeitados e assegurados. Tanto o diálogo quanto a realização dessas atividades trabalham o desenvolvimento da competência geral 9 da BNCC.

No tópico **O que é Estatística**, recomenda-se explicar que a Estatística é imprescindível para os estudos científicos em diversas áreas do conhecimento e está muito presente no dia a dia, como em notícias diversas, por exemplo. Desse modo, compreendê-la se faz necessário tanto para a formação de um cidadão crítico como para a formação de pesquisadores e cientistas. O texto a seguir destaca a importância da Estatística na análise de situações em diferentes campos de estudo.

> [...] Sua principal função é evitar determinados erros analíticos que são comuns quando utilizamos métodos *heurísticos*.
>
> Por exemplo, muitas pessoas resolvem incentivar seus filhos a treinarem basquete durante a infância esperando que esse esporte os tornem mais altos quando chegarem à vida adulta. O raciocínio simplista dessas pessoas está baseado na constatação de que a maioria dos atletas profissionais de basquete é formada por atletas muito altos. Na verdade, o que ocorre é exatamente o contrário, sendo chamado **viés de sobrevivência**: apenas as crianças que começam a ficar mais altas do que os colegas ganham destaque nos times juvenis de basquete e, com isso, têm maiores chances de chegar às ligas profissionais, enquanto as crianças de estatura mediana tentam escolher outras profissões. De outra forma, vários estudos médicos comprovaram que a maioria dos jogadores de basquete que são altos também possuem os pais altos, o que aponta fatores genéticos como principais influenciadores da altura de uma pessoa na vida adulta.
>
> Outro exemplo comum que podemos destacar é o uso da Estatística para analisar se determinadas políticas públicas atingiram ou não seus objetivos.
>
> Hoje em dia, os métodos estatísticos são usados em diversos campos de investigação científica, como Medicina, Demografia, Meteorologia, Economia etc.
>
> [...]

HOLANDA, Francisco Bruno. **Estatística básica**: o início. Rio de Janeiro: Portal da Matemática OBMEP, 4 fev. 2019. p. 1. Disponível em: https://cdnportaldaobmep.impa.br/portaldaobmep/uploads/material_teorico/cfcdxhltnhsso.pdf. Acesso em: 1 out. 2024.

Pode-se dizer que a Estatística é formada por duas áreas principais. A primeira é a Estatística descritiva, que tem como objetivo coletar dados, organizá-los e analisá-los. A segunda área é a Estatística inferencial (ou Inferência estatística), que permite realizar conclusões sobre todo um grupo a partir de dados de uma parte da população. O vídeo **O que é Estatística?**, disponível em https://www.ime.usp.br/ativestat/atividades/filmes/fv10.php (acesso em: 1 out. 2024), pode ser utilizado nesse momento inicial, pois apresenta as principais características dessa ciência.

A reportagem **Mais da metade dos brasileiros já presenciou ato de racismo** e o conteúdo do boxe **Pense e responda** podem ser trabalhados com o boxe **Fórum**. Essa é uma possibilidade de ampliar a discussão desse tema, pois, tanto a seção quanto o boxe exploram o Tema Contemporâneo Transversal Cidadania e Civismo, desenvolvendo a competência geral 9. O tema racismo também pode ser trabalhado em parceria com os professores da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, colaborando com o desenvolvimento da competência específica 5 dessa área.

Ler a reportagem **Mais da metade dos brasileiros já presenciou ato de racismo** ou apresentar o vídeo **O que é racismo estrutural? | Desenhando** é uma forma de introduzir o tema. Sugere-se incentivar os estudantes a discutir e a debater sobre as políticas públicas existentes e sobre como elas podem contribuir para o fim do racismo estrutural, que afeta diferentes grupos de forma desigual. É provável que os estudantes citem o sistema de cotas, que está presente nos vestibulares de universidades públicas. Pode-se aproveitar o momento para abordar o assunto de como as cotas são uma medida para amenizar desigualdades sociais e promover a igualdade de oportunidades.

Os estudantes podem, por exemplo, trazer discussões a respeito da reforma do sistema de justiça criminal brasileiro, de modo a reduzir o viés racial, de programas de habitação acessível e equitativa, de iniciativas de inclusão no mercado de trabalho e de políticas de saúde que visam reduzir disparidades raciais.

Eles podem considerar também algumas formas de se envolverem ativamente com o processo político para promover mudanças na sociedade. Isso pode incluir a elaboração de propostas para serem enviadas a representantes políticos, a participação de atos pacíficos, o apoio a organizações comunitárias e o envolvimento em campanhas de conscientização sobre o racismo estrutural.

A promoção de uma educação antirracista é fundamental no combate ao racismo estrutural e envolve a conscientização sobre a história do racismo e suas manifestações contemporâneas. Além disso, incentiva à reflexão crítica sobre as estruturas sociais que perpetuam a desigualdade racial. É importante não só abordar explicitamente o racismo e a discriminação racial nos currículos escolares, mas também questionar as normas e as práticas institucionais que mantêm o *status quo* racial. Uma educação antirracista tem como objetivo habilitar as pessoas a reconhecer e contestar o racismo em todas as suas formas.

Além disso, a educação antirracista deve promover a empatia, o respeito e a valorização da diversidade racial. Isso pode ser alcançado, por exemplo, por meio da promoção de ambientes escolares inclusivos e acolhedores para todos os estudantes, independentemente de sua raça ou etnia. Ao promover a consciência e a ação antirracistas, é possível trabalhar juntos para a construção de um mundo onde a igualdade racial seja uma realidade.

No tópico **Tabela de frequências**, se necessário, retomar o conceito de porcentagem estudado no Ensino Fundamental – Anos Finais. É essencial que os estudantes saibam a equivalência entre a escrita na forma de porcentagem, fracionária e decimal, por exemplo, $37\% = \frac{37}{100} = 0{,}37$.

O estudo das tabelas e dos gráficos explorados ao longo do Capítulo contribui para o desenvolvimento da competência específica 4 da área de Matemática e suas Tecnologias, em particular, da habilidade EM13MAT406, uma vez que são exploradas diferentes maneiras de registro matemático.

No tópico **Gráficos**, abordam-se características de diferentes gráficos, assunto estudado no Ensino Fundamental – Anos Finais, e que agora é retomado e aprimorado. O tema possibilita desenvolver a competência geral 4, à medida que se amplia a análise de diferentes gráficos, fornecendo subsídios para que essa linguagem seja compreendida e utilizada pelos estudantes para compartilhar informações em diferentes contextos. Além disso, possibilita exercitar a investigação, a análise crítica e o estabelecimento de conclusões embasadas em dados.

Ao trabalhar a construção do **Gráfico de setores**, é oportuno realizar as construções com transferidor e compasso, observando, cuidadosamente, a relação entre a medida do ângulo central do setor circular e a parte do todo que esse setor representa.

Ao estudar o **Gráfico de linha**, ressaltar a característica temporal desse tipo de gráfico, que permite realizar uma análise de dados em relação ao crescimento ou decrescimento no decorrer do tempo. Para estudar a característica de séries temporais, para as quais o gráfico de linha é adequado, recomenda-se realizar o experimento **Séries temporais**, disponível em https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1034 (acesso em: 1 out. 2024). Nele, os estudantes vão coletar dados ao longo de determinado intervalo de tempo e, posteriormente, analisar tais informações. É possível aproveitar o contexto trabalhado no boxe **Pense e responda** para reforçar o tema abordado anteriormente sobre racismo estrutural.

Ao analisar o **pictograma** apresentado, enfatizar a importância da legenda nesse tipo de gráfico.

O estudo do **Histograma** contribui para o desenvolvimento da competência específica 4 da área de Matemática e suas Tecnologias, em particular a habilidade EM13MAT407, pois amplia as possibilidades de interpretação e comparação de dados estatísticos por meio de um novo tipo de gráfico.

O estudo do tópico **Medidas de tendência central** permite desenvolver a competência específica 3 da área de Matemática e suas Tecnologias, em particular a habilidade EM13MAT316, pois envolvem os conceitos de média, moda e mediana.

Para finalizar esse tópico, recomenda-se propor aos estudantes as atividades interativas **Média, moda e mediana** e **Entre médias**, disponíveis em https://portaldaobmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=64&tipo=5 (acesso em: 19 set. 2024). Desse modo, com base nelas, os estudantes podem verificar que a média, sozinha, pode não ser uma boa representante de um conjunto de dados; por isso, outras medidas auxiliam essa descrição.

O estudo do tópico **Medidas de dispersão** permite trabalhar a competência específica 3 da área de Matemática e suas Tecnologias, em particular a habilidade EM13MAT316, pois envolve os conceitos de amplitude, variância, desvio médio e desvio padrão.

No tópico **Amplitude**, explorar a situação apresentada envolvendo as medidas das peças usinadas. Um exemplo cotidiano que pode ser citado é a amplitude térmica diária.

No tópico **Desvio médio**, apresentar exemplos do símbolo somatório mencionado no boxe **Saiba que...**, a fim de que os estudantes se familiarizem com a utilização desse símbolo.

Ao trabalhar com o tópico **Variância e desvio padrão**, enfatizar as questões propostas no boxe **Pense e responda**, a fim de que os estudantes compreendam que essas medidas estatísticas não podem ter como resultado um valor negativo.

Ao estudar os tópicos ***Box-plot*** e **Diagrama de ramo e folhas**, os estudantes têm a oportunidade de desenvolver a competência específica 4 da área de Matemática e suas Tecnologias, em particular a habilidade EM13MAT407.

Para acompanhar o estudo do tópico ***Box-plot***, sugere-se utilizar o objeto de aprendizagem **Conhecendo o *Box-plot***, disponível em http://www.cdme.im-uff.mat.br/conheceboxplot/conheceboxplot-html/conheceboxplot_intro.html (acesso em: 1 out. 2024). De forma interativa, os estudantes visualizam quais são as características e etapas da construção de um *box-plot*, além de responderem a perguntas que auxiliam em seus estudos. Além disso, recomenda-se ao professor o artigo **Sobre o *Box-plot* no GeoGebra**, disponível em https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/8115/6574 (acesso em: 1 out. 2024), que faz uma análise do uso do *software* **GeoGebra** para a construção do *box-plot*.

O diagrama de ramo e folhas facilita a localização de medidas estatísticas, como a mediana e a moda, além de ajudar o cálculo da amplitude. Ele é similar a um histograma, com a diferença de que, nesse tipo de gráfico, não se perdem informações sobre cada um dos elementos do conjunto de dados. Recomenda-se enfatizar a necessidade de uma legenda, pois a escolha da composição dos ramos e das folhas pode variar (décimos, unidades, dezenas etc.).

Para a construção desse diagrama, sugere-se utilizar papel quadriculado indicando que o espaço ocupado por cada dígito deve ser o mesmo, para que não ocorram distorções visuais das informações. O mesmo pode ser feito com a utilização de planilhas eletrônicas.

Na seção **Explorando a tecnologia**, utiliza-se o GeoGebra para criar diagramas de ramo e folhas e *box-plot*, ampliando o repertório dos estudantes, de modo que se comuniquem por meio de diferentes linguagens a partir da utilização de tecnologias digitais, o que permite o desenvolvimento das competências gerais 4 e 5. Além disso, contribui também para o desenvolvimento da competência específica 4 da área de Matemática e suas Tecnologias, em particular as habilidades EM13MAT406 e EM13MAT407, uma vez que permite aos estudantes construir, interpretar e analisar diferentes tipos de gráfico.

Recomenda-se orientar os estudantes a fazer o *download* do GeoGebra, conforme mencionado, caso eles ainda não o tenham utilizado.

As atividades **2** e **3** propostas na seção dependem da pesquisa realizada pelos estudantes. Na atividade **2**, eles devem selecionar 10 pessoas aleatoriamente e construir um diagrama de ramo e folhas e um *box-plot* com as idades dessas pessoas. Na atividade **3**, eles precisam comparar os gráficos elaborados na atividade anterior para verificar semelhanças e diferenças entre eles. Sugere-se destinar um tempo de aula para uma discussão a respeito dos gráficos construídos pelos estudantes, a fim de que possam apresentar conclusões a partir das informações obtidas.

A seção **Conexões com...** trabalha o Tema Contemporâneo Transversal Educação Ambiental. Essa seção aborda o tema Amazônia Legal, o que é uma oportunidade para desenvolver um trabalho mais aprofundado com os professores de Biologia e Geografia.

Ao explorar o texto, o gráfico e a tabela apresentados, conversar com os estudantes a respeito das informações sobre o desmatamento, levando-os a refletir com criticidade o total de área desmatada ao longo dos anos cujos dados são apresentados. As questões dessa seção ajudam a aprofundar essa conversa com o apoio de dados e a aplicar conceitos matemáticos nas análises propostas, contribuindo para o trabalho com as competências gerais 4 e 7.

Na atividade **1**, espera-se que os estudantes indiquem que a média não é suficiente para representar esses dados. Sugere-se, como atividade complementar, solicitar aos estudantes que calculem outras medidas estatísticas, como a moda e a mediana, além de medidas de dispersão.

A atividade **2** propicia uma discussão ampla a respeito das atitudes pessoais perante o meio ambiente. Caso se estabeleça a parceria sugerida com outros componentes curriculares, pode-se orientar a discussão e abordar aspectos do aquecimento global ou das reservas indígenas, as quais têm importante colaboração no que se refere à preservação do meio ambiente. Recomenda-se incentivar os estudantes a compartilhar com a comunidade escolar, nas redes sociais, as postagens por eles elaboradas na atividade **3**.

Os contextos apresentados nas atividades complementares **2** e **6** podem servir de discussão a respeito, respectivamente, dos temas violência contra a mulher e violência contra a comunidade LGBTQIAPN+, reforçando a importância do respeito e do combate à violência. Pode-se apresentar dados mais recentes sobre a violência contra a mulher a partir do relatório **Atlas da violência**, elaborado pelo Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada (Ipea), disponível em https://www.ipea.gov.br/atlasviolencia/arquivos/artigos/7868-atlas-violencia-2024-v11.pdf (acesso em: 1 out. 2024).

Avaliação

As atividades **1** e **4** da **Abertura** do Capítulo permitem uma avaliação diagnóstica das seguintes habilidades que foram trabalhadas no Ensino Fundamental – Anos Finais.

(**EF09MA21**) Analisar e identificar, em gráficos divulgados pela mídia, os elementos que podem induzir, às vezes propositadamente, erros de leitura, como escalas inapropriadas, legendas não explicitadas corretamente, omissão de informações importantes (fontes e datas), entre outros.

(**EF09MA22**) Escolher e construir o gráfico mais adequado (colunas, setores, linhas), com ou sem uso de planilhas eletrônicas, para apresentar um determinado conjunto de dados, destacando aspectos como as medidas de tendência central.

(**EF09MA23**) Planejar e executar pesquisa amostral envolvendo tema da realidade social e comunicar os resultados por meio de relatório contendo avaliação de medidas de tendência central e da amplitude, tabelas e gráficos adequados, construídos com o apoio de planilhas eletrônicas.

A seguir, sugestões de atividades cujas análises de suas resoluções podem contribuir para avaliar a evolução de cada estudante e orientar seus estudos.

1ª avaliação formativa: atividades **2** e **9** (páginas 61 e 63, respectivamente).

2ª avaliação formativa: atividades **15** e **16** (páginas 70 e 71, respectivamente).

3ª avaliação formativa: atividades **26** e **29** (página 79). Na atividade **26**, um estudante pode preferir a empresa **X**, porque ela paga os maiores e os menores salários. Nesse caso, se ele seguir carreira dentro da empresa, receberá salários maiores do que a empresa **Z**. Por outro lado, um estudante pode escolher a empresa **Z**, pois a chance de ele receber salário próximo de R$ 9.000,00 é maior do que na outra empresa. Verificar essas justificativas é importante para perceber a compreensão dos estudantes acerca do conceito de desvio padrão.

Capítulo 3 Introdução às funções e função afim

Orientações

O trabalho com **Função afim** é proposto em diversos contextos. Com isso, pretende-se que os estudantes desenvolvam a capacidade de interpretar e fazer uso das funções afins para resolver problemas e modelar situações da realidade. Nesse aspecto, os estudantes são convidados a analisar a dependência entre variáveis numéricas em situações envolvendo consumo, variação de temperatura, entre outros, desenvolvendo as habilidades EM13MAT101, EM13MAT302, EM13MAT401 e EM13MAT501.

Na **Abertura** do Capítulo, é importante introduzir os estudantes à etnomatemática. Pode-se comentar que existem diferentes matemáticas presentes no cotidiano, por exemplo, a matemática do pedreiro, a matemática do costureiro, entre outras. De acordo com suas necessidades, esses profissionais desenvolvem saberes matemáticos diferentes dos conhecimentos acadêmico e escolar. A etnomatemática compreende que existem diferentes sistemas culturais que desenvolvem suas técnicas, habilidades e práticas matemáticas, valorizando-as. O modo como os rikbaktsá construíram suas flautas é um exemplo dessas técnicas. Assim, o trabalho na **Abertura** do Capítulo desenvolve as competências gerais 1 e 3 e a competência específica 3 da área de Matemática e suas Tecnologias.

As flautas dos rikbaktsá servem de elo entre sua cultura e a Matemática escolar, conforme descrito no artigo **Etnomatemática em três dimensões na educação escolar indígena**. Leia um trecho:

> Os professores rikbaktsá de matemática nos informaram que eles precisavam encontrar elos entre conceitos da matemática escolar do “branco” com “coisas” de sua cultura, para que sejam providos encontros culturais nas suas aulas de matemática tornando a compreensão desses conceitos matemáticos relacionais mais significativos para os alunos indígenas. Olhando um artefato da cultura rikbaktsá, que é a sua flauta, vislumbramos que poderíamos relacionar os comprimentos das mesmas, medidas por eles em palmos, com suas medidas em centimetros, dando origem a uma função linear, que eles passaram a chamar de *função das flautas*.

MATTOS, José Roberto L. de; POLEGATTI, Geraldo Aparecido. Etnomatemática em três dimensões na educação escolar indígena. *In*: CONGRESO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA DE AMÉRICA CENTRAL Y EL CARIBE, 1., 2013, República Dominicana. **Memorias** […]. Santo Domingo: Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra, 2013. p. 1-8. Disponível em: https://ciaem-iacme.org/memorias-icemacyc/15-404-1-DR-C.pdf. Acesso em: 2 out. 2024.

As atividades **1**, **2** e **3** da **Abertura** do Capítulo ilustram exemplos de como os professores rikbaktsá de Matemática construíram uma relação entre os conceitos matemáticos escolares e a cultura deles.

O tópico **A ideia de função** trabalha gradualmente a ideia de dependência entre grandezas em diferentes contextos, identificando quais são as variáveis dependente e independente, de acordo com Barufi e Lauro:

> [...] a palavra *função* foi introduzida na Matemática por Leibniz (1646-1716), que utilizou esse termo para designar um certo tipo de fórmula matemática. Mais tarde, viu-se que a ideia de função desenvolvida por Leibniz tinha um alcance muito reduzido, e, posteriormente, o significado da palavra função foi experimentando generalizações sucessivas, até chegar à conceituação atual.
>
> Assim, num curso de nível médio, não podemos ter a pretensão de alcançar uma formalização completa no estabelecimento de um conceito que traz dentro de si um grau de dificuldade epistemológica muito grande para os alunos, fato que pode ser historicamente comprovado. Essa pretensão, pode, inclusive, ser nociva, se provocar a falta de uma vivência mais prática e significativa do conceito, por parte dos alunos.

BARUFI, Maria Cristina B.; LAURO, Maira M. **Funções elementares, equações e inequações**: uma abordagem utilizando microcomputador. 1. ed. São Paulo: CAEM-IME/USP, 2001. v. 1, p. 5.

A atividade **10** da página 105 possibilita articular e desenvolver as seguintes habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias: EM13MAT302, uma vez que se utiliza de funções para analisar e resolver o problema; EM13MAT501, ao identificar padrões e criar conjecturas para generalizar e expressar algebricamente a situação; e EM13MAT510, por analisar o comportamento relacionado às variáveis número de palitos em cada lado e total de palitos em cada triângulo.

O boxe **Fórum** tem a finalidade de enfatizar que, em 2024, foi sancionada a lei nº 14.811, que inclui, no código penal, os crimes de *bullying* e *cyberbullying*, com penas proporcionais às condutas. Para a intimidação sistemática, a pena é multa e, para a intimidação sistemática virtual, a pena é reclusão de dois a quatro anos e de multa, se a conduta não constituir crime mais grave. Para mais detalhes, consulte o *site* https://agenciagov.ebc.com.br/noticias/202401/presidente-sanciona-lei-que-reforca-protecao-a-criancas-e-adolescentes-contra-violencia-nas-escolas (acesso em: 2 out. 2024). Entende-se que a temática *bullying* e *cyberbullying* é de grande relevância, deve envolver toda a comunidade escolar e ser norteada pelo seu projeto político pedagógico. Uma possibilidade é verificar com o corpo docente se a atividade proposta na seção pode ser uma das diversas ações pedagógicas relacionadas a esse tema. Assim, é trabalhado o desenvolvimento das competências gerais 8, 9 e 10, pois o estudante é levado a se conhecer e a cuidar de sua saúde emocional, reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas. Além disso, é necessário exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, com acolhimento, sem preconceitos de qualquer natureza.

O tópico **Leitura e interpretação de gráficos** apresenta uma situação relacionada à área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, na qual a utilização do gráfico de funções contribui para a análise, a investigação e soluções de problemas, o que contribui para o desenvolvimento da habilidade EM13MAT101 e da competência específica 1 da área de Matemática e suas Tecnologias. Além disso, ao interpretar a situação-problema sobre bactérias no sangue por meio de um modelo matemático e perceber a utilidade dele para tratamentos de saúde, desenvolve-se a competência específica 3 da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

Para ampliar o conhecimento a respeito da interpretação e leitura de gráficos, sugere-se realizar com os estudantes as atividades complementares e interativas propostas no Portal da OBMEP, disponíveis em https://portaldaobmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=35&tipo=5 (acesso em: 2 out. 2024). Na atividade **Vou de táxi**, por exemplo, os estudantes podem visualizar duas retas que descrevem, cada uma, uma bandeira de taxímetro diferente e realizar a interpretação dos gráficos. Da mesma forma, a atividade **Tanque cheio** possibilita interpretar gráficos que descrevem o esvaziamento e o enchimento de tanques. Convém retomar essas atividades posteriormente, quando o estudante tiver ferramentas suficientes para escrever a forma algébrica das funções e puder realizar uma atividade complementar cujo objetivo é descrever tais funções algebricamente com base no gráfico.

O tópico **Gráfico da função afim** favorece o desenvolvimento das competências específicas 4 e 5 da área de Matemática e suas Tecnologias, em específico, as habilidades EM13MAT401 e EM13MAT501, ao explorar a relação entre as diferentes representações de uma função, gráfica e algébrica, e trabalhar a observação de padrões em tabelas que expressam relações entre grandezas.

> [...]
>
> No estágio atual – nível médio – os alunos não têm condição de fazer a construção do gráfico de uma função, no sentido de não ser evidente para eles se os pontos, obtidos na prática, ou seja, experimentalmente, são ligados por segmentos de retas ou de curvas, com tal ou qual concavidade, uma vez que não possuem o instrumento necessário, fornecido por um posterior curso universitário de Cálculo Diferencial.
>
> [...]

BARUFI, Maria Cristina B.; LAURO, Maira M. **Funções elementares, equações e inequações**: uma abordagem utilizando microcomputador. 1. ed. São Paulo: CAEM-IME/USP, 2001. v. 1, p. 8.

Uma alternativa para estudar esse tópico é utilizar o *software* **GeoGebra**. Com ele, é possível verificar visualmente que os gráficos da função afim são retas. Além disso, pode-se utilizar o *software* para reproduzir, de modo dinâmico, os exemplos de gráficos indicados no Livro do estudante. Esse recurso pode ser apresentado para os estudantes em um projetor, não sendo necessário que ele esteja instalado em um computador. No entanto, é necessário enfatizar aos estudantes que as visualizações do **GeoGebra** são apenas verificações empíricas, diferentemente de uma prova lógica-dedutiva. A seguir, uma demonstração de que o gráfico da função afim é uma reta. Essa demonstração utiliza a fórmula da distância entre dois pontos no plano cartesiano, obtida por meio do teorema de Pitágoras.

Teorema: o gráfico de uma função afim é uma reta.

Demonstração:

Considere a função real afim $f(x) = ax + b$ e três pontos quaisquer do gráfico de f, $P_1(x_1, ax_1 + b)$, $P_2(x_2, ax_2 + b)$ e $P_3(x_3, ax_3 + b)$, tal que $x_1 < x_2 < x_3$. Para demonstrar que esses três pontos são colineares, vamos provar que:

$$d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3) = d(P_1, P_3)$$

Pela fórmula da distância entre dois pontos, temos:

$$d(P_1, P_3) = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (ax_3 + b - ax_1 - b)^2} =$$
$$= \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + a^2(x_3 - x_1)^2} = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 \cdot (1 + a^2)} =$$
$$= (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2}$$
$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (ax_2 + b - ax_1 - b)^2} =$$
$$= (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2}$$
$$d(P_2, P_3) = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (ax_3 + b - ax_2 - b)^2} =$$
$$= (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2}$$

Desse modo, obtemos:

$$d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3) =$$
$$= (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2} + (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2} =$$
$$= (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2}$$
$$d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3) = d(P_1, P_3)$$

Portanto, os pontos são colineares, e o gráfico da função é uma reta.

Sugere-se a leitura do material disponível no *link* https://impa.br/wp-content/uploads/2016/12/ricardo_azevedo.pdf (acesso em: 2 out. 2024), para consultar outra demonstração, entre outras informações. Também recomenda-se realizar a atividade complementar **Conteúdo do Universo**, disponível em https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1331 (acesso: 2 out. 2024). Essa atividade baseia-se em áudios, apresentando informações sobre a Cosmologia moderna e o uso do gráfico de uma função linear nesse contexto. No *link*, há um guia do professor, que contém atividades para serem realizadas antes ou depois da exibição dos áudios. Esse conteúdo pode ainda ser trabalhado com o professor de Física, da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

Na seção **Explorando a tecnologia**, a ferramenta **Controle deslizante** (ou seletor) é utilizada. Além da sequência proposta, pode-se empregar essa opção da seguinte forma: clique no ícone dessa ferramenta, nomeie o seletor como *a* e escolha valores de máximo e de mínimo. Repita a operação para criar um seletor *b*.

Na caixa de entrada, digite "y = *a***x* + *b*" (note que é necessário colocar o *, que representa a multiplicação). Assim, para cada movimentação realizada no seletor referente às constantes *a* e *b*, o programa mostrará a reta correspondente à função.

Na atividade **1**, espera-se que os estudantes verifiquem que, ao se alterar o valor do coeficiente *a* da função definida por $f(x) = ax$ utilizando a ferramenta Controle deslizante, modifica-se a inclinação da reta, porém ela continua passando pela origem do plano cartesiano (0, 0).

Para resolver a atividade **2**, os estudantes terão de observar o gráfico da função definida por $g(x) = x + b$ e as mudanças que ocorrem ao utilizar a ferramenta Controle deslizante. Espera-se que observem que apenas o coeficiente *b* se altera, ou seja, a reta não sofre alteração em sua inclinação, mas ela é transladada. Essa atividade auxilia a percepção de que *b* corresponde à ordenada do ponto em que a reta da função afim cruza o eixo *y*.

Na atividade **3**, considerando que a função *h* seja definida por $h(x) = -3x + 6$, a reta que a representa cruza o eixo *x* no ponto (2, 0).

Em **Crescimento e decrescimento da função afim**, explicar aos estudantes que as demonstrações das propriedades 1 e 2 são exemplos do método dedutivo característico da Matemática. De maneira gradual e criteriosa, é importante que os estudantes desenvolvam a capacidade de demonstrar teoremas e propriedades matemáticas e diferenciar as demonstrações dos processos de descobertas e verificações empíricas.

Nos tópicos **Estudo do sinal da função afim** e **Inequações polinomiais do 1º grau**, apresenta-se o estudo do sinal de uma função afim como um método para a resolução de inequações polinomiais do 1º grau. Essa relação amplia o significado das inequações ao exigir construção e interpretação gráfica da função.

O Tema Contemporâneo Transversal Educação Ambiental é trabalhado na seção **Conexões com...**. Nela propõe-se uma reflexão sobre o efeito estufa e sobre o aquecimento global, desenvolvendo a competência específica 3 da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, pois parte da interpretação de texto é com base em informações científicas.

Na atividade **2**, os estudantes devem pesquisar o **Acordo de Paris**, que teve 195 países signatários. Entre os maiores poluidores do mundo, só não constam no acordo os Estados Unidos. A comunidade internacional se comprometeu a manter o aumento da temperatura média global abaixo de 2 °C e a continuar os esforços para limitar o aumento da temperatura a 1,5 °C. Uma das medidas seria reduzir a emissão de gases de efeito estufa originada por atividades humanas. A atividade **3** possibilita desenvolver a competência específica 1 da área de Matemática e suas Tecnologias e a habilidade EM13MAT101, uma vez que analisa a situação por meio de gráficos. A produção da atividade **4** favorece a competência geral 4 ao se buscar comparar informações confiáveis que promovam uma consciência socioambiental. Além disso, propicia que a Educação Midiática seja inserida como uma camada no trabalho pedagógico desenvolvido. Para consultar mais informações acerca da Educação Midiática, recomenda-se a leitura do **Guia da Educação Midiática**, que foi publicado pelo Instituto Palavra Aberta, disponível em https://educamidia.org.br/api/wp-content/uploads/2021/03/Guia-da-Educac%CC%A7a%CC%83o-Midia%CC%81tica-Single.pdf (acesso em: 29 out. 2024). Conheça também a **Estratégia Brasileira de Educação Midiática**, que foi publicada em 2023 pelo governo federal, disponível em https://www.gov.br/secom/pt-br/arquivos/2023_secom-spdigi_estrategia-brasileira-de-educacao-midiatica.pdf (acesso em: 29 out. 2024).

A seção **História da Matemática** aborda o surgimento dos gráficos, versando, inicialmente, sobre sua aplicabilidade não só na Matemática, mas também em outros campos, como o da Biologia e o da Economia, para apresentação e análise de dados, trabalhando, assim, a competência geral 1. Em seguida, é introduzida uma explicação sobre o sistema de coordenadas cartesianas, assim chamado em homenagem ao filósofo e matemático francês René Descartes (1596-1650).

Embora o diagrama de Nicole d'Oresme, que utiliza duas linhas para representar grandezas envolvidas no movimento, seja considerado um dos antecedentes do plano cartesiano, não havia nenhuma menção à sua interpretação algébrica. Foi Descartes quem uniu a Álgebra e a Geometria, criando o campo da Geometria Analítica, possibilitando maior desenvolvimento dessa área da Matemática.

Para saber mais sobre a vida, a importância e as descobertas de René Descartes, sugere-se acessar o *link* http://clubes.obmep.org.br/blog/b_rdescartes (acesso em: 2 out. 2024).

Avaliação

A atividade **4** da **Abertura** do Capítulo permite uma avaliação diagnóstica da seguinte habilidade relacionada às funções, que foram trabalhadas no Ensino Fundamental – Anos Finais.

(**EF09MA06**) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.

A seguir, sugestões de atividades cujas análises de suas resoluções podem contribuir para avaliar a evolução de cada estudante e orientar seus estudos.

1ª avaliação formativa: atividades **3**, **5** e **6** (página 104).

2ª avaliação formativa: atividades **13** e **18** (páginas 111 e 118, respectivamente).

3ª avaliação formativa: atividades **22**, **25** e **32** (páginas 118, 119 e 127, respectivamente).

4ª avaliação formativa: atividade **37** (página 127).

5ª avaliação formativa: atividades **41** e **45** (páginas 134 e 135, respectivamente).

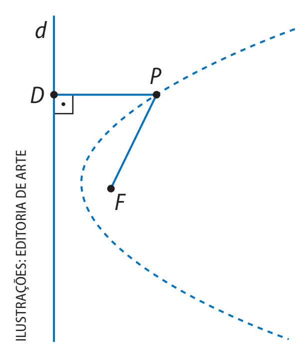
Capítulo 4 Função quadrática

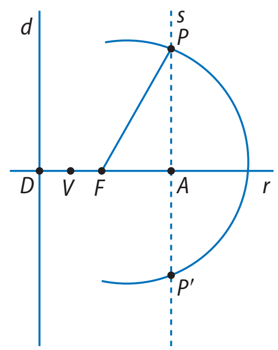
Orientações

O trabalho com a **Função quadrática** é proposto em diferentes contextos. Desse modo, espera-se que os estudantes desenvolvam a capacidade de interpretar e fazer uso das funções polinomiais do 2º grau para resolver problemas e modelar situações da realidade, contribuindo, principalmente, para o desenvolvimento da competência específica 3 da área de Matemática e suas Tecnologias, com destaque para a habilidade EM13MAT302.

Estudar o **Gráfico da função quadrática** desenvolve as competências específicas 4 e 5 da área de Matemática e suas Tecnologias e as habilidades EM13MAT402 e EM13MAT502. Além disso, contribui para o desenvolvimento da competência geral 2, uma vez que instiga, nos estudantes, a curiosidade e a investigação.

Recomenda-se aprofundar os estudos sobre parábolas apresentando a definição geométrica delas, que permite compreender os motivos pelos quais utilizamos as parábolas no cotidiano, como nas antenas parabólicas de televisão e nos faróis de automóveis com esse formato. O texto a seguir apresenta uma ampliação possível.

> [...]
>
> [...] vamos partir da definição dessa curva chamada parábola, descobrir sua equação e investigar algumas de suas propriedades, que vão justificar por que as antenas e os espelhos precisam ser parabólicos.
>
> Por questões de simplicidade, tudo o que dissermos de agora em diante se passa num plano.
>
> **DEFINIÇÃO**
>
> Consideremos uma reta d e um ponto F. Parábola de foco F e diretriz d é o conjunto de todos os pontos cuja distância à reta d é igual à distância ao ponto F.
>
> 
>
>
> Na figura acima, se $PD = PF$, então P é um ponto da parábola de foco F e diretriz d.
>
> Para obter diversos pontos de uma parábola, dados o foco F e a diretriz d, trace por F uma reta r perpendicular à diretriz e seja D o ponto de interseção de r e d.
>
> O segmento DF chama-se parâmetro da parábola e o ponto V, médio de DF, é o vértice da parábola. Para cada ponto A da semirreta VF, trace a reta s, perpendicular a r. A circunferência de centro F e raio AD corta s nos pontos P e P', que pertencem à parábola.



Como $PF = AD$, a distância de P ao foco é igual à sua distância à diretriz.

[...]

WAGNER, Eduardo. Porque as antenas são parabólicas? **Revista do Professor de Matemática (RPM)**, São Paulo, n. 33, [201-]. Disponível em: http://rpm.org.br/cdrpm/33/3.htm. Acesso em: 2 out. 2024.

No **GeoGebra**, a definição de parábola pode ser explorada, e os estudantes podem fazer uma atividade complementar. Primeiro, eles devem construir o gráfico da função quadrática definida por $f(x) = \frac{x^2}{4}$. Em seguida, no mesmo sistema de coordenadas cartesianas, eles devem construir o lugar geométrico dos pontos (x, y), de modo que a distância à reta $y = -1$ seja igual à distância ao ponto $(0, 1)$, ou seja, a parábola deve ter foco em $(0, 1)$ e diretriz $y = -1$. Para isso, solicitar a eles que construam a reta $y = -1$, colocando esse comando na caixa de entrada, e, da mesma maneira, construam o ponto $A(0, 1)$. Na barra de ferramentas, selecionar, no ícone **Cônicas**, a opção **Parábola** e clicar na reta diretriz e no foco já construídos (esses termos farão sentido aos estudantes se foi trabalhada, anteriormente, a definição geométrica de parábola). Tal construção resultará na mesma parábola que corresponde ao gráfico de f construída inicialmente. Para que isso fique mais visível, na janela de visualização, clicar no gráfico da parábola e modificar a cor, alterando também a cor da equação correspondente, facilitando a identificação. Recomenda-se ocultar um dos gráficos para visualizar o gráfico da outra função e, assim, evidenciar que ambos são idênticos.

Como atividade complementar para os estudantes, pode-se solicitar a eles que demonstrem que o gráfico da função definida por $g(x) = x^2$ é uma parábola com foco em $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ e diretriz $y = -\frac{1}{4}$. Orientar que utilizem a definição da parábola como lugar geométrico e o teorema de Pitágoras.

A seção **Explorando a tecnologia** proporciona aos estudantes um momento para explorar as relações entre a forma algébrica e a forma gráfica das funções quadráticas. Esse estudo possibilita o desenvolvimento das competências específicas 3 e 4 da área de Matemática e suas Tecnologias e as habilidades EM13MAT302 e EM13MAT402, uma vez que compreender tais relações é necessário para que sejam realizadas, posteriormente, modelagens matemáticas com o uso de funções quadráticas.

Para a realização das atividades, recomenda-se realizar perguntas para mediar a investigação dos estudantes, de acordo com suas percepções iniciais.

Na atividade **1**, espera-se que os estudantes percebam que, ao modificar o valor do coeficiente *a* da função de 2º grau, a parábola terá alterações em sua concavidade: voltada para cima, se *a* for positivo, e voltada para baixo, se *a* for negativo.

Na atividade **2**, espera-se que os estudantes notem que *h* é uma função quadrática incompleta cujo coeficiente *c* é nulo, portanto os zeros dessa função são $x = 0$ ou $x = -b$, pois:
$x^2 + bx = 0 \Rightarrow x(x + b) = 0 \Rightarrow x' = 0$ e $x'' = -b$ (Valor oposto ao do ajustado no controle deslizante.)

Na atividade **3**, ao utilizar o **Controle deslizante** referente ao coeficiente *c* nas duas funções *f* e *j*, nota-se que *c* é a ordenada do ponto em que as funções intersectam o eixo *y*. Além disso:

- quando *c* é negativo, tem-se que o gráfico de *j* é uma translação do gráfico de *f* para baixo;
- quando *c* é positivo, tem-se que o gráfico de *j* é uma translação do gráfico de *f* para cima.

Por fim, a atividade **4** propõe uma investigação em que todos os coeficientes são manipulados. Recomenda-se incentivar os estudantes a realizar testes e anotar suas observações, instigando, assim, a competência geral 2. Uma atividade que pode complementar a investigação é propor aos estudantes que criem perguntas de investigação para que um colega possa respondê-las. Por exemplo: Fixando o valor de *a*, o que acontece se aumentarmos os valores de *b* e de *c*?

No boxe **Fórum**, os estudantes podem sugerir a criação de campanhas de conscientização, na escola ou na comunidade, por meio de cartazes, panfletos e palestras que destaquem os riscos de se usar celular ao dirigir e promovam a importância de se manter o foco na condução, desenvolvendo, assim, a competência geral 10. Os estudantes podem também compartilhar histórias pessoais ou de pessoas próximas que tenham sofrido algum tipo de acidente causado pelo uso do celular ao dirigir. Esses relatos podem causar um impacto emocional significativo e podem ajudar a sensibilizar os colegas sobre os perigos envolvidos. Outra possibilidade é a organização de campanhas virtuais, com a produção de vídeos curtos, *memes* ou desafios interativos nas mídias sociais, como jogos ou *quizzes*, que abordem os riscos do uso do celular ao dirigir e que ofereçam dicas práticas para uma condução segura. Além disso, os estudantes podem propor a inclusão de conteúdos sobre segurança no trânsito e uso responsável de tecnologia no currículo escolar, para que todos os estudantes tenham acesso a informações e reflexões sobre o tema.

O tópico **Valor mínimo e valor máximo da função quadrática** apresenta o conceito de valor mínimo e de valor máximo da função quadrática, colaborando para sua interpretação em diferentes contextos e, assim, contribuindo para o desenvolvimento da competência específica 5 da área de Matemática e suas Tecnologias e da habilidade EM13MAT503.

Recomenda-se indicar as atividades interativas **Bilhete Especial** e **Ingressos de *Show*** do Portal da OBMEP, disponíveis em http://portaldaobmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=62&tipo=5 (acesso em: 2 out. 2024). Na primeira atividade, investiga-se qual é a maior área retangular possível de acordo com um perímetro fixo. Na segunda, deve-se calcular por qual valor deve ser vendido um ingresso para maximizar o faturamento do vendedor.

Na seção **Explorando a tecnologia**, utiliza-se o GeoGebra para analisar a relação entre os coeficientes da função quadrática e seus valores de máximo ou de mínimo. As atividades propostas têm como característica a investigação por meio da tecnologia, com o objetivo de que a reflexão contribua para a aprendizagem e a construção de conceitos relacionados à parábola. Em particular, exploram-se o vértice e a interpretação de ponto máximo ou de mínimo da situação modelada pela função em análise. Assim, oportuniza o desenvolvimento das competências gerais 2, 4 e 5. Além disso, as competências específicas 4 e 5 da área de Matemática e suas Tecnologias também são contempladas à medida que se exploram ideias importantes para a interpretação de situações modeladas pela Matemática, por meio do estudo das relações entre as formas algébricas e gráficas das funções polinomiais de 2º grau (EM13MAT402), especialmente a investigação dos pontos de máximo ou de mínimo (EM13MAT503).

Na atividade **1,** espera-se que os estudantes indiquem o coeficiente a como resposta. Quando $a > 0$, o gráfico da função tem a concavidade voltada para cima e tem um ponto de mínimo. Quando $a < 0$, o gráfico da função tem a concavidade voltada para baixo e tem um ponto de máximo. Se $a = 0$, a função não é quadrática.

Sugere-se realizar o experimento **Caixa de papel** como complemento ao estudo sobre o vértice da parábola. Nesse experimento, os estudantes precisam analisar e investigar quais são as medidas necessárias para construir uma caixa de papel, de modo a obter o maior volume com o menor gasto de material. As orientações sobre a atividade estão disponíveis em: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1367 (acesso em: 2 out. 2024).

Por fim, recomenda-se a leitura do artigo **Técnicas de máximos e mínimos**, disponível no *site* http://www.rpm.org.br/cdrpm/35/6.htm (acesso em: 2 out. 2024), em que são investigadas situações-problemas por meio de diferentes técnicas para encontrar os valores de máximo ou de mínimo da função.

A discussão realizada na seção **Conexões com...** aponta para a necessidade de gerir resíduos para uma vida sustentável, trabalhando o Tema Contemporâneo Transversal Educação Ambiental. Nesse sentido, é importante enfatizar, para os estudantes, como a Matemática contribui significativamente para a resolução de problemas em diferentes áreas; no caso específico, como o uso das funções possibilita minimizar o desperdício de recursos. Além disso, é uma oportunidade para que se discuta como nossas práticas de consumo na sociedade podem ser pensadas de modo sustentável, trabalhando o Tema Contemporâneo Transversal Educação para o Consumo. A seção contribui para o desenvolvimento das competências gerais 2, 4, 7 e 10, além da competência específica 1 da área de Matemática e suas Tecnologias e da habilidade EM13MAT101, uma vez que faz uso da Matemática para compreender o mundo e atuar nele. O tema também oportuniza uma parceria com componentes curriculares da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, em que podem ser enfatizados aspectos específicos da área, como composição química, impactos biológicos de resíduos no meio ambiente, entre outros, sendo possível desenvolver a competência específica 3 da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

Na atividade **1**, espera-se que os estudantes compreendam, com base nos textos, algumas possibilidades de se reduzir a quantidade de resíduos: o consumo sustentável, a reciclagem, o reaproveitamento e a destinação correta no momento de descarte de materiais. Além disso, os textos mostram como responsabilizar os diferentes setores e agentes geradores de resíduos. Recomenda-se propor aos estudantes que realizem uma pesquisa mais detalhada sobre os destinos mais adequados para o descarte de diferentes resíduos (pilhas, computadores, óleo etc.) e sobre como os diferentes setores são, de fato, responsabilizados (tarifas financeiras, processos jurídicos etc.).

Na atividade **2**, é importante observar que a quantidade de material desperdiçado está relacionada com o tempo de produção por meio de uma função quadrática, então é possível compreender que essa relação também pode ser representada por meio de uma parábola. Como queremos investigar o momento em que há menor produção de resíduos, espera-se que os estudantes percebam que o conceito do ponto de mínimo auxiliará na análise da situação abordada. Dessa maneira, essa atividade trabalha a habilidade EM13MAT503.

O painel elaborado na atividade **3** pode:

- enfatizar a necessidade de uma coleta e de um descarte seletivo de resíduos na escola e/ou no bairro, inclusive no que se refere a pilhas, baterias, óleo e eletrônicos;
- incentivar a construção de uma composteira e de uma horta que contribuam para a comunidade escolar;
- estimular a organização de escambo para a troca de objetos que seriam descartados, mas que podem ser interessantes para outras pessoas.

O tópico **Investigando o comportamento de variáveis** contribui para o desenvolvimento da competência específica 5 da área de Matemática e suas Tecnologias e das habilidades EM13MAT502 e EM13MAT510, uma vez que representa, no plano cartesiano, dados organizados em uma tabela e propõe a análise e a investigação de relação entre duas variáveis numéricas. Também são trabalhadas as competências específicas 3 e 4 da área de Matemática e suas Tecnologias e a habilidade EM13MAT302 ao estudar o registro e a aplicação das funções polinomiais na resolução de problemas em contextos diversos.

O tópico **Estudo do sinal da função quadrática** é apresentado como um método de resolução de **inequações polinomiais do 2º grau**. Esse estudo amplia o significado das inequações ao exigir a construção e a interpretação gráfica da função.

A seção **História da Matemática** apresenta um texto sobre a importância da contribuição de Galileu Galilei para a Ciência e da lei estabelecida por ele, segundo a qual a distância percorrida por um corpo em queda livre é proporcional ao quadrado do tempo de queda, ou seja, uma função quadrática. O experimento de Galileu comprovou que dois pedaços de metal com massas diferentes, lançados de uma mesma altura ao mesmo tempo, chocaram-se contra o chão no mesmo instante. Discussões como essa favorecem o desenvolvimento da competência geral 1, no sentido de valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos para compreender e explicar a realidade. Se julgar oportuno, o conceito de "queda livre" pode ser explorado em um trabalho integrado com o professor de Física.

Para ampliar o assunto, pode-se abordar o experimento realizado pelo astronauta americano David Scott (1932-), comandante da missão Apollo 15 na Lua, em 1971. Ele deixou cair, simultaneamente e da mesma altura, uma pena de falcão de 0,03 kg e um martelo de 1,32 kg. Ambos os objetos chegaram ao solo lunar no mesmo instante. O experimento realizado na Lua, em 1971, pode ser visto no *site* http://canaltech.com.br/ciencia/O-que-acontece-quando-voce-derruba-um-martelo-e-uma-pena-na-Lua/ (acesso em: 2 out. 2024).

Avaliação

A atividade **4** da **Abertura** do Capítulo possibilita uma avaliação diagnóstica da habilidade relacionada à resolução de equações polinomiais do 2º grau por meio de fatorações que foram trabalhadas no Ensino Fundamental – Anos Finais.

(**EF09MA09**) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.

No tópico **Vértice da parábola**, pode-se propor aos estudantes a realização da atividade interativa **No vértice da parábola**, disponível em http://portaldaobmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=61&tipo=5 (acesso em: 2 out. 2024). A atividade apresenta uma parábola, no plano cartesiano, e as coordenadas de seu vértice. O estudante deve descobrir os coeficientes *b* e *c*, sabendo que a função quadrática tem o coeficiente de *a* igual a 1. Com isso, é possível avaliar como os estudantes estão compreendendo as relações entre as representações gráficas e algébricas da função quadrática.

A seguir, sugestões de atividades cujas análises de suas resoluções podem contribuir para avaliar a evolução de cada estudante e orientar seus estudos.

1ª avaliação formativa: atividades **2** e **6** (página 149).

2ª avaliação formativa: atividades **11** e **16** (páginas 156 e 157, respectivamente).

3ª avaliação formativa: atividade **20** (página 165).

4ª avaliação formativa: atividades **31** e **34** (página 175).

Capítulo 5 Função exponencial

Orientações

Estudar as aplicações de funções exponenciais em situações reais contribui para o desenvolvimento dos conceitos matemáticos relacionados a esse tema. Para isso, este Capítulo traz exemplos de aplicações da função exponencial em diversas áreas, como na área da saúde, de Química (radioatividade), de Matemática financeira (juro composto) e de Biologia (crescimento populacional de vírus e de bactérias). Nesse sentido, o conceito da função exponencial, sua lei de formação e sua representação gráfica são estudados em diferentes contextos, possibilitando aos estudantes o desenvolvimento das habilidades EM13MAT304 e EM13MAT403.

Na **Abertura** do Capítulo, recomenda-se conversar com os estudantes a respeito do uso responsável das redes sociais. Muitas informações são disponibilizadas e propagadas nesses meios, por isso é essencial desenvolver um olhar crítico com relação a essas informações, verificando suas consistências e se são de fontes confiáveis, o que contribui para o desenvolvimento das competências gerais 2 e 5 e da competência específica 2 da área de Matemática e suas Tecnologias. Para estimular o diálogo, pode-se apresentar o vídeo ***Fake news*: mentiras na internet e suas consequências**, disponível em https://www.youtube.com/watch?v=N3Zed-yovKg (acesso em: 3 out. 2024), do canal Tvtreba, da Justiça Eleitoral da Bahia, que apresenta consequências de histórias verídicas desse grave problema social.

Ao trabalhar o boxe **Fórum**, é oportuno explicar aos estudantes que, em 2015, foi lançada, pela Organização das Nações Unidas (ONU), uma agenda de desenvolvimento sustentável a ser cumprida até 2030. Essa agenda tem como base ações para acabar com a pobreza, promover o bem-estar para todos e proteger o meio ambiente. Dessas ações, resultaram 17 Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS), sendo o **Objetivo 2**: "erradicar a fome, alcançar a segurança alimentar, melhorar a nutrição e promover a agricultura sustentável".

Elaborado com base em: NAÇÕES UNIDAS BRASIL. **Sobre o nosso trabalho para alcançar os objetivos de desenvolvimento sustentável no Brasil**. Brasília, DF: ONU Brasil, c2024. Disponível em: https://brasil.un.org/pt-br/sdgs. Acesso em: 3 out. 2024.

O vídeo **Fome zero e agricultura sustentável: ODS 2**, disponível em https://www.youtube.com/watch?v=7JCJbQ28DAI (acesso em: 3 out. 2024), contribui para a sensibilização dos estudantes em relação a esse tema. É importante propor uma discussão a respeito da perda e do desperdício de alimentos. Para essa discussão, os estudantes podem realizar uma pesquisa e criar uma lista de ações que possam ajudar no cumprimento do Objetivo de Desenvolvimento Sustentável 2 da ONU. Essa discussão auxilia o desenvolvimento das competências gerais 2 e 7.

O tópico **Potenciação e radiciação** propõe a revisão desses conceitos. Algumas pesquisas acadêmicas buscam analisar os principais erros dos estudantes na resolução de atividades que envolvem conceitos e aplicação de **propriedades da potenciação** e de **propriedades da radiciação**. A seguir estão indicados alguns desses erros.

- Não considerar o sinal negativo da base ao elevá-lo a um expoente par escrevendo, de maneira equivocada, por exemplo: $(-2)^4 = -(2)^4$.
- Ao multiplicar potências de mesma base, multiplicar equivocadamente as bases e multiplicar os expoentes, por exemplo: $2^4 \cdot 2^3 = 4^{12}$.
- Ao resolver uma potência de potência, adicionar os expoentes, por exemplo $(2^3)^5 = 2^8$.
- Manter equivocadamente a base ao elevar um número a zero, por exemplo: $9^0 = 9$.
- Realizar os cálculos considerando-se o índice como sendo 2, independentemente de qual seja, por exemplo: $\sqrt[3]{125} = \sqrt{5^3}$.
- Extrair a raiz, mas manter o radical, por exemplo: $\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{-2}$.
- Desconsiderar o índice do radical, por exemplo: $\sqrt[3]{2^6} = 64$.
- Desconsiderar o sinal do radicando, por exemplo: $\sqrt[3]{-8} = 2$.
- Considerar o índice do radical como expoente do resultado, por exemplo: $\sqrt[3]{27} = 3^3$.

Fontes de pesquisa: FELTES, Rejane Z. **Análise de erros em potenciação e radiciação**: um estudo com alunos de ensino fundamental e médio. 2007. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Escola de Ciência, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2007. Disponível em: http://tede2.pucrs.br/tede2/bitstream/tede/3438/1/388459.pdf. Acesso em: 3 out. 2024.

PAIAS, Ana Maria. **Diagnóstico dos erros sobre a operação potenciação aplicado a alunos dos ensinos fundamental e médio**. 2009. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/11385/1/Ana%20Maria%20Paias.pdf. Acesso em: 3 out. 2024.

Ao identificar erros cometidos pelos estudantes, é importante conscientizá-los de que erros são uma parte importante do processo de aprendizagem. Os erros devem ser analisados pelo estudante com o intuito de identificar o que o levou a cometê-los. O *e-book* **Ensinando "potenciação e radiciação" através da resolução de problemas**, de Marcela Camila Picin de Melo e Andresa Maria Justulin, disponível em http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/4972/2/LD_PPGMAT_M_Melo_Marcela_Camila_Picin_de_2020_1.pdf (acesso em: 3 out. 2024), apresenta diferentes estratégias pedagógicas para retomar e consolidar os conceitos relacionados a esses assuntos.

O tópico **Notação científica** apresenta esse conceito ao estudante para que ele possa compreender a estrutura de formação dessa notação e sua relação com a potenciação. Desse modo, inicia-se o trabalho indicado nas competências específicas 1 e 3 da área de Matemática e suas Tecnologias e na habilidade EM13MAT313. Sugere-se comentar que, em alguns contextos, como o de trabalhar com carga elétrica no componente curricular Física, da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, esses valores podem ser negativos, pois, por convenção, o sinal negativo indica que a carga é de um elétron. Já ao expressar a carga elétrica de prótons, usa-se o sinal positivo.

O boxe **Para assistir** propõe um vídeo que aborda a nanotecnologia. Tratar esse tema relacionando-o ao conceito de notação científica é a proposta do boxe **Pense e responda**.

No tópico **Calculando com o auxílio de uma calculadora**, é importante incentivar os estudantes a utilizar a calculadora como ferramenta de verificação de resultados, independentemente de os valores serem exatos ou não. Ao comparar maneiras de resolver as atividades, os estudantes têm contato com diferentes estratégias de resolução de um mesmo problema, comparando e avaliando o método mais adequado para encontrar a solução.

O uso da calculadora como recurso didático é assunto que tem sido estudado há muitos anos. O texto a seguir trata desse assunto.

A calculadora e o processo de ensino-aprendizagem

A utilização educativa das calculadoras entrou finalmente na ordem do dia.

As calculadoras são objectos matemáticos por excelência que o desenvolvimento tecnológico se encarregou de tornar em objectos de uso corrente. Fazem já parte da vida de todos os dias.

Entre os professores, existe manifestamente uma forte onda de interesse pelas suas aplicações. Os projectos de novos currículos que têm sido divulgados fazem-lhes referência apontando de diversos modos a sua importância como meios auxiliares de ensino.

A utilização normal da calculadora nas aulas, nos testes, e em outras actividades, em todos os níveis de escolaridade, poderá constituir um importante factor de melhoria do ensino da Matemática, aproximando a nossa disciplina das outras matérias escolares e da vida prática, suscitando o interesse dos alunos, alargando e diversificando as actividades de ensino-aprendizagem.

A máquina de calcular é um instrumento rico de potencialidades para a disciplina de Matemática.

Ela pode ser utilizada para apoiar o desenvolvimento de novos conceitos, para formular conjecturas e explorar relações matemáticas, e para resolver problemas. A calculadora proporciona a exploração de novas estratégias e métodos de trabalho, como a tentativa e erro e as aproximações sucessivas. Permite alargar o leque de situações a considerar, usando valores retirados directamente de problemas da vida real, sem se ser submergido pelos cálculos. A calculadora é ela própria uma fonte natural de novos problemas e novos conceitos, como os de arredondamento, aproximação e convergência.

[...]

PONTE, João Pedro. A calculadora e o processo de ensino--aprendizagem. **Educação e Matemática**, Lisboa, n. 11, p. 1-2, 3º trim. 1989. Disponível em: https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/163/156. Acesso em: 3 out. 2024.

O uso das tecnologias pode tornar as aulas mais dinâmicas e auxiliar na exploração de diferentes conceitos matemáticos. Reforçar a informação do boxe **Saiba que...** e verificar se as calculadoras utilizadas pelos estudantes têm diferenças na ordem em que as teclas precisam ser pressionadas. Se sim, é interessante solicitar que investiguem seu funcionamento e o compartilhem com os colegas, promovendo a troca mútua de conhecimentos e estimulando a aprendizagem por pares. Atualmente, a maioria dos computadores e *smartphones* têm a opção de calculadora científica em seus sistemas operacionais.

No tópico **Função exponencial**, é apresentado o conceito desse tipo de função, de modo que o estudante seja capaz de resolver problemas que envolvam grandezas relacionadas à função exponencial em diversos contextos, desenvolvendo a competência específica 3 da área de Matemática e suas Tecnologias e a habilidade EM13MAT304. A leitura do trabalho **O GeoGebra no ensino das funções exponenciais**, de José Renato Paveis Coelho, disponível em http://uenf.br/posgraduacao/matematica/wp-content/uploads/sites/14/2017/09/30052016Jos%C3%A9-Renato-Paveis-Coelho.pdf (acesso em: 3 out. 2024), pode contribuir para os planejamentos das aulas relacionadas a esse tópico.

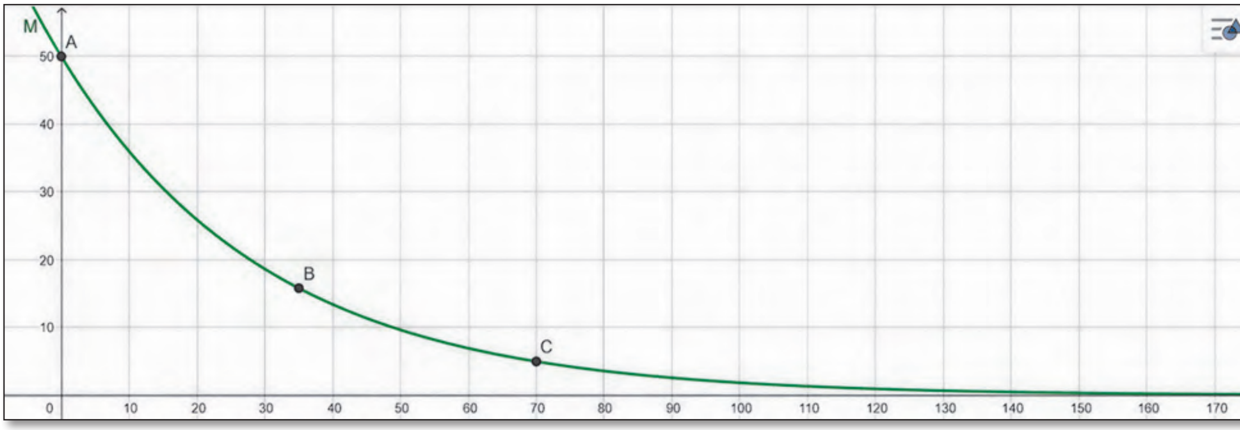
Em relação à abordagem do número de Euler (*e*) no ensino básico, pode-se consultar o artigo de Wagner M. Pommer, **O número de Euler: possíveis abordagens no ensino básico**, que está disponível em http://www.nilsonjosemachado.net/sema20100831.pdf (acesso em: 3 out. 2024).

A seção **Explorando a tecnologia** trabalha a construção de representações gráficas de funções exponenciais no plano cartesiano, recorrendo a *softwares*, no caso o **GeoGebra**, e possibilitando o desenvolvimento da competência geral 5 da BNCC, das competências específicas 3 e 4 da área de Matemática e suas Tecnologias e da habilidade EM13MAT403. Nesse caso, utiliza-se o GeoGebra para analisar a influência da base a no gráfico da função exponencial. Espera-se que os estudantes possam compreender a maneira como a curva exponencial se comporta ao variar o valor da base a na função dada por $f(x) = a^x$. Para ampliar essa análise gráfica, sugere-se pedir aos estudantes que explorem outras variações da função exponencial, por exemplo, $h(x) = a^x + 1$ e $i(x) = a^x + 1$, e analisem as diferenças ao mover o cursor do **Controle deslizante**.

O trabalho desenvolvido na seção **Conexões com...** valoriza a investigação, a reflexão e a análise crítica, desenvolvendo as competências gerais 1 e 2 da BNCC e as competências específicas 1 e 3 da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Ao utilizar a linguagem matemática para expressar as informações, possibilitando argumentar, com base em fatos e em dados confiáveis, para defender ideias e pontos de vista, os estudantes desenvolvem as competências gerais 4 e 7. Além disso, o trabalho de interpretação e compreensão de textos científicos a respeito da radioatividade colabora com o desenvolvimento da competência específica 1 da área de Matemática e suas Tecnologias, habilidade EM13MAT304.

A seguir, estão apresentadas as resoluções dos itens da atividade **2**.

a) Os pontos A, B e C do gráfico construído no GeoGebra são, respectivamente, pontos em que $t = 0$, $t = 35$ e $t = 70$.



REPRODUÇÃO/GEOGEBRA

b) Observando o gráfico do item anterior, nota-se que $t = 10$ é a abscissa de um ponto com ordenada entre 35 e 40. Como é solicitado um valor aproximado, a resposta depende da precisão com que se consiga fazer essa estimativa. Com o GeoGebra, é possível construir o ponto de abscissa 10 e ordenada $M(10)$. A precisão, nesse caso, dependerá do arredondamento selecionado no *software*. Espera-se que os estudantes concluam que o valor desejado é próximo de 36.

c) Calculando $M(10) = 50 \cdot 10^{\left(-\frac{10}{70}\right)}$ na calculadora, tem-se $M(10) \simeq 35{,}98$.

Na atividade **3**, substituindo $M(n)$ por 2^{-111} em $M(n) = 16 \cdot 2^{\left(-\frac{n}{5}\right)}$, tem-se:

$$2^{-111} = 2^{4+\left(-\frac{n}{5}\right)} \Leftrightarrow 4 - \frac{n}{5} = -111 \Rightarrow 20 - n = -555 \Rightarrow n = 555 + 20 \Rightarrow n = 575$$

Portanto, a substância considerada terá a massa indicada daqui a 575 anos.

A atividade **4** propõe aos estudantes que pesquisem alguns acidentes radioativos que marcaram a história. Sugere-se que a apresentação da pesquisa seja feita por meio de material impresso, com imagens e texto, como se fosse um folheto, contendo as informações obtidas de cada grupo. Para conhecer alguns dos maiores acidentes envolvendo energia nuclear, pode-se acessar o *site* https://exame.com/tecnologia/os-maiores-acidentes-nucleares-da-historia/ (acesso em: 3 out. 2024). Sugere-se que esse trabalho seja feito em parceria com o professor de História, da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, de modo que os estudantes compreendam a importância de conhecer catástrofes ocorridas no passado para evitar que elas se repitam no futuro.

Avaliação

A atividade **4** da **Abertura** do Capítulo possibilita uma avaliação diagnóstica das seguintes habilidades relacionadas à potenciação, à radiciação e à notação científica que foram trabalhadas no Ensino Fundamental – Anos Finais.

(EF09MA03) Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários.

(EF09MA04) Resolver e elaborar problemas com números reais, inclusive em notação científica, envolvendo diferentes operações.

A seguir, sugestões de atividades cujas análises de suas resoluções podem contribuir para avaliar a evolução de cada estudante e orientar seus estudos.

1ª avaliação formativa: atividades **2**, **5** e **11** (página 189).

2ª avaliação formativa: atividades **21** e **22** (página 195).

3ª avaliação formativa: atividades **28**, **36** e **42** (páginas 200 e 201, respectivamente).

Capítulo 6 Grandezas e medidas

Orientações

O Capítulo trata de **Grandezas e medidas**, articulando com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. São apresentados dados expressos em diferentes escalas e unidades, o que propicia uma visão mais ampla da relação da Matemática com outras áreas, levando os estudantes a fazer conclusões mais precisas, refletindo a respeito da incerteza presente nas medições. São exploradas também as unidades de medida usadas no armazenamento e na transferência de dados. Esse trabalho favorece o desenvolvimento das competências específicas 1 e 3 da área de Matemática e suas Tecnologias e, em particular, as habilidades EM13MAT103, EM13MAT313 e EM13MAT314.

As grandezas e as unidades de medida estão presentes em quase todas as ações do ser humano, desde as mais comuns, como fazer uma receita de bolo, até as mais complexas, como a navegação aérea, a produção industrial e o desenvolvimento de novas tecnologias. Assim, além da Matemática, há importantes conexões que se podem fazer com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Para sensibilizar os estudantes sobre a importância desse assunto, recomenda-se a leitura do seguinte texto:

Os dez maiores erros de cálculo da ciência e da engenharia

[...]

Um satélite para monitorar o clima em Marte

Feita para orbitar Marte como o primeiro satélite meteorológico interplanetário, a sonda desapareceu em 1999 porque a equipe da NASA usou o sistema anglo-saxão de unidades (que utiliza medidas como polegadas, milhas e galões) enquanto uma das empresas contratadas usou o sistema decimal (baseado no metro, no quilo e no litro).

O satélite de U$ 125 milhões se aproximou demais de Marte quando tentava manobrar em direção à órbita do planeta, e acredita-se que ele tenha sido destruído ao entrar em contato com a atmosfera.

Uma investigação determinou que a causa do desaparecimento foi um "erro de conversão das unidades inglesas para as métricas" em uma parte do sistema de computação que operava a sonda a partir da Terra.

[...]

O planador de Gimli

Em 1983, um voo da companhia Air Canada ficou sem combustível quando voava sobre o povoado de Gimli, na província canadense de Manitoba. O Canadá havia adotado o sistema métrico decimal em 1970, e o avião havia sido o primeiro da empresa a usar as medidas métricas.

O indicador de combustível a bordo do avião não estava funcionando, por isso a tripulação usou um tubo para medir quanto combustível estavam colocando durante o reabastecimento.

O procedimento deu errado quando as medidas de volume foram convertidas em medidas de peso e houve uma confusão entre libras e quilos. O avião acabou decolando com a metade da quantidade de combustível que deveria ter.

Por sorte, o piloto foi capaz de aterrissar na pista de Gimli.

O telescópio Hubble

O Hubble é famoso por suas belas imagens do espaço e por ser considerado um grande êxito da Nasa. Mesmo assim, teve um início de operação difícil.

As primeiras imagens enviadas pelo telescópio estavam borradas porque seu espelho principal era muito plano.

Não por muito – só por 2,2 mícrons, uma medida cerca de 50 vezes mais fina que um fio de cabelo – mas o suficiente para colocar em perigo todo o projeto.

Uma teoria é que uma pequena mancha de tinta em um aparelho usado para testar o espelho tenha provocado a distorção nas medidas.

Mas os cientistas conseguiram solucionar o problema em 1993.

[...]

OS DEZ maiores erros de cálculo da ciência e da engenharia. **BBC News Brasil**, [*s. l.*], 31 maio 2014. Disponível em: https://www.bbc.com/portuguese/noticias/2014/05/140530_erros_ciencia_engenharia_rb. Acesso em: 3 out. 2024.

Esse fato ocorreu em 1999 e menciona erros de cálculo da Ciência. Em contraponto, em 2024, a notícia de que físicos e matemáticos criaram a Teoria Geométrica de Bifurcações (TGB) trouxe a possibilidade de inovar a cibersegurança e a criptografia quântica. Recomenda-se ler a notícia e assistir ao vídeo, disponíveis em: https://g1.globo.com/sp/sao-carlos-regiao/noticia/2024/10/23/pesquisadores-da-unesp-rio-claro-solucionam-problema-matematico-que-nao-era-resolvido-ha-124-anos.ghtml (acesso em: 29 out. 2024).

O tópico **Comprimento, área e volume** apresenta a noção de medida em Geometria sob seus aspectos uni, bi e tridimensionais, isto é, a maneira como são determinadas as medidas: dos segmentos de reta (comprimento); das figuras planas (área), e das figuras sólidas (volume). Esse estudo mostra como a ideia de número está relacionada às medidas dos objetos geométricos. Pode-se comentar com os estudantes, por exemplo, que os números irracionais surgem das medidas geométricas e não de problemas algébricos ou aritméticos. Nesse tópico, também é oportuno reforçar a noção de que área é a contagem de quadrados unitários e volume é a contagem de cubos unitários.

O tópico **O Sistema Internacional de Unidades (SI)** apresenta as principais grandezas utilizadas nesse sistema, explorando o Tema Contemporâneo Transversal Ciência e Tecnologia. É importante que os estudantes compreendam a ideia de grandeza de base. Se julgar apropriado, pode-se explorar textos que tratem dessa temática, como o sugerido a seguir, e que favoreçam o desenvolvimento da competência geral 1 e da habilidade EM13MAT103, de modo que os estudantes valorizem conhecimentos historicamente construídos, interpretem e compreendam textos científicos ou divulgados pela mídia que empregam unidades de medida de grandezas e conversões adotadas ou não pelo SI.

Unidades e instrumentos de medida

[...]

As primeiras unidades de medida usadas na história eram diretamente relacionadas com partes do corpo humano, tais como:

- O pé já era usado na antiguidade pelos gregos, que dividiam um "pé" em 16 "dedos". Os romanos, por sua vez, dividiram o seu "pé" em 12 "dedos".
- Cada "dedo" romano equivalia à espessura de um polegar, daí o nome "polegada", ainda em uso. O rei Eduardo II da Inglaterra, no século XIV, estabeleceu um padrão curioso: cada polegada deveria equivaler ao comprimento de três grãos de cevada secos colocados em fila.
- A braça, inicialmente, equivalia efetivamente ao comprimento de uma mão à outra de uma pessoa com os braços completamente abertos. Uma braça, atualmente, equivale a 1,83 m. Essa unidade é ainda usada para medir a profundidade de oceanos.

No período em que uma comunidade científica começou a ser estabelecida na Europa, o sistema imperial britânico de medidas competia com o sistema métrico, criado e defendido pela França desde a época da Revolução Francesa (final do século XVIII). No sistema britânico, que ainda está parcialmente em uso no Reino Unido, algumas ex-colônias britânicas, como a Nova Zelândia, e, mais intensamente, nos EUA, 12 polegadas são equivalentes a um pé e três pés são equivalentes a uma jarda. Como uma polegada equivale a 2,54 cm, um pé equivale a 30,48 cm e uma jarda a 91,44 cm. O problema do sistema imperial não está nessas equivalências complicadas com o sistema métrico, uma vez que quem usa o sistema imperial no dia a dia ignora qualquer outro sistema, assim como, no Brasil, o sistema imperial é ignorado. O ponto que mais complica o sistema imperial é a falta de uniformidade nas relações entre unidades (12 polegadas, 3 pés). Nesse ponto, o sistema métrico se mostra muito mais simples: a unidade básica é o metro (m), que é dividido em 100 centimetros, cada centimetro sendo dividido em 10 milimetros (mm). Ou seja, todas as unidades se relacionam entre si por múltiplos de 10, o que torna as conversões muito mais simples de serem feitas.

[...]

Uma vez que a atividade científica é caracterizada pela busca da ausência de dubiedade, a adoção de um sistema de medidas padronizado foi uma questão amplamente debatida por uma série de comitês em todo o mundo. Apesar de o sistema métrico já ser usado em muito mais países do que o sistema imperial britânico e, mesmo dentro deste sistema haver dissidências (os EUA criaram suas próprias referências: o galão americano, por exemplo, é diferente do galão inglês), o debate demorou a produzir um sistema-padrão a ser usado em trabalhos científicos.

[...]

SCHROEDER, Carlos. Unidades e instrumentos de medida. *In*: SCHROEDER, Carlos. **Ensino de física para as séries iniciais**: atividades mãos na massa. Rio de Janeiro: UFRJ: Instituto de Física, 25 set. 2006. Disponível em: https://www.if.ufrj.br/~marta/minicurso-ufrgs/versao-html-abrir-index/unidades/leitura.htm#atv1/. Acesso em: 3 out. 2024.

No tópico **Unidades de grandezas derivadas**, podem-se articular as grandezas apresentadas com outros componentes curriculares, como Química e Física, da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

No tópico **Velocidade**, além de ser possível estabelecer uma abordagem integrada com o professor de Física, pode-se explorar o contexto social dos estudantes apresentando uma atividade complementar. Por exemplo, solicitar a eles que determinem quantos quilometros são percorridos diariamente de suas residências até a escola e que registrem o tempo utilizado para fazer esse percurso, determinando a velocidade média do deslocamento. A partir desses dados e conhecendo o meio de transporte dos estudantes (caminhada, bicicleta, ônibus, metrô etc.), pode-se estimar a velocidade média para o deslocamento utilizando cada um desses meios de transporte. Esse tipo de atividade colabora para o desenvolvimento da habilidade EM13MAT314 ao resolver problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão, como a velocidade.

No tópico **Densidade demográfica**, após discutir com os estudantes como é expressa a densidade demográfica de certa região, propor que pesquisem a densidade demográfica do estado em que residem. Eles podem consultar o *site* do IBGE, disponível em https://www.ibge.gov.br/estatisticas/sociais/populacao/9103-estimativas-de-populacao.html (acesso em: 3 out. 2024), para realizar essa pesquisa. Verificar como eles interpretam os dados obtidos. Em seguida, os estudantes podem determinar a densidade demográfica do município ou do bairro em que residem, por meio dos dados populacionais e da área do município, comumente disponibilizados nos *sites* das secretarias municipais.

O trabalho proposto no boxe **Fórum** favorece o desenvolvimento da competência geral 7, pois os estudantes podem argumentar com base em fatos e informações obtidas a partir de fontes confiáveis, além de explorar a consciência socioambiental e o cuidado com o planeta.

Verificar o que os estudantes compreendem a respeito do significado das palavras "populoso" e "povoado". Sugere-se que analisem o mapa apresentado e verifiquem, aproximadamente, onde se encontra a região em que residem.

Com a proposta do boxe **Fórum**, espera-se que os estudantes compreendam que, nos locais densamente povoados, há grande incidência de problemas relacionados à prestação de serviços, como na área de educação, de saúde ou de transporte, além de problemas de moradia, de saneamento básico e de emprego. Entretanto, em locais pouco povoados, esses problemas também são verificados. Se possível, desenvolver essa discussão de maneira integrada com os professores da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, investigando os fatores que contribuem para que regiões menos povoadas sejam carentes de emprego, infraestrutura, serviços etc., o que contribui para o aumento da migração da população. A solução passa, principalmente, pelo estímulo do Estado à ocupação dessas regiões por empresas; mas, para isso, é preciso desenvolver infraestrutura para recebê-las: mão de obra, estradas, saneamento básico, luz etc.

Para complementar o tópico **Outras unidades de medida**, pode-se apresentar o seguinte texto aos estudantes.

O que é um googol?

É uma unidade de medida muito grande. Ela é igual a 10 elevado a 100, ou seja, 1 seguido de 100 zeros! Esse absurdo numérico foi criado pelo matemático Edward Kasner em 1938. O nome não significa nada, foi uma sugestão de um sobrinho, Milton Sirotta. Kasner procurava um número que explicasse – ou se aproximasse – de algo que parecesse infinito. O googol é tão grande que é muito maior do que a quantidade de partículas no Universo, por exemplo. [...]

[...]

MONTEIRO, Gabi. O que é um googol? **Mundo Estranho**, São Paulo, 22 fev. 2024. Disponível em: https://super.abril.com.br/mundo-estranho/o-que-e-um-googol/. Acesso em: 3 out. 2024.

Espera-se que os estudantes percebam que existem grandezas que podem ser expressas por números muito grandes ou números muito pequenos, sendo necessário criar um modo de escrever esses números.

O tópico **Unidades de armazenamento e de transferência de dados** explora o Tema Contemporâneo Transversal Ciência e Tecnologia ao analisar unidades de transferência de dados muito utilizadas em diferentes contextos do cotidiano.

Para compreender as unidades de armazenamento de dados, pode-se propor uma pesquisa sobre a tabela ASCII (American Standard Code for Information Interchange), usada por grande parte da indústria de computadores para trocar informações, e solicitar aos estudantes que representem seus nomes no sistema binário, ou oferecer algumas palavras no sistema binário e solicitar-lhes que descubram que palavras são essas. Com isso, eles podem perceber, por exemplo, quantos *bytes* seriam necessários para armazenar seus nomes no computador e, ainda, quantos nomes iguais aos deles caberiam em um disco rígido. Isso favorece o desenvolvimento da competência específica 1 da área de Matemática e suas Tecnologias e, em particular, a habilidade EM13MAT103, que trata da compreensão de textos científicos que empregam unidades de medida de armazenamento e velocidade de transferência de dados. Explorar outros contextos em que unidades de medida de armazenamento de dados aparecem também favorece a assimilação do conteúdo.

Para o desenvolvimento do tópico **Taxa de transferência**, os estudantes podem retomar a ideia de grandezas derivadas e perceber que a taxa de transferência é determinada por meio de uma razão: a medida da velocidade de conexão para *download* é usualmente dada, por exemplo, em *megabits* por segundo (Mbps).

Com o trabalho na seção **Explorando a tecnologia**, os estudantes compreendem e utilizam diferentes linguagens e tecnologias digitais de informação de forma crítica e significativa, podendo desenvolver as competências gerais 4 e 5. Recomenda-se reforçar a informação de que a taxa de transferência de *upload* é diferente da taxa de transferência de *download*. Para isso, é importante realizar o passo a passo indicado nessa seção, possibilitando também que os estudantes discutam e compartilhem outros meios de organizar as informações e obter os dados desejados para que, assim, seja favorecido o desenvolvimento do pensamento computacional e a competência específica 4 da área de Matemática e suas Tecnologias.

O conteúdo da seção **Conexões com...** permite o trabalho com a competência geral 2 da BNCC, pois recorre à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão e a análise crítica, para criar soluções com base nos conhecimentos das diferentes áreas. Além disso, podem ser trabalhadas as competências gerais 6 e 7, por permitirem que o estudante faça escolhas alinhadas ao exercício da cidadania, com consciência crítica e responsabilidade, e formule decisões que respeitem e promovam a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local. A competência geral 10 também pode ser abordada no que diz respeito à tomada de decisões, com base em princípios sustentáveis.

Na área de Matemática e suas Tecnologias, podem ser trabalhadas as competências específicas 1 e 2, por permitirem que o estudante utilize procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e das questões socioeconômicas ou tecnológicas divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral e para a análise de problemas voltados para a sustentabilidade, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

Na área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, pode ser trabalhada a competência específica 3, por ela tratar da investigação de situações-problema e da avaliação de aplicações do conhecimento científico e tecnológico, utilizando procedimentos e linguagens próprios das Ciências da Natureza, para propor soluções que considerem demandas locais e regionais e comunicar suas descobertas e conclusões a públicos variados por meio de diferentes mídias, no caso, o panfleto informativo. Nesse sentido, podem ser trabalhadas, mais especificamente, as habilidades EM13CNT302, EM13CNT303 e EM13CNT308.

Os Temas Contemporâneos Transversais vinculados à seção são a Educação para o Consumo e a Educação Financeira, por abordarem, respectivamente, questões de sustentabilidade e de economia no consumo de energia elétrica e, consequentemente, nos gastos com ela.

Para complementar o texto apresentado na seção **História da Matemática**, pode-se sugerir aos estudantes que assistam ao vídeo **História da Metrologia**, disponível em https://www.youtube.com/watch?v=pY7Z92peh0Y (acesso em: 3 out. 2024). Ele retrata brevemente os primórdios da metrologia, a origem das medidas antropométricas (medidas que adotam partes do corpo humano como unidade de medida) e o desenvolvimento de sistemas de medida antes da escrita.

Avaliação

A atividade **4** da **Abertura** do Capítulo possibilita uma avaliação diagnóstica da seguinte habilidade trabalhada no Ensino Fundamental – Anos Finais.

(**EF09MA18**) Reconhecer e empregar unidades usadas para expressar medidas muito grandes ou muito pequenas, tais como distância entre planetas e sistemas solares, tamanho de vírus ou de células, capacidade de armazenamento de computadores, entre outros.

A seguir, sugestões de atividades cujas análises de suas resoluções podem contribuir para avaliar a evolução de cada estudante e orientar seus estudos.

1ª avaliação formativa: atividades **3** e **8** (páginas 222 e 223, respectivamente).

2ª avaliação formativa: atividades **16** e **19** (página 229).

3ª avaliação formativa: atividades **27** e **29** (página 235).

Capítulo 7
Proporcionalidade e semelhança

Orientações

O Capítulo oferece contextos que favorecem a elaboração e a resolução de problemas que abarquem relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes, semelhança e congruência de polígonos, relações métricas no triângulo retângulo e teorema de Pitágoras, de modo a permitir a consolidação das seguintes habilidades trabalhadas no Ensino Fundamental – Anos Finais:

(**EF09MA12**) Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes;

(**EF09MA13**) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos;

(**EF09MA14**) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.

A utilização de conceitos matemáticos, como noções de congruência e semelhança para a resolução de problemas, colabora para o desenvolvimento da competência específica 3 da área de Matemática e suas Tecnologias, habilidade EM13MAT308.

Além disso, o Capítulo incentiva o trabalho com demonstrações em Geometria. Howard Eves, autor de uma das obras conhecidas sobre a história da Matemática, reforça a importância das demonstrações para a compreensão da Matemática como área de conhecimento:

> Pela primeira vez na matemática, como em outros campos, o homem começou a formular questões fundamentais como "*Por que* os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais?" e "*Por que* o diâmetro de um círculo divide esse círculo ao meio?". Os processos empíricos do Oriente antigo, suficientes o bastante para responder questões na forma de *como*, não mais bastavam para as indagações mais científicas na forma de *por quê*. Algumas experiências com o método demonstrativo foram se consubstanciando e se impondo, e a feição dedutiva da matemática, considerada pelos doutos como sua característica fundamental, passou ao primeiro plano. Assim, a matemática, no sentido moderno da palavra, nasceu nessa atmosfera de racionalismo e em uma das novas cidades comerciais localizadas na costa oeste da Ásia Menor. Segundo a tradição, a geometria demonstrativa começou com Tales de Mileto, um dos "sete sábios" da Antiguidade, durante a primeira metade do sexto século a.C. [...]

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004. p. 94.

A **Abertura** do Capítulo possibilita uma conversa inicial com os estudantes a respeito do que eles entendem por proporcionalidade e semelhança.

O tópico **Proporcionalidade** apresenta uma demonstração do teorema de Tales; caso os estudantes não tenham familiaridade com o método lógico-dedutivo, uma possibilidade é iniciá-lo com atividades que explorem a argumentação. Veja a seguir um exemplo desse tipo de atividade retirado do caderno pedagógico **Demonstrações em Matemática: uso do raciocínio lógico**.

> [...]
>
> [...] **ATIVIDADE 3: A LÓGICA MATEMÁTICA**
>
> Objetivo**:** Oportunizar ao aluno o trabalho com argumento.
>
> Recursos**:** Papel e lápis.
>
> Tempo**:** Uma aula de 50 minutos.
>
> Desenvolvimento**:**
>
> Será apresentada aos alunos a seguinte situação:
>
> "Se fizer frio não vou tomar sorvete.
>
> Está frio.
>
> O que você pode concluir?"
>
> Os alunos deverão responder oralmente à questão acima, dando sua opinião.
>
> O que se espera é que os alunos digam que a conclusão é que não fui tomar sorvete.
>
> Logo depois, a professora pesquisadora fará uma alteração na situação acima, mudando a afirmação para a seguinte: "Se fizer frio não vou tomar sorvete. Está muito quente. Qual a conclusão a que podemos chegar?"
>
> Os alunos novamente deverão dar sua opinião sobre a questão, dessa vez acreditamos que alguns alunos afirmarão que fui tomar sorvete e outros dirão que não podemos chegar a essa conclusão, pois, na afirmação nada esclarece sobre o fato de estar quente.
>
> Diante disso, será dito aos alunos que esse tipo de afirmação é um argumento e que um argumento é formado de uma ou mais premissas e de uma conclusão. Também deverá ser informado que se trata de um argumento de *Modus ponens*.
>
> Como podemos ver no exemplo, temos:
>
> Premissa 1: Se fizer frio não vou tomar sorvete.
>
> Premissa 2: Está frio.
>
> Conclusão: Não vou tomar sorvete.
>
> Outros argumentos serão apresentados, para que os alunos identifiquem as premissas e a conclusão de cada um deles.
>
> Sugestão de argumentos a serem trabalhados:
>
> a) O ônibus escolar da zona rural não deverá vir amanhã, porque a prefeitura municipal estará fechada e sempre que a prefeitura não trabalha o ônibus não vem.
> b) No Brasil se produz milho; logo o milho deveria ser barato, pois os produtos importados é que são caros.
> c) Como nenhuma flor fala e orquídea é uma flor, as orquídeas não falam.
> d) O aço é um material sólido. Como o gelo é sólido, podemos concluir que o gelo é um tipo de aço.
>
> Nesse momento algumas perguntas deverão ser feitas para dar encaminhamento e serem retomados os termos técnicos utilizados na matemática formal que os alunos tiveram contato na aula anterior.

- ✓ Uma frase pode ser considerada falsa ou verdadeira? (falar de proposição)
- ✓ Podemos ter premissas verdadeiras e conclusão falsa? (falar de argumento válido e argumento inválido (sofisma))
- ✓ Você vê alguma aplicação dos argumentos em nosso dia a dia?

[...]

BARLATI, Roseli Aparecida. Demonstrações em Matemática: uso do raciocínio lógico. *In*: PARANÁ. Secretaria da Educação. **O professor PDE e os desafios da escola pública paranaense**: produção didático-pedagógica. Londrina: SE, 2010. v. II. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2010/2010_uel_mat_pdp_roseli_aparecida_barlati.pdf. Acesso em: 3 out. 2024.

O objetivo desse material é investigar o uso da metodologia de resolução de problemas, focando na demonstração e identificando que tipos de demonstrações os estudantes do Ensino Médio são capazes de desenvolver.

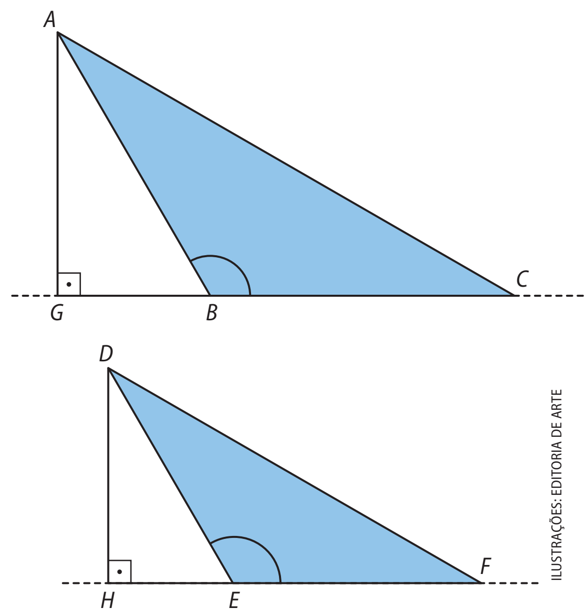
É interessante explorar com os estudantes o boxe **Saiba que...** do tópico **Teorema de Tales**, articulando a história da Matemática com o teorema de Tales. Esse teorema foi estabelecido por Tales, com base na observação dos raios solares que chegavam inclinados à Terra. Dada a grande distância entre o Sol e a Terra, esses raios podem ser considerados paralelos. Tales concluiu que havia uma proporcionalidade entre a medida da sombra e a altura dos objetos.

A atividade **8** da página 250 oferece uma aplicação da proporcionalidade nas escalas termométricas. Essa pode ser uma oportunidade para um breve trabalho de pesquisa com o professor de Física da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, ampliando os conhecimentos dos estudantes a respeito das diferentes unidades existentes para medir temperatura. Pode-se, ainda, sugerir aos estudantes que escrevam a expressão da função que relaciona as temperaturas em grau Celsius e em grau Fahrenheit.

Uma possibilidade de abordagem para o tópico **Figura semelhantes** é iniciar um diálogo com os estudantes sobre os significados da palavra "semelhante", para, em seguida, relacioná-los com o significado matemático. É importante enfatizar que os significados não são os mesmos. Uma atividade externa pode ser proposta, solicitando que tirem fotografias com o celular, para que compreendam a relação com a ampliação e a redução de figuras.

É importante explorar também a semelhança de figuras de um modo mais amplo, ressaltando a congruência dos ângulos correspondentes, bem como a proporcionalidade entre as medidas dos lados. Para isso, pode-se organizar a turma em grupos, com quatro ou cinco estudantes, e fornecer pares de figuras semelhantes e pares de figuras não semelhantes para que explorem as medidas de seus lados e ângulos. Ao final, promover um ciclo de apresentações sobre as conclusões. O objetivo é explorar desenhos de figuras semelhantes e desenhos de figuras não semelhantes para introduzir as definições de **polígonos semelhantes**.

O tópico **Semelhança de triângulos** é o ponto de partida para o desenvolvimento de outras ideias e demonstrações de resultados importantes. Já no tópico **Consequências da semelhança de triângulos**, na demonstração de uma das propriedades da 1ª consequência, sobre a razão de semelhança entre as áreas de dois triângulos semelhantes, sugere-se propor a seguinte questão: Se os triângulos da demonstração fossem obtusângulos e desenhados como na figura, a demonstração seria a mesma? Justifique.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Espera-se que os estudantes concluam que sim, que o desenho é apenas uma representação, mas que a demonstração feita vale para qualquer tipo de triângulo.

A seção **Conexões com...** trabalha a aplicação da semelhança de triângulos em situações reais, contribuindo para o desenvolvimento da competência geral 2 da BNCC e da competência específica 3 da área de Matemática e suas Tecnologias, habilidade EM13MAT308.

Essa seção favorece o trabalho para além do modo enfileirado dentro da sala de aula. Isso porque são propostas, nessa seção e ao longo de cada volume, pesquisas em grupo, entrevistas, coletas de dados, entre outras ações que requerem dos estudantes um envolvimento com mais protagonismo. Deixar que utilizem o laboratório de informática, caso haja na escola. Propor que utilizem a biblioteca a fim de que pesquisem informações em livros impressos, de modo que exercitem a capacidade de sintetizar o que é lido para elaborar o texto final da pesquisa. O único espaço de aprendizagem não pode se limitar apenas ao espaço físico da sala de aula.

Na atividade **1**, uma resposta esperada é que, no passado, a alternativa para medição era o nivelamento barométrico, mas os valores obtidos apresentavam imprecisões da ordem de metros. Com as novas tecnologias, os instrumentos de medida evoluíram em precisão, como a inserção do Sistema de Posicionamento Global (GPS), e, assim, podem ser obtidas medidas mais precisas dos pontos culminantes.

A resolução esperada para a atividade **3** é, em metro:

$$\frac{1,8}{1,5} = \frac{2\,995,3}{x} \Rightarrow 1,8x = 4\,492,95 \Rightarrow x \simeq 2\,496,8$$

Para a atividade **4**, será necessário providenciar, com antecedência, pratos de plástico para a realização da atividade. Incentivar os estudantes a pesquisar o procedimento indicado. Se necessário, para explicar melhor esse método, compartilhar o *link* a seguir com os estudantes: https://www.youtube.com/watch?v=eB7NCwY-7Us (acesso em: 3 out. 2024).

As **Relações métricas no triângulo retângulo** geralmente são um assunto trabalhado no Ensino Fundamental, por isso é possível que os estudantes já as tenham estudado. As relações métricas no triângulo retângulo são consequências da semelhança e são aplicadas na resolução de inúmeras situações. É importante dar destaque ao teorema de Pitágoras, à nomenclatura dos lados do triângulo retângulo e a uma de suas inúmeras demonstrações como um dos resultados mais relevantes da Geometria plana. Também é interessante demonstrar, com os estudantes, as relações métricas no triângulo retângulo a partir da semelhança de triângulos, contribuindo, assim, para o desenvolvimento da competência específica 3 da área de Matemática e suas Tecnologias, habilidade EM13MAT308.

O boxe **Fórum** apresenta uma oportunidade para que os estudantes pesquisem e promovam discussões entre os pares e com os professores de outras áreas do conhecimento em uma oportunidade de trabalho multidisciplinar. Podem ser organizados pequenos seminários e momentos de exposição das ideias dos estudantes.

O desenvolvimento da competência geral 5 é favorecido à medida que se compreende que a tecnologia digital dos *drones* é usada para a obtenção de informações de monitoramento de áreas, especialmente as de difícil acesso. As competências gerais 7 e 9 são contempladas ao se realizar a atividade em grupo e promover o debate, o que permite exercitar a argumentação, a defesa de ideias e pontos de vista, a consciência socioambiental e de cuidado com o planeta, a empatia, o diálogo e a cooperação entre os estudantes. A discussão sobre o tema desmatamento também contribui para o desenvolvimento da competência específica 1 da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, bem como do Tema Contemporâneo Transversal Educação Ambiental.

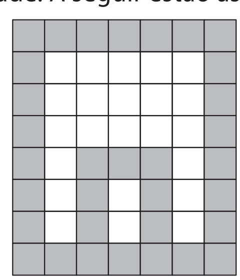
Para contribuir com a pesquisa proposta na seção, podem ser sugeridas aos estudantes algumas fontes para complementar as informações sobre as Unidades de Conservação. Algumas sugestões são:

- INSTITUTO CHICO MENDES DE CONSERVAÇÃO DA BIODIVERSIDADE. **Planos de manejo**. Brasília, DF: ICMBio, 11 abr. 2024. Disponível em: https://www.gov.br/icmbio/pt-br/assuntos/biodiversidade/unidade-de-conservacao/planos-de-manejo. Acesso em: 3 out. 2024.
- O QUE são unidades de conservação. Dicionário ambiental. **O Eco**, Rio de Janeiro, 19 abr. 2013. Disponível em: https://www.oeco.org.br/dicionario-ambiental/27099-o-que-sao-unidades-de-conservacao/. Acesso em: 3 out. 2024.

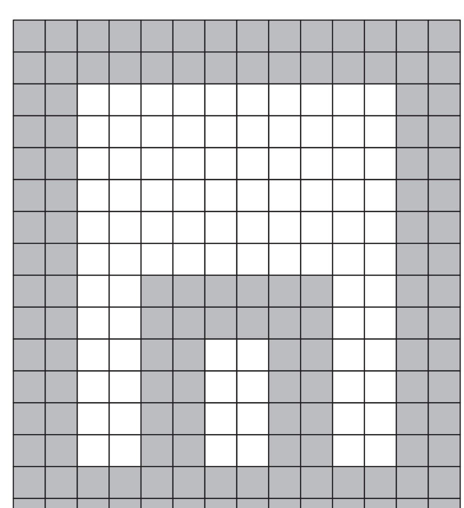
A seção **Explorando a tecnologia** é uma oportunidade de promover o aprofundamento de conhecimentos matemáticos associados às noções de linguagem de programação, proporcionando novas formas de resolver uma atividade. É uma ocasião para que seja explorada a competência específica 4 da área de Matemática e suas Tecnologias, habilidade EM13MAT405, relacionada ao pensamento computacional.

A atividade dessa seção tem como proposta explorar o pensamento computacional sem a utilização de computadores. Para a realização dos itens **a** e **b**, providenciar folhas de papel quadriculado cujas dimensões dos quadradinhos sejam 1 cm × 1 cm. Uma sugestão é organizar os estudantes em duplas e permitir que realizem as representações. Após terem realizado as construções, fazer a mediação das conclusões obtidas e verificar se estabeleceram relação com a proporcionalidade. Caso haja possibilidade, incentivar que cada dupla crie uma figura para que outra dupla a amplie, usando os comandos trabalhados nessa atividade. A seguir estão as respostas esperadas.

a)



b)



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Código de armazenamento para a imagem ampliada.

Linha 1: 0, 14	Linha 9: 0, 2, 2, 6, 2, 2
Linha 2: 0, 14	Linha 10: 0, 2, 2, 6, 2, 2
Linha 3: 0, 2, 10, 2	Linha 11: 0, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2
Linha 4: 0, 2, 10, 2	Linha 12: 0, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2
Linha 5: 0, 2, 10, 2	Linha 13: 0, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2
Linha 6: 0, 2, 10, 2	Linha 14: 0, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2
Linha 7: 0, 2, 10, 2	Linha 15: 0, 14
Linha 8: 0, 2, 10, 2	Linha 16: 0, 14

Pode ser interessante, ao terminar a atividade, fomentar a discussão sobre a comparação dos códigos antes e depois da redução. Algumas sugestões de perguntas são: O que aconteceu com os dígitos dos códigos? E com as linhas?; Se o objetivo fosse ampliar a imagem original em sete vezes, como ficariam os códigos?

A seção **História da Matemática** apresenta fatos históricos relacionados à Matemática com o intuito de contextualizar conteúdos e contribuir para a compreensão da evolução de ideias e de teorias ao longo do tempo. Para aprofundar o que foi exposto nessa seção, pode-se solicitar aos estudantes que realizem pesquisas sobre Tales de Mileto e propor um momento de exposição sobre o que descobriram. Em meio às informações trazidas por eles, certamente haverá diversas conexões com os temas abordados neste Capítulo.

Avaliação

A atividade **3** da **Abertura** do Capítulo possibilita uma avaliação diagnóstica da seguinte habilidade relacionada ao teorema de Pitágoras, que foi trabalhada no Ensino Fundamental – Anos Finais.

(**EF09MA14**) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.

A seguir, sugestões de atividades cujas análises de suas resoluções podem contribuir para avaliar a evolução de cada estudante e orientar seus estudos.

1ª avaliação formativa: atividade **8** (página 250).

2ª avaliação formativa: atividade **13** (página 254).

3ª avaliação formativa: atividades **18** e **21** (páginas 258 e 259, respectivamente).

Capítulo 8

Trigonometria no triângulo retângulo

Orientações

As atividades propostas neste Capítulo ilustram as aplicações da Trigonometria nos mais variados contextos, estimulando a resolução e a elaboração de problemas que envolvem triângulos em diferentes áreas do conhecimento. Todas as situações contribuem para o desenvolvimento da competência específica 3 da área de Matemática e suas Tecnologias e a habilidade EM13MAT308, especificamente. Nesse sentido, espera-se que os estudantes reconheçam a aplicação das razões trigonométricas para a obtenção de medidas inacessíveis em diferentes áreas.

As atividades propostas na **Abertura** do Capítulo incentivam uma análise, do ponto de vista técnico, da construção de rampas de acessibilidade, conforme a norma NBR 9050 cujo texto pode ser acessado por meio do *link* https://www.prefeitura.sp.gov.br/cidade/secretarias/upload/ABNT%209050%202015.pdf (acesso em: 4 out. 2024). Espera-se que os estudantes concluam que, se a medida do ângulo formado pela inclinação de uma rampa em relação à horizontal for maior que a inclinação máxima permitida mencionada no texto, a rampa ficará muito íngreme e sem condições de uso, pois nem pedestres nem cadeirantes conseguirão subi-la. Por isso, é necessário que haja uma norma para delimitar o ângulo máximo de inclinação da rampa, de modo que ela seja de fato acessível. As discussões propostas valorizam os conhecimentos construídos sobre o mundo, incentivando, ao mesmo tempo, a empatia e o acolhimento, desenvolvendo as competências gerais 1 e 9.

O assunto abordado na **Introdução** fornece informações sobre a importância da Trigonometria e dos seus procedimentos de cálculo ao longo da história, reforçando a competência geral 1.

Ao abordar o tópico **Razões trigonométricas no triângulo retângulo**, pode-se retomar, por meio da semelhança de triângulos, as demonstrações das relações métricas no triângulo retângulo.

As demonstrações do tópico **Relações entre razões trigonométricas** possibilitam aos estudantes um avanço em relação ao método dedutivo, que é característico da Matemática para validar resultados. Isto é, compreender essas demonstrações ajuda no desenvolvimento da capacidade de distinguir a diferença entre uma prova lógico-dedutiva e uma verificação empírica. Esta última pode envolver a visualização de desenhos, a construção de modelos materiais, simuladores virtuais ou a medição de grandezas.

Na atividade **15** da página 284, é esperado que os estudantes elaborem uma atividade usando um modelo parecido com o da atividade **14**. Isto é, com uma pessoa no solo e dois *drones* no ar, de modo a compor dois triângulos justapostos; dessa maneira, uma das perguntas que pode ser feita tem a ver com a distância entre os dois *drones*.

O Tema Contemporâneo Transversal proposto no boxe **Fórum** é Direitos da Criança e do Adolescente. O **Estatuto da Criança e do Adolescente** (ECA), sancionado em 13 de julho de 1990, estabelece, entre outros itens, o direito à educação de todas as crianças e dos adolescentes, sem discriminação de qualquer natureza. Isso inclui as pessoas com deficiência, entre elas aquelas que fazem uso de cadeira de rodas, chamadas, no contexto coloquial, de cadeirantes. No *link* https://www.gov.br/mdh/pt-br/navegue-por-temas/crianca-e-adolescente/publicacoes/o-estatuto-da-crianca-e-do-adolescente (acesso em: 4 out. 2024), é possível ter acesso ao texto do ECA na íntegra.

Em relação à discussão proposta, é possível que os estudantes destaquem que crianças e adolescentes têm necessidades e vulnerabilidades específicas, que não são abordadas pelos direitos concedidos aos adultos. Eles podem argumentar que as crianças e os adolescentes têm diferentes capacidades cognitivas e níveis de autonomia em comparação com os adultos. Portanto, são necessários direitos e proteções que levem em consideração essas diferenças e os ajudem a se desenvolverem de maneira saudável e segura. Ao incentivar que os estudantes defendam suas ideias e argumentem com informações confiáveis, a atividade colabora para o desenvolvimento da competência geral 7.

No trabalho com o tópico **Ângulos de 30°, de 45° e de 60°**, verificar, inicialmente, se os estudantes já conhecem algo relacionado a essa temática. Se possível, organizar breves momentos para que eles apresentem, uns aos outros, as formas de se obterem os valores, observando se compreenderam os cálculos desenvolvidos em cada caso. Sugere-se propor a questão: Observe que, conhecidos o seno, o cosseno e a tangente de 30°, ficam também determinados o seno, o cosseno e a tangente de 60°. Por quê? Justifique. Espera-se que os estudantes respondam que os ângulos são complementares, logo $\text{sen } 60° = \cos 30°$, $\cos 60° = \text{sen } 30°$ e $\text{tg } 60° = \frac{1}{\text{tg } 30°}$.

Pode-se, ainda, solicitar aos estudantes que, em duplas, elaborem dois fluxogramas diferentes cujas instruções permitam a construção, com régua não graduada e compasso, de dois triângulos retângulos que tenham um ângulo agudo de 30°. A ideia de pedir dois fluxogramas diferentes está relacionada ao fato de possibilitar aos estudantes uma reflexão sobre como usar conhecimentos matemáticos amparados em diferentes conceitos. Eles poderão, por exemplo, utilizar o que está sendo verificado no estudo de Trigonometria; nesse caso, construindo um segmento de meia unidade de comprimento, perpendicular a uma reta suporte, e, posteriormente, construindo a hipotenusa do triângulo, com uma unidade de comprimento, intersectando a reta suporte mencionada anteriormente, que vai determinar o outro cateto do triângulo, utilizando, nessa construção, o fato de que $\text{sen } 30° = \frac{1}{2}$; ou ainda utilizar a construção do triângulo equilátero para obter um ângulo de 60° e, com isso, determinar o ângulo de 30°. Incentive os estudantes a compartilhar as soluções para essa atividade.

A atividade **28** da página 289 propõe a construção e a utilização de um teodolito artesanal cuja finalidade é a de os estudantes conhecerem esse instrumento de forma prática e vivencial. No *site* http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/705375 (acesso em: 4 out. 2024), há um livro digital, **Modelagem matemática: Ensinando Matemática com teodolito caseiro**, de Cláudio Lima da Silva, Lucas Ferreira Rodrigues e Fábio José da Costa Alves, com sugestões de atividades e descrição, passo a passo, de como construir um teodolito caseiro. Ao seguir o passo a passo desse material sugerido, alertar aos estudantes, no passo 5, para que tenham cuidado ao utilizar a cola quente a fim de que não se queimem.

Uma estratégia possível para essa atividade é solicitar aos estudantes que assistam ao vídeo antecipadamente em casa e, além disso, que leiam o material sugerido para que reúnam e tragam os materiais necessários para a aula, durante a qual montarão seus teodolitos. Caso tenham dificuldade de obter os materiais ou na montagem, uma opção é construir um modelo mais simples, com transferidores e canudos (de preferência, com materiais recicláveis ou biodegradáveis). Durante a aula, os estudantes podem selecionar pontos, como: altura de uma árvore, altura dos prédios, comprimento da quadra entre outros. Os cálculos serão realizados por meio das razões trigonométricas do triângulo retângulo. Se possível, apresentar as medidas reais posteriormente para que os estudantes as comparem com os resultados que obtiveram em suas medidas e seus cálculos com o teodolito construído por eles. No caso de resultados muito diferentes das medidas reais, pode ter havido erros de observação, de cálculo ou mesmo de construção do equipamento.

Outra possibilidade para o uso do teodolito é a realização do seguinte experimento:

- SOARES, Maria Zoraide M. C. *et al*. **A altura da árvore**: experimento. Campinas: Matemática Multimídia, [201-]. Disponível em: https://m3.ime.unicamp.br/recursos/994. Acesso em: 4 out. 2024.

A seção **Explorando a tecnologia** é uma oportunidade para promover o aprofundamento de conhecimentos matemáticos associados ao uso de recursos tecnológicos disponíveis, utilizando diferentes linguagens e proporcionando novas formas de resolver uma atividade, colaborando para as competências gerais 4 e 5. O cálculo das razões trigonométricas com base na semelhança de triângulos, na prática e por meio da utilização do aplicativo sugerido, permite aos estudantes que consigam resolver e elaborar problemas que envolvam triângulos em diferentes contextos com maior desenvoltura.

Na atividade **1**, espera-se que os estudantes indiquem o caso de semelhança *AA* (ângulo-ângulo), pois os ângulos $C\hat{A}B$ e $E\hat{A}D$ são congruentes e os ângulos $C\hat{B}A$ e $E\hat{D}A$ são retos.

Na atividade **2**, *j* e *m* representam a razão trigonométrica seno entre o cateto oposto e a hipotenusa; *k* e *n* representam a razão trigonométrica cosseno entre o cateto adjacente e a hipotenusa; *l* e *o* representam a razão trigonométrica tangente entre o cateto oposto e o cateto adjacente. Todas tomam como referência os ângulos congruentes $C\hat{A}B$ e $E\hat{A}D$, permitindo que se conclua que são constantes, mantendo-se a medida do ângulo.

Na atividade **3**, é esperado que os estudantes percebam que as razões não mudam de valor. Assim, a conclusão é que não importa a medida dos lados do triângulo, pois qualquer triângulo retângulo que tenha um ângulo agudo de mesma medida do ângulo relativo ao vértice *A* terá os mesmos valores para as razões observadas na construção.

Na atividade **4**, é esperado que os estudantes respondam que todas as razões terão seus valores alterados com a mudança de posição do ponto *C*, pois, ao mudar o ponto *C*, muda-se a medida do ângulo relativo ao vértice *A*. Outra observação importante é que as duas razões seno sempre terão o mesmo valor. Isso também serve para as duas razões cosseno e as duas razões tangente. Pode-se concluir que os valores obtidos nas razões dependem da medida do ângulo, nesse caso, o ângulo relativo ao vértice *A*.

Outra atividade possível a ser feita no **GeoGebra** é a construção de um teodolito virtual que permita medições de objetos em cenário virtual em 3D. As instruções podem ser consultadas em:

- ZILKHA, Esther. **Utilização do GeoGebra na construção de instrumentos**: teodolito. 2014. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2014. Disponível em: https://impa.br/wp-content/uploads/2016/12/esther_zilkha.pdf. Acesso em: 4 out. 2024.

A seção **Conexões com...** oferece possibilidades interessantes para explorar temas diversos e promover a interdisciplinaridade, quando possível. Contribui também para desenvolver a competência leitora e o senso crítico, capacidades essenciais para a participação cidadã dos estudantes.

Nesse caso, a proposta é trabalhar aplicações da Trigonometria em situações reais, contribuindo para o desenvolvimento das competências gerais 2, 3 e 9, quando se recorre à abordagem própria da Matemática para resolver problemas e criar uma solução tecnológica para a construção da pista de *skate*. Os textos e as atividades apresentados nessa seção valorizam a manifestação do *skate* como esporte, cultura de rua e arte, a técnica envolvida na marcenaria e a destreza nos movimentos, além de exercitar o diálogo, o respeito e a cooperação na atividade em grupo, valorizando aspectos relacionados às culturas juvenis.

Para a atividade **3**, pode ser mostrada aos estudantes a construção de algumas pistas feitas com material reciclável, encontrada no seguinte artigo:

- SILVA, Adnielson L. da *et al*. *Skate* de dedo e as relações trigonométricas no triângulo retângulo. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2016, São Paulo. **Anais** [...]. São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2016. Disponível em: http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/4985_2348_ID.pdf. Acesso em: 4 out. 2024.

A seguir, outros *links* sobre o assunto que podem subsidiar o trabalho proposto nessa atividade:

- SKATEPARKS DO BRASIL. [*S. l.*], c2024. *Site*. Disponível em: http://www.skateparksdobrasil.com/. Acesso em: 4 out. 2024.
  Site que reúne imagens, fornece a localização e dicas sobre pistas de *skate* pelo Brasil.
- CONFEDERAÇÃO BRASILEIRA DE SKATEBOARDING. São Paulo, c2024. *Site*. Disponível em: http://www.cbsk.com.br/. Acesso em: 4 out. 2024.
  Site da Confederação Brasileira de Skateboarding, com informações sobre torneios, regulamentos entre outras.

Avaliação

A atividade **4** da **Abertura** do Capítulo possibilita uma avaliação diagnóstica da seguinte habilidade trabalhada no Ensino Fundamental – Anos Finais.

(**EF09MA17**) Reconhecer vistas ortogonais de figuras espaciais e aplicar esse conhecimento para desenhar objetos em perspectiva.

Reconhecer vistas ortogonais é uma habilidade importante para a utilização da Trigonometria em objetos tridimensionais.

A seguir, sugestões de atividades cujas análises de suas resoluções podem contribuir para avaliar a evolução de cada estudante e orientar seus estudos.

1ª avaliação formativa: atividades **4** e **13** (páginas 283 e 284, respectivamente).

2ª avaliação formativa: atividades **17** e **24** (páginas 288 e 289, respectivamente).

Números irracionais e o número pi

[Música de transição]

3 vírgula 14. Você provavelmente já ouviu falar que esses são os primeiros dígitos do número pi, também conhecido como constante pi. E que o símbolo de pi é justamente a letra grega de mesmo nome. A representação gráfica de pi é um símbolo que lembra, para muitas pessoas, duas paredes com um pequeno telhado.

O número pi é uma constante matemática fundamental, muito utilizada em diversos campos da Matemática. Mas sua utilização vai além, estendendo-se a Física, Engenharia, Astronomia e Computação. Vamos conhecer um pouco da história desse número e de outros números irracionais.

[Música de transição]

O número pi é obtido dividindo a medida do comprimento da circunferência de um círculo pelo seu diâmetro. O resultado dessa divisão é aproximadamente 3,14, independentemente do comprimento da circunferência utilizada no cálculo. Esse valor, o pi, é usado, por exemplo, para calcular a área de um círculo.

O pi é um número irracional. Os números irracionais são aqueles que não podem ser obtidos pela divisão entre dois números inteiros. Ou seja, eles não podem ser escritos na forma de fração em que o numerador e o denominador da fração são números inteiros. Na forma decimal, sua representação é infinita e não periódica, o que significa que suas casas decimais continuam indefinidamente sem repetir nenhum padrão.

Entre os números irracionais mais conhecidos está o número de ouro, também conhecido como proporção áurea. Representado pela letra grega phi, ele tem valor aproximado de 1,62 e é considerado por estudiosos como um símbolo de harmonia. Além de poder ser identificada na natureza, essa proporção áurea está presente em construções desde a Antiguidade, como nas pirâmides de Gizé, no Egito, e no Partenon, em Atenas, na Grécia. É possível também identificar a proporção áurea em algumas obras de Leonardo da Vinci, como a Monalisa.

Outro número irracional famoso é o número de Euler, representado pela letra “e”. Ele corresponde a aproximadamente 2,7. Esse número pode ser utilizado em cálculos de taxas de juros e no cálculo da taxa de crescimento populacional.

O nome desse número irracional é uma homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler, que viveu no século XVIII. Em sua obra Introdução à análise infinitesimal, Euler popularizou o símbolo pi como o resultado da razão entre o comprimento da circunferência de um círculo e seu diâmetro.

[Música de transição]

Há evidências de que os números irracionais já eram conhecidos há mais de 4 mil anos. Uma dessas evidências é uma tábua de barro da civilização babilônica. Ela traz cálculos de perímetro com valores aproximados ao pi.

Outra evidência é o papiro de Rhind, um antigo documento egípcio que apresenta uma série de problemas e soluções matemáticas. Entre eles, o cálculo de área de um círculo, utilizando uma fórmula parecida com a que usamos para calcular o valor de pi.

Matemáticos gregos, como Arquimedes e Ptolomeu, também desenvolveram métodos para calcular valores aproximados de pi ao determinar o perímetro de figuras geométricas. Com o tempo, esse conceito se desenvolveu por meio dos estudos de diversos matemáticos, chegando à definição de pi que conhecemos atualmente.

É inegável a importância do número pi e das suas aplicações. Ele é usado em cálculos relacionados ao desenvolvimento e aprimoramento de sistemas de posicionamento global, os GPS, no estudo do DNA humano e até mesmo em previsões meteorológicas.

[Música de transição]

O curioso é que, mesmo sendo um conceito matemático, o pi está se tornando parte da cultura popular, principalmente nos Estados Unidos. Em 2009, o Congresso dos Estados Unidos declarou o dia 14 de março como o Dia do Pi. A data foi escolhida porque, em inglês, a indicação do mês aparece antes do dia. E a data 14 de março é escrita como 3/14, o que faz referência ao 3,14 do pi.

Outra curiosidade: há empresas investindo dinheiro e tempo para calcular o maior número de dígitos de pi. Em 2024, uma empresa estadunidense de armazenamento de dados conseguiu calcular 105 trilhões de dígitos de pi.

O caso mais inusitado foi a iniciativa do músico estadunidense Michael John Blake, que diz ter utilizado o pi em uma música. Ele afirma ter associado cada nota musical a um algarismo. Em seguida, tocou as notas seguindo a sequência desse número irracional. Ouça a seguir um trecho de como ficou a composição, chamada *What pi sounds like*. Se você pensar que os números depois da vírgula de pi não acabam, vai deduzir porque só dá para ouvir um trecho dessa criação…

[Trecho de música instrumental]

Créditos: Você pode ouvir na íntegra a música *What pi sounds like* no canal *Blake* do YouTube. Os outros áudios deste *podcast* são da Freesound.

Resíduos sólidos: desafios e soluções

[Som de caminhão]

Haja caminhão para tanto lixo! O Brasil gera cerca de 80 milhões de toneladas de resíduos sólidos por ano, o que equivale a uma média de 343 kilos por pessoa. Mas, infelizmente, apenas 4% desse total é reaproveitado ou reciclado, conforme dados de 2022 da Associação Brasileira de Empresas de Limpeza Pública e Resíduos Especiais, a Abrelpe.

É tanto lixo sem um destino adequado, que o Brasil tem buscado implementar políticas públicas para enfrentar os problemas decorrentes do manejo inadequado dos resíduos sólidos. Um exemplo disso é a criação da Política Nacional dos Resíduos Sólidos em 2010. Essa política estabeleceu diretrizes para a gestão integrada e para o gerenciamento adequado dos resíduos sólidos, definindo princípios, objetivos e ações com o intuito de promover a redução, a reutilização, a reciclagem e a disposição final ambientalmente adequada desses resíduos, de modo a proteger o meio ambiente e a saúde pública.

[Música de transição]

Na verdade, o saneamento básico, que inclui não só a coleta e a destinação de resíduos sólidos, mas também o tratamento de esgoto, é objeto de atenção de políticas públicas. A Política Federal de Saneamento Básico, instituída em 2007 e atualizada em 2020, constitui o Marco Legal do Saneamento. Esse marco define as diretrizes para a universalização do acesso à água potável, à coleta e ao tratamento de esgoto; além disso, orienta a limpeza urbana e o manejo de resíduos sólidos e de águas pluviais. A legislação em vigor determina que, até 2033, 99% da população brasileira deve ter acesso à água tratada e 90% dela, à coleta e ao tratamento de esgoto.

Mas estamos longe de chegar lá... Em 2022, o Censo Demográfico do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, o IBGE, revelou que 37,5% dos domicílios brasileiros não tinham acesso à rede de esgoto, enquanto 24,3% deles usavam recursos precários de esgotamento sanitário.

Além dos impactos sociais, os problemas de saneamento, especialmente o descarte inadequado de resíduos sólidos, afetam negativamente o ambiente e contribuem para as mudanças climáticas. Acompanhe a seguir o que uma reportagem tem a dizer sobre essa situação.

[Áudio extraído de vídeo]

"O lixo orgânico é um dos principais vilões do combate às mudanças climáticas. [...]. E se o Brasil não fizer mudanças no manejo de seus resíduos, a emissão de metano deve crescer 7% nos próximos 7 anos."

O metano é gerado pela decomposição de matéria orgânica presente nos resíduos sólidos e é o segundo maior responsável pelo aquecimento global, ficando atrás apenas do gás carbônico. Em 2021, uma empresa brasileira especializada em desenvolvimento sustentável e em gestão de ecoparques no país revelou que os cerca de 3 mil lixões ainda existentes no Brasil emitem, aproximadamente, 27 milhões de toneladas de gás carbônico por ano.

[Música de transição]

Com o objetivo de avançar nas ações contra as mudanças climáticas, foi realizada, em 2021, a Conferência da ONU sobre Mudanças Climáticas, a COP26, em Glasgow, na Escócia. Durante o evento, cerca de 120 países, incluindo o Brasil, assinaram um compromisso global para reduzir a emissão de gás metano em 30% até 2030.

Para cumprir essa meta, o Brasil precisa enfrentar o desafio de encerramento dos quase 3 mil lixões clandestinos do país, os quais operam sem qualquer proteção ambiental, e onde cerca de 45 milhões de toneladas de resíduos são despejadas ilegalmente.

[Música de transição]

Encontrar soluções adequadas para o gerenciamento de resíduos sólidos tem sido um desafio tanto para as administrações públicas, quanto para o setor privado. É preciso ter informações mais detalhadas sobre a quantidade de resíduos gerada e sobre os métodos de descarte utilizados, para que se consigam desenvolver estratégias para reduzir os impactos ambientais desses resíduos.

É nesse contexto que a Matemática entra em cena! Por meio de análise estatística dos dados sobre coleta e gestão de resíduos, é possível mapear e identificar os problemas de descarte e pensar em possibilidades para melhorar a destinação dos resíduos sólidos.

[Música de transição]

Um exemplo disso é o sistema de gestão de resíduos sólidos, desenvolvido por meio de uma parceria entre o Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP), em São Carlos, o Centro de Ciências Matemáticas Aplicadas à Indústria, a Cooperativa Socioambiental de Trabalho Reenvolta, que realiza projetos socioambientais na região central de São Paulo, e a prefeitura da cidade de Matão, em São Paulo.

Esse sistema auxilia os municípios no monitoramento dos resíduos sólidos gerados pela população. Ele é *on-line* e funciona da seguinte maneira: a cada despejo de resíduo, o usuário registra no sistema informações, como data, quantidade, tipo, origem e destino do material. Com base nesses dados, o sistema gera tabelas e gráficos e, por meio de análises estatísticas, produz relatórios que auxiliam a compreensão do processo de descarte ao longo do tempo. Esses relatórios contribuem com a gestão dos resíduos e com a tomada de decisões. Por exemplo, eles podem ajudar a identificar a produção excessiva de determinados resíduos, levando à implementação de políticas voltadas para a redução desses materiais.

[Música de transição]

Iniciativas como essa mostram que os conhecimentos em Matemática e em Estatística podem ajudar a resolver problemas ambientais. No entanto, um dos grandes desafios continua sendo a conscientização da sociedade da importância do descarte correto de resíduos sólidos, da reutilização, sempre que possível, e da reciclagem de materiais.

[Música de transição]

Créditos: Você pode ver na íntegra o vídeo **Lixo orgânico das grandes cidades prejudica combate a mudanças climáticas** no canal Jornalismo TV Cultura do Youtube. Os outros áudios deste *podcast* são da Freesound.

Os números e a saúde

[Áudio extraído de vídeo]

"Boa noite. Boa noite. Meio milhão de casos confirmados no mundo. A OMS afirma que a covid-19 cresce exponencialmente e, se todos os países não agirem de forma agressiva, milhões de pessoas podem morrer."

[Música de transição]

Os brasileiros nunca se depararam tanto com a expressão "crescimento exponencial" quanto durante a pandemia de covid-19, em 2020. Esse conceito, que antes parecia distante, ganhou destaque nos meios de comunicação para explicar a velocidade com que o coronavírus se espalhava.

Por ter o ar como uma das vias de transmissão, o vírus causador da covid-19, o SARS-CoV-2, possuía alta taxa de contágio, ocasionando um crescimento rápido da quantidade de casos diários. Uma pesquisa divulgada pelo Instituto de Tecnologia de Massachusetts, nos Estados Unidos, em novembro de 2020, revelou que, em média, uma pessoa infectada podia transmitir o vírus para seis outras pessoas, resultando em um crescimento exponencial de novos casos da doença.

[Música de transição]

Mas o que significa esse "crescimento exponencial" que foi tão mencionado na pandemia? Vamos entender como ocorre esse crescimento comparando-o com o crescimento linear. Para isso, acompanhe duas situações fictícias sobre o número de pessoas infectadas por um vírus: uma com crescimento linear e outra com crescimento exponencial.

Primeiro, vamos considerar o crescimento linear. Suponha que, no primeiro dia, haja um caso, no segundo dia, dois casos, no terceiro dia, três casos e, no quarto dia, quatro casos. Nesse cenário, o crescimento é linear, porque a quantidade de casos aumenta de maneira constante a cada dia. Portanto, no sexto dia, haveria seis casos e, no décimo dia, dez casos.

Agora, vamos considerar o crescimento exponencial. Imagine que, no primeiro dia, haja um caso, no segundo dia, dois casos, no terceiro dia, quatro casos e, no quarto dia, oito casos. Aqui, o crescimento é exponencial, porque o número de casos dobra a cada dia. Assim, no sexto dia, haveria 32 casos e, no décimo dia, 512 casos.

Você percebeu a diferença entre crescimento linear e exponencial? Enquanto, no crescimento linear, o número de casos no décimo dia é dez, no crescimento exponencial, é 512. Embora os números possam ter valores próximos nos três primeiros dias, com o tempo, a diferença se torna mais acentuada. O crescimento exponencial aumenta a quantidade de casos de modo muito mais rápido do que o crescimento linear, impactando significativamente a velocidade com que o número de casos cresce.

[Música de transição]

Entendeu como o conceito de crescimento exponencial é importante para analisar a transmissão de um vírus e avaliar a gravidade de uma pandemia como a de covid-19?

Saber se a transmissão de um vírus segue um padrão exponencial é muito importante para a gestão de uma pandemia. Identificar um crescimento exponencial na transmissão permite que governos e autoridades sanitárias atuem de modo mais rápido, adotando medidas como distanciamento social, uso de máscaras e vacinação para reduzir a taxa de transmissão e, assim, diminuir o número de novas infecções.

Além disso, essa informação possibilita prever a gravidade de um surto e preparar recursos adequados, como leitos hospitalares e suprimentos médicos, para evitar que o sistema de saúde entre em colapso.

[Música de transição]

Mas como, na prática, ocorreu o trabalho dos matemáticos na pandemia da covid-19? Em uma entrevista ao jornal da Universidade de São Paulo, a pesquisadora Claudia Sagastizábal explicou:

"Para a covid-19, a partir dos dados disponíveis, podemos fazer cálculos e estimar a taxa de reprodução do vírus, [...]. Repetindo o cálculo com o mesmo modelo matemático [a] cada dia, conforme chegam os novos dados, podemos determinar a evolução dessa taxa".

Segundo a pesquisadora, esses dados são essenciais para analisar se houve uma aceleração ou uma desaceleração na propagação do vírus.

[Música de transição]

Além de ajudar na projeção de cenários sobre a velocidade da transmissão do vírus, a Matemática desempenha um papel importante na análise de dados que ajudam a entender a taxa de mortalidade e a eficiência de medidas de controle, como o isolamento social.

No que diz respeito ao isolamento social, o projeto Vidas Salvas estimou o número de vidas salvas no país pelo isolamento social. Sobre a repercussão do projeto, Paulo Silva, professor do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas, diz:

"Fiquei impressionado e muito feliz com a repercussão do Vidas Salvas. É interessante como uma mudança de perspectiva, saindo do tópico de mortes para a preservação de vidas, foi capaz de trazer tanto interesse e animar pessoas a manter o isolamento social, que tem sido tão importante para controlar a disseminação da covid-19. É a matemática atuando de forma social, isso foi muito gratificante".

[Música de transição]

Percebeu como a Matemática pode ser uma grande aliada na saúde pública? Ao integrar dados epidemiológicos com análises matemáticas, é possível prever o comportamento da transmissão de doenças, antecipar surtos, otimizar recursos e ajudar a criar estratégias de respostas mais eficazes, sendo a Matemática essencial na prevenção e na gestão de pandemias.

[Música de transição]

Créditos: a abertura do Jornal Nacional, da TV Globo, apresentada no começo deste *podcast*, foi ao ar em 26 de março de 2020 e está disponível no Globoplay. Os outros áudios deste *podcast* são da Freesound.

Resoluções das atividades

Capítulo 1 • Conjuntos

Atividades

1. **a)** Como A é composto pelos números naturais múltiplos de 3 e menores do que 20, então: $A = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18\}$.

b) Como B é composto pelos números naturais primos menores do que 27, então: $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$.

c) Como C é composto pelos números naturais menores do que 50 e múltiplos de 7, então: $C = \{0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49\}$.

d) O único satélite natural do planeta Terra é a Lua, então: $D = \{\text{Lua}\}$.

e) As consoantes da palavra "pedra" são **p**, **d** e **r**, então: $E = \{p, d, r\}$.

2. **a)** Verdadeira, pois 1 é um elemento de B.

b) Falsa, pois {1} não é um elemento de B.

c) Verdadeira, pois 2 é um elemento de B.

d) Verdadeira, pois -1 é um elemento de B.

e) Falsa, pois 1 é um elemento de B.

f) Falsa, pois 3 não é um elemento de B.

- Respostas possíveis: **b)** $1 \in B$; **e)** $4 \notin B$; **f)** $3 \notin B$

3. **a)** O subconjunto de A formado por números maiores do que 5 e menores do que 10 é {6, 7, 8, 9}.

b) O subconjunto de A formado por números pares é {4, 6, 8, 10}.

c) O subconjunto de A formado por números ímpares maiores do que ou iguais a 7 é {7, 9, 11}.

4. **a)** Todos os subconjuntos de E formados por 3 elementos são {2, 4, 6}; {2, 4, 8}; {2, 6, 8} e {4, 6, 8}.

b) O subconjunto de E formado por 4 elementos é {2, 4, 6, 8}.

5. Dois conjuntos são iguais quando possuem os mesmos elementos. Nesse caso, se $\{0, 1, 2\} = \{2, a, b\}$, em que a e b são números naturais, tem-se: $a = 0$ e $b = 1$ ou $a = 1$ e $b = 0$. Assim, $a + b = 1$.

6. **a)** Os subconjuntos que podem ser formados com duas músicas são $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$ e $\{c, d\}$.

b) Formar todos os pares possíveis com as músicas a, b, c e d equivale a criar subconjuntos com dois elementos, ou seja, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$ e $\{c, d\}$. Portanto, o número de pares possíveis é 6.

7. **a)** Verdadeira, pois todos os elementos do conjunto A também pertencem ao conjunto B; portanto, o conjunto A está contido em B.

b) Verdadeira, pois todos os elementos do conjunto C também pertencem ao conjunto B; portanto, o conjunto C está contido em B.

c) Falsa, pois alguns elementos do conjunto B não pertencem ao conjunto A; portanto, o conjunto B não está contido em A.

d) Falsa, pois não há elementos do conjunto A que também pertençam ao conjunto C; portanto, o conjunto A não está contido em C.

e) Verdadeira, pois alguns elementos do conjunto B não pertencem ao conjunto A; portanto, o conjunto B não está contido em A.

f) Verdadeira, pois não há elementos do conjunto A que também pertençam ao conjunto C; portanto, o conjunto A não está contido em C.

g) Verdadeira, pois todos os elementos do conjunto A também pertencem ao conjunto B; portanto, o conjunto A está contido em B. Consequentemente, o conjunto B contém o conjunto A.

h) Verdadeira, pois alguns dos elementos do conjunto B não pertencem ao conjunto A; portanto, o conjunto B não está contido em A. Consequentemente, o conjunto A não contém o conjunto B.

8. **a)** Como o conjunto A é composto apenas pelo elemento 1, que também pertence ao conjunto B, então pode-se afirmar que $A \subset B$.

b) Como o conjunto A é composto apenas pelo elemento 1, que também pertence ao conjunto C, então pode-se afirmar que $A \subset C$.

c) Como o conjunto A é composto apenas pelo elemento 1, que também pertence ao conjunto D, então pode-se afirmar que $A \subset D$.

d) Como o elemento 0 pertence ao conjunto B, porém não pertence ao conjunto C, então pode-se afirmar que $B \not\subset C$.

e) Como o conjunto B é composto pelos elementos 0 e 1, e ambos pertencem ao conjunto D, então pode-se afirmar que $B \subset D$.

f) Como o elemento 3 pertence ao conjunto C, porém não pertence ao conjunto D, então pode-se afirmar que $C \not\subset D$.

9. Ao escrever os conjuntos na forma numérica, obtêm-se: $A = \{4, 6, 8, 10, 12, 14\}$, $B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$ e $C = \{0, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ...\}$

a) Como todos os elementos do conjunto A também pertencem a B, então pode-se afirmar que $A \subset B$.

b) Como todos os elementos do conjunto A também pertencem a C, então pode-se afirmar que $A \subset C$.

c) Como o elemento 2 pertence ao conjunto B, mas não pertence a C, então pode-se afirmar que $B \not\subset C$.

10. **a)** Verdadeira, pois 0 é um elemento de A.

b) Falsa, pois 1 é um elemento e não um subconjunto de A.

c) Verdadeira, pois 3 é um elemento de A.

d) Verdadeira, pois {3} é um subconjunto de A.

e) Falsa, pois 1 não é elemento de A. Consequentemente, {1, 2} não é subconjunto de A.

f) Verdadeira, pois o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto.

g) Falsa, pois o conjunto vazio não é um elemento de A.

h) Falsa, pois {3} não é um elemento de A.

11. **a)** Verdadeira, pois o elemento 5 pertence aos dois conjuntos.

b) Verdadeira, pois os elementos a, b e c pertencem a ambos os conjuntos.

c) Falsa, pois o número 2 não está contido no conjunto {0, 2, 4}, o número 2 pertence ao conjunto {0, 2, 4}, ou seja, $2 \in \{0, 2, 4\}$.

d) Verdadeira, pois o elemento 8 pertence ao conjunto {2, 4, 6, 8, 10}.

e) Verdadeira, pois os elementos 1 e 2 pertencem ao conjunto {1, 2, 3}.

f) Verdadeira, pois o conjunto dos números naturais não possui elementos negativos.

g) Verdadeira, pois o elemento 3 pertence ao conjunto {0, 3, 6, 9}.

h) Verdadeira, pois o número $\frac{1}{2}$ está localizado entre os números 0 e 1; portanto, não pertence ao conjunto dos números naturais.

As afirmações verdadeiras são: **a**, **b**, **d**, **e**, **f**, **g** e **h**.

12. Como $P \subset Q$, pode-se admitir que todos os elementos de P também pertencem a Q. A respeito de se $Q \subset P$, nada se pode afirmar. Porém, pode-se ter duas situações:

1. Caso essa afirmação seja verdadeira, deve-se considerar que $P = Q$, ou seja, todos os elementos de Q também pertencem a P.
2. Caso essa afirmação seja falsa, então existe algum elemento de Q que não pertence a P.

Com base nessas informações, pode-se julgar os itens:

a) Falsa, pois se $x \in P$ e P está contido em Q, então x pertence a Q.

b) Falsa, pois ao considerar $P = Q$, então não existe elemento $x \in Q$ e $x \notin P$.

c) Falsa, pois ao considerar $Q \not\subset P$, então x pode pertencer a Q e não pertencer a P.

d) Verdadeira, se existir algum elemento que não pertence a Q, então esse elemento também não pertence a P, pois P está contido em Q.

e) Falsa, pois, como P está contido em Q, os elementos de P também pertencem a Q; portanto, esses elementos de P são comuns a ambos os conjuntos.

Resposta: alternativa **d**.

13. Como $\{1, 2\} \subset M$, M já possui os elementos 1 e 2.

Agora, como $M \subset \{1, 2, 3, 4\}$, então as possibilidades são:

$M = \{1, 2\}$, $M = \{1, 2, 3\}$, $M = \{1, 2, 4\}$ ou $M = \{1, 2, 3, 4\}$.

Portanto, 4 conjuntos.

14. Como $A \subset B$ e $B \subset C$, pode-se concluir que $A \subset C$, pois todos os elementos de A pertencem a B, que, por sua vez, também pertencem a C.

Como todo elemento de C também pertence a A, pois $C \subset A$, então pode-se concluir que $A = C$.

Portanto, como $A \subset B$ e $B \subset C$ e $A = C$, pode-se afirmar que a relação entre os conjuntos é $A = B = C$, pois os elementos pertencentes a cada conjunto são comuns aos outros.

15. Pelo enunciado, sabe-se que $A = \{0, 11, 12, 13, 14\}$ e $B = \{11, 12\}$.

Como o conjunto C é formado pelos números pares compreendidos entre 11 e 19, obtém-se $C = \{12, 14, 16, 18\}$. Como o conjunto D é formado pelos números ímpares compreendidos entre 10 e 16, obtém-se $D = \{11, 13, 15\}$.

Assim, ao utilizar as definições de união e intersecção entre conjuntos, obtêm-se:

a) $A \cap B = \{11, 12\}$

b) $A \cap C = \{12, 14\}$

c) $B \cup C = \{11, 12, 14, 16, 18\}$

d) $C \cup D = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 18\}$

e) Como $A \cup B = \{0, 11, 12, 13, 14\}$ e $C = \{12, 14, 16, 18\}$; então $(A \cup B) \cup C = \{0, 11, 12, 13, 14\} \cup \{12, 14, 16, 18\} = \{0, 11, 12, 13, 14, 16, 18\}$.

f) Como $A \cap C = \{12, 14\}$ e $D = \{11, 13, 15\}$; então $(A \cap C) \cap D = \{12, 14\} \cap \{11, 13, 15\} = \varnothing$.

16. Pelo enunciado, tem-se os conjuntos $A = \{m, n, p, q\}$; $B = \{n, p, q\}$; e $C = \{p, q, r, s\}$. Portanto:

a) $A - B = \{m, n, p, q\} - \{n, p, q\} = \{m\}$

b) $A - C = \{m, n, p, q\} - \{p, q, r, s\} = \{m, n\}$

c) $B - C = \{n, p, q\} - \{p, q, r, s\} = \{n\}$

d) $A \cap B = \{m, n, p, q\} \cap \{n, p, q\} = \{n, p, q\}$

Como $C = \{p, q, r, s\}$; então $(A \cap B) - C = \{n, p, q\} - \{p, q, r, s\} = \{n\}$

e) Como $A - C = \{m, n\}$ e $B - C = \{n\}$; então $(A - C) \cap (B - C) = \{m, n\} \cap \{n\} = \{n\}$

f) $A - \varnothing = \{m, n, p, q\} - \varnothing = \{m, n, p, q\}$

17. Ao observar o diagrama, pode-se escrever os seguintes conjuntos: $A = \{1, 2, 3, 4, 9\}$, $B = \{2, 6, 7, 9\}$ e $C = \{2, 4, 5, 6, 8\}$.

a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 9\} \cup \{2, 6, 7, 9\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 9\}$

b) $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 9\} \cup \{2, 4, 5, 6, 8\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$

c) $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 9\} \cup \{2, 4, 5, 6, 8\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

d) $B \cap C = \{2, 6, 7, 9\} \cap \{2, 4, 5, 6, 8\} = \{2, 6\}$

e) $A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 9\} \cap \{2, 6, 7, 9\} = \{2, 9\}$

Então, $A \cap B \cap C = \{2, 9\} \cap \{2, 4, 5, 6, 8\} = \{2\}$.

f) $A - C = \{1, 2, 3, 4, 9\} - \{2, 4, 5, 6, 8\} = \{1, 3, 9\}$

g) $A \cap C = \{1, 2, 3, 4, 9\} \cap \{2, 4, 5, 6, 8\} = \{2, 4\}$

Então, $(A \cap C) - B = \{2, 4\} - \{2, 6, 7, 9\} = \{4\}$.

18. Ao se aplicar a definição de intersecção entre conjuntos, obtêm-se as respostas a seguir:

a) $\{10, 11, 12\} \cap \{7, 8, 9, 10, 11\} = \{10, 11\}$

b) $\{-3, -2, -1, 0\} \cap \{0, 1, 2, 3\} = \{0\}$

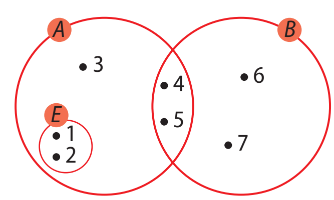
c) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right\} \cap \left\{\frac{1}{5}, \frac{1}{6}\right\} = \varnothing$

19. O enunciado fornece as seguintes informações: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A \cap B = \{4, 5\}$, $E - B = \{1, 2\}$, $B - A = \{6, 7\}$, $E \cap B = \varnothing$ e $E \subset A$.

Considerando que $A \cap B = \{4, 5\}$ e $B - A = \{6, 7\}$, pode-se concluir que $B = \{4, 5, 6, 7\}$, porque $(A \cap B) \cup (B - A) = B$.

Agora, como $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A \cap B = \{4, 5\}$ e $B = \{4, 5, 6, 7\}$, pode-se concluir que $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Como $E - B = \{1, 2\}$ e não existem elementos em comum entre eles, pois $E \cap B = \varnothing$, pode-se concluir que $E = \{1, 2\}$. Com essas informações, pode-se construir o diagrama a seguir:



EDITORIA DE ARTE

Assim, tem-se:

$\complement_A^E = A - E = \{1, 2, 3, 4, 5\} - \{1, 2\} = \{3, 4, 5\}$

20. Os conjuntos fornecidos pelo enunciado são: $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{0, 2, 5\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$ e $E = \{2, 4, 6\}$.

a) $\complement_U^A = U - A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} - \{0, 2, 5\} = \{1, 3, 4, 6, 7\}$

b) $\complement_U^B = U - B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} - \{1, 3, 5, 7\} = \{0, 2, 4, 6\}$

c) $\complement_U^E = U - E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} - \{2, 4, 6\} = \{0, 1, 3, 5, 7\}$

21. Conforme o enunciado, deve-se considerar $M(a)$ o conjunto dos múltiplos de a e $D(a)$ o conjunto dos divisores de a.

a) $M(3) = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, ...\}$ e $D(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$

Então, $M(3) \cap D(30) = \{3, 6, 15, 30\}$.

b) $M(2) = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, ...\}$ e $M(4) = \{0, 4, 8, 12, 16, ...\}$

Então, $M(2) \cap M(4) = \{0, 4, 8, ...\}$.

c) $D(100) = \{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100\}$ e $D(50) = \{1, 2, 5, 10, 25, 50\}$

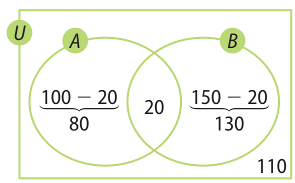
Então, $D(100) \cap D(50) = \{1, 2, 5, 10, 25, 50\}$.

d) $M(7) = \{0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, ...\}$ e $M(5) = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, ...\}$

Então, $M(7) \cap M(5) = \{0, 35, 70, ...\}$.

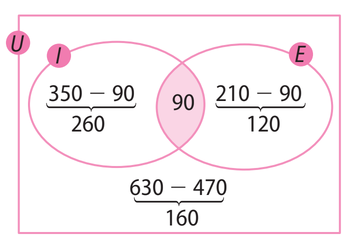
22. Considere x o número de elementos do conjunto B; então, de acordo com o enunciado, temos:
$n(B) = x$
$n(A) = x + 15$
$n(A \cup B) = 134$
$n(A \cap B) = 49$
Como $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$, ao substituir os valores, obtemos:
$134 = x + 15 + x - 49$
$134 - 15 + 49 = 2x$
$2x = 168 \Rightarrow x = 84$
Então, $n(A) = 84 + 15 \Rightarrow n(A) = 99$.
Portanto, o número de elementos de A é 99.

23. Considerando U o conjunto universo, A o conjunto das pessoas que liam o jornal A e B o conjunto das pessoas que liam o jornal B, de acordo com o enunciado, pode-se construir o diagrama a seguir:



Portanto, considerando cada situação do diagrama, pode-se afirmar que o número de pessoas consultadas foi:
$80 + 20 + 130 + 110 = 340$
Portanto, 340 pessoas.

24. Considerando U o conjunto universo, I o conjunto dos estudantes que cursam Inglês e E o conjunto dos que cursam Espanhol, de acordo com o enunciado, pode-se construir o diagrama a seguir:



Pelo diagrama, tem-se:

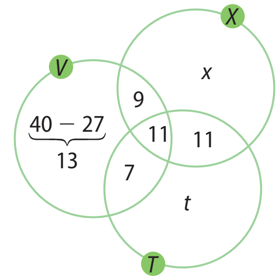
a) Se 350 estudantes cursam Inglês e 90 deles também cursam Espanhol, então o número de estudantes que cursam apenas Inglês é:
$350 - 90 = 260$.
Portanto, 260 estudantes cursam apenas Inglês.

b) Se 210 estudantes cursam Espanhol e 90 deles cursam Inglês e Espanhol, então o número de estudantes que cursam apenas Espanhol é:
$210 - 90 = 120$.
Portanto, 120 estudantes cursam apenas Espanhol.

c) Se 260 estudantes cursam apenas Inglês, 120 apenas Espanhol e 90 cursam esses dois idiomas, então o número de estudantes que cursam Inglês ou Espanhol é:
$260 + 90 + 120 = 470$.
Portanto, 470 estudantes cursam Inglês ou Espanhol.

d) Se a escola tem 630 estudantes, dos quais 470 cursam Inglês ou Espanhol, o número de estudantes que não cursam nenhum dos dois idiomas é: $630 - 470 = 160$.
Portanto, 160 estudantes não cursam nenhum dos dois idiomas.

25. Sejam X o conjunto dos esportistas que jogam xadrez, V dos que jogam vôlei e T dos que jogam tênis. Pode-se criar um diagrama começando pelo valor da intersecção dos três conjuntos e, em seguida, adequando o diagrama conforme as informações do enunciado. Observar a seguir o diagrama:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

a) Sejam x o número de pessoas que jogam apenas xadrez e t o número de pessoas que jogam apenas tênis. Do enunciado, temos: $x + 9 + 11 + 11 = t + 7 + 11 + 11x + 9 =$ $= t + 7$, portanto $t = x + 2$. Como o total de esportistas é 99, temos:
$40 + x + 11 + t = 99$
$40 + x + 11 + x + 2 = 99$
$2x + 53 = 99$
$2x = 46$, portanto $x = 23$ e $t = 25$.
São 25 pessoas que jogam apenas tênis e 11 pessoas que jogam tênis e xadrez, mas não jogam vôlei. Logo:
$25 + 11 = 36$
36 esportistas jogam tênis, mas não jogam vôlei.

b) São 25 pessoas que jogam apenas tênis, 23 que jogam apenas xadrez e 11 que jogam xadrez e tênis, mas não jogam vôlei. Logo:
$25 + 23 + 11 = 59$
59 esportistas jogam xadrez ou tênis, mas não jogam vôlei.

c) São 13 pessoas que jogam apenas vôlei e 7 pessoas que jogam vôlei e tênis, mas não jogam xadrez. Logo:
$13 + 7 = 20$
20 esportistas jogam vôlei e não jogam xadrez.

26. a) Como os elementos do conjunto A são números naturais menores do que 8, então: $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

b) Como os elementos do conjunto C são números inteiros não nulos menores do que 4 e maiores do que -3, então: $C = \{-2, -1, 1, 2, 3\}$

27. Exemplo de resposta:
a) $M = \{x \in \mathbb{N} \mid 6 \leqslant x \leqslant 8\}$
b) $T = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leqslant -1\}$

28. Segundo o enunciado, o conjunto A é definido por $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Logo:
a) $4 \in A$ **c)** $8 \in A$ **e)** $1 \in B$
b) $5 \notin A$ **d)** $2 \notin B$ **f)** $10 \notin A$

29. a) Considerando que k é um número natural e que a lei é $x = 2k$, tem-se:
$k = 0 \Rightarrow x = 0$ $k = 2 \Rightarrow x = 4$
$k = 1 \Rightarrow x = 2$
Portanto, o conjunto é $A = \{0, 2, 4, ...\}$.

b) Considerando que k é um número natural e que a lei é $x = k^2$, tem-se:
$k = 0 \Rightarrow x = 0$ $k = 2 \Rightarrow x = 4$
$k = 1 \Rightarrow x = 1$ $k = 3 \Rightarrow x = 9$
Portanto, o conjunto é $B = \{0, 1, 4, 9, ...\}$.

30. Segundo o enunciado, os conjuntos A e B são definidos por: $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, ...\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Logo:
$A \cap B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
Portanto, $n(A \cap B) = 5$.

31. Segundo o enunciado, o conjunto A é definido por $A = \{2, 3\}$. Já o conjunto B é definido pelas raízes da equação produto $(x - 2)(x - 3) = 0$. Pela equação, temos $x - 2 = 0$ ou $x - 3 = 0$.
Logo, $x = 2$ ou $x = 3$.
Portanto, $B = \{2, 3\}$.

32. De acordo com as definições de número natural, número inteiro e número racional, pode-se afirmar que:

a) $-7 \notin \mathbb{N}$, pois os números naturais assumem somente valores positivos.

b) $4 \in \mathbb{Z}$, pois 4 é um número natural e, consequentemente, também é inteiro.

c) $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, pois $\frac{1}{2}$ é uma fração e não um número inteiro.

d) $0{,}166... \in \mathbb{Q}$, pois 0,166... é uma dízima periódica cujo período é 6.

33. a) Fazendo $x = 0{,}323232...$ e multiplicando ambos os membros por 100, obtém-se: $100x = 32{,}323232...$
Subtraindo, membro a membro, as duas igualdades, temos:
$100x - x = 32{,}323232... - 0{,}323232...$
$99x = 32 \Rightarrow x = \frac{32}{99}$

b) Fazendo $z = 2{,}715715...$ e multiplicando ambos os membros por 1 000, obtém-se:
$1000z = 2715{,}715715...$
Subtraindo, membro a membro, as duas igualdades, temos:
$1000z - z = 2715{,}715715... - 2{,}715715...$
$999z = 2\,713 \Rightarrow z = \frac{2713}{999}$

34. Considerando o enunciado, os conjuntos A e B são:

a) Divisores de 18: $A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

b) Divisores de 30: $B = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$

c) Divisores comuns de 18 e 30:
$C = A \cap B \Rightarrow C = \{1, 2, 3, 6\}$

d) O máximo divisor comum entre 18 e 30 é 6.

35. Considerando o enunciado, os conjuntos A, B e C são: $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...\}$, $B = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, ...\}$ e $C = \{0, 5, 10, 15, ...\}$
Portanto:
$A \cup C = \{0, 2, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, ...\}$
$B - (A \cup C) = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, ...\} - \{0, 2, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, ...\} = \{3, 9, 21, 27, 33, 39, 51, 57, 63, 69, ...\}$
Pode-se observar que o conjunto $B - (A \cup C)$ é composto por números múltiplos de 3 que não são pares nem múltiplos de 5. Como, pelo enunciado, são solicitados os 10 primeiros números, tem-se: 3, 9, 21, 27, 33, 39, 51, 57, 63, 69

36. Por tentativa e erro, temos:
$15^2 + 16^2 = 225 + 256 = 481.$

37. a) $-2x - 9x + 5 = 0$
$11x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{11}$
Portanto, $M = \left\{\frac{5}{11}\right\}$.

b) $\frac{1}{2} + a = 2 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$
Portanto, $N = \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

c) Como $(y - 1)(y + 2)(y - 3) = 0$ é uma equação produto, então $y - 1 = 0$ ou $y + 2 = 0$ ou $y - 3 = 0$.
Logo, $y = 1$ ou $y = -2$ ou $y = 3$.
Portanto, $P = \{-2, 1, 3\}$.

d) Resolvendo a equação $x^2 - 25 = 0 \Rightarrow (x + 5)(x - 5) = 0$
Então, $x + 5 = 0$ ou $x - 5 = 0$.
Logo, $x = -5$ ou $x = 5$.
Como x é natural, então $S = \{5\}$.

38. Primeiro, vamos obter 7,363636... na forma de fração.
$a = 7{,}363636...$
$100a = 736{,}363636...$
$100a - a = 736{,}363636... - 7{,}363636...$
$99a = 729$
$a = \frac{729}{99} = \frac{81}{11}$
Então, a razão $\frac{x}{y}$ pode ser representada por $\frac{81}{11}$ ou por qualquer fração equivalente:
$\frac{x}{y} = \frac{81}{11} = \frac{162}{22} = \frac{243}{33} = \ldots$
Se $x = 162$ e $y = 22$, então x dividido por y tem quociente 7 e resto 8, o que respeita as condições do enunciado.
Portanto, $x = 162$, $y = 22$ e $z = 7$. Assim:
$x + y + z = 162 + 22 + 8 = 192$
Resposta: alternativa **d**.

39. Observando a ilustração, pode-se considerar que o número x é aproximadamente 1,6. Logo:
$2x - 2 = 2 \cdot 1{,}6 - 2 = 3{,}2 - 2 = 1{,}2 \simeq U.$
Resposta: alternativa **d**.

40. Obtendo a fração geratriz da dízima 0,333..., tem-se:
$x = 0{,}333...$
$10x = 3{,}333...$
Subtraindo, membro a membro, as duas igualdades:
$10x - x = 3{,}333... - 0{,}333...$
$9x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$
Portanto:
$\frac{6}{0{,}333\ldots} = \frac{6}{\frac{1}{3}} = 6 \cdot \frac{3}{1} = 18$
Resposta: alternativa **c**.

41. Para ordenar números racionais, pode-se encontrar uma fração equivalente, para cada um deles, com um mesmo denominador.
Como o mmc$(24, 3, 8) = 24$, pode-se reescrever os números $p = \frac{13}{24}$, $q = \frac{2}{3}$ e $r = \frac{5}{8}$ como frações equivalentes de mesmo denominador, no caso, 24.
Portanto, obtêm-se: $p = \frac{13}{24}$, $q = \frac{16}{24}$ e $r = \frac{15}{24}$
Logo, $p < r < q$.
Resposta: alternativa **a**.

42. a) $3x - 4x - 4 = 0 \Rightarrow x = -4$
Como x é natural, então $A = \varnothing$.

b) $x^2 - 7 = 0 \Rightarrow (x + \sqrt{7})(x - \sqrt{7}) = 0$
Então, $x + \sqrt{7} = 0$ ou $x - \sqrt{7} = 0$.
Logo, $x = -\sqrt{7}$ ou $x = \sqrt{7}$.
Portanto, $B = \{-\sqrt{7}, \sqrt{7}\}$.

c) $\frac{a}{4} + 0{,}25a + \frac{3}{2}a = 2$
$2a = 2 \Rightarrow a = 1$
Portanto, $C = \{1\}$.

d) $3 + x^2 = 4 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x + 1)(x - 1) = 0$
Então, $x + 1 = 0$ ou $x - 1 = 0$.
Logo, $x = -1$ ou $x = 1$.
Portanto, $D = \{-1, 1\}$.

e) $\frac{y}{3} + y = \frac{1}{7} \Rightarrow 4y = \frac{3}{7} \Rightarrow y = \frac{3}{28}$

Portanto, $E = \left\{\frac{3}{28}\right\}$.

f) $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 2) = 0$

Então, $x + 2 = 0$ ou $x - 2 = 0$.

Logo, $x = -2$ ou $x = 2$.

Portanto, $F = \{-2, 2\}$.

43. Em cada item, deve-se substituir $\sqrt{3}$ pela aproximação 1,732.

a) $\frac{\sqrt{3} + 2}{2} \simeq \frac{1{,}732 + 2}{2} = \frac{3{,}732}{2} = 1{,}866$

O valor da expressão é aproximadamente 1,866.

b) $\frac{2\sqrt{3} - 1}{4} \simeq \frac{2 \cdot 1{,}732 - 1}{4} = \frac{3{,}464 - 1}{4} = \frac{2{,}464}{4} = 0{,}616$

O valor da expressão é aproximadamente 0,616.

44. Exemplo de resposta:

a) Como todo número irracional possui inverso, ao calcular o produto entre um irracional e seu respectivo inverso, obtém-se 1 como resultado. Como exemplo, pode-se considerar $a = \sqrt{2}$ e $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$, assim $a \cdot b = 1$, que não é um número irracional.

b) Como todo número irracional possui oposto, ao calcular a soma entre um irracional e seu respectivo oposto, obtém-se 0 como resultado. Como exemplo, pode-se considerar $a = \sqrt{2}$ e $b = -\sqrt{2}$, assim $a + b = 0$, que não é um número irracional.

45. Ao desenvolver o produto $(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)$, obtém-se $(\sqrt{3})^2 - 1^2 = 3 - 1 = 2$, ou seja, é um número racional.

Agora, ao representar a dízima periódica 0,999... na forma de fração, tem-se:

$x = 0{,}999...$

$10x = 9{,}999...$

Subtraindo, membro a membro, as duas igualdades, temos:

$10x - x = 9{,}999... - 0{,}999...$

$9x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{9} \Rightarrow x = 1$

Portanto, 0,999... é um número racional.

Assim, deve-se considerar que ambos os números são racionais.

Resposta: alternativa **b**.

46. a) Como se deve considerar todos os números entre 6 e 10, inclusive ambos, a notação de conjunto ficará $\{x \in \mathbb{R} \mid 6 \leqslant x \leqslant 10\}$.

b) Como se deve considerar todos os números entre -1 e 5, desconsiderando o -1 e incluindo o 5, a notação de conjunto ficará $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leqslant 5\}$.

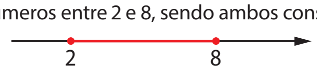
c) Como se deve considerar todos os números entre -6 e 0, sendo ambos desconsiderados, a notação de conjunto ficará $\{x \in \mathbb{R} \mid -6 < x < 0\}$.

d) Como se deve considerar todos os números maiores do que 0, incluindo o próprio 0, a notação de conjunto ficará $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$.

e) Como se deve considerar todos os números menores do que 3, a notação de conjunto ficará $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$.

47. Deve-se representar os intervalos na reta real, observando os extremos de cada intervalo.

a) Todos os números entre 2 e 8, sendo ambos considerados.



b) Todos os números menores do que 2, considerando o número 2.

c) Todos os números entre -6 e -1, considerando o número -6 e não considerando o -1.

d) Todos os números maiores do que 2, considerando o número 2.

e) Todos os números entre 2 e 5, sendo ambos desconsiderados.

f) Todos os números entre -2 e 2, sendo ambos considerados.

48. Nesta atividade, deve-se observar a reta real, principalmente os extremos, e verificar se esses pertencem, ou não, ao intervalo.

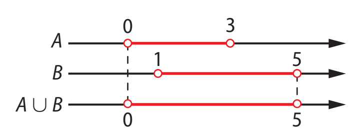
a) O intervalo representa os números compreendidos entre os extremos 2 e 4. Como as bolinhas estão cheias, ambos devem ser considerados. Portanto, o conjunto é $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 4\}$.

b) O intervalo representa os números maiores do que 1. Como a bolinha está vazia, devemos desconsiderar esse extremo. Portanto, o conjunto é $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$.

c) O intervalo representa os números compreendidos entre os extremos $\sqrt{2}$ e 5. Como as bolinhas estão vazias, ambos devem ser desconsiderados. Portanto, o conjunto é $\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{2} < x < 5\}$.

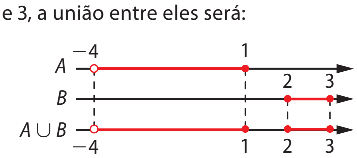
d) O intervalo representa os números menores do que $\frac{1}{2}$. Como a bolinha está cheia, devemos considerar esse extremo. Portanto, o conjunto é $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \frac{1}{2}\right\}$.

49. a) Considerando que o conjunto A é o intervalo aberto entre 0 e 3 e que o conjunto B é o intervalo aberto entre 1 e 5, a união entre eles será:



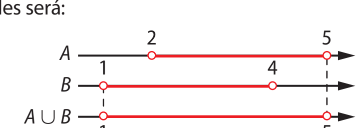
$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 5\}$

b) Considerando que o conjunto A é o intervalo aberto em -4 e fechado em 1 e que o conjunto B é o intervalo fechado entre 2 e 3, a união entre eles será:



$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x \leqslant 1 \text{ ou } 2 \leqslant x \leqslant 3\}$

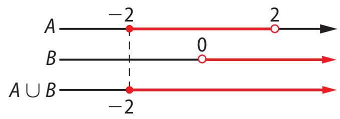
c) Considerando que o conjunto A é o intervalo aberto entre 2 e 5 e que o conjunto B é o intervalo aberto entre 1 e 4, a união entre eles será:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 5\}$

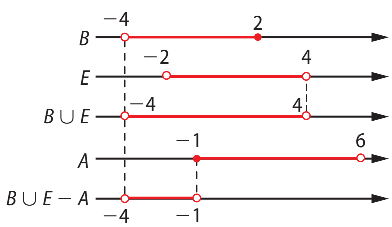
d) Considerando que o conjunto A é o intervalo fechado em -2 e aberto em 2 e que o conjunto B é o intervalo aberto com os números maiores do que 0, a união entre eles será:



$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -2\}$

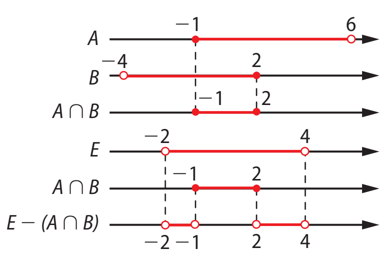
50. Pelo enunciado, pode-se considerar que os conjuntos são representados da seguinte forma:
Conjunto A: intervalo fechado em -1 e aberto em 6;
conjunto B: intervalo aberto em -4 e fechado em 2;
conjunto E: intervalo aberto em -2 e 4.

a) $(B \cup E) - A$



$(B \cup E) - A =]-4, -1[$

b) $E - (A \cap B)$

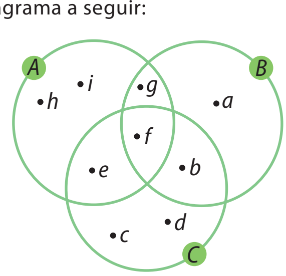


$E - (A \cap B) =]-2, -1[\cup]2, 4[$

51. Como ambos os números x e y são números decimais e estão entre 0 e 1, o produto de x por y está entre 0 e x, pois será um número estritamente menor do que x.
Resposta: alternativa **b**.

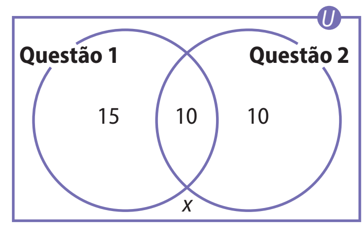
Atividades complementares

1. Segundo o enunciado, como $A \cap B = \{f, g\}$, $B \cap C = \{b, f\}$ e $C \cap A = \{e, f\}$, pode-se concluir que $A \cap B \cap C = \{f\}$. Com base nisso e considerando as informações do enunciado, pode-se construir o diagrama a seguir:



Assim, pode-se escrever os conjuntos:
$A = \{e, f, g, h, i\}$, $B = \{a, b, g, f\}$ e $C = \{b, c, d, e, f\}$.
Resposta: alternativa **c**.

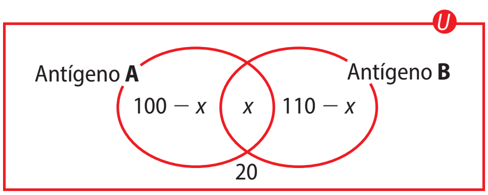
2. Segundo o enunciado, 10 alunos acertaram ambas as questões, 25 alunos acertaram a primeira questão e 20 alunos acertaram a segunda questão. Assim, pode-se construir o seguinte diagrama:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

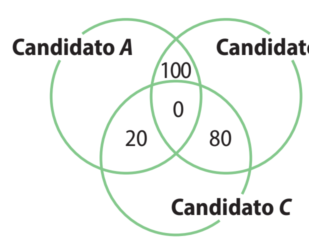
Como a sala de aula possui 40 alunos, tem-se:
$15 + 10 + 10 + x = 40$
Ao resolver a equação, obtém-se $x = 5$.
Resposta: alternativa **e**.

3. Considerando x o número de pessoas com tipo sanguíneo AB, de acordo com o enunciado, podemos montar o seguinte diagrama:



Como foram coletadas amostras de sangue de 200 pessoas, tem-se:
$200 = 100 - x + x + 110 - x + 20$
$200 = 230 - x$
$x = 230 - 200 \Rightarrow x = 30$
Assim, o número de pessoas com tipo sanguíneo A é:
$100 - x = 100 - 30 = 70$
Portanto, 70 pessoas.
Resposta: alternativa **c**.

4. Sabe-se, pelo enunciado, que três candidatos concorreram a uma eleição e que os eleitores votaram em apenas dois candidatos. Assim, ao construir um diagrama representando essa situação, deve-se considerar que a intersecção entre os três conjuntos, A, B e C, deve ser representada por 0. Além disso, também deve-se considerar nulos os espaços reservados para apenas um candidato, pois ninguém votou apenas em uma pessoa. Ver a seguir esse diagrama:



Assim, pode-se concluir que o candidato A recebeu 120 votos, o candidato B recebeu 180 votos e o candidato C recebeu 100 votos.
Portanto, o candidato B venceu com 180 votos.
Resposta: alternativa **e**.

5. $1 - \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$

Resposta: alternativa **a**.

6. Como $-\frac{17}{5} = -3{,}4$, conclui-se que:

$-4 < -\frac{17}{5} < -3.$

Portanto, o número $-\frac{17}{5}$ foi marcado entre -4 e -3.

Resposta: alternativa **d**.

7. Para definir o intervalo em que o número $\pi - \sqrt{2}$ está localizado, pode-se obter valores aproximados, na forma decimal, para π e para $\sqrt{2}$. Assim, $\pi \simeq 3{,}14$ e $\sqrt{2} \simeq 1{,}41$. Logo, $3{,}14 - 1{,}41 = 1{,}73$.

Portanto, $\pi - \sqrt{2}$ está localizado entre $\frac{3}{2}$ e 2.

Então, o valor $\pi - \sqrt{2}$ está no intervalo $\left]\frac{3}{2}, 2\right]$.

Resposta: alternativa **c**.

8. **I.** Verdadeira, pois a e b são reais positivos, então:

$a > b \Rightarrow \frac{a}{b} > 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} > \sqrt{1} \Rightarrow \sqrt{a} > \sqrt{b}$

II. Falsa, pois, para $a = 4$ e $b = 9$, temos: $\sqrt{4} + \sqrt{9} = 2 + 3 = 5$

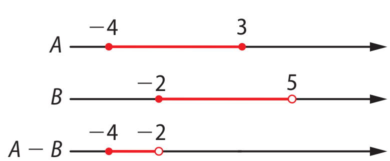
III. Falsa, pois, para $a = \frac{1}{4}$ e $b = \frac{1}{9}$, temos: $\sqrt{\frac{1}{4}} + \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$

Logo, apenas a afirmação **I** está correta.

Resposta: alternativa **a**.

9. Para calcular a diferença $A - B$, deve-se representar os conjuntos A e B na reta numérica e, em seguida, construir um diagrama. Portanto, reescrevendo os conjuntos A e B na forma de intervalos, obtêm-se: $A = [-4, 3]$ e $B = [-2, 5[$.

Representando-os no diagrama, obtém-se:



EDITORIA DE ARTE

A diferença $A - B$, segundo o diagrama, é $[-4, -2[$, que pode ser escrita como $\{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leqslant x < -2\}$.

Resposta: alternativa **a**.

10.
- Falsa. O número 3,14159265 é uma aproximação para o número irracional indicado pela letra grega π. A representação correta seria 3,14159265... (com as reticências).
- Falsa. O conjunto dos números racionais e o dos irracionais não possuem nenhum ponto em comum.
- Verdadeira. Toda dízima periódica é um número racional, pois pode ser representada como uma fração.

Resposta: alternativa **d**.

11. **a)** Falsa. A quantidade de habitantes de uma cidade é um número natural, pois está associada à contagem.

b) Falsa. A medida da altura de uma pessoa é um número racional, pois pode haver casas decimais.

c) Falsa. A velocidade média de um veículo é um número racional, porém pode ser positivo.

d) Verdadeira. O valor pago, em reais, é representado com casas decimais; logo, é um número racional positivo.

e) Falsa. A medida do lado de um triângulo pode ser um número irracional, porém necessariamente positivo.

Resposta: alternativa **d**.

Capítulo 2 • Noções de Estatística

Atividades

1. De acordo com as informações do quadro, concluímos:

I. Falsa, pois o número de pessoas quilombolas em Arraias é 1 572, enquanto o número de pessoas em Mateiros é 1 190.

II. Falsa, pois o percentual de pessoas quilombolas em Aragominas é 15,67%, enquanto o percentual em São Félix do Tocantins é 38,25%.

III. Correta, pois o percentual de pessoas quilombolas em Mateiros é 43,30%.

Resposta: alternativa **c**.

2. **a)** Os dados coletados são quantitativos, pois são resultados de uma medida.

b) Organizando os dados em ordem crescente, temos:
120; 131; 137; 144; 149; 151; 160; 163; 170; 172; 179; 181; 181; 187; 188; 189; 192; 193; 193; 199; 202; 205; 205; 210; 211; 217; 220; 226; 234; 239.

c) A amplitude total é calculada pela diferença entre o maior valor e o menor valor do rol. Dessa forma, fazemos $239 - 120 = 119$. Portanto, a amplitude total é 119 km.

d) Com a amplitude total, podemos calcular a quantidade de intervalos de amplitude de 20 km:

$\frac{119}{20} = 5{,}95$

Logo, teremos 6 intervalos de amplitude de 20 km. Assim, os intervalos e suas respectivas frequências absolutas serão:

[120; 140[: 120; 131; 137 (3 elementos)

[140; 160[: 144; 149; 151 (3 elementos)

[160; 180[: 160; 163; 170; 172; 179 (5 elementos)

[180; 200[: 181; 181; 187; 188; 189; 192; 193; 193; 199 (9 elementos)

[200; 220[: 202; 205; 205; 210; 211; 217 (6 elementos)

[220; 240[: 220; 226; 234; 239 (4 elementos)

Dessa forma, as frequências relativas são calculadas da seguinte maneira:

[120; 140[: $\frac{3}{30} = 0{,}1 \Rightarrow 10\%$

[140; 160[: $\frac{3}{30} = 0{,}1 \Rightarrow 10\%$

[160; 180[: $\frac{5}{30} = 0{,}167 \Rightarrow 16{,}7\%$

[180; 200[: $\frac{9}{30} = 0{,}3 \Rightarrow 30\%$

[200; 220[: $\frac{6}{30} = 0{,}2 \Rightarrow 20\%$

[220; 240[: $\frac{4}{30} = 0{,}133 \Rightarrow 13{,}3\%$

Coletando todas as informações, construímos a tabela de frequência:

Kilometros rodados		
km	F_A	F_R
[120; 140[	3	10%
[140; 160[	3	10%
[160; 180[	5	16,7%
[180; 200[	9	30%
[200; 220[	6	20%
[220; 240[	4	13,3%
Total	30	100%

e) De acordo com a tabela de frequências, concluímos:

I. Falsa. Em apenas 10 dos 30 dias, o motorista rodou mais do que 200 km.

II. Falsa. O motorista rodou menos do que 180 km em 36,7% dos dias, pois: 10% + 10% + 16,7% = 36,7%

III. Verdadeira. O motorista rodou em 30% dos dias de 180 a 200 km e, em 20% dos dias, de 200 a 220 km.

Portanto, a afirmação verdadeira é **III**.

3. O menor comprimento de barra indica a categoria com o menor índice de imunização; nesse caso, apenas aproximadamente 40% dos adultos entre 20 e 29 anos estão imunizados.
Resposta: alternativa **d**.

4. Observe que, para cada ano, para cada olimpíada, há 100 bolinhas. Portanto, cada bolinha vale 1%.

a) Como há apenas 4 bolinhas amarelas, a porcentagem de mulheres que era esperada nas Olímpiadas de Paris, em 1924, foi 4%.

b) De acordo com o gráfico, a porcentagem de homens nas Olimpíadas de 2016 era 55%, pois no gráfico há 55 bolinhas pretas.

c) O percentual de participação das mulheres nas Olimpíadas de Paris, em 2024, foi de 49,14%; portanto, próximo de 50%.

5. De acordo com o gráfico observa-se que, de 2005 a 2009, o aumento do volume de vendas foi de 283,2 milhões, pois 519,2 − 236 = 283,2. Dessa forma, a razão entre 283,2 milhões de vendas e 236 milhões de vendas (número de vendas em 2005), expressa em porcentagem desejada:

$\frac{238{,}2}{236} = 1{,}2 \Rightarrow$ aumento de 120%

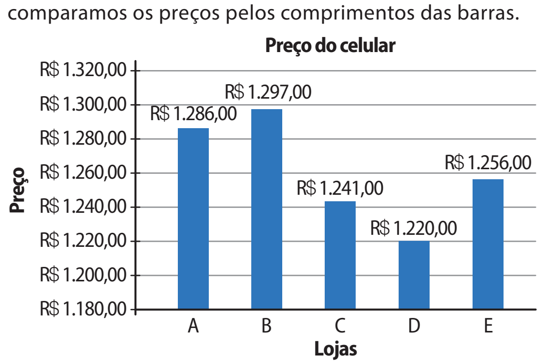
Resposta: alternativa **c**.

6. De acordo com o gráfico que ilustra a quantidade de cirurgias totais, sabemos que 45% das 800 cirurgias foram realizadas no fêmur. Assim, calculando 45% de 800, tem-se:
$0{,}45 \cdot 800 = 360$
Ou seja, foram realizadas 360 cirurgias no fêmur.
Agora, observando o gráfico de cirurgias realizadas em homens, vemos que 40% das 440 cirurgias feitas em homens foram do fêmur, o que corresponde a 176 cirurgias, pois
$0{,}40 \cdot 440 = 176$.
Logo, a quantidade de cirurgias do fêmur realizadas em mulheres é 184, pois 360 − 176 = 184.
Resposta: alternativa **c**.

7. O professor escolheu o gráfico de linha para analisar a variação do dólar, pois esse gráfico ilustra, por meio de uma linha, a variação temporal de fenômenos, que, nesse caso, permite observar quando o preço do dólar aumentou e quando diminuiu.

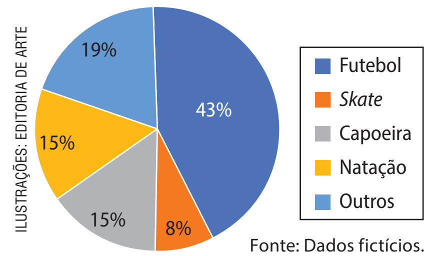
8. **a)** O gráfico de barras é o mais adequado, porque cada preço é representado por um comprimento de barra; nesse caso, comparamos os preços pelos comprimentos das barras.

b)



9. **a)** O erro é que a soma dos percentuais resulta em 106%. Em um gráfico de setores, a soma das porcentagens de todos os setores deve resultar em 100%.

b)



Fonte: Dados fictícios.

10. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes pesquisem informações que comprovem o quanto a participação das mulheres na vida pública evoluiu pouco, mesmo que elas representem a maioria entre os eleitores.

11. Resposta pessoal. Uma resposta possível é que, se toda a renda fosse distribuída igualmente entre os trabalhadores brasileiros, em dezembro de 2023, cada um receberia R$ 3.100,00.

12. Calculando a média salarial de cada setor, temos:

I: $\frac{1550 + 1140 + 1140 + 1150}{4} = 1245$

II: $\frac{1100 + 1100 + 1520 + 1200}{4} = 1230$

III: $\frac{1050 + 1050 + 1600 + 2000}{4} = 1425$

IV: $\frac{1300 + 1160 + 1280 + 1280}{4} = 1255$

V: $\frac{1250 + 1300 + 1300 + 1150}{4} = 1250$

Logo, o setor que apresenta a menor média salarial é o Setor II.
Resposta: alternativa **b**.

13. A média mensal das vendas do comércio de Cláudio pode ser calculada da seguinte forma:

$\frac{8{,}6 + 7{,}9 + 9{,}1 + 9{,}6 + 8{,}1 + 9{,}2}{6} = 8{,}75.$

Logo, a média de vendas é 8,75 mil reais.
Resposta: alternativa **c**.

14. Utilizando as informações do gráfico de setores, calculamos as quantidades de alunos dessa escola que têm 15, 16 e 17 anos, respectivamente:
15 anos: $0{,}25 \cdot 80 = 20 \Rightarrow$ 20 alunos
16 anos: $0{,}30 \cdot 80 = 24 \Rightarrow$ 24 alunos
17 anos: $0{,}45 \cdot 80 = 36 \Rightarrow$ 36 alunos
A média das idades dos 80 alunos dessa escola pode ser calculada pela seguinte média ponderada:

$\frac{15 \cdot 20 + 16 \cdot 24 + 17 \cdot 36}{80} = 16{,}2$

Resposta: alternativa **d**.

15. Colocando os dados em rol, temos:
154; 159; 160; 165; 169; 171; 174; 174; 174; 178; 179; 180; 180; 181; 185; 188; 195; 195
A mediana M_d é a média aritmética entre 174 e 178, pois há 18 dados:

$M_d = \frac{174 + 178}{2} = 176$

A moda M_o é a altura que mais se repete, ou seja, $M_o = 174$. Assim, a média aritmética $\overline{x}$ entre a moda e a mediana é:

$$\overline{x} = \frac{174 + 176}{2} = 175$$

Logo, as afirmações **I**, **III** e **IV** são verdadeiras.

Resposta: alternativa **c**.

16. De acordo com os dados do gráfico, podemos calcular a média $\overline{x}$, a moda M_o e a mediana M_d.

A média dos dados é obtida por meio da seguinte média ponderada:

$$\overline{x} = \frac{1 \cdot 10 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 55 + 4 \cdot 25 + 4 \cdot 25 + 6 \cdot 50 + 7 \cdot 10}{10 + 10 + 55 + 25 + 50 + 10} = 4{,}15625$$

A moda é $M_o = 3$, pois é o número de viagens que mais se repete.

A mediana M_d será a média aritmética dos 80º e 81º dados, pois ocorreram 160 viagens.

$$M_d = \frac{4 + 4}{2} = 4$$

Logo, $M_o < \overline{x} < M_d$.

Resposta: alternativa **d**.

17. I. Verdadeira, pois se não houvesse estudante com altura maior do que 1,68 m, a média seria inferior a esse valor. Raciocínio semelhante pode ser feito para o caso de haver um estudante com menos de 1,68 m de altura.

II. Falsa, pois os dados são insuficientes para afirmar com certeza que há mais de um estudante nas condições dadas.

18. A soma das áreas dos retângulos do histograma é:

$$5 \cdot (6 + 8 + 11 + 15 + 24 + 14 + 10 + 7 + 5) = 500$$

Assim, cada uma das duas regiões terá 250 unidades de área (metade de 500). Além disso, sabemos que a mediana M encontra-se no 5º intervalo, logo:

$$5 \cdot 6 + 5 \cdot 8 + 5 \cdot 11 + 5 \cdot 15 + (M - 165) \cdot 24 = 250 \Rightarrow 200 + (M - 165) \cdot 24 = 250 \Rightarrow M = \frac{50}{24} + 165 \simeq 167{,}08$$

Portanto, a abscissa do ponto M é aproximadamente 167,08.

19. Calculando a média do estudante, tem-se:

$$\overline{x} = \frac{1 \cdot 3 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 7 + 2 \cdot y}{1 + 1 + 1 + 1 + 2} \Rightarrow 5 = \frac{21 + 2y}{6} \Rightarrow y = 4{,}5$$

Portanto, a nota mínima para ser aprovado é 4,5.

20. Para que o gerente permaneça no cargo, a média deve ser de, no mínimo, 30 mil reais. Assim, calcula-se a média igualando-a a 30 mil.

$$\overline{x} = \frac{21 + 35 + 21 + 30 + 38 + x}{6}$$

$$30 = \frac{21 + 35 + 21 + 30 + 38 + x}{6} \Rightarrow 145 + x = 180 \Rightarrow x = 35$$

Resposta: alternativa **e**.

21. Como os dados estão em um histograma, por convenção, tanto para o cálculo da média quanto da moda consideramos os pontos médios de cada intervalo.

a) O tempo médio é calculado da seguinte forma:

$$\frac{142{,}5 \cdot 6 + 147{,}5 \cdot 10 + 152{,}5 \cdot 15 + 157{,}5 \cdot 4 + 162{,}5 \cdot 3 + 167{,}5 \cdot 1}{6 + 10 + 15 + 4 + 3 + 1} = 151{,}3462$$

O tempo médio de espera foi de, aproximadamente, 151,3 minutos.

b) A moda é calculada da seguinte forma:

$$\frac{150 + 155}{2} = 152{,}5$$

Logo, a maioria das pessoas esperou 152,5 minutos na fila.

22. **a)** Resposta pessoal.

b) Resposta pessoal.

c) Espera-se que os estudantes citem as questões financeiras e o equilíbrio entre vida profissional e maternidade.

23. **a)** Espera-se que os estudantes percebam que no mapa de 2022 as tonalidades de todas as regiões são mais escuras que no mapa de 2010, indicando que a idade mediana aumentou em todas as Unidades da Federação.

b) Não. Em todos os locais indicados a idade mediana aumentou.

c) Aumentou 6 anos.

d) Resposta pessoal.

e) Resposta pessoal.

24. O tempo médio de cada atleta foi:

Atleta 1: $\frac{112 + 120 + 130 + 117 + 121}{5} = 120$

Atleta 2: $\frac{115 + 124 + 122 + 120 + 119}{5} = 120$

a) O desvio médio de cada atleta foi:

$$\text{Atleta 1: } d_{m1} = \frac{|112 - 120| + |120 - 120| + |130 - 120| + |117 - 120| + |121 - 120|}{5} = 4{,}4$$

$$\text{Atleta 2: } d_{m2} = \frac{|115 - 120| + |124 - 120| + |122 - 120| + |120 - 120| + |119 - 120|}{5} = 2{,}4$$

b) A variância e o desvio padrão do atleta 1 foram:

$$V_{a1} = \frac{|112 - 120|^2 + |120 - 120|^2 + |130 - 120|^2 + |117 - 120|^2 + |121 - 120|^2}{5} = 34,8$$

$$D_{p1} = \sqrt{34,8} \simeq 5,9$$

A variância e o desvio padrão do atleta 2 foram:

$$V_{a2} = \frac{|115 - 120|^2 + |124 - 120|^2 + |122 - 120|^2 + |120 - 120|^2 + |119 - 120|^2}{5} = 9,2$$

$$D_{p2} = \sqrt{9,2} \simeq 3,03$$

c) O atleta 2 teve uma *performance* mais regular nas cinco corridas, porque tanto o desvio médio quanto o desvio padrão do atleta 2 foram inferiores aos desvios médio e padrão do atleta 1.

25. a) A amplitude de cada lâmpada foi:

Marca 1: $A_1 = 48 - 28 = 20$

Marca 2: $A_2 = 49 - 26 = 23$

Para calcular o desvio médio de tempo de duração de cada lâmpada, calculamos inicialmente as médias:

Marca 1: $\frac{32 + 28 + 41 + 48 + 36}{5} = 37$

Marca 2: $\frac{26 + 49 + 45 + 31 + 34}{5} = 37$

Assim, o desvio médio de cada marca foi:

Marca 1: $d_{m1} = \frac{|32 - 27| + |28 - 37| + |41 - 37| + |48 - 37| + |36 - 37|}{5} = 6$

Marca 2: $d_{m2} = \frac{|26 - 27| + |49 - 37| + |45 - 37| + |31 - 37| + |34 - 37|}{5} = 8$

Já a variância e o desvio padrão foram:

Marca 1: $D_{p1} = \sqrt{\frac{|32 - 27|^2 + |28 - 37|^2 + |41 - 37|^2 + |48 - 37|^2 + |36 - 37|^2}{5}} = \sqrt{48,8} \simeq 6,99$

Marca 2: $D_{p2} = \sqrt{\frac{|26 - 27|^2 + |49 - 37|^2 + |45 - 37|^2 + |31 - 37|^2 + |34 - 37|^2}{5}} = \sqrt{74,8} \simeq 8,65$

b) A marca 1 apresentou os melhores resultados, pois sua amplitude foi de 20 mil horas e seu desvio médio e seu desvio padrão foram inferiores à lâmpada da marca 2, o que indica que a distribuição dos tempos estimados de uso da lâmpada da marca 2 são mais próximos do tempo médio de duração de 37 mil horas.

26. Resposta pessoal. Um aluno pode preferir a empresa X, porque ela paga os maiores e os menores salários. Nesse caso, se ele seguir carreira dentro da empresa receberá salários maiores do que a empresa Z. Por outro lado, um aluno pode escolher a empresa Z, pois a chance de receber salário próximo de R$ 9.000,00 é maior do que na outra empresa.

27. Como a média de tempo das cinco equipes é a mesma, a equipe campeã é determinada pelo menor desvio padrão pois, isso indica que seus tempos foram os que mais se aproximaram do tempo médio de cada prova. Dessa forma, a equipe campeã foi a equipe III.

Resposta: alternativa **c**.

28. a) Resposta pessoal. **b)** Resposta pessoal. **c)** Resposta pessoal. **d)** Resposta pessoal.

Depois que os estudantes fizerem os cálculos, é interessante questionar sobre o que poderia acontecer com os dados se a altura do professor fosse acrescentada ao conjunto.

29. Resposta pessoal. Exemplo de problema: Ana e Maria fazem um curso de língua inglesa. Ao longo de um ano, elas realizaram quatro provas, cujas notas são apresentadas a seguir:

Ana	75	96	85	70
Maria	86	65	98	77

Determine a amplitude das notas de Ana e de Maria.

A amplitude é dada pela diferença entre a maior e a menor nota de cada uma. Assim:

Ana: $96 - 70 = 26$

Maria: $98 - 65 = 33$

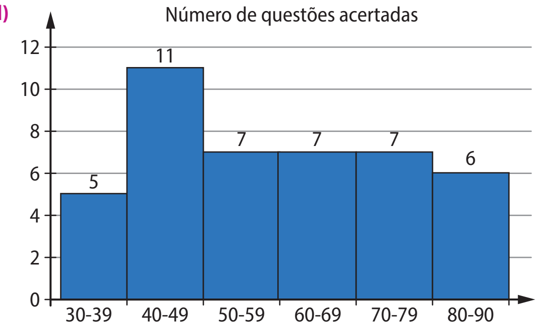
30. a) Ao organizar os dados em um diagrama de ramos e folhas, obtém-se:

3	7 7 8 9 9
4	0 4 5 5 5 7 7 8 8 8 9
5	0 0 0 0 3 6 8
6	0 1 2 3 5 7 8
7	0 1 2 5 5 6 9
8	0 3 4 5 5 7

b) Como o conjunto de dados tem número ímpar de elementos, a mediana é o termo central (22º), ou seja, 56.
A moda é o elemento que mais se repete, nesse caso, 50.

c) Quem acertou 70 questões ou mais, ou seja, $3 + 4 + 3 + 3 =$ $= 13$ estudantes.
$\frac{13}{43} \simeq 0{,}3023 \Rightarrow$ aproximadamente 30,23%

d)



Fonte: Dados fictícios.

e) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes percebam que as duas representações são adequadas, dependendo da intenção de quem está fazendo o gráfico. O histograma permite visualizar de maneira mais imediata a frequência de cada intervalo, já o diagrama de ramo e folhas preserva cada dado da amostra.

31. a) Observando o *box-plot*, é possível concluir que o mais novo tem 21 anos e o mais velho, 55 anos.

b) Sim. Resposta esperada: O terceiro quartil indica que 25% dos dados estão acima dele, portanto 75% estão abaixo.

c) Há mais estudantes entre 46 e 55 anos. Resposta esperada: É possível concluir isso, porque a linha do terceiro quartil até o valor máximo é maior do que a linha do primeiro quartil até o valor mínimo.

d) O número 37 indica que metade dos estudantes tem idade abaixo de 37 anos; a outra metade, acima de 37 anos.

32. Resposta pessoal. Exemplo de problema: qual é a amplitude do diagrama?
Como a amplitude de um conjunto de dados é a diferença entre o maior e o menor valor, tem-se: $77 - 40 = 34$

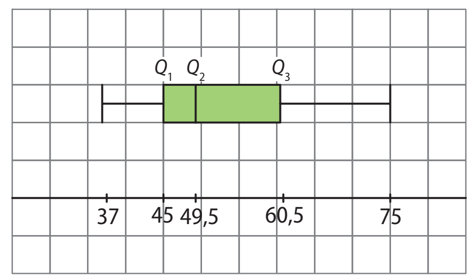
33. Para elaborar o *box-plot*, inicialmente, organizam-se os dados em ordem crescente para identificação dos valores necessários.
37, 37, 38, 39, 39, 40, 44, 45, 45, 45, 47, 47, 48, 48, 48, 49, 50, 50, 50, 50, 53, 56, 58, 60, 61, 62, 63, 65, 70, 71, 72, 75
Como o conjunto tem 32 dados, a mediana é dada pela média aritmética dos termos centrais, ou seja, $M_d = \frac{49 + 50}{2} = 49{,}5$.
O primeiro quartil é o termo central dos valores à esquerda da mediana, ou seja, $Q_1 = \frac{45 + 45}{2} = 45$.
O terceiro quartil é o termo central dos valores à direita da mediana, ou seja, $Q_3 = \frac{60 + 61}{2} = 60{,}5$.

Calculando os limites inferiores e superiores, tem-se:
Limite inferior: $Q_1 - 1{,}5(Q_3 - Q_1) = 45 - 1{,}5(60{,}5 - 45) =$ $= 45 - 23{,}25 = 21{,}75$
Limite superior: $Q_3 + 1{,}5(Q_3 - Q_1) = 60{,}5 + 1{,}5(60{,}5 - 45) =$ $= 60{,}5 + 23{,}25 = 83{,}75$

Observar que tanto o valor mínimo da amostra (37) quanto o valor máximo (75) estão dentro dos limites inferior e superior, respectivamente.
Então, tem-se:

Valor mínimo	37
Q_1	45
Q_2 (mediana)	49,5
Q_3	60,5
Valor máximo	75

Com base nos valores do quadro, pode-se construir o seguinte *box-plot*:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Resposta pessoal. Exemplos de perguntas:

1. Qual é a média dos valores situados entre o primeiro e o terceiro quartil?
Os valores entre o primeiro e o terceiro quartil são:
47, 47, 48, 48, 48, 49, 50, 50, 50, 50, 53, 56, 58 e 60. Logo, a média será:
$\frac{2 \cdot 47 + 3 \cdot 48 + 49 + 4 \cdot 50 + 53 + 56 + 58 + 60}{14} = 51$

2. Qual é a amplitude da amostra?
A amplitude da amostra é a diferença entre o maior e o menor valor, ou seja:
$75 - 37 = 38$
A amplitude é de 38 kg.

Atividades complementares

1. Seja x a quantidade total de perfumes vendidos no mês de novembro. De acordo com os gráficos, temos que a arrecadação em espécie pode ser calculada da seguinte maneira:
Perfume I: $0{,}13 \cdot x \cdot 200 = 26x$
Perfume II: $0{,}10 \cdot x \cdot 170 = 17x$
Perfume III: $0{,}16 \cdot x \cdot 150 = 24x$
Perfume IV: $0{,}29 \cdot x \cdot 100 = 29x$
Perfume V: $0{,}32 \cdot x \cdot 80 = 25{,}6x$
Como x representa uma quantidade, o perfume que gerou mais arrecadação foi o perfume IV.
Resposta: alternativa **d**.

2. De acordo com o gráfico, analisamos as informações.

a) Falsa, pois o Distrito Federal teve o maior decréscimo no período entre 2014 e 2017.

b) Falsa, pois Santa Catarina apresentou um número maior em 2017 do que em 2007.

c) Falsa, pois em 2017, a taxa do Brasil foi aproximadamente de 5 homicídios a cada 100 mil mulheres, enquanto a soma das taxas das três unidades federativas foi aproximadamente de 8 homicídios a cada 100 mil mulheres.

d) Falsa, pois o gráfico não mostra todos os estados da Região Sul do Brasil. Por isso, não é possível afirmar que a taxa de Santa Catarina superou as taxas dos demais estados dessa região.

e) Verdadeira.

Resposta: alternativa **e**.

3. Lembrando que a circunferência completa tem um ângulo de 360° e tendo em conta que o turno da manhã representa 40% da circunferência, a medida do ângulo α correspondente ao turno da manhã é:

$\alpha = 0,40 \cdot 360° = 144°$

Resposta: alternativa **a**.

4. Como a quantidade de estudantes é par, a nota mediana é dada pela média entre a 15ª e a 16ª maiores notas, ou seja, 6,0 e 8,0, respectivamente. Logo, a nota mediana é:

$\frac{6,0 + 8,0}{2} = 7,0$

Resposta: alternativa **b**.

5. Sejam *y*, *z* e *w* as três notas cuja média é 8,0 e *x* a nota que se repete. De acordo com as informações do enunciado, temos:

$\frac{y + z + w}{3} = 7,0 \Rightarrow y + z + w = 21,0$

Assim:

$\frac{x + x + y + z + w}{5} = 8,0 \Rightarrow 2x + y + z + w = 40,0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x = 40,0 - 21,0 = 19,0 \Rightarrow x = 9,5$

Resposta: alternativa **b**.

6. De acordo com o gráfico de barras, podemos calcular a média mensal de mortes violentas na comunidade LGBTQIA+ da seguinte forma:

$\frac{30 + 25 + 25 + 35 + 25 + 25 + 20 + 35 + 25 + 25 + 15 + 15}{12} = 25$

Assim, a média mensal foi de 25 mortes violentas no Brasil da comunidade LGBTQIA+ em 2021.

7. De acordo com o gráfico, vemos que há cinco estudantes com massa corporal maior do que 80 kg. Destes cinco estudantes, apenas dois deles têm a medida de altura acima da média, que é 1,65 m. Logo:

$\frac{2}{10} = 0,20 \Rightarrow 20\%$

Ou seja, 20% dos estudantes têm as medidas de massa corporal e altura acima das médias.

Resposta: alternativa **b**.

8. **a)** A porcentagem *p* aproximada de alunos que tiraram nota menor ou igual a 7 foi:

$p = \frac{3}{3 + 9 + 7 + 4} \simeq 0,13 \Rightarrow 13\%$

A quantidade *q* de alunos que tiraram notas maiores do que 8 foi:

$q = \frac{7 + 4}{3 + 9 + 7 + 4} \cdot 253 = \frac{11}{23} \cdot 253 = 121$

Logo, 121 alunos tiraram notas maiores que 8.

b) A média *M* das notas foi, aproximadamente:

$M = \frac{6,5 \cdot 3 + 7,5 \cdot 9 + 8,5 \cdot 7 + 9,5 \cdot 4}{3 + 9 + 7 + 4} = \frac{184,5}{23} \simeq 8,02$

A nota mediana M_e das notas foi, aproximadamente:

$3 + 9 \cdot (M_e - 7) = \frac{3 + 9 + 7 + 4}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3 + 9M_e - 63 = \frac{23}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 9M_e = 71,5 \Rightarrow$

$\Rightarrow M_e \simeq 7,94$

9. O atleta mais regular é aquele cujo desvio padrão é o menor entre todos. Nesse caso, o atleta mais regular é o atleta III.

Por outro lado, o atleta menos regular é aquele cujo desvio padrão é o maior entre todos. Assim, o atleta menos regular é o atleta II.

Logo, a primeira luta será entre os atletas II e III.

Resposta: alternativa **c**.

10. Estabelecendo a mediana e a moda, tem-se:

$M_d = \frac{34+34}{2} = \frac{68}{2} = 34$

$M_o = 33$

$34 + 33 = 67$

Resposta: alternativa **a**

11. I. Verdadeira. Observando o primeiro *box-plot*, tem-se que o peso mediano estava acima de 89 kg.

II. Verdadeira. O terceiro quartil em 93 kg indica que 25% dos pacientes pesam 93 kg ou mais.

III. Falsa. O valor 84 kg está mais próximo do primeiro quartil, o que indica um total de aproximadamente 25% dos pacientes pesando menos do que 84 kg.

IV. Falsa. Como o primeiro e o terceiro quartis estão entre 83 kg e 87 kg, tem-se que isso corresponde a aproximadamente 50% dos pacientes.

Resposta: alternativa **b**.

Capítulo 3 • Introdução às funções e função afim

Atividades

1. **a)** O número de barras de chocolate é a variável independente, pois uma pessoa pode comprar quantas quiser. O preço a ser pago é a variável dependente, pois o valor final depende da quantidade de barras compradas.

b) O andar do apartamento em que uma pessoa mora é a variável independente, pois uma pessoa pode morar no andar que desejar. O tempo gasto para o elevador chegar ao apartamento é a variável dependente, pois o tempo dependerá do andar em que a pessoa mora.

2. O enunciado da atividade afirma que há uma relação entre as variáveis *s* e *t* e, como o objetivo da questão é descobrir qual é a relação algébrica entre essas variáveis, uma estratégia é substituir um valor de *t* nas relações e eliminar aquelas que apresentam uma resposta diferente da tabela.

Assim, ao considerar $t = 1$, deve-se obter $s = 0$. A alternativa **d** apresenta uma resposta diferente, pois, ao resolver a equação $s = t^2$, considerando $t = 1$, obtém-se $s = 1$. Portanto, não pode ser essa alternativa.

Ao considerar $t = 2$, deve-se obter $s = 3$. Porém, as alternativas **a** e **b** apresentam respostas diferentes, pois, ao resolver a equação, $s = 2t - 2$, considerando $t = 2$, obtém-se $s = 2$, e, ao resolver a equação $s = t - 1$, obtém-se $s = 1$. Logo, ambas as alternativas, **a** e **b**, não estão corretas.

Portanto, por eliminação, resta a alternativa **c**.

Para conferir a resposta, pode-se substituir os valores de *t* e *s* na relação e verificar a resposta:

$t = 1 \Rightarrow s = 1^2 - 1 = 0$

$t = 2 \Rightarrow s = 2^2 - 1 = 3$

$t = 3 \Rightarrow s = 3^2 - 1 = 8$

$t = 4 \Rightarrow s = 4^2 - 1 = 15$

$t = 5 \Rightarrow s = 5^2 - 1 = 24$

Resposta: alternativa **c**.

3. Como o perímetro é a soma dos lados de um polígono, pode-se concluir que o perímetro do retângulo é $P = 6x$. A área do retângulo é o produto entre a base e a altura, portanto, $A = x \cdot 2x = 2x^2$. A diagonal do retângulo equivale à hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem x e $2x$. Portanto, $d = \sqrt{x^2 + (2x)^2} = x\sqrt{5}$ é a medida da diagonal do retângulo.

4. Considerando as informações fornecidas pelo enunciado, pode-se observar que:

x (nº de entrada)	*y* (nº de saída)
0	$2 \cdot 0 + 3 = 3$
1	$2 \cdot 1 + 3 = 5$
2	$2 \cdot 2 + 3 = 7$
3	$2 \cdot 3 + 3 = 9$
4	$2 \cdot 4 + 3 = 11$
5	$2 \cdot 5 + 3 = 13$
x	$2 \cdot x + 3$

Considerando o modelo anterior, pode-se concluir que $a = 2$ e $b = 3$ e a fórmula é $y = 2x + 3$.

5. Considerando que p representa o número de pães fabricados e t o tempo, em horas, que se leva para fabricar p pães, pode-se afirmar que:

a) $p = 300t$ é a lei que representa essa relação.

b) Em 3 horas e 30 minutos, ou seja, $t = 3{,}5$, serão fabricados: $p(3{,}5) = 300 \cdot 3{,}5 = 1050$
Em 3 horas e 30 minutos serão fabricados 1050 pães.

6. Pelo enunciado, tem-se $A = \{-2, -1, 0, 1\}$, portanto cada um de seus elementos faz parte do domínio de f. Então, a imagem da função deve ser calculada com base em cada elemento do domínio de f.

a) $f(x) = x^3$, então:

$f(-2) = (-2)^3 = -8$

$f(-1) = (-1)^3 = -1$

$f(0) = 0^3 = 0$

$f(1) = 1^3 = 1$

Portanto, $\text{Im}(f) = \{-8, -1, 0, 1\}$.

b) $f(x) = -x + 3$, então:

$f(-2) = -(-2) + 3 = 5$

$f(-1) = -(-1) + 3 = 4$

$f(0) = -0 + 3 = 3$

$f(1) = -1 + 3 = 2$

Portanto, $\text{Im}(f) = \{2, 3, 4, 5\}$.

c) $f(x) = 1 - x^2$, então:

$f(-2) = 1 - (-2)^2 = -3$

$f(-1) = 1 - (-1)^2 = 0$

$f(0) = 1 - 0^2 = 1$

$f(1) = 1 - 1^2 = 0$

Portanto, $\text{Im}(f) = \{-3, 0, 1\}$.

7. a) Observe que a imagem corresponde a cada elemento do domínio acrescido de duas unidades. Assim, uma possível lei de formação é $y = x + 2$ ou $f(x) = x + 2$.

b) Observe que a imagem corresponde a cada elemento do domínio elevado ao quadrado. Assim, uma possível lei de formação é $y = x^2$ ou $h(x) = x^2$.

8. Conforme informação do enunciado, o pintor cobra o valor fixo de 30 reais mais uma quantia que depende da área pintada. Com base nisso, pode-se organizar a seguinte tabela:

Área *x* pintada (em m²)	Total *y* a pagar pela pintura (em reais) incluindo a parcela fixa	Valor fixo (em R$)	Valor cobrado pela área *x* pintada (em m²)	Valor cobrado por m² pintado (em R$)
5	40	30	10	2
10	50	30	20	2
15	60	30	30	2
20	70	30	40	2
30	90	30	60	2
40	110	30	80	2

- Falso. Pela tabela, pode-se afirmar que o pintor cobra 30 reais mais 2 reais (e não 3 reais) pelo metro quadrado pintado.
- Verdadeiro. Como o pintor cobra 2 reais o metro quadrado pintado, para pintar uma área de 250 m², ele cobrará 500 reais. Acrescentando a taxa fixa de 30 reais, o valor final será de 530 reais.
- Falso. Seguindo o raciocínio anterior, para pintar uma área de 150 m², o pintor cobrará 300 reais. Acrescentando a taxa fixa, o valor final será de 330 reais. Portanto, mais do que 300 reais.

Resposta: alternativa **c**.

9. a) Como não há nenhuma restrição para valores que x pode assumir na função $h(x) = 4x - 5$, então o domínio será $D(h) = \mathbb{R}$.

b) A função $j(x) = \dfrac{3}{1 + x}$ está definida para $1 + x \neq 0$. Portanto, x não pode assumir os valores -1. Logo, o domínio da função é $D(j) = \mathbb{R} - \{-1\}$.

c) A condição de existência da função $z(x) = \sqrt{2x}$ é $2x \geqslant 0$. Portanto, x não pode assumir valores menores do que 0. Logo, o domínio da função é $D(z) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$.

10. **a)** Ao observar a ilustração, pode-se perceber que a quantidade de palitos é um número múltiplo de 3, que depende da quantidade de palitos de cada lado. Portanto, pode-se preencher o quadro da seguinte maneira:

Número de palitos em cada lado	Total de palitos em cada triângulo
1	3
2	6
3	$3 \cdot 3 = 9$
4	$3 \cdot 4 = 12$
5	$3 \cdot 5 = 15$
6	$3 \cdot 6 = 18$

b) Como a quantidade de palitos é o triplo do número de palitos do lado do triângulo, logo $f(x) = 3x$ ou $y = 3x$.

c) O domínio da função será os números naturais positivos, ou seja, $D(f) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$. A imagem é composta por todos os números naturais múltiplos de 3 maiores do que 0, ou seja, $Im(f) = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, ...\}$.

d) Como a construção possui 45 palitos, pode-se afirmar que $y = 45$. Portanto, precisa-se descobrir quantos palitos há em cada lado, ou seja, o valor de x. Logo:

$y = 3x \Rightarrow 45 = 3x \Rightarrow x = 15$

Portanto, cada lado deve ter 15 palitos.

11. Resposta pessoal. Ao elaborar um problema que envolva a construção de um quadrado com palitos de fósforo, espera-se que o estudante chegue à relação $y = 4x$ para contabilizar a quantidade total de palitos (y) ou, caso se tenha a quantidade total de palitos, encontre a quantidade de palitos que cada lado possui (x).

12. Segundo enunciado, há uma relação entre a quantidade x de anúncios feitos por uma loja em um período de uma semana e a quantidade y de itens vendidos nesse mesmo período. Essa relação é estabelecida pela função $y = \frac{3}{2}x + 80$.

Considerando que a loja deve vender 200 itens, ou seja, $y = 200$, então, o número de anúncios deverá ser:

$200 = \frac{3}{2}x + 80 \Rightarrow 400 = 3x + 160 \Rightarrow x = 80$

Assim, o gerente da loja deverá anunciar 80 vezes durante a semana para vender 200 itens.

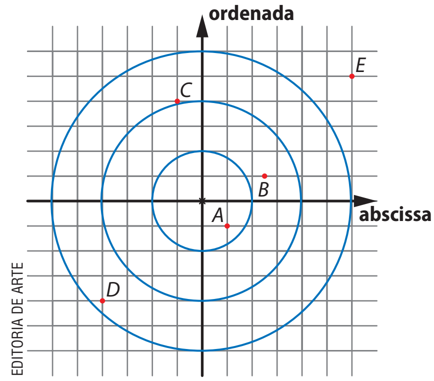
13. Conforme a orientação dos eixos ordenados e os pontos localizados nesse sistema cartesiano, pode-se afirmar que as coordenadas dos pontos são: $A(2, 2)$, $B(0, 0)$, $C(5, 0)$, $D(0, 6)$, $E(-3, 0)$, $F(0, -2)$, $G(-2, 4)$, $H(-5, -5)$, $I(5, -3)$ e $J(-5, 1)$.

14. Como os pares ordenados representam o mesmo ponto, então pode-se afirmar que os valores das abscissas são iguais, assim como os valores das ordenadas. Logo:

$2a - 3 = 5a - 1 \Rightarrow 2a - 5a = -1 + 3 \Rightarrow -3a = 2 \Rightarrow a = -\frac{2}{3}$

$b + 2 = 2b - 3 \Rightarrow b - 2b = -3 - 2 \Rightarrow b = 5$

15. **a)** Como cada flecha possui um valor para a coordenada, pode-se localizar cada uma delas no plano cartesiano, conforme a imagem a seguir:



b) No círculo menor, Manoel acertou uma flecha (A).

c) Manoel fez 300 pontos referentes à flecha em A, 100 pontos referentes à flecha em B e mais 100 pontos (duas flechas de 50 pontos) referentes às flechas em C e em D. A flecha em E não rendeu pontos, pois está fora do alvo. Portanto, o total de pontos que Manoel conquistou ao lançar 5 flechas foi: $300 + 100 + 100 = 500$, portanto 500 pontos.

16. O domínio do gráfico de uma função é representado pela projeção de todos os pontos do gráfico sobre o eixo das abscissas, e a imagem é representada pela projeção de todos os pontos, desse mesmo gráfico, sobre o eixo das ordenadas. Com base nisso, tem-se:

a) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x < 3\}$ e $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant y < 2\}$

b) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 3\}$ e $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant y \leqslant 3\}$

c) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x \leqslant 4 \text{ e } x \neq 1\}$ e $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -2 < y \leqslant 3\}$

d) $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}$

e) $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 0\}$

f) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ e $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$

17. Para responder às perguntas, deve-se observar o gráfico.

a) A temperatura atinge 0 °C no instante em que o gráfico corta o eixo das abscissas; portanto, às 2 h e às 8 h.

b) Os extremos do intervalo em que a temperatura varia se dá pelas temperaturas mínima e máxima. Assim, a temperatura mínima é de −5 °C e a máxima é de 13 °C. Portanto, a temperatura varia de −5 °C a 13 °C.

c) A temperatura é positiva no intervalo em que o gráfico está acima do eixo da abscissa, ou seja, de 0 h às 2 h e de 8 h às 24 h.

18. **a)** Considerando $x = 27$, a numeração será:

$y = 1{,}25x + 7 \Rightarrow y = 1{,}25 \cdot 27 + 7 \Rightarrow y = 40{,}75$

Arredondando o resultado para o número natural imediatamente maior, obtém-se 41.

b) Resposta pessoal. Considerando, por exemplo, que a numeração do pé de um estudante seja 40, a medida de seu pé será:

$y = 1{,}25x + 7 \Rightarrow 40 = 1{,}25x + 7 \Rightarrow x = 26{,}4$

A medida do pé deverá ser inferior ou igual a 26,4 cm, pois, caso contrário, ele deverá calçar 41.

Por outro lado, como esse valor é arredondado para cima, o pé dele pode ser menor do que 26,4 cm. Porém, não pode ser muito menor, pois, caso contrário, ele deveria calçar 39. Considerando que a medida do pé de uma pessoa que calça 39 seja:

$y = 1{,}25x + 7 \Rightarrow 39 = 1{,}25x + 7 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 25{,}6$

Então, se um estudante calça número 40, a medida do pé precisa ser maior do que 25,6cm e menor ou igual a 26,4cm.

19. As funções afins são escritas na forma $f(x) = ax + b$, em que a e b são números reais.

a) Então, as funções II, III e IV são funções afins.

b) II: função polinomial do 1º grau; III: função polinomial do 1º grau e função linear; IV: função constante

c) II) $a = -2$ e $b = \sqrt{3}$

III) $a = \frac{2}{3}$ e $b = 0$

IV) $a = 0$ e $b = 0{,}01$

20. a) A notação $f(2)$ equivale a dizer que $x = 2$. Então, para calcular o valor solicitado, basta substituir x por 2 na lei da função:

$f(2) = 5 \cdot 2 - 2 \Rightarrow f(2) = 8$

b) A notação $f(x) = 0$ equivale a dizer que $y = 0$. Então, deve-se igualar a lei da função a zero. Logo:

$5x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{5}$

21. Sendo x o volume, em metro cúbico, de concreto utilizado, então o preço total do concreto utilizado é:

$$y = \underbrace{250}_{\text{preço de um metro cúbico de concreto}} \cdot x + \underbrace{500}_{\text{preço da taxa de bombeamento}}$$

Resposta: alternativa **d**.

22. Como h é uma função afim, pode-se escrevê-la na forma genérica $y = ax + b$. Considerando os dados do problema, obtém-se:

$h(1) = 4 \Rightarrow x = 1$ e $y = 4$

Então:

$a \cdot 1 + b = 4 \Rightarrow a + b = 4$ (I)

$h(-2) = 10 \Rightarrow x = -2$ e $y = 10$

Então:

$a \cdot (-2) + b = 10 \Rightarrow -2a + b = 10$ (II)

Resolvendo o sistema formado por (I) e (II), temos:

$$\begin{cases} a + b = 4 \\ -2a + b = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + \cancel{b} = 4 \\ 2a - \cancel{b} = -10 \end{cases}$$

$3a = -6 \Rightarrow a = -2$

Se $a = -2$, então $-2 + b = 4 \Rightarrow b = 6$.

Como $a = -2$ e $b = 6$, a função h é dada por $h(x) = -2x + 6$.

Daí, pode-se calcular:

$h\left(-\frac{1}{2}\right) = -2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 6 = 1 + 6 = 7$

A função é $h(x) = -2x + 6$ e

$h\left(-\frac{1}{2}\right) = 7$.

23. Segundo o enunciado, $f(x) = ax + 2$, porém sabe-se que $f(4) = 20$. Portanto, pode-se considerar que, para $x = 4$, tem-se $y = 20$.
Para calcular o valor do coeficiente a, deve-se substituir esses valores na função. Ao fazer isso, obtém-se:

$20 = a \cdot 4 + 2 \Rightarrow a = \frac{9}{2}$

24. a) As fórmulas que relacionam a quantidade de impressões e o valor pago de cada gráfica são: $y_A = 0{,}30x$ e $y_B = 0{,}25x$, em que x representa a quantidade de impressões.

b) Sim, pois, por exemplo, se o número de folhetos impressos triplicar, o valor a ser pago também triplicará; se o número de folhetos impressos cair pela metade, o valor a ser pago também cairá pela metade. Isso significa que o valor pago pela impressão é diretamente proporcional ao número de unidades impressas.

c) Se Sofia encomendar 1000 folhetos, então $x = 1000$. Logo:

$y_B = 0{,}25 \cdot 1000 = 250$

O valor a ser pago por 1000 folhetos será R$ 250,00.

25. Como f é uma função linear, então pode-se considerar que $b = 0$.

O enunciado nos informa que $f(-3) = 4$, ou seja, $x = -3$ e $y = 4$, então:

$f(x) = ax \Rightarrow 4 = a \cdot (-3) \Rightarrow a = -\frac{4}{3}$

Portanto, a função linear é $f(x) = -\frac{4}{3}x$.
Agora, ao calcular $f(6)$, obtém-se:

$f(x) = -\frac{4}{3}x \Rightarrow f(6) = -\frac{4}{3} \cdot 6 \Rightarrow f(6) = -8$

26. a) Considerando p o perímetro do retângulo, pode-se escrever que:

$p(x) = 2x + 2 \cdot (x + 5)$

$p(x) = 4x + 10$

Em que p é uma função polinomial do 1º grau restrita ao domínio $]0, +\infty[$, pois a medida do lado de qualquer polígono é um número positivo.

b) Ao considerar os valores de x e $p(x)$, descritos a seguir, e substituí-los na função $p(x) = 4x + 10$, obtêm-se os seguintes valores:

$p(5) = 4 \cdot 5 + 10 = 20$

$p(10) = 4 \cdot 10 + 10 = 50$

$p(20) = 4 \cdot 20 + 10 = 90$

$p(30) = 4 \cdot 30 + 10 = 130$

$p(x) = 162 \Rightarrow 4x + 10 = 162 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{152}{4} = 38$

$p(x) = 210 \Rightarrow 4x + 10 = 210 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{200}{4} = 50$

Portanto, completando a tabela tem-se:

x (em metro)	*p* (em metro)
5	30
10	50
20	90
30	130
38	162
50	210

c) Não, pois a razão $\frac{p}{x}$ não é constante.

d) Como o perímetro mede 78 m, pode-se considerar que $p(x) = 78$. Logo:

$4x + 10 = 78 \Rightarrow 4x = 68 \Rightarrow x = 17$

Como o outro lado mede $x + 5$, então os lados medem 17 m e 22 m.

27. Se f é uma função polinomial do 1º grau, então pode-se escrevê-la, na forma genérica, como $f(x) = ax + b$. Considerando os dados fornecidos no enunciado, têm-se:

$f(3) = 6 \Rightarrow a \cdot 3 + b = 6 \Rightarrow 3a + b = 6$ (I)

$f(4) = 8 \Rightarrow a \cdot (4) + b = 8 \Rightarrow 4a + b = 8$ (II)

Resolvendo o sistema formado por (I) e (II):

$$\begin{cases} 3a + b = 6 \\ 4a + b = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + \cancel{b} = 6 \\ \underline{-4a - \cancel{b} = -8} \end{cases}$$

$-a = -2 \Rightarrow a = 2$

Se $a = 2$, então $3 \cdot 2 + b = 6 \Rightarrow b = 0$.

Assim $f(x) = 2x$. Daí, podemos calcular $f(10)$:

$f(x) = 2x \Rightarrow f(10) = 2(10) \Rightarrow f(10) = 20$

Resposta: alternativa **e**.

28. a) Considerando d a distância percorrida, em centímetro, e t o tempo de duração da caminhada, em segundo, pode-se escrever que a relação entre distância percorrida e tempo é $d = 80t$.

b) Sim, são grandezas diretamente proporcionais, pois a razão $\frac{d}{t}$ é igual a 80.

c) Caso a pessoa caminhe por 10 s:

$d = 80 \cdot 10 = 800$

Ela percorrerá, em 10 s, 800 cm ou 8 m.

Agora, caso a pessoa caminhe por 40 s:

$d = 80 \cdot 40 = 3200$

Ela percorrerá, em 40 s, 3200 cm ou 32 m.

d) Como 100 m equivalem a 10 000 cm, então:

$10\,000 = 80\,t \Rightarrow t = \frac{10\,000}{80} = 125$

Portanto, essa pessoa levará 125 s para percorrer 100 m.

29. Considerando os dados fornecidos pelo enunciado, pode-se escrever:

$f(x) = ax + b$ e $f(1) = -9 \Rightarrow a + b = -9$

Como $b^2 - a^2$ é uma diferença entre dois quadrados, é possível escrevê-lo na forma fatorada $(b + a)(b - a)$. Como $a + b = b + a = -9$, tem-se:

$b^2 - a^2 = (b + a)(b - a) \Rightarrow$

$\Rightarrow 54 = -9 \cdot (b - a) \Rightarrow$

$\Rightarrow (b - a) = -6 \Rightarrow a - b = 6$

30. A lei da função que modela o experimento pode ser considerada da forma $y = ax + b$, sendo y o nível da água e x o número de bolas. Tomando os valores fornecidos pelo quadro e aplicando-os na fórmula da função, pode-se obter o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 6{,}35 = 5a + b \\ 6{,}70 = 10a + b \end{cases}$$

Subtraindo a primeira equação da segunda, obtém-se:

$6{,}70 - 6{,}35 = 10a - 5a + b - b \Rightarrow$

$\Rightarrow 5a = 0{,}35 \Rightarrow a = 0{,}07$

Substituindo esse valor em qualquer uma das equações, obtém-se $b = 6$.

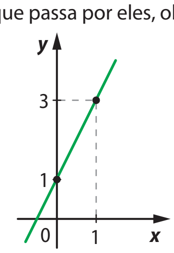
Portanto, a lei da função é $y = 0{,}07x + 6$.

Resposta: alternativa **e**.

31. a) Considerando os valores $x = 0$ e $x = 1$ para a função $f(x) = 2x + 1$, obtém-se:

x	$f(x)$
0	1
1	3

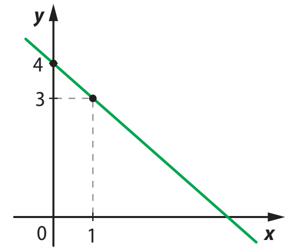
Portanto, tem-se os seguintes pares ordenados (0, 1) e (1, 3) que pertencem à função. Assim, ao inserir esses pontos no plano cartesiano e traçar a reta que passa por eles, obtém-se:



b) Considerando os valores $x = 0$ e $x = 1$ para a função $g(x) = -x + 4$, obtém-se:

x	$g(x)$
0	4
1	3

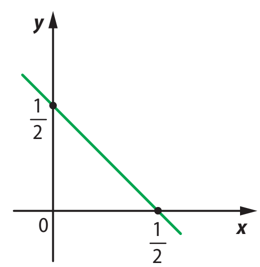
Portanto, tem-se os seguintes pares ordenados (0, 4) e (1, 3) que pertencem à função. Assim, ao inserir esses pontos no plano cartesiano e traçar a reta que passa por eles, obtém-se:



c) Considerando os valores $x = 0$ e $x = \frac{1}{2}$ para a função $y = \frac{1}{2} - x$, obtém-se:

x	y
0	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	0

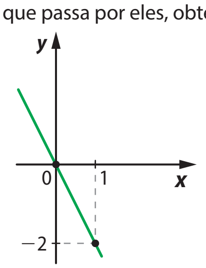
Portanto, tem-se os seguintes pares ordenados $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ e $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ que pertencem à função. Assim, ao inserir esses pontos no plano cartesiano e traçar a reta que passa por eles, obtém-se:



d) Considerando os valores $x = 0$ e $x = 1$ para a função $h(x) = -2x$, obtém-se:

x	$h(x)$
0	0
1	-2

Portanto, tem-se os seguintes pares ordenados (0, 0) e (1, −2) que pertencem à função. Assim, ao inserir esses pontos no plano cartesiano e traçar a reta que passa por eles, obtém-se:



32. Na função $f(x) = ax + b$, o valor b é a ordenada do ponto em que o gráfico intercepta o eixo y. Como $p - 2$ representa o coeficiente linear b, temos:

$p - 2 = 4 \Rightarrow p = 6$

33. Na função polinomial $f(x) = ax + b$, o gráfico intercepta o eixo das abscissas quando $f(x) = 0$. Portanto, considerando os dados fornecidos pela atividade, pode-se concluir que $f(3) = 0$. Logo:

$f(3) = 0 \Rightarrow -2 \cdot 3 + 4m + 5 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow m = \frac{1}{4}$

34. Para determinar o zero de uma função, deve-se calcular $f(x) = y = 0$. Assim, para cada caso, tem-se:

a) $f(x) = -3x + 4$

$f(x) = 0 \Rightarrow -3x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$

b) $y = \frac{3}{8}x$

$y = 0 \Rightarrow \frac{3}{8}x = 0 \Rightarrow x = 0$

c) $y = 2x + 8$

$y = 0 \Rightarrow 2x + 8 = 0 \Rightarrow x = -4$

d) $y = 6 + \frac{x}{4}$

$y = 0 \Rightarrow 6 + \frac{x}{4} = 0 \Rightarrow x = -24$

35. Sabe-se que o custo total da fabricação de um artigo é R$ 45,00 por unidade, mais um custo fixo de R$ 2.000,00.

a) Considerando os dados do enunciado, pode-se definir que a função que representa o custo total é dada por $f(x) = 45x + 2000$, em que x representa a quantidade de peças fabricada.

b) O custo de fabricação de 10 unidades é o valor de $f(10)$. Logo:

$f(10) = 45 \cdot 10 + 2000 \Rightarrow f(10) = 2450$

Portanto, o custo de fabricação de 10 peças será R$ 2.450,00.

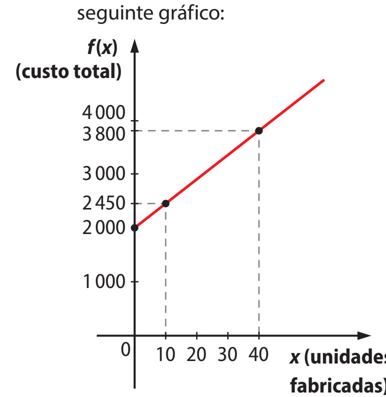
c) Afirmar que o custo total é R$ 3.800,00 equivale a dizer que $f(x) = 3800$. Portanto, para saber o número de peças que gerou esse custo, deve-se resolver a equação:

$3800 = 45x + 2000 \Rightarrow$

$\Rightarrow 45x = 1800 \Rightarrow x = 40$

Portanto, a produção de 40 unidades gerará um custo total de R$ 3.800,00.

d) Nota-se que o ponto (0, 2 000) faz parte do gráfico, pois $f(0) = 2000$. Outros pontos que compõem o gráfico, de acordo com os item **b** e **c**, são (10, 2 450) e (40, 3 800). Portanto, destacando esses pontos, tem-se o seguinte gráfico:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Observa-se que o gráfico da função custo total é formado por pontos, e não por um segmento contínuo, pois o domínio da função é o conjunto $\mathbb{N}$. No entanto, todos esses pontos estarão sobre a semirreta que representa o gráfico da função $y = 45x + 2000$ cujo domínio é $\mathbb{R}^+$.

36. Como os gráficos de f e g são retas, ambas as funções são polinomiais do 1º grau e podem ser expressas por $y = ax + b$.
Para determinar a lei de formação de uma função afim, precisa-se de dois pontos pertencentes ao gráfico da função para substituir na lei e determinar os valores dos coeficientes a e b.
O gráfico da função f passa pelos pontos (4, 0) e (0, 4).
Então:

$$\begin{cases} 0 = 4a + b \\ 4 = 0a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a + b = 0 & \text{I} \\ b = 4 & \text{II} \end{cases}$$

Substituindo o valor de b encontrado em II na equação I, tem-se:
$4a + 4 = 0 \Rightarrow 4a = -4 \Rightarrow a = -1$
Portanto, a lei de formação da função f é $f(x) = -x + 4$.
Já o gráfico da função g passa pela origem (0, 0), então ela é uma função linear e pode ser expressa por $g(x) = ax$, já que $b = 0$.
Para $x = 2$, a ordenada de $f(x)$ é igual à ordenada de $g(x)$, pois é o ponto em que as duas retas se cruzam. Então:
$f(2) = -2 + 4 = 2$
Logo, o gráfico de g passa pelo ponto (2, 2). Então:
$g(x) = ax \Rightarrow 2 = 2a \Rightarrow a = 1$
Portanto, $g(x) = x$.
Assim, as leis de formação das funções são $f(x) = -x + 4$ e $g(x) = x$.

37. Observando o gráfico, pode-se considerar que os pontos (1, 20) e (5, 60) pertencem à função, pois são pontos do gráfico.

a) Para determinar a lei de formação da função $y = ax + b$, deve-se utilizar os pontos em um sistema, conforme a seguir:

$$\begin{cases} a + b = 20 \\ 5a + b = 60 \end{cases}$$

Subtraindo a primeira equação da segunda, obtém-se $a = 10$. Substituindo esse resultado na primeira equação, obtém-se $b = 10$.
Portanto, a lei de formação da função definida pelo gráfico é $y = 10x + 10$.

b) Considerando o sétimo ano, ou seja, $x = 7$ e substituindo na função, obtém-se:
$y = 10x + 10 \Rightarrow y = 10 \cdot (7) + 10 \Rightarrow$
$\Rightarrow y = 80$
Portanto, a projeção de vendas do sétimo ano será de R$ 80.000,00.

c) Sim. Espera-se que os estudantes indiquem que são necessários apenas dois pontos sobre a reta para determinar a lei de formação da função representada pelo gráfico e que pontos fora da reta não puderam ser utilizados.

38. Para identificar se uma função é decrescente, constante ou crescente, deve-se analisar o coeficiente a de cada um dos itens e verificar se é negativo, nulo ou positivo, respectivamente.

a) $y = \frac{2}{5}x + 1 \rightarrow$ crescente, pois $a = \frac{2}{5}$, ou seja, positivo.

b) $y = -2x + 3 \rightarrow$ decrescente, pois $a = -2$, ou seja, negativo.

c) $f(x) = \sqrt{2} \rightarrow$ constante, pois $a = 0$, ou seja, nulo.

d) $f(x) = 3{,}5 - 0{,}4x \rightarrow$ decrescente, pois $a = -0{,}4$, ou seja, negativo.

e) $y = -5x \rightarrow$ decrescente, pois $a = -5$, ou seja, negativo.

f) $f(x) = -6 \rightarrow$ constante, pois $a = 0$, ou seja, nulo.

39. a) A função é decrescente, pois a inclinação da reta é no sentido descendente. Observa-se que, à medida que os valores de x aumentam, os valores de $f(x)$ diminuem.

b) Como a função é uma reta, ela é da forma $f(x) = ax + b$; então, ao tomar os pontos (0, 3) e (6, 0), é possível obter o sistema:

$$\begin{cases} 3 = a \cdot 0 + b \\ 0 = a \cdot 6 + b \end{cases}$$

Da primeira equação, obtém-se $b = 3$, e substituindo esse valor na segunda equação, obtém-se $a = -\frac{1}{2}$. Desse modo, tem-se:
$f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$.

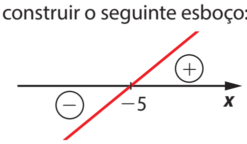
c) Ao calcular o zero da função $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$, obtém-se $x = 6$. Como f é uma função decrescente, pois $a < 0$, então:
$f(x) > 0$ para $x < 6$; $f(x) < 0$ para $x > 6$;
$f(x) = 0$ para $x = 6$.

40. a) Para mostrar que f é uma função afim, é necessário desenvolver os produtos notáveis e a fatoração existentes na função. Logo:
$f(x) = x(3 - x) + (x - 1)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) = 3x - x^2 + x^2 - 2x + 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) = x + 1$
Portanto, f é uma função polinomial do 1º grau.

b) Para calcular o zero da função, deve-se calcular $f(x) = 0$. Logo:
$f(x) = 0 \Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

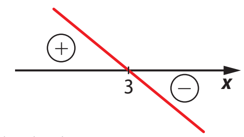
c) $f(x) > 0 \Rightarrow x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1 \Rightarrow$
$\Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$

41. a) Como $a = 1$, a função f é crescente. Calculando o zero da função, obtém-se: $x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$
Com base nessas informações, pode-se construir o seguinte esboço:



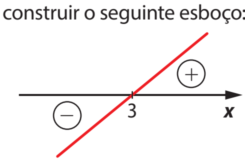
Portanto, tem-se:
$f(x) = 0$ para $x = -5$;
$f(x) > 0$ para $x > -5$;
$f(x) < 0$ para $x < -5$.

b) Como $a = -3$, a função y é decrescente.
Calculando o zero da função, obtém-se: $-3x + 9 = 0 \Rightarrow x = 3$
Com base nessas informações, pode-se construir o seguinte esboço:



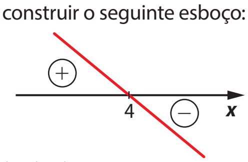
Portanto, tem-se:
$y = 0$ para $x = 3$;
$y > 0$ para $x < 3$;
$y < 0$ para $x > 3$.

c) Como $a = \frac{1}{3}$, a função y é crescente.
Calculando o zero da função, obtém-se: $\frac{x}{3} - 1 = 0 \Rightarrow x = 3$
Com base nessas informações, pode-se construir o seguinte esboço:



Portanto, tem-se:
$y = 0$ para $x = 3$;
$y > 0$ para $x > 3$;
$y < 0$ para $x < 3$.

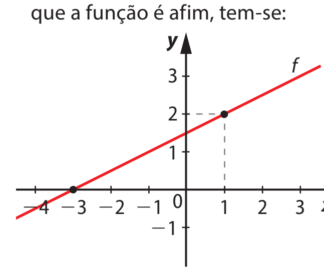
d) Como $a = -\frac{1}{2}$, a função f é decrescente.
Calculando o zero da função, obtém-se: $2 - \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow x = 4$
Com base nessas informações, pode-se construir o seguinte esboço:



Portanto, tem-se:
$f(x) = 0$ para $x = 4$;
$f(x) > 0$ para $x < 4$;
$f(x) < 0$ para $x > 4$.

42. Segundo os dados fornecidos pelo enunciado, o zero da função é $x = -3$ e a função passa pelo ponto (1, 2).

a) O gráfico passa pelos pontos $(-3, 0)$ e $(1, 2)$. Plotando esses pontos no plano cartesiano e sabendo que a função é afim, tem-se:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

b) Como a função é afim, ela é da forma $f(x) = ax + b$, então, tomando os pontos $(-3, 0)$ e $(1, 2)$, é possível construir o sistema a seguir:

$$\begin{cases} 2 = a \cdot (1) + b \\ 0 = a \cdot (-3) + b \end{cases}$$

Subtraindo a primeira equação da segunda, obtém-se $a = \frac{1}{2}$. Substituindo o valor de a em qualquer uma das equações, obtém-se $b = \frac{3}{2}$. Logo: $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$

c) A partir do zero da função, é possível estudar o sinal da função. Com base no gráfico do item **a** e considerando que a função é crescente, obtêm-se:
$f(x) = 0$ para $x = -3$;
$f(x) > 0$ para $x > -3$;
$f(x) < 0$ para $x < -3$.

43. a) Observa-se que o gráfico representa uma função da forma $T = at + b$, em que T é a temperatura em °C e t, o tempo em minuto.
Assim, considerando os pontos (0, −10) e (5, 30) que pertencem à função, pode-se construir o sistema a seguir:
$$\begin{cases} -10 = a \cdot 0 + b \\ 30 = a \cdot 5 + b \end{cases}$$
Da primeira equação, obtém-se $b = -10$. Substituindo o valor de b na segunda equação, obtém-se $a = 8$.
Portanto, a função é $T = 8t - 10$.
Para descobrir o tempo em que a temperatura atingiu 0 °C, basta considerar $T = 0$, assim:
$8t - 10 = 0 \Rightarrow t = 1{,}25$
Tem-se que:
$1{,}25 \text{ min} = 1 \text{ min} + 0{,}25 \text{ min} =$
$= 1 \text{ min} + 0{,}25 \cdot 60 \text{ s} =$
$= 1 \text{ min} + 15 \text{ s} = 1\text{min}15\text{s}$
Portanto, a temperatura atingiu 0 °C após 1 minuto e 15 segundos.

b) Como $t = 1{,}25$ é o zero da função, observando o gráfico, obtém-se:
A temperatura é positiva para $1{,}25 < t \leqslant 5$.
A temperatura é negativa para $0 \leqslant t < 1{,}25$.

44. a) Para expressar o peso mínimo P, que a pessoa poderá atingir após n semanas, deve-se considerar que a ela vai emagrecer o máximo por semana, isto é, 2,5 kg. Desse modo, uma função que relacione o peso com o número de semanas nesse *spa* é dada por $P = 156 - 2{,}5n$.

b) A princípio, deve-se descobrir quantas semanas são necessárias para essa pessoa chegar a 120 kg, ou seja, $P = 120$. Logo:
$156 - 2{,}5n = 120 \Rightarrow n = 14{,}4$
Como essa pessoa deve chegar a menos de 120 kg, então ela precisa ficar mais de 14,4 semanas. Como o número de semanas é um número natural, é razoável concluir que ela deverá permanecer no mínimo 15 semanas para atingir seu objetivo.

45. a) $5x - 2(x + 2) \geqslant 1 - (3 - 4x) \Rightarrow$
$\Rightarrow 5x - 2x - 4 \geqslant 1 - 3 + 4x \Rightarrow$
$\Rightarrow x \leqslant -2$
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2\}$

b) $\frac{3(x+1)}{2} - \frac{x-1}{4} \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{6(x+1)}{\cancel{4}} - \frac{(x-1)}{\cancel{4}} \leqslant \frac{2}{\cancel{4}} \Rightarrow$
$\Rightarrow 6x + 6 - x + 1 \leqslant 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 5x \leqslant -5 \Rightarrow x \leqslant -1$
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1\}$

46. Resolvendo a inequação, temos:
$7x - 8 < 4x + 1 \Rightarrow 7x - 4x < 1 + 8 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3x < 9 \Rightarrow x < 3$
Como x é um número natural, os possíveis valores são 0, 1 e 2.
$S = \{0, 1, 2\}$

47. a) A área de um retângulo é calculada pelo produto entre dois de seus lados adjacentes. Para que a área do retângulo seja maior do que 50 cm², deve-se calcular:
Área do retângulo: $A = 10x \text{ cm}^2$
$A > 50 \text{ cm}^2 \Rightarrow 10x > 50 \Rightarrow x > 5$

b) O perímetro de um polígono é calculado pela soma de todos seus lados. Portanto, o perímetro do retângulo pode ser calculado por $P = 20 + 2x$. Como o perímetro deve ser igual ou maior do que 32 cm, então:
$P \geqslant 32 \Rightarrow 20 + 2x \geqslant 32 \Rightarrow x \geqslant 6$

48. a) Segundo o enunciado, obtêm-se as informações a seguir:
Área do trapézio:
$A_1 = \frac{(20 + x) \cdot 12}{2} \Rightarrow A_1 = 6x + 120$
Área do retângulo: $A_2 = 12x$
Considerando que $A_1 > 2 \cdot A_2$, tem-se:
$A_1 > 2A_2 \Rightarrow 6x + 120 > 2 \cdot 12x \Rightarrow$
$\Rightarrow 6x + 120 > 24x \Rightarrow x < 6{,}66...$
Portanto, o maior valor inteiro de x é 6.

b) Ao montar a equação, conforme o item anterior, porém em vez de colocar 12 (altura do triângulo e trapézio) substituir por MR. Logo:
$\frac{(20 + x) \cdot \cancel{MR}}{2} > 2\cancel{MR} \cdot x \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{(20 + x)}{2} > 2x \Rightarrow x < \frac{20}{3}$
Como $\frac{20}{3} = 6{,}66...$, então obteve-se a mesma resposta do item anterior, portanto não é necessária a medida MR para resolver a atividade.

49. a) Para obter a função que representa o lucro da empresa A, deve-se considerar os pontos que estão no quadro e montar o sistema a seguir:
L_A: (50, 0) e (0, −500)
$$\begin{cases} 0 = 50a + b \\ -500 = 0a + b \end{cases}$$
Da segunda equação, obtém-se $b = -500$, e substituindo esse valor na primeira equação, obtém-se $a = 10$.
Logo: $L_A(x) = 10x - 500$, para $x \geqslant 0$.

b) Para descobrir os valores para que o lucro de B seja maior do que A, deve-se, primeiro, encontrar a lei de formação de L_B. Assim, utilizando os pontos fornecidos pelo enunciado (60, 0) e (0, −1 000), pode-se construir o seguinte sistema:
$$\begin{cases} 0 = 60a + b \\ -1\,000 = 0a + b \end{cases}$$
Da segunda equação, obtém-se $b = -1\,000$, e substituindo esse valor na primeira equação, obtém-se $a = \frac{50}{3}$. Logo:
$L_B(x) = \frac{50}{3}x - 1000$, para $x \geqslant 0$.
Como $L_B(x) > L_A(x)$, então:
$\frac{50}{3}x - 1000 > 10x - 500$
$50x - 3000 > 30x - 1500$
$x > 75$
Portanto, para $x > 75$, o L_B é superior a L_A.

Atividades complementares

1. Seja $p(t)$ o valor monetário do equipamento no tempo t dado em anos. Devido ao decrescimento linear, temos $p(t) = a \cdot t + b$, com $a \neq 0$. Considerando o tempo atual como $t = 0$ e três anos atrás como $t = -3$, temos os pontos (−3, 180 000) e (0, 135 000). Logo,
$$\begin{cases} 180\,000 = -3 \cdot a + b \\ 135\,000 = 0 \cdot a + b \end{cases}$$
Da segunda equação, obtém-se $b = 135\,000$ e, substituindo esse valor na primeira equação, obtém-se:
$-3a = 180\,000 - 135\,000 \Rightarrow a = -15\,000$
Então, a lei de formação da função p é $p(t) = -15\,000 \cdot t + 135\,000$. Assim, calculando o valor monetário da máquina daqui a dois anos, basta substituirmos $t = 2$ em $p(t)$: $p(2) = -15\,000 \cdot 2 + 135\,000 = 105\,000$
Resposta: alternativa **a**.

2. De acordo com o texto, a substância A já estava presente no organismo. O medicamento aumentou a quantidade da substância por um período de tempo e depois voltou ao normal.
Sendo assim, deve-se desconsiderar as alternativas **a** e **b**, pois, em ambos os casos, inicialmente já havia uma quantidade da substância A no corpo; porém, depois de um tempo, a quantidade não voltou ao normal, ficou acima da quantidade inicial.
Não se deve considerar a alternativa **c**, pois o gráfico mostra que inicialmente a quantidade da substância A era nula, o que contraria o enunciado.
Também se deve desconsiderar a alternativa **e**, pois o gráfico mostra que, depois de um tempo, a quantidade da substância A diminuiu, e o texto afirma que aumentou.
Resposta: alternativa **d**.

3. Analisando as sentenças, segundo as informações obtidas no gráfico, conclui-se que:

a) Falsa. No intervalo entre $t = 10$ e $t = 20$, as temperaturas são decrescentes.

b) Falsa, pois, no intervalo entre $t = 5$ e $t = 10$, as temperaturas são crescentes.

c) Verdadeira. A partir de $t = 20$, quanto maior o tempo, maior é a temperatura.

d) Falsa, pois para $t = 20$ a temperatura é inferior a 50.

e) Falsa. Identifica-se no gráfico que um determinado valor de temperatura pode ser obtido em, no máximo, 3 instantes diferentes.

Resposta: alternativa **c**.

4. A reta r é o gráfico de uma função afim f dada por $f(x) = a \cdot x + b$, com a e b sendo números reais e $a \neq 0$.

A reta r corta o eixo das ordenadas em $(0, -4)$, o que implica que $b = -4$.

Para descobrir o valor de a, utilizamos o ponto $(4,6)$:

$f(4) = 6 \Rightarrow 4a - 4 = 6 \Rightarrow a = \frac{5}{2}$

Assim, $f(x) = \frac{5}{2}x - 4$. Agora, note que a abscissa do ponto P é o zero da função afim f e, portanto, P é da forma $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$. Assim, o valor da abscissa do ponto P é:

$-\frac{b}{a} = -\frac{(-4)}{\frac{5}{2}} = \frac{8}{5}$

Resposta: alternativa **d**.

5. Como o salário fixo é de R\$ 300,00, deve-se calcular a comissão de cada mês.

No 1º mês foram vendidos 500 m de tecido com 1,40 m de largura. A área do tecido foi $A = 500 \cdot 1{,}4 = 700$.

Então, o vendedor receberia de comissão: $700 \cdot 0{,}5 = 350$, portanto R\$ 350,00. E seu salário final seria: $300 + 350 = 650$, portanto R\$ 650,00.

2º mês: Como, no segundo mês, supõe-se vender o dobro, a comissão também será dobrada, ou seja, R\$ 700,00. Então, o salário seria de $300 + 700 = 1000$, portanto R\$ 1.000,00.

Resposta: alternativa **c**.

6. Observando o gráfico, pode-se notar que, ao aumentar 10 metros de fio (de 15 para 25), o valor aumentou R\$ 20,00 (de R\$ 80,00 para R\$ 100,00), ou seja, o Sr. Luiz cobra R\$ 2,00 por metro instalado de fio.

Assim, como ele cobrou R\$ 80,00 para instalar 15 metros de fio, pode-se concluir que o valor fixo cobrado é de: $80 - 2 \cdot 15 = 50$, portanto R\$ 50,00.

Assim, a lei da função que fornece o valor cobrado pelo Sr. Luiz é: $f_L(x) = 2x + 50$.

Portanto, pode-se descartar as alternativas **a** e **b**.

Já o Sr. José cobra R\$ 4,50 por metro e não cobra um valor fixo, ou seja, a lei de formação da função é: $f_J(x) = 4{,}5x$.

Se alguém contratar um serviço que utilize 30 metros de fio, o orçamento do Sr. José (R\$ 135,00) será maior do que o orçamento do Sr. Luiz (R\$ 110,00). Portanto, a alternativa **c** está incorreta.

Igualando as duas funções, para saber a metragem em que o valor a ser cobrado será equivalente, tem-se:

$2x + 50 = 4{,}5x \Rightarrow 2{,}5x = 50 \Rightarrow x = 20$.

Portanto, se a instalação for de 20 m, não haverá diferença no valor cobrado pelos dois.

Resposta: alternativa **d**.

7. Para a função ser crescente, deve-se ter $3 - 2a > 0$. Logo:

$3 - 2a > 0 \Rightarrow -2a > -3 \Rightarrow 2a < 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow a < \frac{3}{2}$

Resposta: alternativa **b**.

8. A semirreta representa o gráfico de uma função f dada por $f(x) = a \cdot x + b$, com a e b números reais e $a \neq 0$. De acordo com o gráfico, a taxa fixa é R\$ 17,00, já que o gráfico passa pelo ponto $(0, 17)$. Ou seja, $f(x) = a \cdot x + 17$.

Para encontrarmos o valor de a, vamos utilizar o ponto $(7; 42{,}20)$:

$f(7) = 42{,}20 \Rightarrow 7a + 17 = 42{,}20 \Rightarrow a = 3{,}6$

Assim, $f(x) = 3{,}6 \cdot x + 17$. Agora, sabendo que o consumo do mês de dezembro foi o dobro do consumo do mês de novembro, então devemos calcular o valor de f em $x = 2 \cdot 7 = 14$. Ao fazer isso, obtemos $f(14) = 3{,}6 \cdot 14 + 17 = 67{,}4$.

Portanto, o valor da fatura no mês de dezembro dessa residência foi R\$ 67,40.

Resposta: alternativa **a**.

9. Para os reservatórios estarem com o mesmo volume, deve-se ter a condição $V_A(t) = V_B(t)$.

Logo:

$V_A(t) = V_B(t) \Rightarrow 200 + 3t = 5000 - 3t \Rightarrow$

$\Rightarrow 6t = 4800 \Rightarrow t = 800$

Portanto, os reservatórios terão o mesmo volume em 800 minutos.

Resposta: alternativa **d**.

10. De acordo com as informações sobre as funções $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = -x + 6$, temos:

a) Falsa. As funções f e g não possuem pontos de máximo ou mínimos, já que ambas são não constantes e possuem domínio igual a $D(f) = D(g) = \mathbb{R}$.

b) Falsa. A função f é crescente, pois seu coeficiente angular é igual a $2 > 0$. Já a função g é decrescente, pois seu coeficiente angular é igual a $-1 < 0$.

c) Falsa. As funções f e g têm o mesmo domínio: $D(f) = D(g) = \mathbb{R}$.

d) Verdadeira. Calculando f e g no ponto $x = 1$, temos:

$$\begin{cases} f(1) = 2 \cdot 1 + 3 = 5, \\ g(1) = -1 + 6 = 5 \end{cases}$$

Portanto, o ponto $(1, 5)$ é comum as funções f e g.

e) Falsa. De acordo com o item **d**, as funções f e g se intersectam no ponto $(1, 5)$.

Resposta: alternativa **d**.

Capítulo 4 • Função quadrática

Atividades

1. Considerando a função $f(x) = x^2 - 5x + 4$ e calculando o valor numérico para cada item, tem-se:

a) $f(0) = 0^2 - 5 \cdot 0 + 4 = 4$

b) $f(-4) = (-4)^2 - 5 \cdot (-4) + 4 = 40$

c) $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 4 = \frac{7}{4}$

d) $f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 - 5 \cdot (\sqrt{2}) + 4 =$
$= 6 - 5\sqrt{2}$

2. Como a altura h está em função do tempo t, a altura do objeto após 3 segundos do lançamento é:

$h(t) = 30t - 5t^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow h(3) = 30 \cdot 3 - 5(3)^2 = 45$

O objeto, depois de 3 segundos do lançamento, estará a 45 metros do solo.

3. Considerando a fórmula proposta no enunciado, pode-se substituir n por 50, assim:

$S(50) = S(5) = \frac{50^2}{2} + \frac{50}{2}$

$S(50) = \frac{2500}{2} + 25$

$S(50) = 1275$

4. **a)** Pelo enunciado, a produção é vendida por $(500 - x)$ reais a unidade, e cada unidade tem um custo de R\$ 100,00. Também se deve considerar que há uma despesa fixa mensal de R\$ 10.000,00.

Assim, pode-se concluir que a receita $R(x)$, em função das unidades vendidas, pode ser calculada por:

$R(x) = (500 - x)x \Rightarrow$

$\Rightarrow R(x) = -x^2 + 500x$

E a função custo C é:

$C(x) = 100x + 10000$

Como o lucro é representado pela diferença entre receita e custo, tem-se:

$L(x) = R(x) - C(x) \Rightarrow L(x) =$

$= -x^2 + 500x - (100x + 10000) \Rightarrow$

$\Rightarrow L(x) = -x^2 + 400x - 10000$

b) O lucro para 100 produtos pode ser calculado considerando $x = 100$, ou seja:

$L(100) = -(100)^2 +$

$+ 400 \cdot (100) - 10000 = 20000$

Portanto, o lucro será de R\$ 20.000,00.

5. Como a função f é quadrática, então pode-se escrevê-la na forma $f(x) = ax^2 + bx + c$; considerando os dados do problema, $f(0) = 6$, $f(1) = 2$ e $f(-2) = 20$, tem-se:

$6 = a \cdot (0)^2 + b \cdot (0) + c \Rightarrow c = 6$

$2 = a \cdot (1)^2 + b \cdot (1) + c \Rightarrow$

$\Rightarrow a + b = -4$

$20 = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c \Rightarrow$

$\Rightarrow 4a - 2b = 14$

Portanto, obtém-se $c = 6$ e resolve-se o sistema a seguir envolvendo os coeficientes a e b.

$$\begin{cases} a + b = -4 \\ 4a - 2b = 14 \quad : (2) \end{cases}$$

Simplificando a segunda equação por 2 e, em seguida, adicionando ambas as equações, obtém-se $a = 1$. Substituindo o valor de a em qualquer uma das equações, obtém-se $b = -5$.

Logo, $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

Calculando $f\left(\frac{1}{2}\right)$:

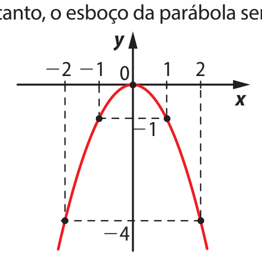
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 6 = \frac{15}{4}$$

6. Para traçar uma parábola, deve-se atribuir alguns valores para x e calcular o respectivo valor numérico, ou seja, o valor de y. Esse par (x, y) será um ponto da parábola.

a) $y = -x^2$

x	y
-2	-4
-1	-1
0	0
1	-1
2	-4

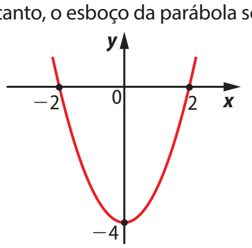
Portanto, o esboço da parábola será:



b) $y = x^2 - 4$

x	y
-2	0
0	-4
2	0

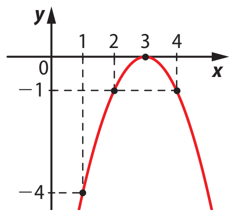
Portanto, o esboço da parábola será:



c) $y = -x^2 + 6x - 9$

x	y
1	-4
2	-1
3	0
4	-1

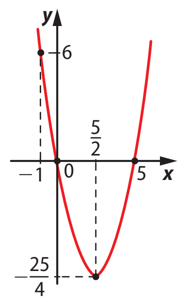
Portanto, o esboço da parábola será:



d) $y = x^2 - 5x$

x	y
-1	6
0	0
$\frac{5}{2}$	$-\frac{25}{4}$
5	0

Portanto, o esboço da parábola será:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

7. Como o ponto (1, 6) deve pertencer à parábola, então pode-se concluir que, quando $x = 1$, obrigatoriamente $y = 6$. Considerando essa informação, tem-se:

$y = 3x^2 - x + m \Rightarrow$

$\Rightarrow 6 = 3(1)^2 - 1 + m \Rightarrow$

$\Rightarrow 6 = 3 - 1 + m \Rightarrow m = 4$

8. Observando que os pontos A e D tem a mesma ordenada, então D é da forma $D(x, 5)$. Para determinar a abscissa de D, vamos avaliar os pontos $A(0, 5)$ e $C(5, 0)$ na função $f(x) = x^2 - bx + c$:

$$\begin{cases} f(0) = 5 \Rightarrow 0^2 - b \cdot 0 + c = 5 \Rightarrow c = 5 \\ f(5) = 0 \Rightarrow 5^2 - b \cdot 5 + 5 = 0 \Rightarrow b = 6 \end{cases}$$

Assim, $f(x) = x^2 - 6x + 5$. Agora, avaliando f no ponto $D(x, 5)$ e notando que $x > 0$, obtemos:

$f(x) = x^2 - 6x + 5 = 5 \Rightarrow x^2 - 6x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \cdot (x - 6) = 0 \Rightarrow x = 6$

Logo, as coordenadas do ponto D são (6, 5).

Resposta: alternativa **d**.

9. Para encontrar as coordenadas dos vértices utilizam-se as fórmulas $x_v = \frac{-b}{2a}$ e $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$. Já para saber se a função possui zeros, primeiro calcula-se o valor do Δ para a equação $y = 0$ e, se for positivo, encontram-se as raízes. Ver esse processo em cada item a seguir.

a) $y = x^2 - 6x + 5$

Considerando $x^2 - 6x + 5 = 0$, temos:

$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (5) = 16$

Assim:

$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot (1)} = \frac{6 \pm 4}{2}$

Logo, os zeros da função são $x' = 1$ e $x'' = 5$.

b) $y = 3x^2 - 4x$

Considerando $3x^2 - 4x = 0$, temos:

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 0 = 16$

Assim:

$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm 4}{6}$

Logo, os zeros da função são $x' = 0$ e $x'' = \frac{4}{3}$.

c) $y = -x^2 + x - 3$

Considerando $-x^2 + x - 3 = 0$, temos:

$\Delta = (1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3) = -11$

A função não tem zeros.

d) $y = x^2 - 9$

Considerando $x^2 - 9 = 0$, temos:

$\Delta = (0)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9) = 36$

Assim:

$x = \frac{-(0) \pm \sqrt{36}}{2 \cdot (1)} = \frac{\pm 6}{2}$

Logo, os zeros da função são $x' = -3$ e $x'' = 3$.

e) $y = -6x^2$

Considerando $-6x^2 = 0$, temos:

$\Delta = (0)^2 - 4 \cdot (-6) \cdot 0 = 0$

Assim:

$x = \frac{-(0) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot (-6)} = \frac{0}{-12}$

Logo, o zero da função é $x' = x'' = 0$.

f) $y = 4x^2 - x + \left(\frac{3}{5}\right)$

Considerando $4x^2 - x + \frac{3}{5} = 0$, temos:

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (4) \cdot \left(\frac{3}{5}\right) = -\frac{43}{5}$

Sendo assim, a função não tem zeros.

10. Como 2 é um zero da função, pode-se escrever:

$k(2)^2 - 2(2) + 3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4k - 1 = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{4}$

11. O produto das raízes pode ser calculado por $\frac{c}{a}$. Como o enunciado forneceu que as raízes são -2 e 5, tem-se:

$-2 \cdot 5 = \frac{10}{a} \Rightarrow a = -1$

Já a soma das raízes pode ser calculada por $-\frac{b}{a}$. Como $a = -1$, tem-se:

$-2 + 5 = -\frac{b}{-1} \Rightarrow b = 3$

Portanto, a função é $f(x) = -x^2 + 3x + 10$.

Como já se sabe quais são os zeros da função, para se traçar um esboço da função, precisam-se calcular as coordenadas do vértice.

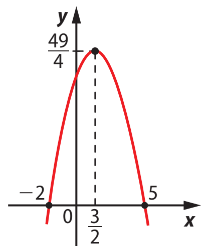
Calculando as coordenadas do vértice:

$\Delta = (3)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (10) = 49$

$x_v = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_v = \frac{-(3)}{2(-1)} = \frac{3}{2}$

$y_v = \frac{-\Delta}{4a} \Rightarrow y_v = \frac{-(49)}{4(-1)} = \frac{49}{4}$

Portanto, $V\left(\frac{3}{2}, \frac{49}{4}\right)$.



12. a) Para a função ter um zero apenas, necessariamente é preciso que:

$\Delta = 0 \Rightarrow (2m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4m^2 - 64 = 0 \Rightarrow m^2 = 16 \Rightarrow m = \pm 4$

b) Como o gráfico deve passar pelo ponto $(2, -4)$, então $f(2) = -4$. Logo:
$-4 = (2)^2 + 2(m)(2) + 16 \Rightarrow m = -6$

13. a) Para a função $f(x) = x^2 - 2x + k$ ter dois zeros, é necessário que $\Delta > 0$. Portanto:

$\Delta > 0 \Rightarrow b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot k > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow -4k > -4 \Rightarrow k < 1$

b) Para a função ter apenas um zero, é necessário que $\Delta = 0$. Portanto:
$\Delta = 0 \Rightarrow (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot k = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow -4k = -4 \Rightarrow k = 1$

c) Para a função não ter zeros, é necessário que $\Delta < 0$. Portanto:
$\Delta < 0 \Rightarrow (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot k < 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow -4k < -4 \Rightarrow k > 1$

14. Como o volume do reservatório é de 72 m³ e a função que representa a drenagem em relação ao tempo é $V(t) = 24t - 2t^2$, considera-se que estará vazio quanto $V(t) = 72$. Portanto:
$24t - 2t^2 = 72 \Rightarrow -2t^2 + 24t - 72 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow t^2 - 12t + 36 = 0$

Resolvendo a equação:
$\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (36) = 0$

Assim:

$$t = \frac{-(-12) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot (1)} = \frac{12}{2} = 6$$

Ou seja, foram necessárias 6 horas para que o reservatório se esvaziasse completamente. Como o processo de drenagem iniciou-se às 10 horas, o reservatório ficou completamente vazio às 16 horas, pois $10 + 6 = 16$.

Resposta: alternativa **b**.

15. a) A função f é a que tem como gráfico uma parábola. Portanto, os pontos de intersecção com o eixo das abscissas são da forma $(x, 0)$, em que x é raiz de f. Logo:

$f(x) = (x + 1)(x - 3) \Rightarrow$
$\Rightarrow (x + 1)(x - 3) = 0$

Como essa é uma equação produto, tem-se que:
$(x + 1) = 0$ ou $(x - 3) = 0$
Logo, $x = -1$ ou $x = 3$.
Portanto, os pontos de intersecção são $(-1, 0)$ e $(3, 0)$.

b) Pode-se identificar o ponto de intersecção com o eixo das ordenadas considerando $x = 0$. Logo:
$f(0) = (0 + 1)(0 - 3) = 1 \cdot (-3) = -3$
O ponto de intersecção com o eixo das ordenadas é $(0, -3)$.

c) O ponto de intersecção da reta com o eixo das ordenadas ocorre quando $x = 0$. Logo:

$$g(0) = \frac{0}{2} + 3 = 3$$

O ponto de intersecção da reta com o eixo das ordenadas é $(0, 3)$.

d) Para calcular o ponto de intersecção entre as duas funções, deve-se considerar $f(x) = g(x)$. Logo:

$x^2 - 2x - 3 = \frac{x}{2} + 3$
$2x^2 - 5x - 12 = 0$

Resolvendo a equação:
$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot (2) \cdot (-12) = 121$

Assim: $x = \dfrac{-(-5) \pm \sqrt{121}}{2 \cdot (2)} = \dfrac{5 \pm 11}{4}$

Portanto, $x' = 4$ e $x'' = -\frac{3}{2}$.

Como se deseja apenas a intersecção do segundo quadrante, deve-se desconsiderar o valor positivo de x. Escolhendo a função g, o respectivo valor numérico para $x = -\frac{3}{2}$ é:

$g\left(-\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} + 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow g\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4}$

Portanto, o ponto de intersecção entre as funções f e g é $\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$.

16. a) Segundo o enunciado da atividade, pode-se considerar que $v = 40$, portanto:

$d(v) = \frac{1}{120}(v^2 + 8v) \Rightarrow$
$\Rightarrow d(40) = \frac{1}{120}(40^2 + 8 \cdot 40) = 16$

Portanto, se o carro estiver a 40 km/h, a distância de frenagem será de 16 m.

b) Como a distância de frenagem é 53,2 m, então pode-se concluir que $d(v) = 53{,}2$. Logo:

$53{,}2 = \frac{1}{120}(v^2 + 8v) \Rightarrow$
$\Rightarrow v^2 + 8v - 6384 = 0$

Resolvendo a equação:
$\Delta = (8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6384) = 25\,600$

Assim:

$$v = \frac{-(8) \pm \sqrt{25\,600}}{2 \cdot (1)} = \frac{-8 \pm 160}{2}$$

Logo, $v' = -84$ e $v'' = 76$.
Nesse caso, deve-se desconsiderar a resposta negativa.
Portanto, a velocidade é 76 km/h.

17. Pode-se admitir, nesse caso, que os zeros da função são os momentos em que a bola está no chão, ou seja, no primeiro momento, quando a bola é chutada, portanto, quando $x = 0$. O segundo momento ocorre após a cobrança da falta, exatamente quando a bola toca no chão novamente. Portanto, a distância entre o ponto que a bola sai do solo na primeira vez e quando ela repousa no solo novamente se dá pela diferença entre os zeros da função.

Como a trajetória é uma parábola, a maior altura que a bola vai alcançar se dá no y_V.

a) Calculando os zeros da função:

$h(x) = -\frac{x^2}{60} + 0{,}5x = 0$, tem-se:

$\Delta = (0{,}5)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{60}\right) \cdot (0) = 0{,}25$

Assim:

$$x = \frac{-(0{,}5) \pm \sqrt{0{,}25}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{60}\right)} = \frac{-0{,}5 \pm 0{,}5}{-\frac{1}{30}}$$

Logo, os zeros da função são $x' = 0$ e $x'' = 30$.

Portanto, a distância em que a bola sai do solo e que chega novamente ao solo é dada por $30 - 0 = 30$, ou seja, 30 metros.

b) Como a altura máxima equivale a y_V, tem-se:

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} \Rightarrow y_v = \frac{-(0{,}25)}{4\left(-\frac{1}{60}\right)} = 3{,}75$$

A altura máxima que a bola alcança é 3,75 metros.

18. Para cada item, deve-se encontrar, quando houver, o(s) zero(s) da função fazendo $y = 0$, em seguida as coordenadas do vértice e, também, do ponto de intersecção da parábola com o eixo y. Utilizando esses pontos, pode-se esboçar a parábola.

a) $y = x^2 - 5x + 6$

Considerando $x^2 - 5x + 6 = 0$, temos:
$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (6) = 1$

Assim: $x = \dfrac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot (1)} = \dfrac{5 \pm 1}{2}$

Logo, os zeros da função são $x' = 2$ e $x'' = 3$.

Calculando o vértice da parábola:

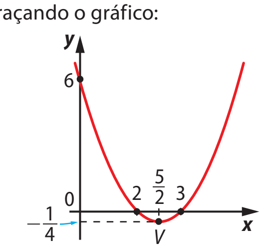
$x_v = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_v = \frac{-(-5)}{2(1)} = \frac{5}{2}$

$y_v = \frac{-\Delta}{4a} \Rightarrow y_v = \frac{-(1)}{4(1)} = -\frac{1}{4}$

Portanto, $V\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$.

A parábola intersecta o eixo y no ponto de coordenada $(0, c)$, ou seja, $(0, 6)$.

Traçando o gráfico:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

b) $y = -x^2 + 4$

Considerando $-x^2 + 4 = 0$, temos:
$\Delta = (0)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (4) = 16$

Assim: $x = \dfrac{-(0) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot (-1)} = \dfrac{\pm 4}{-2}$

Logo, os zeros da função são $x' = -2$ e $x'' = 2$.

Calculando o vértice da parábola:

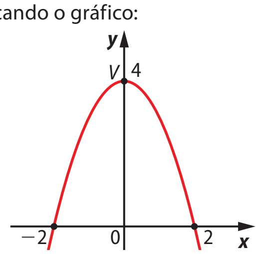
$x_v = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_v = \frac{-(0)}{2(-1)} = 0$

$y_v = \frac{-\Delta}{4a} \Rightarrow y_v = \frac{-(16)}{4(-1)} = 4$

Portanto, $V(0, 4)$.

A parábola intersecta o eixo y no ponto de coordenada $(0, c)$, ou seja, $(0, 4)$.

Traçando o gráfico:



c) $y = x^2 - 4x + 4$

Considerando $x^2 - 4x + 4 = 0$, temos: $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (4) = 0$

Assim: $x = \dfrac{-(-4) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot (1)} = \dfrac{4}{2} = 2$

Logo, o zero da função é $x = 2$.

Calculando o vértice da parábola:

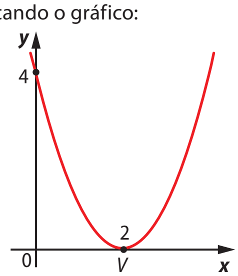
$x_v = \dfrac{-b}{2a} \Rightarrow x_v = \dfrac{-(-4)}{2(1)} = 2$

$y_v = \dfrac{-\Delta}{4a} \Rightarrow y_v = \dfrac{-(0)}{4(1)} = 0$

Portanto, $V(2, 0)$.

A parábola intersecta o eixo y no ponto de coordenada $(0, c)$, ou seja, $(0, 4)$.

Traçando o gráfico:



d) $y = x^2 + 2x + 5$

Considerando $x^2 + 2x + 5 = 0$, temos:
$\Delta = (2)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (5) = -16$

Sendo assim, a função não possui zeros.

Calculando o vértice da parábola:

$x_v = \dfrac{-b}{2a} \Rightarrow x_v = \dfrac{-(2)}{2(1)} = -1$

$y_v = \dfrac{-\Delta}{4a} \Rightarrow y_v = \dfrac{-(-16)}{4(1)} = 4$

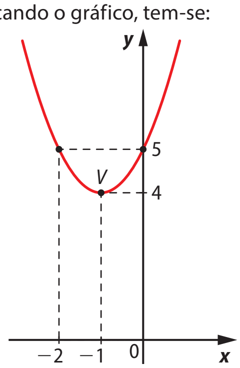
Portanto, $V(-1, 4)$.

Para $x = -2$, temos:
$y = (-2)^2 + 2(-2) + 5 = 5$

Para $x = 0$, temos:
$y = 0^2 + 2 \cdot 0 + 5 = 5$

Portanto, o gráfico passa pelo ponto $(-2, 5)$ e cruza o eixo y no ponto $(0, 5)$.

Traçando o gráfico, tem-se:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

19. Para determinar a imagem de uma função quadrática, é necessário calcular a ordenada do vértice. Assim, em cada situação, tem-se:

a) $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot (3) \cdot (-1) = 16$

$y_V = \dfrac{-16}{4 \cdot (3)} = -\dfrac{4}{3}$

Como a concavidade da parábola é voltada para cima, pois $a > 0$, tem-se $\text{Im}(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -\dfrac{4}{3}\right\}$.

b) $g(x) = -2x^2 + 1$

$\Delta = (0)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (1) = 8$

$y_V = \dfrac{-8}{4 \cdot (-2)} = 1$

Como a concavidade da parábola é voltada para baixo, pois $a < 0$, tem-se $\text{Im}(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 1\}$.

20. Segundo o enunciado, a área do cercado é retangular, por isso seus lados opostos são congruentes. Considerando que a medida do lado adjacente à parede é x, pode-se afirmar que o lado paralelo à parede mede $40 - 2x$, pois a cerca mede 40 m e foi completamente utilizada.

Como a área do retângulo, $A(x)$, é o produto entre dois lados adjacentes, então:
$A(x) = x(40 - 2x) \Rightarrow A(x) = 40x - 2x^2$

A área máxima é representada pela ordenada do vértice, ou seja, y_V.

Assim, $\Delta = (40)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (0) = 1600$

$y_V = \dfrac{-1600}{4 \cdot (-2)} = 200$

A área máxima será 200 m².

21. Segundo o enunciado, sabe-se que:
$A_{ABCD} = 30 \cdot 50 = 1500$ cm².

Considerando a área dos triângulos A_{AMN}, A_{CPQ}, A_{MDQ} e A_{NBP}, tem-se:

$A_{AMN} = A_{CPQ} = \dfrac{x^2}{2}$

$A_{MDQ} = A_{NBP} =$

$= \dfrac{(30 - x)(50 - x)}{2} = \dfrac{1500 - 80x + x^2}{2}$

Segundo a imagem no enunciado, pode-se afirmar que:

$A_{MNPQ} = A_{ABCD} - 2 \cdot (A_{AMN} + A_{MDQ})$

Assim:

$A_{MNPQ} =$

$= 1500 - 2\left(\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1\,500 - 80x + x^2}{2}\right) =$

$= 1500 - x^2 - 1500 + 80x - x^2 =$

$= -2x^2 + 80x$

Portanto, o valor da área A_{MNPQ} depende do valor de x por uma função da forma: $A(x) = -2x^2 + 80x$.

Como o coeficiente de x^2 é negativo, a parábola terá a concavidade voltada para baixo e a ordenada do vértice será o valor máximo. Esse valor é obtido quando a abscissa desse ponto for:

$x_V = -\dfrac{80}{2 \cdot (-2)} = -\dfrac{80}{-4} = 20$

Portanto, o quadrilátero terá área máxima quando $x = 20$ cm.

22. A variação de temperatura de uma peça, em relação ao tempo, é descrita pela função $f(t) = -t^2 + 4t + 2$, com $0 < t < 5$.

Como a parábola tem concavidade para baixo, a abscissa x_v representa o momento em que a função atinge o valor máximo, então:

$x_v = \dfrac{-4}{2(-1)} = 2;$

Portanto, a temperatura atingirá o valor máximo quando $t = 2$.

23. Considerando como x o valor da redução, em reais, tem-se:

Preço do combo: $10 - x$

Quantidade de combos vendida: $200 + 100x$

Para cada real de desconto, são vendidos 100 combos a mais.

Portanto, a função que representa a arrecadação, ou receita, é:

$R(x) = (10 - x)(200 + 100x) \Rightarrow$
$\Rightarrow R(x) = -100x^2 + 800x + 2\,000$

Assim, a máxima arrecadação é representada pelo y_V.

Sendo assim:

$\Delta = (800)^2 - 4 \cdot (-100) \cdot (2\,000) =$
$= 1\,440\,000$

$y_V = \dfrac{-1\,440\,000}{4 \cdot (-100)} = 3\,600$

A arrecadação máxima será de R$ 3.600,00.

Resposta: alternativa **c**.

24. a) Do enunciado, obtêm-se as informações:

$R(x) = L(x) + C(x)$, $R(x) = x^2 + 7500x + 3000$ e $C(x) = 2x^2 + 2500x + 3000$

Portanto:

$R(x) = L(x) + C(x) \Rightarrow L(x) = R(x) - C(x)$

$L(x) = x^2 + 7\,500x + 3\,000 - (2x^2 + 2\,500x + 3\,000)$

$L(x) = -x^2 + 5\,000x$

Resolvendo a equação $L = 0$, obtém-se que os zeros da função são 0 e 5 000.

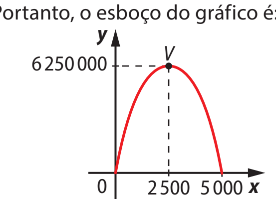
Com relação ao vértice, tem-se:

$x_v = \dfrac{-(5\,000)}{2(-1)} = 2\,500$

$\Delta = (5000)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (0) = 25\,000\,000$

$y_v = \dfrac{-(25\,000\,000)}{4 \cdot (-1)} = 6\,250\,000$

Portanto, o esboço do gráfico é:



b) Conforme o gráfico, o lucro máximo é obtido para 2 500 unidades produzidas.

25. Sejam y_1 e y_2 as ordenadas dos pontos P e V, isto é, $P(4, y_1)$ e $V(2, y_2)$. Assim,

$$\begin{cases} y_1 = f(4) = (4)^2 - 4 \cdot 4 + 3 = 3; \\ y_2 = f(2) = (2)^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1 \end{cases}$$

Agora, para calcular a reta que passa por $P(4, 3)$ e $V(2, -1)$, devemos calcular o coeficiente angular da reta:

$m = \dfrac{3 - (-1)}{4 - 2} = 2$

Logo, a reta pode ser expressa na forma $g(x) = 2x + b$, em que b é um número real. Lembrando que $P(4, 3)$ pertence a reta, temos:

$3 = g(4) = 2 \cdot 4 + b \Rightarrow b = -5$

Então, a reta que passa pelos pontos P e V intersecta o eixo y no ponto de ordenada igual a -5.

Resposta: alternativa **e**.

26. a) A função $f(x) = x^2 - 3x - 10$, tem concavidade para cima, pois $a = 1$, ou seja, $a > 0$.

Considerando $x^2 - 3x - 10 = 0$, temos:

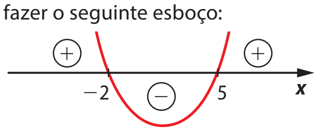
$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-10) = 49$

Assim:

$x = \dfrac{-(-3) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot (1)} = \dfrac{3 \pm 7}{2}$

Portanto, $x' = -2$ e $x'' = 5$.

Com base nesses dados, é possível fazer o seguinte esboço:



Portanto:

$f(x) = 0$ para $x = -2$ ou $x = 5$

$f(x) > 0$ para $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 5\}$

$f(x) < 0$ para $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 5\}$

b) A função $f(x) = -x^2 + 2x$, tem concavidade para baixo, pois $a = -1$, ou seja, $a < 0$.

Considerando $-x^2 + 2x = 0$, temos:

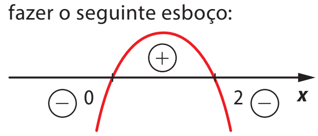
$\Delta = (2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (0) = 4$

Assim:

$x = \dfrac{-(2) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot (-1)} = \dfrac{-2 \pm 2}{-2}$

Portanto, $x' = 0$ e $x'' = 2$.

Com base nesses dados, é possível fazer o seguinte esboço:



Portanto:

$f(x) = 0$ para $x = 0$ ou $x = 2$

$f(x) > 0$ para $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\}$

$f(x) < 0$ para $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x > 2\}$

c) A função $f(x) = -4x^2 + 4x - 1$ tem concavidade para baixo, pois $a = -4$, ou seja, $a < 0$.

Considerando $-4x^2 + 4x - 1 = 0$, temos:

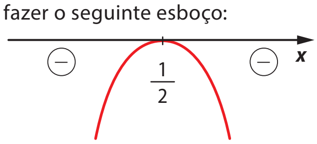
$\Delta = (4)^2 - 4 \cdot (-4) \cdot (-1) = 0$

Assim:

$x = \dfrac{-(4) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot (-4)} = \dfrac{-4}{-8} = \dfrac{1}{2}$

Portanto, $x = \dfrac{1}{2}$.

Com base nesses dados, é possível fazer o seguinte esboço:



Portanto:

$f(x) = 0$ para $x = \dfrac{1}{2}$.

$f(x) < 0$ para $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \dfrac{1}{2}\right\}$.

d) A função $f(x) = x^2 - x + 10$, tem concavidade para cima, pois $a = 1$, ou seja, $a > 0$.

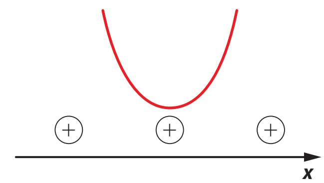
Considerando $x^2 - x + 10 = 0$, temos:

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (10) = -39$

Como $\Delta < 0$ a função não possui zeros, ou seja, ela não possui intersecções com o eixo das abscissas.

Portanto, como $a > 0$, a parábola está acima do eixo x.

Com base nesses dados, é possível fazer o seguinte esboço:



Portanto:

$f(x) > 0$ para todo x real.

27. Para a função ser positiva para todo x real, necessariamente, deve-se ter $a > 0$ e $\Delta < 0$. Como $a = 1$, deve-se satisfazer a segunda condição. Como $f(x) = x^2 - (2m + 1)x + m^2$, então:

$\Delta < 0 \Rightarrow (2m + 1)^2 - 4(1)(m^2) < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4m < -1 \Rightarrow m < -\dfrac{1}{4}$

$S = \left\{m \in \mathbb{R} \mid m < -\dfrac{1}{4}\right\}$

28. Para a função ser negativa, para todo x real, necessariamente, deve-se ter $a < 0$ e $\Delta < 0$.

Para $a < 0$, tem-se $k < 0$.

Para $\Delta < 0$, tem-se $4k^2 - 4(k)(k - 1) < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4k < 0 \Rightarrow k < 0$.

Como ambas as situações apresentam a mesma solução, então $k < 0$.

$S = \{k \in \mathbb{R} \mid k < 0\}$

29. a) Dada a equação $x^2 - 2x - 8 = 0$, tem-se:

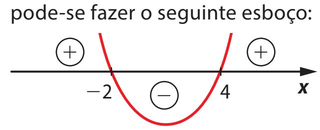
$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-8) = 36$

Logo:

$x = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{36}}{2 \cdot (1)} = \dfrac{2 \pm 6}{2}$

Portanto, $x' = -2$ e $x'' = 4$.

Como $a = 1$, logo $a > 0$, então a concavidade da parábola é voltada para cima. Com essas informações, pode-se fazer o seguinte esboço:



Como a solução considera apenas os valores negativos, então $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 4\}$.

b) Dada a equação $9x^2 - 8x - 1 = 0$, tem-se:

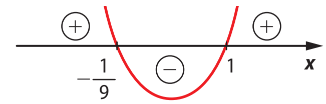
$\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot (9) \cdot (-1) = 100$

Logo:

$x = \dfrac{-(-8) \pm \sqrt{100}}{2 \cdot (9)} = \dfrac{8 \pm 10}{18}$

Portanto, $x' = -\dfrac{1}{9}$ e $x'' = 1$.

Como $a = 9$, logo $a > 0$, então a concavidade da parábola é voltada para cima. Assim, com essas informações, pode-se fazer o seguinte esboço:



Como a solução considera apenas os valores maiores ou iguais a zero, então $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\dfrac{1}{9} \text{ ou } x \geqslant 1\right\}$.

c) Dada a equação $-3x^2 + 2x - 1 = 0$, tem-se:

$\Delta = (2)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-1) = -8$

Assim, a equação não possui solução real.

Como $a = -3$, logo $a < 0$, então a concavidade da parábola é voltada para baixo. Com essas informações, pode-se fazer o seguinte esboço:

Como a solução considera apenas os valores maiores do que zero, então $S = \varnothing$.

d) Dada a equação $-x^2 + 4x - 4 = 0$, tem-se:

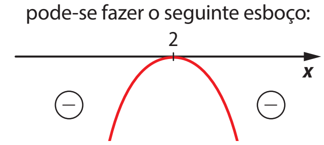
$\Delta = (4)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-4) = 0$

Logo:

$x = \dfrac{-(4) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot (-1)} = \dfrac{-4}{-2} = 2$

Portanto, $x = 2$.

Como $a = -1$, logo $a < 0$, então a concavidade da parábola é voltada para baixo. Com essas informações, pode-se fazer o seguinte esboço:



Como a solução considera apenas os valores menores do que zero, então $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$.

30. Aplicando a propriedade distributiva em ambos os lados da inequação $(2x - 5)(x - 4) - 7 \geqslant (x - 2)(x - 3)$ e associando os termos semelhantes, chega-se à inequação $x^2 - 8x + 7 \geqslant 0$.

Considerando $x^2 - 8x + 7 = 0$, temos:

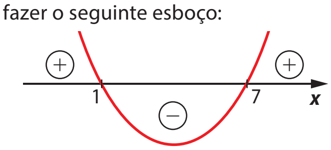
$\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (7) = 36$

Logo:

$x = \dfrac{-(-8) \pm \sqrt{36}}{2 \cdot (1)} = \dfrac{8 \pm 6}{2}$

Portanto, $x' = 1$ e $x'' = 7$.

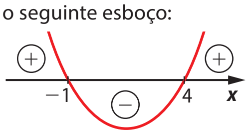
Como $a = 1$, logo $a > 0$, então a concavidade da parábola é voltada para cima. Com essas informações, pode-se fazer o seguinte esboço:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

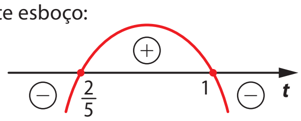
Portanto, a solução é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 1 \text{ ou } x \geqslant 7\}$.

31. Como $f(x) = x^2 - 3x + 8$, então, $f(1) =$
$= 1^2 - 3(1) + 8 = 6$.
Como se deve encontrar o conjunto solução para $f(x) \geqslant 2f(1)$, logo:
$x^2 - 3x + 8 \geqslant 2 \cdot 6 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 \geqslant 0$
Considerando $x^2 - 3x - 4 = 0$, temos:
$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-4) = 25$
Assim:
$x = \dfrac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot (1)} = \dfrac{3 \pm 5}{2}$
Portanto, $x' = -1$ e $x'' = 4$.
Como $a = 1$, logo $a > 0$, então a concavidade da parábola é voltada para cima. Com essas informações, pode-se fazer o seguinte esboço:



Portanto, o conjunto solução será $S =$
$= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant 4\}$

32. a) Calcular o conjunto solução para $h(t) \geqslant 8$ equivale a:
$-5t^2 + 7t + 6 \geqslant 8 \Rightarrow -5t^2 + 7t - 2 \geqslant 0$
Considerando $-5t^2 + 7t - 2 = 0$, temos:
$\Delta = (7)^2 - 4 \cdot (-5) \cdot (-2) = 9$
Logo:
$t = \dfrac{-(7) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot (-5)} = \dfrac{-7 \pm 3}{-10}$
Assim, $t' = \dfrac{2}{5}$ e $t'' = 1$.
Como $a = -5$, logo $a < 0$, então a concavidade da parábola é voltada para baixo. Portanto, com essas informações, pode-se fazer o seguinte esboço:

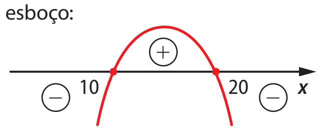


Portanto, o conjunto solução é $S =$
$= \left\{t \in \mathbb{R} \mid \dfrac{2}{5} \leqslant t \leqslant 1\right\}$.

b) Para determinar o conjunto imagem da função $h(t) = -5t^2 + 7t + 6$, determinamos inicialmente a ordenada y_v do vértice da parábola. Sendo assim:
$y_v = -\dfrac{\Delta}{4a} = \dfrac{-169}{-20} = 8{,}45$
Como $a < 0$, o gráfico de h tem concavidade voltada para baixo e y_v é o valor máximo da função.
Portanto, a imagem da função h é $\text{Im}(h) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 8{,}45\}$ ou $]-\infty, 8{,}45]$.

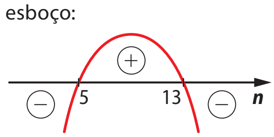
33. a) Como a função $L = -x^2 + 30x - 5$ representa o lucro de uma empresa em relação à quantidade mensal de vendas, o maior lucro obtido é representado pelo vértice da parábola que representa essa situação, ou seja:
$L_{\text{máx}} = L(x_v)$ ou $L_{\text{máx}} = y_v$. Logo:
$x_v = \dfrac{-30}{-2} = 15$
$L_{\text{máx}} = -(15)^2 + 30 \cdot 15 - 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow L_{\text{máx}} = 220$
Assim, o lucro mensal máximo é de R$ 220,00.

b) Considerar que o lucro mensal, no mínimo, deve ser 195 equivale a dizer que:
$-x^2 + 30x - 5 \geqslant 195 \Rightarrow$
$\Rightarrow -x^2 + 30x - 200 \geqslant 0$
Considerando $-x^2 + 30x - 200 = 0$, temos:
$\Delta = (30)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-200) = 100$
Logo:
$x = \dfrac{-(30) \pm \sqrt{100}}{2 \cdot (-1)} = \dfrac{-30 \pm 10}{-2}$
Portanto, $x' = 10$ e $x'' = 20$.
Como $a = -1$, logo $a < 0$, então a concavidade da parábola é voltada para baixo. Portanto, com essas informações, pode-se fazer o seguinte esboço:



Portanto, o valor de x deve variar segundo o conjunto
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 10 \leqslant x \leqslant 20\}$.

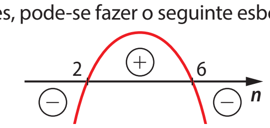
34. a) Para que haja lucro, os valores de venda devem ser maiores do que o custo, ou seja, $V > C$. Logo:
$-5n^2 + 100n - 320 > 5 + 10n - n^2 +$
$+ 18n - 65 > 0$
Considerando $-n^2 + 18n - 65 = 0$, temos:
$\Delta = (18)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-65) = 64$
Logo:
$n = \dfrac{-(18) \pm \sqrt{64}}{2 \cdot (-1)} = \dfrac{-18 \pm 8}{-2}$
Portanto, $n' = 5$ e $n'' = 13$.
Como $a = -1$, logo $a < 0$, então a concavidade da parábola é voltada para baixo. Portanto, com essas informações, pode-se fazer o seguinte esboço:



Para que haja lucro nas vendas, deve-se ter: $5 < n < 13$, sendo n um número inteiro.

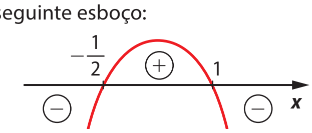
b) Como o lucro (L) é a diferença entre receita (V) e custo (C), tem-se:
$L = V - C$
$L = -5n^2 + 100n - 320 - (5 + 10n)$
$L = -5n^2 + 90n - 325$
O valor de n que acarreta o maior lucro possível ocorre no vértice da função, ou seja:
$x_v = \dfrac{-(90)}{2 \cdot (-5)} = 9$
$\Delta = (90)^2 - 4 \cdot (-5) \cdot (-325) = 1600$
$y_v = \dfrac{-(1600)}{4 \cdot (-5)} = 80$
Portanto, o maior lucro possível será de R$ 80,00 quando vender 9 pássaros.

35. Para obter lucro, deve-se considerar $L(n) > 0$. Considerando
$L(n) = -200n^2 + 1600n - 2400 = 0$, temos:
$\Delta = (1600)^2 - 4 \cdot (-200) \cdot (-2400) =$
$= 640\,000$
Logo:
$n = \dfrac{-(1600) \pm \sqrt{640\,000}}{2 \cdot (-200)} =$
$= \dfrac{-1600 \pm 800}{-400}$
Portanto, $n' = 2$ e $n'' = 6$.
Como $a = -200$, logo $a < 0$, então a concavidade da parábola é voltada para baixo. Portanto, com essas informações, pode-se fazer o seguinte esboço:



Calculando as coordenadas do vértice:
$x_v = \dfrac{-(1600)}{2 \cdot (-200)} = 4$
$y_v = \dfrac{-(640\,000)}{4 \cdot (-200)} = 800$
Julgando cada uma das afirmações, obtêm-se:
I. Verdadeira. Para $2 < n < 6$, a função é positiva, ou seja, o fabricante terá lucro.
II. Verdadeira. O lucro máximo será de R$ 800,00; portanto, inferior a R$ 1.000,00.
III. Falsa. O lucro será máximo quando forem vendidas 4 caixas que equivalem a $4 \cdot 300 = 1200$, portanto 1200 picolés.
Resposta: alternativa **a**.

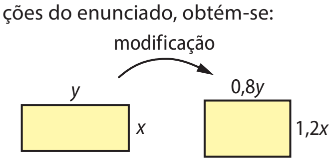
36. Verificar os valores de x para os quais f assume valores positivos equivale a calcular $f(x) > 0$. Portanto:
$-2x^2 + x + 1 > 0$
Considerando $-2x^2 + x + 1 = 0$, temos:
$\Delta = (1)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (1) = 9$
Logo: $x = \dfrac{-(1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot (-2)} = \dfrac{-1 \pm 3}{-4}$
Assim, $x' = -\dfrac{1}{2}$ e $x'' = 1$.
Como $a = -2$, logo $a < 0$, então a concavidade da parábola é voltada para baixo. Portanto, pode-se fazer o seguinte esboço:



Portanto, para $f(x) > 0$ o conjunto solução é $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\dfrac{1}{2} < x < 1\right\}$.
Resposta: alternativa **e**.

Atividades complementares

1. Fazendo um esquema com as informações do enunciado, obtém-se:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Do perímetro, vem: $2x + 2y = 200 \Rightarrow$
$\Rightarrow x + y = 100$
Isolando y, temos: $y = 100 - x$ (I)
Como a área de um retângulo é calculado por $A = b \cdot h$, após a transformação, a área será calculada por:
$A = (x \cdot 1{,}2)\ (y \cdot 0{,}8) =$
$= 1{,}2x \cdot 0{,}8y = 96xy$ (II)
Substituindo (I) em (II):
$A(x) = 0{,}96 \cdot x \cdot (100 - x)$
$A(x) = 96x - 0{,}96x^2$
Resposta: alternativa **e**.

2. Como às 6 horas começam as atividades da empresa então, nesse momento, deve-se considerar que $x = 0$. Portanto, às 7 horas, tem-se $x = 1$, às 8 horas, tem-se $x = 2$, às 9 horas, $x = 3$, e assim por diante. Para encontrar o número de peças produzidas entre 7 h e 9 h, deve-se calcular a diferença ente $N(3)$ e $N(1)$. Considerando que $N(x) = x^2 + 10x$, tem-se:
$N(3) = 3^2 + 10 \cdot 3 = 39$
$N(1) = 1^2 + 10 \cdot 1 = 11$
Portanto, $N(3) - N(1) = 39 - 11 = 28$
Resposta: alternativa **b**.

3. Conforme o enunciado, para 1910 deve-se considerar que $x = 1$. Substituindo esse valor na função, tem-se:
$y = -\frac{1}{50} \cdot 1^2 - \frac{3}{50} \cdot 1 + \frac{51}{20} \Rightarrow$
$\Rightarrow y = -\frac{1}{50} - \frac{3}{50} + \frac{51}{20} \Rightarrow$
$\Rightarrow y = -\frac{4}{50} + \frac{51}{20} \Rightarrow$
$\Rightarrow y = \frac{-8 + 255}{100} = \frac{247}{100}$
Portanto, $y = 2{,}47\ \mu g/L$.
Para 1930 deve-se considerar que $x = 3$. Logo:
$y = -\frac{1}{50} \cdot 3^2 - \frac{3}{50} \cdot 3 + \frac{51}{20} \Rightarrow$
$\Rightarrow y = -\frac{9}{50} - \frac{9}{50} + \frac{51}{20} \Rightarrow$
$\Rightarrow y = \frac{-36 + 255}{100} = \frac{219}{100}$
Portanto, $y = 2{,}19\ \mu g/L$.
Logo, o nível decresceu em 0,28 mg/L, pois, $2{,}47 - 2{,}19 = 0{,}28$.
Resposta: alternativa **e**.

4. Considerando as informações contidas no enunciado, tem-se que:
Como $p(2) = 0$, então:
$0 = m \cdot 2^2 + n \cdot 2 + 1 \Rightarrow 4m + 2n = -1$.
Como $p(-1) = 0$, então:
$0 = m \cdot (-1)^2 + n \cdot (-1) + 1 \Rightarrow m - n = -1$.
Assim, pode-se construir o sistema a seguir:
$\begin{cases} 4m + 2n = -1 \\ m - n = -1 \end{cases}$
Multiplicando a segunda equação por 2 e adicionando o resultado à primeira equação, obtém-se $m = -\frac{1}{2}$.
Substituindo esse resultado na primeira equação, obtém-se $n = \frac{1}{2}$.
Resposta: alternativa **a**.

5. Com base no enunciado, pode-se obter algumas informações importantes:
I) Como o gráfico possui uma única intersecção com a reta $y = 2$ no ponto $(2, 2)$, pode-se concluir que o vértice da função tem abscissa e ordenada 2, ou seja, $x_V = 2$ e $y_V = 2$.
II) Como a intersecção da reta $x = 0$ é o ponto $(0, -6)$, pode-se concluir que $c = -6$.
Como o ponto $(2, 2)$ pertence à função, pode-se escrever:
$f(2) = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 - 6 = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4a + 2b - 6 = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4a + 2b = 8 \Rightarrow 2a + b = 4$
Da afirmação (I), pode-se escrever que:
$x_v = \frac{-b}{2a} \Rightarrow \frac{-b}{2a} = 2 \Rightarrow b = -4a$
Substituindo essa informação na equação $2a + b = 4$, obtém-se:
$2a + b = 4 \Rightarrow 2a - 4a = 4 \Rightarrow a = -2$
$b = -4a \Rightarrow b = -4(-2) \Rightarrow b = 8$
Portanto, $a + b + c = -2 + 8 + (-6) = 0$.
Resposta: alternativa **b**.

6. Seja x a quantidade inicial de funcionários e y o valor que cada um pagaria pelo presente, tem-se:
$\frac{200}{x} = y$
Com a desistência de dois funcionários, cada um dos restantes contribuiu com R\$ 5,00 a mais, ou seja,
$\frac{200}{x-2} = y + 5 \Rightarrow y = \frac{200}{x-2} - 5$
Daí, tem-se:
$\frac{200}{x} = \frac{200}{x-2} - 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{200}{x} = \frac{200 - 5(x-2)}{x-2} \Rightarrow$
$\Rightarrow 200x - 400 = 200x - 5x(x-2) \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 2x - 80 = 0 \Rightarrow x' = 8$ ou $x'' = 10$
Como a quantidade de funcionários é positiva, temos que $x = 10$ e cada funcionário restante contribuiu com:
$\frac{200}{x-2} = \frac{200}{10-2} = 25$
Resposta: alternativa **d**.

7. Como a função h é o produto entre as funções f e g, pode-se afirmar que:
$h(x) = f(x) \cdot g(x) \Rightarrow$
$\Rightarrow h(x) = (-x + 2) \cdot (x + 1)$
Portanto, as raízes da função h são:
$-x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2$
ou $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$
Logo, a soma das raízes é 1.
Resposta: alternativa **a**.

8. Como os pontos $(0, -9)$, $(1, 0)$ e $(2, 15)$ estão contidos em uma função quadrática, pode-se montar as seguintes equações:
$-9 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow c = -9$
Substituindo c e os valores das coordenadas dos pontos $(1, 0)$ e $(2, 15)$:
$0 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 - 9 \Rightarrow a + b = 9$
$15 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 - 9 \Rightarrow 4a + 2b = 24 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2a + b = 12$
Portanto, obtém-se o sistema:
$\begin{cases} a + b = 9 \\ 2a + b = 12 \end{cases}$
Subtraindo a primeira equação da segunda, obtém-se $a = 3$. Substituindo o valor de a na primeira equação, obtém-se $b = 6$. Assim, a lei da função é
$f(x) = 3x^2 + 6x - 9$.
Calculando as coordenadas do vértice:
$x_v = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_v = \frac{-(6)}{2(3)} = -1$
Calculando o discriminante:
$\Delta = (6)^2 - 4 \cdot (3) \cdot (-9) = 144$
$y_v = \frac{-(144)}{4 \cdot (3)} = -12$
Portanto, o vértice da função quadrática $f(x) = 3x^2 + 6x - 9$ é $(-1, -12)$.
Resposta: alternativa **e**.

9. Para determinar a altura máxima atingida pela bola após o saque do atleta, calculamos a ordenada do vértice associado a função y:
$$y_v = -\frac{\left(-\frac{7}{3}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot 12}{4 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)} =$$
$$= \frac{\frac{49}{9} + 8}{\frac{2}{3}} = \frac{363}{18} = 20{,}17$$
Logo, a altura máxima que a bola chega é de aproximadamente 21,67 m, pois $20{,}17 + 1{,}5 = 21{,}67$. Este valor é maior que a medida da altura dos tetos dos ginásios I, II, III e IV e menor do que a medida da altura do ginásio V.
Resposta: alternativa **d**.

10. A receita do lava-jato é representada pelo produto entre a quantidade de clientes e o valor da lavagem. Assim, de acordo com a situação do problema, pode-se escrever:
$R(x) = (50 - 2x)(20 + x) \Rightarrow$
$\Rightarrow R(x) = -2x^2 + 10x + 1000$
Portanto, a maior arrecadação (y_V), bem como o valor da lavagem (x_V), é representada pelo vértice da parábola.
Logo, o valor do aumento da lavagem que maximiza a receita é:
$x_v = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_v = \frac{-(10)}{2(-2)} = 2{,}5$
Resposta: alternativa **c**.

11. A receita do clube é representada pelo produto entre a quantidade de sócios e o valor da mensalidade. Assim, de acordo com a situação do problema, pode-se escrever:
$R(x) = (800 + 10x)(200 - x) \Rightarrow$
$\Rightarrow R(x) = -10x^2 + 1200x + 160\,000$
A maior receita (y_V), bem como o valor da mensalidade (x_V) para que isso ocorra, é representada pelo vértice da parábola. Logo, o valor do desconto da mensalidade que maximiza a receita é:
$x_v = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_v = \frac{-(1200)}{2(-10)} = 60$
Portanto, a mensalidade que o clube deve cobrar para que tenha a maior receita possível é
R\$140,00 ($200 - 60 = 140$).
Resposta: alternativa **c**.

12. A receita que uma empresa pode ter é representada pelo produto entre a quantidade de produtos vendidos e o valor de cada um deles. Assim, de acordo com a situação do problema, pode-se escrever:

$R(x) = p(x) \cdot x \Rightarrow R(x) = (400 - x)x \Rightarrow R(x) = 400x - x^2$

A maior receita (y_V), bem como o valor de cada produto(x_V) para que isso ocorra, é representada pelo vértice da parábola. Logo, a maior receita que essa empresa pode obter é representada por y_V.

Calculando o discriminante:

$\Delta = (400)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (0) = 160\,000$

Logo:

$y_V = \dfrac{-(160\,000)}{4 \cdot (-1)} = 40\,000$

Resposta: alternativa **d**.

13. Analisando a inequação $N^2 - 17N + 16 > 0$, pode-se observar que o gráfico da função $y = N^2 - 17N + 16$ é representado por uma parábola cuja concavidade é voltada para cima, pois $a = 1$ e, portanto, positivo.

Considerando $N^2 - 17N + 16 = 0$, obtém-se:

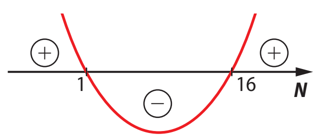
$\Delta = (-17)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (16) = 225$

Logo:

$N = \dfrac{-(-17) \pm \sqrt{225}}{2 \cdot (1)} = \dfrac{17 \pm 15}{2}$

Assim, $N' = 1$ e $N'' = 16$.

Fazendo o esboço da parábola:



Analisando o esboço, tem-se:

$N^2 - 17N + 16 = 0$ para $N = 1$ ou $N = 16$.

$N^2 - 17N + 16 > 0$ para $\{N \in \mathbb{R} \mid N < 1 \text{ ou } N > 16\}$.

Sendo assim, a solução do problema consiste em um número menor do que 1 ou maior do que 16. Portanto, segundo as alternativas, o número 17 atende à exigência.

Resposta: alternativa **d**.

14. O enunciado informa que a função que relaciona a temperatura com o tempo é do 2º grau, portanto da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que f representa a temperatura em °C e x representa o tempo em hora. Como o paciente chegou ao posto de saúde com 40 °C de febre, considerando essa informação uma coordenada de um ponto dessa função, entende-se que o ponto (0, 40) pertence à função. Portanto:

$40 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow c = 40$

O enunciado também informa que duas horas depois a temperatura era de 38 °C, ou seja, o ponto (2, 38) também pertence à função. Logo:

$40 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 40 \Rightarrow 4a + 2b = -2$

Como o ponto máximo da temperatura, o vértice da parábola, ocorre 30 minutos (0,5 hora) após a chegada do paciente, pode-se concluir que (0,5; y_V) pertence à função. Logo:

$x_v = \dfrac{-b}{2a} = 0{,}5 \Rightarrow a = -b$

Substituindo esse resultado na equação anterior:

$4a + 2b = -2 \Rightarrow -4b + 2b = -2 \Rightarrow b = 1$

E, consequentemente, $a = -1$.

Portanto, a função é $f(x) = -x^2 + x + 40$.

Calculando o discriminante:

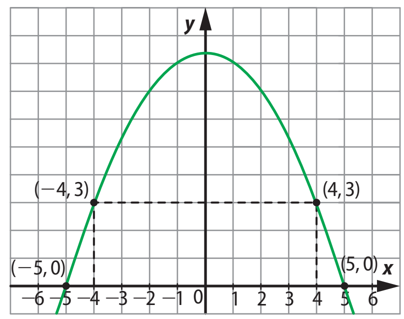
$\Delta = (1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (40) = 161$

$y_V = \dfrac{-(161)}{4 \cdot (-1)} = 40{,}25$

Logo, $40{,}25 - 3 = 37{,}25$.

Resposta: alternativa **02**.

15. Para melhor compreensão, vamos transferir os dados da Figura **2** para o plano cartesiano. Assumindo que o ponto que determina a altura H da igreja tenha abscissa igual a zero, então, pela simetria da figura, temos a representação:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Assim, temos o gráfico de uma parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$ que passa pelos pontos (−4, 3), (4, 3) e cujas raízes são (−5, 0) e (5, 0). Observe que:

$-\dfrac{b}{a} = 5 - 5 \Rightarrow b = 0$

$\dfrac{c}{a} = 5 \cdot (-5) \Rightarrow c = -25a$

Logo, $f(x) = ax^2 - 25a = a(x^2 - 25)$. Para determinar o valor de a, avaliamos o ponto (4, 3) na função f:

$3 = f(4) = a((4)^2 - 25) = -9a \Rightarrow a = -\dfrac{1}{3}$

Então, $f(x) = -\dfrac{1}{3}(x^2 - 25)$. Dessa forma, a altura procurada H, em metro, é atingida em $x = 0$:

$H = f(0) = -\dfrac{1}{3}(0^2 - 25) = \dfrac{25}{3}$

Resposta: alternativa **d**.

Capítulo 5 • Função exponencial

Atividades

1. **a)** $5^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{5^3}$

Utilizando uma calculadora, obtém-se a aproximação 3,344.

b) $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$

Utilizando uma calculadora, obtém-se a aproximação 3,162.

c) $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$

Utilizando uma calculadora, obtém-se a aproximação 1,260.

d) $3^{0{,}25} = 3^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3}$

Utilizando uma calculadora, obtém-se a aproximação 1,316.

e) $\pi^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\pi}$

Utilizando uma calculadora, obtém-se a aproximação 1,331.

f) $3^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{3^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3^{-1}} = \sqrt{\dfrac{1}{3}}$

Utilizando uma calculadora, obtém-se a aproximação 0,577.

2. **a)** $3^4 \cdot 3^5 = 3^{4+5} = 3^9$

b) $(x^3)^4 = x^{3 \cdot 4} = x^{12}$

c) $7^9 \cdot 7^4 = 7^{9+4} = 7^{13}$

d) $\dfrac{10^{12}}{10^5} = 10^{12-5} = 10^7$

e) $(10^3)^2 = 10^{3 \cdot 2} = 10^6$

f) $a^{n+1} \cdot a^{n-2} = a^{n+1+n-2} = a^{2n-1}$

3. **a)** $\frac{1}{3^2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 3^{-2}$

b) $\frac{1}{10^4} = \left(\frac{1}{10}\right)^4 = 10^{-4}$

c) $\frac{1}{2^5} = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 2^{-5}$

d) $\frac{1}{6^2} = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = 6^{-2}$

e) $\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 2^{-1}$

f) $\frac{1}{a^2} = \left(\frac{1}{a}\right)^2 = a^{-2}$

4. **a)** $5^{1,5} \simeq 11,180$

b) $12^{\frac{1}{4}} \simeq 1,861$

c) $28^{0,25} \simeq 2,300$

d) $3^{4,5} \simeq 140,296$

e) $2^{2,6} \simeq 6,063$

f) $\left(\frac{5}{3}\right)^{1,25} \simeq 1,894$

g) $3^{\sqrt{5}} \simeq 11,665$

h) $10^{\sqrt{3}} \simeq 53,957$

5. De acordo com a definição, um número representado em notação científica é da forma $a \cdot 10^n$, em que $1 \leqslant a < 10$ e n é um número inteiro.

a) $299\,793\,458 \simeq 2,998 \cdot 10^8$

b) $12\,742 \simeq 1,274 \cdot 10^4$

c) $0,00011 = 1,1 \cdot 10^{-4}$

6. Como em cada item a seguir há um produto ou uma razão entre notações científicas, podem-se reorganizar os fatores de cada notação de acordo com a operação indicada no respectivo item.

a) $(2,0 \cdot 10^3) \cdot (4,0 \cdot 10^{-5}) =$
$= 2,0 \cdot 4,0 \cdot 10^3 \cdot 10^{-5} =$
$= (2,0 \cdot 4,0) \cdot 10^{3-5} = 8 \cdot 10^{-2}$

b) $(5,2 \cdot 10^6) : (1,3 \cdot 10^{-3}) =$
$= (5,2 : 1,3) \cdot (10^{6-(-3)}) = 4 \cdot 10^9$

c) $(1,5 \cdot 10^3) \cdot (2,0 \cdot 10^{-5}) \cdot (4,0 \cdot 10^{-8}) =$
$= (1,5 \cdot 2,0 \cdot 4,0) \cdot (10^{3-5-8}) =$
$= 12 \cdot 10^{-10} = 1,2 \cdot 10^{-9}$

7. **a)** Desenvolvendo as potências em cada item:
$a = 3^3 = 27$
$b = (-2)^3 = -8$
$c = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$
$d = (-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8}$

b) A sequência dos números a, b, c e d escritos na ordem crescente é: -8; $-\frac{1}{8}$; $\frac{1}{9}$; 27

8. Para calcular a metade de 2^{2012}, deve-se dividir o número por dois, logo:
$\frac{2^{2012}}{2} = 2^{2012-1} = 2^{2011}$

9. Aplicando as propriedades da potenciação:
$4^{x+2-(x-2)} : 4^{x-(x-1)} = \frac{4^{x+2-x+2}}{4^{x-x+1}} =$
$= \frac{4^4}{4} = 4^3 = 64$

10. Observando a expressão $\frac{3^{12} - 3^{11} - 3^{10}}{3^{11} + 3^{10} + 3^{10}}$, pode-se colocar 3^{10} em evidência no numerador e denominador. Logo:
$\frac{\cancel{3^{10}}(3^2 - 3 - 1)}{\cancel{3^{10}}(3 + 1 + 1)} = \frac{3^2 - 3 - 1}{3 + 1 + 1} = \frac{5}{5} = 1$

11. Vamos analisar os algarismos das unidades nas potências de 12. Observa-se que, nas multiplicações de 12 por 12, o algarismo das unidades é obtido pelo produto $2 \cdot 2$, desse modo:

12^1 termina em 2

12^2 termina em 4, pois $2 \cdot 2 = 4$

12^3 termina em 8, pois $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

12^4 termina em 6, pois $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

12^5 termina em 2, pois $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$

12^6 termina em 4, pois
$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$

12^7 termina em 8, pois
$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 128$

12^8 termina em 6, pois
$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 256$

Observe que uma potência de 12 terminará em 6 a cada potência cujo expoente é múltiplo de 4. Assim, dentro do intervalo $78 \leqslant n \leqslant 155$, deve-se encontrar o maior múltiplo de 4.

Como o resto da divisão de 155 por 4 é 3, então o maior múltiplo de 4 será 152. Portanto, $n = 152$.

12. Para simplificar cada expressão devem-se aplicar as propriedades da potenciação.

a) $(27 \cdot 8)^{-\frac{1}{3}} = (3^3 \cdot 2^3)^{-\frac{1}{3}} =$
$= (6)^{3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)} = 6^{-1} = \frac{1}{6}$

b) $81^{\frac{7}{4}} \cdot 81^{-\frac{1}{2}} = 81^{\frac{7}{4} + \left(-\frac{1}{2}\right)} = (3^4)^{\frac{5}{4}} = 243$

c) $\left(8^{\frac{4}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left((2^3)^{\frac{4}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}} = (2^4)^{-\frac{1}{2}} =$
$= 2^{-2} = \frac{1}{4}$

d) $\frac{7^{4,3} \cdot 7^{-2,6}}{7^{-0,3}} = 7^{(4,3-2,6)-(-0,3)} = 7^2 = 49$

e) $\left(\frac{1}{625}\right)^{-\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{64}{125}\right)^{-\frac{1}{3}} =$
$= (5^{-4})^{-\frac{1}{4}} \cdot (4^3 \cdot 5^{-3})^{-\frac{1}{3}} =$
$= 5 \cdot (4^{-1} \cdot 5) = 5^2 \cdot 2^{-2} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$

13. Nas passagens 1 e 2, as propriedades de potenciação foram aplicadas corretamente. Porém, na passagem 3, há um erro com relação ao sinal, pois o sinal negativo (operação) não foi distribuído entre os termos do subtraendo. Corrigindo:
$5^{1+\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{3}}+1} = 5^2 = 25$
Portanto, a resposta correta é 25.

14. Chamando o resultado da expressão de A e usando as propriedades das potências:
$A = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 10^4 \cdot 9 \cdot 10^{-5}}{2 \cdot 10^{-4}}} \Rightarrow$
$\Rightarrow A = \sqrt[3]{3^3 \cdot 10^3} \Rightarrow$
$\Rightarrow A = 3 \cdot 10 \Rightarrow A = 30$

15. Aplicando as propriedades da potenciação:
$\frac{(0,1)^{-1} - (0,8)^0}{\frac{8}{3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 \cdot (-3)} = \frac{10 - 1}{\frac{8}{3} \cdot \frac{27}{8} \cdot (-3)} =$
$= -\frac{9}{27} = -\frac{1}{3}$

16. Aplicando as propriedades de potenciação.
$xyz = (2^2)^3 \cdot 2^{2^3} \cdot 2^{3^2} = 2^6 \cdot 2^8 \cdot 2^9 = 2^{23}$

17. Fatorando os termos da expressão e aplicando as propriedades das potências:
$\frac{10^{10} + 10^{20} + 10^{30}}{10^{20} + 10^{30} + 10^{40}} =$
$= \frac{10^{10} + 10^{10} \cdot 10^{10} + 10^{10} \cdot 10^{20}}{10^{20} + 10^{20} \cdot 10^{10} + 10^{20} \cdot 10^{20}} =$
$= \frac{10^{10} \cdot \cancel{(1 + 10^{10} + 10^{20})}}{10^{20} \cdot \cancel{(1 + 10^{10} + 10^{20})}} = \frac{10^{10}}{10^{20}} =$
$= 10^{10-20} = 10^{-10}$

18. Fatorando os termos da expressão e aplicando as propriedades da potenciação:
$\frac{(2^{n-1} + 2^n + 2^{n+1})(3^{n-1} + 3^n + 3^{n+1})}{6^n + 6^{n+1}} =$
$= \frac{\cancel{2^n}(2^{-1} + 1 + 2)\cancel{3^n}(3^{-1} + 1 + 3)}{\cancel{6^n}(1 + 6)} =$
$= \frac{\left(\frac{1}{2} + 3\right)\left(\frac{1}{3} + 4\right)}{7} = \frac{\frac{7}{2} \cdot \frac{13}{3}}{7} = \frac{13}{6}$

19. **a)** $f(x) = 5^x \Rightarrow$ função crescente, pois $a > 1$.

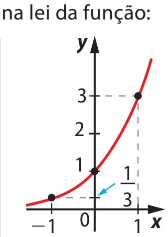
b) $f(x) = \left(\frac{1}{6}\right)^x \Rightarrow$ função decrescente, pois $0 < a < 1$.

c) $f(x) = 2^{-x} = (2^{-1})^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x \Rightarrow$ função decrescente, pois $0 < a < 1$.

d) $f(x) = 3^{\frac{x}{2}} = (\sqrt{3})^x \Rightarrow$ função crescente, pois $a > 1$.

20. **a)** $f(x) = 3^x$
Considerando alguns pontos para x e substituindo na lei da função:

x	$f(x) = 3^x$
-1	$\frac{1}{3}$
0	1
1	3



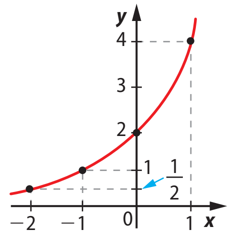
EDITORIA DE ARTE

Portanto, o domínio é $D(f) = \mathbb{R}$ e a $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$.

b) $f(x) = 2^{x+1}$

Considerando alguns pontos para x e substituindo na lei da função:

x	$f(x) = 2^{x+1}$
-2	$\frac{1}{2}$
-1	1
0	2
1	4

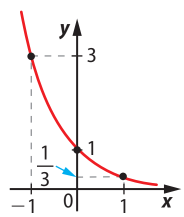


Portanto, o domínio é $D(f) = \mathbb{R}$ e a $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$.

c) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

Considerando alguns pontos para x e substituindo na lei da função:

x	$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
-1	3
0	1
1	$\frac{1}{3}$

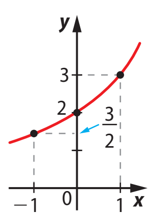


Portanto, o domínio é $D(f) = \mathbb{R}$ e a $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$.

d) $f(x) = 2^x + 1$

Considerando alguns pontos para x e substituindo na lei da função:

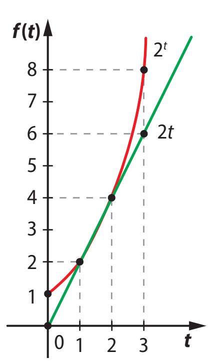
x	$f(x) = 2^x + 1$
-1	$\frac{3}{2}$
0	2
1	3



Portanto, o domínio é $D(f) = \mathbb{R}$ e a $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 1\}$.

21. a) Considerando alguns valores para x e substituindo em ambas as funções, obtêm-se o quadro e os gráficos a seguir.

t	$2t$	2^t
0	0	1
1	2	2
2	4	4
3	6	8



b) Sim, ao observar os gráficos é possível perceber que eles se interceptam em $t = 1$ e $t = 2$, com t em hora.

c) Ambas são funções crescentes.

d) Para $t = 3$, tem-se:

$f(t) = 2t \Rightarrow f(3) = 2 \cdot (3) = 6$

$f(t) = 2^t \Rightarrow f(3) = 2^3 = 8$

Logo, $8 - 6 = 2$, ou seja, 2 000 bactérias.

22. a) A amostra de bactérias aumentou no intervalo entre 20 °C e 60 °C; diminuiu no intervalo entre 80 °C e 120 °C e manteve-se estável nos intervalos entre 0 °C e 20 °C e entre 60 °C e 80 °C.

b) Para calcular a quantidade de bactérias, deve-se relacionar a temperatura com o intervalo e a função. Portanto:

- 30 °C $\Rightarrow f(30) = 2^{0,1(30 - 10)} = 2^2 = 4$
  Ou seja, 400 000 bactérias.
- 50 °C $\Rightarrow f(50) = 2^{0,1(50 - 10)} = 2^4 = 16$
  Ou seja, 1 600 000 bactérias.
- 90 °C $\Rightarrow g(90) = 32 \cdot 2^{-0,2(90 - 80)} = 2^3 = 8$
  Ou seja, 800 000 bactérias.
- 110 °C $\Rightarrow g(110) = 32 \cdot 2^{-0,2(110 - 80)} = 2^{-1} = 0,5$
  Ou seja, 50 000 bactérias.

23. Para a função do tipo $f(x) = a^x$ ser decrescente, necessariamente deve-se ter que $0 < a < 1$. Assim:

$0 < k - 3 \Rightarrow 3 < k$

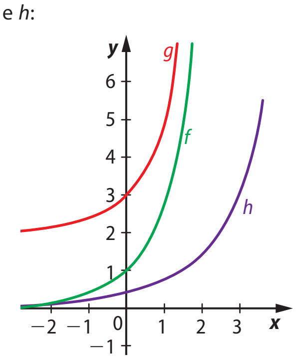
$k - 3 < 1 \Rightarrow k < 4$

Logo: $3 < k < 4$

24. Calculado o valor numérico para cada valor de x nas respectivas funções:

lei da função \ x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = 3^x$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27
$g(x) = 3^x + 2$	$\frac{19}{9}$	$\frac{7}{3}$	3	5	11	29
$h(x) = 3^{x-2}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3

a) Considerando os pontos do quadro, é possível plotar os gráficos f, g e h:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

b) Analisando os gráficos, é possível observar que as funções são crescentes.

c) Os domínios e as imagens de cada função são:

$D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$;

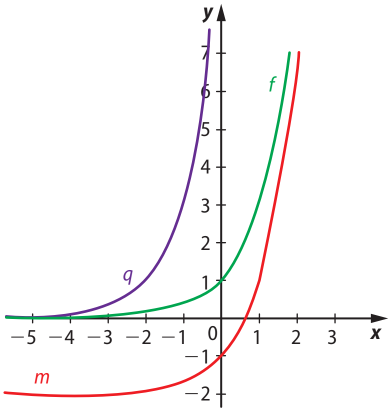
$D(g) = \mathbb{R}$ e $Im(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 2\}$;

$D(h) = \mathbb{R}$ e $Im(h) = \mathbb{R}_+^*$

d) O gráfico de *m* equivale ao gráfico de *f* com um deslocamento de todos os pontos desse gráfico em 2 unidades na vertical para baixo.

e) O gráfico de *q* equivale ao gráfico de *f* com um deslocamento de todos os pontos desse gráfico em 2 unidades na horizontal para a esquerda.

f)



EDITORIA DE ARTE

25. a) Considerando a taxa de variação média como a média do rendimento entre o primeiro e sexto mês, pode-se calcular como:

$$T_{\text{MÉDIA}} = \frac{1017{,}62 - 1000}{5} = 3{,}524$$

Portanto, o rendimento médio no período foi de R$ 3,52.

b) Como o rendimento é de 0,35% ao mês e o valor de investimento inicial é de R$ 1.000,00, pode-se entender que a lei de formação da função que calcula o valor disponível é:

$f(x) = 1000 \cdot (1 + 0{,}0035)^x \Rightarrow f(x) = 1000 \cdot (1{,}0035)^x$

c) Considerando um período de 12 meses e utilizando uma calculadora, o cliente obterá um saldo disponível de:

$f(12) = 1000 \cdot (1{,}0035)^{12} \Rightarrow f(12) \simeq$ R$ 1.042,82

26. Para resolver as equações exponenciais, pode-se manter ambos os membros na mesma base e igualar os expoentes.

a) $2^x = 2^6 \Rightarrow x = 6$

$S = \{6\}$

b) $10^x = 10^3 \Rightarrow x = 3$

$S = \{3\}$

c) $3^{2x} = 3^5 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$

$S = \left\{\frac{5}{2}\right\}$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \Rightarrow x = 5$

$S = \{5\}$

e) $\left(\frac{1}{4}\right)^{4x} = \frac{25}{100} \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^{4x} = \left(\frac{1}{4}\right)^1 \Rightarrow 4x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$

$S = \left\{\frac{1}{4}\right\}$

f) $4^x = 4^{-3} \Rightarrow x = -3$

$S = \{-3\}$

g) $3^x = 3^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

h) $4^x = \sqrt[3]{2^5} \Rightarrow 2^{2x} = 2^{\frac{5}{3}} \Rightarrow 2x = \frac{5}{3} \Rightarrow x = \frac{5}{6}$

$S = \left\{\frac{5}{6}\right\}$

27. Considerando a função $f(x) = 5^{2x-1}$, para calcular o valor de x, devem-se aplicar os conceitos de função, ou seja:

a) $5^{2x-1} = 125 \Rightarrow 5^{2x-1} = 5^3 \Rightarrow 2x - 1 = 3 \Rightarrow x = 2$

b) $5^{2x-1} = 1 \Rightarrow 5^{2x-1} = 5^0 \Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

c) $5^{2x-1} = 0 \Rightarrow \nexists\, x \in \mathbb{R} \mid 5^{2x-1} = 0$

d) $5^{2x-1} = \frac{1}{5} \Rightarrow 5^{2x-1} = 5^{-1} \Rightarrow 2x - 1 = -1 \Rightarrow x = 0$

28. Para resolver as equações, devem-se manter ambos os membros da equação exponencial na mesma base e, em seguida, igualar os expoentes. Logo:

a) $2^{x-2} = \frac{8}{2^{x-3}} \Rightarrow 2^{x-2} = 2^{3-(x-3)} \Rightarrow 2^{x-2} = 2^{6-x} \Rightarrow$

$\Rightarrow x - 2 = 6 - x \Rightarrow x = 4$

$S = \{4\}$

b) $25^{2x+2} = \left(\frac{1}{5}\right)^{5x-1} \Rightarrow 5^{2(2x+2)} = 5^{-5x+1} \Rightarrow 4x + 4 = -5x + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 9x = -3 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$

$S = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$

c) $5^{x^2-2} : 25 = \left(\frac{1}{125}\right)^{-x} \Rightarrow 5^{x^2-4} = 5^{3x} \Rightarrow x^2 - 4 = 3x \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x' = -1$ e $x'' = 4$

$S = \{-1, 4\}$

d) $\sqrt[3]{81^x} = \frac{1}{27} \Rightarrow 3^{\frac{4x}{3}} = 3^{-3} \Rightarrow \frac{4x}{3} = -3 \Rightarrow x = -\frac{9}{4}$

$S = \left\{-\frac{9}{4}\right\}$

29. Aplicando as técnicas de fatoração no numerador e denominador no primeiro membro da equação:

$\frac{2^x + 2^{2x}}{2^{2x} - 1} = 2 \Rightarrow \frac{2^x\cancel{(1 + 2^x)}}{(2^x - 1)\cancel{(2^x + 1)}} = 2 \Rightarrow \frac{2^x}{2^x - 1} = 2$

Fazendo $2^x = y$:

$\frac{2^x}{2^x - 1} = 2 \Rightarrow \frac{y}{y - 1} = 2 \Rightarrow y = 2$

Portanto, $2^x = 2^1$, ou seja, $x = 1$.

30. Considerando $t = 0$ o instante em que havia 200 bactérias, tem-se $N_0 = 200$. Após 12 horas, havia 600 bactérias. Então:

$600 = 200 \cdot K^{12} \Rightarrow K^{12} = 3$

Após 48 horas do início da observação, tem-se:

$N(48) = 200 \cdot K^{48} = 200 \cdot (K^{12})^4 = 200 \cdot (3)^4 = 200 \cdot 81 = 16\,200$

Após 48 horas existirão 16 200 bactérias.

31. Para resolver a equação coloca-se 2^x em evidência. Logo:

$2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 224$

$2^x \cdot 2 + 2^x \cdot 4 + 2^x \cdot 8 = 2^5 \cdot 7$

$2^x(2 + 4 + 8) = 2^5 \cdot 7$

$\frac{2^x \cdot 14}{7} = 2^5$

$2^{x+1} = 2^5 \Rightarrow x = 4$

$S = \{4\}$

32. Para resolver a equação, mantém-se ambos os membros com um termo e na mesma base. Para isso, ultiliza-se as propriedades da potenciação.

$3^{3x-1} \cdot 3^{2(2x+3)} = 3^{3(3-x)}$

$3^{3x-1+4x+6} = 3^{9-3x} \Rightarrow 7x + 3x = 9 + 1 - 6 \Rightarrow 10x = 4 \Rightarrow x = \frac{2}{5}$

33. Para resolver a equação, coloca-se 8^x em evidência no primeiro membro da equação exponencial:

$8^x\left(1 + \frac{1}{8} + 8\right) = 292 \Rightarrow 8^x\left(\frac{73}{8}\right) = 292 \Rightarrow 8^x = 32$

Simplificando a equação e deixando ambos os membros da equação na base 2:

$2^{3x} = 2^5 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$

$S = \left\{\frac{5}{3}\right\}$

34. Aplicando as propriedades da potenciação, é possível escrever a equação da seguinte maneira:

$1^x + 5^x + 25^x = 3 \Rightarrow 5^{2x} + 5^x - 2 = 0$

Substituindo $5^x = y$, obtêm-se:

$y^2 + y - 2 = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau, obtêm-se as raízes $y' = 1$ e $y'' = -2$.

Logo:

$5^x = 1 \Rightarrow 5^x = 5^0 \Rightarrow x = 0$

$5^x = -2 \Rightarrow$ Não há um número real que satisfaça a equação.

Portanto, $S = \{0\}$.

35. Aplicando as propriedades da potenciação, é possível escrever a equação da seguinte maneira:

$\frac{3^{2(5x-1)}}{3^{4(2x-3)}} = \frac{3^{3(5-3x)}}{3^{2x-5}} \Rightarrow \frac{3^{10x-2}}{3^{8x-12}} = \frac{3^{15-9x}}{3^{2x-5}} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3^{10x-2-8x+12} = 3^{15-9x-2x+5} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3^{2x+10} = 3^{-11x+20} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x + 10 = -11x + 20 \Rightarrow x = \frac{10}{13}$

Portanto, $S = \left\{\frac{10}{13}\right\}$.

36. Substituindo os dados fornecidos pelo enunciado na fórmula:

$m = m_0 \cdot 2^{\frac{-t}{5400}} \Rightarrow 1{,}25 = 5 \cdot 2^{\frac{-t}{5400}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{125}{100} = 5 \cdot 2^{\frac{-t}{5400}} \Rightarrow \frac{\cancel{5}}{4} = \cancel{5} \cdot 2^{\frac{-t}{5400}} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^{-2} = 2^{\frac{-t}{5400}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{t}{5400} = 2 \Rightarrow t = 10\,800$

Portanto, em 10 800 anos.

37. Aplicando as propriedades da potenciação, é possível escrever a equação da seguinte maneira:

$3 \cdot 5^{x^2} + 3^{x^2} \cdot 3 - 8 \cdot 3^{x^2} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3 \cdot 5^{x^2} + 3^{x^2} \cdot (3 - 8) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3 \cdot 5^{x^2} = 3^{x^2} \cdot 5 \Rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^{x^2} = \left(\frac{5}{3}\right)^1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x' = -1$ ou $x'' = 1$

$S = \{-1, 1\}$

38. Aplicando as propriedades da potenciação, é possível escrever a equação da seguinte maneira:

$3^{2\left(x - \frac{1}{2}\right)} - \frac{4 \cdot 3^x}{3} = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3^{2x-1} - \frac{4}{3} \cdot 3^x + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{3^{2x}}{3} - \frac{4}{3} \cdot 3^x + 1 = 0$

Substituindo $3^x = y$:

$\frac{y^2}{3} - \frac{4}{3}y + 1 = 0 \Rightarrow y^2 - 4y + 3 = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau, obtêm-se as raízes $y' = 1$ e $y'' = 3$.

Como $3^x = y$:

$3^x = 3 \Rightarrow x = 1$

$3^x = 1 \Rightarrow 3^x = 3^0 \Rightarrow x = 0$

$S = \{0, 1\}$

39. Aplicando as propriedades da potenciação, é possível escrever a equação da seguinte maneira:

$s(x) = 3^{x-1} + 3^x \Rightarrow s(x) = \frac{3^x}{3} + 3^x \Rightarrow$

$\Rightarrow s(x) = 3^x\left(\frac{1}{3} + 1\right) \Rightarrow s(x) = 3^x \cdot \frac{4}{3}$

$s(x) = 4 \Rightarrow 3^x \cdot \frac{\cancel{4}}{3} = \cancel{4} \Rightarrow 3^x = 3 \Rightarrow x = 1$

40. Considerando a função $f(x) = 3^x$, podem-se encontrar os termos $f(x + 1)$ e $f(-x + 4)$.

$f(x + 1) = 3^{x+1}$

$f(-x + 4) = 3^{-x+4}$

Como $f(x + 1) + f(-x + 4) = 36$, então:

$3^{x+1} + 3^{-x+4} = 36 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3^x \cdot 3 + 3^{-x} \cdot 3^4 = 36$

Substituindo $3^x = y$:

$3y + \frac{81}{y} = 36 \Rightarrow y^2 - 12y + 27 = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau, obtêm-se as raízes $y' = 3$ e $y'' = 9$

Como $3^x = y$:

$3^x = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow x = 2$

$3^x = 3^1 \Rightarrow x = 1$

Portanto, $x = 2$ ou $x = 1$.

41. Resposta pessoal. Exemplo de questão:

O reservatório terá a metade da sua capacidade após quantos meses de estiagem?

$V(t) = V_0 \cdot 2^{-0{,}05t} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{V_0}{2} = V_0 \cdot 2^{-0{,}05t} \Rightarrow 2^{-1} = 2^{-0{,}05t}$

Igualando os expoentes:

$-1 = -0{,}05t \Rightarrow t = 20$

Portanto, a represa terá a metade da sua capacidade após 20 meses.

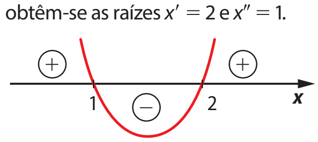
42. Para resolver as inequações, devem-se deixar ambos os membros na mesma base e verificar se a base é maior do que 1 ou pertence ao intervalo]0, 1[.

a) $2^{x^2 - 3x} \geqslant 2^{-2}$

Como a base é maior do que 1, deve-se manter o sinal da inequação entre os expoentes. Logo:

$x^2 - 3x + 2 \geqslant 0$

Resolvendo a equação $x^2 - 3x + 2 = 0$, obtêm-se as raízes $x' = 2$ e $x'' = 1$.



Como os intervalos em que a função quadrática é não negativa são $x \leqslant 1$ ou $x \geqslant 2$, o conjunto solução será $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 1 \text{ ou } x \geqslant 2\}$.

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} < \left(\frac{1}{3}\right)^3$

Como a base é positiva e menor do que 1, deve-se inverter o sinal da inequação entre os expoentes. Logo:

$2x > 3 \Rightarrow x > \frac{3}{2}$

Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{3}{2}\right\}$.

c) $(0{,}2)^{x-2} > (0{,}2)^0$

Como a base é positiva e menor do que 1, deve-se inverter o sinal da inequação entre os expoentes. Logo:

$x - 2 < 0 \Rightarrow x < 2$

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$.

d) $2^{x+1} \cdot 2^{2(x-1)} \leqslant 2^{-5} \Rightarrow 2^{x+1+2x-2} \leqslant 2^{-5}$

Como a base é maior do que 1, deve-se manter o sinal da inequação entre os expoentes. Logo:

$3x - 1 \leqslant -5 \Rightarrow x \leqslant -\frac{4}{3}$

Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\frac{4}{3}\right\}$.

e) $\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2(1+2x)} > \left(\frac{3}{2}\right)^{3(4x+3)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1+2+4x} > \left(\frac{3}{2}\right)^{12x+9}$

Como a base é maior do que 1, deve-se manter o sinal da inequação entre os expoentes. Logo:

$5x + 3 > 12x + 9 \Rightarrow -7x > 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow x < -\frac{6}{7}$

Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{6}{7}\right\}$.

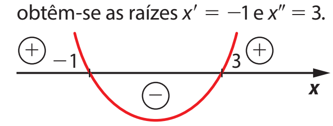
f) $(0{,}04)^{\frac{x^2 - 2x}{2}} \geqslant 0{,}008 \Rightarrow$

$\Rightarrow [(0{,}2)^2]^{\frac{x^2 - 2x}{2}} \geqslant (0{,}2)^3$

Como a base é positiva e menor do que 1, deve-se inverter o sinal da inequação entre os expoentes. Logo:

$x^2 - 2x \leqslant 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 \leqslant 0$

Resolvendo a equação $x^2 - 2x - 3 = 0$, obtêm-se as raízes $x' = -1$ e $x'' = 3$.



Portanto, o conjunto solução será $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 3\}$.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

43. Para resolver a inequação pode-se começar colocando o fator 3^x em evidência. Assim:

$3^{x+1} + 3^{2+x} > 108$

$3^x(3 + 9) > 108$

$3^x > 9 \Rightarrow 3^x > 3^2$

Como a base é maior do que 1, deve-se manter o sinal da inequação entre os expoentes. Portanto, $x > 2$.

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

44. Para a expressão representar um número real, o radicando deve ser maior ou igual a 0. Logo:

$2^x + 2^{x+1} - 12 \geqslant 0$

Para resolver a inequação, deve-se colocar o fator 2^x em evidência. Assim:

$2^x(1 + 2) \geqslant 12 \Rightarrow 2^x \geqslant 4 \Rightarrow 2^x \geqslant 2^2$

Como a base é maior do que 1, deve-se manter o sinal da inequação entre os expoentes. Portanto $x \geqslant 2$.

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\}$

45. Para definir o domínio de ambas as funções, deve-se ter o radicando maior ou igual a 0.

a) $2^x - 2^{1-x} \geqslant 0 \Rightarrow 2^x \geqslant 2^{1-x}$

Como a base é maior do que 1, deve-se manter o sinal da inequação entre os expoentes, logo:

$x \geqslant 1 - x \Rightarrow x \geqslant \frac{1}{2}$

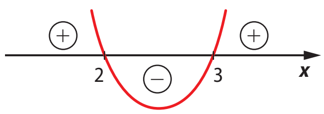
$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{1}{2}\right\}$

b) $(0{,}1)^{x^2-5x} - (0{,}1)^{-6} \geqslant 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (0{,}1)^{x^2-5x} \geqslant (0{,}1)^{-6}$

Como a base é positiva e menor do que 1, deve-se inverter o sinal da inequação entre os expoentes. Logo:

$x^2 - 5x + 6 \leqslant 0$

Ao resolver a equação $x^2 - 5x + 6 = 0$, obtêm-se as raízes $x' = 2$ e $x'' = 3$.



$D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 3\}$

46. Considerando a inequação $4^x - 10 \cdot 2^x + 16 < 0$, pode-se reescrevê-la da seguinte maneira:

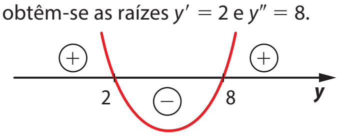
$(2^x)^2 - 10 \cdot 2^x + 16 < 0$

Substituindo $2^x = y$, temos:

$y^2 - 10y + 16 < 0$.

Resolvendo a equação $y^2 - 10y + 16 = 0$, obtêm-se as raízes $y' = 2$ e $y'' = 8$.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE



Portanto, $2 < y < 8$.

Como $2^x = y$, então:

$2 < 2^x < 8 \Rightarrow 2^1 < 2^x < 2^3 \Rightarrow 1 < x < 3$

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 3\}$.

47. Para resolver a inequação $2^{1+x} + \sqrt{8} \geqslant \sqrt{72}$, ambos os membros da inequação devem ter um termo com a mesma base. Logo:

$2^{1+x} + \sqrt{8} \geqslant \sqrt{72} \Rightarrow 2^{1+x} \geqslant \sqrt{72} - \sqrt{8} \Rightarrow$
$\Rightarrow 2^{1+x} \geqslant \sqrt{8}(\sqrt{9} - 1) \Rightarrow 2^{1+x} \geqslant 2^{\frac{3}{2}} \cdot 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2^{1+x} \geqslant 2^{\frac{5}{2}}$

Como a base é maior do que 1, deve-se manter o sinal da inequação entre os expoentes. Assim:

$1 + x \geqslant \frac{5}{2} \Rightarrow x \geqslant \frac{3}{2}$

Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{3}{2}\right\}$.

48. Para resolver a inequação, deve-se deixar cada membro na mesma base, ou seja:

$1 < 4^{\frac{x}{4}} \leqslant 64 \Rightarrow 4^0 < 4^{\frac{x}{4}} \leqslant 4^3 \Rightarrow$
$\Rightarrow 0 < \frac{x}{4} \leqslant 3 \Rightarrow 0 < x \leqslant 12$

Como a solução é representada por números inteiros, então o conjunto solução é $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

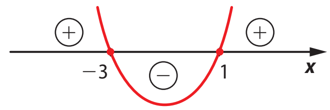
49. Para encontrar a solução da inequação, devem-se deixar ambos os membros com um termo de mesma base. Logo:

$5^{x^2} \cdot 5^{2x-1} \cdot 5^{-3} \leqslant 5^{-1} \Rightarrow 5^{x^2+2x-1-3} \leqslant 5^{-1}$

Como a base é maior do que 1, deve-se manter o sinal da inequação entre os expoentes. Assim:

$x^2 + 2x - 3 \leqslant 0$

Resolvendo a equação $x^2 + 2x - 3 = 0$, obtêm-se as raízes $x' = -3$ e $x'' = 1$.



Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x \leqslant 1\}$.

50. Resposta pessoal. Exemplo de questão: Qual é o tempo mínimo necessário para que a planta estudada atinja uma altura maior do que 90 cm?

O problema propõe que se calculem os possíveis valores de t para que $h(t) > 90$. Logo:

$2{,}52 + 0{,}04 \cdot 3^{0{,}14t} > 90 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3^{0{,}14t} > \frac{90 - 2{,}52}{0{,}04} \Rightarrow 3^{0{,}14t} > 3^7$

Como a base é maior do que 1, deve-se manter o sinal da inequação entre os expoentes. Assim:

$0{,}14t > 7 \Rightarrow t > 50$

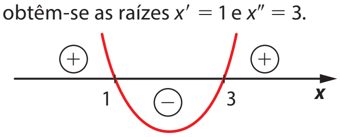
O tempo mínimo será de 50 dias.

51. Para resolver a inequação, aplicam-se as propriedades da potenciação para deixar as bases, em ambos os membros, iguais. Logo:

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} > \left(\frac{1}{4}\right)^{2x-\frac{3}{2}} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} > \left(\frac{1}{2}\right)^{4x-3}$

Como a base é um número que pertence ao intervalo]0, 1[, então deve-se inverter o sinal da inequação entre os expoentes, assim: $x^2 - 4x + 3 < 0$.

Resolvendo a equação $x^2 - 4x + 3 = 0$, obtêm-se as raízes $x' = 1$ e $x'' = 3$.



Portanto, $1 < x < 3$.

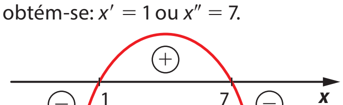
Desse modo, x pertence ao intervalo]1, 3[.

Resposta: alternativa **d**.

52. Para encontrar a solução, deve-se manter a mesma base em ambos os lados da inequação. Logo:

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-8x+5} > 4 \Rightarrow [(2)^{-1}]^{x^2-8x+5} > 2^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2^{-x^2+8x-5} > 2^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow -x^2 + 8x - 7 > 0$

Resolvendo essa inequação do 2º grau, obtém-se: $x' = 1$ ou $x'' = 7$.



Logo, apenas dois números inteiros ímpares pertencem ao intervalo]1, 7[, a saber: 3 e 5.

Resposta: alternativa **b**.

53. Considerando $t = 2$, encontram-se os seguintes valores numéricos de cada função:

$F_1(2) = 2^2 + 96 = 4 + 96 = 100$
$F_2(2) = 9 \cdot 2^2 + 64 = 9 \cdot 4 + 64 =$
$= 36 + 64 = 100$

Ou seja, para $t = 2$ pode-se concluir que $B_1 = B_2$.

Considerando $t = 3$:

$F_1(3) = 3^2 + 96 = 9 + 96 = 105$
$F_2(3) = 9 \cdot 3^2 + 64 = 9 \cdot 9 + 64 =$
$= 81 + 64 = 145$

Assim, pode-se concluir que, após o instante $t = 2$, o crescimento de B_1 será menor do que o de B_2.

Resposta: alternativa **b**.

Atividades complementares

1. Considerando os dados fornecidos pelo enunciado:

$x^2 + 1 = \left[(1{,}2)^{-\frac{1}{2}}\right]^2 + 1 =$
$= \left(\frac{6}{5}\right)^{-1} + 1 = \frac{5}{6} + 1 = \frac{11}{6}$

Resposta: alternativa **b**.

2. Aplicando as propriedades da fatoração:

$\frac{2^{6n} - 1}{2^{6n} + 2^{3n+1} + 1} = \frac{(2^{3n} - 1)(2^{3n} + 1)}{(2^{3n} + 1)^2} =$
$= \frac{2^{3n} - 1}{2^{3n} + 1}$

Resposta: alternativa **e**.

3. Resolvendo ambas as equações:

$\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{256}{81} \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{4}{3}\right)^4 \Rightarrow$
$\Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^{-4} \Rightarrow x = -4$

$\left(\frac{y}{3}\right)^2 = 729 \Rightarrow \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 3^6 \Rightarrow$
$\Rightarrow y^2 = 3^8 \Rightarrow y = 81$

Portanto: $y + 3x = 81 + 3(-4) = 69$

Resposta: alternativa **04**.

4. Resolvendo a expressão:

$(2^{-3{,}5} \cdot \sqrt{50}) + 0{,}125 + \frac{7}{28} =$
$= \left(\frac{\sqrt{2 \cdot 5^2}}{\sqrt{2^7}}\right) + \frac{1}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} = 1$

Resposta: alternativa **a**.

5. De acordo com o enunciado, a classificação espectral do Sol é G2, cuja temperatura é de 5770 K. Conforme a tabela, que usa o Sol como unidade, estrelas dessa classificação possuem luminosidade, massa e raio iguais aos do Sol.

A temperatura da estrela é 5 vezes a temperatura do Sol. Utilizando os dados de temperatura de uma estrela da mesma classificação espectral do Sol, temos:

$5770 \cdot 5 = 28\,850$ K

Isso corresponde a uma estrela de classificação espectral B0. Pela tabela, estrelas dessa classificação possuem uma luminosidade de $2 \cdot 10^4$, ou seja, 20 000.

Como os dados da tabela utilizam a luminosidade do Sol como unidade, a ordem de grandeza da luminosidade dessa estrela é 20 000 vezes a luminosidade do Sol.

Resposta: alternativa **a**.

6. Segundo os dados fornecidos pelo gráfico, pode-se concluir que os pontos (2, 8) e (0, −1) pertencem ao gráfico da função *f*. Logo:
$f(0) = a \cdot 3^0 + b \Rightarrow a + b = -1$
$f(2) = a \cdot 3^2 + b \Rightarrow 9a + b = 8$
Portanto, chega-se no sistema:
$\begin{cases} a + b = -1 \\ 9a + b = 8 \end{cases}$
Subtraindo a primeira equação da segunda, tem-se: $a = \frac{9}{8}$. Substituindo o valor de *a* na primeira equação:
$a + b = -1 \Rightarrow b = -1 - \frac{9}{8} \Rightarrow b = -\frac{17}{8}$
Portanto, pode-se afirmar:
$a \cdot b = \frac{9}{8} \cdot \left(-\frac{17}{8}\right) = -\frac{153}{64}$
Logo, é um número situado entre −4 e −1.
Resposta: alternativa **a**.

7. Segundo o enunciado, deve-se calcular a população de bactérias depois de 20 minutos. Porém, a função é dada em hora, por isso deve-se transformar 20 minutos em horas, ou seja: $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$.
Portanto:
$p(t) = 40 \cdot 2^{3t} \Rightarrow p\left(\frac{1}{3}\right) = 40 \cdot 2^{3 \cdot \frac{1}{3}} \Rightarrow$
$\Rightarrow p\left(\frac{1}{3}\right) = 80$
Portanto, após 20 minutos, a quantidade inicial de bactérias foi duplicada.
Resposta: alternativa **d**.

8. Segundo as informações contidas no gráfico, pode-se observar que os pontos (0, 60 000) e (1, 54 000) pertencem à função *f*. Logo:
$f(0) = b \cdot a^0 \Rightarrow 60\,000 = b$
$f(1) = 60\,000 \cdot a^1 \Rightarrow$
$\Rightarrow 54\,000 = 60\,000 \cdot a \Rightarrow a = 0{,}9$
Portanto, a função de depreciação é $f(t) = 60\,000 \cdot 0{,}9^t$.
Então, ao calcular *f*(2):
$f(2) = 60\,000 \cdot 0{,}9^2 \Rightarrow f(2) = 48\,600$
Resposta: alternativa **c**.

9. Considerando que, em uma condição inicial $t = 0$, a quantidade de substância é 800 g; pode-se afirmar que:
$Q(t) = k \cdot 2^{-0{,}5t} \Rightarrow Q(0) = k \cdot 2^{-0{,}5 \cdot 0} \Rightarrow$
$\Rightarrow k = 800$
Como 25% de 800 é 200, o tempo necessário para que a quantidade de uma substância chegue a esse valor é:
$200 = 800 \cdot 2^{-0{,}5t} \Rightarrow 2^{-2} = 2^{-0{,}5t} \Rightarrow t = 4$
Resposta: alternativa **b**.

10. Aplicando as propriedades da potenciação:
$\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right)^{2x-2} = \frac{1}{27} \Rightarrow \left(3^{-\frac{3}{2}}\right)^{2x-2} = 3^{-3} \Rightarrow$
$\Rightarrow 3^{-3x+3} = 3^{-3} \Rightarrow$
$\Rightarrow -3x + 3 = -3 \Rightarrow x = 2$
Resposta: alternativa **d**.

11. Aplicando as propriedades da potenciação na equação $3^{2k} - 4 \cdot 3^k + 3 = 0$, pode-se escrevê-la da seguinte forma:
$3^{2k} - 4 \cdot 3^k + 3 = 0 \Rightarrow (3^k)^2 - 4 \cdot 3^k + 3 = 0$
Fazendo $3^k = y$, tem-se $y^2 - 4y + 3 = 0$ e, resolvendo essa equação do 2º grau, obtêm-se as raízes $y' = 3$ e $y'' = 1$.
$y = 3 \Rightarrow 3^k = 3 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow k^2 = 1$
$y = 1 \Rightarrow 3^k = 3^0 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow k^2 = 0$
Resposta: alternativa **b**.

12. Considerando a equação presente no enunciado e aplicando as propriedades de potência, temos:
$9^{\sqrt{x}} - 8 \cdot 3^{\sqrt{x}} - 9 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3^{2\sqrt{x}} - 8 \cdot 3^{\sqrt{x}} - 9 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (3^{\sqrt{x}})^2 - 8 \cdot 3^{\sqrt{x}} - 9 = 0$
Substituindo $3^{\sqrt{x}} = y$:
$y^2 - 8 \cdot y - 9 = 0$
Resolvendo a equação do 2º grau, obtêm-se as raízes $y' = -1$ e $y'' = 9$. Note que a raiz $y' = -1$ não é solução dentro do conjunto dos números reais; logo, para $y'' = 9$, temos:
$3^{\sqrt{x}} = 9 \Leftrightarrow 3^{\sqrt{x}} = 3^2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4$
Assim, a solução fica entre $3{,}5 < k < 5{,}5$.
Resposta: alternativa **d**.

13. De acordo com o enunciado, depois de 10 dias, ou seja, $t = 10$, a população de insetos reduziu à quarta parte da população inicial, ou seja, $\frac{N_0}{4}$. Logo:
$N(t) = N_0 \cdot 2^{kt} \Rightarrow \frac{N_0}{4} = N_0 \cdot 2^{k \cdot 10} \Rightarrow$
$\Rightarrow 2^{-2} = 2^{10k} \Rightarrow k = -5^{-1}$
Resposta: alternativa **b**.

14. Como $V(t) = 10\,000 \cdot (0{,}9)^t$ é a função que calcula a depreciação, então:
$V(t) = 10\,000 \cdot (0{,}9)^t \Rightarrow$
$\Rightarrow 8\,100 = 10\,000 \cdot (0{,}9)^t \Rightarrow$
$\Rightarrow (0{,}9)^2 = (0{,}9)^t \Rightarrow t = 2$
Resposta: alternativa **a**.

15. I. Verdadeira.
Considerando que o instante inicial é $x = 0$:
$q(0) = 2^{5 - 0{,}5 \cdot 0} = 32$
Ou seja, no instante em que o processo foi iniciado, a quantidade de poluente era 32 mg/L.
II. Verdadeira.
Considerando o instante $x = 4$:
$q(4) = 2^{5 - 0{,}5 \cdot 4} = 8$
Ou seja, um quarto da quantidade inicial.
III. Falsa.
Considerando os instantes já calculados $q(0) = 32$ e $q(4) = 8$, pode-se perceber que a função não é crescente.
IV. Verdadeira.
Considerando $x = 2$:
$q(2) = 25 - 0{,}5 \cdot 2 = 16$
Ou seja, a metade da quantidade existente no início do processo.
V. Verdadeira.
Considerando $q(t) = 4$:
$2^{5 - 0{,}5t} = 2^2 \Rightarrow 5 - 0{,}5t = 2 \Rightarrow 3 = 0{,}5t \Rightarrow$
$\Rightarrow t = 6$
Portanto, somente na 6ª hora, após iniciado o processo, é que a quantidade de partículas atinge o nível recomendado.

16. Para calcular o tempo que a lagoa vai conter 9 271 peixes, deve-se considerar que $n(T) = 9\,271$. Logo:
$n(T) = 10\,000 - 3^{\frac{T}{3} - 2} \Rightarrow$
$\Rightarrow 9\,271 = 10\,000 - 3^{\frac{T}{3} - 2} \Rightarrow$
$\Rightarrow 3^{\frac{T}{3} - 2} = 10\,000 - 9\,271 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3^{\frac{T}{3} - 2} = 729 \Rightarrow 3^{\frac{T}{3} - 2} = 3^6$
Portanto, $\frac{T}{3} - 2 = 6 \Rightarrow \frac{T}{3} = 8 \Rightarrow T = 24$.
Resposta: alternativa **c**.

17. Considerando que a função de resfriamento é $T(t) = T_A + \alpha \cdot 3^{\beta t}$ e que, segundo o enunciado, os pontos (90, 0) e (270, −16) pertencem a ela, então pode-se concluir que:
a) $0 = -18 + \alpha \cdot 3^{90\beta}$ (I)
$-16 = -18 + \alpha \cdot 3^{270\beta}$ (II)
Da equação (I):
$\alpha = \frac{18}{3^{90\beta}}$
Substituindo α em (II):
$2 = \frac{18}{3^{90\beta}} \cdot 3^{270\beta} \Rightarrow \frac{1}{9} = 3^{180\beta} \Rightarrow$
$\Rightarrow 3^{-2} = 3^{180\beta} \Rightarrow \beta = -\frac{1}{90}$
Substituindo β na equação (I):
$\alpha = \frac{18}{3^{90\left(-\frac{1}{90}\right)}} = \frac{18}{3^{-1}} = 54$
b) Com $\alpha = 54$ e $\beta = -\frac{1}{90}$, a temperatura do congelador deve ser $\frac{2}{3}$ °C maior, ou seja, $T_A + \frac{2}{3}$. Logo:
$T(t) = T_A + \frac{2}{3} \Rightarrow$
$\Rightarrow T_A + \alpha \cdot 3^{\beta t} = T_A + \frac{2}{3} \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha \cdot 3^{\beta t} = \frac{2}{3} \Rightarrow 54 \cdot 3^{-\frac{t}{90}} = \frac{2}{3} \Rightarrow$
$\Rightarrow 3^{-\frac{t}{90}} = 3^{-4} \Rightarrow -\frac{t}{90} = -4 \Rightarrow t = 360$
Portanto, a temperatura é $\left(\frac{2}{3}\right)$ °C maior que a temperatura do ambiente após 360 minutos.

18. Considerando que a quantidade inicial será dada em $t = 0$, temos que $f(0) =$
$= c3^0 \Rightarrow f(0) = c$.
Como a quantidade inicial é igual à constante *c*, para determinar o valor de *t* que faz com que essa quantidade de bactérias seja multiplicada por nove, precisamos encontrar *t* tal que:
$f(t) = 9c \Rightarrow c3^{2t} = 9c \Rightarrow 3^{2t} = 9 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3^{2t} = 3^2 \Rightarrow t = 1$
Resposta: alternativa **a**.

19. Como o ponto *A* pertence à função *f*(*x*), temos:
$f(5) = 2^{5-k} \Rightarrow 4 = 2^{5-k} \Rightarrow 2^2 = 2^{5-k} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2 = 5 - k \Rightarrow k = 3$
Como o ponto *B* pertence à função *g*(*x*), temos:
$g(2) = k \cdot 2 + c \Rightarrow 4 = 2k + c$
Como $k = 3$:
$4 = 2 \cdot 3 + c \Rightarrow 4 = 6 + c \Rightarrow c = -2$
Com os valores de *k* e *c* foram determinados, é possível calcular $f(k) + g(1)$:
$2^{k-k} + 3 \cdot 1 - 2 = 2^0 + 3 - 2 =$
$= 1 + 3 - 2 = 2$
Resposta: alternativa **b**.

20. Para encontrar o fóssil mais antigo é necessário determinar o maior valor de t utilizando os valores apresentados na tabela na função $Q(t) = Q_0 \cdot 2^{-\frac{t}{5730}}$.

De acordo com a tabela, temos:

Fóssil 1:

$Q_0 = 128$ e $Q(t) = 32$

$32 = 128 \cdot 2^{-\frac{t}{5730}} \Rightarrow \frac{32}{128} = 2^{-\frac{t}{5730}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{8} = 2^{-\frac{t}{5730}} \Rightarrow 2^{-3} = 2^{-\frac{t}{5730}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3 = -\frac{t}{5730} \Rightarrow t = (3 \cdot 5730)$

Fóssil 2:

$Q_0 = 256$ e $Q(t) = 8$

$8 = 256 \cdot 2^{-\frac{t}{5730}} \Rightarrow \frac{8}{256} = 2^{-\frac{t}{5730}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{32} = 2^{-\frac{t}{5730}} \Rightarrow 2^{-5} = 2^{-\frac{t}{5730}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -5 = -\frac{t}{5730} \Rightarrow t = (5 \cdot 5730)$

Fóssil 3:

$Q_0 = 512$ e $Q(t) = 64$

$64 = 512 \cdot 2^{-\frac{t}{5730}} \Rightarrow \frac{64}{512} = 2^{-\frac{t}{5730}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{8} = 2^{-\frac{t}{5730}} \Rightarrow 2^{-3} = 2^{-\frac{t}{5730}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3 = -\frac{t}{5730} \Rightarrow t = (3 \cdot 5730)$

Fóssil 4:

$Q_0 = 1024$ e $Q(t) = 512$

$512 = 1024 \cdot 2^{-\frac{t}{5730}} \Rightarrow \frac{512}{1024} = 2^{-\frac{t}{5730}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2} = 2^{-\frac{t}{5730}} \Rightarrow 2^{-1} = 2^{-\frac{t}{5730}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -1 = -\frac{t}{5730} \Rightarrow t = (1 \cdot 5730)$

Fóssil 5:

$Q_0 = 2048$ e $Q(t) = 128$

$128 = 2048 \cdot 2^{-\frac{t}{5730}} \Rightarrow \frac{128}{2048} = 2^{-\frac{t}{5730}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{16} = 2^{-\frac{t}{5730}} \Rightarrow 2^{-4} = 2^{-\frac{t}{5730}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4 = -\frac{t}{5730} \Rightarrow t = (4 \cdot 5730)$

Logo, o fóssil mais antigo é o 2, com $5 \cdot 5730$ anos.

Resposta: alternativa **b**.

Capítulo 6 • Grandezas e medidas

Atividades

1. A unidade de comprimento no SI é o metro. Milha, pé, polegada e jarda são unidades de comprimento do sistema imperial de medidas.

Resposta: alternativa **b**.

2. 8 m = 80 dm = 800 cm

Resposta: alternativa **c**.

3. $0{,}2\,\mu m = 0{,}2 \times 10^{-3}\,mm = 2 \times 10^{-4}\,mm$

Resposta: alternativa **c**.

4. **a)** Grama (g) e kilograma (kg) – unidades de medida de massa; litro (L) – unidade de medida de volume.

b) Temos que $1\,L = 0{,}001\,m^3 = 1\,dm^3$. Logo, $1{,}5\,L = 0{,}0015\,m^3 = 1{,}5\,dm^3$.

c) A unidade de base de massa no SI é o kilograma (kg). Temos:

Quantidade de ouro:

$60\,g = 60 \cdot 10^{-3}\,kg = 0{,}06\,kg$.

A quantidade de minerais (1,5 kg) já está expressa em uma unidade de base do SI.

5. A próxima hora *seguidinha* é 23:45. De 12:34 até 23:45 se passaram 11 horas e 11 minutos, o que equivale a:

$11 \cdot 60\,min + 11\,min = 671\,min$

Resposta: alternativa **a**.

6. Com 2 kg (ou 2 000 g) de chocolate, é possível fazer $\frac{2000}{34} \simeq 58{,}8$ bombons.

Com 1 L (ou 1 000 mL) de creme de leite, é possível fazer $\frac{1000}{12} \simeq 83{,}3$ bombons.

Como são necessários ambos os ingredientes para fazer a receita, a quantidade máxima de bombons que pode ser feita é 58.

Resposta: alternativa **c**.

7. $2t - 920\,kg = 2000\,kg - 920\,kg = 1080\,kg$

Portanto, ainda faltam ser carregados 1 080 kg.

Resposta: alternativa **b**.

8. **a)** $15\,000\,cm^2 = 15\,000 \cdot 10^{-4}\,m^2 = 1{,}5\,m^2$

b) $5\,m^3 = 5 \cdot 1000\,L = 5000\,L$

c) $0{,}003\,km^2 = 3 \cdot 10^{-3}\,km^2 =$
$= 3 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{10}\,cm^2 = 3 \cdot 10^7\,cm^2$

d) $2500\,mL = 2{,}5 \cdot 10^3\,mL = 2{,}5 \cdot 1\,L =$
$= 2{,}5 \cdot 10^{-3}\,m^3$

9. A ponta da tampa da caneta está entre os valores 11 cm e 12 cm, mais perto de 12 cm que de 11 cm. Assim, a medida do comprimento da caneta está mais próxima de 11,6 cm.

Resposta: alternativa **c**.

10. O comprimento de 11,6 cm da caneta possui 3 algarismos significativos, dois desses são certos (1 e 1) e o outro é duvidoso (6).

11. $1{,}50\,m - 800\,mm =$
$= 150\,cm - 80\,cm = 70\,cm$

Resposta: alternativa **a**.

12. 16 onças = 1 libra $\Rightarrow$ 1 onça = $\frac{1}{16}$ libras

$x = 0{,}4 \cdot$ onças $= 0{,}4 \cdot \frac{1}{16}$ libras $=$
$= 0{,}025$ libras

Resposta: alternativa **c**.

13. $1\,cm/min = \frac{1\,cm}{1\,min} = \frac{10^{-2}\,m}{60\,s} =$
$= 10^{-2} \times 60^{-1}\,m/s$

Resposta: alternativa **b**.

14. Sabemos que $400\,t = 400 \cdot 10^3\,kg =$
$= 400 \cdot 10^3 \cdot 10^3\,g$. Logo:

$d = \frac{m}{V} \Rightarrow 0{,}8\,g/cm^3 = \frac{400\,t}{V} \Rightarrow$

$\Rightarrow V = \frac{400 \cdot 10^6\,g}{0{,}8\,g/cm^3} \Rightarrow$

$\Rightarrow V = 500 \cdot 10^6\,cm^3 = 500\,m^3$

Portanto, o volume de petróleo é $500\,m^3$.

15. Temos que $2\,kg = 2000\,g$ e
$0{,}5\,L = 0{,}5\,dm^3 = 500\,cm^3$.

Portanto, a densidade d do tijolo é de:

$d = \frac{2000\,g}{500\,cm^3} = 4\,g/cm^3$

Resposta: alternativa **c**.

16. A massa (m) de uma folha de papel A4, em grama, é de:

$d = \frac{m}{V} \Rightarrow 75 = \frac{m}{0{,}062} \Rightarrow m = 4{,}65$

Assim, a massa de papel que um pé de eucalipto rende é igual a:

$20\,000 \cdot 4{,}65\,g = 93\,000\,g = 93\,kg$

Resposta: alternativa **e**.

17. Seja x o número de habitantes deste município em 2022.

$3{,}5\,hab./km^2 = \frac{x}{1150\,km^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 1150 \cdot 3{,}5\,hab. \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 4025\,hab.$

Logo, o número total de habitantes no município em 2022, de acordo com o IBGE, é um número entre 4 000 e 4 100 pessoas.

Resposta: alternativa **e**.

18. Habitantes da zona rural:

$40\% \cdot 30\,000\,hab. = 12\,000\,hab.$

Área da zona rural:

$60\% \cdot 250\,km^2 = 150\,km^2$

Densidade demográfica da zona rural:

$\frac{12\,000\,hab.}{150\,km^2} = 80\,hab./km^2$

Resposta: alternativa **a**.

19. Calculando a densidade demográfica dos cinco locais, obtemos:

Densidade demográfica de Malta:

$\frac{400\,000\,hab.}{300\,km^2} \simeq 1333{,}33\,hab./km^2$

Densidade demográfica do Brasil:

$\frac{200\,000\,000\,hab.}{9\,000\,000\,km^2} \simeq 22{,}22\,hab./km^2$

Densidade demográfica do México:

$\frac{120\,000\,000\,hab.}{2\,000\,000\,km^2} = 60\,hab./km^2$

Densidade demográfica da Namíbia:

$\frac{2\,000\,000\,hab.}{820\,000\,km^2} \simeq 2{,}44\,hab./km^2$

Densidade demográfica da Ilha Norfolk:

$\frac{1841\,hab.}{35\,km^2} = 52{,}6\,hab./km^2$

Dos cinco locais, o mais densamente povoado é Malta.

Resposta: alternativa **a**.

20. Resposta pessoal. Exemplo de resposta: Um liquidificador de potência 550 W foi utilizado durante 12 h em um mês. Na conta de luz, quanto foi cobrado pelo uso do liquidificador, sabendo que o valor cobrado por kWh é R$ 0,53?

21. Ano-luz é uma unidade de medida de comprimento; atmosfera é uma unidade de medida de pressão; tesla é uma unidade de medida de intensidade de campo magnético; watt é uma unidade de medida de potência; e hertz é uma unidade de medida de frequência.
Resposta: alternativa **a**.

22. $4{,}4$ anos-luz $= 4{,}4 \cdot 9{,}5 \times 10^{15}$ m $=$
$= 41{,}8 \times 10^{15}$ m $= 4{,}18 \times 10^{16}$ m $=$
$= 4{,}18 \times 10^{13}$ km $\simeq 4{,}2 \times 10^{13}$ km
Resposta: alternativa **b**.

23. $1{,}496 \cdot 10^2$ milhões de kilometros $=$
$= 1{,}496 \cdot 10^2 \cdot 10^6$ km $=$
$= 1{,}496 \cdot 10^2 \cdot 10^6 \cdot 10^3$ m $= 1{,}496 \cdot 10^{11}$ m
Resposta: alternativa **e**.

24. $240\,000$ ha $= 2{,}4 \cdot 10^5$ ha $=$
$= 2{,}4 \cdot 10^5$ hm^2 $= 2{,}4 \cdot 10^5 \cdot 10^{-2}$ km^2 $=$
$= 2{,}4 \cdot 10^3$ km^2 $= 2\,400$ km^2

25. 5 alqueires paulistas $= 5 \cdot 2{,}42$ ha $= 12{,}1$ ha
O número de sacas que o Sr. João espera colher é próximo de:
$48 \cdot 12{,}1 = 580{,}8 \simeq 580$.
Resposta: alternativa **b**.

26. $80\ GB_{Fabricante} = 75\ GB_{\ Usuário} \Rightarrow$
$\Rightarrow 1\ GB_F = \frac{15}{16}\ GB_U$
$500\ GB_F = 500 \cdot \frac{15}{16} GB_U =$
$= 468{,}75\ GB_U \simeq 468\ GB_U$
Resposta: alternativa **a**.

27. Área do terreno para venda:
3 ha $- 0{,}9$ ha $= 2{,}1$ ha $= 21\,000$ m^2
Número de terrenos a serem vendidos:
$21\,000$ m^2 $: 300$ m^2 $= 70$
O fazendeiro venderá 20 terrenos por R$ 20.000,00 cada um e 50 terrenos por R$ 30.000,00 cada um, o que totaliza:
R$ 400.000,00 + R$ 1.500.000,00 =
= R$ 1.900.000,00.
Resposta: alternativa **c**.

28. Sabemos que $2^{11} = 2\,048$ e $2^{12} = 4\,096$.
Assim, para que um *byte* seja capaz de representar pelo menos 2 560 informações distintas, o número de *bits* em um *byte* deve passar de 8 para 12.
Resposta: alternativa **b**.

29. Sabemos as seguintes equivalências:
$4{,}8$ GB $= 4{,}8 \cdot 2^{10}$ MB $= 4{,}8 \cdot 2^{10} \cdot 8$ *megabits* $= 39\,321{,}6$ *megabits*
16 min $= 16 \cdot 60$ s $= 960$ s
Logo, a taxa de transferência de *download* pode ser expressa por:
$$\frac{39\,321{,}6\ \textit{megabits}}{960\ \text{s}} = 40{,}96\ \text{Mbps}$$

Atividades complementares

1. Metro é uma unidade de medida de comprimento; newton é uma unidade de medida de força; segundo é uma unidade de medida de tempo; volt é uma unidade de medida de tensão elétrica; e kelvin é uma unidade de medida de temperatura.
Resposta: alternativa **c**.

2. $1{,}5$ m $+ 18$ mm $+ 1$ m $=$
$= 1{,}5$ m $+ 0{,}018$ m $+ 1$ m $= 2{,}518$ m
Resposta: alternativa **d**.

3. 2500 polegadas $= 2\,500 \cdot 2{,}54$ cm $=$
$= 6\,350$ cm $= 63{,}5$ m
Portanto, um quarteirão que tem 2 500 polegadas de comprimento tem como correspondente uma medida entre 50 metros e 100 metros.
Resposta: alternativa **c**.

4. 50 mi $= 50 \cdot 1610$ m $= 50 \cdot 1{,}610$ km $=$
$= 80{,}5$ km
Assim, desprezando as casas decimais, o valor que deveria estar escrito na placa seria 80 km.
Resposta: alternativa **c**.

5. Temos que 3 pés $= 0{,}9144$ m.
Logo, 1 pé $= 0{,}3048$ m $= 30{,}48$ cm.
Além disso, 1 polegada $= 2{,}54$ cm.
Assim, para saber quantas polegadas equivalem a um pé, faz-se a divisão:
$30{,}48$ cm $: 2{,}54$ cm $= 12$.
Portanto, um pé equivale a 12 polegadas.
Resposta: alternativa **d**.

6. 1000 min = 16h40min
14h15min + 16h40min = 30h55min =
= 24h + 6h55min
Portanto, o relógio irá marcar 6h55min.
Resposta: alternativa **d**.

7. A massa de todos os livros da tabela, em kg, é:
Matemática:
$330 \cdot 2100$ dg $= 330 \cdot 0{,}21$ kg $= 69{,}3$ kg
Ciências naturais:
$390 \cdot 0{,}280$ kg $= 109{,}2$ kg
História:
$450 \cdot 3{,}15$ hg $= 450 \cdot 0{,}315 = 141{,}75$ kg
Geografia: $510 \cdot 43{,}7$ dag $= 510 \cdot 0{,}437 =$
$= 222{,}87$ kg
Logo, a massa total dos livros é de 543,12 kg.
Em cada viagem, a massa de livros que pode ser carregada é:
400 kg $- 75$ kg $- 73$ kg $- 30$ kg $= 222$ kg.
Assim, são necessárias $543{,}12 : 222 \simeq 2{,}446$ viagens para carregar todos os livros.
Como essa quantidade deve ser um número inteiro, são necessárias pelo menos 3 viagens para finalizar a tarefa.
Resposta: alternativa **c**.

8. 4 dag $= 4 \cdot 10$ g $= 4 \cdot 10 \cdot 1000$ mg $=$
$= 40\,000$ mg $= 40\,000 \cdot 1$ mg
Logo, em um recipiente de 4 dag, há 40 000 doses de 1 mg.
Resposta: alternativa **a**.

9. Volume de leite:
4 m^3 $= 4000$ L $= 4000 \cdot 1000$ mL
Volume de leite em cada embalagem:
$(4000 \cdot 1000\ \text{mL}) : (4000) = 1000$ mL
Resposta: alternativa **e**.

10. $\frac{1\ \mu\text{m}}{10\ \text{nm}} = \frac{10^{-6}\ \text{m}}{10 \cdot 10^{-9}\ \text{m}} = \frac{1}{10^{-2}} = 10^2 = 100$
Resposta: alternativa **d**.

11. $36\ \text{km/h} = \frac{36\ \text{km}}{1\ \text{h}} = \frac{36 \cdot 1000\ \text{m}}{3\,600\ \text{s}} =$
$= \frac{36\,000\ \text{m}}{3\,600\ \text{s}} = 10\ \text{m/s}$
Resposta: alternativa **d**.

12. 1 attosegundo $= 10^{-9} \cdot 10^{-9}$ s $= 10^{-18}$ s
1 femtosegundo $= 10^{-6} \cdot 10^{-9}$ s $=$
$= 10^{-15}$ s $= 10^3 \cdot 10^{-18}$ s $=$
$= 10^3$ attosegundos
Portanto, 200 femtosegundos $=$
$= 200 \cdot 10^3$ attosengundos $=$
$= 200\,000$ attosengundos.
Resposta: alternativa **c**.

13. Seja x o número de habitantes desta cidade em 2018.
$4\,406{,}96\ \text{hab./km}^2 = \frac{x}{435\ \text{km}^2} \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 435 \cdot 4\,406{,}96$ hab. $=$
$= 1\,917\,027{,}6 \simeq 1\,917\,027$ hab.
Resposta: alternativa **c**.

14. Com o novo televisor, a economia em energia elétrica por hora é de 100 W $- 60$ W $= 40$ W. Além disso, considerando um uso diário de 5 horas do novo aparelho, durante 30 dias de um mês, calcula-se a economia mensal:
$5\text{h} \cdot 30 \cdot 40$ W $= 6\,000$ Wh $= 6$ kWh $=$
$= 6 \cdot$ R\$ 0,50 = R\$ 3,00
Logo, a quantidade necessária de meses para cobrir o valor pago pelo televisor é de:
R$ 1 200 : R$ 3,00 = 400 meses.
Resposta: alternativa **b**.

Capítulo 7

• Proporcionalidade e semelhança

Atividades

1. Como as duas medidas, a altura da pessoa e a medida da sombra, já estão em metro:
$\frac{1{,}95}{2{,}60} = \frac{3}{4}$

2. **a)** Sim, pois:
$\frac{4}{9} = \frac{3}{y} = \frac{2}{x}$
b) Pelas informações do enunciado, pode-se calcular:
$\frac{3}{4} = \frac{y}{9} \Rightarrow y = \frac{27}{4} = 6{,}75$
$\frac{2}{3} = \frac{x}{y} \Rightarrow x = \frac{13{,}5}{3} = 4{,}5$

3. Segundo o esquema do enunciado, como há um feixe de retas paralelas cortadas por duas transversais:
$\frac{AD}{AB} = \frac{AM}{AN} \Rightarrow \frac{30}{40} = \frac{AM}{50} \Rightarrow AM = 37{,}5$
$\frac{AN}{NP} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{50}{160} = \frac{40}{BC} \Rightarrow BC = 128$
Portanto, $BC = 128$ m e $AM = 37{,}5$ m.

4. Considerando as informações fornecidas pelo enunciado:

$\frac{AB}{CD} = \frac{MN}{PQ} \Rightarrow \frac{x+3}{x-2} = \frac{40}{30} \Rightarrow$

$\Rightarrow 30(x+3) = 40(x-2)$

$30x + 90 = 40x - 80 \Rightarrow x = 17$

Portanto:

$AB = x + 3 \Rightarrow AB = 17 + 3 = 20$

$CD = x - 2 \Rightarrow CD = 17 - 2 = 15$

$AB = 20$ cm e $CD = 15$ cm.

5. **a)** Não, pois, para resolver o problema, é necessário estabelecer uma razão entre as retas *r* e *s* e, para isso, são necessárias medidas correspondentes em ambas as retas, o que não ocorre na reta *s*.

b) Para resolver a atividade, é necessário saber a medida de $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ ou $\overline{DF}$.

6. Considerando as informações fornecidas pelo enunciado:

$\begin{cases} AB + CD = 12 \\ AB - CD = 2 \end{cases}$

Adicionando as duas equações: $AB = 7$.

Substituindo esse resultado em qualquer uma das equações do sistema: $CD = 5$.

Ainda utilizando as informações do enunciado: $EF = 3GH - 2$.

Considerando $GH = x$:

$\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH} \Rightarrow \frac{7}{5} = \frac{3x-2}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow 7x = 5(3x - 2) \Rightarrow 7x = 15x - 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 1{,}25$

Logo, $EF = 3 \cdot 1{,}25 - 2 = 1{,}75$.

Então, $AB + CD + EF + GH =$

$= 7 + 5 + 1{,}75 + 1{,}25 = 15$.

7. **a)** Sim, está correta, pois, $FH - 30 = FG$, que é correspondente ao lado *MN* que mede 40.

b) Sim, pois a proporção apresenta apenas uma incógnita e, portanto, pode ser calculada.

c) Sim. Uma possibilidade é $\frac{FH}{30} = \frac{64}{24}$.

8. Estabelecendo uma relação de proporcionalidade entre os termômetros:

$\frac{212 - 32}{t_F - 32} = \frac{100 - 0}{t_C - 0} \Rightarrow$

$\Rightarrow 180\, t_C = 100(t_F - 32) \Rightarrow$

$\Rightarrow t_C = \frac{5}{9}(t_F - 32)$

Portanto, considerando a temperatura da foto:

$t_C = \frac{5}{9}(t_F - 32) \Rightarrow$

$\Rightarrow t_C = \frac{5}{9}(100{,}9 - 32) \simeq 38{,}28 \Rightarrow$

$\Rightarrow t_C \simeq 38{,}28$ °C

9. Para que dois polígonos sejam semelhantes, é necessário que os ângulos internos correspondentes sejam congruentes e os lados correspondentes, proporcionais.

Em um paralelogramo, os ângulos adjacentes são suplementares, portanto os ângulos internos correspondentes dos paralelogramos são congruentes.

Verificando a proporcionalidade dos lados correspondentes:

$\frac{10}{30} = \frac{4}{12}$

Portanto, os paralelogramos são semelhantes.

10. Como o lado correspondente de $\overline{MN}$ é $\overline{AB}$, conclui-se:

$\frac{6}{MN} = \frac{3}{5} \Rightarrow 3MN = 30 \Rightarrow MN = 10$

11. Alternativa **a**: falsa, pois não basta ter só os ângulos congruentes, dois a dois. Além disso, os lados também devem ser proporcionais, dois a dois.

Alternativa **b**: falsa, pois não basta ter só os lados proporcionais, dois a dois. Além disso, os ângulos também devem ser congruentes, dois a dois.

Alternativa **c**: falsa, pois, por exemplo, um losango não é semelhante a um retângulo não quadrado.

Alternativa **e**: falsa, pois a soma de um triângulo e um quadrado podem ser obtidas pela expressão $(n - 2) \cdot 180$, por exemplo.

Resposta: alternativa **d**.

12. Como os decágonos regulares são semelhantes, pode-se afirmar que $\frac{l_1}{l_2} = \frac{3}{5}$, em que l_2 representa o lado do polígono de maior lado. Diante dessa informação pode-se concluir:

$\frac{P_1}{P_2} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{P_1}{720} = \frac{3}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow P_1 = \frac{2160}{5} = 432$

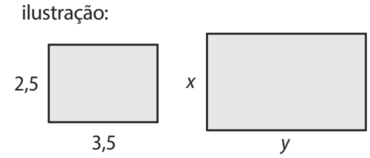
Portanto, o perímetro do polígono menor é 432 mm.

Assim, o lado do menor decágono será:

$l_1 = \frac{432}{10} = 43{,}2$

Ou seja, $l_1 = 43{,}2$ mm ou 4,32 cm.

13. A partir dos dados fornecidos pelo enunciado, pode-se construir a seguinte ilustração:



Como a razão de semelhança entre o tampo maior e o menor é 1,5:

$\frac{x}{2{,}5} = \frac{y}{3{,}5} = 1{,}5$

Logo:

$x = 2{,}5 \cdot 1{,}5 = 3{,}75$

$y = 3{,}5 \cdot 1{,}5 = 5{,}25$

Calculando o perímetro do tampo maior, obtemos:

$P = 2 \cdot 3{,}75 + 2 \cdot 5{,}25 = 18 \Rightarrow P = 18$

Portanto, o perímetro é 18 m.

14. Resposta pessoal. Exemplos de perguntas:

1. Qual é a razão de semelhança entre os trapézios *ABCD* e *MNPQ*?

Como os lados $\overline{CB}$ e $\overline{NP}$ são correspondentes, pois são a base menor de ambos os trapézios, pode-se responder:

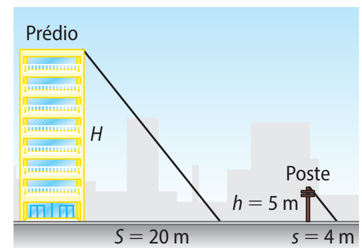
$\frac{CB}{NP} = \frac{27}{18} = \frac{3}{2}$

2. Qual é a medida do lado $\overline{MN}$?

Como já se sabe a razão de proporcionalidade entre os trapézios e o lado correspondente de $\overline{MN}$ é $\overline{AB}$, pode-se responder:

$\frac{AB}{MN} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{25}{MN} = \frac{3}{2} \Rightarrow MN = \frac{50}{3}$

15. Considerando os dados fornecidos pelo enunciado, pode-se elaborar o seguinte esquema:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Como os triângulos são semelhantes:

$\frac{H}{h} = \frac{S}{s} \Rightarrow \frac{H}{5} = \frac{20}{4} \Rightarrow H = 25$

Resposta: alternativa **a**.

16. Considerando as informações fornecidas pelo enunciado:

$\overline{EJ} \cong \overline{JT}$ (*J* é o ponto médio do segmento $\overline{ET}$)

$S\hat{J}E \cong P\hat{J}T$ (são ângulos opostos pelo vértice)

$\overline{SJ} \cong \overline{JP}$ (*J* é o ponto médio do segmento $\overline{SP}$)

Disso, temos que os pontos *ESTP* formam um paralelogramo, pois as diagonais desse paralelogramo $\overline{SP}$ e $\overline{ET}$ intersectam-se em seus pontos médios que é o ponto *C*. Logo, $\overline{ES} // \overline{PT}$. Daí, vem: $S\hat{E}J \cong P\hat{T}J$ e $J\hat{S}E \cong J\hat{P}T$. Assim, os triângulos *EJS* e *TJP* são semelhantes pelo caso AA de razão igual a 1. Isto é, são congruentes.

$2x + 7 = 21 \Rightarrow x = 7$

Encontrando o valor de *x* e sabendo que os lados $\overline{SJ}$ e $\overline{JP}$ são congruentes, pode-se afirmar que a distância que Júlia deverá percorrer até o parque saindo de sua casa será de 7 km.

17. Sabendo que $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são paralelos, verifica-se que os triângulos *APB* e *CPD* são semelhantes; logo:

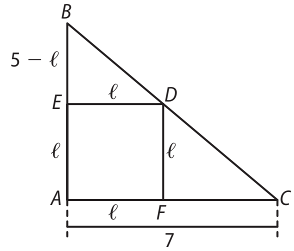
$\frac{CD}{AB} = \frac{DP}{BP} \Rightarrow \frac{CD}{36} = \frac{40}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow 5 \cdot CD = 36 \cdot 40 \Rightarrow CD = 288$

O comprimento da lagoa é 288 metros.

Resposta: alternativa **c**.

18. Considere a figura para a resolução. Seja ℓ o lado do quadrado, logo $BE = 5 - \ell$.



Os triângulos *ABC* e *EBD* são semelhantes pelo caso AA, pois eles têm o ângulo do vértice *B* em comum e ambos têm um ângulo reto. Daí, obtemos a seguinte proporção:

$\frac{EB}{AB} = \frac{ED}{AC} \Rightarrow \frac{5 - \ell}{5} = \frac{\ell}{7} \Rightarrow$

$\Rightarrow 5\ell = 7 \cdot (5 - \ell) \Rightarrow 5\ell = 35 - 7\ell \Rightarrow$

$\Rightarrow 12\ell = 35 \Rightarrow \ell = \frac{35}{12}$

Portanto, o lado do quadrado mede $\frac{35}{12}$ cm.

Resposta: alternativa **c**.

19. Como a mesa tem comprimento igual a 2 metros, QL = 2 m − 1,2 m = 0,8 m. Seja o ponto *C* o vértice do ângulo reto do triângulo retângulo em que a hipotenusa é o segmento $\overline{BL}$. Assim, $\triangle LCB \sim \triangle LQP$ pelo caso AA. Daí, temos a seguinte proporção:

$\frac{LC}{CB} = \frac{LQ}{QP} \Rightarrow \frac{1{,}2}{1} = \frac{0{,}8}{QP} \Rightarrow$

$\Rightarrow QP = \frac{0{,}8}{1{,}2} \simeq 0{,}67$

$QP \simeq 0{,}67$ m = 67 cm

Resposta: alternativa **a**.

20. Para determinar a área do retângulo *ABCD*, devemos obter as medidas de *BC* e *CD*. Como segue:

$BC = BE - CE = 15 - 6 = 9$

Logo, *BC* = 9 cm.

Os triângulos *BCQ* e *BEF* são semelhantes pelo caso AA, pois eles têm o ângulo do vértice *B* em comum e ambos têm dois ângulos retos. Disso podemos obter a seguinte proporção: $\frac{BC}{BE} = \frac{CQ}{EF}$. Daí, temos:

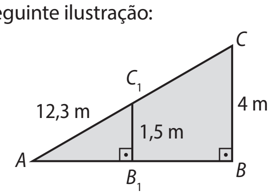
$\frac{9}{15} = \frac{CQ}{8} \Rightarrow CQ = \frac{8 \cdot 9}{15} \Rightarrow CQ = 4{,}8$

E como CD = CQ + QD = 4,8 + 1,2 = 6, CD = 6.

Portanto, a área do retângulo *ABCD* é igual a 6 cm · 9 cm = 54 cm².

Resposta: alternativa **b**.

21. a) Considerando os dados fornecidos pelo enunciado, pode-se elaborar a seguinte ilustração:



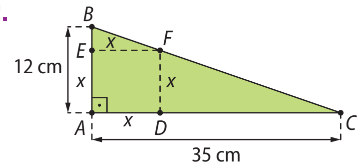
b) Como os triângulos AB_1C_1 e *ABC* são semelhantes e considerando que $CC_1 = x$, conclui-se:

$\frac{1{,}5}{4} = \frac{12{,}3}{12{,}3 + x} \Rightarrow 12{,}3 + x = \frac{4 \cdot 12{,}3}{1{,}5}$

$x = 32{,}8 - 12{,}3 \Rightarrow x = 20{,}5$

A pessoa deve caminhar 20,5 m.

22.



Sejam $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ os catetos do triângulo retângulo e *AEFD* o quadrado que será extraído. Pelo caso AA, $\triangle ABC \sim \triangle EBF$, daí, tem-se:

$\frac{AB}{BE} = \frac{AC}{EF} \Rightarrow \frac{12 - x}{12} = \frac{x}{35} \Rightarrow x = \frac{420}{47}$

Como $\frac{420}{47} \simeq 8{,}94$, a medida do lado do quadrado desejado pelo marceneiro está mais próxima de 9 cm.

Resposta: alternativa **c**.

23. Pelo caso AA, $\triangle AEC \sim \triangle DEB$, pois os ângulos do vértice *E* são opostos pelo vértice e os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$; e $\hat{A}$ e $\hat{D}$ desses triângulos são alternos internos, portanto, congruentes. Disso, obtemos a seguinte proporção:

$\frac{AC}{DB} = \frac{AE}{DE} \Rightarrow \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = \frac{AE}{DE} \Rightarrow AE = \frac{2}{3}DE$

Temos também que $\triangle AEF \sim \triangle ADB$ pelo caso AA, pois ambos têm um ângulo reto e o ângulo do vértice *A* em comum. Disso, temos a seguinte proporção:

$\frac{AE}{AD} = \frac{EF}{DB}$

Como *AD* = *AE* + *DE*, temos:

$\frac{AE}{AE + DE} = \frac{EF}{DB}$

Como estudamos anteriormente que $AE = \frac{2}{3}DE$, temos:

$\frac{\frac{2}{3}DE}{\frac{2}{3}DE + DE} = \frac{EF}{6} \Rightarrow \frac{\frac{2}{3}DE}{\frac{5}{3}DE} = \frac{EF}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{EF}{6} \Rightarrow EF = \frac{12}{5} \Rightarrow EF = 2{,}4$

Portanto, o comprimento da haste deve ter 2,4 metros.

Resposta: alternativa **c**.

24. Sejam *x*, *y*, *z* lados do triângulo semelhante respectivos aos lados 10, 12, 18:

$\frac{x}{10} = \frac{y}{12} = \frac{z}{18}$

Como o perímetro dos triângulos é 40 cm e 60 cm:

$\frac{60}{40} = \frac{x}{10} \Rightarrow x = 15$

$\frac{60}{40} = \frac{y}{12} \Rightarrow y = 18$

$\frac{60}{40} = \frac{z}{18} \Rightarrow z = 27$

Os lados do triângulo semelhante têm medida 15 cm, 18 cm e 27 cm.

- Resposta pessoal. Exemplo de atividade: Os lados de um triângulo medem 4 cm, 5 cm e 6 cm. Determine as medidas dos lados de um triângulo semelhante ao anterior cujo perímetro é 45 cm.

  Sejam *x*, *y*, *z* lados do triângulo semelhante respectivos aos lados 4, 5, 6:

  $\frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{6}$

  Como os triângulos têm perímetro 15 cm e 45 cm:

  $\frac{45}{15} = \frac{x}{4} \Rightarrow x = 12$

  $\frac{45}{15} = \frac{y}{5} \Rightarrow y = 15$

  $\frac{45}{15} = \frac{z}{6} \Rightarrow z = 18$

  Os lados do triângulo semelhante têm medida 12 cm, 15 cm e 18 cm.

25. O corrimão é formado por duas partes horizontais de 30 cm cada uma e por uma parte inclinada, que corresponde à hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem 90 cm e 120 cm (5 degraus com 24 cm cada um).

Com base nesses dados, a medida (*C*) do corrimão será:

$C = 30 + 30 + \sqrt{90^2 + 120^2} =$

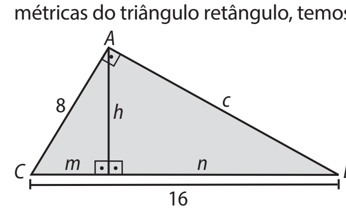
$= 60 + \sqrt{8\,100 + 14\,400} =$

$= 60 + \sqrt{22\,500} = 60 + 150 = 210$

O corrimão mede 210 cm ou 2,10 m.

Resposta: alternativa **d**.

26. De acordo com a ilustração fornecida pelo enunciado e aplicando as relações métricas do triângulo retângulo, temos:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

$16^2 = 8^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = 256 - 64 \Rightarrow$

$\Rightarrow c^2 = 192 \Rightarrow c = 8\sqrt{3}$

$c^2 = 16 \cdot n \Rightarrow (8\sqrt{3})^2 = 16\,n \Rightarrow$

$\Rightarrow n = \frac{192}{16} \Rightarrow n = 12$

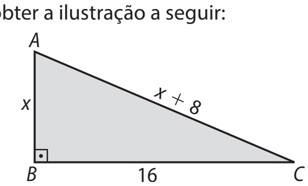
$8^2 = 16 \cdot m \Rightarrow m = \frac{64}{16} = m = 4$

$h^2 = m \cdot n \Rightarrow h^2 = 12 \cdot 4 \Rightarrow h = \sqrt{48} \Rightarrow$

$\Rightarrow h = 4\sqrt{3}$

As medidas são: $m = 4$, $n = 12$, $h = 4\sqrt{3}$ e $c = 8\sqrt{3}$.

27. De acordo com o enunciado, pode-se obter a ilustração a seguir:



Aplicando o teorema de Pitágoras:

$(x + 8)^2 = x^2 + 16^2$

$x^2 + 16x + 64 = x^2 + 256$

$16x = 256 - 64 \Rightarrow x = 12$

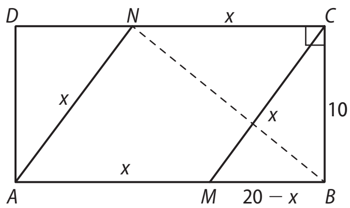
$AC = x + 8$

$AC = 12 + 8 = 20$

Logo, a hipotenusa mede 20 m.

28. Não. Como a altura é relativa à hipotenusa, não é possível calcular as medidas dos catetos. Para ser possível calcular, seria necessário mais uma informação, por exemplo: a medida de uma das projeções.

29. Considerando as informações do enunciado, pode-se elaborar a imagem a seguir:



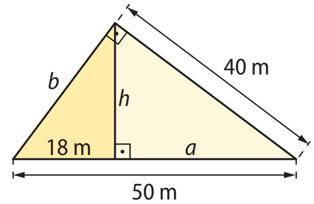
Por meio do triângulo BCM, que é retângulo em B, pode-se estabelecer a seguinte relação:
$x^2 = (20 - x)^2 + 10^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 = 400 - 40x + x^2 + 100 \Rightarrow$
$\Rightarrow 40x = 500 \Rightarrow x = \frac{25}{2}$
Portanto, para calcular a medida NB, pode-se considerar o triângulo retângulo BCN. Assim:
$NB^2 = x^2 + 10^2 \Rightarrow NB^2 = \left(\frac{25}{2}\right)^2 + 10^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow NB^2 = \frac{1025}{4} \Rightarrow$
$\Rightarrow NB = \sqrt{\frac{1025}{4}} = \frac{5\sqrt{41}}{2} \simeq 16$

30. Observando a sequência, os quadrados representados pelas 4ª, 11ª e nª figuras correspondem aos números inteiros 5^2, 12^2 e x^2, em que $x = n - 1$.
Como x precisa ser o maior número, conclui-se:
$x^2 = 5^2 + 12^2 \Rightarrow x^2 = 169 \Rightarrow x = 13$
Portanto, será a 12ª figura.
Resposta: alternativa **b.**

31. Como o trecho RS mede 1700 m, então o trecho ST mede 300 m.
Assim, considerando o triângulo STU, que é retângulo em T, tem-se que $ST = 300$, $TU = 400$ e $US = x$. Portanto:
$US^2 = ST^2 + TU^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 = 300^2 + 400^2 \Rightarrow x = 500$
Assim, o custo de instalação será:
Tubulação através do rio:
$500 \cdot 830 = 415\,000$
Tubulação terrestre:
$1700 \cdot 400 = 680\,000$
Custo total:
$415\,000 + 680\,000 = 1\,095\,000$
Resposta: alternativa **d.**

32. Em qualquer triângulo retângulo, o produto das medidas dos catetos é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da altura relativa à hipotenusa. Daí, temos:
$196H = 84 \cdot 140$
$H = \frac{84 \cdot 140}{196}$
$H = 60$
Portanto, a altura H do drone em relação ao solo é igual a 60 metros.
Resposta: alternativa **d.**

33. Resposta pessoal. Exemplo de pergunta: No triângulo retângulo a seguir, quais são as medidas a, b e h?

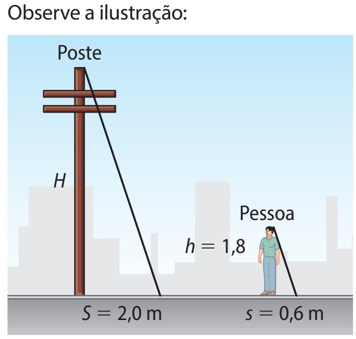


Da figura, tem-se:
$a = 50 - 18 \Rightarrow a = 32$
Pelo teorema de Pitágoras, tem-se:
$50^2 = b^2 + 40^2 \Rightarrow 2500 = b^2 + 1600 \Rightarrow$
$\Rightarrow b^2 = 900 \Rightarrow b = 30$
E, pela relação $h^2 = m \cdot n$, tem-se:
$h^2 = 18 \cdot 32 \Rightarrow h = 24$

Atividades complementares

1. Considerando y como a altura do compartimento do meio, pode-se escrever a seguinte relação:
$\frac{6x}{3x} = \frac{42}{y} \Rightarrow 2y = 42 \Rightarrow y = 21$
Resposta: alternativa **d.**

2. Considerando a medida da pessoa e da árvore, em centímetro, pode-se calcular o comprimento da sombra da árvore. Observe a ilustração:



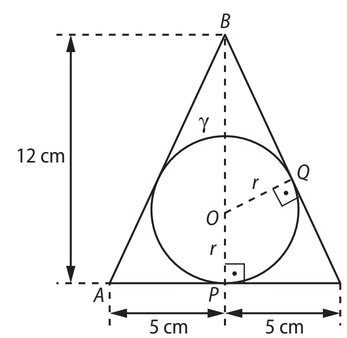
$\frac{H}{h} = \frac{S}{s} \Rightarrow \frac{H}{1,8} = \frac{2,0}{0,6} \Rightarrow 0,6H = 3,6 \Rightarrow$
$\Rightarrow H = 6,0$
Após a sombra do poste diminuir 0,50 m, a sombra da pessoa será:
$\frac{H}{h} = \frac{S - 0,5}{t} \Rightarrow \frac{6}{1,8} = \frac{2,0 - 0,5}{t} \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{6,0}{1,8} = \frac{1,5}{t} \Rightarrow 6,0t = 2,7 \Rightarrow t = 0,45$
A sombra será de 0,45 m ou 45 cm.
Resposta: alternativa **b.**

3. Como a altura do poste e de Ana são proporcionais às medidas de suas respectivas sombras, então:
$\frac{1,5}{2,4} = \frac{x}{3,7} \Rightarrow x = 2,3$
Resposta: alternativa **b.**

4. Pelo esquema e pelos dados fornecidos no enunciado, conclui-se que:
$MB = 10$, pois $MN = 16$ e $BN = 6$
Assim, pode-se estabelecer a seguinte relação:
$\frac{AB}{MB} = \frac{BC}{BN} \Rightarrow \frac{AB}{10} = \frac{9}{6} \Rightarrow AB = 15$
Outra informação que se pode obter é:
$BD = 19$, pois $BC = 9$ e $CD = 10$
Assim, pode-se estabelecer a seguinte relação:
$\frac{DE}{DI} = \frac{BD}{GD} \Rightarrow \frac{4}{2} = \frac{19}{m + 5} \Rightarrow$
$\Rightarrow 2m + 10 = 19 \Rightarrow m = 4,5$
Por fim, tem-se:
$\frac{AB}{FG} = \frac{BC}{GH} \Rightarrow \frac{15}{FG} = \frac{9}{4,5} \Rightarrow$
$\Rightarrow FG = \frac{15 \cdot 4,5}{9} \Rightarrow FG = 7,5$
Como $FG = 7,5$ e $GH = 4,5$, tem-se que $FH = 12$.
Portanto, $AB + FH = 15 + 12 = 27$, ou seja, divisível por 3.
Resposta: alternativa **a.**

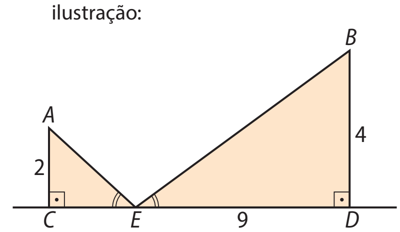
5. Pelo enunciado é possível estabelecer as relações:
$\frac{AD}{A'D'} = \frac{AB}{A'B'} \Rightarrow \frac{90}{135} = \frac{40}{A'B'} \Rightarrow$
$\Rightarrow A'B' = \frac{135 \cdot 40}{90} = 60$
$\frac{AD}{A'D'} = \frac{CD}{C'D'} \Rightarrow \frac{90}{135} = \frac{20}{C'D'} \Rightarrow$
$\Rightarrow C'D' = \frac{135 \cdot 20}{90} = 30$
Portanto, $A'B' - C'D' = 60 - 30 = 30$.
Resposta: alternativa **b.**

6.



Utilizando o teorema de Pitágoras no triângulo BPC, tem-se:
$BC^2 = BP^2 + CP^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow BC^2 = 12^2 + 5^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow BC^2 = 144 + 25 \Rightarrow$
$\Rightarrow BC^2 = 169 \Rightarrow BC = 13$
Pelo caso AA, os triângulos BOQ e BPC são semelhantes, obtendo-se:
$\frac{R}{5} = \frac{12 - R}{13} \Rightarrow 13R = 60 - 5R \Rightarrow$
$\Rightarrow 18R = 60 \Rightarrow R = \frac{10}{3}$
Resposta: alternativa **d.**

7. Considerando as informações do enunciado, pode-se elaborar a seguinte ilustração:



Portanto, pode-se afirmar que:
$\left.\begin{array}{l} C\hat{E}A \cong D\hat{E}B \\ \hat{C} \cong \hat{D} \text{ (retos)} \end{array}\right\} \triangle ACE \sim \triangle BDE$

Como os triângulos são semelhantes, conclui-se:

$\frac{ED}{CE} = \frac{4}{2} \Rightarrow \frac{9 - CE}{CE} = \frac{4}{2} \Rightarrow CE = 3$

Resposta: alternativa **a**.

8. Como o trajeto é formado por três segmentos que formam um percurso fechado, conclui-se que esse trajeto é um triângulo.
Após andar 30 cm, a instrução II pede para realizar um giro de 90°, portanto esse triângulo é retângulo.
A instrução IV, que pede para voltar ao ponto inicial, representa a construção da hipotenusa do triângulo, pois é oposta ao ângulo de 90°, ou seja, as instruções I e III formam os catetos do triângulo retângulo. Assim, nomeando a hipotenusa desse triângulo como x:
$x^2 = 30^2 + 40^2 \Rightarrow x = 50$
Portanto, o trajeto percorrido pelo robô é um triângulo cuja hipotenusa mede 50 cm.
Resposta: alternativa **a**.

9. Como $AD = 2$, $PM = 2 - x$. Temos também que $CP = PM$ e podemos determinar a medida de $\overline{CP}$ pelo teorema de Pitágoras, como segue:
$CP^2 = PN^2 + NC^2$
$CP^2 = x^2 + 2^2$
$CP = \sqrt{x^2 + 4}$
Portanto, para $0 \leqslant x \leqslant 2$,
$S(x) = PM + PD + PC =$
$= (2 - x) + 2\sqrt{x^2 + 4}$.
Resposta: alternativa **e**.

10. Pelo enunciado, pode-se obter que:
$BC = 2{,}9 - 1{,}3 = 1{,}6$
Como $r_1 // r_2$, segue do teorema de Tales que vale a relação:
$\frac{8}{3} = \frac{BC}{CD} \Rightarrow \frac{8}{3} = \frac{1{,}6}{CD} \Rightarrow CD = 0{,}6$
Resposta: alternativa **a**.

11. De acordo com o enunciado, pode-se concluir que:
$CE = \frac{3BC}{4}$ e $AF = \frac{2AD}{3}$.
Como $AD = BC$, pois são os lados opostos de um paralelogramo, pode-se afirmar que $AF = \frac{2AD}{3} = \frac{2BC}{3}$.
Além disso, do fato que $\hat{A}$ e $\hat{C}$ são congruentes e que $\hat{G}$ é um ângulo em comum nos triângulos GAF e GCE, temos, pelo caso AA (ângulo-ângulo) que GAF e GCE são semelhantes.
Assim, a razão de semelhança entre os lados correspondentes dos triângulos GCE e GAF é:
$$\frac{CE}{AF} = \frac{\frac{3BC}{4}}{\frac{2BC}{3}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{8}$$
Portanto, a razão de semelhança entre as áreas dos triângulos será:
$$\left(\frac{9}{8}\right)^2 = \frac{81}{64} = 1{,}265625$$
Ou seja, a área do triângulo GCE é, aproximadamente, 27% maior que a área do triângulo GAF.
Resposta: alternativa **a**.

Capítulo 8

• Trigonometria no triângulo retângulo

Atividades

1. Utilizando as relações trigonométricas apresentadas neste Capítulo, é possível determinar o que se pede:

a) $\text{sen}\,\gamma = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$\cos\gamma = \frac{AC}{BC} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\text{tg}\,\gamma = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$

b) $\text{sen}\,\beta = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{5}$

$\cos\beta = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{5}$

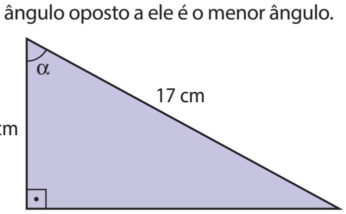
$\text{tg}\,\beta = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{4}$

2. a) Tangente. No triângulo retângulo formado, h é a medida do cateto oposto ao ângulo de inclinação e c é a medida do cateto adjacente.

b) Significa que a razão entre a altura do desnível e o comprimento da projeção da rampa é de $\frac{8}{100}$.

3. Utilizando a tangente do ângulo formado entre os raios solares e o chão, é possível chegar à seguinte relação:
$\text{tg}\,30° = \frac{x}{50} \Rightarrow 0{,}58 = \frac{x}{50} \Rightarrow x = 29$
A altura do prédio é aproximadamente 29 m.

4. Pode-se determinar a medida do cateto adjacente por meio do teorema de Pitágoras:
$17^2 = x^2 + 15^2 \Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow x = 8$
Como 8 cm é a medida do menor lado, o ângulo oposto a ele é o menor ângulo.



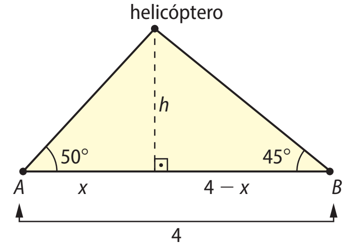
Aplica-se, então, a definição de seno, cosseno e tangente:

$\text{sen}\,\alpha = \frac{15}{17}$; $\cos\alpha = \frac{8}{17}$; $\text{tg}\,\alpha = \frac{15}{8}$

5. Considerando o triângulo retângulo ABD, temos:
$\text{tg}\,50° = 1{,}19 \Rightarrow \frac{h - 1{,}6}{AB} = 1{,}19 \Rightarrow$
$\Rightarrow h - 1{,}6 = 1{,}19 \cdot AB$ (I)
Por outro lado, considere o triângulo ADC. Temos:
$\text{tg}\,41° = 0{,}87 \Rightarrow \frac{h - 1{,}6}{AB + 20} = 0{,}87 \Rightarrow$
$\Rightarrow h - 1{,}6 = 0{,}87 \cdot (AB + 20) =$
$= 0{,}87 \cdot AB + 17{,}4$ (II)

De (I) e (II), obtemos:
$1{,}19 \cdot AB = 0{,}87 \cdot AB + 17{,}4 \Rightarrow$
$\Rightarrow 0{,}32 \cdot AB = 17{,}4 \Rightarrow AB = \frac{17{,}4}{0{,}32} = 54{,}375$
Substituindo o valor de AB em (I), chegamos a:
$h - 1{,}6 = 1{,}19 \cdot 54{,}375 \Rightarrow$
$\Rightarrow h \simeq 64{,}71 + 1{,}6 = 66{,}31$
Portanto, a altura do barranco é aproximadamente 66,31 m.

6. Utilizando o esboço a seguir como referência, tem-se:



$\text{tg}\,45° = \frac{h}{4 - x} \Rightarrow 1 = \frac{h}{4 - x} \Rightarrow$
$\Rightarrow h = 4 - x \Rightarrow x = 4 - h$

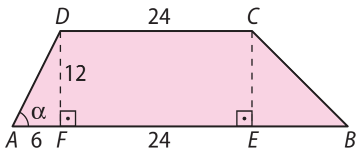
Sendo $\text{tg}\,50° = \frac{h}{x} \Rightarrow 1{,}19 = \frac{h}{4 - h} \Rightarrow$
$\Rightarrow 1{,}19(4 - h) = h \Rightarrow h \simeq 2{,}17$
A medida h é aproximadamente 2,17 km ou 2 170 m.

7. Relembrando que
$\text{velocidade} = \frac{\text{distância}}{\text{tempo}}$, para encontrar o tempo solicitado na atividade é necessário determinar a distância x, em metro, percorrida pelo ciclista, no caso, a medida da hipotenusa. Sendo assim:
$\text{sen}\,3° = \frac{30}{x} \Rightarrow 0{,}05 = \frac{30}{x} \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \frac{30}{0{,}05} = 600$
Com o valor de x já determinado, usar da fórmula da velocidade para obter o tempo t, em segundos.
$4 = \frac{600}{t} \Rightarrow t = \frac{600}{4} = 150$
Convertendo o tempo para minutos, tem-se $t = \frac{150}{60} = 2{,}5$
O tempo que o ciclista levou para percorrer completamente a rampa foi 2,5 minutos.
Resposta: alternativa **a**.

8. a) Utilizando a definição das medidas trigonométricas, é possível determinar o valor do cosseno do ângulo a:
$\cos\alpha = \frac{5}{8} = 0{,}625$. Sendo assim, utiliza-se a função $\cos^{-1}$ da calculadora científica, chegando-se ao valor de $\alpha \simeq 51°$.

b) Seno do ângulo a:
$\text{sen}\,\alpha = \frac{40}{120} = 0{,}333$. Utiliza-se, então, a função sen^{-1} da calculadora científica chegando-se ao valor de $\alpha \simeq 19°$.

c) A partir das informações do enunciado, considere a figura a seguir:



A medida $EC = DF = 12$. Já a medida AF deve ser obtida subtraindo a medida AE de FE, portanto $AF = 30 - 24 = 6$. Determina-se, então, a tangente de α: $\text{tg}\,\alpha = \frac{DF}{AF} = \frac{12}{6} = 2$.

Logo, com a função tg^{-1} da calculadora científica, tem-se que $\alpha \simeq 63°$.

9. Utilizando a 2ª relação trigonométrica, é possível determinar o que se pede:

a) $\cos 25° = \text{sen}\, 65° = 0{,}90$

b) $\cos 80° = \text{sen}\, 10° = 0{,}17$

c) $\text{sen}\, 40° = \cos 50° = 0{,}64$

10. Inicialmente, considere o triângulo ABC. Da relação do seno de um ângulo, temos:

$\text{sen}\,\alpha = 0{,}8 \Rightarrow \frac{12}{AC} = 0{,}8 \Rightarrow AC = 15$

Assim, pelo teorema de Pitágoras no triângulo ABD:

$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (BC)^2 = 225 - 144 \Rightarrow BC = \sqrt{81} = 9$

Agora, considere o triângulo BDC. Temos:

$\text{sen}\,\alpha = 0{,}8 \Rightarrow \frac{BD}{9} = 0{,}8 \Rightarrow BD = 7{,}2$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo BDC, obtemos:

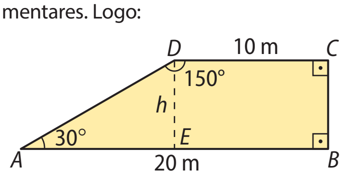
$(BC)^2 = (BD)^2 + (DC)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (DC)^2 = 81 - 51{,}84 \Rightarrow$

$\Rightarrow DC = \sqrt{29{,}16} = 5{,}4.$

Resposta: alternativa **a**.

11. Como a soma das bases é igual a 30 m e a base maior é o dobro da menor, pode-se concluir que a base menor mede 10 m e a base maior, 20 m. Como o ângulo obtuso $C\hat{D}A$ mede 150°, então o ângulo $D\hat{A}B$ mede 30°, pois são suplementares. Logo:



Como $\text{sen}\, 30° = 0{,}5$ e $\text{sen}^2\, 30° + \cos^2 30° = 1$, então:

$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

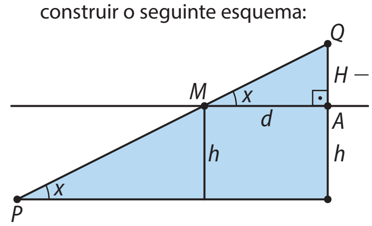
Assim, a altura DE vale:

$\text{tg}\, 30° = \frac{h}{10} \Rightarrow \frac{\text{sen}\, 30°}{\cos 30°} = \frac{h}{10} \Rightarrow$

$\Rightarrow h = \frac{10\sqrt{3}}{3}$

A altura do trapézio é $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ m.

12. De acordo com o enunciado, podemos construir o seguinte esquema:

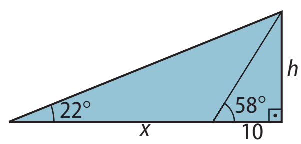


Assim, para determinar a diferença entre as alturas das torres, vamos utilizar o triângulo AQM e calcular a tangente de x:

$\text{tg}\, x = \frac{H - h}{d} \Rightarrow H - h = d \cdot \text{tg}\, x$

Resposta: alternativa **b**.

13. Utilizando a representação a seguir como referência, considera-se que a altura do prédio mede h e a distância que a pessoa se afastou mede x. Logo:



$\text{tg}\, 58° = \frac{h}{10} \Rightarrow 1{,}6 = \frac{h}{10} \Rightarrow h = 16$

$\text{tg}\, 22° = \frac{h}{x + 10} \Rightarrow \text{tg}\, 22° = \frac{16}{x + 10} \Rightarrow$

$\Rightarrow x + 10 = \frac{16}{0{,}4} \Rightarrow x = 30$

Portanto, o prédio tem 16 metros de altura, e a pessoa se afastou 30 metros.

14. Como o submarino está a 400 m de profundidade, tem-se:

Distância horizontal (x) do submarino A até o barco B: $\text{tg}\, 62° = \frac{x}{400} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \text{tg}\, 62° \cdot 400 = 1{,}9 \cdot 400 = 760$

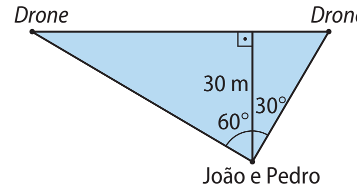
Distância horizontal (y) do submarino A até o barco C: $\text{tg}\, 40° = \frac{y}{400} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \text{tg}\, 40° \cdot 400 = 0{,}8 \cdot 400 = 320$

Portanto, a distância entre os barcos é de 760 m + 320 m = 1 080 m.

15. Resposta pessoal. Exemplo de problema: João e Pedro ganharam um *drone* de presente e foram ao clube de aeromodelismo fazê-los voar. Porém, para evitar possíveis problemas, o clube instituiu a seguinte regra: a distância máxima entre o *drone* e seu respectivo proprietário deve ser de 70 m. Como bons estudantes de Matemática, João e Pedro quiseram verificar se estavam cumprindo a regra. Sendo assim, ambos ficaram parados em um mesmo local, um de costas para o outro, e verificaram que o equipamento de João pairava a 30 metros do chão, formando um ângulo de 30° entre a altura e suas posições. O equipamento de Pedro também estava a 30 metros do chão, formando um ângulo também de 60° entre a altura e sua posição. Considere que João e Pedro ocupem o mesmo espaço. Determine se algum dos *drones* estava ou não cumprindo a regra. Considere $\cos 30° \simeq 0{,}87$ e $\cos 60° = 0{,}5$.

Elaborando uma ilustração a partir do enunciado do problema, obtém-se que:



A distância entre João e o *drone* equivale a hipotenusa no triângulo, que será definida com x. Logo:

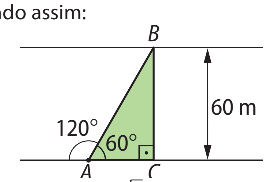
$\cos 60° = \frac{30}{x} \Rightarrow x = \frac{30}{0{,}5} = 60$

A distância entre Pedro e o *drone* equivale a hipotenusa no triângulo, que será definida com y. Logo:

$\cos 30° = \frac{30}{y} \Rightarrow y = \frac{30}{0{,}87} \simeq 34{,}48$

Como as distâncias de João e Pedro são, respectivamente, 60 m e 34,48 m, João e Pedro estão cumprindo a regra do clube.

16. A partir do esquema a seguir, é possível perceber que o ângulo $B\hat{A}C$ é de 60°. Sendo assim:

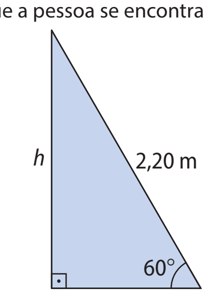


$\text{sen}\, 60° = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{60}{AB} \Rightarrow$

$\Rightarrow AB = 40\sqrt{3}$

Dessa maneira, a distância percorrida pelo barco é $40\sqrt{3}$ m.

17. Utilizando o esquema a seguir como referência, é possível determinar a altura em que a pessoa se encontra do chão:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

$\text{sen}\, 60° = \frac{h}{2{,}2} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{2{,}2} \Rightarrow h = 1{,}903$

A pessoa estará a 1,903 m do chão.

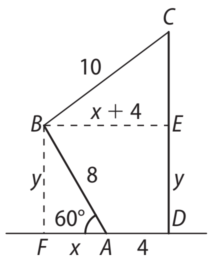
18. Utilizando a definição de tangente, tem-se:

$\text{tg}\, 30° = \frac{12}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow 0{,}58 = \frac{12}{x} \Rightarrow x = \frac{12}{0{,}58} \simeq 20{,}7$

A distância é aproximadamente 20,7 m.

19. Segundo enunciado, sabe-se que $BA = 8$ m, $DA = 4$ m e $BC = 10$ m. Então, considerando-se $DE = BF = y$ e $BE = x + 4$, como na figura a seguir, tem-se:



sen 60° $= \frac{y}{8} \Rightarrow y = 8 \cdot \text{sen } 60° \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y = 4\sqrt{3}$

cos 60° $= \frac{x}{8} \Rightarrow x = 8 \cdot \cos 60° \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 8 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow x = 4$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triangulo *CEB*, tem-se:

$(BC)^2 = (CE)^2 + (BE)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 10^2 = (CE)^2 + 8^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (CE)^2 = 100 - 64 \Rightarrow CE = 6$

Portanto, a altura do poste é:

$CD = CE + DE = 6 + 4\sqrt{3}$

A altura do poste em relação ao solo é $(6 + 4\sqrt{3})$ m.

20. **a)** Para determinar a medida *CH*, em centimetro, basta aplicar a definição de tangente:

tg 30° $= \frac{CH}{12} \Rightarrow$

$\Rightarrow CH = 12 \cdot \text{tg } 30° = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$

Portanto, a medida de $\overline{CH}$ é $4\sqrt{3}$ cm.

b) Calculando a tangente do ângulo $B\hat{A}C$, tem-se:

tg α $= \frac{CH}{AH} = \frac{4\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = 1$

Portanto, o ângulo solicitado tem medida igual a 45°.

21. Sabendo que o segmento $\overline{BC}$ mede 50 metros, determina-se assim a medida de $\overline{AB}$:

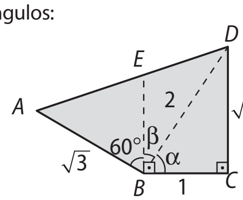
tg 60° $= \frac{AB}{BC} \Rightarrow AB = 50\sqrt{3}$

Com a medida *AB* calculada, determina-se então a medida *AD*, em metro:

sen 30° $= \frac{AB}{AD} = 50\sqrt{3} \Rightarrow AD = 100\sqrt{3}$

Resposta: alternativa **e**.

22. Utilizando o segmento auxiliar $\overline{BD}$, divide-se o quadrilátero nos seguintes triângulos:



Aplicando o teorema de Pitágoras no Δ*DCB*, obtém-se:

$(BD)^2 = (BC)^2 + (CD)^2 \Rightarrow BD = 2$

Logo, sen α $= \frac{DC}{BD} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Então:

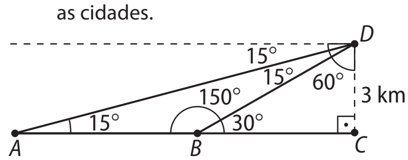
$\alpha = 60° \Rightarrow \beta = 30° \Rightarrow \alpha + \beta = 90°$

Aplicando o teorema de Pitágoras no Δ*ABD*, obtém-se:

$(AD)^2 = (AB)^2 + (BD)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (AD)^2 = 3 + 4 \Rightarrow AD = \sqrt{7}$

23. Considerando o esquema a seguir, percebe-se que os ângulos $A\hat{D}B$ e $D\hat{A}B$ medem 15°, portanto o triângulo *DAB* é isósceles, logo a distância entre as cidades *A* e *B* é a mesma que a distância entre as cidades *B* e *D*, ou seja, *AB* = *BD*. Sendo assim, basta determinar a medida de $\overline{BD}$ para calcular a distância entre as cidades.

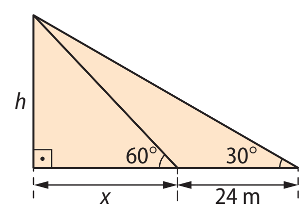


cos 60° $= \frac{DC}{BD} \Rightarrow BD = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$

A distância entre as cidades *B* e *D* é 6 km.

Resposta: alternativa **e**.

24. Observando o esquema a seguir, é possível determinar a altura do prédio:



tg 60° $= \frac{h}{x} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{h}{x} \Rightarrow x = \frac{h}{\sqrt{3}}$ (I)

tg 30° $= \frac{h}{x + 24} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{x + 24} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = h\sqrt{3} - 24$ (II)

De (I) e (II), vem:

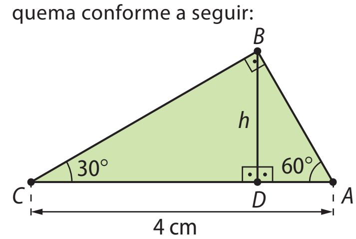
$\frac{h}{\sqrt{3}} = h\sqrt{3} - 24 \Rightarrow$

$\Rightarrow h = 3h - 24\sqrt{3} = \frac{24\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow h = 12\sqrt{3}$

Logo, a altura do prédio é $12\sqrt{3}$ m.

25. Seja *h* a medida da altura que procuramos, em metro. De acordo com o enunciado, podemos montar um esquema conforme a seguir:



Assim:

tg 60° $= \frac{h}{AD} \Rightarrow h = AD\sqrt{3}$ (I)

tg 30° $= \frac{h}{DC} \Rightarrow h = DC\frac{\sqrt{3}}{3}$ (II)

De (I) e (II), vem:

$DC\frac{\sqrt{3}}{3} = AD\sqrt{3} \Rightarrow DC = 3AD$

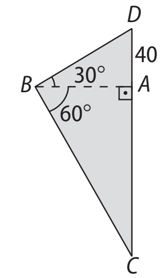
Por outro lado,

$AD + DC = AC = 4 \Rightarrow 4AD = 4 \Rightarrow AD = 1$

Substituindo o valor de *AD* em (I), obtemos $h = \sqrt{3}$.

Resposta: alternativa **c**.

26. A partir das informações fornecidas no enunciado, pode-se utilizar o esquema a seguir:



Aplicando a definição de tangente no triângulo *BAD*, tem-se que:

tg 30° $= \frac{40}{AB} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{40}{AB} \Rightarrow$

$\Rightarrow AB = 40\sqrt{3}$

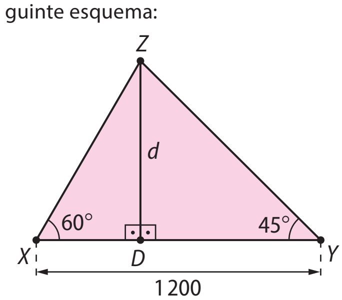
Para obter a medida da largura do rio, deve-se determinar a medida *AC*, que é um cateto do triângulo *BAC*. Assim, ao aplicar a definição de tangente, obtém-se que:

tg 60° $= \frac{AC}{AB} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{AC}{40\sqrt{3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow AC = 40(\sqrt{3})^2 \Rightarrow AC = 120$

Assim, a medida de $\overline{AC}$ corresponde a 120 m.

27. Seja *d* a medida da distância entre navio e praia em metro. De acordo com o enunciado, podemos montar o seguinte esquema:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Logo:

tg 60° $= \frac{d}{XD} \Rightarrow d = \frac{19}{11}XD$ (I)

tg 45° $= \frac{d}{DY} \Rightarrow d = DY$ (II)

De (I) e (II), vem:

$DY = \frac{19}{11}XD$

Por outro lado,

$XD + DY = XY = 1200 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(1 + \frac{19}{11}\right)XD = 1200 \Rightarrow$

$\Rightarrow XD = \frac{1200 \cdot 11}{30} = 440$

Substituindo o valor de *XD* em (I), obtemos $d = \frac{19 \cdot 440}{11} = 760$.

Resposta: alternativa **b**.

28. Resposta pessoal. Uma resposta possível: Com a construção de um teodolito, efetuar o cálculo da altura do prédio mais próximo da escola, considerando as medidas realizadas em pelo menos duas posições diferentes.

Atividades complementares

1. Utilizando a definição da tangente nos dois ângulos, tem-se:

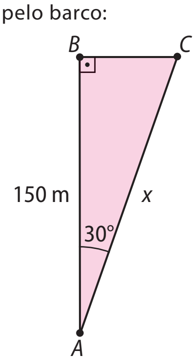
$$\begin{cases} \text{tg } 20° = \dfrac{h}{d} \\ \text{tg } 18° = \dfrac{h-5}{d} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = 0{,}36d & \text{(I)} \\ h - 5 = 0{,}32d & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo o valor de h, da equação (I), na equação (II), obtém-se:
$0{,}36d - 5 = 0{,}32d \Rightarrow 0{,}04d = 5 \Rightarrow d = 125$
Substituindo o valor de d na equação (I), obtém-se:
$h = 0{,}36 \cdot 125 = 45$
Resposta: alternativa **d**.

2. Por meio do cálculo da tangente, determina-se a altura dos olhos de João até o topo da estátua:
$\text{tg } 66° = \frac{h}{16} \Rightarrow h \simeq 36{,}94$
Logo, a altura da estátua é de
$36{,}94 \text{ m} + 1{,}90 \text{ m} \simeq 38 \text{ m}$
Resposta: alternativa **e**.

3. Por meio das coordenadas dos pontos, considera-se que x é a distância entre o ponto P e a origem. Logo:
$x^2 = 15^2 + 8^2 \Rightarrow x = 17$
Portanto, $\text{sen } \alpha = \frac{8}{17}$.
Resposta: alternativa **c**.

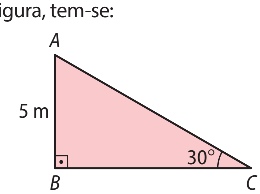
4. Utilizando a figura a seguir como referência e sabendo que o ângulo $B\hat{A}C = 30°$, calcula-se a distância percorrida pelo barco:



$\cos 30° = \frac{150}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x\sqrt{3} = 300 \Rightarrow x = \frac{300\sqrt{3}}{3} = 100\sqrt{3}$
A distância percorrida pelo barco foi de $100\sqrt{3}$ metros.
Resposta: alternativa **d**.

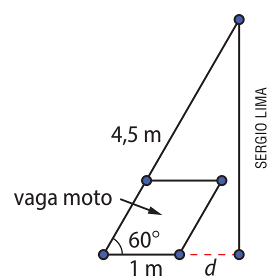
5. Calculando o seno do ângulo destacado na figura, tem-se:



$\text{sen } 30° = \frac{5}{AC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{5}{AC} \Rightarrow AC = 10$
Logo, o comprimento da esteira rolante é 10 m.
Resposta: alternativa **b**.

6. Seja c a medida de comprimento do cabo, em metro. Vamos avaliar as três opções de instalação. Para isso, calculamos a tangente do ângulo α em cada caso.
Opção 1: $\text{sen } 30° = \frac{h}{c} \Rightarrow c = 2 \cdot 11 = 22$
Opção 2: $\text{sen } 45° = \frac{h}{c} \Rightarrow$
$\Rightarrow c = 12 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = 12\sqrt{2}$
Opção 3: $\text{sen } 60° = \frac{h}{c} \Rightarrow$
$\Rightarrow c = 18 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 12\sqrt{3}$
Como $12\sqrt{2}$, $12\sqrt{3}$, 22, então a opção escolhida será a opção 2 e a medida de cada cabo terá $12\sqrt{2}$m.
Resposta: alternativa **c**.

7. Seja d a medida do comprimento do segmento tracejado, em metro. Observe que os segmentos que representam os comprimentos das vagas de automóveis e da vaga de moto são paralelos. Assim, de acordo com os dados da tabela, temos o seguinte esquema:



Logo:
$\cos 60° = \frac{1+d}{4{,}5} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1+d}{4{,}5} \Rightarrow$
$\Rightarrow d = 2{,}25 - 1 \Rightarrow d = 1{,}25$
Resposta: alternativa **c**.

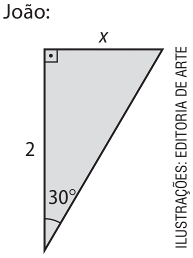
8. Utilizando a definição de cosseno e considerando as informações do enunciado, tem-se:
$\cos 45° = \frac{100}{AB} \Rightarrow AB = \frac{100}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 100\sqrt{2}$
Resposta: alternativa **b**.

9. Seja x a distância entre a Estação Minizoo e a Estação Vista do Céu. Pelo enunciado, tem-se que:
$x + 3x = 480 \Rightarrow x = 120$
Logo, $3x = 360$.
Portanto, para determinar a altura da estação Vista do Céu, basta adicionar a altura de cada um dos triângulos da figura correspondente à altura da Estação Minizoo (h_1) e à diferença entre a altura da Estação Vista do Céu e a da Estação Minizoo (h_2). Essas alturas podem ser determinadas da seguinte maneira:
$\text{sen } 60° = \frac{h_1}{360} \Rightarrow h_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 360 =$
$= \frac{1{,}7}{2} \cdot 360 = 306$
$\text{sen } 30° = \frac{h_2}{120} \Rightarrow h_2 = \frac{1}{2} \cdot 120 = 60 \Rightarrow$
$\Rightarrow h_2 = 60$
Portanto, em metro, a altura total é $h_1 + h_2 = 366$.
Resposta: alternativa **c**.

10. Aplicando a definição de tangente no triângulo ABE, determina-se o valor de x: $\text{tg } 30° = \frac{x}{6} \Rightarrow x = 2\sqrt{3}$
Aplicando o teorema de Pitágoras, tem-se:
$(BE)^2 = 6^2 + (2\sqrt{3})^2 \Rightarrow BE = 4\sqrt{3}$
Logo, o perímetro do triângulo, em metro, é dado por:
$6 + 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 6 + 6\sqrt{3}$.
Resposta: alternativa **c**.

11. Seja x a medida do lado do quadrado. Sabendo que a área do cartão mede 256 cm², então:
$x^2 = 256 \Rightarrow x = 16$
O lado do cartão mede 16 cm.
Além disso, sabe-se que o $\triangle APB$ é retângulo em P, logo:
$\text{sen } 30° = \frac{BP}{16} \Rightarrow BP = 8$
$\cos 30° = \frac{AP}{16} \Rightarrow AP = 8\sqrt{3}$
Portanto, o perímetro do triângulo, em centímetro, é:
$16 + 8 + 8\sqrt{3} = 8(3 + \sqrt{3})$
Resposta: alternativa **d**.

12. Utilizando a figura a seguir como referência, é possível calcular a área da parte de João:



$\text{tg } 30° = \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{2} \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
Assim, a área do terreno de João é, em kilometro quadrado, dada por:
$\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot 2}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
Área total $= 3 \cdot 2 = 6$
Como a área total deixada como herança é de 6 km², tem-se que a porcentagem do terreno de João equivale a cerca de 19%, pois:
$\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{9} \simeq 0{,}1925 = 19{,}25\%$
Resposta: alternativa **e**.