ÁREA DO CONHECIMENTO: MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

BONJORNO
GIOVANNI JR
FELIPE FUGITA

MANUAL DO PROFESSOR

MATEMÁTICA

POR TODA PARTE

2º ANO
ENSINO MÉDIO

CÓDIGO DA COLEÇÃO
0039P26010202814
PNLD EM 2026-2029 • CATEGORIA 1
Material de divulgação
Versão em processo de avaliação

FTD

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MANUAL DO PROFESSOR

MATEMÁTICA POR TODA PARTE

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

JOSÉ ROBERTO BONJORNO

Licenciado em Pedagogia pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras "Professor Carlos Pasquale".

Bacharel e licenciado em Física pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP).

Professor de Matemática e Física em escolas do Ensino Fundamental e Médio desde 1973.

JOSÉ RUY GIOVANNI JÚNIOR

Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP).

Professor e assessor de Matemática em escolas do Ensino Fundamental e Médio desde 1985.

FELIPE FUGITA

Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP).

Mestre em Matemática pela Universidade Federal do ABC (UFABC).

Coordenador e professor de Matemática do Ensino Fundamental e Médio.

Autor de obras didáticas de Matemática do Ensino Fundamental e Médio.

2º ANO
ENSINO MÉDIO

ÁREA DO CONHECIMENTO:
MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

FTD

1ª edição
São Paulo – 2024

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Matemática Por toda parte – Matemática – 2º ano (Ensino Médio)
Copyright © José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Júnior, Felipe Fugita, 2024

Direção-geral Ricardo Tavares de Oliveira

Direção de conteúdo e negócios Cayube Galas

Direção editorial adjunta Luiz Tonolli

Gerência editorial Roberto Henrique Lopes da Silva e Nubia de Cassia de M. Andrade e Silva

Edição Cibeli de Oliveira Chibante Bueno (coord.)

Alessandra Maria Rodrigues da Silva, Bianca Cristina Fratelli, Emike Luzia Pereira Correia, Janaina Bezerra Pereira, Juliana Montagner, Marceli Megumi Hamazi Iwai, Rizia Sales Carneiro, Wagner Jose Razvickas Filho

Preparação e revisão Maria Clara Paes (coord.)

Ana Carolina Rollemberg, Cintia R. M. Salles, Denise Morgado, Desirée Araújo, Eloise Melero, Kátia Cardoso, Márcia Pessoa, Maura Loria, Veridiana Maenaka, Yara Affonso

Produção de conteúdo digital João Paulo Bortoluci

Gerência de produção e arte Ricardo Borges

Design Andréa Dellamagna (coord.)

Projeto de capa Sergio Cândido

Imagem de capa Reinhard Mittermaier/Getty Images

Arte e produção Isabel Cristina Corandin Marques (coord.)

André Gomes Vitale, Débora Jóia, Jorge Katsumata, Kleber B. Cavalcante, Rodrigo Bastos Marchini, Maria Paula Santo Siqueira (Assist.)

Diagramação WYM Design

Coordenação de imagens e textos Elaine Bueno Koga

Licenciamento de textos Erica Brambilla

Iconografia Karine Ribeiro de Oliveira
Leticia dos Santos Domingos (trat. imagens)

Ilustrações Bentinho, Editoria de arte, OracicArt, Selma Caparroz, Sergio Lima, Suellen Machado

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Fugita, Felipe
Por toda parte matemática : 2º ano : ensino médio : volume II / Felipe Fugita, José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Júnior. – 1. ed. – São Paulo : FTD, 2024.

Componente curricular: Matemática.
Área do conhecimento : Matemática e suas tecnologias.
ISBN 978-85-96-04640-4 (livro do estudante)
ISBN 978-85-96-04641-1 (manual do professor)
ISBN 978-85-96-04646-6 (livro do estudante HTML 5)
ISBN 978-85-96-04647-3 (manual do professor HTML 5)

1. Matemática (Ensino Médio) I. Bonjorno, José Roberto. II. Giovanni Júnior, José Ruy. III. Título.

24-227750 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino médio 510.7

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

Reprodução proibida: Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998. Todos os direitos reservados à

EDITORA FTD.
Rua Rui Barbosa, 156 – Bela Vista – São Paulo – SP
CEP 01326-010 – Tel. 0800 772 2300
Caixa Postal 65149 – CEP da Caixa Postal 01390-970
www.ftd.com.br
central.relacionamento@ftd.com.br

Em respeito ao meio ambiente, as folhas deste livro foram produzidas com fibras obtidas de árvores de florestas plantadas, com origem certificada.

Impresso no Parque Gráfico da Editora FTD
CNPJ 61.186.490/0016-33
Avenida Antonio Bardella, 300
Guarulhos-SP – CEP 07220-020
Tel. (11) 3545-8600 e Fax (11) 2412-5375

APRESENTAÇÃO

Caro estudante,

Este livro tem como objetivo estimular você a compreender a Matemática para utilizá-la no seu dia a dia e na continuação dos seus estudos. Além disso, busca favorecer o desenvolvimento de competências e habilidades que o auxiliem a ser um cidadão crítico, criativo, autônomo e responsável. Na sociedade contemporânea, é muito importante que você seja capaz de ler a realidade, enfrentar novos desafios e tomar decisões éticas e fundamentadas.

Além dos conteúdos matemáticos específicos, o livro ainda traz possibilidades de explorar o uso de recursos tecnológicos, como *softwares* de Geometria dinâmica e planilhas eletrônicas, e de refletir sobre as relações entre a Matemática e outras áreas do conhecimento.

Desejamos que essa obra contribua para que você reflita e interfira na sociedade em que está inserido com base em conhecimentos cientificamente fundamentados.

Bons estudos!

Os Autores

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

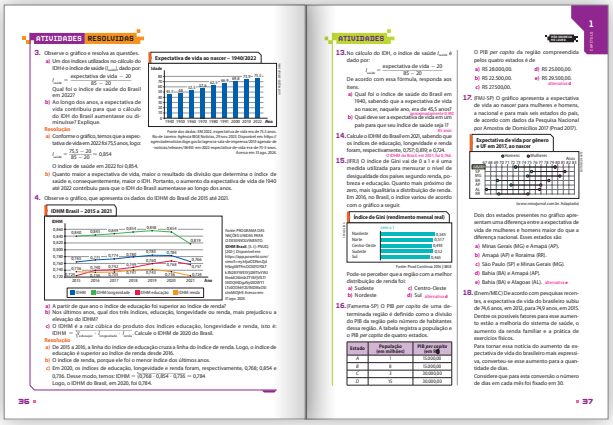
CONHEÇA SEU LIVRO

Abertura de capítulo

Nas páginas de abertura, você é convidado a observar textos e/ou imagens relacionados ao conteúdo do capítulo e a responder a questões cujo objetivo é proporcionar um momento de reflexão sobre o contexto apresentado e os conteúdos já estudados.

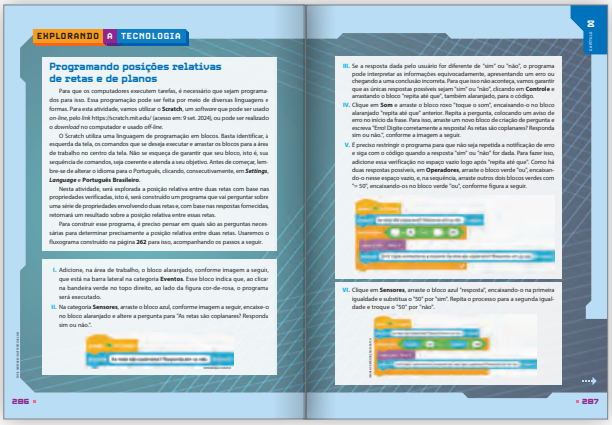
Atividades resolvidas e Atividades

As **atividades resolvidas** apresentam uma forma organizada de resolução e devem ser um momento de reflexão e de busca por outras formas de resolução. Já as **atividades** são variadas e visam à prática do conteúdo em estudo. Há também oportunidades de elaboração, análise de atividades e compartilhamento com seus colegas e o professor.



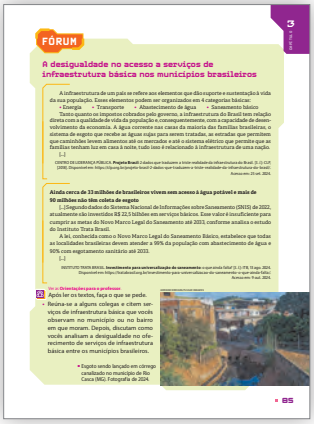
Explorando a tecnologia

Nesta seção, você vai ter a oportunidade de aprofundar seus conhecimentos matemáticos e desenvolver o pensamento computacional, com ou sem o auxílio de tecnologias digitais.



Fórum

É uma oportunidade para trocar e compartilhar ideias com seus colegas e o professor, a partir de temas contemporâneos.

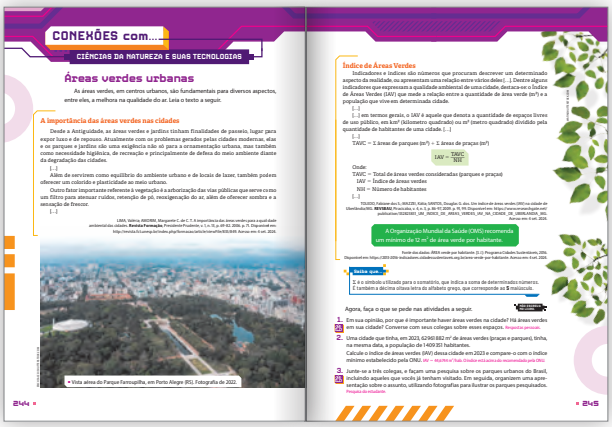


História da Matemática

Nesta seção, você vai ter a oportunidade de ler textos sobre a história da Matemática relacionados aos conteúdos que estão sendo estudados no capítulo.

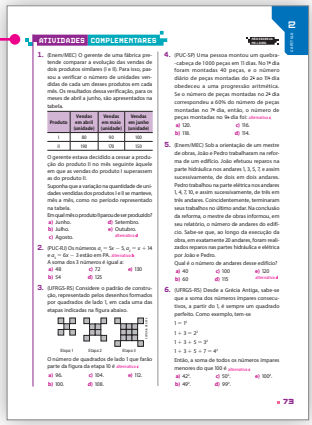
MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

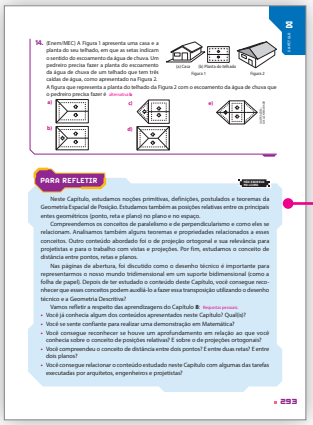
MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA



Conexões com...

Nesta seção, você vai explorar temas diversos e interdisciplinares relacionados ao conteúdo em estudo, com o objetivo de desenvolver a competência leitora, a cidadania e o senso crítico, por meio de atividades investigativas, pesquisas e discussão com os colegas.





Atividades complementares

Nesta seção, você vai encontrar questões de exames oficiais relacionadas aos conteúdos estudados. É uma oportunidade para verificar seu conhecimento em relação ao que foi abordado no capítulo.

Para refletir

Neste momento, você vai ter a oportunidade de refletir sobre o que estudou em cada um dos capítulos e fazer uma autoavaliação de seu desempenho.

Boxes

Glossário

Explicação de termos matemáticos ou da língua portuguesa.

Pense e responda

Momentos que valorizam, por meio de questões, sua participação na construção do conhecimento, incentivando você a interagir, investigar e refletir sobre o conteúdo em estudo.

Para assistir

Para ler

Para acessar

Para ouvir

Sugestões de livros, *links*, filmes, *podcasts* etc. a fim de complementar o conteúdo do livro.

Saiba que...

Apresentação de uma dica interessante ou informação relevante a respeito do conteúdo.

OBJETOS EDUCACIONAIS DIGITAIS

Os ícones a seguir identificam os diferentes tipos de objetos educacionais digitais presentes neste volume. Esses materiais digitais apresentam assuntos complementares ao conteúdo trabalhado na obra, ampliando a aprendizagem.

- VÍDEO
- *PODCAST*
- CARROSSEL DE IMAGENS
- INFOGRÁFICO CLICÁVEL
- MAPA CLICÁVEL

ÍCONES

- Atividades a serem realizadas com o auxílio de uma calculadora.
- Atividades em duplas.
- Atividades em grupos.

Os *sites* indicados nesta obra podem apresentar imagens e eventuais textos publicitários junto ao conteúdo de referência, os quais não condizem com o objetivo didático da coleção. Não há controle sobre esses conteúdos, pois eles estão estritamente relacionados ao histórico de pesquisa de cada usuário e à dinâmica dos meios digitais.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 **Pesquisa estatística** 10

Pesquisar e informar 12
Pesquisa estatística 14
Etapas de uma pesquisa estatística 15
Pesquisa amostral 18
Tipos de amostra 18
Características da pesquisa amostral 20
Cuidados requeridos na leitura e no tratamento de dados 20
Explorando a tecnologia – Planilha eletrônica e análise visual de dados 22
Atividades 25
História da Matemática – Florence Nightingale 30
Indicadores 31
Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) 31
Conexões com Ciências Humanas e Sociais Aplicadas – Índice de Desenvolvimento Humano Municipal (IDHM) 34
Atividades 37
Atividades complementares 40
Para refletir 43

CAPÍTULO 2 **Progressões** 44

Introdução 46
Sequências 47
Sequências numéricas 47
Atividades 50
Progressão aritmética 51
Termo geral de uma PA 53
Soma dos termos de uma PA 54
Progressão aritmética e função afim 55
Atividades 58
Progressão geométrica 60
Termo geral de uma PG 61
Soma dos termos de uma PG finita 62
Soma dos termos de uma PG infinita 63
Progressão geométrica e função exponencial 64
Atividades 66
Conexões com Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e Ciências da Natureza e suas Tecnologias – Teorias demográficas e crescimento populacional no mundo 68
Explorando a tecnologia – Sequências na planilha eletrônica 70
História da Matemática – A soma dos *n* primeiros termos de uma PA 72
Atividades complementares 73
Para refletir 75

CAPÍTULO 3 **Função definida por mais de uma sentença** 76

Introdução 78
Função definida por mais de uma sentença 78
Gráfico de uma função definida por mais de uma sentença 80
Atividades 83
Conexões com Ciências da Natureza e suas Tecnologias – Consumo consciente de água 86
Módulo de um número real 90
Propriedades 90
Distância entre dois pontos na reta real 91
Função modular 92
Gráfico da função modular 92
Equações modulares 94
Atividades 96
Funções sobrejetora, injetora e bijetora 98
Função sobrejetora 98
Função injetora 98
Função bijetora 99
Atividades 101
Função composta 102
Função inversa 104
Gráfico da função inversa 105
Atividades 107
Explorando a tecnologia – Conhecendo o GeoGebra; Explorando função inversa com o GeoGebra 108
Atividades complementares 112
Para refletir 115

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

CAPÍTULO 4

Função logarítmica 116

Introdução 118
Logaritmo 118
Condições de existência do logaritmo 119
Consequências da definição 119
Atividades 121
Propriedades operatórias dos logaritmos 122
Calculadora e logaritmos 124
Atividades 127
Função logarítmica 128
Gráfico da função logarítmica 129
Relação entre função exponencial e função logarítmica 130
Atividades 134
Equações logarítmicas 135
Inequações logarítmicas 135
Atividades 136
Explorando a tecnologia – Resolução de inequações logarítmicas com o GeoGebra 138
Conexões com Ciências da Natureza e suas Tecnologias – Saúde 140
História da Matemática – A ideia de John Napier e o logaritmo 142
Atividades complementares 143
Para refletir 145

CAPÍTULO 5

Razões trigonométricas na circunferência 146

Introdução 148
Arcos de circunferência 148
Ângulo central 149
Medida angular e comprimento de arcos de circunferência 149
Unidades de medida de arcos de circunferência 150
Atividades 153
Circunferência orientada 155
Circunferência trigonométrica 156
Arcos côngruos 156
Números reais associados a pontos da circunferência trigonométrica 158
Atividades 160
Seno e cosseno de um arco 161
Alguns valores do seno e do cosseno 162
Redução ao primeiro quadrante 163
Relação fundamental da Trigonometria 165
Atividades 167
Tangente de um arco 169
Alguns valores da tangente 170
Redução ao primeiro quadrante 171
Atividades 172
Trigonometria em um triângulo qualquer 173
Lei dos cossenos 173
Atividades 175
Lei dos senos 176
Atividades 177
Área de um triângulo qualquer 179
Atividades 181
Conexões com Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Linguagens e suas Tecnologias – Ciclismo 182
Explorando a tecnologia – Construção de uma calculadora trigonométrica 186
Atividades complementares 188
Para refletir 191

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

CAPÍTULO 6 **Funções trigonométricas** 192

Funções periódicas 194
Função seno 195
Gráfico da função seno 195
Atividades 198
Função cosseno 199
Gráfico da função cosseno 199
Atividades 203
Equações trigonométricas 204
Atividades 206
Conexões com Ciências da Natureza e suas Tecnologias – Movimento das marés 208
Explorando a tecnologia – Análise dos gráficos das funções seno e cosseno 210
Atividades complementares 212
Para refletir 215

CAPÍTULO 7 **Áreas** 216

Introdução 218
Área de polígonos 219
Área do retângulo 219
Área do quadrado 219
Área do paralelogramo 220
Área do triângulo 220
Área do losango 222
Área do trapézio 222
Atividades 225
Área do círculo e de suas partes 227
Área do círculo 227
Área do setor circular 228
Área da coroa circular 228
Atividades 229
Polígonos regulares 230
Elementos de um polígono regular inscrito em uma circunferência 230
Relações métricas nos polígonos regulares 231
Área de um polígono regular 233
Variação no perímetro e na área de um polígono regular 233
Atividades 236
Ladrilhamento do plano 238
Atividades 242
Conexões com Ciências da Natureza e suas Tecnologias – Áreas verdes urbanas 244
Explorando a tecnologia – Explorando polígonos inscritos na circunferência 246
História da Matemática – Pentágonos convexos que pavimentam o plano 248
Atividades complementares 249
Para refletir 253

CAPÍTULO 8 **Geometria Espacial de Posição** 254

Introdução 256
Noções primitivas 256
Conceitos preliminares 256
Postulados 258
Postulados da reta 258
Postulados do plano 258
Determinação do plano 260
Posições relativas de duas retas 261
Posições relativas de uma reta e um plano no espaço 262
Posições relativas de dois planos no espaço 263
Atividades 264

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Paralelismo no espaço 265
Teoremas sobre paralelismo 265
Atividades 267
Perpendicularismo no espaço 268
Perpendicularismo entre reta e plano 269
Planos perpendiculares 270
Teoremas sobre perpendicularismo 270
Atividades 274
Projeção ortogonal 275
Projeção ortogonal de um ponto sobre um plano 275
Projeção ortogonal de uma reta sobre um plano 276
Projeção ortogonal de uma figura sobre um plano 277
Atividades 278
Distâncias 280
Distância entre dois pontos 280
Distância entre ponto e reta 280
Distância entre ponto e plano 280
Distância entre duas retas 280
Distância entre reta e plano paralelos 281
Distância entre dois planos paralelos 281
Atividades 283
Conexões com Ciências Humanas e Sociais Aplicadas – Arquitetura e Urbanismo 284
Explorando a tecnologia – Programando posições relativas de retas e de planos 286
Atividades complementares 290
Para refletir 293
Respostas das atividades 294
Referências bibliográficas comentadas 300
Siglas dos exames oficiais 303

Objetos Educacionais Digitais

Mapa clicável: Quilombos no Brasil 25
Infográfico clicável: *Fake news*: como evitar 29
Vídeo: Mulheres na Ciência 30
Carrossel de imagens: Espirais de Fibonacci 46
Infográfico clicável: Vacinas: importância e processo de produção 58
Vídeo: Uma lenda do xadrez 60
Podcast: Acidificação e o futuro dos oceanos 128
Vídeo: Hiparco de Niceia 150
Infográfico clicável: Focos de queimadas: causas e consequências 178
Podcast: Ciclos naturais e Matemática 208
Podcast: Hortas comunitárias e soberania alimentar 223
Carrossel de imagens: Polígonos regulares em diferentes contextos 230

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

CAPÍTULO

1 PESQUISA ESTATÍSTICA

Você sabia que, em 2022, aproximadamente 7% da população brasileira com 15 anos ou mais era analfabeta? Ou que, em 2020, existiam 179 533 escolas públicas e privadas de Educação Básica no Brasil? E mais: que, em 2020, existiam 47,3 milhões de matrículas nos ensinos Fundamental e Médio e 2,2 milhões de professores na Educação Básica?

Todas essas informações são fornecidas pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), um dos mais importantes órgãos de pesquisa estatística do país. Entre as funções desse órgão, podemos destacar: realizar o censo demográfico, produzir e analisar diversos dados estatísticos, produzir e analisar dados geográficos, estruturar e implementar um sistema de dados ambientais, documentar e disseminar dados e informações, além de coordenar os sistemas estatístico e cartográfico nacionais.

Essas informações são oriundas de pesquisas estatísticas, algumas amostrais, outras censitárias, divulgadas para a população por meio de jornais, televisão e *sites*, inclusive o oficial do IBGE, e permitem avaliar a situação não apenas do país como também de cada região, estado e município. Assim, a população brasileira tem acesso ao retrato fiel do que é o Brasil. Neste Capítulo, vamos abordar a elaboração de pesquisas estatísticas, suas etapas e suas características, como margem de erro e índice de confiança.

Fontes dos dados: NERY, Carmen. **Censo 2022**: taxa de analfabetismo cai de 9,6% para 7,0% em 12 anos, mas desigualdades persistem. Rio de Janeiro: Agência IBGE Notícias, 17 maio 2024. Disponível em: https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-noticias/2012-agencia-de-noticias/noticias/40098-censo-2022-taxa-de-analfabetismo-cai-de-9-6-para-7-0-em-12-anos-mas-desigualdades-persistem#:~:text=Dados%20do%20Censo%20Demogr%C3%A1fico%20de,foi%20de%207%2C0%25. Acesso em: 29 ago. 2024.

BRASIL. Serviços e Informações do Brasil. **Educação Básica teve 47,3 milhões de matrículas em 2020**. Brasília, DF: Serviços e Informações do Brasil, 31 out. 2022. Disponível em: https://www.gov.br/pt-br/noticias/educacao-e-pesquisa/2021/01/educacao-basica-teve-47-3-milhoes-de-matriculas-em-2020. Acesso em: 2 out. 2024.

1. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes respondam que é importante receber o agente, porque as pesquisas do órgão ajudam a direcionar políticas públicas que sejam do interesse da sociedade. Além disso, atender o agente do IBGE é uma obrigação legal, e a recusa pode gerar multas.

3. Resposta pessoal. Exemplos de respostas: IPCA (Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo); IDH (Índice de Desenvolvimento Humano); Taxa Selic (taxa básica de juros da economia brasileira); Índice de Gini (indicador que mede o grau de concentração de renda em uma população); entre outros.

JÉSSICA SANTOS/IBGE

Agora, reúna-se a um colega, e façam o que se pede em cada questão.

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. Alguma pessoa conhecida já recebeu, em sua residência, a visita de um agente do IBGE para o censo demográfico? Vocês consideram importante atender esse agente?

2. No texto, fala-se das pesquisas estatísticas amostral e censitária. Para vocês, o que esses termos significam? Resposta pessoal. Exemplo de resposta: A pesquisa amostral colhe dados de uma parte representativa da população que se quer estudar, enquanto a pesquisa censitária colhe dados de toda a população.

3. As informações estatísticas obtidas pelo IBGE são divulgadas em formato de **taxas** (ou **índices**). Por exemplo, no texto, há a informação de que a taxa de analfabetismo entre os brasileiros de 15 anos ou mais, em 2022, era de 7%.
De quais outras taxas, ou índices, vocês já ouviram falar?

4. Juntem-se a outros colegas e, em grupo, discutam o fato de o IBGE tornar públicas as informações obtidas por ele e a importância da autonomia desse órgão. Apresentem suas conclusões a outros grupos. Resposta pessoal. Os estudantes podem dizer que a autonomia do órgão é importante para a manutenção de características como independência, transparência, imparcialidade, eficiência e credibilidade. A divulgação pública dos dados, além de contribuir para a transparência, permite a disseminação das informações por diversos meios de comunicação.

- No porto do município Careiro da Várzea (AM), servidores do IBGE/AM aguardam embarcação para se deslocarem até a comunidade ribeirinha de São Sebastião do Paraná-Mirim. Fotografia de 2022.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Pesquisar e informar

Você costuma se informar por quais meios de comunicação: jornal, revista, rede social, blogue, *site* jornalístico ou algum outro? De diferentes maneiras, podemos obter dados estatísticos de situações que fazem parte da vida humana, como acidentes de trânsito, pessoas recuperadas da dengue ou variação do preço dos alimentos em cada estado, por exemplo.

Para que essas informações cheguem aos meios de comunicação, são necessários alguns procedimentos relacionados à pesquisa estatística. Atualmente, esse tipo de pesquisa tem sido muito útil e importante para acompanhar o desenvolvimento de certas doenças, bem como para diminuir o risco de contraí-las.

Para refletir sobre isso, acompanhe a seguinte notícia.

Pesquisa revela que 52% dos brasileiros não fazem atividades físicas

Estudo indica que problemas de saúde quase dobram entre sedentários

A Pesquisa Saúde e Trabalho, feita pelo Serviço Social da Indústria (Sesi), divulgada nesta segunda-feira (26), em Brasília, conclui que 52% dos brasileiros raramente ou nunca praticam atividades físicas. Entre os que fazem atividades físicas, 22% se exercitam diariamente, 13% pelo menos três vezes por semana e 8% pelo menos duas vezes semanais.

O levantamento foi realizado entre 10 e 14 de março de 2023. Em todos os estados, foram entrevistadas 2 021 pessoas com mais de 16 anos. A margem de erro é de dois pontos percentuais, com intervalo de confiança de 95%.

[...]

Além da frequência da prática de atividades físicas, o estudo fez a associação entre a prática delas e o adoecimento. Segundo o levantamento do Sesi, 72% das pessoas que praticam exercícios com frequência não tiveram problemas de saúde nos últimos 12 meses. Porém, entre os que nunca praticam atividades físicas, 42% sofreram problemas de saúde em 2022.

[...]

[...] Para 88% dos entrevistados, a saúde é um estado completo de bem-estar físico, mental e social.

[...]

ALMEIDA, Daniela. Pesquisa revela que 52% dos brasileiros não fazem atividades físicas. **Agência Brasil**, Brasília, DF, 26 jun. 2023. Disponível em: https://agenciabrasil.ebc.com.br/geral/noticia/2023-06/pesquisa-revela-que-52-dos-brasileiros-nao-fazem-atividades-fisicas. Acesso em: 29 ago. 2024.

Pense e responda

Na sua opinião, por que as pessoas, mesmo sabendo dos benefícios para a saúde física e mental, não conseguem estabelecer uma rotina para a prática de atividades físicas?

Resposta pessoal.

Um dos objetivos da reportagem foi informar e conscientizar a população, por meio de dados científicos, dos benefícios do hábito de se exercitar. Para isso, a notícia apresentou resultados de uma pesquisa estatística amostral, que entrevistou 2 021 pessoas, distribuídas em todos os estados brasileiros. A margem de erro dessa pesquisa era de 2% e o intervalo de confiança era de 95%. Uma das conclusões desse estudo foi que 42% dos brasileiros sedentários, acima de 16 anos, sofreram problemas de saúde no último ano, enquanto, entre os que praticam regularmente atividades físicas, esse percentual se reduziu para 28%.

Leia trechos de um guia publicado pelo Ministério da Saúde que apresenta alguns dos benefícios obtidos com a prática regular de atividades físicas para crianças e jovens de 6 a 17 anos.

Por que você deve fazer atividade física?

[...]

- Promove o seu desenvolvimento humano e bem-estar, ajudando a desfrutar de uma vida plena com melhor qualidade;
- Melhora as suas habilidades de socialização;
- Melhora a saúde do seu coração e a sua condição física;
- Desenvolve suas habilidades motoras, como correr, saltar e arremessar;
- Melhora o seu humor e reduz a sensação de estresse e os sintomas de ansiedade e de depressão;
- Ajuda no seu melhor desempenho escolar;
- Auxilia no controle do peso adequado e na diminuição do risco de obesidade;
- Ajuda na adoção de uma vida saudável, como melhora da sua alimentação e diminuição do seu tempo em comportamento sedentário (como tempo em frente ao celular, computador, *tablet*, *videogame* e televisão).

[...]

Que atividades físicas você pode fazer?

No seu tempo livre: [...] Você pode caminhar, correr, empinar pipa, dançar, nadar, pedalar, surfar, jogar futebol, vôlei, basquete, bocha, tênis, peteca ou frescobol, fazer ginástica ou artes marciais, ou participar de brincadeiras e jogos, como esconde-esconde, pega-pega, pular corda, saltar elástico, queimada/baleado/carimba/caçador, jogar taco/bete, entre outras.

No seu deslocamento: sempre que possível, faça seus deslocamentos a pé ou de bicicleta, de *skate*, de patins ou de patinete (sem motor), por exemplo. [...] Procure fazer esses deslocamentos com os seus pais ou responsáveis ou com amigos e colegas para que seja mais seguro e agradável.

Na escola: [...] Participe também ativamente das aulas de educação física. [...] Se a sua escola oferece atividades físicas extracurriculares, que são aquelas oferecidas no contraturno escolar ou antes ou depois das aulas, participe de alguma! Aproveite o tempo do recreio ou do intervalo para brincar com seus amigos em brincadeiras que envolvam o movimento.

BRASIL. Ministério da Saúde. **Guia de atividade física para a população brasileira**. Brasília, DF: MS, 2021. p. 16-17. Disponível em: https://bvsms.saude.gov.br/bvs/publicacoes/guia_atividade_fisica_populacao_brasileira.pdf. Acesso em: 29 ago. 2024.

Para ler

- BRASIL. Ministério da Saúde. **Guia de atividade física para a população brasileira**. Brasília, DF: MS, 2021. Disponível em: https://bvsms.saude.gov.br/bvs/publicacoes/guia_atividade_fisica_populacao_brasileira.pdf. Acesso em: 29 ago. 2024.

  O guia traz orientações diversas sobre atividades físicas de acordo com a faixa etária.

CASSANDRA CURY/PULSAR IMAGENS

Estudantes indígenas da etnia Kalapalo em quadra de vôlei de escola na Aldeia Aiha, no Parque Indígena do Xingu (MT). Fotografia de 2023.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Pesquisa estatística

Uma pesquisa estatística é um método científico para estudar e investigar fenômenos naturais, fenômenos sociais e problemas relacionados a diversos contextos. Há dois tipos de pesquisas, as **populacionais** e as por **amostragem**. As pesquisas populacionais, que também são chamadas de **censitárias**, estudam todos os indivíduos que apresentam a característica, ou a propriedade, que se deseja estudar, enquanto as por amostragem estudam apenas uma parcela dos indivíduos. Em Estatística, dizemos que:

- **população** é o conjunto que contém todos os indivíduos, ou elementos, com a característica, ou propriedade, que se deseja estudar;
- **parâmetro da população** é a característica, ou propriedade, que se deseja estudar em uma população;
- **amostra** é um subconjunto não vazio da população;
- **estatística da amostra** é uma característica, ou propriedade, da amostra que possibilita estimar, ou analisar, o valor do parâmetro da população.

Acompanhe o exemplo.

Em uma escola com 300 estudantes, uma professora de Língua Portuguesa, para estimar quantos livros, em média, cada estudante leu no último ano, calculou a média aritmética das quantidades respondidas por um grupo de 40 estudantes selecionados aleatoriamente. Nessa pesquisa:

- a população é o conjunto formado pelos 300 estudantes.
- o parâmetro da população é a quantidade média de livros que esses 300 estudantes leram no último ano.
- a amostra é o subconjunto da população formado pelos 40 estudantes selecionados aleatoriamente.
- a estatística da amostra é a quantidade média de livros que esses 40 estudantes leram no último ano.

Nas pesquisas censitárias, os parâmetros populacionais são determinados de forma direta, pois toda a população é investigada. Já nas amostrais, os parâmetros populacionais são estimados por meio de estatísticas da amostra.

Pense e responda

A pesquisa realizada pela professora de Língua Portuguesa foi uma pesquisa populacional ou por amostragem?

Por amostragem, pois, de um grupo de 300 estudantes, apenas 40 estudantes responderam quantos livros leram no último ano.

A estatística de uma amostra é confiável em estimar o parâmetro de uma população quando o tamanho da amostra é suficiente para representar todas as características dessa população, e quanto maior o tamanho da amostra, maior a precisão dos resultados. Além disso, sua seleção deve ser **totalmente aleatória**, isto é, na composição de uma amostra, cada elemento da população deve ter a mesma chance de ser selecionado.

A realização de um estudo estatístico, populacional ou amostral, segue algumas etapas, que serão apresentadas a seguir.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

» Etapas de uma pesquisa estatística

Nos meios de comunicação, geralmente, temos acesso apenas às notícias que informam os dados obtidos em pesquisas estatísticas, e não às pesquisas propriamente ditas. Há casos em que também é noticiado o procedimento utilizado na obtenção daqueles dados. No entanto, para chegar aos resultados, algumas etapas são necessárias, conforme observaremos a seguir.

Escolha do objeto de estudo, do público-alvo e do tipo de pesquisa

A primeira etapa de uma pesquisa estatística é definir o objeto de estudo e os objetivos. Quanto mais específicos forem o objeto e os objetivos da pesquisa, mais fácil será a identificação da população-alvo.

Por exemplo, imagine estudar o fenômeno do impacto das redes sociais na sociedade. Nesse caso, é necessário especificar: qual sociedade? Que impactos? Se o objeto de estudo fosse analisar se as redes sociais impactam a opinião dos jovens brasileiros de 16 a 24 anos em relação às crises climáticas, o público-alvo da pesquisa já estaria definido (jovens brasileiros de 16 a 24 anos), e um dos seus objetivos poderia ser verificar se existe alguma relação entre as diferentes opiniões e o tempo de permanência diária em redes sociais.

A escolha por um estudo censitário ou amostral depende de alguns fatores, como tempo, recursos financeiros ou até a possibilidade ou não de se investigar toda a população-alvo, como nos casos de animais ou da vegetação de um ecossistema.

Elaboração do questionário e coleta de dados

Em uma pesquisa estatística, todas as perguntas que compõem o questionário devem ser elaboradas de maneira imparcial. Elas não podem induzir o entrevistado a determinada resposta, caso contrário, a pesquisa é tendenciosa, isto é, o modo como se faz a pergunta induz a certo tipo de resposta em detrimento de outro, fazendo com que os resultados da pesquisa sejam inadequados.

ILUSTRAÇÕES: NATALIE ADAMS/SHUTTERSTOCK.COM/TARIKVISION/SHUTTERSTOCK.COM

Para avaliar a neutralidade de uma questão, verifica-se se é possível perceber qual resposta é esperada pelo entrevistador. Se for possível fazer essa verificação, então a questão não é neutra e deve ser reformulada. Acompanhe alguns exemplos.

Pergunta 1. Você concorda que o governo deveria parar de aumentar impostos e encontrar outros meios de financiar o sistema de saúde?

Pergunta 2. Você concorda que um pequeno aumento de impostos para construção de novos hospitais e contratação de funcionários seria um grande investimento do governo no nosso sistema de saúde?

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Espera-se que os estudantes respondam que a pergunta é tendenciosa. Uma possível reescrita para a pergunta seria: "Como você avalia o governo atual? a) ótimo b) bom c) regular d) ruim".

Observe que, enquanto a pergunta 1 induz o entrevistado a ser contra o aumento de impostos, a pergunta 2 o induz a concordar com o aumento. A segunda pergunta poderia ser escrita de forma não tendenciosa da maneira a seguir.

Pergunta 2. O Ministério da Saúde propõe um aumento de 1% da carga tributária para construção de novos hospitais e contratação de funcionários. Qual é a sua opinião sobre essa proposta?

Uma dificuldade comum ao se fazer coleta de dados é o indivíduo selecionado se recusar a responder à pesquisa por algum motivo, como falta de tempo, não querer expor a própria opinião ou não se interessar pelo assunto. Se apenas as pessoas que se interessam pelo assunto responderem à pesquisa, a amostra coletada não será representativa da população. É por isso que enquetes feitas pela internet, nas quais as pessoas tomam a iniciativa e respondem de forma voluntária, são enviesadas, tendenciosas, pois a amostra é composta apenas de um grupo de pessoas, aquelas que se sentiram interessadas o suficiente pelo assunto da enquete.

Pense e responda

Em uma pesquisa, foi feita a seguinte pergunta: "*Você acha que este governo merece uma segunda chance?*" A pergunta da pesquisa é tendenciosa? Em caso afirmativo, como ela poderia ser reescrita?

Outro problema ao se realizarem as entrevistas é o entrevistado não compreender a pergunta ou responder algo inesperado, principalmente, em uma questão de múltipla escolha. Uma maneira de minimizar esse tipo de problema é realizar uma simulação das entrevistas com um número reduzido e diversificado de pessoas.

Tratamento e análise dos dados

Os dados coletados em uma pesquisa são de variáveis qualitativas ou quantitativas. Reconhecer sua natureza é importante para determinar quais técnicas e procedimentos estatísticos serão utilizados.

Os dados das variáveis qualitativas podem ser organizados e representados em tabelas de frequências. As variáveis quantitativas são indicadas por números e, consequentemente, podem ser analisadas pelas medidas de centralidade (média, mediana ou moda) ou de dispersão (amplitude, desvio, variância e desvio padrão). Dependendo do dado qualitativo, é possível transformá-lo em quantitativo, atribuindo um número a cada resposta, por exemplo:

a) para a variável "você tem animal de estimação?", podemos atribuir 1 para a resposta "sim" e 0 para a resposta "não".

b) para a variável "você concorda com a proposta?", podemos atribuir 1 para a resposta "concordo", 2 para a resposta "discordo" e 3 para "não tenho opinião".

No tratamento de dados, é comum o uso de planilhas eletrônicas que auxiliem na organização deles, no cálculo das medidas estatísticas e na elaboração de gráficos.

Apresentação dos dados e conclusão

Depois de analisar os dados coletados, é o momento de pensar em como eles serão apresentados. Geralmente, são utilizados gráficos, quadros e tabelas, mas, dependendo do objetivo da apresentação, pode-se optar por infográficos, por exemplo.

ILUSTRAÇÕES: NATALIE ADAMS/SHUTTERSTOCK.COM/TARIKVISION/SHUTTERSTOCK.COM

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

É muito importante ter atenção ao transpor os dados das tabelas para os gráficos, pois algum erro pode influenciar a conclusão obtida. Além disso, é necessário avaliar o tipo de gráfico mais adequado para cada situação, os elementos que devem aparecer no gráfico e a escala utilizada, além de conferir se falta algum dado antes de apresentar as conclusões.

O resultado da pesquisa estatística é apresentado em um relatório detalhado, que contém:

- o objeto de estudo e os objetivos da pesquisa;
- o público-alvo;
- a metodologia adotada;
- os resultados e as conclusões.

A seguir, acompanhe alguns trechos do relatório de uma pesquisa sobre sustentabilidade.

Metodologia

[...]

O **Instituto de Pesquisa de Reputação em Imagem** entrevistou, face a face, 2021 cidadãos com idade a partir de 16 anos, nas 27 Unidades da Federação (UFs). A margem de erro no total da amostra é de 2 pp, com intervalo de confiança de 95%. A amostra é controlada a partir de quotas de: (a) sexo, (b) idade, (c) região e (d) escolaridade.

As entrevistas foram realizadas entre 18 e 21 de novembro de 2022.

Após a pesquisa, foi aplicado um fator de ponderação para corrigir eventuais distorções em relação ao plano amostral. Devido ao arredondamento, a soma dos percentuais pode variar de 99% a 101%.

[...]

		Ótimo	Bom	Regular	Ruim	Péssimo	NS/NR
Total		**3%**	**9%**	**31%**	**17%**	**38%**	**1%**
Sexo	Feminino	3%	10%	31%	16%	38%	2%
	Masculino	3%	9%	31%	18%	38%	1%
Idade	16 a 24 anos	5%	9%	31%	21%	33%	1%
	25 a 40 anos	2%	10%	35%	17%	36%	1%
	41 a 59 anos	3%	8%	29%	16%	42%	1%
	60 anos ou mais	3%	10%	28%	16%	39%	4%
Escolaridade	Analfabeto/Sabe ler e escrever	5%	9%	15%	15%	51%	5%
	Ensino Fundamental	5%	8%	32%	14%	38%	3%
	Ensino Médio	3%	11%	32%	19%	35%	1%
	Ensino Superior	1%	9%	32%	18%	40%	0%

[**Pergunta**:] Como você avalia o atual nível de conservação do meio ambiente no Brasil? Você diria que é ótimo, bom, regular, ruim ou péssimo? [...]

[...]

[Composição da amostra por sexo, idade e escolaridade]

		% na amostra
Sexo	Feminino	**52%**
	Masculino	**48%**
Idade	16 a 24 anos	**17%**
	25 a 40 anos	**33%**
	41 a 59 anos	**31%**
	60 anos ou mais	**20%**
Escolaridade	Analfabeto/Sabe ler e escrever	**5%**
	Ensino Fundamental	**32%**
	Ensino Médio	**41%**
	Ensino Superior	**23%**

[...]

CONFEDERAÇÃO NACIONAL DA INDÚSTRIA. **Sustentabilidade & Opinião Pública**. [Brasília, DF]: CNI, 2023. Localizável em: p. 2-3, 5, 69 do pdf. Disponível em: https://static.portaldaindustria.com.br/portaldaindustria/noticias/media/filer_public/95/56/955642d6-0aac-4391-a9f1-1281ca20d08f/pesquisa_cni_sustentabilidade__opiniao_publica.pdf. Acesso em: 31 ago. 2024.

Saiba que...

No quadro, **NS/NR** significa "Não souberam responder ou Não responderam".

Pesquisa amostral

A pesquisa amostral, em geral, é a mais escolhida, por ter custo menor e levar menos tempo para que os dados sejam obtidos e analisados em relação à pesquisa censitária. Deve-se considerar o tipo de amostra escolhida: casual simples, sistemática ou estratificada.

Tipos de amostra

Amostra casual simples

Nesse caso, a escolha é feita de maneira aleatória dentro da amostra, e todos os elementos têm a mesma chance de serem escolhidos. Isso pode ocorrer por meio de sorteio ou por outra forma, sem se estabelecer uma regra. É um método que pode ser aplicado com facilidade quando a população é composta de uma quantidade pequena de elementos.

Por exemplo: para verificar o nível de estudo de uma turma com 30 estudantes do Ensino Médio, o professor de Matemática decidiu sortear 10 deles para aplicar um teste: em pedaços idênticos (mesma medida e formato, além da gramatura) de papel, anotou o nome de cada estudante, dobrou e colocou todos os papéis em uma urna; em seguida, retirou, sem olhar, um a um, os 10 papéis, a fim de garantir a aleatoriedade.

Amostra sistemática

Nesse tipo de amostra, há uma organização estabelecida, porém sem ordenação prévia. Assim, ela segue um padrão para a escolha dos indivíduos, mas mantém a aleatoriedade. Por exemplo:

- Para saber o destino das pessoas que utilizam o metrô, saindo da estação inicial da linha, um pesquisador pergunta o destino do usuário que está entrando no primeiro vagão. Ele resolve perguntar isso a cada dez usuários. Desse modo, estabeleceu uma regra, mas os usuários são entrevistados aleatoriamente, sem definir gênero, etnia, idade etc.
- Em uma clínica, são distribuídas senhas para que as pessoas sejam atendidas. As senhas estão numeradas de 1 a 80. Para uma pesquisa de satisfação do atendimento, serão escolhidas aleatoriamente oito pessoas. Para determinar as fichas escolhidas, o atendente definiu, da seguinte forma, a partir de qual senha serão escolhidas as pessoas:

$$\frac{\text{população}}{\text{tamanho da amostra}} = \frac{80}{8} = 10$$

Em seguida, ele escreveu, em papéis idênticos, números de 1 a 10 e fez um sorteio sem olhar. O primeiro número que saiu foi o 7. Isso indica que a pessoa que tiver a senha com esse número será a primeira escolhida. A partir dele, adicionam-se 10 até completar as oito senhas:

$$7 \overset{+10}{\longrightarrow} 17 \overset{+10}{\longrightarrow} 27 \overset{+10}{\longrightarrow} 37 \overset{+10}{\longrightarrow} 47 \overset{+10}{\longrightarrow} 57 \overset{+10}{\longrightarrow} 67 \overset{+10}{\longrightarrow} 77$$

Logo, as pessoas selecionadas pelo atendente vão ser as que estiverem com as senhas de números 7, 17, 27, 37, 47, 57, 67 e 77.

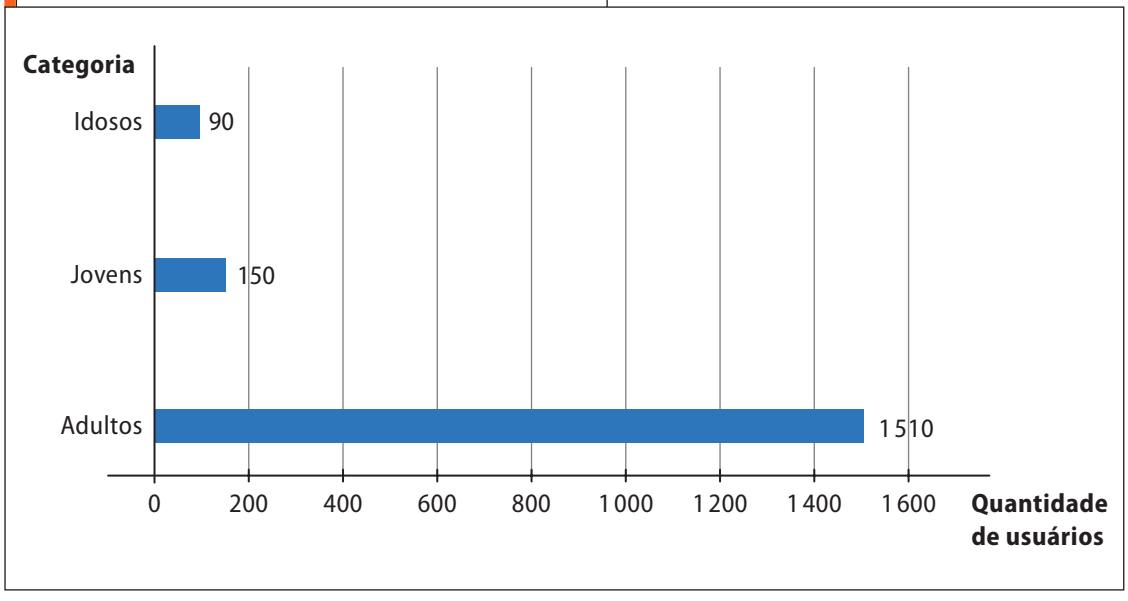
MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Amostra estratificada

Aqui os estratos são as categorias, ou seja, a população se divide em mais de um estrato; na amostra, é preciso garantir que todos os estratos estejam representados. Isso ocorre para evitar que o resultado da pesquisa seja tendencioso. Nesse caso, faz-se um recorte aleatório, de modo que a amostra contenha todos os grupos da população. Acompanhe o seguinte exemplo.

Uma pesquisa sobre a qualidade do transporte, envolvendo jovens, adultos e idosos, será realizada em uma estação de trem de uma cidade do interior. Como a quantidade de pessoas é bastante numerosa, a entrevista será realizada com 30% da população que costuma passar por aquela estação. No gráfico apresentado, está indicada a população separada por categorias.

Usuários do trem que passam pela estação A



Fonte: Dados fictícios.

Vamos determinar 30% da população total, ou seja, 525 pessoas (30% de 1750). Como se trata de uma amostra estratificada, é necessário analisar 30% de cada categoria: jovens, adultos e idosos. Podemos resumir essas informações conforme a tabela a seguir.

Usuários do trem que passam pela estação A

Categoria	População	Amostra
Jovens	150	30% de 150 = 45
Adultos	1510	30% de 1510 = 453
Idosos	90	30% de 90 = 27
Total	1750	525

Fonte: Dados fictícios.

Portanto, serão entrevistados 45 jovens, 453 adultos e 27 idosos que frequentam aquela estação.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

» Características da pesquisa amostral

Diferentemente das pesquisas censitárias, que determinam de forma direta os valores exatos dos parâmetros populacionais, a pesquisa amostral estima um intervalo de confiança para esses parâmetros. A indicação desse intervalo é dada pela **margem de erro** e pelo **índice de confiança** da pesquisa. Se uma pesquisa amostral não apresentar margem de erro e índice de confiança, ela não tem valor científico. Acompanhe a situação.

Um professor de Estatística precisa determinar a altura média x dos seus estudantes. Ele sabe que, para conhecer o valor exato de x, é necessário medir a altura de todos, isto é, realizar uma pesquisa populacional. Porém, por praticidade, optou por uma pesquisa amostral e concluiu que a altura média dos seus estudantes é 1,69 m, com margem de erro de 3 cm e índice de confiança 95%.

A margem de erro de 3 cm, ou seja, 0,03 m, indica que a altura média x pertence ao seguinte intervalo:

$$\left.\begin{array}{l} 1{,}69\text{ m} - 0{,}03\text{ m} = 1{,}66\text{ m} \\ 1{,}69\text{ m} + 0{,}03\text{ m} = 1{,}72\text{ m} \end{array}\right\} 1{,}66\text{ m} \leqslant x \leqslant 1{,}72\text{ m}$$

Já o índice de confiança indica que a probabilidade de a altura média x dos estudantes estar contida nesse intervalo é de 95%. Isso significa que o professor de Estatística estimou, com 95% de chance de sucesso, o intervalo de confiança [1,66; 1,72] que pode conter a altura média x dos seus estudantes.

» Cuidados requeridos na leitura e no tratamento de dados

Para verificar a validade dos resultados apresentados em estudos estatísticos, devemos observar alguns critérios, como os indicados a seguir.

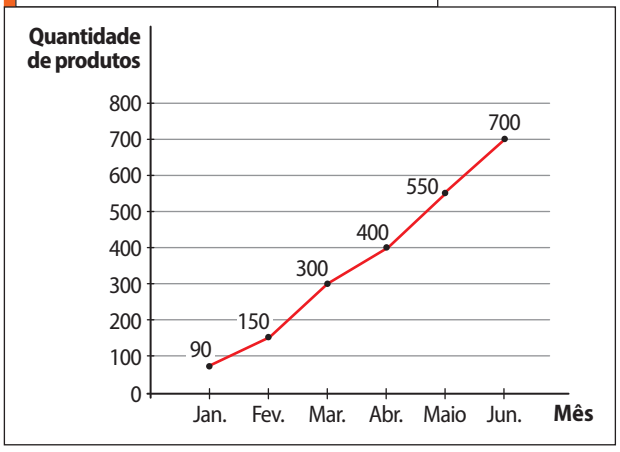
- Se a pesquisa é populacional ou amostral.
- Se o tamanho da amostra é suficiente para representar todas as características da população.
- Se a seleção da amostra foi totalmente aleatória.
- Se a pesquisa apresenta a margem de erro e o índice de confiança.
- Se os dados básicos apresentados conferem com cálculos matemáticos. Por exemplo, se a soma do número de indivíduos em cada categoria resulta no tamanho total da amostra e se a soma dos dados percentuais correspondentes a determinada variável resulta em 100%.

Ao ler ou construir um gráfico, lembre-se de que as informações precisam ser claras e objetivas, sem gerar dúvidas. Por isso, é importante escolher o gráfico mais eficiente e utilizar escalas adequadas tanto no eixo horizontal quanto no eixo vertical.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

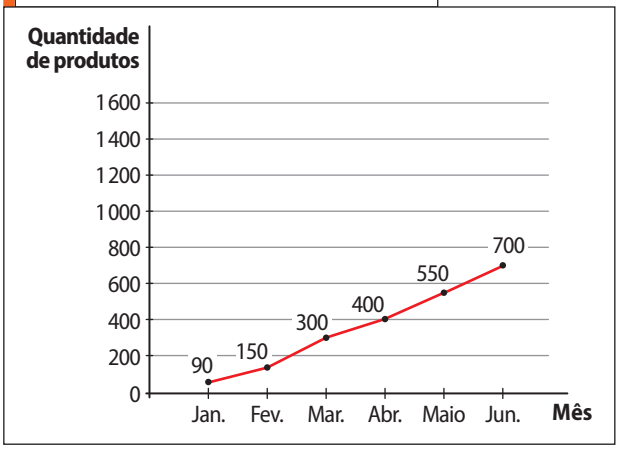
Uma mudança de escala pode gerar equívocos na análise dos dados e até mesmo ser tendenciosa. Observe os gráficos **A** e **B**, que mostram a quantidade de produtos vendidos nos seis primeiros meses do ano por uma empresa.

Vendas da empresa (gráfico A)



Fonte: Dados fictícios.

Vendas da empresa (gráfico B)



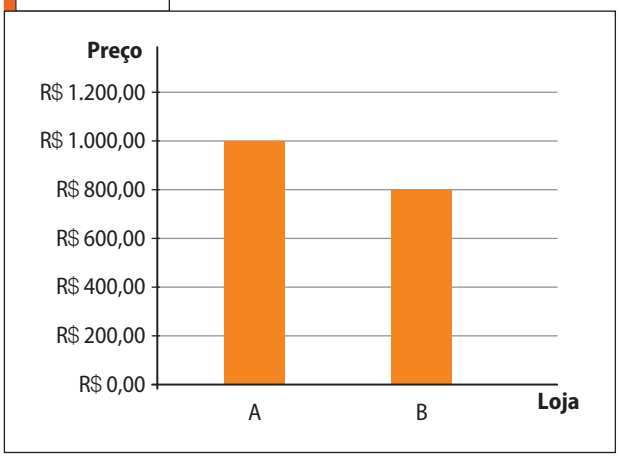
Fonte: Dados fictícios.

ILUSTRAÇÕES: SERGIO LIMA

Note que os gráficos apresentam as mesmas informações. No entanto, por causa da mudança de escala do eixo *y*, o comportamento da linha do gráfico **A** passa a impressão de que a quantidade de vendas ao longo dos meses teve um crescimento mais acentuado em comparação ao comportamento da linha do gráfico **B**, que sugere um crescimento menos acentuado no mesmo período.

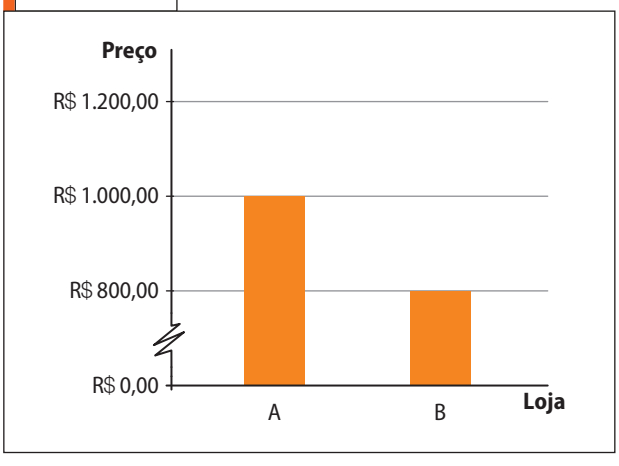
Outra mudança em gráficos que pode influenciar a análise dos dados é a **quebra de escala**. Observe os gráficos I e II, que comparam o preço do mesmo produto em duas lojas diferentes.

Gráfico I



Fonte: Dados fictícios.

Gráfico II



Fonte: Dados fictícios.

Observe que ambos os gráficos apresentam os mesmos preços, loja **A**: R$ 1.000,00 e loja **B**: R$ 800,00. Porém, por causa da quebra de escala no eixo *y*, as alturas das colunas do gráfico II passam a impressão de que o preço da loja **A** é o dobro do preço da loja **B**.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Professor, esta seção foi elaborada com base na versão 24.2.3 do LibreOffice. Versões mais atuais ou mais antigas podem apresentar diferenças em relação aos comandos e às imagens indicadas aqui.

Planilha eletrônica e análise visual de dados

Utilizando uma planilha, vamos construir uma tabela e alguns gráficos para representar os dados de uma pesquisa.

A planilha eletrônica é uma ferramenta muito útil em diversas situações do dia a dia e na resolução de problemas matemáticos. Com ela, cálculos recorrentes, por exemplo, podem ser feitos rapidamente criando uma fórmula adequada ou utilizando uma fórmula disponível no banco de dados do *software*.

Existem planilhas eletrônicas de diversos fabricantes, mas todas elas funcionam de maneira muito semelhante. Aqui, vamos utilizar a planilha eletrônica do **LibreOffice**, cujo *download* é gratuito e está disponível em https://pt-br.libreoffice.org/ (acesso em: 31 ago. 2024).

Acompanhe a seguinte situação.

Foi realizada uma pesquisa com 100 estudantes do Ensino Médio sobre o tempo que eles gastam em diferentes plataformas de mídia social em um dia típico. Os dados coletados estão na tabela.

Tempo gasto em plataformas de mídia social

Plataforma de mídia social	Tempo médio gasto (em minuto)
A	60
B	30
C	45
D	80
E	50
F	70

Fonte: Dados fictícios.

Criando uma tabela

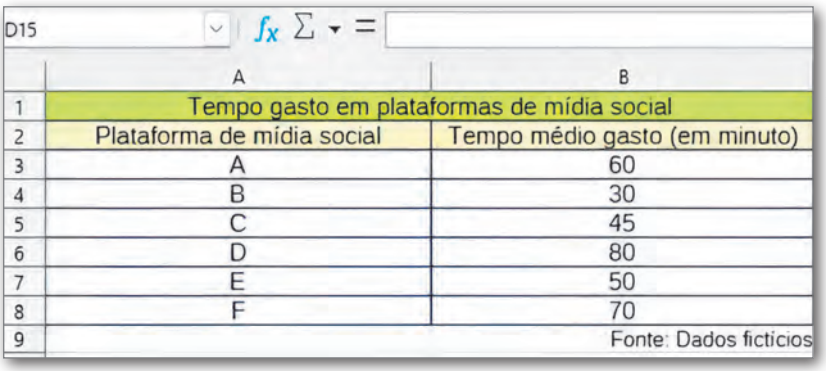
I. Abra uma planilha no LibreOffice.

II. Clique na célula A1 e digite o título da tabela. Na célula A2, digite o cabeçalho da primeira coluna. Continue inserindo os dados referentes a essa coluna. Em seguida, na célula B2, digite o cabeçalho da segunda coluna e continue inserindo os dados.

III. Comece mesclando as células A1 e B1 para criar um espaço para o título da tabela. Para fazer isso, selecione as duas células e clique no botão . Em seguida, ajuste a largura das colunas para garantir que todos os dados digitados possam ser visualizados.

IV. Melhore a legibilidade da sua tabela alterando a cor de fundo das células do título e dos cabeçalhos e centralizando os textos.

V. Na célula B9, digite a fonte da tabela. Você pode obter uma tabela como a mostrada a seguir.



REPRODUÇÃO/LIBREOFFICE

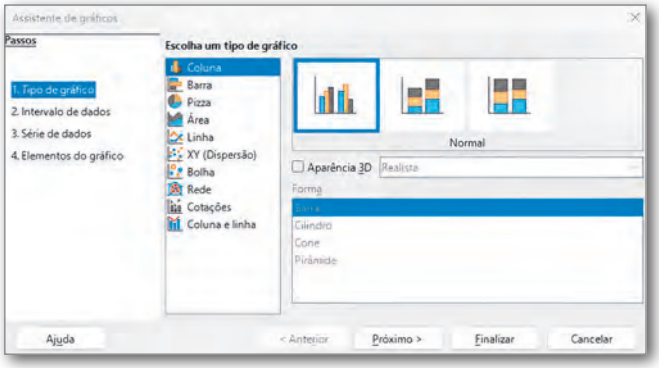
MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

2. Espera-se que os estudantes percebam que os dois gráficos podem representar os dados, porque eles permitem uma fácil comparação do tempo gasto em diferentes plataformas de mídia social. No entanto, cada estudante pode expressar preferência por um dos tipos de visualização.
3. O gráfico de barras destaca a quantidade absoluta de tempo gasto em cada plataforma, facilitando a visualização de qual plataforma tem o maior ou o menor tempo de uso. Já o gráfico de setores, além de mostrar os valores absolutos, oferece também a opção de destacar a proporção do tempo gasto em cada plataforma em relação ao tempo total gasto em todas as plataformas.

Construindo gráficos

I. Primeiro, selecione os dados que deseja incluir no gráfico. Isso abarca os cabeçalhos e os valores. Para fazer isso, clique na célula A2, depois pressione e segure a tecla ***Shift*** e clique na célula B8.

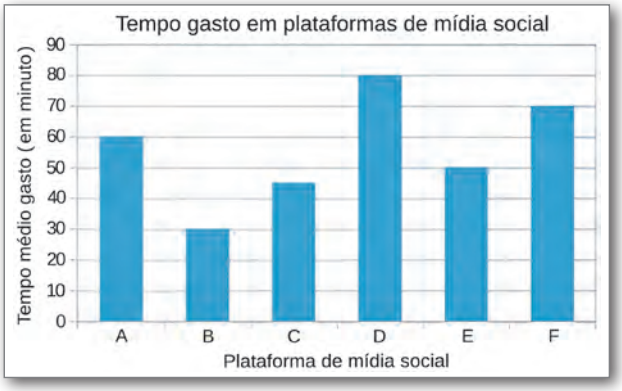
II. Na guia **Inserir**, presente na barra de *menu*, clique em **Gráfico**. Com isso, aparecerá uma janela de assistente de gráficos para a escolha do tipo de gráfico desejado.



IMAGENS: REPRODUÇÃO/LIBREOFFICE

III. Escolha o gráfico de coluna e clique em **Próximo** três vezes até o passo 4 (**Elementos do gráfico**). Nesse passo, desabilite a opção de exibir legenda no canto direito da janela e preencha os campos do Título, do Eixo X e do Eixo Y da seguinte maneira:
Título: Tempo gasto em plataformas de mídia social
Eixo X: Plataforma de mídia social
Eixo Y: Tempo médio gasto (em minuto)

IV. Clique em **Finalizar** e aparecerá o gráfico a seguir.



Você pode editar elementos do gráfico (título, barras, grades, entre outros) selecionando o elemento desejado e clicando com o botão direito do *mouse* para acessar as opções de formatação.

Agora, faça o que se pede nas atividades a seguir.

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. Utilizando a planilha eletrônica, construa um gráfico de setores (ou gráfico de *pizza*) para os dados da pesquisa sobre o tempo gasto em plataformas de mídia social. Ver as **Orientações para o professor**.

Dica 1: Siga as mesmas etapas da construção do gráfico de barras; no entanto, no passo 4 da janela de assistente de gráfico, deixe habilitada a opção **Exibir legenda**. Após inserir o gráfico, clique sobre ele com o botão direito do *mouse* e escolha a opção **Inserir rótulo de dados**, para que os valores da tabela apareçam também no gráfico.

Dica 2: Clique novamente com o botão direito do *mouse* sobre um dado e escolha a opção **Formatar rótulo de dados**. Na janela que se abrir, será possível selecionar uma opção para mostrar os valores em porcentagem.

2. Qual gráfico você acha mais adequado para representar os dados da pesquisa: o de barras ou o de setores? Por quê?

3. Que tipo de informação o gráfico de barras destaca? E o gráfico de setores?

4. Construa um gráfico de linha para representar os dados da pesquisa e compare-o com os gráficos de barras e de setores. Você acha que é adequado usar esse tipo de gráfico para representar esses dados? Justifique. Espera-se que os estudantes percebam que o gráfico de linhas não é adequado para representar esses dados, porque os dados não são uma série temporal e não têm uma ordem específica. Os gráficos de linha são mais adequados para mostrar como os dados mudam ao longo do tempo ou de uma sequência específica. Nesse caso, como não há uma progressão ou sequência clara nas plataformas de mídia social, o gráfico de linhas não se adéqua.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

ATIVIDADES RESOLVIDAS

1. Observe os dados obtidos em uma pesquisa feita com todos os pacientes que foram atendidos por um médico em determinado dia e responda às questões.

Informações sobre pacientes atendidos

Paciente	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Tipo sanguíneo	A	AB	A	B	B	AB	A	AB	A	B
Gosta de praticar esporte?	Não	Não	Indiferente	Sim	Sim	Indiferente	Não	Sim	Sim	Indiferente
Tempo de atividade física diária (em hora)	0	0	1	2	2	1	0	2	2	1
Altura (em metro)	1,58	1,60	1,60	1,58	1,60	1,65	1,65	1,65	1,58	1,60

Fonte: Dados fictícios.

a) Essa pesquisa é amostral ou censitária? Justifique.

b) Quais dados são de variáveis qualitativas? Quais são de variáveis quantitativas?

c) Qual é a altura média dos pacientes atendidos nesse dia? E a amplitude?

d) Construa uma tabela de frequências para a variável "tipo sanguíneo".

e) Analise o tratamento de dados feito nos itens anteriores e faça uma descrição desses pacientes.

Resolução

a) A pesquisa é censitária, pois foi feita com todos os pacientes.

b) "Tipo sanguíneo" e "Gosta de praticar esporte?" são variáveis qualitativas. "Tempo de atividade física diária" e "altura" são variáveis quantitativas.

c) A altura média, em metro, é dada por:

$$\bar{x} = \frac{3 \cdot 1{,}58 + 4 \cdot 1{,}60 + 3 \cdot 1{,}65}{10} \simeq 1{,}61$$

A amplitude, em metro, é dada por:

$1{,}65 - 1{,}58 = 0{,}07$

d) Conforme a tabela, temos que a frequência absoluta do tipo sanguíneo A é 4, a do tipo sanguíneo B é 3 e a do tipo sanguíneo AB é 3. Foram atendidos 10 pacientes ao todo, portanto cada tipo sanguíneo tem a seguinte frequência relativa:

Tipo A: $\frac{4}{10} \cdot 100\% = 40\%$

Tipo B: $\frac{3}{10} \cdot 100\% = 30\%$

Tipo AB: $\frac{3}{10} \cdot 100\% = 30\%$

Para finalizar, organizamos os dados em uma tabela de frequências.

Tipo sanguíneo

Tipo	A	B	AB	Total
Frequência absoluta	4	3	3	10
Frequência relativa	40%	30%	30%	100%

Fonte: Dados fictícios.

e) A altura média dos pacientes é 1,61 m, e a diferença entre a maior e a menor altura é 7 cm. A maioria dos pacientes tem tipo sanguíneo A, e nenhum paciente tem o tipo sanguíneo O.

2. Uma empresa pretende fazer uma pesquisa com funcionários de diversos setores, garantindo que haja representantes de forma proporcional a cada setor, pois não será possível realizar a pesquisa com todos os funcionários. Observe, a seguir, dados referentes a esses funcionários e responda às questões.

Funcionários por setor

Setor	A	B	C	D	E	Total
Quantidade de funcionários	250	135	450	355	410	1600

Fonte: Dados fictícios.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

a) Determine quantos funcionários de cada setor precisam ser entrevistados para que 20% da empresa responda à pesquisa.

b) Que tipo de amostra é mais apropriada para esse estudo?

Resolução

a) Calculando 20% do total de funcionários, temos:

$1\,600 \cdot 0{,}20 = 320$

Portanto, 320 funcionários vão responder à pesquisa.

Para escolher de forma proporcional os funcionários de cada setor, fazemos:

Setor **A**: $250 \cdot 0{,}20 = 50$

Setor **B**: $135 \cdot 0{,}20 = 27$

Setor **C**: $450 \cdot 0{,}20 = 90$

Setor **D**: $355 \cdot 0{,}20 = 71$

Setor **E**: $410 \cdot 0{,}20 = 82$

Portanto, deverão ser entrevistados 50, 27, 90, 71 e 82 funcionários, respectivamente, dos setores **A**, **B**, **C**, **D** e **E**.

b) Como não será possível realizar a pesquisa com todos os funcionários, a amostra estratificada é a mais recomendada.

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. Leia o trecho de uma notícia.

O Censo Demográfico 2022 mostrou que a população quilombola residente no Brasil é de 1 327 802 pessoas, correspondendo a 0,65% da população. [...]

A região que concentra a maior quantidade é o Nordeste, com 905 415 quilombolas, correspondendo a 68,2% da população quilombola, seguida do Sudeste com 182 305 pessoas e do Norte com 166 069 pessoas, ambas contabilizando 26,24% da população quilombola. Com 5,57% da população quilombola, as regiões Centro-Oeste e Sul têm 44 957 e 29 056 pessoas, respectivamente.

A Bahia é o estado com maior quantitativo de população quilombola – 397 059 pessoas –, o que corresponde a 29,90% da população quilombola recenseada. Em seguida vem o Maranhão, com 269 074 pessoas, o que corresponde a 20,26% da população quilombola recenseada. [...]

Dos 5 568 municípios brasileiros, 1 696 tinham moradores quilombolas. Senhor do Bonfim (BA) destaca-se por ser o município com a maior quantidade absoluta de pessoas quilombolas, com 15 999, seguido de Salvador, com 15 897, Alcântara (MA) com 15 616 e de Januária (MG) com 15 mil pessoas.

Nota: Soma dos percentuais difere de 100% devido ao arredondamento.

CAMPOS, Ana Cristina. Censo 2022: Brasil tem 1,32 milhão de quilombolas. **Agência Brasil**, Brasília, DF, 27 jul. 2023. Disponível em: https://agenciabrasil.ebc.com.br/economia/noticia/2023-07/censo-2022-brasil-tem-132-milhao-quilombolas. Acesso em: 31 ago. 2024.

Elaborado com base em: BRITTO, Vinícius. **Censo 2022**: Brasil possui 8 441 localidades quilombolas, 24% delas no Maranhão. Rio de Janeiro: Agência IBGE Notícias, 26 jul. 2024. Disponível em: https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-noticias/2012-agencia-de-noticias/noticias/40704-censo-2022-brasil-possui-8-441-localidades-quilombolas-24-delas-no-maranhao. Acesso em: 20 set. 2024.

Localidades quilombolas – 2022

SONIA VAZ

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

1. c) Não. O correto é dizer que aproximadamente 1,2% da população quilombola mora em Senhor do Bonfim (BA).

a) Organize os dados da população quilombola por região (Norte, Nordeste, Centro-Oeste, Sudeste e Sul) em uma tabela de frequências. Ver as **Orientações para o professor**.

b) Qual é o percentual aproximado de municípios brasileiros que têm moradores quilombolas? aproximadamente 30,46%

c) Podemos afirmar que aproximadamente 12% da população quilombola mora no município de Senhor do Bonfim, na Bahia? Justifique.

d) Observe o mapa e responda: em qual região do Brasil estão os dois estados em que não há territórios quilombolas oficialmente demarcados?
O Acre e Roraima estão na Região Norte do Brasil.

e) Você confia nos resultados da pesquisa que foram apresentados nessa notícia? Explique. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes respondam que sim, pois a pesquisa é censitária, isto é, todos os indivíduos da população-alvo foram entrevistados.

CADU DE CASTRO/PULSAR IMAGENS

■ Mãe e filha quilombolas dançam em Comunidade Quilombola do Cafundó, em Salto de Pirapora (SP). Fotografia de 2023.

2. Escreva dois exemplos de pesquisa censitária e dois de pesquisa amostral. Depois, reúna-se a um colega e troque os exemplos com ele. Identifique quais situações propostas por ele são censitárias e quais são amostrais. Resposta pessoal. Respostas possíveis: Pesquisa censitária: número de habitantes de uma cidade e perfil socioeconômico dos participantes de um concurso público; pesquisa amostral: pesquisa de opinião sobre a qualidade de um produto e pesquisa de intenção de voto em uma eleição. Há outras respostas possíveis.

3. Uma enquete realizada na página da internet do Senado Federal de um país cuja população é de 50 milhões de habitantes constatou que, dos 3 milhões de cidadãos que responderam à pesquisa de forma voluntária, 60% apoiavam o novo projeto de lei que regulamentava os percentuais do imposto de renda. Na tribuna, dois senadores disseram:

Senador **1**: votarei a favor do projeto, pois ele tem apoio de 60% da população.

Senador **2**: votarei contra o projeto, porque a enquete é tendenciosa.

Qual dos dois senadores utilizou um argumento válido? Explique.
O senador **2**. A amostra não representa a população do país, pois ela não foi selecionada de forma aleatória e apenas as pessoas que tinham conhecimento e interesse no novo projeto responderam à enquete.

4. Para verificar o tempo médio de atendimento em um banco, foram distribuídas senhas numeradas de 1 a 1 000, de acordo com a ordem de chegada das pessoas. No final do expediente, a senha de número 15 foi sorteada para ser analisada e, além dela, todas as senhas múltiplas de 15 também foram analisadas. Explique que tipo de amostra foi utilizada nessa pesquisa. Amostra sistemática. Há uma regra estabelecida (senhas com números múltiplos de 15), mas se mantém a aleatoriedade (não é possível saber o perfil das pessoas que foram ao banco).

5. (Cebraspe-PA) Um professor de educação física realizou uma pesquisa a respeito das alturas dos estudantes da instituição de ensino onde trabalha. A instituição possui 1285 estudantes, dos quais 535 são homens e 750 são mulheres. Para realizar essa pesquisa, foi selecionada uma amostra de 257 estudantes pelo método de amostragem estratificada com alocação proporcional, considerando-se os estratos homem e mulher.
Nessa situação, foram selecionados alternativa **a**

a) 107 homens e 150 mulheres.

b) 128 homens e 129 mulheres.

c) 110 homens e 147 mulheres.

d) 150 homens e 107 mulheres.

e) 129 homens e 128 mulheres.

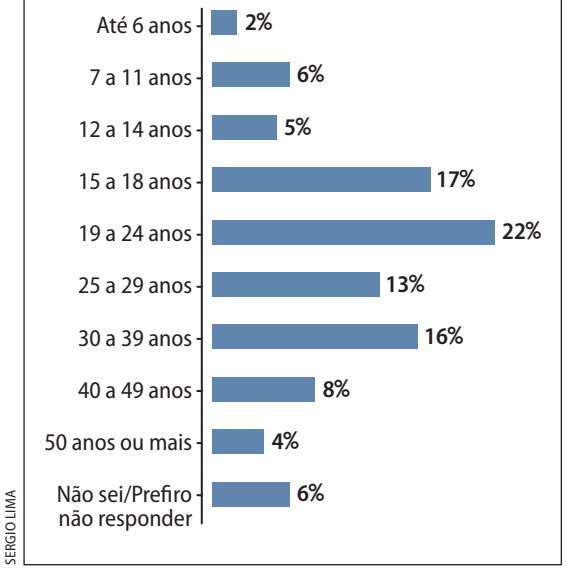
MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

6. a) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes respondam que sim, pois 13% das vítimas sofreram a primeira ocorrência de agressão até os 14 anos, 17% sofreram na faixa dos 15 aos 18 anos e 22%, na faixa entre 19 e 24 anos.

6. Observe o gráfico, que mostra a idade das mulheres brasileiras vítimas de violência doméstica ou familiar provocada por um homem quando sofreram a violência pela primeira vez, de acordo com a 10ª Pesquisa Nacional de Violência contra a Mulher, realizada em 2023.

Qual era a sua idade quando você foi agredida pela primeira vez? – População feminina – Brasil – 2023



SERGIO LIMA

Notas:
(1) Soma dos percentuais difere de 100% devido ao arredondamento.
(2)*Questão respondida por quem declarou já ter sofrido algum tipo de violência doméstica ou familiar provocada por um homem.

Fonte: BRASIL. Senado Federal. Instituto de Pesquisa DataSenado. Secretaria de Transparência. **Pesquisa DataSenado**: Pesquisa Nacional de Violência contra a Mulher. Brasília, DF: Instituto de Pesquisa DataSenado, 2023. p. 60. Disponível em: https://www12.senado.leg.br/institucional/datasenado/arquivos/pesquisa-nacional-de-violencia-contra-a-mulher-datasenado-2023. Acesso em: 31 ago. 2024.

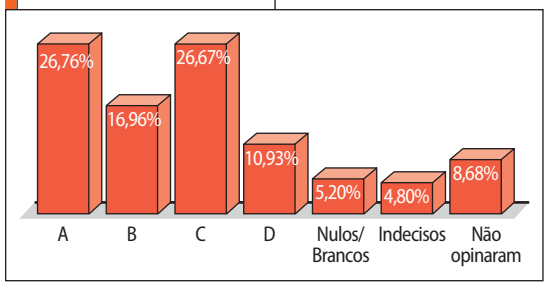
De acordo com o gráfico, responda:

a) Você considera que a maior parte das vítimas sofreu a primeira agressão ainda muito jovem? Justifique.

b) A variável "Qual era a sua idade quando você foi agredida pela primeira vez?" é qualitativa ou quantitativa? É variável quantitativa.

7. O gráfico a seguir mostra o resultado de uma pesquisa feita com 2 040 eleitores selecionados aleatoriamente. A margem de erro da pesquisa é de 2 pontos percentuais, e o índice de confiança é 95%.

Intenção de voto



EDITORIA DE ARTE

Fonte: Dados fictícios.

De acordo com a pesquisa, responda às perguntas.

a) Qual é o intervalo de confiança da intenção de votos do candidato **B**? [14,96%; 18,96%]

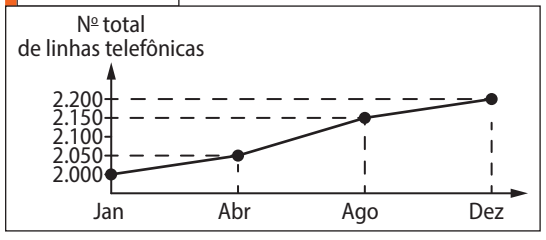
b) O candidato **A** tem a maior intenção de votos nas porcentagens. Isso significa que ele certamente vencerá a eleição?

c) Quantos votos o candidato **B** teve, aproximadamente, nessa pesquisa? aproximadamente 346 votos

d) Quantas pessoas, aproximadamente, estão no grupo que responderam nulos/brancos, estão indecisas ou não opinaram? aproximadamente 381 pessoas

8. (Enem/MEC) Para convencer a população local da ineficiência da Companhia Telefônica Vilatel na expansão da oferta de linhas, um político publicou no jornal local o gráfico I, abaixo representado. A Companhia Vilatel respondeu publicando dias depois o gráfico II, onde pretende justificar um grande aumento na oferta de linhas. O fato é que, no período considerado, foram instaladas, efetivamente, 200 novas linhas telefônicas.

Gráfico I

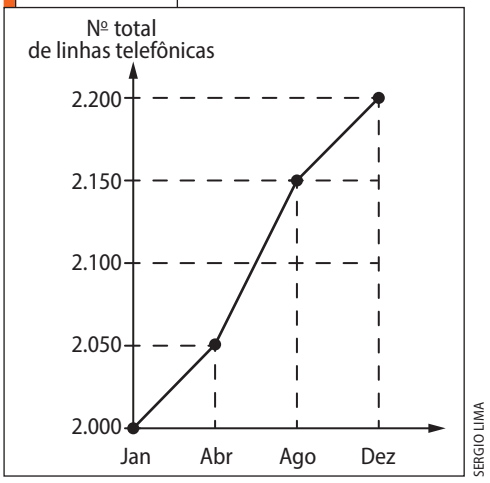


SERGIO LIMA

7. b) Não. A pesquisa estima que a intenção real *x* de votos para o candidato **A** pertence ao intervalo [24,76%; 28,76%], enquanto a intenção real *y* de votos para o candidato **B** pertence ao intervalo [24,67%; 28,67%]. Desse modo, não é possível saber se *x* é maior do que, menor do que ou igual a *y*. Assim, não há certeza de que o candidato **A** vencerá as eleições.

9. A soma indica o total de pessoas entrevistadas que responderam "sim", ou seja, que já fizeram uma cirurgia. A média indica a fração de pessoas entrevistadas que já fizeram cirurgias.

Gráfico II



Analisando os gráficos, pode-se concluir que

a) o gráfico II representa um crescimento real maior do que o do gráfico I.

b) o gráfico I apresenta o crescimento real, sendo o II incorreto.

c) o gráfico II apresenta o crescimento real, sendo o gráfico I incorreto.

d) a aparente diferença de crescimento nos dois gráficos decorre da escolha das diferentes escalas.

e) os dois gráficos são incomparáveis, pois usam escalas diferentes. alternativa **d**

9. Um pesquisador atribuiu o número 1 para a resposta "sim" e o número 0 para a resposta "não" para o tratamento de dados da seguinte variável qualitativa:
"Você já foi submetido a uma cirurgia?"
Em seguida, ele calculou a soma e a média aritmética desses valores.
O que a soma e a média desses valores representam no contexto dessa pesquisa?

10. Leia a reportagem e responda às questões.

TSE define regras para as pesquisas eleitorais nas Eleições 2024

No último dia 1º de março, o Tribunal Superior Eleitoral (TSE) publicou uma série de 12 resoluções que definiram quais serão as regras para o pleito deste ano. [...]

[...]

A norma aprovada manteve a data de 1º de janeiro do ano da eleição para que as entidades e empresas registrem, no Sistema de Registro de Pesquisas Eleitorais (PesqEle), até cinco dias antes da divulgação, as pesquisas de opinião pública realizadas. [...]

[...]

O registro deverá apresentar informações sobre quem contratou a pesquisa e quem pagou – com os respectivos números no Cadastro de Pessoas Físicas (CPF) ou no Cadastro Nacional de Pessoas Jurídicas (CNPJ) – o valor e a origem dos recursos, a metodologia utilizada e o período de realização do levantamento.

Além disso, outros dados necessários são: o plano amostral; a ponderação quanto a gênero, idade, grau de instrução e nível econômico do entrevistado; o nível de confiança e a margem de erro da pesquisa; o questionário completo aplicado; e o nome do profissional estatístico responsável pela pesquisa.

[...]

De acordo com o novo texto aprovado na resolução, pesquisa é diferente de enquete ou sondagem. Estes dois últimos se caracterizam pelo levantamento de opiniões sem plano amostral nem utilização de método científico para a realização. [...]

[...]

A divulgação de pesquisa sem o registro prévio das informações constantes da resolução sujeita os responsáveis a multa que varia de R$ 53.205,00 a R$ 106.410,00. Já a divulgação de pesquisa fraudulenta constitui crime, punível com multa – também estipulada nos mesmos valores citados anteriormente –, além de detenção de seis meses a um ano.

BRASIL. Tribunal Superior Eleitoral. **TSE define regras para as pesquisas eleitorais nas eleições 2024**. Brasília, DF: TSE, 19 mar. 2024. Disponível em: https://www.tse.jus.br/comunicacao/noticias/2024/Marco/tse-define-regras-para-as-pesquisas-eleitorais-nas-eleicoes-2024. Acesso em: 31 ago. 2024.

a) De acordo com o texto, que informações são necessárias em um registro de pesquisa eleitoral?

b) Que tipo de amostra é utilizado em pesquisas eleitorais: casual simples, sistemática ou estratificada? Justifique.

c) Segundo o Tribunal Superior Eleitoral (TSE), por que a divulgação de enquetes ou sondagens eleitorais pode constituir crime?

10. a) As informações necessárias são: quem contratou a pesquisa, quem a pagou e a origem e o valor dos recursos, a metodologia utilizada, o plano amostral, o questionário completo, o nível de confiança, a margem de erro, o período da coleta dos dados e o nome do profissional estatístico responsável pela pesquisa.

10. b) Estratificada, pois o plano amostral apresenta a ponderação quanto a gênero, idade, grau de instrução e nível econômico dos entrevistados.

10. c) Enquetes e sondagens não têm plano amostral, isto é, sua amostra não é representativa da população-alvo, e não utilizam metodologia científica. Logo, seus resultados podem ser equivocados e tendenciosos, ou seja, ilustram um retrato parcial, e não completo, da realidade.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

11. a) Amostral, pois foram entrevistadas 1 000 pessoas, e não toda a população.
11. c) 90%. Espera-se que os estudantes respondam que a notícia diz que nove em cada dez brasileiros apoiam a regulamentação das redes, portanto 90%.

11. Leia a seguinte notícia e responda às questões.

> Uma pesquisa do Ibope mostra que nove em cada dez brasileiros apoiam a regulamentação das redes sociais para combater as *fake news*. A pesquisa foi encomendada pela ONG Avaaz. A margem de erro é de três pontos percentuais para mais ou para menos.
>
> Cinquenta por cento dos entrevistados se declararam muito preocupados com notícias falsas e desinformação na internet e redes sociais; 26%, um pouco preocupados; 22% disseram que não estão preocupados; e 2% não sabem ou não responderam.
>
> [...]
>
> O Ibope ouviu mil pessoas, por telefone, na quinta-feira (28) e na sexta-feira (29) [de maio de 2020].

IBOPE: 90% dos brasileiros apoiam regulamentação de redes sociais para combater "*fake news*". **G1**, [*s. l.*], 2 jun. 2020. Disponível em: https://g1.globo.com/jornal-nacional/noticia/2020/06/02/ibope-90percent-dos-brasileiros-apoiam-regulamentacao-de-redes-sociais-para-combater-fake-news.ghtml. Acesso em: 31 ago. 2024.

a) Essa pesquisa é censitária ou amostral? Explique sua resposta.

b) De que modo essa pesquisa foi realizada?
por telefone

c) Qual é a porcentagem de brasileiros que apoia a regulamentação das redes sociais no combate às *fake news*? Como você identificou esse percentual?

12. Organize-se em um grupo de quatro integrantes para realizar uma pesquisa estatística de acordo com o que foi estudado até o momento. Para isso, converse com seus colegas sobre os passos a seguir, defina-os e registre-os.

1º) Definam o objeto de estudo e os objetivos da pesquisa, o público-alvo e o tipo de pesquisa (amostral ou populacional).

2º) Elaborem um questionário e coletem os dados. Se possível, utilizem um formulário *on-line* para a execução desta etapa.

3º) Façam o tratamento e a análise dos dados com ajuda de uma planilha eletrônica.

4º) Escrevam o relatório final, detalhando o objeto de estudo e os objetivos da pesquisa, a metodologia utilizada para a coleta de dados, as análises feitas, o tratamento dos dados e a conclusão da pesquisa.

Ver as **Orientações para o Professor**.

FÓRUM

O uso de dados tendenciosos na disseminação de informações falsas

O termo "*fake news*", traduzido do inglês, significa "notícias falsas". Esse tipo de notícia é criado, geralmente, para prejudicar alguma pessoa ou grupo. Para parecer verdadeira, costuma-se fazer uso de dados estatísticos falsos ou errados, a fim de convencer o leitor de que aquela notícia, de fato, é real. Ver as **Orientações para o Professor**.

- Faça uma pesquisa sobre as *fake news*, selecionando exemplos dessas notícias e identificando os erros intencionais colocados nelas.
- Pesquise a lei de combate às *fake news* e discuta com seus colegas o que vocês podem fazer para combater esse tipo de notícia.

MCLITTLE STOCK/SHUTTERSTOCK.COM

■ Na internet, há *sites* de verificação de notícias consideradas suspeitas.

É importante que os estudantes tragam exemplos reais de *fake news* e consigam identificar a relação desse tema com os assuntos abordados neste Capítulo. Espera-se que eles identifiquem elementos estatísticos nesse tipo de notícia.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Florence Nightingale

Leia o texto a seguir, a respeito da enfermeira inglesa Florence Nightingale, que revolucionou a enfermagem ao utilizar a Estatística para reduzir as mortes nos hospitais militares onde trabalhou.

Florence Nightingale nasceu a 12 de maio em Florença, no ano de 1820. [...]. Florence cedo revelou a sua aptidão para o estudo, interessando-se pela literatura clássica, história, temas sociais e políticos, mas também pela matemática [...].

[...]

Em 1854, após o começo da guerra da Crimeia (1853-1856), de onde chegavam notícias alarmantes sobre as condições deploráveis em que se encontravam os hospitais militares na região, foi nomeada pelo Ministro da Guerra, seu amigo, como superintendente de um corpo de 38 enfermeiras, destacadas para prestar assistência na Turquia. No hospital militar britânico em Scutari [...], depressa se apercebeu das precárias condições de higiene e falta de recursos do hospital, em que havia muito mais baixas devidas a infeções adquiridas no hospital (tais como tifo, cólera e febre tifoide) do que devidas diretamente aos ferimentos de guerra, e que não havia registros em condições sobre os óbitos, nem qualquer espécie de coordenação entre os vários hospitais. Começou então a organizar um registro sistemático e minucioso sobre a vida hospitalar, que lhe permitiu estudar as causas de morte e introduzir medidas para melhorar as condições higiênico-sanitárias dos hospitais. Em Scutari, as reformas no abastecimento de água, que se encontrava contaminada, a higiene e ventilação das instalações, entre outras medidas, levaram a uma redução surpreendente das taxas de mortalidade ao fim de alguns meses.

SAMMLUNG RAUCH/INTERFOTO/FOTOARENA

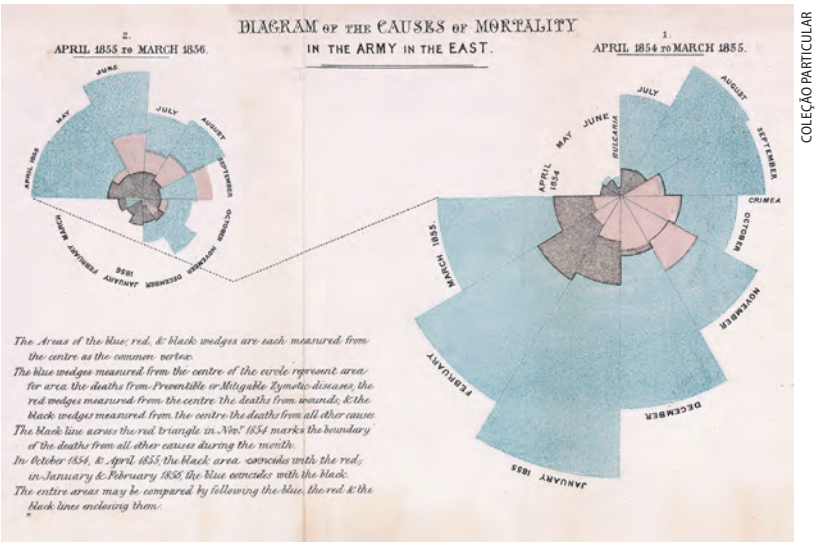
A enfermeira Florence Nightingale. Fotografia de cerca de 1860.

Concebeu um método de representação gráfica que permitia ver rapidamente a evolução das taxas de mortalidade devidas às diferentes causas [...]. Estes gráficos eram circulares, com 12 secções angulares correspondentes aos 12 meses do ano, coloridas a 3 cores, com áreas proporcionais às mortes devidas respectivamente a infecções hospitalares (azul), a ferimentos de guerra (vermelho) e a outras causas (preto), em cada mês. Quando a guerra da Crimeia terminou, a parte azul dos gráficos encontrava-se drasticamente reduzida, e o papel da estatística médico-hospitalar, na qual foi pioneira, tornou-se indiscutível. Regressou da Crimeia como uma heroína [...].

[...]

Foi também reconhecido o seu papel na Estatística, sendo a primeira mulher nomeada Fellow da Royal Statistical Society (1858) e mais tarde membro honorário da American Statistical Association (1874). Morreu com 90 anos, em 1910 [...].

ATHAYDE, Emília. Florence Nightingale, pioneira também na estatística. **Correio do Minho**, Minho, 16 set. 2016. Caderno Ciência. Disponível em: https://www.ecum.uminho.pt/pt/Media/Documents/Correio%20do%20Minho/2016/CM_16_09_16%2036.pdf. Acesso em: 31 ago. 2024.



COLEÇÃO PARTICULAR

Representações gráficas das causas de morte no hospital militar britânico elaboradas por Florence Nightingale.

Indicadores

Muitas pesquisas do IBGE colhem dados sociais e econômicos do Brasil, cujos resultados geram uma série de indicadores que retratam características da sociedade brasileira. A seguir, acompanhe alguns exemplos.

- **Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA – índice oficial de inflação do Brasil)**: aponta, em porcentagem, a variação do custo de vida médio de famílias com renda mensal de 1 a 40 salários mínimos.
- **Taxa de desemprego**: indica o percentual de pessoas com idade para trabalhar que estão tentando encontrar emprego em relação ao total de pessoas do mesmo grupo etário.
- **Mortalidade infantil**: indica o número de óbitos de menores de um ano de idade a cada mil nascidos vivos.
- **Taxa de analfabetismo**: aponta o percentual de pessoas analfabetas com 15 anos ou mais em relação ao total de pessoas do mesmo grupo etário.

A Organização Mundial da Saúde (OMS), o Banco Central (BC) e o Ministério da Educação (MEC) são algumas das diferentes instituições que utilizam esses indicadores para orientar ou direcionar políticas públicas relacionadas, respectivamente, à Saúde, à Economia e à Educação, ou seja, empresas e instituições governamentais que tomam decisões baseadas em análises dos indicadores sociais e econômicos do Brasil produzidos pelo IBGE.

Índice de Desenvolvimento Humano (IDH)

O Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento (PNUD) publica anualmente o Relatório de Desenvolvimento Humano (RDH) global que contém o Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) de grande parte dos países do mundo. Em seu cálculo, são quantificadas três dimensões básicas do desenvolvimento humano: saúde, educação e renda.

Em relação à saúde, o índice considera a expectativa de vida, em anos, ao nascer. Isto é, o número de anos que um recém-nascido poderá viver se os padrões de saúde do ano do seu nascimento permanecerem os mesmos durante toda a sua vida.

O índice de educação considera a expectativa de escolaridade e a média de anos de escolaridade da população do país. A expectativa de escolaridade é o número de anos esperado pelos quais uma pessoa permaneça estudando em instituições educacionais, desde o período da alfabetização até a pós-graduação. A média de anos de escolaridade é a média aritmética do número de anos que cada cidadão do país permaneceu estudando em instituições de ensino.

O índice de renda considera o Rendimento Nacional Bruto (RNB) *per capita*, em dólares, do país. O RNB *per capita* é a soma dos preços de todos os bens e serviços finais produzidos em um ano por um país, tanto dentro quanto fora de seu território, dividido pelo seu número de habitantes.

O IDH varia de 0 a 1; quanto mais próximo de 1, maior é o desenvolvimento humano do país. Em outras palavras, quanto mais próximo de 1 é o IDH, melhores são as condições e as oportunidades oferecidas pelo país para que seus cidadãos possam ter uma vida digna e de qualidade.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

A tabela a seguir apresenta os valores de 0 a 1 do índice de IDH para a classificação dos países de acordo com o IDH.

Classificação do IDH

Classificação	IDH
Desenvolvimento humano muito elevado	0,800 a 1,000
Desenvolvimento humano elevado	0,700 a 0,799
Desenvolvimento humano médio	0,550 a 0,699
Desenvolvimento humano baixo	0,000 a 0,549

Fonte dos dados: CONCEIÇÃO, Pedro. **Relatório do desenvolvimento humano 2021/2022**: tempos incertos, vidas instáveis: a construir o nosso futuro num mundo em transformação. Nova York: Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento, 2022. p. 268. Disponível em: https://www.undp.org/pt/brazil/desenvolvimento-humano/publications/relatorio-de-desenvolvimento-humano-2021-22. Acesso em: 20 set. 2024.

Cálculo do IDH

O Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) é a raiz cúbica do produto dos índices da saúde ($I_{saúde}$), da educação ($I_{educação}$) e de renda (I_{renda}).

$$IDH = \sqrt[3]{I_{saúde} \cdot I_{educação} \cdot I_{renda}}$$

Cada índice é calculado por meio da fórmula $I_{dimensão}$ a seguir. A tabela apresenta os valores mínimo e máximo de cada indicador utilizado nessa fórmula.

$$I_{dimensão} = \frac{\text{valor atual} - \text{valor mínimo}}{\text{valor máximo} - \text{valor mínimo}}$$

Indicadores Socioeconômicos

Dimensão	Indicador	Valor mínimo	Valor máximo
Saúde	Expectativa de vida	20 anos	85 anos
Educação	Expectativa de escolaridade	0	18 anos
	Média de anos de escolaridade	0	15 anos
Renda	RNB *per capita*	100 dólares	75 000 dólares

Fonte dos dados: CONCEIÇÃO, Pedro. **Relatório do desenvolvimento humano 2021/2022**: tempos incertos, vidas instáveis: a construir o nosso futuro num mundo em transformação. Nova York: Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento, 2022. p. 128, 275-276. Disponível em: https://www.undp.org/pt/brazil/desenvolvimento-humano/publications/relatorio-de-desenvolvimento-humano-2021-22. Acesso em: 20 set. 2024.

Saiba que...

O logaritmo e o logaritmo natural (ln) serão estudados em um capítulo posterior, em que será possível entender o conceito de escala logarítmica, útil à representação do indicador de renda.

Para o cálculo do índice de educação ($I_{educação}$), a fórmula $I_{dimensão}$ é utilizada duas vezes. A primeira para o indicador "expectativa de escolaridade" e a segunda para o indicador "média de anos de escolaridade". O índice de educação ($I_{educação}$) é a média aritmética desses dois indicadores.

No cálculo do índice de renda (I_{renda}), por causa da amplitude da escala, cujo valor mínimo é 100 dólares e o valor máximo é 75 000 dólares, são utilizados os logaritmos naturais dos valores máximo, mínimo e atual.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Acompanhe como exemplo o cálculo do IDH do Brasil referente ao ano de 2021.

Indicadores do Brasil referentes ao IDH de 2021

Indicador	Valor atual
Expectativa de vida	72,8 anos
Expectativa de escolaridade	15,6 anos
Média de anos de escolaridade	8,1 anos
RNB *per capita*	14 370 dólares

Fonte dos dados: CONCEIÇÃO, Pedro. **Relatório do desenvolvimento humano 2021/2022**: tempos incertos, vidas instáveis: a construir o nosso futuro num mundo em transformação. Nova York: Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento, 2022. p. 273. Disponível em: https://www.undp.org/pt/brazil/desenvolvimento-humano/publications/relatorio-de-desenvolvimento-humano-2021-22. Acesso em: 20 set. 2024.

Cálculo do índice de saúde

$$I_{\text{saúde}} = \frac{72,8 - 20}{85 - 20} \simeq 0,812$$

Cálculo do índice de renda

$$I_{\text{renda}} = \frac{\ln 14\,370 - \ln 100}{\ln 75\,000 - \ln 100} \simeq 0,750$$

Cálculo do índice de educação

$$I_{\text{expectativa de escolaridade}} = \frac{15,6 - 0}{18 - 0} \simeq 0,867$$

$$I_{\text{média de anos de escolaridade}} = \frac{8,1 - 0}{15 - 0} = 0,54$$

$$I_{\text{educação}} = \frac{0,867 + 0,54}{2} \simeq 0,704$$

Cálculo do índice de desenvolvimento humano

$$\text{IDH} = \sqrt[3]{0,812 \cdot 0,704 \cdot 0,750} \simeq 0,754$$

Em 2021, o IDH do Brasil foi 0,754. De acordo com a tabela de classificação, esse índice indica um desenvolvimento humano elevado. Leia a seguir trecho de uma reportagem sobre o IDH de 2022.

Brasil melhora IDH, mas cai duas posições no *ranking* de Desenvolvimento Humano da ONU em 2022

O Brasil caiu duas posições no *ranking* de desenvolvimento humano das Nações Unidas, que mede o bem-estar da população considerando indicadores de saúde, escolaridade e renda. Dados divulgados pelo Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento (Pnud) nesta quinta-feira mostram que o país recuou da 87ª posição em 2021 para a 89ª em 2022 [...]

O Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) brasileiro ficou em 0,760, considerado pelo Pnud um patamar elevado. Houve uma melhora no indicador, que foi de 0,754 no relatório anterior, refletindo os impactos da pandemia de Covid-19.

ABEL, Victoria. Brasil melhora IDH, mas cai duas posições no *ranking* de Desenvolvimento Humano da ONU em 2022. **O Globo**, Brasília, DF, 13 mar. 2024. Disponível em: https://oglobo.globo.com/economia/noticia/2024/03/13/brasil-melhora-idh-mas-cai-duas-posicoes-no-ranking-de-desenvolvimento-humano-da-onu-em-2022.ghtml. Acesso em: 5 set. 2024.

Pense e responda

Em 2021, a média de anos de escolaridade dos brasileiros era 8,1 anos. O que a população brasileira pode fazer para frequentar por mais tempo instituições escolares e, consequentemente, aumentar essa média?

Resposta pessoal.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Índice de Desenvolvimento Humano Municipal (IDHM)

O Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) é uma referência importante na avaliação de um país em relação ao seu desenvolvimento; no entanto, para análises mais fidedignas de algumas regiões, podem ser feitas adaptações no IDH para a realidade local. Leia os textos a seguir a respeito do IDHM.

[...]

Adaptando o IDH

A adaptação do IDH para níveis subnacionais tem sido praticada em diversos países, com vistas a adaptar a metodologia do IDH Global ao contexto nacional. O Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento encoraja os países a desenharem IDHs nacionais que utilizem indicadores mais adequados às suas necessidades. Os países são convidados a inovar, substituir ou adicionar novas dimensões aos componentes apresentados no IDH Global para IDHs subnacionais [...]

[...]

BRASIL. Ministério do Planejamento, Desenvolvimento e Gestão. **Atlas do desenvolvimento humano nas regiões metropolitanas brasileiras**: Florianópolis, Sorocaba, Ride Grande Teresina, Ride Petrolina-Juazeiro. Brasília, DF: Ipea: PNUD: FJP, 2017. (Série Atlas do Desenvolvimento Humano no Brasil, p. 13). Disponível em: https://repositorio.ipea.gov.br/bitstream/11058/8182/1/Atlas%20do%20desenvolvimento%20humano%20nas%20regi%C3%B5es%20metropolitanas%20brasileiras.pdf. Acesso em: 31 ago. 2024.

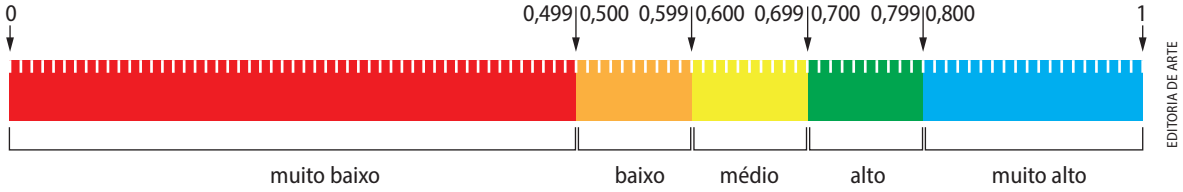
O Índice de Desenvolvimento Humano Municipal [(IDHM)]

[...]

O IDHM brasileiro segue as mesmas três dimensões do IDH global – saúde, educação e renda, mas vai além: adéqua a metodologia global ao contexto brasileiro e à disponibilidade de indicadores nacionais. Embora meçam os mesmos fenômenos, os indicadores levados em conta no IDHM são mais adequados para avaliar o desenvolvimento dos municípios brasileiros.

[...]

Faixas de Desenvolvimento Humano Municipal



[...] inspirado pelo Índice de Desenvolvimento Humano – IDH – global, o IDHM possui ajustes para melhor se adequar à realidade brasileira, adaptando-se às bases de dados do Censo e às características inatas aos municípios. Por isso, não é possível realizar qualquer tipo de comparação entre o IDHM de um município e o IDH de um país, por exemplo.

[...]

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Vida longa e saudável

É medida pela expectativa de vida ao nascer, calculada por método indireto, a partir dos dados dos Censos Demográficos do IBGE. Esse indicador mostra o número médio de anos que uma pessoa nascida em determinado município viveria a partir do nascimento, mantidos os mesmos padrões de mortalidade.

STOCKAPPEAL/SHUTTERSTOCK.COM

Acesso a conhecimento

É medido por meio de dois indicadores. A escolaridade da população adulta é medida pelo percentual de pessoas de 18 anos ou mais de idade com ensino fundamental completo e tem peso 1. O fluxo escolar da população jovem é medido pela média aritmética do percentual de crianças de 5 a 6 anos frequentando a escola, do percentual de jovens de 11 a 13 anos frequentando os anos finais do ensino fundamental, do percentual de jovens de 15 a 17 anos com ensino fundamental completo e do percentual de jovens de 18 a 20 anos com ensino médio completo; e tem peso 2. A medida acompanha a população em idade escolar em quatro momentos importantes da sua formação. Isso facilitará aos gestores identificar se crianças e jovens estão nas séries adequadas nas idades certas. A média geométrica desses dois componentes resulta no IDHM Educação. Os dados são dos Censos Demográficos do IBGE.

POPICON/SHUTTERSTOCK.COM

Padrão de vida

É medido pela renda municipal *per capita*, ou seja, a renda média dos residentes de determinado município. É a soma da renda de todos os residentes, dividida pelo número de pessoas que moram no município – inclusive crianças e pessoas sem registro de renda. Os dados são dos Censos Demográficos do IBGE.

ICONMAMA/SHUTTERSTOCK.COM

[...]

BRASIL. Ministério do Planejamento, Desenvolvimento e Gestão. **O Índice de Desenvolvimento Humano Municipal Brasileiro**. Brasília, DF: PNUD: Ipea: FJP, 2013. (Série Atlas do Desenvolvimento Humano no Brasil 2013, p. 26-29). Disponível em: https://www.ipea.gov.br/portal/images/stories/PDFs/130729_AtlasPNUD_2013.pdf. Acesso em: 31 ago. 2024.

Agora, faça o que se pede nas atividades a seguir. Ver as **Orientações para o professor**. NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. Você já ouviu falar nos Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODSs)? Pesquise a respeito dos 17 ODSs e de como o cumprimento de suas metas pode melhorar os indicadores do IDHM (longevidade, educação, renda).
2. Reúna-se a mais colegas, escolham três ODSs diferentes e criem uma apresentação para a turma que relacione as metas desses ODSs com o aumento do IDHM do município da sua escola.

Para assistir

- ATLAS do Desenvolvimento Humano: *teaser* (português). [*S. l.*: *s. n.*], 2020. 1 vídeo (2 min). Publicado pelo canal PNUDBrasil. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=ng-QnJoS6eA&t=13s. Acesso em: 31 ago. 2024.
  O vídeo traz informações sobre a plataforma Atlas do Desenvolvimento Humano, associada ao Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento (PNUD).

Para acessar

- ATLAS DO DESENVOLVIMENTO HUMANO NO BRASIL. [*S. l.*, 202-]. *Site*. Disponível em: http://www.atlasbrasil.org.br/consulta/map. Acesso em: 31 ago. 2024.
  Plataforma Atlas do Desenvolvimento Humano no Brasil, que disponibiliza dados sobre o IDHM dos municípios brasileiros.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

ATIVIDADES RESOLVIDAS

3. Observe o gráfico e resolva as questões.

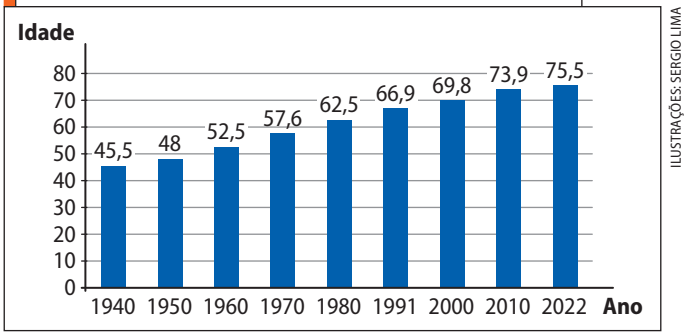
a) Um dos índices utilizados no cálculo do IDH é o índice de saúde ($I_{saúde}$), dado por:

$$I_{saúde} = \frac{\text{expectativa de vida} - 20}{85 - 20}$$

Qual foi o índice de saúde do Brasil em 2022?

b) Ao longo dos anos, a expectativa de vida contribuiu para que o cálculo do IDH do Brasil aumentasse ou diminuísse? Explique.

Expectativa de vida ao nascer – 1940/2022



ILUSTRAÇÕES: SERGIO LIMA

Fonte dos dados: EM 2022, expectativa de vida era de 75,5 anos. Rio de Janeiro: Agência IBGE Notícias, 29 nov. 2023. Disponível em: https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-sala-de-imprensa/2013-agencia-de-noticias/releases/38455-em-2022-expectativa-de-vida-era-de-75-5-anos. Acesso em: 31 ago. 2024.

Resolução

a) Conforme o gráfico, temos que a expectativa de vida em 2022 foi 75,5 anos, logo:

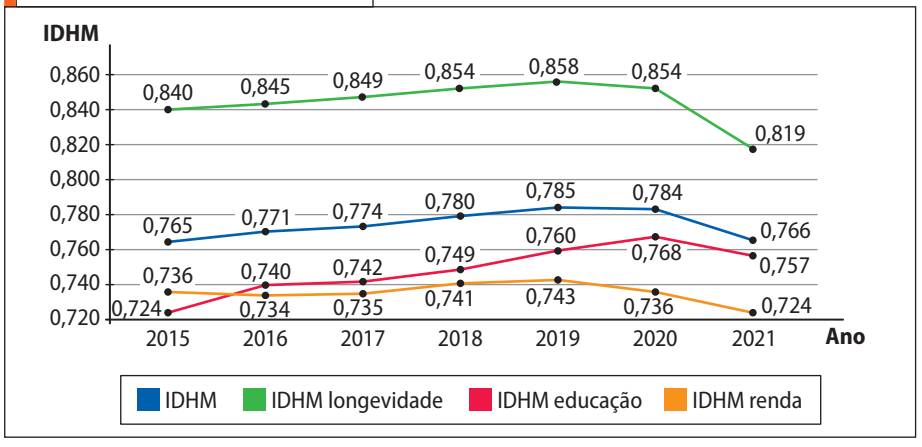
$$I_{saúde} = \frac{75{,}5 - 20}{85 - 20} \simeq 0{,}854$$

O índice de saúde em 2022 foi 0,854.

b) Quanto maior a expectativa de vida, maior o resultado da divisão que determina o índice de saúde e, consequentemente, maior o IDH. Portanto, o aumento da expectativa de vida de 1940 até 2022 contribuiu para que o IDH do Brasil aumentasse ao longo dos anos.

4. Observe o gráfico, que apresenta os dados do IDHM do Brasil de 2015 até 2021.

IDHM Brasil – 2015 a 2021



Fonte: PROGRAMA DAS NAÇÕES UNIDAS PARA O DESENVOLVIMENTO. **IDHM Brasil**. [*S. l.*]: PNUD, [202-]. Disponível em: https://app.powerbi.com/view?r=eyJrIjoiODNmZjdhNzgtMTFmOC00Y2Y0LTk3N2EtYWE5YjI2MTIxYWJlIiwidCI6ImIzZTVkYjVlLTI5NDQtNDgzNy05OWY1LTc0ODhhY2U1NDMxOSIsImMiOjh9. Acesso em: 31 ago. 2024.

a) A partir de que ano o índice de educação foi superior ao índice de renda?

b) Nos últimos anos, qual dos três índices, educação, longevidade ou renda, mais prejudicou a elevação do IDHM?

c) O IDHM é a raiz cúbica do produto dos índices educação, longevidade e renda, isto é: $\text{IDHM} = \sqrt[3]{I_{educação} \cdot I_{longevidade} \cdot I_{renda}}$. Calcule o IDHM de 2020 do Brasil.

Resolução

a) De 2015 a 2016, a linha do índice de educação cruza a linha do índice de renda. Logo, o índice de educação é superior ao índice de renda desde 2016.

b) O índice de renda, porque ele foi o menor índice dos últimos anos.

c) Em 2020, os índices de educação, longevidade e renda foram, respectivamente, 0,768; 0,854 e 0,736. Desse modo, temos: $\text{IDHM} = \sqrt[3]{0{,}768 \cdot 0{,}854 \cdot 0{,}736} \simeq 0{,}784$
Logo, o IDHM do Brasil, em 2020, foi 0,784.

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

ATIVIDADES

13. No cálculo do IDH, o índice de saúde $I_{saúde}$ é dado por:

$$I_{saúde} = \frac{\text{expectativa de vida} - 20}{85 - 20}$$

De acordo com essa fórmula, responda aos itens.

a) Qual foi o índice de saúde do Brasil em 1940, sabendo que a expectativa de vida ao nascer, naquele ano, era de 45,5 anos?

aproximadamente 0,392

b) Qual deve ser a expectativa de vida em um país para que seu índice de saúde seja 1?

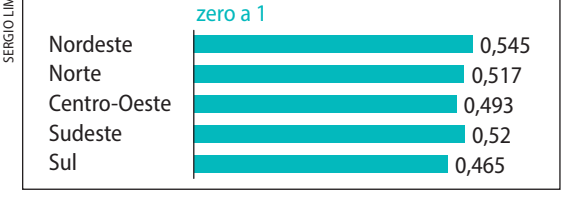
85 anos

14. Calcule o IDHM do Brasil em 2021, sabendo que os índices de educação, longevidade e renda foram, respectivamente, 0,757; 0,819; e 0,724.

O IDHM do Brasil, em 2021, foi 0,766.

15. (IFRJ) O índice de Gini vai de 0 a 1 e é uma medida utilizada para mensurar o nível de desigualdade dos países segundo renda, pobreza e educação. Quanto mais próximo de zero, mais igualitária a distribuição de renda. Em 2016, no Brasil, o índice variou de acordo com o gráfico a seguir.

Índice de Gini (rendimento mensal real)



SERGIO LIMA

Fonte: Pnad Contínua 2016 | IBGE

Pode-se perceber que a região com a melhor distribuição de renda foi:

a) Sudeste
b) Nordeste
c) Centro-Oeste
d) Sul alternativa **d**

16. (Famema-SP) O PIB *per capita* de uma determinada região é definido como a divisão do PIB da região pelo número de habitantes dessa região. A tabela registra a população e o PIB *per capita* de quatro estados.

Estado	População (em milhões)	PIB *per capita* (em R$)
A	1	15.000,00
B	8	15.000,00
C	3	30.000,00
D	15	30.000,00

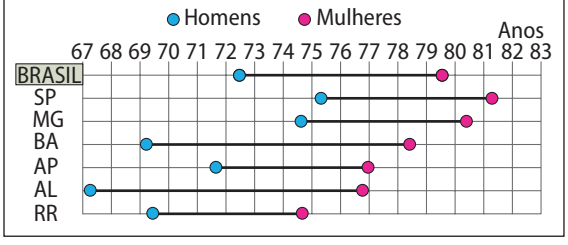
O PIB *per capita* da região compreendida pelos quatro estados é de

a) R$ 28.000,00.
b) R$ 22.500,00.
c) R$ 27.500,00.
d) R$ 25.000,00.
e) R$ 29.500,00.

alternativa **d**

17. (FMJ-SP) O gráfico apresenta a expectativa de vida ao nascer para mulheres e homens, a nacional e para mais seis estados do país, de acordo com dados da Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios 2017 (Pnad 2017).

Expectativa de vida por gênero e UF em 2017, ao nascer



EDITORIA DE ARTE

(www.nexojornal.com.br. Adaptado)

Dois dos estados presentes no gráfico apresentam uma diferença entre a expectativa de vida de mulheres e homens maior do que a diferença nacional. Esses estados são

a) Minas Gerais (MG) e Amapá (AP).
b) Amapá (AP) e Roraima (RR).
c) São Paulo (SP) e Minas Gerais (MG).
d) Bahia (BA) e Amapá (AP).
e) Bahia (BA) e Alagoas (AL). alternativa **e**

18. (Enem/MEC) De acordo com pesquisas recentes, a expectativa de vida do brasileiro subiu de 74,6 anos, em 2012, para 74,9 anos, em 2015. Dentre os possíveis fatores para esse aumento estão a melhoria do sistema de saúde, o aumento da renda familiar e a prática de exercícios físicos.

Para tornar essa notícia do aumento da expectativa de vida do brasileiro mais expressiva, converteu-se esse aumento para a quantidade de dias.

Considere que para esta conversão o número de dias em cada mês foi fixado em 30.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Com base nas informações, que cálculo correspondeu a essa conversão?

a) $0{,}3 = 3$ meses $= 3 \times 30$ dias

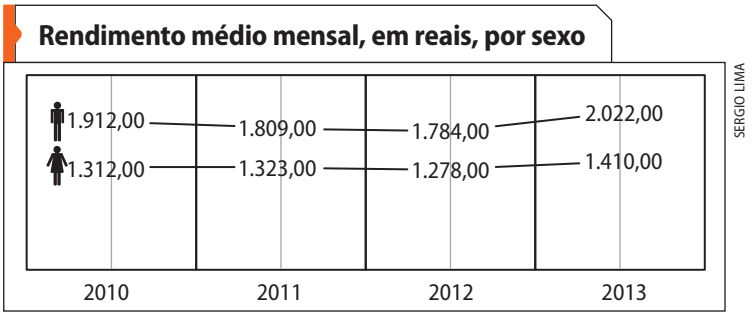
b) $0{,}3 \times 1$ ano $= 0{,}3 \times 365$ dias

c) $0{,}3 \times 1$ ano $= 0{,}3 \times 12$ meses $= 3{,}6 \times 30$ dias

d) $0{,}3 \times 1$ ano $= \frac{1}{3} \times 12 \times 30$ dias $= \frac{1}{3} \times 360$ dias

e) $0{,}3 \times 1$ ano $= 0{,}3 \times 12$ meses $= 3{,}6$ meses $= 3 \times 30$ dias $+ 6$ dias alternativa **c**

19. (Fatec-SP) Leia o gráfico referente ao rendimento médio mensal na Região Metropolitana de Belo Horizonte (BH), no período de 2010 a 2013, para responder à questão.



Fonte dos dados: http://tinyurl.com/h3qt2mo. Acesso em: 01.09.2016

Índices ou coeficientes como o IDH ou o de Gini servem para que a comparação dos dados de países ou regiões seja realizada de modo mais objetivo.

Suponha que seja criado o Coeficiente de Desigualdade do Rendimento entre os Sexos, o CDRS. Quando o CDRS é igual a zero, há ausência de desigualdade de rendimento entre os sexos; quando o CDRS é igual a 1, a desigualdade é dita plena e, nesse caso, o rendimento dos homens supera em muito o rendimento das mulheres.

Para calcular o CDRS deve-se utilizar a seguinte fórmula:

$$\text{CDRS} = 1 - \left(\frac{M \cdot R_M}{H \cdot R_H}\right)$$

sendo:

- M, o número de mulheres de uma determinada região;
- R_M, a média mensal dos rendimentos das mulheres dessa região;
- H, o número de homens dessa mesma região; e
- R_H, a média mensal dos rendimentos dos homens dessa região.

Com base na série histórica dos rendimentos de homens e de mulheres, observou-se que a razão $\frac{M \cdot R_M}{H \cdot R_H}$ pertence ao intervalo real [0, 1].

Admita que na região metropolitana de BH, em 2013, havia 1 200 000 mulheres e 1 000 000 homens. O valor do CDRS para a região metropolitana de BH em 2013 é, aproximadamente, igual a

a) 0,12 **b)** 0,16 **c)** 0,20 **d)** 0,24 **e)** 0,28

alternativa **b**

20. (Enem/MEC) Em 2012, o PNUD Brasil, o Ipea e a Fundação João Pinheiro assumiram o desafio de adaptar a metodologia do Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) global para calcular o Índice de Desenvolvimento Humano Municipal (IDHM) dos 5 565 municípios brasileiros com base nos dados do Censo Demográfico de 2010. Também se recalculou o IDHM, pela metodologia adotada, para os anos de 1990 e 2000, para permitir a comparabilidade temporal e espacial entre os municípios.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

No quadro são apresentados os dados de cinco cidades brasileiras.

Município	IDHM – 1990	IDHM – 2000	IDHM – 2010
São Caetano do Sul (SP)	0,77	0,77	0,92
Águas de São Pedro (SP)	0,67	0,76	0,85
Florianópolis (SC)	0,65	0,80	0,80
Balneário Camboriú (SC)	0,79	0,79	0,79
Vitória (ES)	0,73	0,78	0,77

Disponível em: http://atlasbrasil.org.br. Acesso em: 26 abr. 2014 (adaptado).

Uma ONG decide fazer um trabalho de acompanhamento com a cidade que teve a menor média aritmética dos IDHM das três últimas décadas dentre as cinco cidades analisadas.
Com base nos dados fornecidos, qual foi o município escolhido pela ONG? alternativa **a**

a) Florianópolis.
b) Águas de São Pedro.
c) Balneário Camboriú.
d) São Caetano do Sul.
e) Vitória.

21. (Enem/MEC) Um país decide investir recursos na educação em suas cidades que tenham um alto nível de analfabetismo. Os recursos serão divididos de acordo com a idade média da população que é analfabeta, conforme apresentado no quadro.

Recurso	Idade média da população analfabeta (M)
I	$M \leqslant 22$
II	$22 < M \leqslant 27$
III	$27 < M \leqslant 32$
IV	$32 < M \leqslant 37$
V	$M > 37$

Uma cidade desse país possui $\frac{60}{100}$ do total de analfabetos de sua população composto por mulheres. A média de idade das mulheres analfabetas é de 30 anos, e a média de idade dos homens analfabetos é de 35 anos.
Considerando a média de idade da população analfabeta dessa cidade, ela receberá o recurso

a) I.
b) II.
c) III.
d) IV.
e) V.

alternativa **c**

22. (Enem/MEC) O Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) é uma medida usada para classificar os países pelo seu grau de desenvolvimento. Para seu cálculo, são levados em consideração a expectativa de vida ao nascer, tempo de escolaridade e renda *per capita*, entre outros. O menor valor deste índice é zero e o maior é um. Cinco países foram avaliados e obtiveram os seguintes índices de desenvolvimento humano: o primeiro país recebeu um valor X, o segundo $\sqrt{X}$, o terceiro $X^{\frac{1}{3}}$, o quarto X^2 e o último X^3. Nenhum desses países zerou ou atingiu o índice máximo. alternativa **c**
Qual desses países obteve o maior IDH?

a) O primeiro.
b) O segundo.
c) O terceiro.
d) O quarto.
e) O quinto.

23. (UECE) O Produto Interno Bruto (PIB), que revela o crescimento econômico de um país, é um valor numérico monetário que representa a soma de todos os bens e serviços produzidos no país, em geral no período de um ano. O PIB individualizado, denominado PIB ''per capita'' é calculado dividindo-se o PIB pelo número de habitantes do país. No ano de 2022, o PIB do país X cresceu 18% em relação ao PIB de 2021 e, na mesma referência de tempo, a população cresceu 10%. Com base nos dados apresentados, o crescimento percentual do PIB "per capita'' do país X no ano de 2022, em relação ao ano de 2021, foi aproximadamente

a) 6%.
b) 9%.
c) 7%.
d) 8%.

alternativa **c**

24. Pesquise os últimos índices divulgados de IDHM, educação, longevidade e renda do município em que você mora. Depois, registre esses índices e escreva ações que podem contribuir para melhorar o IDHM do seu município. Ver as **Orientações para o professor**.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

ATIVIDADES COMPLEMENTARES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. (PMMG) O gerente de uma empresa, com um total de 150 funcionários, realizou um experimento com o objetivo de verificar o consumo de água dos funcionários durante o turno de trabalho. Foram selecionados, aleatoriamente, 50 funcionários e mensurada a quantidade de litros de água consumida por cada um, no período de 30 dias. Sabe-se, também, que cada funcionário teve a mesma probabilidade de ser incluído na seleção. Com base nestas informações, relacione os itens a seguir.

(1) Quantidade total de funcionários da empresa.
(2) Consumo de litros de água por funcionário.
(3) 50 funcionários selecionados aleatoriamente.
(4) Técnica utilizada para seleção da amostra.

(///) Variável contínua.
(///) Amostra.
(///) Amostragem aleatória simples.
(///) População.

Marque a alternativa que contém a sequência **CORRETA** de respostas, na ordem de cima para baixo: alternativa **d**

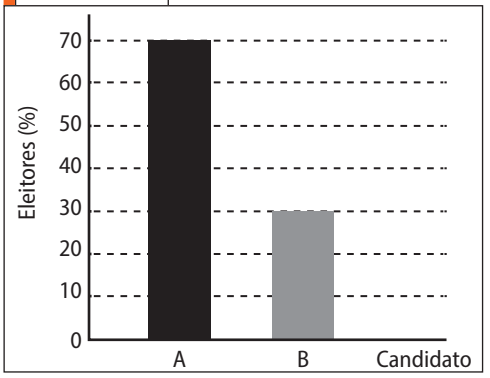
a) 4, 2, 3, 1.
b) 2, 1, 4, 3.
c) 3, 2, 1, 4.
d) 2, 3, 4, 1.

2. (Enem/MEC) Antes de uma eleição para prefeito, certo instituto realizou uma pesquisa em que foi consultado um número significativo de eleitores, dos quais 36% responderam que iriam votar no candidato *X*; 33%, no candidato *Y* e 31%, no candidato *Z*. A margem de erro estimada para cada um desses valores é de 3% para mais ou para menos. Os técnicos do instituto concluíram que, se confirmado o resultado da pesquisa, alternativa **d**

a) apenas o candidato *X* poderia vencer e, nesse caso, teria 39% do total de votos.
b) apenas os candidatos *X* e *Y* teriam chances de vencer.
c) o candidato *Y* poderia vencer com uma diferença de até 5% sobre *X*.
d) o candidato *Z* poderia vencer com uma diferença de, no máximo, 1% sobre *X*.
e) o candidato *Z* poderia vencer com uma diferença de até 5% sobre o candidato *Y*.

3. (Enem/MEC) O resultado de uma pesquisa eleitoral, sobre a preferência dos eleitores em relação a dois candidatos, foi representado por meio do Gráfico 1.

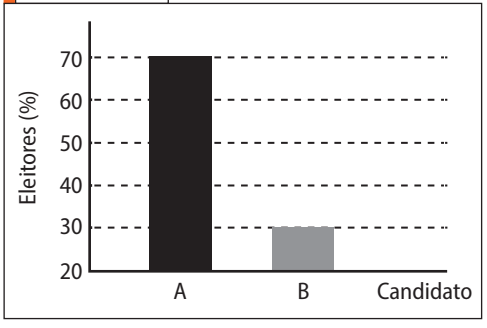
Gráfico 1



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Ao ser divulgado esse resultado em jornal, o Gráfico 1 foi cortado durante a diagramação, como mostra o Gráfico 2.

Gráfico 2



Apesar de os valores apresentados estarem corretos e a largura das colunas ser a mesma, muitos leitores criticaram o formato do Gráfico 2 impresso no jornal, alegando que houve prejuízo visual para o candidato *B*.
A diferença entre as razões da altura da coluna *B* pela coluna *A* nos gráficos 1 e 2 é alternativa **e**

a) 0
b) $\frac{1}{2}$
c) $\frac{1}{5}$
d) $\frac{2}{15}$
e) $\frac{8}{35}$

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

4. (Enem/MEC) O Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) mede a qualidade de vida dos países para além dos indicadores econômicos. O IDH do Brasil tem crescido ano a ano e atingiu os seguintes patamares: 0,600 em 1990; 0,665 em 2000; 0,715 em 2010. Quanto mais perto de 1,00, maior é o desenvolvimento do país.

alternativa **c** **O Globo**. Caderno Economia, 3 nov. 2011 (adaptado).

Observando o comportamento do IDH nos períodos citados, constata-se que, ao longo do período 1990-2010, o IDH brasileiro

a) diminuiu com variações decenais crescentes.

b) diminuiu em proporção direta com o tempo.

c) aumentou com variações decenais decrescentes.

d) aumentou em proporção direta com o tempo.

e) aumentou em proporção inversa com o tempo.

5. (Enem/MEC) O Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) permite avaliar as condições de qualidade de vida e de desenvolvimento de um país, de uma região ou de uma cidade, a partir de seus indicadores de renda, longevidade e educação. Cada indicador varia de 0 (nenhum desenvolvimento) a 1 (desenvolvimento máximo). A tabela apresenta os valores de IDH de três municípios brasileiros, *X*, *Y* e *Z*, medidos nos anos de 1991 e 2000.

Município	IDH – Renda		IDH – Longevidade		IDH – Educação	
	1991	2000	1991	2000	1991	2000
X	0,431	0,402	0,456	0,551	0,328	0,568
Y	0,374	0,379	0,459	0,548	0,422	0,634
Z	0,501	0,420	0,611	0,648	0,188	0,448

(Atlas do Desenvolvimento Humano no Brasil)

Mudanças desses indicadores de IDH podem ser obtidas com a implantação de políticas públicas tais como:

I. Expansão dos empregos com melhoria de renda média.

II. Ações de promoção de saúde e de prevenção de doenças.

III. Ampliação de escolas de ensino básico e de educação de jovens e adultos.

Os resultados apresentados em 2000 são compatíveis com a implementação bem-sucedida em todos esses três municípios, ao longo da década de noventa, das políticas

a) I, II e III.

b) I e II, apenas.

c) I e III, apenas.

d) II e III, apenas.

e) II, apenas.

alternativa **d**

6. (Enem/MEC) Em uma cidade, o número de casos de dengue confirmados aumentou consideravelmente nos últimos dias. A prefeitura resolveu desenvolver uma ação contratando funcionários para ajudar no combate à doença, os quais orientarão os moradores a eliminarem criadouros do mosquito *Aedes aegypti*, transmissor da dengue. A tabela apresenta o número atual de casos confirmados, por região da cidade.

Região	Casos Confirmados
Oeste	237
Centro	262
Norte	158
Sul	159
Noroeste	160
Leste	278
Centro-Oeste	300
Centro-Sul	278

A prefeitura optou pela seguinte distribuição dos funcionários a serem contratados:

I. 10 funcionários para cada região da cidade cujo número de casos seja maior que a média dos casos confirmados.

II. 7 funcionários para cada região da cidade cujo número de casos seja menor ou igual à média dos casos confirmados.

Quantos funcionários a prefeitura deverá contratar para efetivar a ação?

a) 59

b) 65

c) 68

d) 71

e) 80

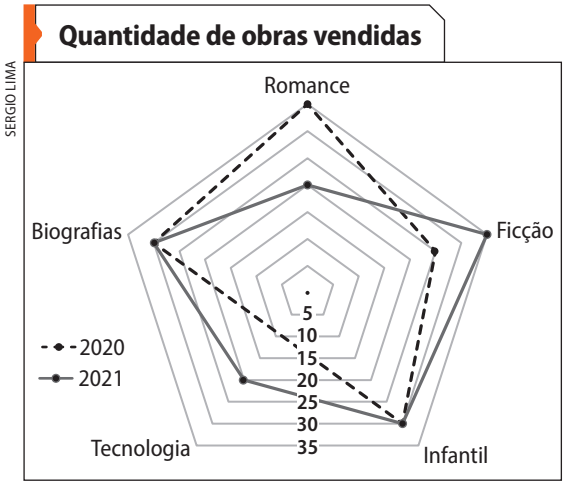
alternativa **d**

7. (Unicamp-SP) Uma forma de apresentar dados é usar um gráfico de radar. Este tipo de gráfico é composto por segmentos uniformemente espaçados, dispostos em torno de um ponto. Os segmentos representam diferentes valores, valores esses que aumentam conforme a distância em relação ao centro se torna

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

maior. Gráficos de radar são frequentemente usados em jogos eletrônicos para representar o desempenho, em diferentes aspectos, dos personagens. Enzo tem uma livraria e vende obras dos gêneros Romance, Ficção, Tecnologia, Biografias e Infantil. Ele representou no gráfico de radar, a seguir, quantas obras diferentes de cada um desses gêneros foram vendidas em 2020 e 2021. Por exemplo, em 2021, foram vendidas 20 obras do gênero Tecnologia. Note que o gráfico não indica quantos exemplares de cada obra foram efetivamente vendidos, indica apenas o número de obras que tiveram exemplares vendidos para os gêneros indicados.

SERGIO LIMA



Sobre os dados apresentados no gráfico, é correto afirmar que alternativa **d**

a) o gênero que teve maior quantidade de obras vendidas, considerando os dois anos, foi Biografias, cuja venda foi o triplo da venda do gênero que teve menos obras vendidas.

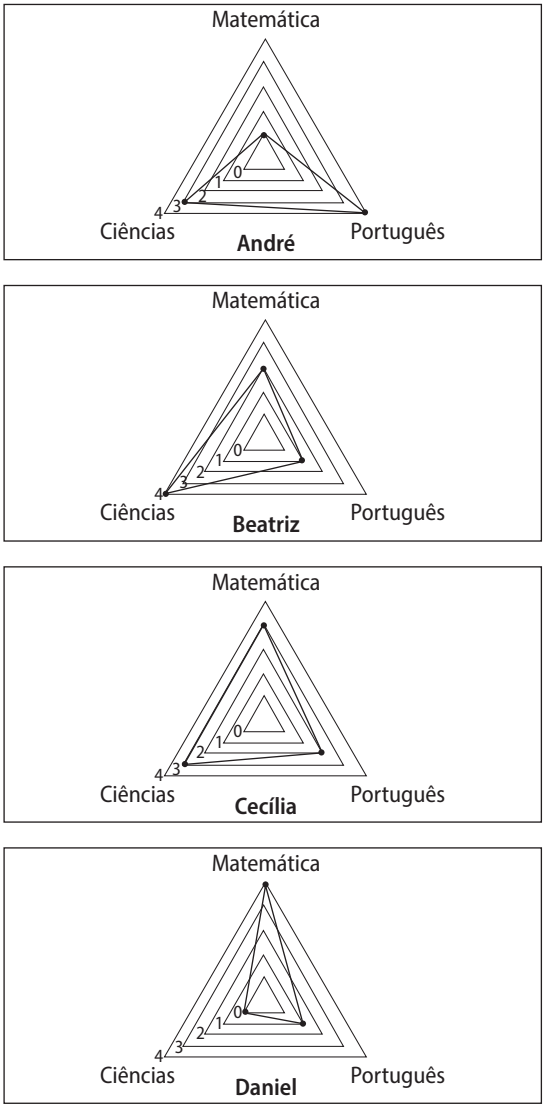
b) os únicos gêneros que venderam mais obras em 2021, quando em comparação com as vendas de 2020, foram os gêneros Ficção e Infantil.

c) o número de obras do gênero Romance que foram vendidas em 2021 é o dobro do que foi vendido em 2020 para este mesmo gênero.

d) a quantidade de obras vendidas, do gênero Infantil, nos dois anos, é a mesma quantidade de obras vendidas, no mesmo período de tempo, do gênero Biografias.

8. (Cefet-MG) Quatro amigos de uma mesma turma, André, Beatriz, Cecília e Daniel fizeram, cada um, provas de Matemática, Português e Ciências. A nota de cada prova é sempre um número inteiro, variando de 0 (zero) a 4 (quatro). As notas desses amigos em cada uma das provas estão representadas nos gráficos em rede a seguir.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE



Pelos gráficos, podemos observar que André tirou 3 em Ciências e que a nota de Beatriz em português foi de 1 ponto.
Desse modo, de acordo com as notas apresentadas nesses gráficos, é correto afirmar que dentre esses amigos, a maior média das notas nas três provas é de alternativa **c**

a) André
b) Beatriz
c) Cecília
d) Daniel

9. Leia o texto a seguir e responda aos itens.

> A Fundação Nacional dos Povos Indígenas (Funai) é o órgão indigenista oficial do Estado brasileiro. Criada por meio da Lei nº 5.371, de 5 de dezembro de 1967, vinculada ao Ministério dos Povos Indígenas, é a coordenadora e principal executora da política indigenista do Governo Federal. Sua missão institucional é proteger e promover os direitos dos povos indígenas no Brasil.
>
> Cabe à Funai promover estudos de identificação e delimitação, demarcação, regularização fundiária e registro das terras tradicionalmente ocupadas pelos povos indígenas, além de monitorar e fiscalizar as terras indígenas. [...]
>
> [...]
>
> BRASIL. Ministério dos Povos Indígenas. Fundação Nacional dos Povos Indígenas. **A Funai**. Brasília, DF: MPI: Funai, 27 nov. 2020. Disponível em: https://www.gov.br/funai/pt-br/acesso-a-informacao/institucional/Institucional. Acesso em: 31 ago. 2024.

a) Pesquise se, no estado em que você mora, há povos indígenas monitorados pela Funai e apresente informações estatísticas referentes a esses povos. Ver as **Orientações para o professor**.

b) Você sabia que existem universidades que possuem um vestibular específico para os povos indígenas? Converse com seus colegas e o professor sobre a importância da inclusão, da preservação e da segurança desses povos em nosso país. Resposta pessoal.

PARA REFLETIR

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Neste Capítulo, você aprendeu a realizar uma pesquisa estatística seguindo algumas etapas, a utilizar as medidas de tendência central e de dispersão nas análises de dados e a apresentar os dados por meio de diferentes representações gráficas. Foram apresentadas diferenças entre pesquisa censitária e pesquisa amostral e algumas técnicas utilizadas para a obtenção de amostras de dados. Depois, você analisou a importância do IDH e do IDHM, bem como calculou esses índices com base em outros.

Para retomar esses assuntos, faça as atividades a seguir.

- Analise o seu envolvimento com os estudos deste Capítulo. Para isso, reflita sobre as seguintes questões.

Respostas pessoais.

a) Você fez as atividades propostas? Você teve dúvidas durante esse processo?

b) Quais foram as maiores dificuldades que você teve ao desenvolver a sua pesquisa?

c) Os temas apresentados nas pesquisas fizeram com que você mudasse de postura diante de alguma situação?

- Descreva, com suas palavras, cada técnica de amostragem estudada.
- Elabore um esquema indicando quais são as etapas principais de uma pesquisa estatística.
- Explique, com suas palavras, como os índices estatísticos podem ajudar o ser humano.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

CAPÍTULO 2

PROGRESSÕES

Os *sona* são desenhos feitos na areia e carregam histórias de alguns povos africanos. Foram estudados por antropólogos e matemáticos que revelaram ao mundo essa arte repleta de tradição e conceitos matemáticos, como simetrias e sequências.

O matemático e pesquisador holandês Paulus Gerdes (1952-2014) estudou algumas manifestações matemáticas de povos tribais de regiões da África e da América Latina, em países como Angola e Peru. A motivação do pesquisador para esse estudo se deu à medida que ele percebeu que os estudantes dos cursos em que ministrava aulas não compreendiam alguns conceitos que eram apresentados, pois não estavam familiarizados com a linguagem matemática utilizada. Ao entrar em contato com a cultura local desses estudantes, ele conheceu os *sona*, desenhos feitos na areia pelos homens e pelos chefes de um povo chamado tchokwe.

Esses desenhos representavam histórias de caça, animais e seres místicos importantes para as pessoas, além de objetos do cotidiano. No entanto, Gerdes reparou que havia muito mais do que apenas linhas e pontos no chão: cada *lusona* (singular de *sona*) exibia muitas propriedades matemáticas, principalmente aritméticas e geométricas. Com essa descoberta, Gerdes se aprofundou na cultura dos tchokwe e percebeu que os conceitos matemáticos eram usados de maneira intuitiva nesses desenhos, de modo que poderia utilizar os *sona* em suas aulas, pois eram mais próximos da realidade de seus estudantes.

Fonte dos dados: SANTOS, Dayene F. dos. **Geometria africana**: uma abordagem etnomatemática para o ensino de matemática. 2017. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, São Paulo, 2017. Disponível em: http://eadcampus.spo.ifsp.edu.br/pluginfile.php/118729/mod_resource/content/0/TCC_Dayene_Ferreira_dos_Santos_1468103_2sem_2017_ifsp.pdf. Acesso em: 12 ago. 2024.

AKG-IMAGES/MAXIME CHAMPION/ALBUM/FOTOARENA

Máscara utilizada em tradições do povo tchokwe.
(As imagens da dupla de páginas estão fora de proporção.)

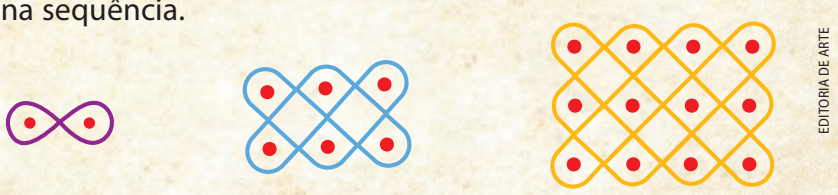
Para assistir

- GEOMETRIA *sona*: técnicas matemáticas do continente africano | Mwana Afrika Oficina Cultural. [*S. l.*: *s. n.*], 2019. 1 vídeo (3 min). Publicado pelo canal Mwana Afrika. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=HQYdqv8oGWQ. Acesso em: 12 ago. 2024. Confira mais informações sobre as figuras *sona*, sua história e sua construção no vídeo sugerido.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

SELMA CAPARRÓZ

Observe que os *sona* a seguir estão em sequência e que cada elemento da sequência é desenhado seguindo uma mesma regra. A quantidade de pontos desses *sona* está relacionada com sua posição na sequência.



EDITORIA DE ARTE

1º elemento 2º elemento 3º elemento

O 1º elemento tem uma linha com duas bolinhas; o 2º elemento tem duas linhas com três bolinhas em cada uma; o 3º elemento tem três linhas com quatro bolinhas em cada uma, e assim por diante.

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Agora, reúna-se a mais dois colegas, e façam o que se pede em cada questão.

1. Vocês se lembram de já terem estudado ou se deparado com figuras em sequência que parecem apresentar um padrão? Descrevam ou desenhem um ou mais exemplos. Resposta pessoal.
2. Vocês já conheciam esse tipo de desenho do povo tchokwe? Façam pesquisas para saber mais a respeito dos *sona* e de como os chefes das comunidades os desenham. Resposta pessoal.
3. Considerando a sequência de *sona* apresentada, o 4º elemento da sequência deve ter quantas linhas? Quantas bolinhas deve haver em cada uma delas? O 4º elemento deve ter 4 linhas com 5 bolinhas em cada uma.
4. Procurem criar uma regra que determine a quantidade de linhas de um *lusona* e a quantidade de bolinhas em cada linha, de acordo com a posição do elemento na sequência. É possível fazer isso? Resposta esperada: Sim; para um elemento na posição n, o *lusona* deve ter n linhas com $n + 1$ bolinhas em cada uma.

FUTURISTMAN/SHUTTERSTOCK.COM; LUKASZ SZWAJ/SHUTTERSTOCK.COM; SIMON LAPRIDA/SHUTTERSTOCK.COM; VITALY KOROVIN/SHUTTERSTOCK.COM; SHMER/SHUTTERSTOCK.COM

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

YURI TURKOV/SHUTTERSTOCK.COM

- PAGANUCCI, Giovanni. [**Estátua de Fibonacci**]. 1863. 1 escultura. Cemitério Monumental, Pisa (Itália). Fotografia de 2022.

Saiba que...

Por volta de 1202, Fibonacci publicou a obra **Liber abaci**, que, além de expor processos algorítmicos e aritméticos, apresentava problemas muito intrigantes. Um desses desafios, conhecido como "o problema dos coelhos", deu origem à sequência de Fibonacci e objetivava, basicamente, descobrir quantos pares de coelhos poderiam ser gerados em um ano a partir de um único casal de coelhos.

Introdução

Por volta de 1202, o matemático italiano Leonardo Fibonacci (c. 1170-c. 1250), também conhecido como Leonardo de Pisa, associou uma importante sequência numérica ao crescimento de uma população de coelhos. Embora já tivesse sido explorada na Antiguidade, essa sequência ficou conhecida como **sequência de Fibonacci**.

Nela, os termos são obtidos pela seguinte regra: o primeiro número é 1, o segundo também é 1, e cada um dos demais termos da sequência é obtido pela adição dos dois termos que o antecedem, conforme mostrado a seguir.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

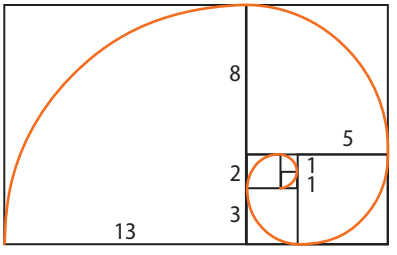
Existe uma relação interessante entre essa sequência e a razão áurea, que resulta no número irracional $\phi = 1{,}618033\ldots$, conhecido como número de ouro.

À medida que aumentamos a quantidade de termos da sequência de Fibonacci, a razão entre um termo dessa sequência e o termo anterior a ele varia em torno de ϕ, aproximando-se cada vez mais desse valor. Observe.

$$\frac{1}{1} = 1 \to \frac{2}{1} = 2 \to \frac{3}{2} = 1{,}5 \to \frac{5}{3} = 1{,}666666\ldots \to \frac{8}{5} = 1{,}6 \to \frac{13}{8} = 1{,}625 \to$$

$$\to \frac{21}{13} = 1{,}615384\ldots \to \frac{34}{21} = 1{,}619047\ldots \to \frac{55}{34} = 1{,}617647\ldots \to \frac{89}{55} = 1{,}618181\ldots$$

A forma espiral observada, por exemplo, na concha de um caramujo, no chifre de um carneiro ou na orelha de um ser humano também guarda relação com essa sequência, uma vez que se assemelha a uma espiral formada por "quartos" de circunferência, cujos raios crescem de maneira proporcional aos números da sequência de Fibonacci. Essa forma espiral, observada nos seres vivos e na natureza, também é encontrada nas artes, na Arquitetura e em outras áreas do conhecimento.



EDITORIA DE ARTE

- As medidas dos raios dos arcos de circunferência que compõem essa espiral são, respectivamente, os primeiros sete números da sequência de Fibonacci.

Neste Capítulo, estudaremos o conceito de sequência numérica e conheceremos duas sequências com propriedades especiais: a progressão aritmética (PA) e a progressão geométrica (PG).

Para assistir

- O QUE é a sequência de Fibonacci e por que é chamada de "código secreto da natureza". [*S. l.*: *s. n.*], 2021. 1 vídeo (7 min). Publicado pelo canal BBC News Brasil. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=cHZWZhHQq4g. Acesso em: 12 ago. 2024.

  O vídeo trabalha a ideia de sequência ao apresentar a sequência de Fibonacci, explorada neste Capítulo.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Sequências

Em nosso cotidiano, lidamos com diferentes situações que envolvem sequências. Por exemplo:

a) Os dias da semana: domingo, segunda-feira, terça-feira, …, sábado.

b) Os meses do ano: janeiro, fevereiro, março, …, dezembro.

c) Os anos de ocorrência dos Jogos Olímpicos da Era Moderna: 1896, 1900, 1904, 1908, …, 2012, 2016, …

RAWPIXEL.COM/SHUTTERSTOCK.COM

■ Os calendários ajudam na organização da rotina.

Cada elemento que compõe uma sequência é chamado de **termo da sequência**.

Cada termo de uma sequência pode ser representado por uma **letra** acompanhada de um **índice**, que informa a posição ou a ordem desse termo na sequência. Por exemplo, considerando a sequência de Fibonacci, temos:

- $a_1 = 1$ é o primeiro termo ou o termo de ordem 1;
- $a_2 = 1$ é o segundo termo ou o termo de ordem 2;
- $a_3 = 2$ é o terceiro termo ou o termo de ordem 3;
- $a_4 = 3$ é o quarto termo ou o termo de ordem 4; e assim por diante.

Podemos representar genericamente uma sequência da seguinte maneira:

$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \ldots)$

Nessa representação, utilizamos a_n para indicar o termo de ordem n e dizemos que a_n é o enésimo termo da sequência.

Sequências numéricas

Observe que é possível estabelecer sequências com informações numéricas ou não. Neste Capítulo, trataremos das sequências do primeiro tipo, chamadas **sequências numéricas**.

Podemos classificar esse tipo de sequência em relação à quantidade de elementos que a compõem: uma sequência numérica pode ser **finita** ou **infinita**. Desse modo, podemos pensar nesses tipos de sequências da maneira a seguir.

- Uma sequência numérica finita de n termos, representada por $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n)$, é uma função cujo domínio é o conjunto $\{1, 2, 3, 4, \ldots, n\}$ e cujo contradomínio é o conjunto dos números reais, tal que $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$, $f(3) = a_3$, $f(4) = a_4$, …, $f(n) = a_n$.
  Por exemplo, a sequência numérica (3, 5, 7, 9) é uma sequência finita, na qual $a_1 = 3$; $a_2 = 5$; $a_3 = 7$ e $a_4 = 9$.
- Uma sequência numérica infinita, representada por $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots)$, é uma função cujo domínio é $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots\}$ e cujo contradomínio é o conjunto dos números reais, tal que $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$, $f(3) = a_3$, $f(4) = a_4$, …, $f(n) = a_n$, …
  Por exemplo, a sequência dos números ímpares (1, 3, 5, 7, 9, …) é uma sequência infinita, em que $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 7$, $a_5 = 9$, …

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Determinação dos elementos de uma sequência numérica

Algumas sequências numéricas podem ser determinadas por uma lei de formação, isto é, conhecendo os primeiros termos de uma sequência, podemos encontrar sua lei de formação e determinar seus elementos. Vamos estudar duas maneiras de fazer isso: por **recorrência** e pelo **termo geral**.

Recorrência

Quando conhecemos o valor do termo inicial (ou de alguns dos termos iniciais), e a lei que permite calcular os termos seguintes depende dos termos anteriores, dizemos que a sequência está definida por **recorrência**.

Observe a sequência de Fibonacci: (1, 1, 2, 3, 5, 8, ...). Aprendemos que o primeiro e o segundo termos dessa sequência são iguais a 1 e que, a partir do terceiro, os termos são obtidos com a adição dos dois termos imediatamente anteriores:

- $a_1 = a_2 = 1$
- $a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$
- $a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$
- $a_5 = a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5$
- $a_6 = a_5 + a_4 = 5 + 3 = 8$
- ⋮ ⋮ ⋮

Dado um termo a_n qualquer da sequência, sendo $n \geqslant 3$, os dois termos anteriores podem ser expressos por a_{n-1} e a_{n-2}.

Assim, a sequência de Fibonacci pode ser obtida por meio da lei de recorrência:

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \text{ para } n \geqslant 3, \text{ com } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Por exemplo, podemos determinar o 7º termo dessa sequência substituindo n por 7 na lei de recorrência:

$a_7 = a_{7-1} + a_{7-2} \Rightarrow a_7 = a_6 + a_5 \Rightarrow a_7 = 8 + 5 \Rightarrow a_7 = 13$

Termo geral

Considere uma sequência dada pela função $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ que associa, por meio de uma expressão matemática, cada número $n \in \mathbb{N}^*$ a um número $a_n \in \mathbb{R}$. Essa expressão é chamada de **termo geral** ou **lei de formação da sequência**.

Observe que a sequência dada pela função $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ que associa cada número $n \in D(f)$ ao seu triplo pode ser representada por (3, 6, 9, 12, ...):

- para $n = 1$, $a_1 = 3 \cdot 1 = 3$
- para $n = 2$, $a_2 = 3 \cdot 2 = 6$
- para $n = 3$, $a_3 = 3 \cdot 3 = 9$
- para $n = 4$, $a_4 = 3 \cdot 4 = 12$
- ⋮ ⋮ ⋮
- para $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 3 \cdot n = 3n$

Assim, cada termo dessa sequência com números múltiplos de 3 pode ser obtido por meio do termo geral: $a_n = 3n$

Por exemplo, podemos determinar o centésimo termo dessa sequência substituindo n por 100 no termo geral:

$a_n = 3n \Rightarrow a_{100} = 3 \cdot 100 \Rightarrow a_{100} = 300$

Pense e responda

Explique, com suas palavras, a diferença entre as duas maneiras de determinar os termos de uma sequência: por recorrência ou por termo geral. Dê um exemplo de cada tipo.

Resposta pessoal. Os estudantes podem responder que, para determinar qualquer termo de uma sequência recursiva, utiliza-se uma fórmula que calcula um termo a partir do anterior imediato. Por exemplo, se $a_1 = 5$ e $a_n = a_{n-1} + 3$, então $a_2 = a_1 + 3 = 5 + 3 = 8$. Na sequência por termo geral, cada termo é determinado em função da posição que ele ocupa na sequência. Por exemplo, se $a_n = 2n + 1$, então $a_2 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$.

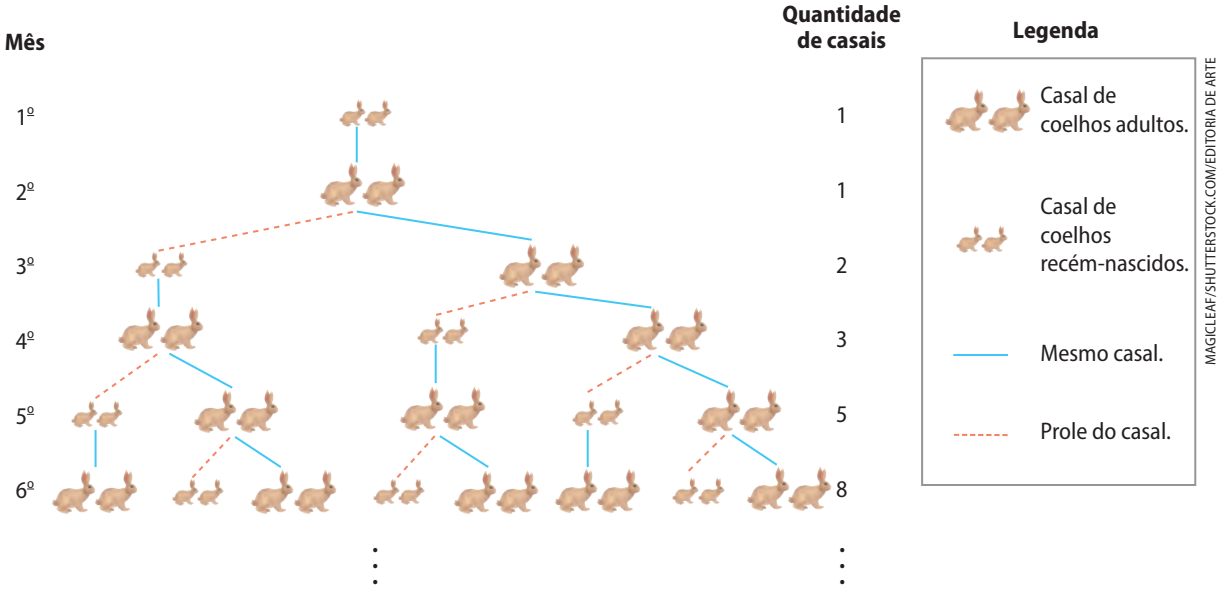
ATIVIDADE RESOLVIDA

1. Os coelhos se reproduzem mais rapidamente do que a maioria dos mamíferos. Considere a seguinte situação que foi estudada por Fibonacci: um casal de coelhos pode reproduzir-se apenas depois do segundo mês de vida e, a partir daí, gerar um novo casal por mês. Começando com apenas um casal recém-nascido, quantos casais de coelhos existirão ao fim do:

a) quinto mês? **b)** oitavo mês?

Resolução

Observe o esquema, que exemplifica a situação apresentada no problema.



MAGICLEAF/SHUTTERSTOCK.COM/EDITORIA DE ARTE

■ Representação de reprodução de coelhos. (As imagens da página estão fora de proporção; cores fantasia.)

a) Considere n o mês e a_n a quantidade de casais de coelhos existente no mês em questão.

- No primeiro mês ($n = 1$), o casal ainda é filhote; portanto, não se reproduz, ou seja, $a_1 = 1$.
- No segundo mês ($n = 2$), o casal se torna adulto, mas ainda não se reproduz; assim, $a_2 = 1$.
- No terceiro mês ($n = 3$), o casal se reproduz, gerando um novo casal, ou seja, $a_3 = 2$.
- No quarto mês ($n = 4$), o casal adulto gera outro casal de filhotes, e o casal de filhotes se torna adulto, ou seja, $a_4 = 3$.
- No quinto mês ($n = 5$), temos dois casais adultos, que gerarão filhotes, e um casal de filhotes, que se tornará adulto; assim, $a_5 = 3 + 2 = 5$.

Portanto, a quantidade de casais de coelhos no fim do quinto mês será 5.

b) Observa-se que a quantidade de casais de coelhos ao longo dos meses obedece à sequência de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5… Portanto, para $n \geqslant 3$, tem-se que $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

Substituindo n por 6, 7 e 8 na lei de recorrência $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, temos:

$n = 6 \Rightarrow a_6 = a_{6-1} + a_{6-2} \Rightarrow a_6 = 5 + 3 = 8$

$n = 7 \Rightarrow a_7 = a_{7-1} + a_{7-2} \Rightarrow a_7 = 8 + 5 = 13$

$n = 8 \Rightarrow a_8 = a_{8-1} + a_{8-2} \Rightarrow a_8 = 13 + 8 = 21$

Portanto, a quantidade de casais de coelhos no fim do oitavo mês será 21.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. Represente as sequências dadas pelos termos gerais, com $n \in \mathbb{N}^*$:

a) $a_n = 3n - 1$ (2, 5, 8, 11, ...)

b) $a_n = 2^{n-1}$ (1, 2, 4, 8, ...)

c) $a_n = 1 + (-1)^n$ (0, 2, 0, 2, ...)

d) $a_n = n^2 - 1$ (0, 3, 8, 15, ...)

2. Considere $a_n = 3n + 1$ o termo geral de uma sequência numérica.

a) Calcule o quinto e o oitavo termos dessa sequência. $a_5 = 16$; $a_8 = 25$

b) Determine a ordem (posição) do termo igual a 49. 16ª

c) Verifique se 1001 é um termo dessa sequência. Não é.

3. Considerando que os números ímpares positivos podem ser determinados pela função $f(n) = 2n - 1$, com $n \in \mathbb{N}^*$, responda ao que se pede.

a) Qual é o 100º número ímpar positivo? 199

b) O número 99 ocupa que posição nessa sequência? 50ª

c) Calcule: $f(1) + f(7)$, $f(2) + f(6)$ e $f(3) + f(5)$. O que você pode observar? Explique.
Ver as **Orientações para o professor**.

4. Represente as sequências dadas pelas fórmulas de recorrência, com $n \in \mathbb{N}^*$.

a) $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = 2a_{n-1} - 5, \text{ para } n \geqslant 2 \end{cases}$ (3, 1, −3, −11, ...)

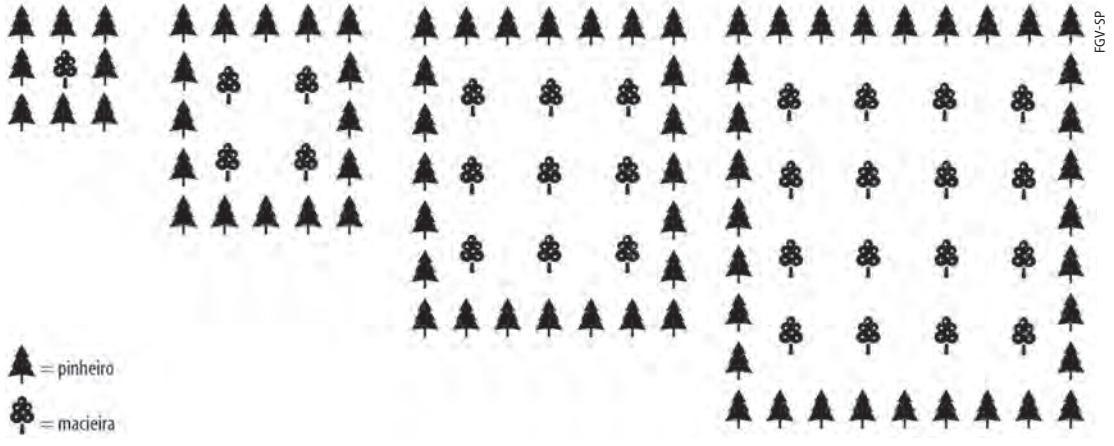
b) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = (a_{n-1})^2, \text{ para } n \geqslant 2 \end{cases}$ (2, 4, 16, 256, ...)

c) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = \dfrac{1}{a_{n-1}}, \text{ para } n \geqslant 2 \end{cases}$ $\left(2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, \ldots\right)$

d) $\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_n = \sqrt{a_{n-1} + 1}, \text{ para } n \geqslant 2 \end{cases}$ $(0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{\sqrt{2} + 1}, \ldots)$

- Agora, descreva, com suas palavras, a recorrência de cada item. Em seguida, troque as respostas com um colega. Vocês descreveram da mesma forma? Há ajustes a serem feitos nas descrições elaboradas por vocês? Respostas pessoais.

5. (FGV-SP) Um agricultor planta macieiras em um terreno quadrado. Com o objetivo de proteger as maçãs do vento, planta pinheiros ao redor da totalidade do pomar. O esquema abaixo mostra a colocação das macieiras e dos pinheiros para qualquer número n de fileiras de macieiras.



FGV-SP

a) Escreva duas fórmulas, ambas em termos de n, uma para calcular o número de macieiras e a outra para calcular o número de pinheiros. n^2; $8n$

b) A partir de que valor de n, o número de macieiras se torna maior do que o número de pinheiros? a partir de $n = 9$

Progressão aritmética

A **matriosca**, ou boneca russa, é um brinquedo tradicional russo que consiste em um conjunto de bonecas cujos tamanhos diminuem gradativamente, de modo que uma boneca se encaixa dentro de outra. Considere, em centímetro, as medidas indicadas na matriosca a seguir.

Conjunto de bonecas matrioscas.

Na ordem estabelecida, observando as medidas indicadas, percebemos que as alturas crescem 1,7 cm de uma boneca menor para a imediatamente maior.

Podemos indicar essas medidas como a sequência numérica (2,3; 4; 5,7; 7,4; 9,1). Como nessa sequência cada termo, a partir do segundo, é obtido pela soma do termo anterior com 1,7, essa sequência é um exemplo de **progressão aritmética** (**PA**).

> Progressão aritmética é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é obtido pela adição do termo anterior a uma constante *r*, chamada de **razão** da progressão.

Podemos classificar uma PA de acordo com o valor da razão *r*:

- se $r > 0$, a PA é chamada de **crescente**;
- se $r < 0$, a PA é chamada de **decrescente**;
- se $r = 0$, a PA é chamada de **constante**.

Como a razão de uma progressão aritmética é a constante *r* que adicionamos a cada termo para obter o termo seguinte, podemos determiná-la, a partir do segundo termo, calculando a diferença entre cada termo e o anterior.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Assim, dada uma PA genérica infinita $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots)$, temos:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = a_5 - a_4 = \ldots = \boxed{a_{n+1} - a_n = r}$$

Vale ressaltar que o mesmo raciocínio vale para uma PA genérica finita $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1})$.

Acompanhe alguns exemplos.

a) (2, 5, 8, 11, 14) é uma PA cuja razão é: $r = 3$, pois $14 - 11 = 11 - 8 = 8 - 5 = 5 - 2 = 3$.

Portanto, essa PA é crescente.

b) $\left(\frac{8}{3}, \frac{7}{3}, 2, \frac{5}{3}, \ldots\right)$ é uma PA cuja razão é: $r = -\frac{1}{3}$, pois $\frac{5}{3} - 2 = 2 - \frac{7}{3} = \frac{7}{3} - \frac{8}{3} = -\frac{1}{3}$.

Portanto, essa PA é decrescente.

c) $(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \ldots)$ é uma PA cuja razão é: $r = 0$, pois $\sqrt{3} - \sqrt{3} = 0$. Note também que, nesse caso, todos os termos são iguais.

Portanto, essa PA é constante.

Saiba que...

Observe o exemplo da PA do item **a**. Se escrevermos a sequência ao contrário, isto é, (14, 11, 8, 5, 2), a razão será -3. Note, então, que as progressões aritméticas (2, 5, 8, 11, 14) e (14, 11, 8, 5, 2) não são as mesmas. Esse fato exemplifica uma característica importante das sequências: a ordem em que os elementos são escritos determina a sequência.

Agora, considere a_{n-1}, a_n e a_{n+1} três termos consecutivos de uma PA. O **termo central** entre esses três é dado pela média aritmética dos outros dois termos.

De fato, podemos escrever $a_n = a_{n-1} + r$ (I) e $a_n = a_{n+1} - r$ (II).

Adicionando, membro a membro, (I) e (II), temos:

$$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1} - r + r \Rightarrow 2a_n = a_{n-1} + a_{n+1} \Rightarrow \boxed{a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}}$$

Acompanhe os exemplos.

- Na PA (2, 5, 8, 11, 14), temos:

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} = \frac{2 + 8}{2} = 5 \text{ e } a_3 = \frac{a_2 + a_4}{2} = \frac{5 + 11}{2} = 8$$

- Na PA $(x, x - 2, x - 4, x - 6)$, temos:

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} = \frac{x + x - 4}{2} = \frac{2x - 4}{2} = x - 2 \text{ e}$$

$$a_3 = \frac{a_2 + a_4}{2} = \frac{x - 2 + x - 6}{2} = \frac{2x - 8}{2} = x - 4$$

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

» Termo geral de uma PA

Vamos considerar a representação genérica de uma progressão aritmética infinita, de razão r, dada por:

$$(a_1, \underset{+r}{a_2}, \underset{+r}{a_3}, \underset{+r}{a_4}, \ldots, a_{n-1}, \underset{+r}{a_n}, \underset{+r}{a_{n+1}}, \ldots)$$

De acordo com essa sequência, temos:

- $a_2 = a_1 + 1 \cdot r$
- $a_3 = a_2 + r = a_1 + r + r = a_1 + 2 \cdot r$
- $a_4 = a_3 + r = a_1 + 2r + r = a_1 + 3 \cdot r$

Observe que há uma relação entre o índice do termo e o fator que multiplica a razão r da progressão:

- $a_2 = a_1 + 1 \cdot r = a_1 + (2 - 1) \cdot r$
- $a_3 = a_1 + 2 \cdot r = a_1 + (3 - 1) \cdot r$
- $a_4 = a_1 + 3 \cdot r = a_1 + (4 - 1) \cdot r$

Uma vez que essa relação também vale para uma PA genérica finita $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1})$, é possível perceber que o enésimo termo de uma PA qualquer pode ser escrito como a soma do primeiro termo com o produto da razão r pelo fator $(n - 1)$. Portanto:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

em que:

- a_n é o termo geral (ou enésimo termo);
- a_1 é o primeiro termo;
- n é a ordem do termo;
- r é a razão.

Essa expressão é conhecida como **fórmula do termo geral da PA**.

Saiba que...

Em situações específicas que envolvem termos consecutivos de uma PA, é interessante recorrer a uma representação conveniente. Observe os exemplos.

- Três termos consecutivos: $x - r, x, x + r$
- Cinco termos consecutivos: $x - 2r, x - r, x, x + r, x + 2r$

Também é possível obter a fórmula conhecendo a PA. Por exemplo, vamos determinar a expressão do termo geral da PA (1, 4, 7, 10, …). Para isso, devemos obter a razão da PA:

$$r = a_2 - a_1 = 4 - 1 = 3$$

Então, a PA dada tem $r = 3$ e $a_1 = 1$.

Substituindo esses valores na fórmula do termo geral, temos:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow a_n = 1 + (n - 1) \cdot 3 \Rightarrow a_n = 3n - 2$$

Portanto, o termo geral da PA (1, 4, 7, 10, …) é $a_n = 3n - 2$.

Saiba que...

No exemplo, 3 é a diferença entre quaisquer dois termos consecutivos da PA.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

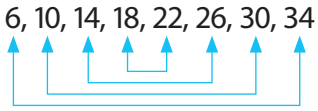
» Soma dos termos de uma PA

Antes de apresentar a fórmula da soma dos termos de uma PA, conheça a seguinte propriedade.

Propriedade: A soma dos termos equidistantes dos extremos em uma PA é igual à soma dos extremos.

Por exemplo, considere a PA (6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34).

- 6 e 34 são os termos extremos, cuja soma é 40;
- as duplas 10 e 30, 14 e 26, 18 e 22 são termos equidistantes dos extremos; a soma de cada dupla equidistante também é 40.



$$6 + 34 = 10 + 30 = 14 + 26 = 18 + 22 = 40$$

De modo geral, dada uma PA finita $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$, adicionando os dois extremos, temos:

$$a_1 + a_n = a_1 + \underbrace{a_1 + (n-1)\cdot r}_{a_n} = 2a_1 + (n-1)\cdot r$$

Os termos a_2 e a_{n-1} são equidistantes e adicionando-os, temos:

$$a_2 + a_{n-1} = \underbrace{a_1 + r}_{a_2} + \underbrace{a_1 + (n-2)\cdot r}_{a_{n-1}} = 2a_1 + (n-2+1)\cdot r = 2a_1 + (n-1)\cdot r$$

Da mesma forma, os termos a_3 e a_{n-2} são equidistantes, portanto:

$$a_3 + a_{n-2} = \underbrace{a_1 + 2r}_{a_3} + \underbrace{a_1 + (n-3)\cdot r}_{a_{n-2}} = 2a_1 + (n-3+2)\cdot r = 2a_1 + (n-1)\cdot r$$

Repare que as somas entre os termos equidistantes são iguais. Assim, generalizando, temos:

$$\underbrace{a_{p+1} + a_{n-p}}_{\substack{\text{termos}\\ \text{equidistantes}\\ \text{dos extremos}}} = \underbrace{a_1 + (p+1-1)\cdot r}_{a_{p+1}} + \underbrace{a_1 + (n-p-1)\cdot r}_{a_{n-p}} = 2a_1 + (n-p-1+p)\cdot r = 2a_1 + (n-1)\cdot r$$

Portanto: $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \ldots = a_{p+1} + a_{n-p}$

Utilizando essa propriedade, vamos demonstrar que a soma S_n dos n primeiros termos de uma PA $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ é $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}$.

Demonstração

Considere a PA finita $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$ e S_n a soma dos termos dessa PA.

$$\begin{array}{rl} & S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n \\ + & \underline{S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1} \\ & 2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) \end{array}$$

Como cada dupla de termos, a_2 e a_{n-1}, a_3 e a_{n-2}, e assim sucessivamente, é equidistante dos extremos, suas somas são iguais a $(a_1 + a_n)$. Logo:

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)}_{n \text{ parcelas}}$$

$$2S_n = (a_1 + a_n)\cdot n \Rightarrow \boxed{S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}}$$

» Progressão aritmética e função afim

Vamos estudar, agora, como uma progressão aritmética pode ser relacionada a uma função afim.

Considere a situação da matriosca apresentada anteriormente.

Observamos que as medidas das alturas das bonecas formam a PA (2,3; 4; 5,7; 7,4; 9,1), em que $a_1 = 2{,}3$ e $r = 1{,}7$.

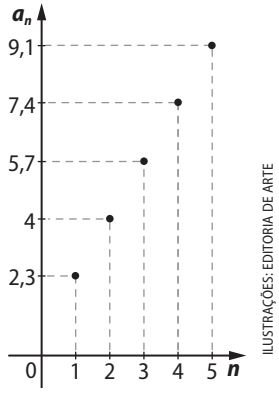
Desse modo, o termo geral da sequência é dado por:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow a_n = 2{,}3 + (n - 1) \cdot 1{,}7 \Rightarrow a_n = 2{,}3 + 1{,}7n - 1{,}7 \Rightarrow a_n = 1{,}7n + 0{,}6$$

Considerando a função f: {1, 2, 3, 4, 5} $\rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(n) = 1{,}7n + 0{,}6$, tem-se $f(n) = a_n$. Sendo assim, f associa a cada número natural n do domínio o valor a_n do contradomínio.

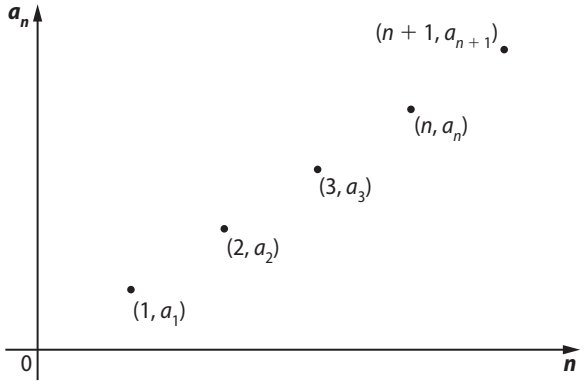
- $f(1) = 1{,}7 \cdot 1 + 0{,}6 = 2{,}3 = a_1$
- $f(2) = 1{,}7 \cdot 2 + 0{,}6 = 4 = a_2$
- $f(3) = 1{,}7 \cdot 3 + 0{,}6 = 5{,}7 = a_3$
- $f(4) = 1{,}7 \cdot 4 + 0{,}6 = 7{,}4 = a_4$
- $f(5) = 1{,}7 \cdot 5 + 0{,}6 = 9{,}1 = a_5$

Portanto, a PA pode ser representada pelo gráfico da função f. Como f é uma função cujo domínio é {1, 2, 3, 4, 5}, seu gráfico será dado por pontos pertencentes ao gráfico da função afim definida por $y = 1{,}7x + 0{,}6$.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

De modo geral, dada a PA $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots)$, de razão r e termo geral $a_n = a_1 + (n - 1)r$, associada à função f: $\mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(n) = a_1 + (n - 1)r$, a PA pode ser representada graficamente pelos pontos colineares $(1, a_1)$, $(2, a_2)$, $(3, a_3)$, …, (n, a_n), $(n + 1, a_n + 1)$, …, pertencentes ao gráfico da função afim dada por $y = a_1 + (x - 1)r$.



Pense e responda

Mostre que a função $y = a_1 + (x - 1)r$ é da forma $y = ax + b$.

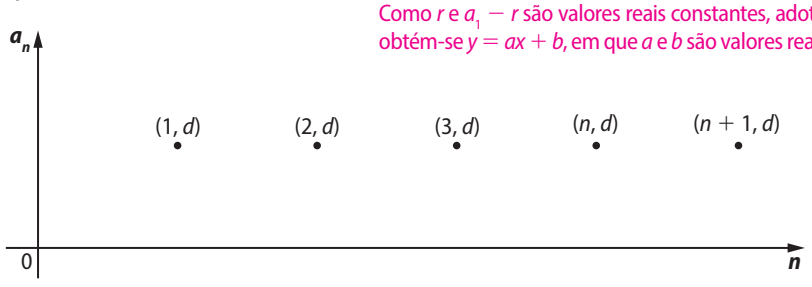
Pense e responda

Como seria o gráfico de uma PA decrescente, ou seja, com razão negativa?

Ver as **Orientações para o professor**.

Em particular, dada a PA constante $(d, d, d, d, \ldots)$, a função associada pode ser escrita como f: $\mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(n) = d + (n - 1)r$. Como a razão é zero, então $f(n) = d$. Nesse caso, a PA é representada pelos pontos colineares $(1, d)$, $(2, d)$, $(3, d)$, …, (n, d), $(n + 1, d)$, …, pertencentes a uma mesma reta paralela ao eixo horizontal.

Aplicando-se a propriedade distributiva, tem-se $y = a_1 + rx - r = rx + a_1 - r$. Como r e $a_1 - r$ são valores reais constantes, adotando-se $r = a$ e $a_1 - r = b$, obtém-se $y = ax + b$, em que a e b são valores reais constantes.



MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

ATIVIDADES RESOLVIDAS

2. Verifique se as sequências dadas a seguir são progressões aritméticas (PAs) e, em caso afirmativo, determine a razão de cada uma.

a) (3, 7, 11, 15, 19)

b) $\left(\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \ldots\right)$

c) $\left(6, \frac{11}{2}, 5, \frac{9}{2}, \ldots\right)$

Resolução

Em uma PA, a diferença entre cada termo, a partir do segundo, e o anterior é constante (razão). Assim, para verificar se uma sequência é uma PA, devemos ter:

$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_{n+1} - a_n = r$

a) $a_2 - a_1 = 7 - 3 = 4$

$a_3 - a_2 = 11 - 7 = 4$

$a_4 - a_3 = 15 - 11 = 4$

$a_5 - a_4 = 19 - 15 = 4$

Portanto, a sequência é uma PA de razão 4.

b) $a_2 - a_1 = \frac{\pi}{2} - \pi = \frac{\pi - 2\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$

$a_3 - a_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi - 2\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$

Como $-\frac{\pi}{2} \neq -\frac{\pi}{4}$, a sequência não é uma PA.

c) $a_2 - a_1 = \frac{11}{2} - 6 = \frac{11 - 12}{2} = -\frac{1}{2}$

$a_3 - a_2 = 5 - \frac{11}{2} = \frac{10 - 11}{2} = -\frac{1}{2}$

$a_4 - a_3 = \frac{9}{2} - 5 = \frac{9 - 10}{2} = -\frac{1}{2}$

Portanto, a sequência é uma PA de razão $-\frac{1}{2}$.

3. Verifique se a sequência representada pelo termo geral $a_n = 5n - 2$, com $n \in \mathbb{N}^*$, é uma progressão aritmética.

Resolução

Para que a sequência seja uma progressão aritmética, a diferença entre a_{n+1} e a_n deve ser igual a uma constante. Vamos calcular $a_{n+1} - a_n$.

$a_{n+1} - a_n = [5 \cdot (n + 1) - 2] - (5n - 2) =$

$= 5n + 5 - 2 - 5n + 2 = 5$

Como a diferença 5 é uma constante, a sequência $a_n = 5n - 2$ é uma progressão aritmética.

4. As medidas dos lados de um triângulo são indicadas, em centímetro, pelas expressões $4x - 1$, $3x + 3$ e $x^2 + 4$ e formam uma PA, nessa ordem. Calcule o perímetro desse triângulo.

Resolução

PA $(4x - 1; 3x + 3; x^2 + 4)$

Para calcular o perímetro, devemos determinar o valor de x e, para isso, podemos aplicar a propriedade do termo central de três termos consecutivos de uma PA. Assim:

$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$

$(3x + 3) = \frac{(4x - 1) + (x^2 + 4)}{2}$

$6x + 6 = 4x - 1 + x^2 + 4$

$-x^2 + 2x + 3 = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau, encontramos $x' = -1$ ou $x'' = 3$.

Substituindo $x = -1$ na expressão $4x - 1$, tem-se $4(-1) - 1 = -5$. Portanto, $x = -1$ não convém, pois todos os lados do triângulo devem ter medida com valor positivo.

Substituindo $x = 3$ nas expressões que representam as medidas dos lados, temos:

$4x - 1 = 4 \cdot 3 - 1 = 12 - 1 = 11$

$3x + 3 = 3 \cdot 3 + 3 = 9 + 3 = 12$

$x^2 + 4 = 3^2 + 4 = 9 + 4 = 13$

Adicionando, agora, as medidas dos lados, temos:

$11 + 12 + 13 = 36$

Portanto, o perímetro do triângulo é 36 cm.

5. Calcule o 4º termo da PA em que $a_{10} = 130$ e $a_{19} = 220$.

Resolução

Vamos escrever esses termos em função de a_1 e r.

Se $a_{10} = 130$, então $a_1 + 9r = 130$.

Se $a_{19} = 220$, então $a_1 + 18r = 220$.

Agora, vamos resolver o sistema de equações:

$$\begin{cases} a_1 + 9r = 130 \times (-1) \\ a_1 + 18r = 220 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a_1 - 9r = -130 \\ a_1 + 18r = 220 \end{cases}$$

$9r = 90$

$r = 10$

Se $r = 10$, temos:

$a_1 + 9 \cdot 10 = 130 \Rightarrow a_1 = 130 - 90 \Rightarrow a_1 = 40$

Determinados $a_1 = 40$ e $r = 10$, agora é possível calcular o 4º termo da PA:

$a_4 = a_1 + 3r \Rightarrow a_4 = 40 + 3 \cdot 10 \Rightarrow a_4 = 70$

Logo, o 4º termo dessa PA é 70.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

6. Uma avenida tem 4 000 m de extensão e vai receber, em seu canteiro central, o plantio de palmeiras imperiais. A distância entre as mudas deve ser de 15 m, e a primeira planta vai ficar a 10 m do início da avenida. Quantas palmeiras devem ser plantadas?

Resolução

Como a distância entre as palmeiras é sempre a mesma, os números que as localizam vão formar uma PA.

Nessa PA, temos: $a_1 = 10$, $a_n = 4\,000$ e $r = 15$.

Substituindo os valores no termo geral, obtemos:

$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow 4\,000 = 10 + (n - 1) \cdot 15 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4\,000 = 10 + 15n - 15 \Rightarrow 15n = 4\,005 \Rightarrow$
$\Rightarrow n = 267$

Assim, serão plantadas 267 palmeiras ao longo da avenida.

7. Três números estão em PA, de tal modo que a soma deles é 18 e o produto é 66. Calcule esses números.

Resolução

Vamos indicar a PA (a_1, a_2, a_3) como $(x - r, x, x + r)$. Podemos formar o sistema com duas variáveis (x e r):

$$\begin{cases} (x - r) + x + (x + r) = 18 \\ (x - r) \cdot x \cdot (x + r) = 66 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 18 \\ x \cdot (x^2 - r^2) = 66 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos: $3x = 18 \Rightarrow x = 6$

Substituindo $x = 6$ na 2ª equação, temos:

$x \cdot (x^2 - r^2) = 66 \Rightarrow 6 \cdot (36 - r^2) = 66 \Rightarrow$
$\Rightarrow 36 - r^2 = 11 \Rightarrow r^2 = 25 \Rightarrow r = \pm 5$

Para $r = 5$, temos:

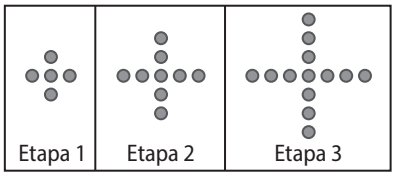
- 1º termo $= 6 - 5 = 1$
- 2º termo $= 6$
- 3º termo $= 6 + 5 = 11$

Para $r = -5$, temos:

- 1º termo $= 6 - (-5) = 11$
- 2º termo $= 6$
- 3º termo $= 6 + (-5) = 1$

Assim, os números pedidos são 1, 6 e 11.

8. (UFRGS-RS) Considere o padrão de construção que fez uso de discos, conforme as figuras representadas nas etapas 1, 2 e 3, abaixo.



EDITORIA DE ARTE

Na etapa 200, serão usados n discos. Seguindo esse padrão de construção, n é igual a

a) 783. **c)** 801. **e)** 819.
b) 792. **d)** 810.

Resolução

Considerando a quantidade de discos em cada etapa, obtemos a sequência (5, 9, 13, …). Essa sequência é uma PA em que $a_1 = 5$, e a razão é $r = 4$.

Portanto, o termo geral a_p, que representa a quantidade de discos na etapa p, é dado por:

$a_p = a_1 + (p - 1)r \Rightarrow a_p = 5 + (p - 1)4 \Rightarrow$
$\Rightarrow a_p = 5 + 4p - 4 \Rightarrow a_p = 4p + 1$

Desse modo, para saber quantos discos serão colocados na etapa 200, basta calcular a_{200}.

$a_{200} = 4 \cdot 200 + 1 = 801$

Portanto, $n = 801$.

Assim, a resposta correta é a alternativa **c**.

9. (USCS-SP) Um laboratório que foi credenciado para produzir certa vacina irá produzir 80 000 unidades no primeiro mês e, a cada mês, aumentará essa quantidade em 20 000 unidades. Mantidas essas condições, em um ano e meio de produção ininterrupta esse laboratório terá produzido uma quantidade total de vacinas, em milhões de unidades, igual a

a) 5,0. **c)** 6,0. **e)** 4,0.
b) 5,5. **d)** 4,5.

Resolução

A quantidade de vacinas produzidas a cada mês pode ser representada pela PA:
(80 000, 100 000, 120 000, …).

Nessa PA, $a_1 = 80\,000$ e $r = 20\,000$.

A quantidade de vacinas produzidas no 18º mês, ou seja, um ano e meio após o início da produção, será de:

$a_{18} = a_1 \cdot 17r \Rightarrow a_{18} = 80\,000 + 17 \cdot 20\,000 \Rightarrow$
$\Rightarrow a_{18} = 420\,000$

Em um ano e meio, ou seja, em 18 meses, a quantidade total de vacinas produzidas será igual a:

$S_{18} = \dfrac{(80\,000 + 420\,000) \cdot 18}{2} = 500\,000 \cdot 9 =$
$= 4\,500\,000$

Portanto, em um ano e meio, o laboratório terá produzido 4 500 000 vacinas, ou seja, 4,5 milhões de vacinas.

Logo, a resposta correta é a alternativa **d**.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

FÓRUM

Ver as **Orientações para o professor**.

O papel vital das vacinas na proteção coletiva

As vacinas desempenham um papel fundamental na prevenção de diversas doenças contagiosas, não apenas reduzindo sua incidência mas também atenuando sua gravidade, pois podem contribuir significativamente para evitar complicações e sequelas permanentes associadas às enfermidades.

A vacinação vai além da esfera da saúde individual, sendo responsabilidade coletiva. A adesão ampla e generalizada à vacinação é necessária para garantir a imunização em toda a comunidade. Esse compromisso coletivo interrompe a transmissão de doenças, protegendo especialmente os mais vulneráveis, como crianças e pessoas com sistema imunológico comprometido.

CHICO FERREIRA/PULSAR IMAGENS

■ Enfermeira prepara vacina durante campanha de vacinação contra a gripe (*influenza*) no Rio de Janeiro (RJ). Fotografia de 2024.

Desse modo, é de extrema relevância que governos, profissionais de saúde, comunidades e indivíduos reconheçam e valorizem a importância da vacinação, colaborando para promover programas de imunização abrangentes e acessíveis. O investimento contínuo em pesquisa, desenvolvimento e distribuição de vacinas é indispensável para enfrentar desafios de saúde pública e preservar o bem-estar coletivo.

- Nos últimos anos, testemunhamos o ressurgimento de algumas doenças que haviam sido consideradas erradicadas ou que estavam sob controle. Pesquise a respeito dessa situação e reúna-se aos colegas para apresentar exemplos e debater os fatores que contribuem para esse cenário.

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

6. Verifique se cada sequência dada a seguir é uma PA. Se sim, determine a razão.

a) (25, 5, 1, 5, …) não

b) (−17, −17, −17, −17, −17) sim, $r = 0$

c) (36, 30, 24, 18, …) sim, $r = -6$

d) (10, 13, 16, 20, 24) não

e) (2, 9, 16, 23, 30, …) sim, $r = 7$

7. Escreva uma PA:

a) de 5 termos, em que o primeiro termo (a_1) seja 10, e a razão (r) seja 3. (10, 13, 16, 19, 22)

b) de 6 termos, em que $a_1 = -3$ e $r = 5$. (−3, 2, 7, 12, 17, 22)

c) de 4 termos, em que $a_1 = a + 2$ e $r = a$. ($a + 2$, $2a + 2$, $3a + 2$, $4a + 2$)

8. Verifique se as sequências representadas pelo termo geral indicado em cada caso são progressões aritméticas, com $n \in \mathbb{N}^*$.

a) $a_n = 3n - 1$ É uma PA de razão 3.

b) $a_n = n^2$ Não é uma PA.

15. b) $a_{20} = 22 - 18\sqrt{5}$

15. c) $a_{10} = -17 + 10\pi$

9. (UEA-AM) Na progressão aritmética (a, 11, b, c, 20), os valores de a e c correspondem, respectivamente, às medidas, em centímetros, de um cateto e da hipotenusa de um triângulo retângulo. O valor do outro cateto desse triângulo é igual a alternativa **d**

a) 9 cm. **c)** 5 cm. **e)** 12 cm.
b) 17 cm. **d)** 15 cm.

10. Qual é o vigésimo termo da progressão aritmética (−8, −3, 2, 7, …)? 87

11. Em uma PA de razão 5, o primeiro termo é 4. Qual é a posição do termo igual a 44? 9ª

12. Determine o termo geral da PA (2, 7, …). $a_n = 5n - 3$

13. Determine o sexagésimo número natural ímpar. 119

14. Quantos termos tem a PA (5, 10, …, 785)? 157 termos

15. Em cada item, dados os dois primeiros termos de uma progressão aritmética, determine o valor do termo especificado.

a) Se $a_1 = 6{,}5$ e $a_2 = 7{,}0$, calcule a_{15}. $a_{15} = 13{,}5$

b) Se $a_1 = 3 + \sqrt{5}$ e $a_2 = 4$, calcule a_{20}.

c) Se $a_1 = 1 + \pi$ e $a_2 = -1 + 2\pi$, calcule a_{10}.

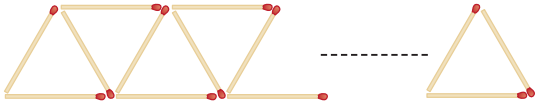
• Elabore um item parecido com os itens anteriores utilizando números fracionários. Troque o item criado por você com um colega para que um resolva o item elaborado pelo outro. Em seguida, verifiquem as resoluções e as estratégias utilizadas por cada um. Resposta pessoal.

16. Em um triângulo, as medidas dos ângulos internos estão em PA, e o menor dos ângulos mede 40°. Calcule as medidas dos outros dois ângulos do triângulo. 60° e 80°

17. Em uma progressão aritmética, o oitavo termo é igual a 16 e o décimo termo é igual a 20. Calcule o primeiro termo e a razão dessa progressão. $a_1 = 2; r = 2$

18. (UFSM-RS)

EDITORIA DE ARTE



Desejando-se formar 100 triângulos com palitos de fósforo dispostos conforme a figura, quantos palitos serão necessários? 201 palitos

19. Determine a PA em que: $\begin{cases} a_1 + 3a_2 = 5 \\ 4a_3 - 2a_6 = -8 \end{cases}$ (−1, 2, 5, …)

20. Determine cinco números em PA crescente, sabendo que o produto $a_1 \cdot a_5$ é igual a 28 e que a soma dos outros três termos é 24. (2, 5, 8, 11, 14)

21. Considerando a PA (4, 7, 10, 13, 16, …), responda:

a) Qual é a lei da função afim associada a essa PA? $f(x) = 3x + 1$

b) Qual é o domínio e qual é a imagem dessa função? $D(f) = \mathbb{N}^*$; $Im(f) = \{4, 7, 10, 13, 16, \ldots\}$

22. (Unicamp-SP) A Anatel determina que as emissoras de rádio FM utilizem as frequências de 87,9 a 107,9 MHz e que haja uma diferença de 0,2 MHz entre emissoras com frequências vizinhas. A cada emissora, identificada por sua frequência, é associado um canal, que é um número natural que começa em 200. Desta forma, à emissora cuja frequência é de 87,9 MHz corresponde o canal 200; à seguinte, cuja frequência é de 88,1 MHz, corresponde o canal 201, e assim por diante. Pergunta-se:

a) Quantas emissoras FM podem funcionar (na mesma região), respeitando-se o intervalo de frequências permitido pela Anatel? Qual o número do canal com maior frequência? 101; 300

b) Os canais 200 e 285 são reservados para uso exclusivo das rádios comunitárias. Qual a frequência do canal 285, supondo que todas as frequências possíveis são utilizadas? 104,9 MHz

23. (UEA-AM) As alturas de cinco livros formam uma progressão aritmética de razão 2. Se a soma de todas as alturas é 110 cm, a altura do menor livro é alternativa **d**

a) 20 cm. **c)** 24 cm. **e)** 16 cm.
b) 22 cm. **d)** 18 cm.

24. (Fuvest-SP) Joana comprou um celular e dividiu o pagamento em 24 parcelas mensais que formam uma progressão aritmética crescente. As três primeiras parcelas foram de R$ 120,00, R$ 126,00 e R$ 132,00. Sabendo que, ao final, constatou-se que Joana não pagou a 19ª parcela, o valor pago por ela foi: alternativa **d**

a) R$ 3.954,00 **d)** R$ 4.308,00
b) R$ 4.026,00 **e)** R$ 4.382,00
c) R$ 4.200,00

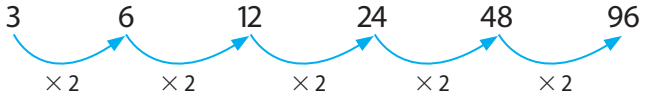
MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Progressão geométrica

O gerente de um mercado resolveu organizar as caixas de um produto no formato de pirâmide com 6 patamares, obedecendo a determinado critério. O primeiro patamar (o mais alto) continha 4 caixas, e os demais, o dobro de caixas do patamar anterior. Observe a seguir a quantidade de caixas nos patamares formados.

Patamar	1º	2º	3º	4º	5º	6º
Caixas	3	6	12	24	48	96

Podemos indicar a quantidade de caixas de um patamar de acordo com a ordem de cada um dos patamares. Assim, essa situação pode ser representada pela sequência numérica (3, 6, 12, 24, 48, 96). Note que, nessa sequência, cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por 2:



Essa sequência é um exemplo de **progressão geométrica** (**PG**).

> Progressão geométrica é toda sequência de números não nulos em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por uma constante q, chamada de **razão** da progressão.

Representando uma PG pela sequência $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \ldots)$ e aplicando a definição, temos:

$$\left.\begin{array}{l} a_2 = a_1 \cdot q \Rightarrow \dfrac{a_2}{a_1} = q \\ a_3 = a_2 \cdot q \Rightarrow \dfrac{a_3}{a_2} = q \\ \vdots \\ a_n = a_{n-1} \cdot q \Rightarrow \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = q \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \ldots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = q$$

Saiba que...

Observe que a razão $q = \dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ também vale para uma PG genérica finita $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n)$.

Portanto, em uma PG qualquer, a razão q é igual ao quociente entre cada termo, a partir do segundo, e o respectivo antecessor.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Considerando o primeiro termo e o valor da razão, podemos classificar uma PG em crescente, decrescente, oscilante ou constante.

Dizemos que uma PG é **crescente** quando:

- o primeiro termo é um número real positivo, e a razão é um número real maior do que 1, isto é, $a_1 > 0$ e $q > 1$. Por exemplo, na PG (1, 7, 49, 343), tem-se $a_1 = 1$ e $q = 7$.
- o primeiro termo é um número real negativo, e a razão é um número real entre zero e 1, isto é, $a_1 < 0$ e $0 < q < 1$. Por exemplo, na PG $\left(-5, -\frac{5}{2}, -\frac{5}{4}, \ldots\right)$, tem-se $a_1 = -5$ e $q = \frac{1}{2}$.

Dizemos que uma PG é **decrescente** quando:

- o primeiro termo é um número real positivo, e a razão é um número real entre zero e 1, isto é, $a_1 > 0$ e $0 < q < 1$. Por exemplo, na PG (180, 60, 20, …), tem-se $a_1 = 180$ e $q = \frac{1}{3}$.
- o primeiro termo é um número real negativo, e a razão é um número real maior do que 1, isto é, $a_1 < 0$ e $q > 1$. Por exemplo, na PG $\left(-\frac{1}{2}, -1, -2, \ldots\right)$, tem-se $a_1 = -\frac{1}{2}$ e $q = 2$.

Classificamos uma PG como **oscilante** quando o primeiro termo é um número real diferente de zero, e a razão é um número negativo, isto é, $a_1 \neq 0$ e $q < 0$. Por exemplo, na PG (−1, 2, −4, 8), tem-se $a_1 = -1$ e $q = -2$.

Uma PG é classificada como **constante** quando sua razão é igual a 1. Por exemplo, na PG (−10, −10, −10, …), tem-se $a_1 = -10$ e $q = 1$.

» Termo geral de uma PG

Considere uma PG infinita qualquer $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \ldots)$ de razão q.

Usando a definição de PG, temos:

$a_2 = a_1 \cdot q$

$a_3 = a_2 \cdot q = (a_1 \cdot q) \cdot q = a_1 \cdot q^2$

$a_4 = a_3 \cdot q = (a_1 \cdot q^2) \cdot q = a_1 \cdot q^3$

⋮ ⋮ ⋮ ⋮

Observe que há uma relação entre o índice do termo e o expoente da razão da progressão:

- $a_2 = a_1 \cdot q = a_1 \cdot q^{(2-1)}$
- $a_3 = a_1 \cdot q^2 = a_1 \cdot q^{(3-1)}$
- $a_4 = a_1 \cdot q^3 = a_1 \cdot q^{(4-1)}$

Nota-se que o expoente de q é sempre uma unidade a menos do que o índice n do termo. De modo geral, temos:

$$a_n = a_{n-1} \cdot q = (a_1 \cdot q^{n-2}) \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Uma vez que essa relação também vale para uma PG qualquer finita $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n)$, temos:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

em que:

- a_n é o termo geral (ou enésimo termo);
- a_1 é o primeiro termo;
- n é a ordem do termo;
- q é a razão.

Saiba que...

Em algumas situações que envolvem termos consecutivos de uma PG, é conveniente recorrer às seguintes representações:

- produto de três termos consecutivos: $\frac{x}{q} \cdot x \cdot xq$
- soma de três termos consecutivos: $x + xq + xq^2$

Essa expressão é conhecida como **fórmula do termo geral da PG**.

Por exemplo, vamos determinar a expressão do termo geral da PG (5, 10, 20, …).

$$\text{A razão da PG é } q = \frac{10}{5} = 2.$$

Substituindo q por 2 e a_1 por 5 na fórmula do termo geral, obtemos a lei de formação dessa PG:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$$

» Soma dos termos de uma PG finita

Considere uma PG finita $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ de razão q.

Podemos obter a soma S_n de todos os termos dessa PG considerando os seguintes casos:

1º caso: Se $q = 1$, a PG é constante, e, como todos os termos são iguais, temos $S_n = a_1 n$.

2º caso: Se $q \neq 1$, a soma S_n de todos os termos da PG é $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$.

Demonstração

$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ldots + a_1q^{n-1}$ (I)

Agora, multiplicamos ambos os membros da equação anterior por q. Então:

$qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + a_1q^4 + \ldots + a_1q^n$ (II)

Fazendo (II) − (I), temos:

$qS_n - S_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + a_1q^4 + \ldots + a_1q^n - (a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ldots + a_1q^{n-1})$

$qS_n - S_n = \cancel{a_1q} + \cancel{a_1q^2} + \cancel{a_1q^3} + \cancel{a_1q^4} + \ldots + a_1q^n - a_1 - \cancel{a_1q} - \cancel{a_1q^2} - \cancel{a_1q^3} - \cancel{a_1q^4} - \ldots - \cancel{a_1q^{n-1}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow qS_n - S_n = -a_1 + a_1q^n \Rightarrow S_n(q-1) = -a_1 + a_1q^n \Rightarrow \boxed{S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}}$$

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

» Soma dos termos de uma PG infinita

Considere uma sequência cujo termo geral é dado por $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ para $n \in \mathbb{N}^*$. Vamos determinar os primeiros termos dessa sequência substituindo valores para n na expressão do termo geral. Assim, temos:

- $n = 1 \Rightarrow a_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2} = 0{,}5$
- $n = 2 \Rightarrow a_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = 0{,}25$
- $n = 3 \Rightarrow a_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} = 0{,}125$
- $n = 4 \Rightarrow a_4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} = 0{,}0625$
- $n = 5 \Rightarrow a_5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32} = 0{,}03125$

Essa sequência é a PG (0,5; 0,25; 0,125; 0,0625; 0,03125; ...), com $a_1 = \frac{1}{2}$ e razão $q = \frac{1}{2}$. Note que, à medida que aumentamos o valor do expoente n, o valor do termo a_n fica cada vez mais próximo de zero.

Dizemos, então, que o limite de $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, quando n tende ao infinito, vale zero, o que representamos assim:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

Lê-se: limite de $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ quando n tende ao infinito é igual a zero.

De modo geral, é possível demonstrar que, se $q \in \mathbb{R}$, com $-1 < q < 1$, então $\lim_{n \to \infty} q^n = 0$.

Vamos calcular a soma dos infinitos termos de uma PG de razão q, com $-1 < q < 1$. Para isso, analisaremos o que ocorre com a soma S_n dos n primeiros termos quando n tende ao infinito, ou seja, quando n se torna arbitrariamente grande.

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}\right)$$

Mas aprendemos que $\lim_{n \to \infty} q^n = 0$. Então, podemos escrever:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1(0 - 1)}{q - 1} = \frac{-a_1}{q - 1} = \frac{a_1}{1 - q}$$

Assim, em uma PG infinita $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ de razão q, com $-1 < q < 1$, temos:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

Portanto, dizemos que a soma dos termos da PG infinita, indicada por S, é:

$$S = \frac{a_1}{1 - q}$$

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

» Progressão geométrica e função exponencial

Estudaremos a seguir que a progressão geométrica, assim como a progressão aritmética, também se relaciona com um tipo de função. No caso da PG, com a função exponencial.

Vamos voltar à situação em que o gerente de um mercado resolveu organizar as caixas de um produto formando uma pirâmide. Conforme apresentado, as quantidades de caixas em cada prateleira formam a PG (3, 6, 12, 24, 48, 96).

Nessa PG, tem-se $a_1 = 3$ e $q = 2$, então o termo geral é dado por:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

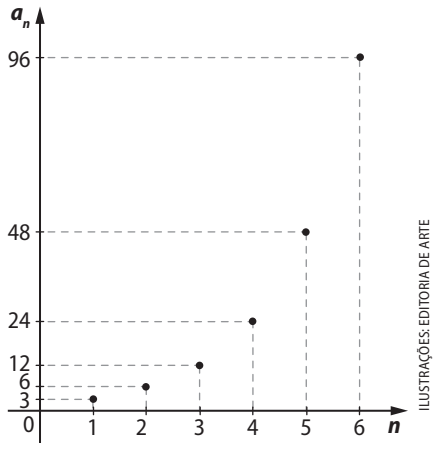
Considerando a função f: {1, 2, 3, 4, 5, 6} $\rightarrow \mathbb{R}_+^*$, tal que $f(n) = 3 \cdot 2^{n-1}$, tem-se $f(n) = a_n$. Sendo assim, f associa a cada número natural n do domínio o valor a_n do contradomínio.

- $f(1) = 3 \cdot 2^{1-1} = 3 \cdot 2^0 = 3 = a_1$
- $f(2) = 3 \cdot 2^{2-1} = 3 \cdot 2^1 = 6 = a_2$
- $f(3) = 3 \cdot 2^{3-1} = 3 \cdot 2^2 = 12 = a_3$
- $f(4) = 3 \cdot 2^{4-1} = 3 \cdot 2^3 = 24 = a_4$
- $f(5) = 3 \cdot 2^{5-1} = 3 \cdot 2^4 = 48 = a_5$
- $f(6) = 3 \cdot 2^{6-1} = 3 \cdot 2^5 = 96 = a_6$

Saiba que...

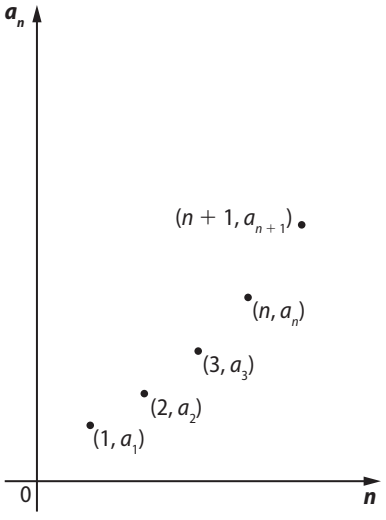
Note que $y = 3 \cdot 2^{x-1}$ equivale à lei da função envolvendo exponencial dada por $y = \frac{3}{2} \cdot 2^x$.

Portanto, a PG pode ser representada pelo gráfico da função f. Como f é uma função cujo domínio é {1, 2, 3, 4, 5, 6}, seu gráfico será dado por pontos pertencentes à curva exponencial da função $y = \frac{3}{2} \cdot 2^x$.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

De modo geral, dada a PG $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots)$ de razão $q > 0$, $q \neq 1$ e termo geral $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ relacionada com a função f: $\mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, tal que $f(n) = a_1 \cdot q^{n-1}$, a PG pode ser representada graficamente pelos pontos $(1, a_1)$, $(2, a_2)$, $(3, a_3)$, …, (n, a_n), $(n + 1, a_{n+1})$, …, pertencentes à curva exponencial da função definida por $y = \frac{a_1}{q} \cdot q^x$.



Pense e responda

Dada a PG $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots)$ de razão q negativa ou q igual a 1, podemos associar essa PG a uma função envolvendo exponencial dada por $y = \frac{a_1}{q} \cdot q^x$? Justifique.

Não, pois a PG associada a uma função envolvendo exponencial expressa por $y = \frac{a_1}{q} \cdot q^x$ só está definida para bases (q) positivas e diferentes de 1.

ATIVIDADES RESOLVIDAS

10. Considere que a sequência $(x, 3x + 2, 10x + 12)$, com $x \neq 0$, é uma PG de razão não nula.

a) Calcule o valor de x.

b) Escreva essa progressão.

Resolução

a) Como a sequência $(x, 3x + 2, 10x + 12)$ é uma progressão geométrica de razão não nula, $x \neq 0$ e $3x + 2$ e $10x + 12$ são não nulos, podemos escrever:

$\frac{3x + 2}{x} = \frac{10x + 12}{3x + 2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x(10x + 12) = (3x + 2)(3x + 2) \Rightarrow$

$\Rightarrow 10x^2 + 12x = 9x^2 + 12x + 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

Portanto, o valor de x é -2 ou 2.

b) Se $x = 2$, temos:

$a_1 = 2$

$a_2 = 3x + 2 = 3 \cdot 2 + 2 = 8$

$a_3 = 10x + 12 = 10 \cdot 2 + 12 = 32$

Assim, a PG é $(2, 8, 32)$. Note que, nesse caso, $q = 4$.

Se $x = -2$, temos:

$a_1 = -2$

$a_2 = 3x + 2 = 3 \cdot (-2) + 2 = -4$

$a_3 = 10x + 12 = 10 \cdot (-2) + 12 = -8$

Assim, a PG é $(-2, -4, -8)$. Note que, nesse caso, $q = 2$.

11. Considere uma sequência de quatro números inteiros tais que os três primeiros formam uma progressão aritmética de razão 3; os três últimos, uma progressão geométrica; e o primeiro número é igual ao quarto. Determine esses quatro números.

Resolução

Representando três números em PA de razão 3 e observando os demais dados do problema, escrevemos a sequência:

$(x - 3, x, x + 3, x - 3)$, com termos não nulos.

Como os três últimos números formam uma PG e os termos são não nulos, temos:

$\frac{x + 3}{x} = \frac{x - 3}{x + 3} \Rightarrow (x + 3)^2 = x(x - 3) \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 6x + 9 = x^2 - 3x \Rightarrow 9x = -9 \Rightarrow x = -1$

Substituindo x por -1 na sequência, obtemos:

$(-4, -1, 2, -4)$

Portanto, os números são: -4, -1, 2 e -4.

12. Determine o 10º termo da PG $(2, 6, \ldots)$.

Resolução

A razão dessa progressão geométrica é igual a:

$q = \frac{6}{2} = 3$

Se $a_1 = 2$, o décimo termo $(n = 10)$ é:

$a_n = a_1 q^{n-1} \Rightarrow a_{10} = 2 \cdot 3^{10-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{10} = 2 \cdot 3^9 = 39\,366$

13. Dada a progressão geométrica $(1, 3, 9, 27, \ldots)$, calcule:

a) a soma dos 6 primeiros termos;

b) quantos termos devem ser adicionados para que o resultado da adição seja 29 524.

Resolução

a) $a_1 = 1; q = 3; n = 6$

$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_6 = \frac{1 \cdot (3^6 - 1)}{3 - 1} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_6 = \frac{729 - 1}{2} = 364$

b) $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow 29\,524 = \frac{1 \cdot (3^n - 1)}{3 - 1} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3^n = 59\,049 \Rightarrow 3^n = 3^{10} \Rightarrow n = 10$

Devem ser adicionados 10 termos para se obter 29 524.

14. Calcule o valor de x na igualdade $x + 3x + 9x + \ldots + 729x = 5\,465$, sabendo que os termos do 1º membro formam uma PG e que x não é nulo.

Resolução

$a_1 = x; q = \frac{3x}{x} = 3; a_n = 729x; S_n = 5\,465$

Cálculo de n:

$a_n = a_1 q^{n-1} \Rightarrow 729x = x \cdot 3^{n-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow 729 = 3^{n-1} \Rightarrow 3^6 = 3^{n-1} \Rightarrow n = 7$

$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow 5\,465 = \frac{x(3^7 - 1)}{3 - 1} \Rightarrow$

$\Rightarrow 5\,465 = \frac{x(2\,187 - 1)}{2} \Rightarrow 5\,465 = 1093x \Rightarrow x = 5$

Assim, o valor de x é 5.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

15. Determine a soma dos infinitos termos da PG dada por $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{27}, \ldots\right)$.

Resolução

Nesse problema, vamos determinar a soma da PG infinita dada, em que $a_1 = \frac{1}{3}$ e $q = \frac{2}{3}$.

$$S = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{2}{3}} \Rightarrow S = 1$$

Portanto, a soma da PG infinita dada é 1.

16. Dada a progressão geométrica (20, 10, 5, …), faça o que se pede.

a) Determine o termo geral dessa PG.

b) Associe essa PG a uma função envolvendo exponencial com domínio $\mathbb{N}^*$.

Resolução

a) O termo geral de uma PG é dado por $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. Assim, como $a_1 = 10$ e $q = \frac{10}{20} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$; então, o termo geral da PG (20, 10, 5, …) é: $a_n = 20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

b) Simplificando a expressão do termo geral, encontramos:

$$a_n = 20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \cdot \left(\frac{2}{1}\right) =$$

$$= 40 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

Logo, podemos associar a PG (20, 10, 5, …) à função $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ definida por: $f(n) = 40 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

25. Determine a razão de cada uma das seguintes progressões geométricas.

a) (3, 12, 48) 4

b) (5, −15, …) −3

c) $(\sqrt{5}, 5, \ldots)$ $\sqrt{5}$

d) $(2, 2^5, 2^9)$ 2^4

e) $\left(5, \frac{5}{2}, \ldots\right)$ $\frac{1}{2}$

f) $(10^{-1}, 10, 10^3)$ 10^2

26. Classifique as progressões geométricas dadas a seguir em crescente, decrescente, oscilante ou constante.

a) (5, 5, 5, …) constante

b) $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$ decrescente

c) (−2, −8, −32, …) decrescente

d) (3, −6, 12, −24) oscilante

e) (4, 6, 9, …) crescente

f) $\left(-7, -\frac{7}{4}, -\frac{7}{16}\right)$ crescente

27. Verifique se a sequência de termo geral $a_n = 5 \cdot 4^{n-2}$, com $n \in \mathbb{N}^*$, é uma progressão geométrica. Ver as **Orientações para o professor**.

28. (UFSC) Se a, b, c são termos consecutivos de uma PA de razão 5 e $(a + 2)$, b, $(c - 1)$ são termos consecutivos de uma PG, qual o valor de $a + b + c$? 36

29. (UFMG) Os números reais 3, a e b são, nessa ordem, termos consecutivos de uma progressão aritmética cuja razão é positiva. Por sua vez, os números reais a, b e 8 são, também nessa ordem, termos consecutivos de uma progressão geométrica. Determine a e b.

$a = \frac{9}{2}$ e $b = 6$

30. Qual é o sexto termo da PG (512, 256, …)? 16

31. Uma PG tem seis termos, sendo 2 o último termo e $\frac{1}{4}$ a razão. Qual é o primeiro termo dessa PG? 2 048

32. Em uma PG, $a_1 = \frac{1}{4}$ e $a_7 = 16$. Calcule a razão dessa PG. $q = \pm 2$

33. Em uma PG, $a_5 = 32$ e $a_8 = 256$. Calcule q e a_1. $q = 2$ e $a_1 = 2$

34. Em uma progressão geométrica, a diferença entre o segundo e o primeiro termos é 9, e a diferença entre o quinto e o quarto termos é 576. Calcule o primeiro termo dessa progressão. 3

35. Entre os números 18 e b, foram inseridos dois termos, obtendo-se uma PG de razão 3. Qual é o valor de b? 486

36. (Ufop-MG) Numa progressão geométrica, $a_1 = 1$ e $a_2 = 9$. Determine n, sabendo que $a_n = 6\,561$. $n = 5$

37. Usando uma calculadora, determine a soma dos termos da PG (5, 50, …, 500 000). $S_6 = 555\,555$

38. Quantos termos devemos considerar na PG (3, 6, …) para obter 765 como a soma dos termos? 8 termos

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

39. (Vunesp-SP) Várias tábuas iguais estão em uma madeireira. A espessura de cada tábua é 0,5 cm. Forma-se uma pilha de tábuas colocando-se uma tábua na primeira vez e, em cada uma das vezes seguintes, tantas quantas já houveram sido colocadas anteriormente.
Determine, ao final de 9 dessas operações:

a) quantas tábuas terá a pilha; 256

b) a altura, em metro, da pilha. 1,28 m

40. O vazamento de um tanque de água provocou a perda de 2 litros de água no primeiro dia. Como o orifício responsável pela perda ia aumentando, no dia seguinte, o vazamento foi o dobro do dia anterior. Se essa perda for dobrando a cada dia, qual será o número total de litros de água perdido até o 12º dia? 8 190 litros

41. Em cada uma das progressões a seguir, determine o termo geral da PG, associe a PG a uma função envolvendo exponencial com domínio $\mathbb{N}^*$ e calcule a soma dos termos da PG.
Ver as **Orientações para o professor**.

a) $\left(5, 1, \frac{1}{5}, \ldots\right)$ **b)** $(2^{-2}, 2^{-4}, 2^{-6}, \ldots)$ **c)** $(9^{-1}, 10^{-1}, 9 \cdot 10^{-2}, 9^2 \cdot 10^{-3}, \ldots)$

42. Represente graficamente os 5 primeiros termos das progressões geométricas a seguir, definidas em $\mathbb{N}^*$. Ver as **Orientações para o professor**.

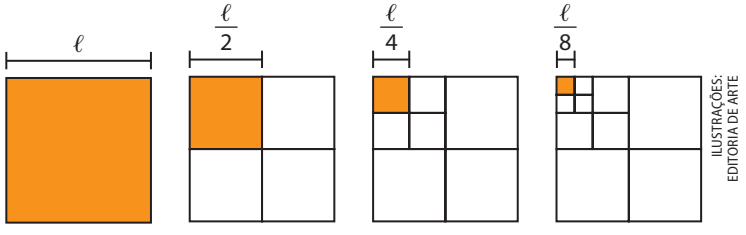
a) $a_n = 2^n$ **b)** $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$

43. Em cada equação, o primeiro membro representa a soma dos termos de uma PG infinita. Determine os valores possíveis para x.

a) $80x + 40x + 20x + \ldots = 320$ $S = \{2\}$ **b)** $5^x + 5^{x-1} + 5^{x-2} + \ldots = \frac{625}{4}$ $S = \{3\}$

44. (UFJF-MG) Uma bola de borracha cai de uma altura de 30 metros. Após o choque com o solo, a bola sobe a uma altura igual a $\frac{1}{3}$ da altura anterior. Se deixarmos a bola subir e descer sem interrupção, qual será a distância total percorrida por ela? 60 metros

45. (UFPel-RS) O lado de um quadrado mede ℓ unidades de comprimento. Unindo-se os pontos médios dos lados opostos, obtêm-se quatro novos quadrados. Se procedermos assim, sucessivamente, obteremos novos quadrados cada vez menores, conforme a figura, que mostra parte de uma sequência infinita. Determine a soma dos perímetros de todos os quadrados coloridos dessa sequência. $S = 8\ell$



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

46. (Fuvest-SP) Resolva os três itens a seguir.

a) O primeiro termo de uma progressão geométrica de razão positiva é 5, e o terceiro termo é 45. Calcule a soma dos 6 primeiros termos dessa progressão. 1 820

b) Calcule a soma dos números inteiros positivos menores do que 112 e não divisíveis por 4. 4 704

c) A soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética é $n(2n + 1)$, qualquer que seja $n \geqslant 1$. Encontre o vigésimo termo dessa progressão. 79

Teorias demográficas e crescimento populacional no mundo

Alguns estudos demográficos utilizam modelos matemáticos envolvendo progressões aritméticas e geométricas. Leia o texto a seguir, a respeito da teoria malthusiana, um desses estudos demográficos.

Teoria Malthusiana

[...]

Exposta em 1798, foi a primeira teoria demográfica de grande repercussão nos meios acadêmicos, políticos e econômicos e até hoje é a mais popular de todas, apesar das falhas que apresenta. Preocupado com os problemas socioeconômicos (desemprego, fome, êxodo rural, rápido aumento populacional) decorrentes da Revolução Industrial e que afetavam seriamente a Inglaterra, Malthus expôs sua famosa teoria a respeito do crescimento demográfico.

Afirmava que as populações humanas, se não ocorrerem guerras, epidemias, desastres naturais etc., tenderia a duplicar a cada 25 anos. Ela cresceria, portanto, em *progressão geométrica* (2, 4, 8, 16, 32...). Já o crescimento da produção de alimentos ocorreria apenas em progressão aritmética (2, 4, 6, 8, 10...).

Ao considerar esses dois postulados, Malthus concluiu que o ritmo de crescimento populacional (progressão geométrica) seria mais acelerado que o ritmo de crescimento da produção de alimentos (progressão aritmética). [...]

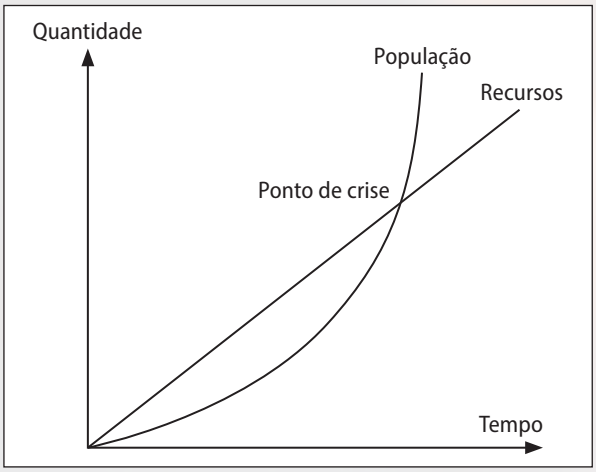
[...] ele e os defensores dessa tese descartavam a utilização de métodos contraceptivos para limitar o crescimento populacional; para eles a solução estaria no *controle da natalidade*, sendo que o referido controle deveria basear-se na sujeição moral do homem (casamento tardio, abstinência sexual etc.).

[...]

Hoje, sabe-se que as previsões malthusianas não se concretizaram: a população do planeta não duplicou a cada 25 anos e a produção de alimentos tem crescido com o desenvolvimento tecnológico. [...]

[...]

[...] Malthus subestimou a capacidade da tecnologia em elevar a produção de alimentos. Mas, desde que ele apresentou sua teoria, ainda nos dias atuais, são comuns os discursos que relacionam de forma simplista a ocorrência da fome no planeta ao crescimento populacional.



BANY'S BEAUTIFUL ART/SHUTTERSTOCK.COM

■ Representação gráfica do crescimento populacional em relação à produção de recursos na teoria malthusiana.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Teoria Neomalthusiana

[...] Mas, como explicar, e, a partir daí, enfrentar os problemas da fome e miséria nos países subdesenvolvidos?

Nesse contexto histórico, foi criada a teoria demográfica neomalthusiana, uma tentativa de explicar a ocorrência de fome nos países subdesenvolvidos, para se esquivarem das questões econômicas.

[...]

Os neomalthusianos, temerosos, diante desse quadro assustador no Terceiro Mundo, passam a responsabilizar esses países pelo quadro de fome e miséria e os seus elevados crescimentos demográficos.

Para os neomalthusianos quanto maior o número de habitantes de um país, menor a renda *per capita* e a disponibilidade de capital a ser distribuído pelos agentes econômicos. Verifica-se que essa teoria, embora com postulados totalmente diferentes daqueles utilizados por Malthus, chega à mesma conclusão: o crescimento populacional é o responsável pela ocorrência da miséria. Ela passa, então, a propor programas de controle da natalidade nos países subdesenvolvidos e a disseminação da utilização de métodos anticoncepcionais. [...]

[...]

Apesar de vários países terem adotado medidas de controle da natalidade sob orientações neomalthusianas, a situação de fome e miséria continuou existindo.

[...]

SILVA, José Adailton B. da *et al*. Teorias demográficas e o crescimento populacional no mundo. **Caderno de graduação**: Ciências Humanas e Sociais Unit, Aracaju, v. 2, n. 3, p. 113-124, mar. 2015. p. 115-118. Disponível em: https://periodicos.set.edu.br/index.php/cadernohumanas/article/view/1951. Acesso em: 12 ago. 2024.

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Agora, faça o que se pede nas atividades a seguir. Ver as **Orientações para o professor**.

1. De acordo com a teoria malthusiana, que função afim pode ser associada à sequência do crescimento de produção de alimentos? E que função exponencial pode ser associada ao crescimento populacional? função afim: $y = 2x$; função exponencial: $y = 2^x$
2. Represente o que Malthus expunha em sua teoria demográfica por meio do esboço de dois gráficos em um mesmo plano cartesiano, um para o crescimento da população, outro para o crescimento da produção de alimentos. Que ponto dos gráficos corresponde ao colapso na oferta de alimentos no mundo?
3. Em 1798, ano da divulgação da teoria malthusiana, a população mundial era de aproximadamente 1 bilhão de habitantes. Se as hipóteses apontadas por Malthus tivessem se concretizado, qual teria sido a população mundial no ano 2000?
4. Pesquise a teoria reformista, que é outra teoria de crescimento demográfico. Quais são as ideias básicas dessa teoria? Qual é a relação entre ela e as teorias citadas anteriormente?
5. Com base nas informações do texto e nas respostas que você apresentou na atividade **4**, elabore um resumo contendo as principais ideias das teorias malthusiana e neomalthusiana e as diferenças em relação à teoria reformista.

Para assistir

- O ECONOMISTA que inspirou Thanos | Nerdologia. [*S. l.*: *s. n.*], 2018. 1 vídeo (9 min). Publicado pelo canal Nerdologia. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=QQOCuvUHP9E. Acesso em: 12 ago. 2024. O vídeo apresenta a relação entre a teoria de Thomas Malthus e um personagem da cultura *pop*.

BLVDONE/SHUTTERSTOCK.COM

Sequências na planilha eletrônica

Nesta seção, vamos utilizar uma planilha do **LibreOffice** para construir uma progressão aritmética (PA) e analisar o comportamento dos pontos do gráfico que a representa.

Progressão aritmética (PA)

Escreva os seis primeiros termos de uma PA em que o primeiro termo, a_1, seja 2, e a razão r seja 3. Em seguida, construa um gráfico para analisar o comportamento dos pontos. Por fim, crie uma fórmula para calcular o termo geral a_n.

Siga os passos a seguir para resolver o problema.

I. Abra uma planilha no LibreOffice e organize as colunas da planilha, digitando, na primeira linha, "PA" e os seis primeiros termos: a1, a2, a3, a4, a5, a6. Na célula A2, digite "Valor do termo"; na célula B2, digite "2"; na célula A3, digite "razão (*r*)"; e, na célula B3, digite "3", como indicado a seguir.

Saiba que...

Ao longo desta seção, para facilitar a manipulação dos dados na tabela, os termos da PA foram nomeados a1, a2, a3, a4, a5, a6 e *an*, em vez da notação usual, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 e a_n.

	A	B	C	D	E	F	G
1	PA	a1	a2	a3	a4	a5	a6
2	Valor do termo	2					
3	razão (*r*)	3					

II. Na célula C2, digite "=B2+B3" para calcular o segundo termo da PA. Ao apertar ***Enter***, aparecerá o número 5. Isso acontece porque a fórmula indica para a planilha que deve adicionar o primeiro termo (2) à razão (3). O símbolo $ indica que o valor na célula B3 está fixado.

III. Agora, selecione a célula C2 e arraste-a, pelo ponto azul no canto inferior direito da célula, até a célula G2. Isso fará com que a fórmula seja copiada para as outras células, alterando B2 para C2, D2, E2 e F2, respectivamente. O valor de B3 não se altera, pois foi fixado. A planilha calculará automaticamente todos os termos de a1 até a6.

IV. Vamos utilizar as linhas 1 e 2 para construir um gráfico. Para isso, selecione as células B1 até G2. Clique na célula A1, depois pressione e segure a tecla ***Shift*** e clique na célula G2.

	A	B	C	D	E	F	G
1	PA	a1	a2	a3	a4	a5	a6
2	Valor do termo	2	5	8	11	14	17
3	razão (*r*)	3					

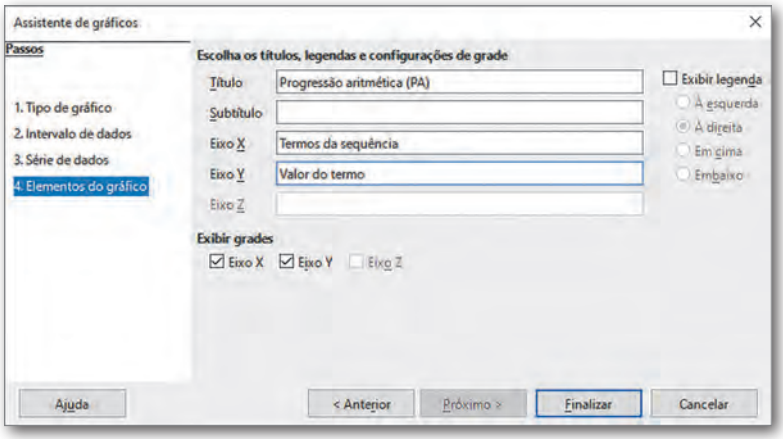
V. Vá à guia **Inserir**, localizada na barra *menu*. Clique em **Gráfico**. Aparecerá uma janela com opções de tipos de gráfico. Nesse caso, escolha a opção **Linha** e clique em **Próximo** três vezes até chegar ao passo **4. Elementos do gráfico**.

IMAGENS: REPRODUÇÃO/LIBREOFFICE

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

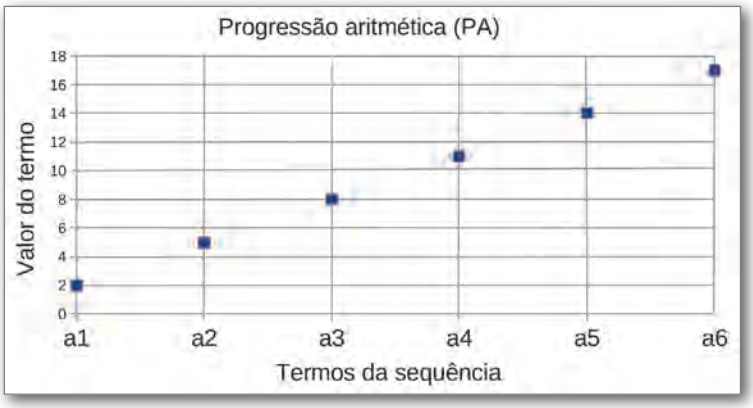
MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

VI. No passo **4. Elementos do gráfico**, desabilite a opção **Exibir legenda** e habilite a opção **Eixo X** em **Exibir grades**. Preencha "Progressão aritmética (PA)" no campo **Título**; "Termos da sequência" no campo **Eixo X**; e "Valor do termo" no campo **Eixo Y**.



IMAGENS: REPRODUÇÃO/LIBREOFFICE

VII. Clique em **Finalizar** na janela de configurações do gráfico. Será exibido o gráfico a seguir.



Pense e responda

Observe o gráfico. Ele mostra pontos alinhados que pertencem a uma reta crescente. Por que isso acontece?

Espera-se que os estudantes respondam que isso acontece porque a PA pode ser associada a uma função afim de coeficiente angular positivo.

VIII. Agora, na célula A4, digite "n". A célula B4 será usada para indicar a ordem n de um termo qualquer; nesse caso, digite "10". Na célula A5, digite "an". A célula B5 será usada para indicar o valor do termo a_n; nesse caso, digite a fórmula "=B2+(B4−1)*B3". Note que essa fórmula é equivalente à fórmula do termo geral $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$. Ao apertar ***Enter***, o valor do 10º termo aparecerá na célula B5. Explique aos estudantes que, na planilha, a operação de multiplicação é representada pelo asterisco.

Agora, faça o que se pede nas atividades a seguir.

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. Na célula B4, digite "15" e aperte ***Enter***. Que número apareceu na célula B5? O que ele representa? Apareceu o número 44. Ele representa o 15º termo da PA cujo primeiro termo é 2 e a razão é 3.
2. Digite "70" na célula B2 e aperte ***Enter***. O que aconteceu? Espera-se que os estudantes percebam que foi criada uma PA cujo primeiro termo é 70 e a razão é 3. Além disso, o gráfico foi alterado para os pontos que representam os termos da nova PA.
3. Troque os valores da tabela para criar uma PA cujo primeiro termo seja 15 e a razão seja −5. Quais são os cinco primeiros termos dessa PA? E o que aconteceu com o gráfico? Os cinco primeiros termos da PA são 15, 10, 5, 0 e −5. Agora o gráfico mostra pontos alinhados que pertencem a uma reta decrescente.
4. Em outra planilha, repita os passos para construir uma PG cujo primeiro termo seja 2 e a razão q seja 2. Que fórmulas você utilizou nas células C2 e B5? O que aconteceu com o gráfico? Ver as **Orientações para o professor**.
5. Na tabela em que você construiu uma PG, altere o valor da razão q para −2. O que aconteceu com o gráfico? Espera-se que os estudantes apontem que, nesse caso, os pontos do gráfico não fazem parte de uma curva exponencial.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

A soma dos *n* primeiros termos de uma PA

O texto a seguir conta a história de quando o matemático, astrônomo e físico alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855), ainda estudante, supostamente teria calculado mentalmente a soma dos 100 primeiros números naturais não nulos. Leia o texto e tente associar a fórmula da soma dos *n* primeiros termos de uma PA, apresentada neste Capítulo, com a fórmula possivelmente utilizada por Gauss no cálculo mental.

ZABANSKI/SHUTTERSTOCK.COM

Gauss e a soma de uma progressão aritmética

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) [...] foi menino prodígio. [...]

Gauss em criança se divertia com cálculos matemáticos; uma anedota referente a seus começos na escola é característica. Um dia, para ocupar a classe, o professor mandou que os alunos somassem todos os números de um a cem, com instruções para que cada um colocasse sua ardósia sobre a mesa logo que completasse a tarefa. Quase imediatamente, Gauss colocou sua **ardósia** sobre a mesa dizendo: "Aí está!". O professor olhou-o com desdém enquanto os outros trabalhavam diligentemente. Quando o instrutor finalmente olhou os resultados, a ardósia de Gauss era a única com a resposta correta, 5 050, sem outro cálculo. O menino de dez anos evidentemente calculara mentalmente a soma da progressão aritmética $1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100$, presumivelmente pela fórmula $\frac{m \cdot (m + 1)}{2}$. Seus mestres logo levaram o talento de Gauss à atenção do Duque de Brunswick, que apoiou seus estudos, primeiro para que pudesse cursar o colégio local, depois na Universidade em Göttingen, onde se matriculou em outubro de 1795.

ardósia: tipo de rocha antigamente utilizada para escrever na escola.

BOYER, Carl B. **História da matemática**. 1. ed. 9. reimp. São Paulo: Edgard Blücher, 1996. p. 343-344.

ROOK76/SHUTTERSTOCK.COM

SPATULETAIL/SHUTTERSTOCK.COM

- Selos comemorativos em homenagem a Gauss. Respectivamente: Alemanha (1955), Alemanha Oriental (1977) e Nicarágua (1994). (As imagens da página estão fora de proporção.)

ATIVIDADES COMPLEMENTARES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

1. (Enem/MEC) O gerente de uma fábrica pretende comparar a evolução das vendas de dois produtos similares (I e II). Para isso, passou a verificar o número de unidades vendidas de cada um desses produtos em cada mês. Os resultados dessa verificação, para os meses de abril a junho, são apresentados na tabela.

Produto	Vendas em abril (unidade)	Vendas em maio (unidade)	Vendas em junho (unidade)
I	80	90	100
II	190	170	150

O gerente estava decidido a cessar a produção do produto II no mês seguinte àquele em que as vendas do produto I superassem as do produto II.
Suponha que a variação na quantidade de unidades vendidas dos produtos I e II se manteve, mês a mês, como no período representado na tabela.
Em qual mês o produto II parou de ser produzido?

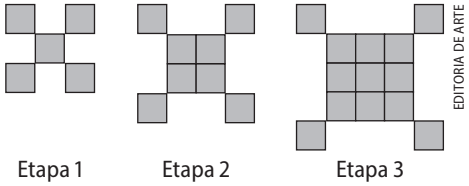
a) Junho.
b) Julho.
c) Agosto.
d) Setembro.
e) Outubro.

alternativa **d**

2. (PUC-RJ) Os números $a_1 = 5x - 5$, $a_2 = x + 14$ e $a_3 = 6x - 3$ estão em PA. alternativa **b**
A soma dos 3 números é igual a:

a) 48
b) 54
c) 72
d) 125
e) 130

3. (UFRGS-RS) Considere o padrão de construção, representado pelos desenhos formados por quadrados de lado 1, em cada uma das etapas indicadas na figura abaixo.



Etapa 1 Etapa 2 Etapa 3

O número de quadrados de lado 1 que farão parte da figura da etapa 10 é alternativa **c**

a) 96.
b) 100.
c) 104.
d) 108.
e) 112.

4. (PUC-SP) Uma pessoa montou um quebra-cabeça de 1 000 peças em 11 dias. No 1º dia foram montadas 40 peças, e o número diário de peças montadas do 2º ao 11º dia obedeceu a uma progressão aritmética. Se o número de peças montadas no 2º dia correspondeu a 60% do número de peças montadas no 7º dia, então, o número de peças montadas no 9º dia foi: alternativa **c**

a) 120.
b) 118.
c) 116.
d) 114.

5. (Enem/MEC) Sob a orientação de um mestre de obras, João e Pedro trabalharam na reforma de um edifício. João efetuou reparos na parte hidráulica nos andares 1, 3, 5, 7, e assim sucessivamente, de dois em dois andares. Pedro trabalhou na parte elétrica nos andares 1, 4, 7, 10, e assim sucessivamente, de três em três andares. Coincidentemente, terminaram seus trabalhos no último andar. Na conclusão da reforma, o mestre de obras informou, em seu relatório, o número de andares do edifício. Sabe-se que, ao longo da execução da obra, em exatamente 20 andares, foram realizados reparos nas partes hidráulica e elétrica por João e Pedro.
Qual é o número de andares desse edifício?

a) 40
b) 60
c) 100
d) 115
e) 120

alternativa **d**

6. (UFRGS-RS) Desde a Grécia Antiga, sabe-se que a soma dos números ímpares consecutivos, a partir do 1, é sempre um quadrado perfeito. Como exemplo, tem-se

$1 = 1^2$

$1 + 3 = 2^2$

$1 + 3 + 5 = 3^2$

$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$

Então, a soma de todos os números ímpares menores do que 100 é alternativa **c**

a) 42^2.
b) 49^2.
c) 50^2.
d) 99^2.
e) 100^2.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

7. (UERN) Um fabricante de televisores produziu 204700 unidades em um período de 11 meses. Considerando-se que, no primeiro mês, a produção foi de x unidades e que, nos demais meses, foi o dobro do mês anterior, pode-se afirmar que o valor de x é: alternativa **a**

a) 100 **c)** 80
b) 90 **d)** 50

8. (UFPA) A razão da PG cujos termos satisfazem as relações $a_1 + a_3 + a_5 = 5$ e $a_2 + a_4 + a_6 = 10$ é:

a) $\frac{1}{2}$ **c)** $\frac{3}{2}$ **e)** 3
alternativa **d**
b) 1 **d)** 2

9. (Unifor-CE) O número de termos da progressão $\left(\frac{1}{125}, \frac{1}{25}, \frac{1}{5}, \ldots, 3125\right)$ é alternativa **e**

a) 5 **c)** 7 **e)** 9
b) 6 **d)** 8

10. (UEG-GO) Dada a sequência $(-7, 21, -63, \ldots)$, que forma uma progressão geométrica, o sexto termo dessa progressão é alternativa **b**

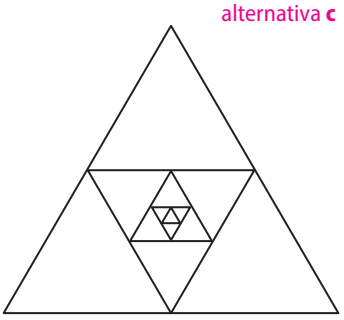
a) -1701 **c)** 2187 **e)** 5103
b) 1701 **d)** -5103

11. (Unilasalle-RS) O novo *site* de uma empresa foi inaugurado no primeiro dia do mês de dezembro e recebeu 3 acessos. No segundo dia teve 9 acessos, no terceiro dia, 27 acessos, e assim por diante. Em que dia de dezembro obteve 2187 acessos? alternativa **b**

a) 6 **c)** 8 **e)** 10
b) 7 **d)** 9

12. (IFPR) Um fractal é uma estrutura geométrica que se repete em qualquer escala. Unindo os pontos médios dos lados de um triângulo equilátero, obtemos outro triângulo equilátero. Repetindo esse processo indefinidamente, determinamos um fractal bem simples, ilustrado na figura a seguir. Se começarmos a construção com um triângulo equilátero de lado de medida 8 unidades de comprimento, o limite para a soma dos perímetros dos triângulos equiláteros que compõem o fractal será, em unidades de comprimento, de: alternativa **c**

a) 45.
b) 46,5.
c) 48.
d) 72.

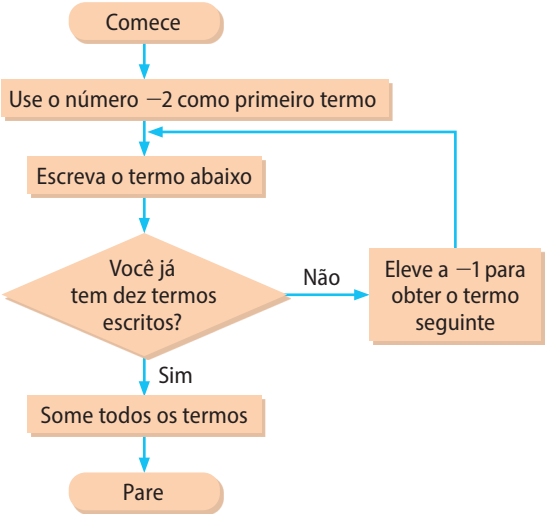


ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

13. (Fuvest-SP) Sabe-se sobre a progressão geométrica $a_1, a_2, a_3, \ldots$ que $a_1 > 0$ e $a_6 = -9\sqrt{3}$. Além disso, a progressão geométrica $a_1, a_5, a_9, \ldots$ tem razão igual a 9. Nessas condições, o produto $a_2 \cdot a_7$ vale: alternativa **a**

a) $-27\sqrt{3}$ **d)** $3\sqrt{3}$
b) $-3\sqrt{3}$ **e)** $27\sqrt{3}$
c) $-\sqrt{3}$

14. (Insper-SP) Um computador foi programado com as instruções que estão descritas no diagrama a seguir.



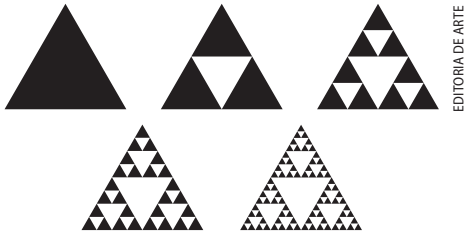
O resultado que o computador vai apresentar depois de executar o programa é alternativa **e**

a) -9. **c)** $-5{,}5$. **e)** $-12{,}5$.
b) 0. **d)** 8.

15. (Uneb-BA) Considere n o cardinal de $a_n = -250$, na progressão aritmética $(-2, -6, -10, \ldots)$ e s, a soma dos 9 primeiros termos da progressão geométrica $(3, 6, 12, 24, \ldots)$.
Desse modo, é correto afirmar que o valor de $s - n$ é alternativa **02**

01) 1596 **04)** 735
02) 1470 **05)** 511
03) 1246

16. (UFRN) A sequência de figuras a seguir representa os cinco primeiros passos da construção do conjunto de Sierpinski. Os vértices dos triângulos brancos construídos são os pontos médios dos lados dos triângulos escuros da figura anterior. Denominamos a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5, respectivamente, as áreas das regiões escuras da primeira, segunda, terceira, quarta e quinta figuras da sequência. alternativa **a**


EDITORIA DE ARTE

Podemos afirmar que a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5 estão, nessa ordem, em progressão geométrica de razão:

a) $\frac{3}{4}$ **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** $\frac{1}{3}$ **d)** $\frac{1}{4}$

PARA REFLETIR

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Neste Capítulo, estudamos dois tipos de sequências numéricas: as progressões aritméticas e as progressões geométricas. Aprendemos que tanto a PA como a PG possuem razão constante e que podemos calcular a soma dos elementos que formam esses tipos de sequências.

Além disso, nas páginas de abertura, apresentamos os desenhos *sona* para mostrar que as sociedades lidam de diferentes maneiras com a realidade à sua volta.

Se possível, pesquise mais sobre os temas abordados no Capítulo.

Agora, vamos refletir sobre as aprendizagens do Capítulo **2**: Respostas pessoais.

- Você já conhecia algum dos conteúdos apresentados neste Capítulo? Qual(is)?
- Retornando à atividade **4** da abertura deste Capítulo, como você responderia agora a essa questão? Algo mudou em sua resposta?
- Como podemos determinar todos os termos de uma sequência numérica finita?
- Dados o 1º e o 3º termos de uma PA, como podemos descobrir o 2º termo?
- Uma PA e uma PG podem ser associadas a quais tipos de funções?
- Como podemos representar os passos envolvidos no cálculo da soma de uma PA ou de uma PG utilizando um fluxograma?

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

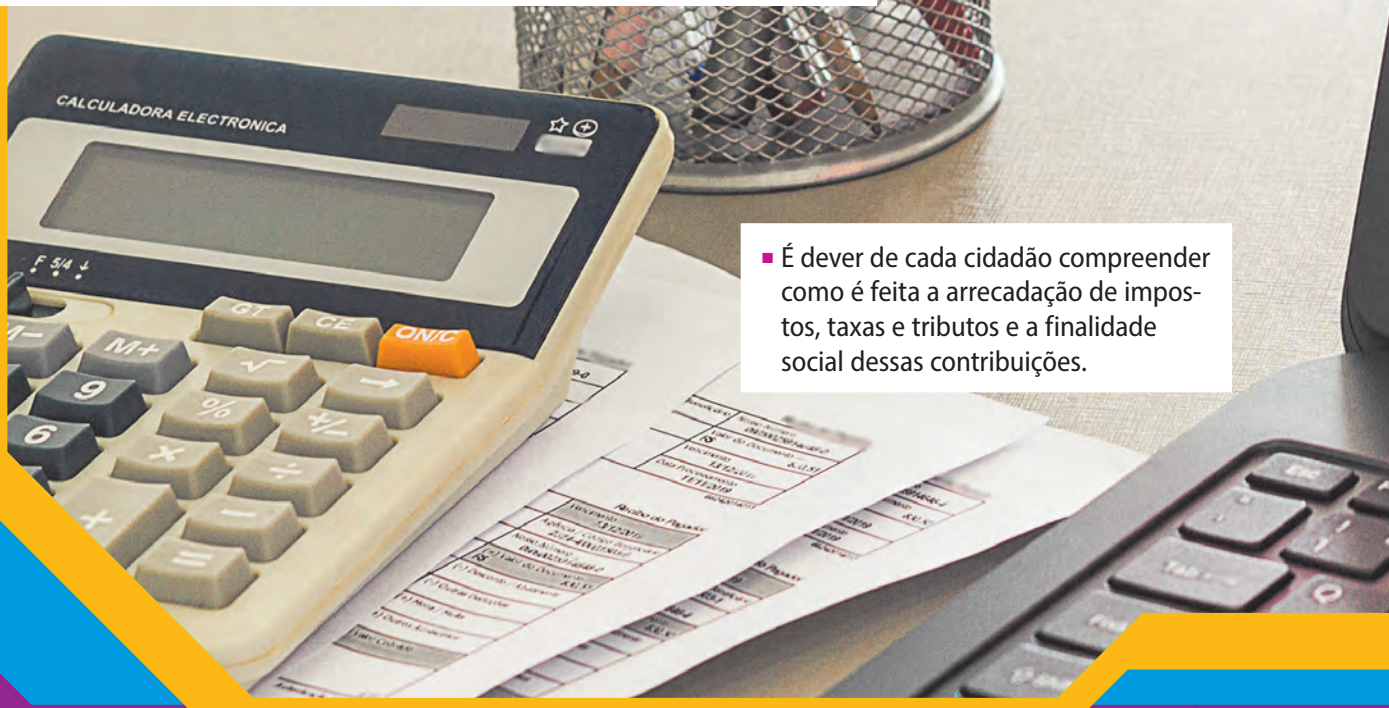
CAPÍTULO

3 Função definida por mais de uma sentença

O Imposto sobre a Renda das Pessoas Físicas (IRPF), mais conhecido como imposto de renda, é um exemplo de cobrança que incide sobre a renda e os proventos de cidadãos residentes no Brasil. O dinheiro arrecadado com esse imposto financia inúmeros serviços públicos como saúde, educação e segurança, promovendo uma redistribuição da renda.

O imposto é cobrado de acordo com o rendimento anual de cada cidadão. Quanto maior a renda, maior é a alíquota do imposto. No Brasil, em 2024, a alíquota variava de 7,5% a 27,5%. Quem recebia mensalmente até R$ 2.259,20, aproximadamente 30 mil reais anuais, era isento de pagar o imposto. Em outros países como, por exemplo, nos Estados Unidos da América, a alíquota variava de 10% a 37% e, em Portugal, variava de 14,5% a 48%.

Situações como essa vão nos auxiliar a compreender o estudo de **funções**, em particular as **funções definidas por mais de uma sentença**.

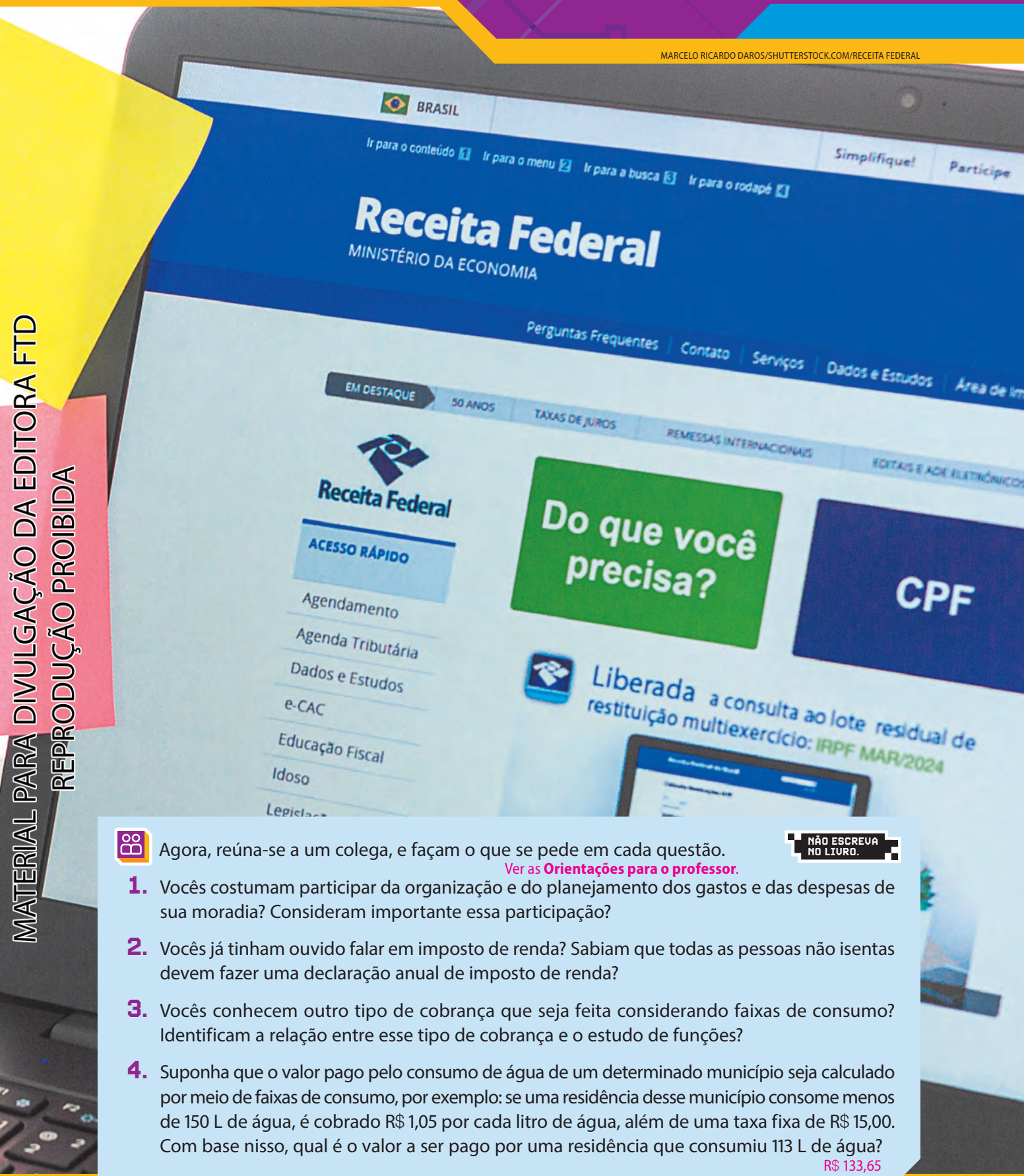


- É dever de cada cidadão compreender como é feita a arrecadação de impostos, taxas e tributos e a finalidade social dessas contribuições.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MARCELO RICARDO DAROS/SHUTTERSTOCK.COM/RECEITA FEDERAL



Agora, reúna-se a um colega, e façam o que se pede em cada questão.

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Ver as **Orientações para o professor**.

1. Vocês costumam participar da organização e do planejamento dos gastos e das despesas de sua moradia? Consideram importante essa participação?
2. Vocês já tinham ouvido falar em imposto de renda? Sabiam que todas as pessoas não isentas devem fazer uma declaração anual de imposto de renda?
3. Vocês conhecem outro tipo de cobrança que seja feita considerando faixas de consumo? Identificam a relação entre esse tipo de cobrança e o estudo de funções?
4. Suponha que o valor pago pelo consumo de água de um determinado município seja calculado por meio de faixas de consumo, por exemplo: se uma residência desse município consome menos de 150 L de água, é cobrado R$ 1,05 por cada litro de água, além de uma taxa fixa de R$ 15,00. Com base nisso, qual é o valor a ser pago por uma residência que consumiu 113 L de água?

R$ 133,65

Introdução

O estudo de funções nos permite compreender algumas regularidades presentes em situações do dia a dia, bem como estabelecer modelos matemáticos que possibilitem analisar e prever resultados.

Na abertura deste Capítulo, foi apresentada uma situação que podemos relacionar ao conceito de função definida por mais de uma sentença. Além desse conceito, estudaremos outros tipos de função, sua representação gráfica e conceitos matemáticos relacionados a eles.

Função definida por mais de uma sentença

Aprendemos que o Imposto sobre a Renda das Pessoas Físicas (IRPF) é um imposto que incide sobre a renda e os proventos dos cidadãos brasileiros. Esse tributo é cobrado de acordo com uma tabela progressiva, a qual indica a alíquota correspondente a cada base de cálculo, que depende da renda de cada contribuinte.

Saiba que...

Alíquota é o percentual aplicado sobre a base de cálculo para determinar o valor de um tributo.

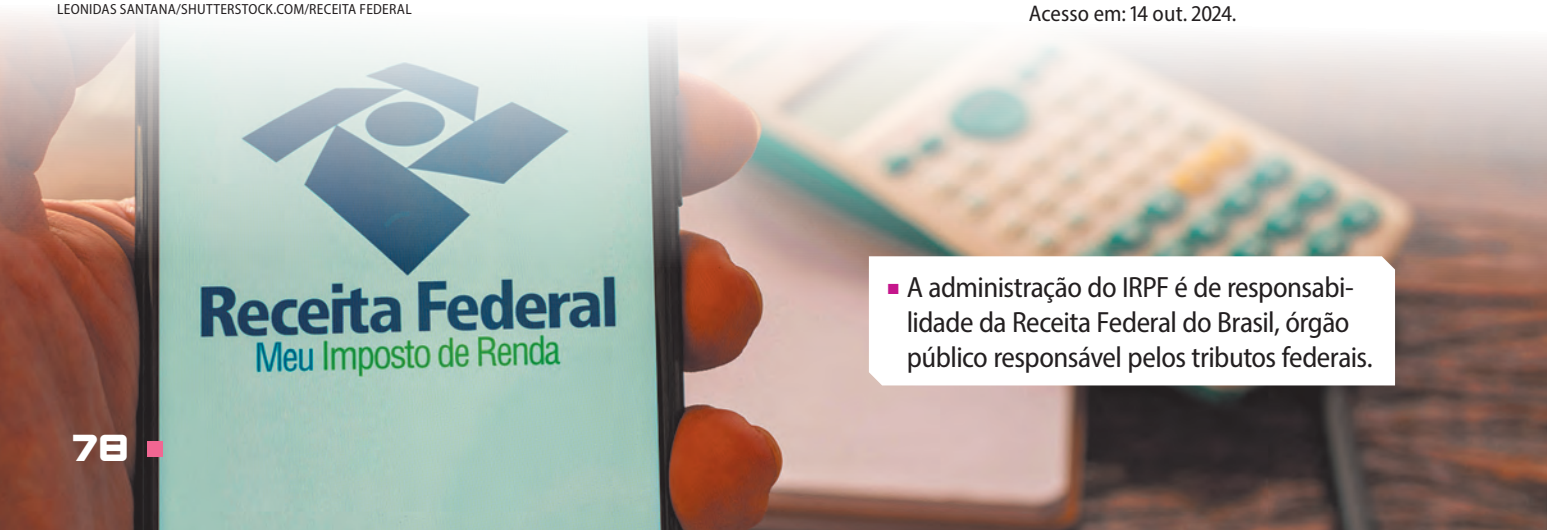
Observe a tabela de incidência mensal do IRPF vigente a partir de fevereiro de 2024.

Tabela de incidência mensal do IRPF vigente em 2024

Base de cálculo (R$)	Alíquota (%)	Parcela a deduzir do IRPF (R$)
Até 2.259,20	–	–
De 2.259,21 até 2.826,65	7,5	169,44
De 2.826,66 até 3.751,05	15	381,44
De 3.751,06 até 4.664,68	22,5	662,77
Acima de 4.664,68	27,5	896,00

Fonte: BRASIL. Ministério da Fazenda. Receita Federal. **Tributação de 2024**. Brasília, DF: Receita Federal, 9 fev. 2024. Disponível em: https://www.gov.br/receitafederal/pt-br/assuntos/meu-imposto-de-renda/tabelas/2024. Acesso em: 14 out. 2024.

LEONIDAS SANTANA/SHUTTERSTOCK.COM/RECEITA FEDERAL



- A administração do IRPF é de responsabilidade da Receita Federal do Brasil, órgão público responsável pelos tributos federais.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Com base nessa tabela, podemos calcular, por exemplo, o imposto que incide sobre a renda de um trabalhador que teve como base de cálculo mensal o valor de R$ 3.350,00. Nesse caso, devemos aplicar a alíquota de 15% sobre a base de cálculo e deduzir R$ 381,44 desse valor. Observe:

$$\text{R\$ } 3.350{,}00 \cdot 15\% - \text{R\$ } 381{,}44 = \text{R\$ } 502{,}50 - \text{R\$ } 381{,}44 = \text{R\$ } 121{,}06$$

Logo, em 2024, o imposto de renda que incide sobre uma base de cálculo de R$ 3.350,00 mensais é de R$ 121,06.

Dizemos que a contribuição mensal do imposto de renda, em reais, é uma **função** da base de cálculo, também expressa em reais, pois cada valor da base de cálculo corresponde a um único valor de contribuição mensal do imposto de renda. A base de cálculo é a **variável independente**, e a contribuição mensal do imposto de renda é a **variável dependente**.

Com base na tabela de incidência mensal do IRPF vigente em 2024, considerando x os valores correspondentes à base de cálculo e $f(x)$ a contribuição mensal do imposto de renda, podemos escrever uma **lei de formação** para representar essa função.

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x \leqslant 2259{,}20 \\ 0{,}075x - 169{,}44, \text{ se } 2259{,}21 \leqslant x \leqslant 2826{,}65 \\ 0{,}15x - 381{,}44, \text{ se } 2826{,}66 \leqslant x \leqslant 3751{,}05 \\ 0{,}225x - 662{,}77, \text{ se } 3751{,}06 \leqslant x \leqslant 4664{,}68 \\ 0{,}275x - 896{,}00, \text{ se } x > 4664{,}68 \end{cases}$$

Funções como a que modela a contribuição mensal do imposto de renda de acordo com a base de cálculo são denominadas **funções definidas por mais de uma sentença**.

Observe outros exemplos de leis de formação de funções definidas por mais de uma sentença:

a) $f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \leqslant 5 \\ x + 1, \text{ se } x > 5 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} 2x + 6, \text{ se } x \leqslant -1 \\ x^2, \text{ se } -1 < x < 1 \\ 3, \text{ se } x \geqslant 1 \end{cases}$

Pense e responda

Que sentença corresponde a quem é isento de pagar a contribuição mensal de imposto de renda? $f(x) = 0$, se $x \leqslant 2259{,}20$

Se necessário, auxiliar os estudantes a escrever a sentença solicitada nesse questionamento e registrar as demais sentenças, considerando cada faixa de renda apresentada na tabela.

Para assistir

- HISTÓRIA do imposto de renda. [*S. l.*: *s. n.*], 2016. 1 vídeo (6 min). Publicado pelo canal Receita Federal. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=iT6R1atkifk&feature=emb_title. Acesso em: 17 set. 2024.

  O vídeo conta a história do imposto de renda no mundo e no Brasil.

BNETTO/SHUTTERSTOCK.COM/CASA DA MOEDA DO BRASIL/MINISTÉRIO DA FAZENDA

■ Cédulas e moedas do real.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

» Gráfico de uma função definida por mais de uma sentença

A construção do gráfico de uma função definida por mais de uma sentença deve ser feita por partes considerando a lei de formação que determina cada uma das partes da função.

Por exemplo, vamos construir o gráfico da função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por:

$$g(x) = \begin{cases} x + 3, \text{ se } x \leq 2 \\ 4, \text{ se } 2 < x \leq 5 \\ -2x + 16, \text{ se } x > 5 \end{cases}$$

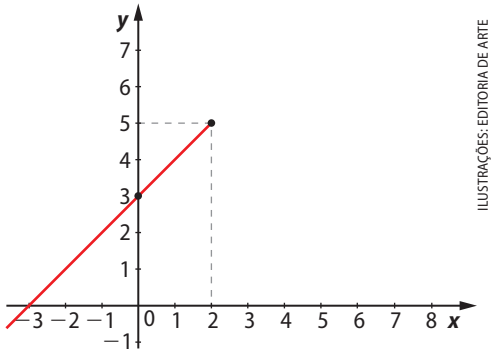
Para isso, será necessário construir separadamente o gráfico correspondente a cada sentença da função, atentando-se ao intervalo de x determinado em cada uma das sentenças. Em seguida, deve-se reunir essas representações no mesmo plano cartesiano.

I. Considerando $g_1(x) = x + 3$, se $x \leq 2$.

O gráfico correspondente é parte do gráfico da função afim definida por $y = x + 3$, em que $x \in]-\infty, 2]$. Nesse caso, escolhemos dois valores de $x \in]-\infty, 2]$, determinamos dois pontos pertencentes à reta e, em seguida, consideramos a parte da reta em que $x \leq 2$.

Vale observar que, na escolha dos dois valores de $x \in]-\infty, 2]$, é conveniente escolher valores extremos do intervalo. Assim, $x = 2$ será um dos valores escolhidos, pois é um extremo do intervalo.

x	$y = x + 3$	(x, y)
0	$y = 0 + 3 = 3$	(0, 3)
2	$y = 2 + 3 = 5$	(2, 5)



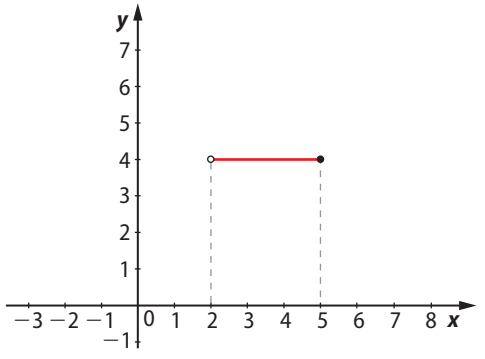
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

II. Considerando $g_2(x) = 4$, se $2 < x \leq 5$.

O gráfico correspondente é parte do gráfico da função constante definida por $y = 4$, em que $x \in]2, 5]$. O gráfico da função constante é uma reta paralela ao eixo das abscissas. Para determinar dois pontos do gráfico, vamos escolher $x = 2$ e $x = 5$, pois são os extremos do intervalo $]2, 5]$.

x	$y = 4$	(x, y)
2	$y = 4$	(2, 4)
5	$y = 4$	(5, 4)

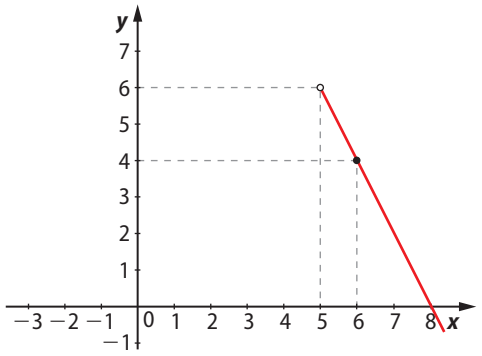
Assim, o gráfico de g_2 é um segmento de reta limitado pelos pontos (2, 4) e (5, 4). Note que o ponto (2, 4) não pertence ao segmento, pois $x = 2$ é um extremo do intervalo $]2, 5]$, mas não está contido nele. Dessa forma, representamos esse ponto por uma bolinha aberta.



III. Considerando $g_3(x) = -2x + 16$, se $x > 5$.

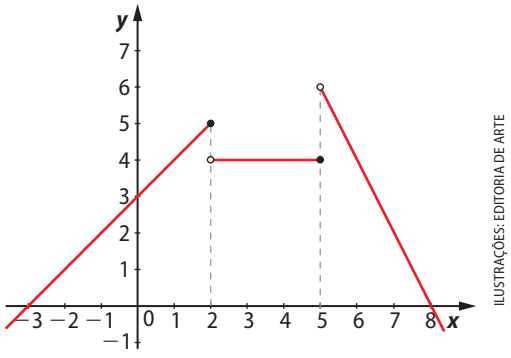
O gráfico correspondente é parte do gráfico da função afim definida por $y = -2x + 16$, em que $x \in]5, +\infty[$. Vamos escolher $x = 5$ e $x = 6$ para determinarmos dois pontos pertencentes à reta e, em seguida, consideramos a parte da reta tal que $x > 5$.

x	$y = -2x + 16$	(x, y)
5	$y = -2 \cdot 5 + 16 = 6$	(5, 6)
6	$y = -2 \cdot 6 + 16 = 4$	(6, 4)



O ponto (5, 6) não pertence ao gráfico da função g_3, pois $x = 5$ não pertence ao seu domínio. Assim, indicamos o ponto por uma bolinha aberta.

Para representar o gráfico da função g, é necessário reunir, em um mesmo plano cartesiano, as representações obtidas anteriormente.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Na prática, podemos fazer esboços referentes a cada sentença da função com fio tracejado e depois traçar o gráfico final. Observe que um valor de $x \in D(g)$ tem uma única imagem $y = g(x)$. Indicamos isso no gráfico utilizando bolinha aberta e bolinha fechada.

Nesse exemplo, temos $D(g) = \mathbb{R}$, $CD(g) = \mathbb{R}$ e $Im(g) =]-\infty, 6[$.

A respeito dos intervalos de crescimento e de decrescimento de g, temos:

- dados quaisquer $x_1, x_2 \in]-\infty, 2]$, tais que $x_1 < x_2$, tem-se $g(x_1) < g(x_2)$, ou seja, nesse intervalo, à medida que os valores de x aumentam, os valores de $g(x)$ também aumentam. Portanto, a função g é **crescente** no intervalo $]-\infty, 2]$.
- dados quaisquer $x_1, x_2 \in]5, +\infty[$, tais que $x_1 < x_2$, tem-se $g(x_1) > g(x_2)$, ou seja, nesse intervalo, à medida que os valores de x aumentam, os valores de $g(x)$ diminuem. Portanto, a função g é **decrescente** no intervalo $]5, +\infty[$.

Observe que, dados quaisquer $x_1, x_2 \in]2, 5]$, tem-se $g(x_1) = g(x_2)$, portanto, a função g é constante nesse intervalo.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

ATIVIDADES RESOLVIDAS

1. Considerando a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x < 0 \\ x - 2, \text{ se } x \geqslant 0 \end{cases}$, determine:

a) $f(0)$

b) $f(-2)$

c) $f(\sqrt{5}) + f(-\sqrt{5})$

Resolução

a) Se $x = 0$, f é definida por $f(x) = x - 2$.
Assim, temos: $f(0) = 0 - 2 = -2$
Portanto, $f(0) = -2$.

b) Se $x = -2$, f é definida por $f(x) = 1$.
Assim, temos: $f(-2) = 1$
Portanto, $f(-2) = 1$.

c) Se $x = \sqrt{5}$, f é definida por $f(x) = x - 2$.
Assim, temos: $f(\sqrt{5}) = \sqrt{5} - 2$
Se $x = -\sqrt{5}$, f é definida por $f(x) = 1$.
Assim, temos: $f(-\sqrt{5}) = 1$
Portanto, $f(\sqrt{5}) + f(-\sqrt{5}) = \sqrt{5} - 2 + 1 = \sqrt{5} - 1$.

2. Construa o gráfico da função dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1, \text{ se } x \leqslant 0 \\ \frac{x}{3} + 1, \text{ se } x > 0 \end{cases}$$

e determine o domínio da função D(f), o conjunto imagem Im(f) e o intervalo de crescimento e de decrescimento de f.

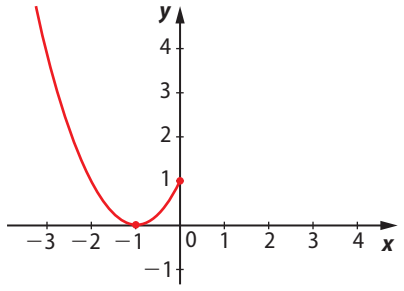
Resolução

Essa função é definida por duas sentenças.
Considerando $x \leqslant 0$, a lei da função é $f(x) = x^2 + 2x + 1$, que é uma restrição de uma função polinomial do 2º grau. Nesse caso, teremos a parte de uma parábola para os valores de x tais que $x \leqslant 0$.
Essa parábola intersecta o eixo y no ponto de coordenadas (0, 1).
As coordenadas do vértice podem ser obtidas por $x_V = -\frac{b}{2a}$ e $y_V = -\frac{\Delta}{4a}$.

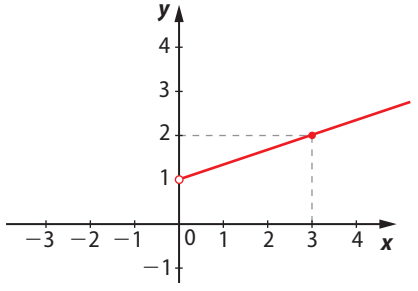
- $x_V = -\frac{2}{2 \cdot 1} = -1$
- $y_V = -\frac{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}{4 \cdot 1} = 0$

Logo, o vértice dessa parábola tem coordenadas (−1, 0). Observe que −1 é também zero dessa função.

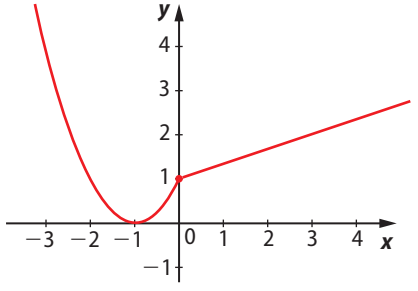
Nesse caso, considerando $x \leqslant 0$, temos a seguinte representação gráfica.



Considerando $x > 0$, a lei da função é $f(x) = \frac{x}{3} + 1$, que é uma restrição de uma função afim. Nesse caso, teremos a parte de uma reta que passa pelos pontos (0, 1) e (3, 2).
Assim, considerando $x > 0$, temos a seguinte representação gráfica.



Reunindo em um mesmo plano cartesiano as duas representações anteriores, obtemos o gráfico da função f.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Desse modo, temos: D(f) = $\mathbb{R}$, Im(f) = [0, +∞[
Sobre os intervalos de crescimento e de decrescimento de f, temos:

- considerando $x \geqslant -1$, à medida que os valores de x aumentam, os valores de $f(x)$ também aumentam, portanto, f é **crescente** no intervalo [−1, +∞[.
- considerando $x \leqslant -1$, à medida que os valores de x aumentam, os valores de $f(x)$ diminuem, portanto, f é **decrescente** no intervalo]−∞, −1].

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. Uma loja de artigos automotivos, com o intuito de incentivar as vendas de alarmes, propôs aos vendedores que também instalam alarmes que, além da remuneração mensal fixa de R$ 1.200,00, eles receberiam uma comissão sobre o valor de cada unidade vendida e instalada naquele mês.
Essa comissão corresponde a uma porcentagem do valor do alarme, que custa R$ 120,00, e varia de acordo com o quadro a seguir.

Unidades vendidas e instaladas	Porcentagem
1 a 25	3%
26 a 50	7%
51 a 75	12%
76 a 100	17%
Mais de 100	22%

a) De que tipo é a função que modela a situação apresentada? Função definida por mais de uma sentença.

b) Determine a lei de uma função que modela o salário desses funcionários, em reais, de acordo com a quantidade x de alarmes vendidos no mês.

c) Qual é o salário de um funcionário que vendeu e instalou 82 alarmes no mês? R$ 2.872,80

d) Quantos alarmes vendeu e instalou um funcionário que recebeu R$ 1.502,40 de salário no mês? 36 alarmes

BG-STUDIO/SHUTTERSTOCK.COM

■ Acionamento de alarme cujo mecanismo fica acoplado à trava elétrica.

1. b) Ver as **Orientações para o professor**.

2. Dadas as funções definidas por

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 1, \text{ se } x \leqslant 3 \\ x^2 + 2, \text{ se } x > 3 \end{cases} \text{ e}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 3, \text{ se } x < 1 \\ -x, \text{ se } x \geqslant 1 \end{cases},$$

calcule:

a) $f(3) - g(5)$ 16

b) $g(0) + 2 \cdot f(-1)$ −7

c) $\dfrac{f(4)}{g(1)}$ −18

3. Considere $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 4, \text{ se } x < 0 \\ x - 2, \text{ se } x \geqslant 0 \end{cases}.$$

Determine os possíveis valores de x para:

a) $f(x) = 0$ $-\frac{4}{3}$ ou 2

b) $f(x) = -2$ −2 ou 0

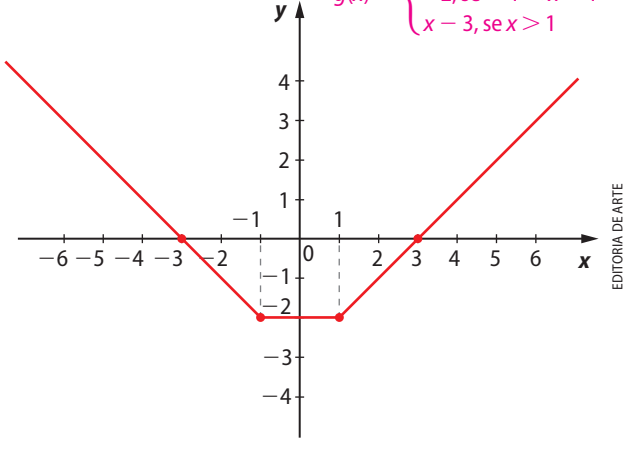
4. Construa o gráfico e determine o intervalo de crescimento e de decrescimento de cada função definida a seguir. Ver as **Orientações para o professor**.

a) $f(x) = \begin{cases} -x + 2, \text{ se } x \leqslant 1 \\ -x^2 + 2x, \text{ se } x > 1 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} x^2 + 6x + 8, \text{ se } x \leqslant -2 \\ -2x + 3, \text{ se } x > -2 \end{cases}$

5. Observe o gráfico de uma função g representado a seguir.

$$g(x) = \begin{cases} -x - 3, \text{se } x \leqslant -1 \\ -2, \text{se } -1 < x \leqslant 1 \\ x - 3, \text{se } x > 1 \end{cases}$$



EDITORIA DE ARTE

Com base nesse gráfico, determine a lei de formação da função g.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

6. Em alguns municípios brasileiros, a população tem a possibilidade de utilizar gás natural encanado em sua residência. Esse serviço é oferecido por companhias de distribuição, e uma de suas vantagens é o fornecimento contínuo do combustível.

ELENA ELISSEEVA/SHUTTERSTOCK.COM

- Distribuição de gás natural. Esse combustível pode ser utilizado em aquecedores e fogões, desde que observadas as especificações técnicas desses equipamentos.

Uma concessionária estabelece o valor a ser pago pelo consumo de gás considerando um valor, fixado por faixa de consumo, adicionado a um valor variável que depende da quantidade consumida, em metro cúbico. Observe, a seguir, os valores aproximados das cinco primeiras faixas de consumo praticados por essa concessionária. Nesses valores, já estão considerados PIS/Cofins, mas não está considerado o ICMS.

Tarifas de gás canalizado: segmento residencial

Consumo (m^3)	Valor fixado (R$ por mês)	Valor variável (R$ por m^3)
0 a 1	9,68	2,79
1,01 a 3	12,64	9,20
3,01 a 7	12,64	4,80
7,01 a 14	14,23	7,96
14,01 a 34	15,81	9,46

Fonte dos dados: SÃO PAULO (Estado). Agência Reguladora de Serviços Públicos do Estado de São Paulo. **Deliberação Arsesp nº 1.504, de 06 de março de 2024**. Dispõe sobre a atualização das Tabelas Tarifárias e sobre a Tarifa de Uso do Sistema de Distribuição (TUSD) a serem aplicadas no mercado livre pela concessionária de distribuição de gás canalizado Companhia de Gás de São Paulo – Comgás. São Paulo: Arsesp, 2024. Disponível em: https://www.comgas.com.br/media/q3bjeaqg/ldl15042024.pdf. Acesso em: 26 ago. 2024.

Assim, por exemplo, se, em uma residência, o consumo foi de 6,5 m^3, acompanhe os cálculos do valor que essa concessionária vai cobrar:

- o valor fixado (R$ por mês): R$ 12,64 (corresponde à 3ª faixa de consumo);
- 1 m^3 tarifado na 1ª faixa de consumo: $1 \cdot 2{,}79 = 2{,}79$, ou seja, R$ 2,79;
- 2 m^3 tarifados na 2ª faixa de consumo: $2 \cdot 9{,}20 = 18{,}40$, ou seja, R$ 18,40;
- 3,5 m^3 tarifados na 3ª faixa de consumo: $3{,}5 \cdot 4{,}80 = 16{,}80$, ou seja, R$ 16,80.

Adicionando esses valores, obtemos R$ 50,63, que é o valor a ser pago por 6,5 m^3 de gás natural a essa concessionária, sem considerar o ICMS. Ver as **Orientações para o professor**.

Reúna-se a dois colegas e, com base nessas informações, façam o que se pede a seguir.

a) Vocês já conheciam como é cobrado o gás natural consumido em residências?

b) Pesquisem o significado das siglas PIS, Cofins e ICMS e procurem saber mais sobre esses tributos.

c) Com base nessa tabela e considerando x o consumo, em metro cúbico, e $f(x)$ o valor correspondente a ser pago, em reais, escrevam uma lei de formação que possa ser utilizada para modelar essa situação.

d) Considerando a lei de formação utilizada para modelar o valor pago à concessionária de gás residencial, elaborem uma situação em que se deve calcular o valor pago em um determinado mês por uma residência que consome o gás distribuído por essa concessionária. Em seguida, troquem a questão com outro grupo, para que ele resolva o problema elaborado por vocês. Verifiquem se a maneira como os colegas resolveram a questão é parecida ou igual à de vocês. Conversem sobre as formas de resolução e as dificuldades. Resposta pessoal.

Os valores reais foram aproximados considerando-se duas casas decimais para facilitar os cálculos.

FÓRUM

A desigualdade no acesso a serviços de infraestrutura básica nos municípios brasileiros

A infraestrutura de um país se refere aos elementos que dão suporte e sustentação à vida da sua população. Esses elementos podem ser organizados em 4 categorias básicas:

• Energia • Transporte • Abastecimento de água • Saneamento básico

Tanto quanto os impostos cobrados pelo governo, a infraestrutura do Brasil tem relação direta com a qualidade de vida da população e, consequentemente, com a capacidade de desenvolvimento da economia. A água corrente nas casas da maioria das famílias brasileiras, o sistema de esgoto que recebe as águas sujas para serem tratadas, as estradas que permitem que caminhões levem alimentos até os mercados e até o sistema elétrico que permite que as famílias tenham luz em casa à noite, tudo isso é relacionado à infraestrutura de uma nação.

[...]

CENTRO DE LIDERANÇA PÚBLICA. **Projeto Brasil**: 2 dados que traduzem a triste realidade da infraestrutura do Brasil. [*S. l.*]: CLP, [2018]. Disponível em: https://clp.org.br/projeto-brasil-2-dados-que-traduzem-a-triste-realidade-da-infraestrutura-do-brasil/. Acesso em: 25 set. 2024.

Ainda cerca de 33 milhões de brasileiros vivem sem acesso à água potável e mais de 90 milhões não têm coleta de esgoto

[...] Segundo dados do Sistema Nacional de Informações sobre Saneamento (SNIS) de 2022, atualmente são investidos R$ 22,5 bilhões em serviços básicos. Esse valor é insuficiente para cumprir as metas do Novo Marco Legal do Saneamento até 2033, conforme analisa o estudo do Instituto Trata Brasil.

A lei, conhecida como o Novo Marco Legal do Saneamento Básico, estabelece que todas as localidades brasileiras devem atender a 99% da população com abastecimento de água e 90% com esgotamento sanitário até 2033.

[...]

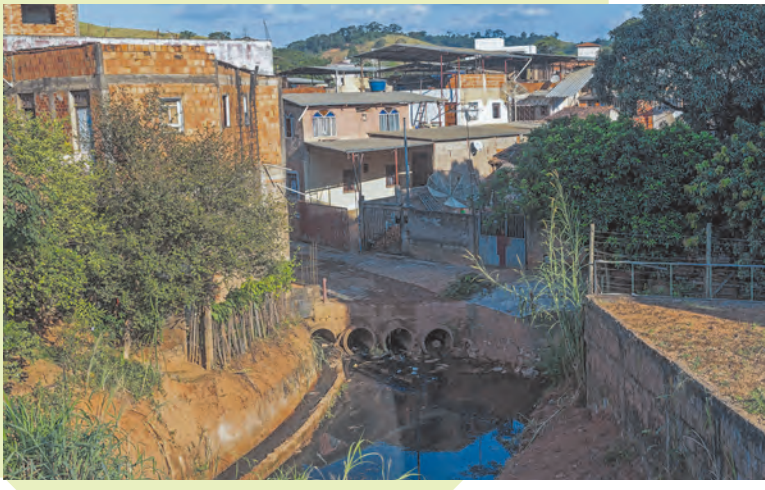
INSTITUTO TRATA BRASIL. **Investimento para universalização do saneamento**: o que ainda falta? [*S. l.*]: ITB, 13 ago. 2024. Disponível em: https://tratabrasil.org.br/investimento-para-universalizacao-do-saneamento-o-que-ainda-falta/. Acesso em: 9 out. 2024.

Ver as **Orientações para o professor**.

Após ler os textos, faça o que se pede.

- Reúna-se a alguns colegas e citem serviços de infraestrutura básica que vocês observam no município ou no bairro em que moram. Depois, discutam como vocês analisam a desigualdade no oferecimento de serviços de infraestrutura básica entre os municípios brasileiros.

ADRIANO KIRIHARA/PULSAR IMAGENS



▪ Esgoto sendo lançado em córrego canalizado no município de Rio Casca (MG). Fotografia de 2024.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Consumo consciente de água

A água é um recurso natural indispensável à vida. Ela é utilizada na agricultura, na higiene pessoal, na limpeza de ambientes, na geração de energia elétrica, entre outras funções. O uso irresponsável desse recurso tanto na agricultura como nas residências e nas indústrias causa problemas que ameaçam o fornecimento de água para a população.

Acompanhe, a seguir, mais informações sobre a distribuição e o consumo de água.

SEWCREAMSTUDIO/SHUTTERSTOCK.COM

O uso consciente da água é responsabilidade de todos.

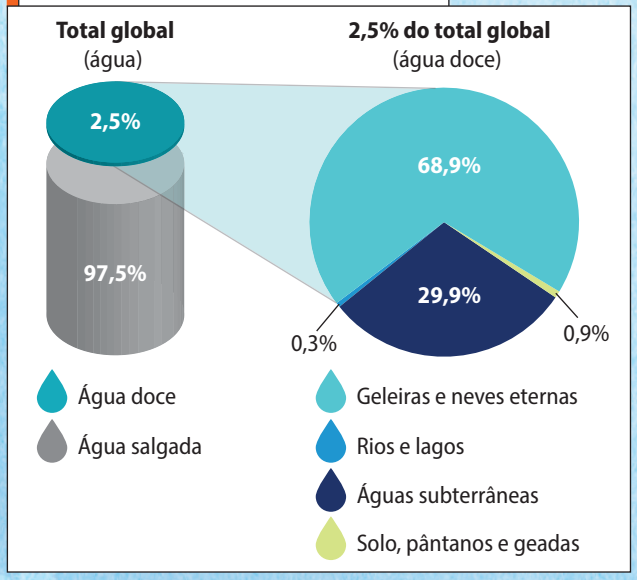
[...]

A água doce não está distribuída uniformemente pelo globo. Sua distribuição depende essencialmente dos ecossistemas que compõem o território de cada país. Segundo o Programa Hidrológico Internacional da Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura (Unesco), na América do Sul encontra-se 26% do total de água doce disponível no planeta e apenas 6% da população mundial, enquanto o continente asiático possui 36% do total de água e abriga 60% da população mundial.

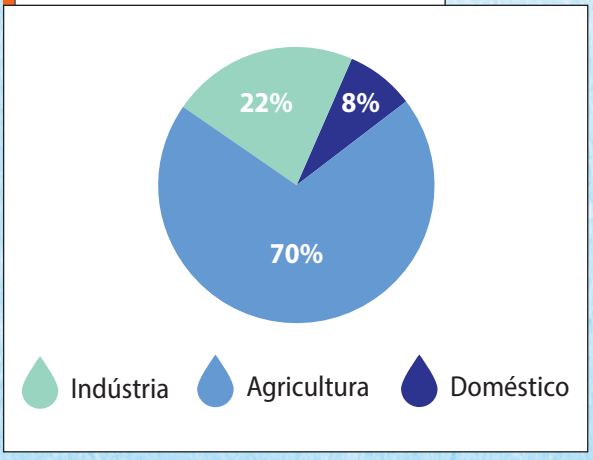
[...]

BRASIL. Ministério da Educação. Ministério do Meio Ambiente. **Consumo sustentável**: manual de educação. Brasília, DF: Consumers International: MMA: MEC: IDEC, 2005. p. 27. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/dmdocuments/publicacao8.pdf. Acesso em: 26 ago. 2024.

Distribuição de água no mundo



Consumo de água no mundo



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Fonte dos dados: BRASIL. Ministério da Educação. Ministério do Meio Ambiente. **Consumo sustentável**: manual de educação. Brasília, DF: Consumers International: MMA: MEC: IDEC, 2005. p. 27-28. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/dmdocuments/publicacao8.pdf. Acesso em: 26 ago. 2024.

KANOKPOLTOKUMHNERD/SHUTTERSTOCK.COM; CGTERMINAL/SHUTTERSTOCK.COM

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Observe, a seguir, algumas informações divulgadas pelo IBGE referentes ao consumo de água no Brasil.

Estudo divulgado pelo Instituto Brasileiro de Geografia [e Estatística] (IBGE) apontou o aumento do gasto de água no Brasil. Em 2020, o consumo médio diário de água por habitante foi de 117,5 litros, um aumento de 2% em relação a 2019. Os dados compõem as "Contas Econômicas Ambientais da Água" (2018-2020).

[...]

ASSOCIAÇÃO MINEIRA DE DEFESA DO AMBIENTE. **Consumo e valor da água crescem no Brasil, aponta IBGE**. Belo Horizonte: Amda, 1 set. 2023. Disponível em: https://amda.org.br/noticias/6891-consumo-e-valor-da-agua-no-brasil-crescem-em-2020-aponta-ibge/. Acesso em: 26 ago. 2024.

PEOPLEIMAGES.COM - YURI A/SHUTTERSTOCK.COM

- Fechar a torneira enquanto escovamos os dentes é um modo de economizar água.

São apresentadas, a seguir, dicas para reduzir o consumo de água em algumas situações no dia a dia.

[...]

Banho de ducha por 15 minutos, com o registro meio aberto, consome 135 litros de água. Se você fechar o registro ao se ensaboar e reduzir o tempo do banho para 5 minutos, seu consumo cai para 45 litros. [...]

[...]

Se uma pessoa escova os dentes em 5 minutos com a torneira não muito aberta, gasta 12 litros de água. No entanto, se molhar a escova e fechar a torneira enquanto escova os dentes e, ainda, enxaguar a boca com um copo de água, consegue economizar mais de 11,5 litros de água.

[...]

Ao lavar o rosto em 1 minuto, com a torneira meio aberta, uma pessoa gasta 2,5 litros de água. A dica é não demorar.

PEOPLEIMAGES.COM – YURI A/SHUTTERSTOCK.COM

- Ao lavar o rosto, devemos ficar atentos para não abrir demais a torneira.

O mesmo vale para o barbear: em 5 minutos gastam-se 12 litros de água. Com economia, o consumo cai para 2 a 3 litros. [...]

Um vaso sanitário com válvula e tempo de acionamento de 6 segundos gasta cerca de 12 litros. Quando a válvula está defeituosa, pode chegar a gastar até 30 litros.

[...]

COMPANHIA DE SANEAMENTO BÁSICO DO ESTADO DE SÃO PAULO. **Dicas da Sabesp ensinam como economizar água**. São Paulo: Sabesp, 2012. Disponível em: https://www.saopaulo.sp.gov.br/spnoticias/ultimas-noticias/dicas-da-sabesp-ensinam-como-economizar-agua/. Acesso em: 12 out. 2024.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

No município onde você mora, há cobrança mensal de consumo de água? Você compreende os dados apresentados na conta de água?

Observe, a seguir, parte de um modelo de uma conta de água e algumas informações destacadas.

Data de emissão: Indica dia, mês e ano em que a fatura foi emitida.

BENTINHO

Conta Mensal de Serviços de Água e/ ou Esgotos

SABESP
companhia de saneamento básico do estado de são paulo

Fornecimento	No. Documento	Fatura tipo	DATA EMISSÃO
0000000000000	AAA0123456789	FATURAMENTO	08/10/2024

Tipo de Fornecimento: RESIDENCIAL — Folha 1/1

MARIA DA SILVA
End.: Rua das Flores 1 - CAMPO VERDE - SÃO PAULO -SP 00300000

Cod. Cliente: 000000000 **Hidrômetro:** X11X000000

Economias: RES 1 **Tipo de ligação:** ÁGUA E ESGOTO
Data de apresentação: 07/10/2024 **Próxima leitura:** 07/11/2024
Condição de leitura: LEITURA NORMAL

	Leitura Anterior	Leitura Atual	Consumo (m³)	Período	Média (m³)
Água	06/09/2024 - 1089	07/10/2024 - 1101	12,0	31	9,83

Consumo: É a diferença entre a leitura atual e a anterior, ou seja, a quantidade de água consumida no período, em metro cúbico ($1\ m^3 = 1000$ litros).

Média de consumo dos 6 últimos meses.

Histórico de Consumo (Emissão - Consumo em m³)

	08/04/2024 13R	08/05/2024 11R	06/06/2024 10R	08/07/2024 6R	07/08/2024 11R	06/09/2024 9R
Água						

	Água			Esgoto		
(m³ X Nro. Econom.)	(m³)	Tarifa(R$)	Valor(R$)	(m³)	Tarifa(R$)	Valor(R$)
De 0 Até 10	Mínimo	3,79	37,96	Mínimo	3,79	37,96
De 10 Até 20	2,00	6,01	12,02	2,00	6,01	12,02

Tabela Tarifária: A tarifa da Sabesp é progressiva e varia de acordo com o volume utilizado.

Período de consumo: Quantidade de dias considerados no período de leitura; contados do dia seguinte à **Leitura Anterior** até o dia da **Leitura Atual**.

Subtotal	49,98
TOTAL (VI Água + VI Esgoto)	99,96

DISCRIMINAÇÃO DO FATURAMENTO	
Água	49,98
Esgoto	49,98

Código para débito automático: X000000

TOTAL (R$)	**99,96**
VENCIMENTO	**10/11/2024**

PAGUE SUA FATURA COM O PIX

No caso do pagamento em atraso serão cobradas Multa de 2% mais Atualização Monetária com base na variação do IPCA/IBGE do mês anterior mais Juros de Mora de 0,033% ao dia. Oferecemos datas opcionais de vencimento para sua conta 01 - 05 - 10 - 15 - 20 - 25. Havendo interesse entre em contato com a SABESP.

Valor Total: Soma dos valores dos consumos de água, esgoto e demais acréscimos.
Vencimento: Data limite para o pagamento da conta. Pagamentos efetuados fora do prazo têm acréscimo de multa, atualização monetária e juros que são cobrados na próxima conta.

AVISOS

Tome banhos mais curtos e feche a torneira enquanto escova os dentes.
Preservar a água é pensar no futuro.

Avisos aos clientes com **informações importantes**.

Fonte dos dados: COMPANHIA DE SANEAMENTO BÁSICO DO ESTADO DE SÃO PAULO. **Entenda sua conta**. 2024. 1 cartaz. Disponível em: https://www.sabesp.com.br/servicos/para-voce. Acesso em: 13 out. 2024.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Na tabela a seguir, são apresentados os valores cobrados de acordo com o consumo de água no município de São Paulo (SP), segundo a tarifa residencial comum vigente em setembro de 2024.

Tarifa residencial comum – abastecimento de água e coleta de esgoto vigente em setembro de 2024

Classe de consumo (m^3 por mês)	Tarifa de água (em R$)	Tarifa de esgoto (em R$)
0 a 10	37,96 por mês	37,96 por mês
Acima de 10 até 20	6,01 por m^3	6,01 por m^3
Acima de 20 até 50	14,98 por m^3	14,98 por m^3
Acima de 50	16,50 por m^3	16,50 por m^3

Fonte dos dados: COMPANHIA DE SANEAMENTO BÁSICO DO ESTADO DE SÃO PAULO. **Comunicado 2/24**. São Paulo: Sabesp, 2024. Disponível em: https://www.sabesp.com.br/assets/pdf/servicos/para-voce/comunicado-sabesp-2-24.pdf. Acesso em: 25 set. 2024.

Acompanhe como calcular, por exemplo, o valor pago referente a um consumo mensal de 22 m^3 de água em uma residência desse município (cada resultado é multiplicado por dois em razão da coleta de esgoto):

Incentivar os estudantes a procurar na internet tabelas de valores de outros municípios e a fazer a comparação dos valores, levantando hipóteses sobre o motivo de a tarifa de consumo de água variar de acordo com o município.

- 10 m^3 são tarifados na 1ª classe: $37{,}96 \cdot 2 = 75{,}92$;
- 10 m^3 são tarifados na 2ª classe: $(6{,}01 \cdot 10) \cdot 2 = 120{,}20$;
- 2 m^3 são tarifados na 3ª classe: $(14{,}98 \cdot 2) \cdot 2 = 59{,}92$.

Ver as **Orientações para o professor**.

Adicionando esses valores, verificamos que, na situação considerada, R$ 256,04 era o valor pago por 22 m^3 de consumo de água.

Agora, reúna-se a dois colegas, e façam o que se pede nas atividades a seguir. Ver as **Orientações para o professor**.

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. Com base na tabela desta página, considerem x o consumo de água, em metro cúbico, e $f(x)$ o valor a ser pago, em reais, pelo fornecimento de água e coleta de esgoto e escrevam uma lei de formação que relacione esses valores.
2. Caso haja cobrança mensal de água no município onde moram, pesquisem sobre essas tarifas e verifiquem se a coleta de esgoto também é tarifada, além de outros serviços públicos. Verifiquem a possibilidade de estender a pesquisa para conseguir essa informação sobre municípios vizinhos, com o objetivo de fazer uma comparação.
3. Com base nas informações apresentadas nesta seção, conversem sobre a importância da preservação da água. Pesquisem mais alternativas que podem ser adotadas para redução de consumo de água e elaborem um panfleto para divulgar essas informações na escola. Como referência para a produção do panfleto, incentivar os estudantes a assistirem ao documentário indicado no boxe **Para assistir**.

CGTERMINAL/SHUTTERSTOCK.COM

Para assistir

- DOCUMENTÁRIO: Futuro das águas: desafio do século (filme oficial completo). São Paulo: [*s. n.*], 2022. 1 vídeo (31 min). Publicado pelo canal Lavoura Santa. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=WZkEws3Ubcw. Acesso em: 27 ago. 2024.

  O documentário apresenta os desafios hídricos atuais, destacando a importância de se repensar o uso e o reúso da água. A produção conta com relatos de especialistas, que apontam diferentes soluções para um melhor uso da água.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Módulo de um número real

Em situações envolvendo distância e comprimento, os resultados verificados são números positivos. Estudaremos, agora, alguns conceitos matemáticos que nos auxiliam no trabalho com essas situações.

Acompanhe a definição matemática a seguir.

O **valor absoluto** ou **módulo** de um número real x, que indicaremos por $|x|$, é definido por:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Lê-se: módulo de x.

Saiba que...

A notação $|x|$ foi introduzida pelo matemático alemão Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897).

Observe alguns exemplos:

a) $|+5| = +5 = 5$

b) $|\sqrt{2}| = \sqrt{2}$

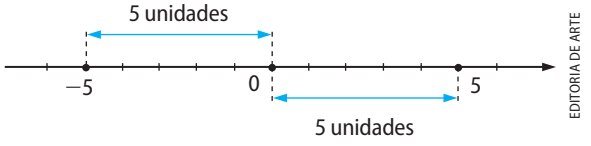
c) $|0| = 0$

d) $|-3| = -(-3) = 3$

e) $|-\sqrt{3}| = -(-\sqrt{3}) = \sqrt{3}$

f) $\left|-\frac{7}{5}\right| = -\left(-\frac{7}{5}\right) = \frac{7}{5}$

Geometricamente, o módulo de um número real x é igual à distância do ponto correspondente a esse número até a origem da reta real. Observe:



- $|-5| = 5$ (distância entre o ponto correspondente a -5 e a origem).
- $|+5| = 5$ (distância entre o ponto correspondente a $+5$ e a origem).

De modo geral, sendo $a > 0$, se $|x| = a$, então $x = a$ ou $x = -a$.

Em particular, se $|x| = 0$, então $x = 0$.

Por exemplo, para saber o valor de x tal que $|x| = 4$, basta verificar quais valores distam 4 unidades da origem. Nesse caso, são $+4$ e -4.

Logo, se $|x| = 4$, então $x = -4$ ou $x = +4$.

Além disso, para c e d reais, $|c| = |d|$ se, e somente se, $c = d$ ou $c = -d$.

Propriedades

Observe a seguir algumas propriedades envolvendo o módulo de um número real.

1ª propriedade:

Para todo x real, temos $|x| \geqslant 0$.

A demonstração é imediata da definição de módulo. Observe:

Se $x > 0$, então $|x| = x > 0$.

Se $x < 0$, então $|x| = -x$. Logo, $|x| > 0$.

Se $x = 0$, então $|x| = 0$.

Portanto, $|x| \geqslant 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

2ª propriedade:

Para todo x real, temos $|x|^2 = x^2$.

Se $x \geqslant 0$, então $|x| = x$.

Elevando ao quadrado ambos os membros dessa igualdade, temos:

$|x|^2 = x^2$

Se $x < 0$, então $|x| = -x$.

Elevando ao quadrado ambos os membros dessa igualdade, temos:

$|x|^2 = (-x)^2 = x^2$

Portanto, $|x|^2 = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

3ª propriedade:

Para quaisquer números reais x e y, temos $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

Pela propriedade anterior, temos:

$|x \cdot y|^2 = (x \cdot y)^2$

Por outro lado, pelas propriedades de potenciação, sabemos que $(x \cdot y)^2 = x^2 \cdot y^2$.

Assim, $|x \cdot y|^2 = x^2 \cdot y^2$.

Utilizando novamente a 2ª propriedade, temos:

$|x \cdot y|^2 = |x|^2 \cdot |y|^2$

Aplicando outra vez as propriedades de potenciação, temos:

$|x \cdot y|^2 = (|x| \cdot |y|)^2$

Como $|x \cdot y| \geqslant 0$ e $|x| \cdot |y| \geqslant 0$, obtemos:

$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

Portanto, $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ para quaisquer números reais x e y.

4ª propriedade:

Para quaisquer números reais x e y, com $y \neq 0$, temos $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.

Pela 2ª propriedade, temos:

$\left|\frac{x}{y}\right|^2 = \left(\frac{x}{y}\right)^2$

Por outro lado, pelas propriedades de potenciação, sabemos que $\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2}$.

Assim, $\left|\frac{x}{y}\right|^2 = \frac{x^2}{y^2}$.

Utilizando novamente a 2ª propriedade, temos:

$$\left|\frac{x}{y}\right|^2 = \frac{|x|^2}{|y|^2}$$

Aplicando outra vez as propriedades de potenciação, temos:

$$\left|\frac{x}{y}\right|^2 = \left(\frac{|x|}{|y|}\right)^2$$

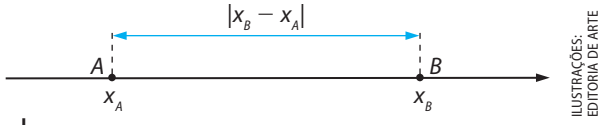
Como $\left|\frac{x}{y}\right| \geqslant 0$ e $\frac{|x|}{|y|} \geqslant 0$, obtemos:

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$$

Portanto, $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ para quaisquer números reais x e y, com $y \neq 0$.

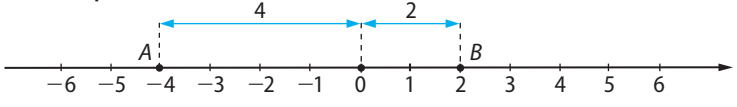
» Distância entre dois pontos na reta real

Dados dois pontos A e B na reta real, correspondentes aos números reais x_A e x_B, respectivamente, a distância entre A e B é dada por $|x_B - x_A|$.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Por exemplo:



A distância entre os pontos A e B é calculada por:

$$|2 - (-4)| = |2 + 4| = |6| = 6$$

Do mesmo modo, a distância entre os pontos B e A é calculada por:

$$|-4 - 2| = |-6| = 6$$

Saiba que...

É possível demonstrar que, na reta real, a distância entre dois pontos A e B, correspondentes aos números reais x_A e x_B, respectivamente, pode ser calculada por $|x_B - x_A|$ ou $|x_A - x_B|$.

Função modular

Aprendemos que, para cada número real x, existe um único número $|x|$ correspondente. Com base nisso, podemos determinar uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa cada número real ao seu módulo. Essa função é um caso particular de função definida por mais de uma sentença.

A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$ é denominada **função modular** ou **função módulo**.

Aplicando-se a definição de módulo de um número real, a função modular pode ser escrita como:

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

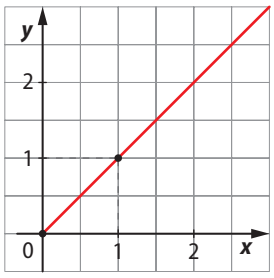
Gráfico da função modular

Para construir o gráfico da função modular, podemos traçar separadamente o gráfico de cada sentença que compõe a lei da função no sistema cartesiano e, posteriormente, reunir as representações.

Considerando a função dada por $f(x) = |x|$, temos:

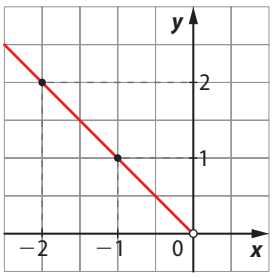
- $f(x) = x$, para $x \geqslant 0$

x	$y = f(x)$
0	0
1	1



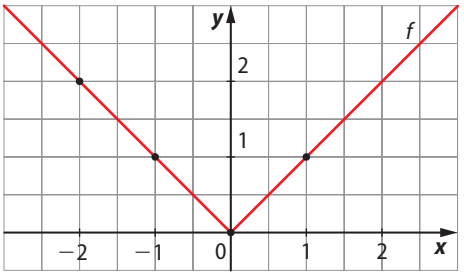
- $f(x) = -x$, para $x < 0$

x	$y = f(x)$
−1	1
−2	2



Reunindo em um mesmo sistema cartesiano as duas representações anteriores, temos o gráfico da função modular definida por $f(x) = |x|$.

Observe que o domínio dessa função é $D(f) = \mathbb{R}$ e que o conjunto imagem é $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 0\}$.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

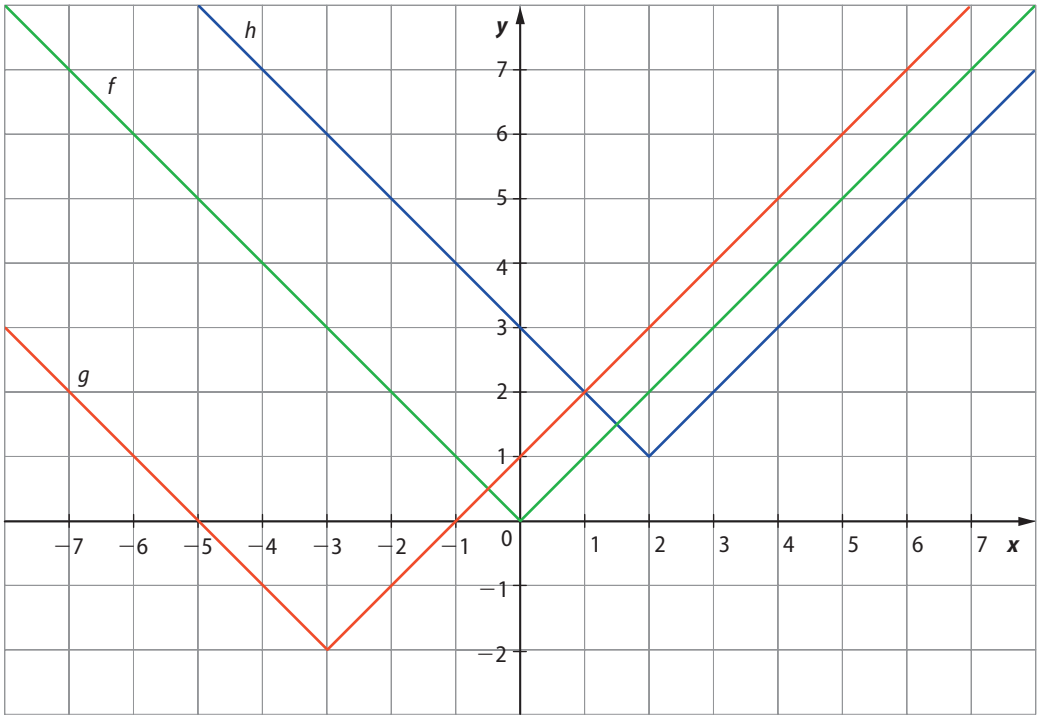
MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Outros gráficos de funções envolvendo módulo

Com base no gráfico da função dada por $f(x) = |x|$, podemos construir gráficos de outras funções que envolvem o módulo de um número real.

Observe, por exemplo, o gráfico das funções a seguir em um mesmo sistema cartesiano:

Professor, verificar a possibilidade de trabalhar o tópico **Outros gráficos de funções envolvendo módulo** utilizando o **GeoGebra**.



EDITORIA DE ARTE

$f(x) = |x|$
$g(x) = |x + 3| - 2$
$h(x) = |x - 2| + 1$

Fazendo translações do gráfico da função f, podemos obter os gráficos de g e de h. O procedimento é o seguinte:

- o gráfico da função g, dada por $g(x) = |x + 3| - 2$, é obtido após o gráfico de f sofrer uma translação horizontal de 3 unidades para a esquerda, seguida de uma translação vertical de 2 unidades para baixo;
- o gráfico da função h, dada por $h(x) = |x - 2| + 1$, é obtido após o gráfico de f sofrer uma translação horizontal de 2 unidades para a direita, seguida de uma translação vertical de 1 unidade para cima.

De modo geral, considerando uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x + a| + b$, o gráfico dessa função pode ser obtido por meio de translações do gráfico da função definida por $f(x) = |x|$. Para isso, podemos considerar os seguintes casos:

- $b > 0$: o gráfico é transladado para cima em b unidades;
- $b < 0$: o gráfico é transladado para baixo em $|b|$ unidades;
- $a > 0$: o gráfico é transladado para a esquerda em a unidades;
- $a < 0$: o gráfico é transladado para a direita em $|a|$ unidades.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Equações modulares

Toda equação que apresenta o módulo de pelo menos uma expressão que tenha incógnita é denominada **equação modular**. Por exemplo:

a) $|x + 5| = 8$ **b)** $|x^2 - 2x + 1| = x + 1$ **c)** $|x|^2 + 5|x| = 0$ **d)** $|4x - 1| = |x + 8|$

Com base na definição do módulo de um número real, considerando $a \geqslant 0$, podemos escrever a seguinte propriedade:

$$|x| = a \Leftrightarrow x = a \text{ ou } x = -a$$

Utilizamos essa propriedade na resolução de equações modulares.

Considerando o exemplo do item **a**, temos $|x + 5| = 8$.

Como $8 > 0$, para resolver essa equação, calculamos:

- $x + 5 = 8 \Rightarrow x = 3$
- $x + 5 = -8 \Rightarrow x = -13$

Assim, os números 3 e -13 são soluções da equação $|x + 5| = 8$.

ATIVIDADES RESOLVIDAS

3. Em cada caso, simplifique a expressão $|x - 1| + |x - 3|$ sabendo que x é um número real tal que:

a) $x \geqslant 3$ **b)** $1 \leqslant x < 3$ **c)** $x < 1$

Resolução

Pela definição de módulo, temos:

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1, \text{ se } x - 1 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 1 \\ -x + 1, \text{ se } x - 1 < 0 \Rightarrow x < 1 \end{cases}$$

$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3, \text{ se } x - 3 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 3 \\ -x + 3, \text{ se } x - 3 < 0 \Rightarrow x < 3 \end{cases}$$

a) Para $x \geqslant 3$, temos:
$|x - 1| + |x - 3| = x - 1 + x - 3 = 2x - 4$

b) Para $1 \leqslant x < 3$, temos:
$|x - 1| + |x - 3| = x - 1 - x + 3 = 2$

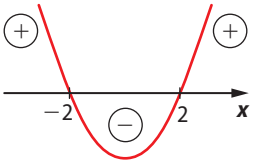
c) Para $x < 1$, temos:
$|x - 1| + |x - 3| = -x + 1 - x + 3 =$
$= -2x + 4$

4. Construa o gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x^2 - 4|$ e determine o conjunto imagem.

Resolução

Podemos reescrever a lei da função f como uma função definida por mais de uma sentença. Para isso, vamos estudar o sinal de $y = x^2 - 4$ para definir os intervalos de x para cada sentença da lei de f. Nesse caso, temos:

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$



$x^2 - 4 \geqslant 0$, para $x \leqslant -2$ ou $x \geqslant 2$

$x^2 - 4 < 0$, para $-2 < x < 2$

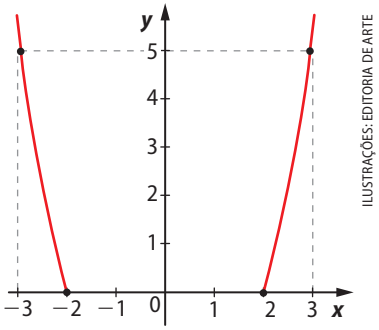
Logo, a função f é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, \text{ se } x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant 2 & \text{(I)} \\ -x^2 + 4, \text{ se } -2 < x < 2 & \text{(II)} \end{cases}$$

Vamos traçar separadamente o gráfico de cada sentença que compõe a lei da função e, posteriormente, reunir em um mesmo sistema cartesiano as representações obtidas.

(I) $f(x) = x^2 - 4$, se $x \leqslant -2$ ou $x \geqslant 2$

x	$f(x)$
−3	5
−2	0
2	0
3	5



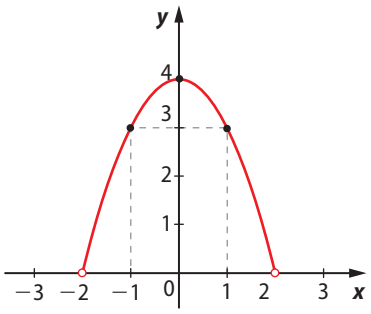
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

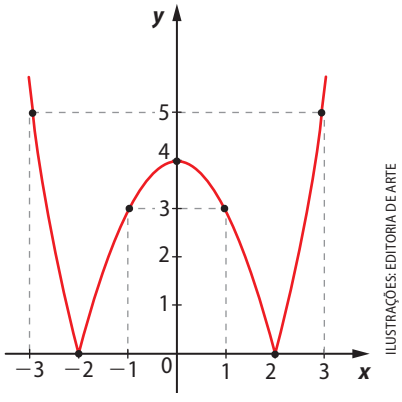
MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Ⅱ $f(x) = -x^2 + 4$, se $-2 < x < 2$

x	$f(x)$
-1	3
0	4
1	3



Reunindo em um mesmo sistema cartesiano as partes obtidas em Ⅰ e Ⅱ, temos o gráfico da função f.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

O conjunto imagem da função é dado por $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 0\}$ ou, simplesmente, $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+$. Outra maneira de traçar um gráfico que poderia ser utilizada para construir o gráfico de f seria realizar uma reflexão em relação ao eixo x da parte que representa os valores negativos da função real dada por $g(x) = x^2 - 4$, pois o módulo de um número negativo é o oposto desse número.

5. Resolva as equações a seguir no conjunto dos números reais.

a) $|x^2 - 5x| = 6$ **b)** $|x - 2| = |3 - 2x|$

Resolução

a) Como $6 > 0$, utilizamos a propriedade $|x| = a \Leftrightarrow x = a$ ou $x = -a$ na resolução da equação modular $|x^2 - 5x| = 6$.

Assim, temos:

$$|x^2 - 5x| = 6 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 5x = 6 \text{ ou } \text{Ⅰ} \\ x^2 - 5x = -6 \quad \text{Ⅱ} \end{cases}$$

De Ⅰ, temos:

$x^2 - 5x - 6 = 0$

Resolvendo essa equação do 2º grau, obtemos $x' = 6$ e $x'' = -1$.

De Ⅱ, temos:

$x^2 - 5x + 6 = 0$

Resolvendo essa equação do 2º grau, obtemos $x' = 3$ e $x'' = 2$.

Portanto, $S = \{-1, 2, 3, 6\}$.

b) Como $|3 - 2x| \geqslant 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, utilizamos a propriedade $|x| = a \Leftrightarrow x = a$ ou $x = -a$ na resolução da equação modular $|x - 2| = |3 - 2x|$.

Assim, temos:

$$|x - 2| = |3 - 2x| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 3 - 2x \text{ ou } \text{Ⅰ} \\ x - 2 = -(3 - 2x) \quad \text{Ⅱ} \end{cases}$$

De Ⅰ, temos: $x - 2 = 3 - 2x \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$

De Ⅱ, temos: $x - 2 = -3 + 2x \Rightarrow$

$\Rightarrow -x = -1 \Rightarrow x = 1$

Portanto, $S = \left\{1, \frac{5}{3}\right\}$.

6. Determine o conjunto solução da equação $|2x + 1| = x - 3$.

Resolução

Como o módulo de um número real x é sempre maior do que ou igual a 0, é necessário que $x - 3 \geqslant 0$. Logo, $x \geqslant 3$.

Supondo $x - 3 \geqslant 0$, utilizamos a propriedade $|x| = a \Leftrightarrow x = a$ ou $x = -a$ na resolução da equação modular $|2x + 1| = x - 3$.

Assim, temos:

$$|2x + 1| = x - 3 \Rightarrow \begin{cases} 2x + 1 = x - 3 \text{ ou } \text{Ⅰ} \\ 2x + 1 = -x + 3 \quad \text{Ⅱ} \end{cases}$$

De Ⅰ, obtemos: $2x + 1 = x - 3 \Rightarrow x = -4$

De Ⅱ, obtemos: $2x + 1 = -x + 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

Como $x = -4$ e $x = \frac{2}{3}$ não satisfazem a condição $x \geqslant 3$, não existe $x \in \mathbb{R}$ que seja solução da equação, ou seja, o conjunto solução é vazio.

Portanto, $S = \varnothing$.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

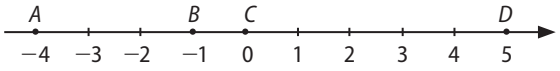
ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

7. De acordo com a definição de módulo, calcule:

a) $|3 - 5|$ 2
b) $|-3 + 5|$ 2
c) $|-3 - 5|$ 8
d) $|-1| + |-6|$ 7
e) $|-|-5||$ 5
f) $|-2| - |-10|$ −8

8. Considere os pontos A, B, C e D representados na reta real a seguir.



Calcule a distância entre os pontos indicados nos itens a seguir.

a) A e B 3 **b)** B e C 1 **c)** B e D 6 **d)** A e D 9

9. Aplicando a definição de módulo, determine o valor numérico de:

a) $2x - |x|$, para $x = -4$. −12
b) $\left|\frac{4x + 1}{5 - 2x}\right|$, para $x = -1$. $\frac{3}{7}$
c) $|x^3 + x| - |x^2 - 3x + 1|$, para $x = -2$. −1

10. Simplifique a expressão algébrica $A = |x| + |x + 2|$ para os seguintes valores de x:

a) $x < -2$ $-2x - 2$
b) $-2 \leqslant x < 0$ 2
c) $x \geqslant 0$ $2x + 2$

11. Escreva a expressão $|x + 3| + |2x - 1|$ sem os módulos, para $x > 3$. $3x + 2$

12. Qual é o conjunto de valores assumidos pela expressão $\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|}$ sendo a, b e c números reais não nulos e:

a) a, b e c positivos? 3
b) a, b e c negativos? −3

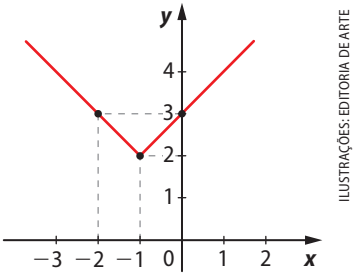
13. Considere a função definida por $f(x) = \frac{2}{|x - 3|}$ e faça o que se pede.

a) Há algum valor de $x \in \mathbb{R}$ para o qual a função não está definida? Se sim, qual é esse valor? sim, $x = 3$
b) Calcule o valor de $f\left(\frac{1}{2}\right)$. $\frac{4}{5}$

14. Construa o gráfico de cada função definida a seguir. Ver as **Orientações para o professor**.

a) $f(x) = |x - 3|$
b) $g(x) = |x - 3| + 4$
c) $h(x) = |-2x + 1|$
d) $j(x) = |-2x + 1| - 3$
e) $m(x) = |x^2 - 4| - 5$

15. Observe a seguir o gráfico da função f.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Utilizando módulo, determine a lei da função f, o domínio D(f) e o conjunto imagem Im(f).
$f(x) = |x + 1| + 2$; D(f) = $\mathbb{R}$; Im(f) = $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 2\}$

16. O preço médio de certo produto agrícola é dado em função do mês do ano em que é comercializado. Se P é o preço médio em reais e n é o número correspondente ao mês do ano, P em função de n é dado por $P(n) = 8 - |6 - n|$. Determine para qual valor de n ocorre o valor mínimo de P. $n = 12$

17. Construa o gráfico das funções definidas a seguir e determine o domínio e o conjunto imagem de cada uma. Ver as **Orientações para o professor**.

a) $f(x) = |x| + |x - 2|$
b) $g(x) = |x - 1| + |x - 3|$

18. Resolva as seguintes equações modulares:

a) $|3x + 1| = 6$
b) $\left|\frac{x - 2}{3}\right| = 1$ $S = \{-1, 5\}$
c) $|x^2 + 4x| = 12$ $S = \{-6, 2\}$

18. a) $S = \left\{-\frac{7}{3}, \frac{5}{3}\right\}$

19. (Udesc) A soma das raízes distintas da equação $x^2 - 5x + 6 = |x - 3|$ é: alternativa **e**

a) 10
b) 7
c) 0
d) 3
e) 4

20. (Epcar-MG) Considere a equação $|x| = x - 6$. Com respeito à solução real dessa equação, pode-se afirmar que a: alternativa **d**

a) solução pertence ao intervalo fechado [1, 2].
b) solução pertence ao intervalo fechado [−2, −1].
c) solução pertence ao intervalo aberto]−1, 1[.
d) equação não tem solução.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

21. (Fafeod-MG) Sejam S_1 e S_2 os conjuntos solução das seguintes equações modulares, respectivamente:

(i) $|x - 5| = 1 - 2x$

(ii) $|2x - 6| = 6 - 2x$

Assim sendo, é CORRETO afirmar, então, que o conjunto $S_1 \cap S_2$ é igual a: alternativa **d**

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$

b) $\{-4, 2\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$

d) $\{-4\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

22. Um posto de combustível está localizado em determinado ponto de uma rodovia de 350 km de comprimento. A distância de um viajante que está nessa rodovia até o posto pode ser determinada por uma função definida por $d(x) = |x - 200|$, em que $d(x)$ é a distância, em kilometro, e x indica o km da rodovia onde o viajante se encontra. De acordo com essas informações, responda:

a) Em qual km dessa rodovia está localizado o posto? No kilometro 200 da rodovia.

b) Em quais pontos da rodovia pode estar uma pessoa que se encontra a uma distância de 135 km do posto de combustível? No kilometro 65 ou no 335.

23. (ITA-SP) O produto das raízes reais da equação $|x^2 - 3x + 2| = |2x - 3|$ é igual a: alternativa **a**

a) -5

b) -1

c) 1

d) 2

e) 5

24. (Furg-RS) O produto de todas as raízes da equação $|x^2 - 8| - 4 = 0$ é: alternativa **e**

a) 4.

b) -4.

c) -8.

d) -48.

e) 48.

25. (UECE) Se $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$, então as raízes irracionais da equação $|f(x) - 6| = 8$ são:

a) $2\sqrt{2}$ e $-2\sqrt{2}$.

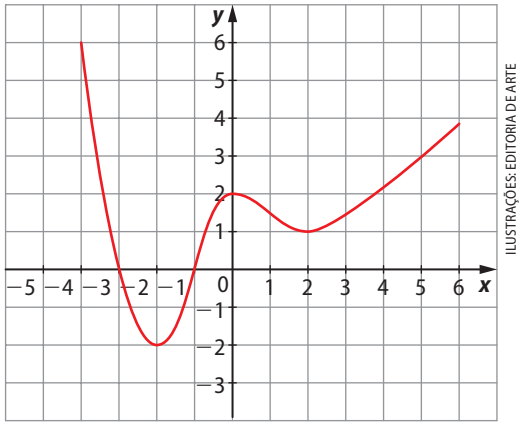
b) $3\sqrt{2}$ e $-3\sqrt{2}$.

c) $4\sqrt{2}$ e $-4\sqrt{2}$.

d) $5\sqrt{2}$ e $-5\sqrt{2}$.

alternativa **c**

26. (Insper-SP) A figura a seguir mostra o gráfico da função $f(x)$.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

O número de elementos do conjunto solução da equação $|f(x)| = 1$, resolvida em $\mathbb{R}$, é igual a: alternativa **b**

a) 6

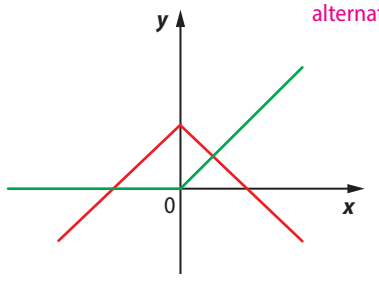
b) 5

c) 4

d) 3

e) 2

27. (Mack-SP) Observando, na figura, os esboços dos gráficos das funções $f(x) = \frac{x + |x|}{2}$ e $g(x) = -|x| + 1$, considere as afirmações: alternativa **a**



I. Não existe $x < 0$, tal que $g(x) > f(x)$.

II. As soluções de $f(x) \geqslant g(x)$ são todas positivas.

III. A soma das raízes da equação $f(x) = g(x)$ é $\frac{1}{2}$.

Então:

a) Todas são falsas.

b) Todas são verdadeiras.

c) Somente I e II são verdadeiras.

d) Somente I e III são verdadeiras.

e) Somente II e III são verdadeiras.

Funções sobrejetora, injetora e bijetora

Vamos estudar agora quando uma função é sobrejetora (ou sobrejetiva), injetora (ou injetiva) e bijetora (ou bijetiva). Com esse estudo, pretendemos facilitar a compreensão do conceito de função inversa, que será explorado mais à frente.

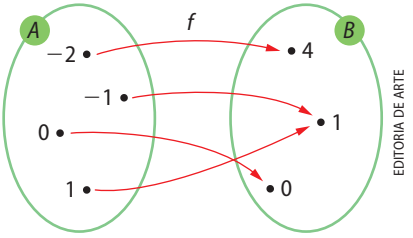
Função sobrejetora

Uma função $f: A \to B$ é **sobrejetora** (ou sobrejetiva) quando, para qualquer $y \in B$, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Em outras palavras, uma função f é sobrejetora quando todo elemento do contradomínio é imagem de pelo menos um elemento do domínio da função, ou seja, quando $\text{Im}(f) = \text{CD}(f)$.

Por exemplo:

a) Considere a função $f: A \to B$, definida por $f(x) = x^2$, representada por meio do diagrama.



EDITORIA DE ARTE

A função f **é sobrejetora**, pois todo elemento de B é imagem de pelo menos um elemento de A.

b) Considere agora a função $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $g(x) = 2x + 3$. Observe alguns valores assumidos pela função g.

$$x = 0 \Rightarrow g(0) = 2 \cdot 0 + 3 = 3$$
$$x = 1 \Rightarrow g(1) = 2 \cdot 1 + 3 = 5$$
$$x = 2 \Rightarrow g(2) = 2 \cdot 2 + 3 = 7$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

Existem números naturais que não são imagem de nenhum elemento do domínio da função g. Por exemplo, os valores 0, 1 e 2 não pertencem ao conjunto imagem de g, pois não existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $2x + 3 = 0$, $2x + 3 = 1$ ou $2x + 3 = 2$. Nesse caso, a função g **não é sobrejetora**.

Na verdade, basta que haja pelo menos um elemento do contradomínio que não seja imagem de algum elemento do domínio da função para que ela não seja sobrejetora.

Função injetora

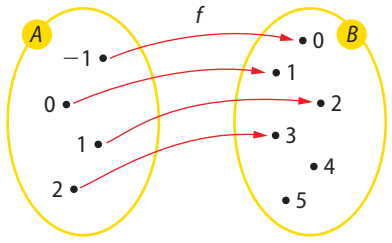
Uma função $f: A \to B$ é **injetora** (ou injetiva) quando, para quaisquer $x_1, x_2 \in A$, com $x_1 \neq x_2$, tem-se $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Em outras palavras, uma função f é injetora quando **não existe** elemento do contradomínio que seja imagem de mais de um elemento do domínio da função.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Por exemplo:

a) Considere a função $f: A \to B$, definida por $f(x) = x + 1$, representada por meio do diagrama a seguir.



A função f **é injetora**, pois elementos distintos de A são associados pela função a elementos distintos de B.

b) Considere agora a função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2 + 1$ e observe o cálculo de dois valores assumidos por essa função.

$$g(1) = 1^2 + 1 \Rightarrow g(1) = 2$$
$$g(-1) = (-1)^2 + 1 \Rightarrow g(-1) = 2$$

Note que o número 2, pertencente ao contradomínio da função, é imagem de dois elementos distintos do domínio, (1 e -1). Nesse caso, a função g **não é injetora**.

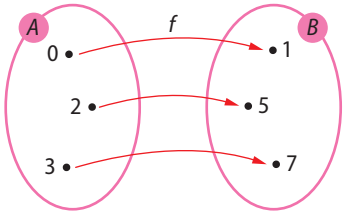
» Função bijetora

Uma função $f: A \to B$ é **bijetora** (ou bijetiva) quando é sobrejetora e injetora simultaneamente.

Quando $f: A \to B$ é uma função bijetora, dizemos que há uma **bijeção** entre A e B, ou, ainda, uma **correspondência biunívoca** entre A e B.

Por exemplo:

a) Considere a função $f: A \to B$, definida por $f(x) = 2x + 1$, representada por meio do diagrama a seguir.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Com base nessa representação, temos:

- a função f **é sobrejetora**, pois todo elemento de B é imagem de pelo menos um elemento de A;
- a função f **é injetora**, pois elementos distintos de A são associados por f a elementos distintos de B.

Portanto, a função f **é bijetora**, ou seja, temos uma **correspondência biunívoca** entre A e B.

b) Considere agora a função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2$.

- A função g **não é sobrejetora**, pois existe pelo menos um elemento no contradomínio que não é imagem de nenhum elemento do domínio da função g. Por exemplo, o número -1 (não há número real x tal que $x^2 = -1$).
- A função g **não é injetora**, pois existem elementos distintos do domínio de g que têm imagens iguais por essa função. Por exemplo: $g(-2) = g(2) = 4$

Portanto, a função g **não é bijetora**.

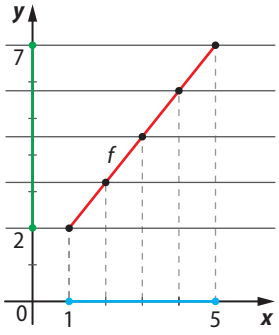
Outra maneira de reconhecer se uma função é ou não bijetora é por meio do gráfico que a representa. Para isso, traçamos retas paralelas ao eixo x, que passam por pontos de ordenadas pertencentes ao contradomínio da função, verificando se elas intersectam esse gráfico. Caso isso aconteça, observamos **quantos pontos** de intersecção existem em cada reta traçada.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Observe alguns exemplos.

a) Função $f: A \to B$, em que $A = [1, 5]$ e $B = [2, 7]$, representada no gráfico a seguir. Observe que o domínio D(f) foi destacado em azul e o contradomínio CD(f), em verde.



Nesse exemplo, qualquer que seja a reta traçada paralelamente ao eixo x, passando por pontos de ordenadas pertencentes ao contradomínio da função, intersecta o gráfico em **um único** ponto.

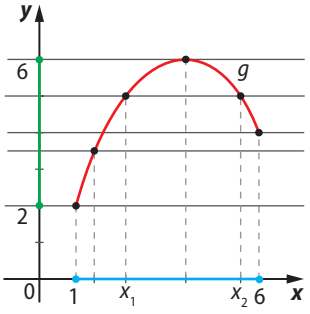
Pense e responda

Observe o gráfico da função f e explique por que essa função é injetora e sobrejetora.

Ver as **Orientações para o professor**.

Nesse caso, a função f é **bijetora**.

b) Função $g: A \to B$, em que $A = [1, 6]$ e $B = [2, 6]$, representada no gráfico a seguir. Observe que o domínio D(g) foi destacado em azul e o contradomínio CD(g), em verde.



Nesse exemplo, qualquer que seja a reta traçada paralelamente ao eixo x, passando por pontos de ordenadas pertencentes ao contradomínio da função, intersecta o gráfico. Entretanto, pelo menos uma dessas retas intersecta o gráfico em **mais de um** ponto.

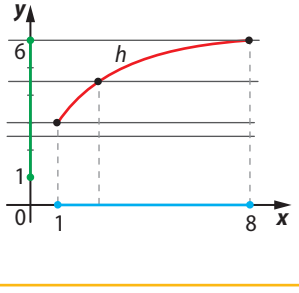
Pense e responda

Observe o gráfico da função g e explique por que essa função não é injetora.

Ver as **Orientações para o professor**.

Nesse caso, a função g é **sobrejetora**, mas não é injetora. Portanto, a função g **não é bijetora**.

c) Função $h: A \to B$, em que $A = [1, 8]$ e $B = [1, 6]$, representada no gráfico a seguir. Observe que o domínio D(h) foi destacado em azul e o contradomínio CD(h), em verde.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Nesse exemplo, existe pelo menos uma reta paralela ao eixo x, passando por um ponto de ordenada pertencente ao contradomínio da função, que **não intersecta** o gráfico.

Pense e responda

Observe o gráfico da função h e responda: essa função é injetora? Por quê?

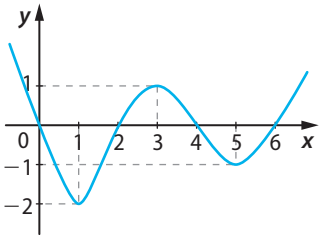
Ver as **Orientações para o professor**.

Nesse caso, a função h **não é sobrejetora**. Portanto, **não é bijetora**.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

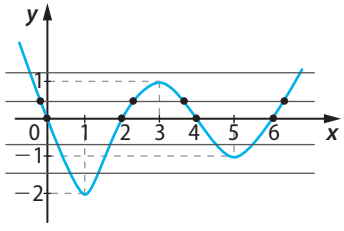
ATIVIDADES RESOLVIDAS

7. Observe o gráfico de uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e verifique se essa função é injetora.



Resolução

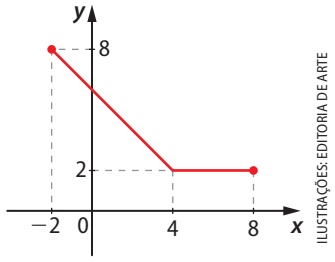
Traçando retas paralelas ao eixo x que passam por pontos de ordenadas pertencentes ao contradomínio da função, temos:



Observe que a função f não é injetora, pois há pelo menos uma reta paralela ao eixo x, passando por um ponto de ordenada pertencente ao contradomínio da função, que intersecta o gráfico de f em **mais de um** ponto.

Isso significa que, para diferentes valores de $x \in D(f)$, temos imagens iguais. Por exemplo: $f(0) = f(2) = f(4) = f(6) = 0$

8. Verifique se o gráfico da função $g: [-2, 8] \to [0, 8]$ a seguir representa uma função bijetora.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Resolução

A função g não é sobrejetora, pois há pelo menos um elemento do contradomínio de g que não é imagem de nenhum elemento do domínio de g pela função. Por exemplo, não existe $x \in D(g)$ tal que $g(x) = 1$ e $1 \in CD(g)$. Portanto, a função g não é bijetora.

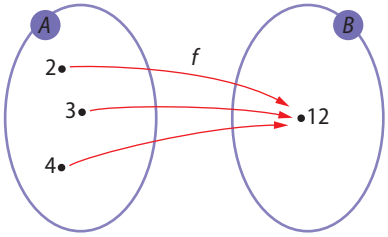
Perceba também que essa função não é injetora, pois elementos distintos do domínio, por exemplo, 4 e 8, são associados, pela função, à mesma imagem, pois $f(4) = f(8) = 2$.

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

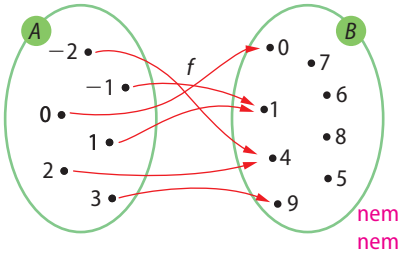
28. Verifique se a função $f: A \to B$ representada em cada diagrama a seguir é bijetora, apenas sobrejetora, apenas injetora ou nenhuma dessas classificações.

a)



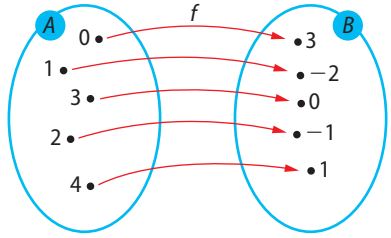
apenas sobrejetora

b)



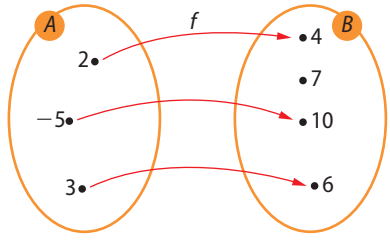
nem sobrejetora nem injetora

c)



bijetora

d)

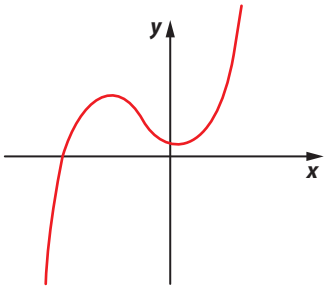


apenas injetora

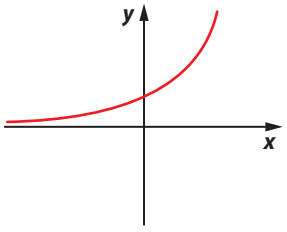
MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

29. Considerando os gráficos a seguir, indique aquele que representa uma função bijetora, sabendo que o domínio é $\mathbb{R}$ e o contradomínio é $\mathbb{R}$ também. alternativa **d**

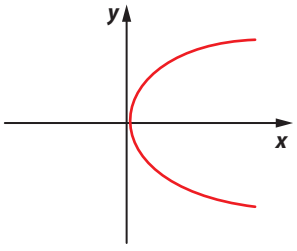
a)



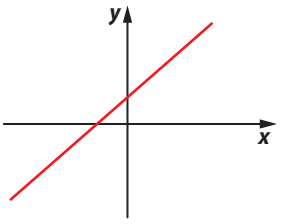
b)



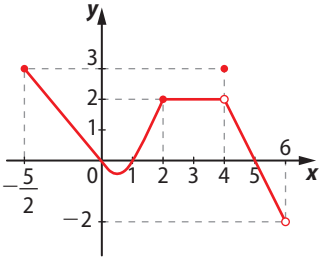
c)



d)



30. (UFMT) A figura a seguir representa o gráfico de uma função $y = f(x)$.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

A partir das informações contidas no gráfico, indique **V** para as afirmativas verdadeiras e **F** para as falsas.

- f é uma função injetora.
- O domínio de f é o intervalo $]-2; 3]$.
- $f(x) = 2$, para todo $2 \leqslant x \leqslant 4$.
- $f(x) \geqslant 0$, para $\forall\, x \in \left[-\frac{5}{2}; 0\right] \cup [1; 5]$.

A sequência correta é: alternativa **a**

a) F, F, F, V. **c)** V, F, V, V. **e)** F, V, F, F.
b) F, V, V, F. **d)** V, V, V, F.

Função composta

Acompanhe a situação a seguir.

Em uma fábrica de calçados, o lucro L obtido com a venda de cada par é função do preço V de venda de cada par para os varejistas. Essa função é expressa por $L(V) = 0{,}4 \cdot V$. Por sua vez, o preço V, referente à venda de cada par, é função do valor P, gasto com a matéria-prima necessária para produzir o par, e é expresso por $V(P) = 20 + 2P$.

Como seria possível determinar o lucro L com base no valor gasto em matéria-prima P?

Observe como podemos fazer isso utilizando uma composição entre as duas funções. Temos as seguintes leis:

$$L(V) = 0{,}4 \cdot V \ (\text{I}) \quad \text{e} \quad V(P) = 20 + 2P \ (\text{II})$$

Substituindo (II) em (I), obtemos:

$$L(P) = 0{,}4 \cdot (20 + 2P) \Rightarrow L(P) = 8 + 0{,}8P$$

Com isso, a função dada por $L(P) = 8 + 0{,}8P$ relaciona diretamente o lucro L, obtido com a venda de cada par de calçados, e o valor P, gasto com a matéria-prima necessária para produzir cada par.

VITAL HIL/SHUTTERSTOCK.COM

■ Uma das preocupações da indústria de calçados é a sustentabilidade, que preza por aspectos como a origem da matéria-prima, os resíduos da produção e a durabilidade do produto.

Nessa situação, observamos que a variável L (lucro) é função da variável V (preço de venda), que, por sua vez, é função de uma terceira variável, P (valor da matéria-prima).

Essas cadeias de dependência podem ser matematicamente modeladas pela composição de funções.

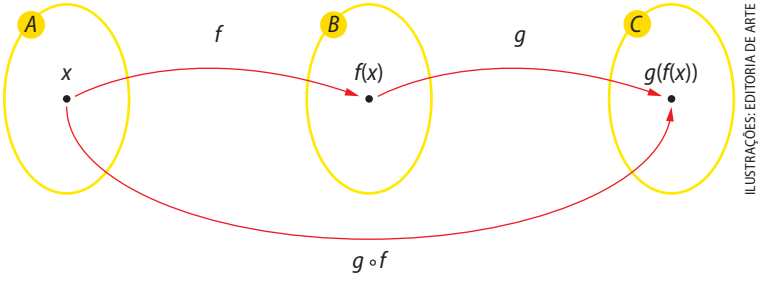
Acompanhe a definição matemática de função composta e observe o diagrama a seguir, que representa esse conceito.

Dadas as funções $f: A \to B$ e $g: B \to C$, chamamos de **função composta de *g* com *f*** a função $g \circ f: A \to C$, tal que $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ para $\forall\, x \in A$.

$(g \circ f)(x) = g(f(x)),\ \forall\, x \in A$

Lê-se: g de f de x.

Lê-se: g composta com f.



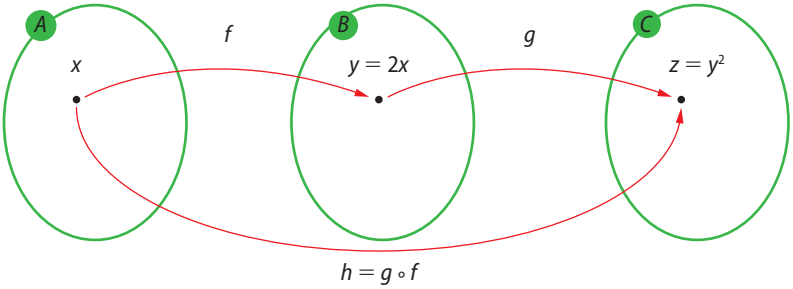
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Considere, por exemplo, as funções f e g, definidas por:

- $f: A \to B$, que, a cada $x \in A$, associa um único valor de $y \in B$, tal que $y = 2x$;
- $g: B \to C$, que, a cada $y \in B$, associa um único $z \in C$, tal que $z = y^2$.

Considere uma terceira função, $h: A \to C$, que, a cada $x \in A$, associa um único valor de $z \in C$, dada pela composição $g \circ f$. Observe como podemos usar um diagrama para representá-la.

$$z = y^2 = (2x)^2 = 4x^2$$



Saiba que...

Dadas duas funções, f e g, para que exista $g \circ f$, o domínio de g deve ser igual ao contradomínio de f, ou seja, $D(g) = CD(f)$.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Note que as leis das funções f e g podem ser expressas, respectivamente, por $f(x) = 2x$ e $g(y) = y^2$. Com isso, podemos obter a lei da função h, composta de g com f, do seguinte modo:

$$h = g \circ f = g(f(x)) = g(2x) = (2x)^2 = 4x^2$$

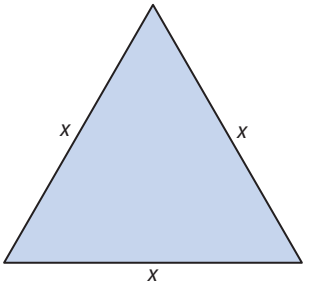
Assim, a lei da função h é expressa por $g(f(x)) = 4x^2$.

Pense e responda

Considerando as funções f e g do exemplo dado, existe a função $f \circ g$, isto é, a função composta de f com g? Justifique. Não existe a função $f \circ g$, pois $CD(g) = C$ e $D(f) = A$, logo $CD(g) \neq D(f)$.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Função inversa



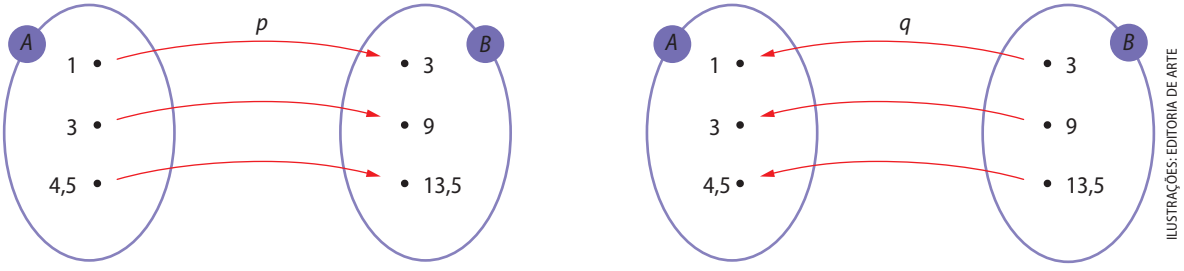
Ao considerarmos um triângulo equilátero, podemos relacionar o perímetro desse triângulo e a medida dos lados por meio de uma função.

Observe que, dado um lado x do triângulo equilátero, para obtermos o perímetro y associado a esse lado, basta calcular $3 \cdot x$. Entretanto, dado o perímetro y, para obtermos o lado x, basta calcular $\frac{y}{3}$.

Podemos representar essa situação pelas seguintes funções:

- Uma função bijetora $p: A \to B$, que associa cada lado $x \in A$ a um único perímetro $y \in B$, expressa por $y = 3x$.
- Uma função bijetora $q: B \to A$, que associa cada perímetro $y \in B$ a um único lado $x \in A$, expressa por $x = \frac{y}{3}$.

Escolhendo alguns valores numéricos, representamos os diagramas a seguir.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Note, por exemplo, que:

- $p(1) = 3$ e $q(3) = 1$
- $p(3) = 9$ e $q(9) = 3$
- $p(4,5) = 13,5$ e $q(13,5) = 4,5$

A função p relaciona cada x de A a um y de B, e a função q relaciona cada y de B a um x de A, de modo que $p(x) = y$ e $q(y) = x$ para todo $x \in A$ e $y \in B$.

Quando observamos situações como essa, dizemos que uma função é **inversa** da outra. Sendo assim, a funções p e q são inversas uma da outra.

Acompanhe a seguir como podemos definir matematicamente a função inversa.

Dada uma função bijetora $f: A \to B$, denomina-se **função inversa** de f a função $g: B \to A$, tal que, se $f(a) = b$, então $g(b) = a$ para todo $a \in A$ e $b \in B$.

A função g pode ser indicada por f^{-1} (lê-se: função inversa de f).

O número -1 na notação f^{-1} não é um expoente, ou seja, $f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$.

Considerando a função invertível $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x - 1$, podemos determinar a lei de sua inversa f^{-1}. Observe a seguir como proceder.

- Reescrevemos a lei da função f mudando a variável dependente $f(x)$ para y:

$$y = 2x - 1$$

- Trocamos a variável x por y e a variável y por x:

$$x = 2y - 1$$

- Para determinarmos a nova lei, isolamos y:

$$x = 2y - 1 \Rightarrow x + 1 = 2y \Rightarrow y = \frac{x + 1}{2}$$

A lei da função inversa de f é dada por $f^{-1}(x) = \frac{x + 1}{2}$.

Saiba que...

Uma função f só admite função inversa f^{-1} se for bijetora. Nesse caso, dizemos que a função f é **invertível**.

Gráfico da função inversa

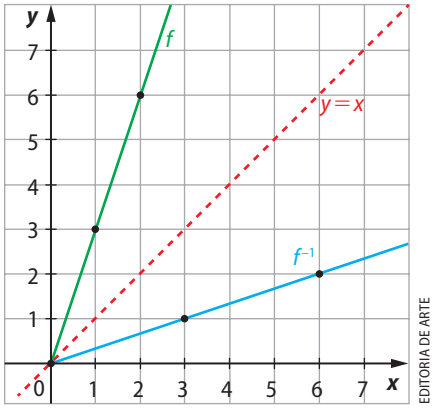
Considere a função $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ invertível dada por $f(x) = 3x$ e a função inversa de f, $f^{-1}: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, definida por $f^{-1}(x) = \frac{x}{3}$.

Como o gráfico de f e o de f^{-1} são semirretas, atribuímos alguns valores para x e obtemos os pares ordenados de alguns pontos para traçar a semirreta correspondente a cada função.

x	$y = f(x)$
0	0
1	3
2	6

x	$y = f^{-1}(x)$
0	0
3	1
6	2

Traçando o gráfico de f e o de f^{-1} no mesmo sistema de coordenadas, obtemos:



EDITORIA DE ARTE

Saiba que...

Um ponto de coordenadas (x, y) e um ponto de coordenadas (y, x) são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Observe que o gráfico de f e o de f^{-1} são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares ($y = x$) do sistema cartesiano ortogonal. É possível demonstrar que essa propriedade é válida para toda função invertível e sua inversa.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

ATIVIDADES RESOLVIDAS

9. Considerando as funções reais f e g, definidas respectivamente por $f(x) = x + 1$ e $g(x) = 2x^2 - 3$, determine:

a) $f(g(x))$ e $g(f(x))$;

b) os valores de x para que se tenha $f(g(x)) = g(f(x))$.

Comentar com os estudantes que a composição de funções não é comutativa. Esta atividade resolvida mostra isso.

Resolução

a) Para determinar $f(g(x))$, fazemos:

$f(g(x)) = f(2x^2 - 3)$

$f(g(x)) = 2x^2 - 3 + 1$

$f(g(x)) = 2x^2 - 2$

Para determinar $g(f(x))$, fazemos:

$g(f(x)) = g(x + 1)$

$g(f(x)) = 2(x + 1)^2 - 3$

$g(f(x)) = 2(x^2 + 2x + 1) - 3$

$g(f(x)) = 2x^2 + 4x - 1$

b) Igualando as leis de $f \circ g$ e de $g \circ f$, temos:

$2x^2 - 2 = 2x^2 + 4x - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$

Logo, $x = -\frac{1}{4}$.

10. Dadas as funções de domínio real definidas por $f(x) = x^2 - 5x + 6$ e $g(x) = x + 1$, determine os valores de x para que tenhamos $f(g(x)) = 0$.

Resolução

Como $g(x) = x + 1$, então $f(g(x)) = f(x + 1)$.

$f(x + 1) = (x + 1)^2 - 5(x + 1) + 6 =$

$= x^2 + 2x + 1 - 5x - 5 + 6 = x^2 - 3x + 2$

Para determinar os valores de x para os quais $f(g(x)) = 0$, precisamos resolver a equação $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Utilizando a fórmula resolutiva, temos:

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1$

Assim:

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = \frac{3 \pm 1}{2}$

Logo, $x = 1$ ou $x = 2$.

Portanto, $f(g(x)) = 0$ para $x = 1$ ou $x = 2$.

11. Sabendo que $f(x) = 3x - 1$ e $f(g(x)) = 6x + 8$, determine $g(x)$.

Resolução

$f(x) = 3x - 1 \Rightarrow f(g(x)) = 3 \cdot g(x) - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3 \cdot g(x) - 1 = 6x + 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3 \cdot g(x) = 6x + 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow g(x) = \frac{6x+9}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow g(x) = 2x + 3$

Logo, $g(x) = 2x + 3$.

12. Considerando a função real f bijetora dada por $f(x) = x + 2$, determine a lei da função inversa g e esboce os gráficos de f e g em um mesmo plano cartesiano.

Resolução

Como a função f é bijetora, é invertível.

Admitindo g como a função inversa de f, temos:

$f(x) = y \Rightarrow y = x + 2$

Trocando a variável x por y e a variável y por x e isolando y, temos:

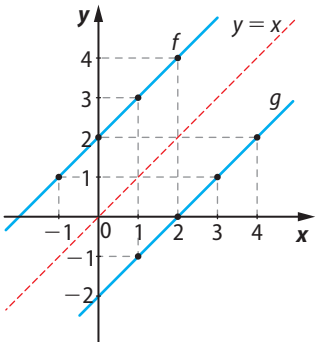
$x = y + 2 \Rightarrow y = x - 2$

Portanto, a lei da função inversa g é $g(x) = x - 2$.

Para construir os gráficos, podemos representar o gráfico da função f e, em seguida, determinar o gráfico de g, simétrico ao gráfico de f em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares ($y = x$).

Para isso, determinamos alguns pontos pelos quais passa a reta que representa a função f e esboçamos os gráficos em um mesmo sistema de coordenadas.

x	$y = f(x)$
-1	1
0	2
1	3
2	4



EDITORIA DE ARTE

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

ATIVIDADES

31. Sendo f e g funções de domínio real, com $f(x) = x^2 + 2x$ e $g(x) = 1 - 3x$, determine:

a) $f(g(x))$ $9x^2 - 12x + 3$

b) $g(f(x))$ $-3x^2 - 6x + 1$

c) $(f \circ f)(x)$ $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x$

d) $(g \circ g)(x)$ $9x - 2$

32. Dados $f(x) = 3x + 5$ e $g(x) = 2x - 3$, calcule x para que se tenha:

a) $f(g(x)) = 0$ $x = \frac{2}{3}$

b) $g(f(x)) = 0$ $x = -\frac{7}{6}$

33. Se $f(x) = \frac{1}{x - 1}$, qual é o valor de x para que $f(f(x)) = 1$? $x = \frac{3}{2}$

34. Considere as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^2 - 2x - 3$ e $g(x) = 4x + m$. Sabendo que $f(g(-1)) = 12$, calcule m. 1 ou 9

35. (UEPB) Sendo $f(x) = \frac{1}{x - 1}$, $x \neq 1$ e $g(x) = 2x - 4$, o valor de $f(g(2)) + g\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ é igual a: alternativa **c**

a) 1

b) -8

c) -9

d) 1

e) -2

36. (UFSC) Considere as funções $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $g(x) = 2x + 1$ e $g(f(x)) = 2x^2 + 2x + 1$. Calcule $f(7)$. 56

37. Determine a lei da função inversa de cada função bijetora definida a seguir, considerando o domínio e o contradomínio como $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = x - 3$ $f^{-1}(x) = x + 3$

b) $g(x) = \frac{x + 2}{4}$ $g^{-1}(x) = 4x - 2$

38. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax - 2$ e g a função inversa de f. Sabendo que $f(-2) = 10$, determine a lei da função g. $g(x) = \frac{-x - 2}{6}$

39. Considere uma função invertível dada por $f(x) = \frac{2x - 1}{x - 3}$, com $D(f) = \mathbb{R} - \{3\}$, e determine:

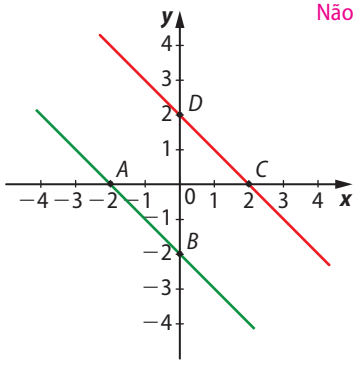
a) $f^{-1}(x)$ $f^{-1}(x) = \frac{3x - 1}{x - 2}$

b) o domínio de f^{-1} $D(f^{-1}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$

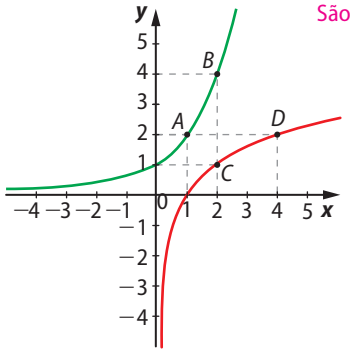
c) $f^{-1}(-3)$ 2

40. Em cada item a seguir, estão representados, em um mesmo sistema cartesiano ortogonal, os gráficos de duas funções. Determine se as funções representadas são uma a inversa da outra. Justifique sua resposta.

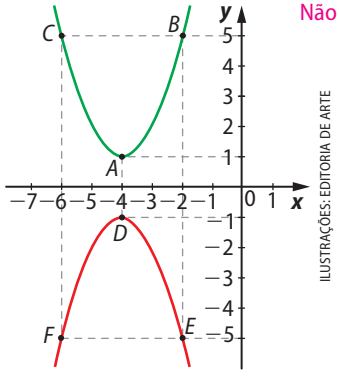
a) Não são inversas.



b) São inversas.

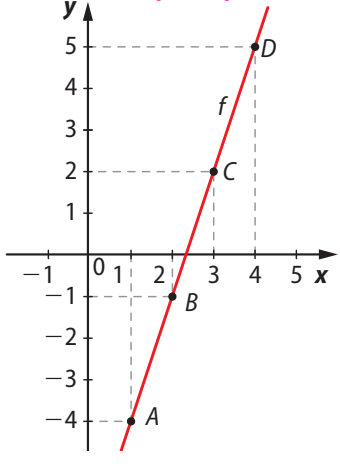


c) Não são inversas.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

41. Uma função bijetora f está representada no gráfico a seguir. Com base nele, esboce o gráfico da função inversa f^{-1}. Ver as **Orientações para o professor**.



MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Orientar os estudantes a navegar pelo *site* do **GeoGebra**, pois nele há uma comunidade de discussão e muitas informações disponíveis, inclusive alguns tutoriais e materiais produzidos por professores.

Conhecendo o GeoGebra

O **GeoGebra** é um *software* de Matemática dinâmica que pode ser utilizado em todos os níveis de ensino. Trata-se de uma multiplataforma, pois tem portabilidade em todos os sistemas operacionais e pode ser instalada em computadores, *tablets* e *smartphones*.

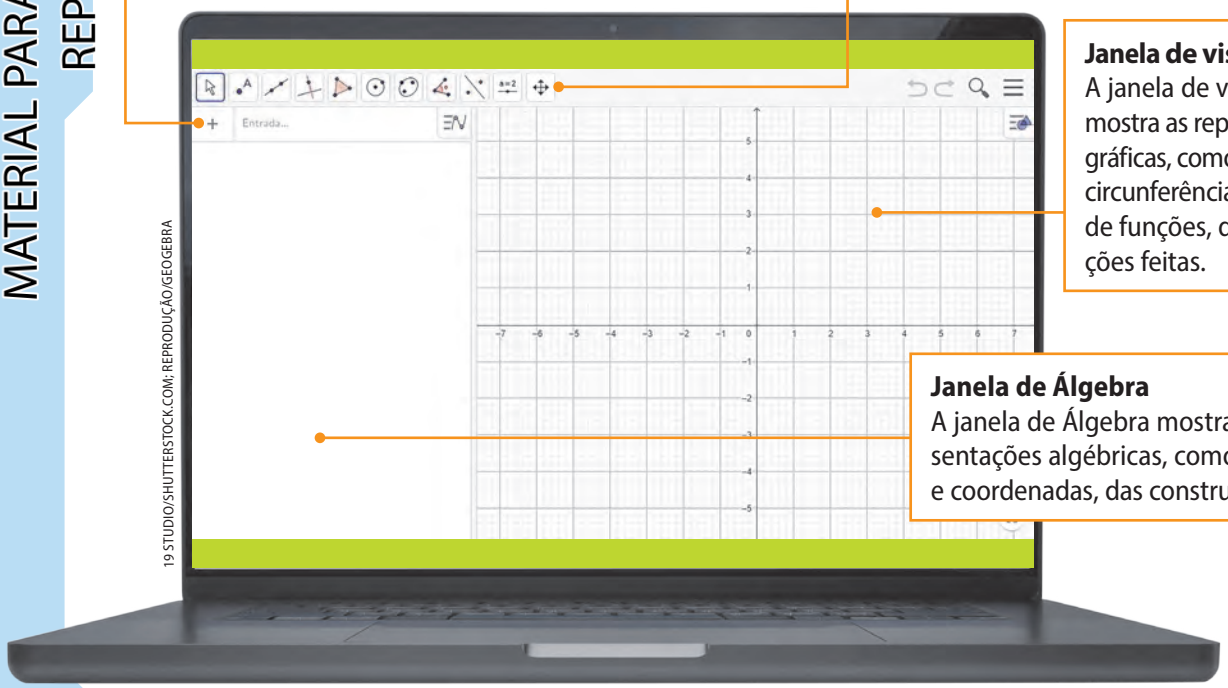
Sua instalação deve ser feita por meio do *site* oficial www.geogebra.org/download (acesso em: 23 jul. 2024), baixando-se o *software* GeoGebra Clássico 6 e seguindo-se as orientações de instalação.

O GeoGebra também pode ser usado em sua versão *on-line*, sem a necessidade de instalação, pelo *site* https://www.geogebra.org/classic (acesso em: 23 jul. 2024).

Ao abrir o *software* instalado ou a versão *on-line*, aparece uma tela inicial composta de várias janelas, com ferramentas e exibições específicas de acordo com a utilização. A seguir, apresentamos a tela inicial com algumas de suas funções.

Campo de entrada
No campo de entrada, é possível inserir coordenadas, equações, comandos ou funções. Ao pressionar a tecla ***Enter***, a representação algébrica do objeto é apresentada na janela de Álgebra, enquanto a representação gráfica é mostrada na janela de visualização.

Barra de ferramentas
A barra de ferramentas é composta de 11 caixas contendo ferramentas diversas, relacionadas dentro de seu subgrupo. Para acessá-las, basta clicar em cada caixa de ferramenta.



19 STUDIO/SHUTTERSTOCK.COM; REPRODUÇÃO/GEOGEBRA

Janela de visualização
A janela de visualização mostra as representações gráficas, como polígonos, circunferências e gráficos de funções, das construções feitas.

Janela de Álgebra
A janela de Álgebra mostra as representações algébricas, como equações e coordenadas, das construções feitas.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Além da janela de Álgebra e da janela de visualização, que são mostradas na tela inicial padrão, o GeoGebra tem outras janelas, que, dependendo da construção que se deseja realizar, podem ser acionadas no *menu* **Exibir**. Quando necessário, essas outras janelas serão exibidas durante a realização das construções.

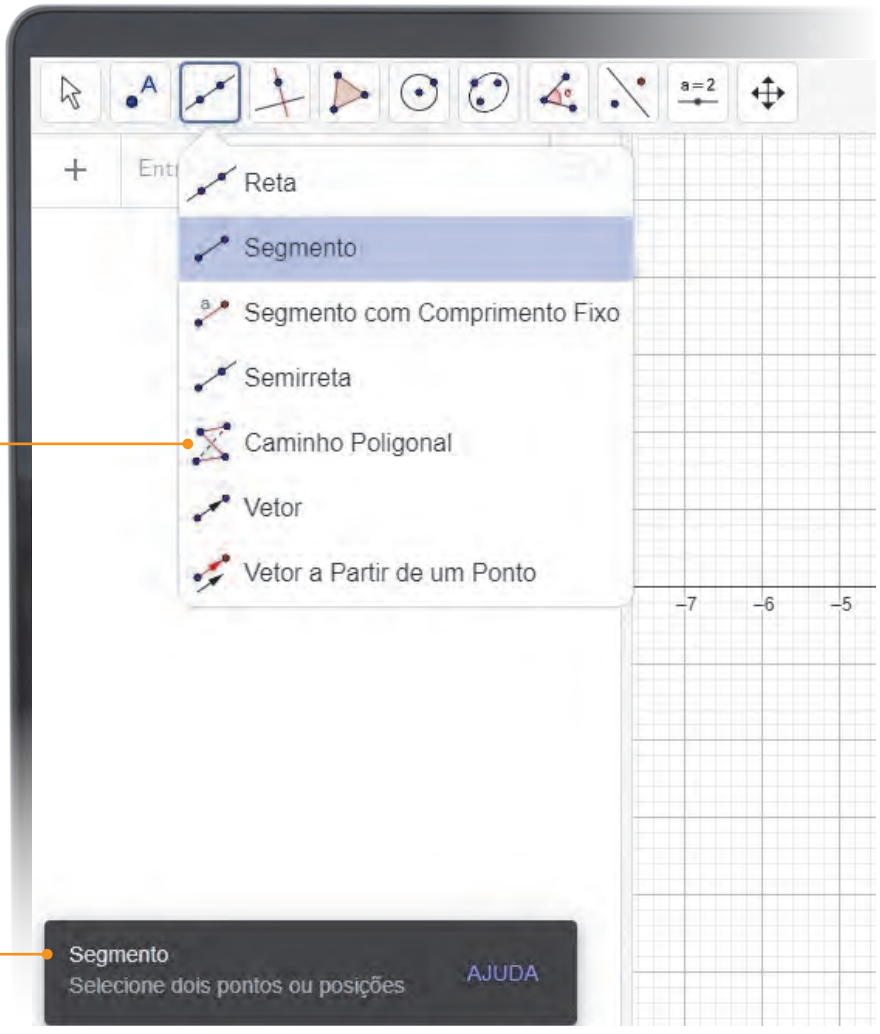
Todas as janelas do GeoGebra estão relacionadas dinamicamente, ou seja, ao se realizar uma alteração em algum objeto em uma delas, todas as representações desse mesmo objeto nas demais janelas serão alteradas automaticamente.

O GeoGebra utiliza linguagem e notação próprias, que podem diferir um pouco das utilizadas nesta Coleção. Por exemplo, para a separação da parte decimal de um número, o *software* usa o ponto no lugar da vírgula; para indicar as coordenadas de um ponto A qualquer, a notação é $A = (0,0)$, em vez de $A(0, 0)$. Ao longo da Coleção, conforme necessário, apresentaremos outras particularidades do GeoGebra.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Na barra de ferramentas, ao clicar na terceira caixa de ferramentas, estas opções ficam disponíveis.

Ao sobrepor o cursor do *mouse* sobre uma ferramenta ou selecioná-la, surge um boxe com orientações a respeito de como usá-la.



REPRODUÇÃO/GEOGEBRA

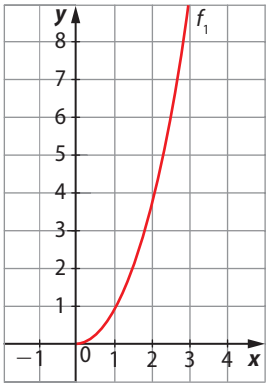
MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Explorando função inversa com o GeoGebra

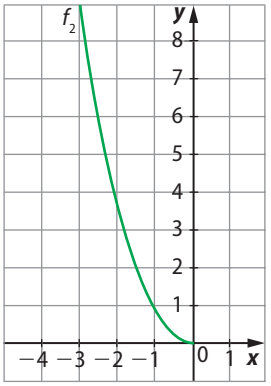
Estudamos que uma função f precisa ser bijetora para admitir função inversa. No entanto, nem todas as funções são bijetoras, por exemplo, a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ dada por $f(x) = x^2$.

Porém, se restringirmos de maneira conveniente o domínio e o contradomínio de f, podemos obter uma correspondência biunívoca.

Podemos considerar, por exemplo, uma função $f_1: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, definida por $f_1(x) = x^2$, e uma função $f_2: \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}_+$, definida por $f_2(x) = x^2$, cujos gráficos estão representados a seguir.



■ A função $f_1: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ é bijetora.



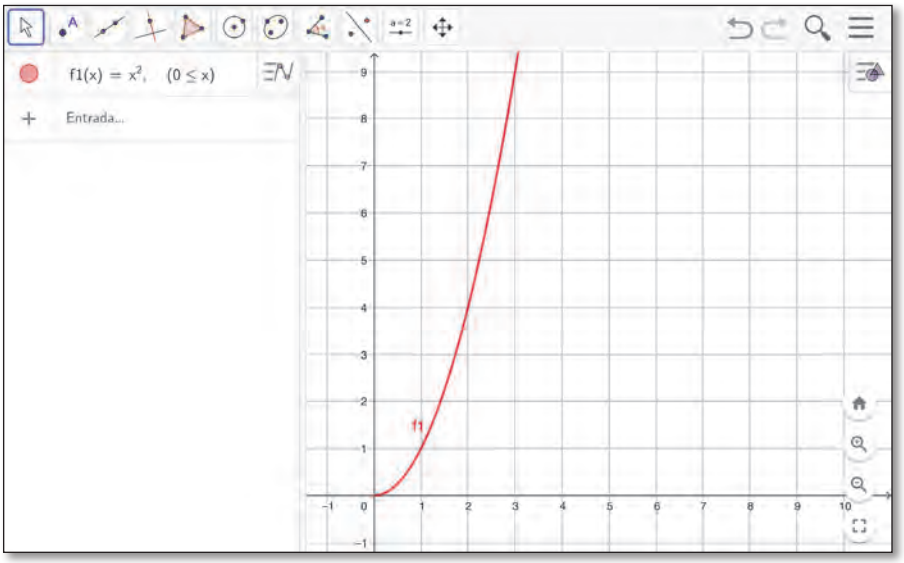
■ A função $f_2: \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}_+$ é bijetora.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Vamos, agora, utilizar o GeoGebra para representar o gráfico da função inversa de f_1 e o da função inversa de f_2. Para isso, execute os passos a seguir.

I. No campo de entrada, digite "$f1(x)=x\text{^}2,\ 0<=x$" e pressione ***Enter***. O acento circunflexo indica para o programa que o número 2 é um expoente.

Será representada, na janela de visualização, a função dada por $f_1(x) = x^2$ para $0 \leqslant x$.

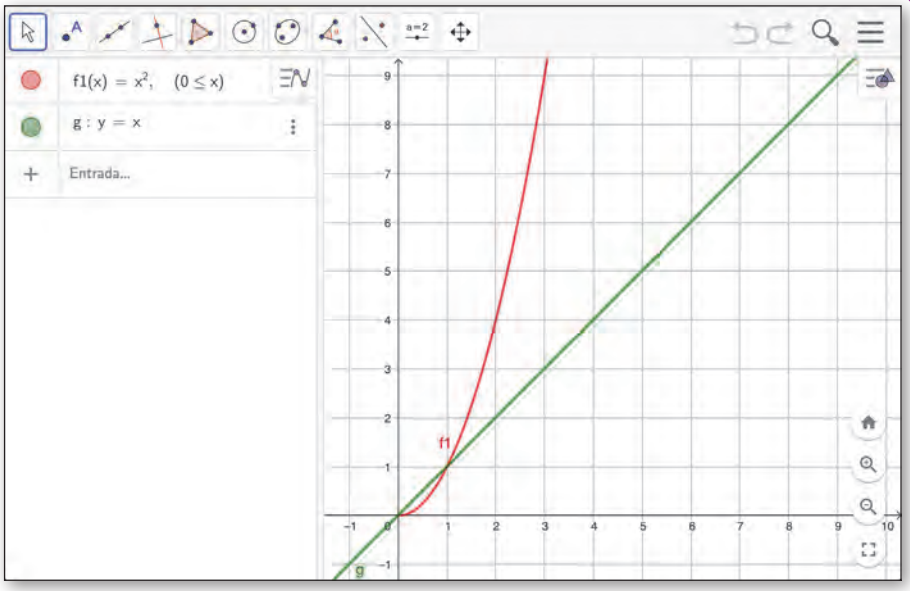


REPRODUÇÃO/GEOGEBRA

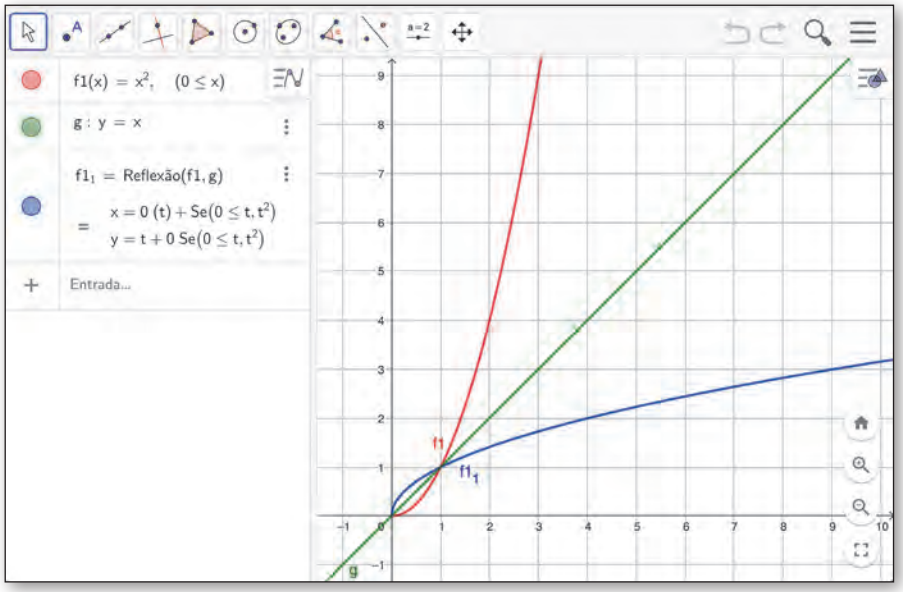
MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

II. Estudamos que o gráfico de uma função e o de sua inversa são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Para representar essa reta, digite "$y=x$" no campo de entrada e pressione ***Enter***.



III. Para obter a função inversa de f_1, selecione a ferramenta (**Reflexão em Relação a uma Reta**). Em seguida, clique sobre o gráfico de f_1 e, posteriormente, sobre a bissetriz dos quadrantes ímpares. O gráfico obtido é o da função inversa de f_1, representado em azul na imagem.



IMAGENS: REPRODUÇÃO/GEOGEBRA

1. A função g é bijetora, pois, traçando-se retas paralelas ao eixo x que passem por quaisquer pontos cuja ordenada pertença a CD(g), elas intersectam o gráfico em um único ponto, o que significa que a função g é injetora e sobrejetora.

Para obter o gráfico da função inversa de f_2, repita a sequência de passos apresentada digitando "$f2(x)=x\text{^}2, x<=0$" no passo **I**.

Agora, faça o que se pede nas atividades a seguir.

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. Construa no GeoGebra o gráfico da função definida por $g(x) = x^3$. Para isso, digite "$y=x\text{^}3$" no campo de entrada. Observe o gráfico obtido e responda: a função g é bijetora? Justifique sua resposta.

2. Para construir o gráfico da função inversa de g, é necessário restringir o domínio, como foi feito para a função f_1 observada no início da seção? Não, pois g é uma função bijetora; portanto, admite função inversa.

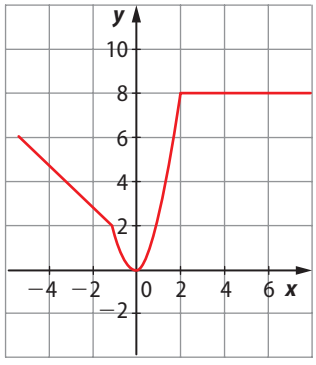
3. Represente o gráfico da função g^{-1} na mesma janela de visualização em que g foi representada. Quantos pontos de intersecção há entre os gráficos de g e de g^{-1}? 3

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

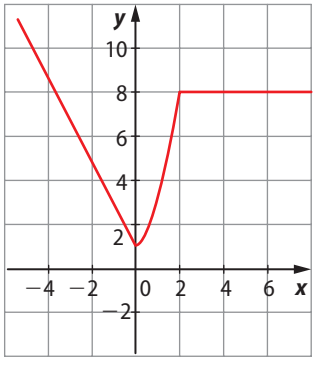
1. (IFSul-RS) O gráfico que descreve a função

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1, \text{ se } x \leq -1 \\ 2x^2, \text{ se } -1 < x \leq 2 \\ 8, \text{ se } x > 2 \end{cases}$$ é: alternativa **a**

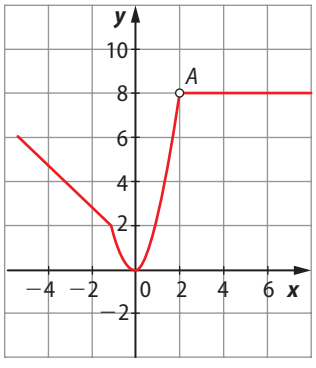
a)



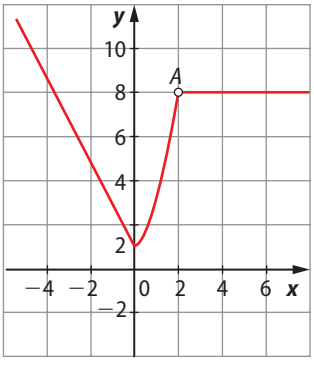
b)



c)



d)



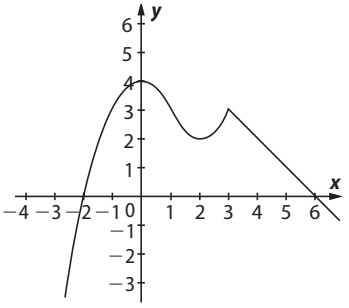
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

2. (UFRGS-RS) O gráfico da função f definida por:

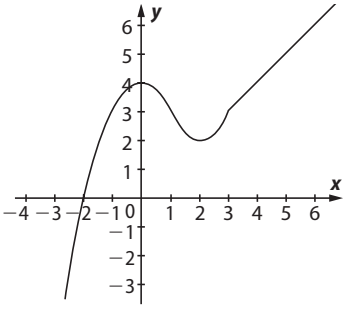
$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4, \text{ para } -\infty < x \leq 1 \\ (x - 2)^2 + 2, \text{ para } 1 < x \leq 3 \\ x, \text{ para } 3 < x < +\infty \end{cases}$$ é

alternativa **b**

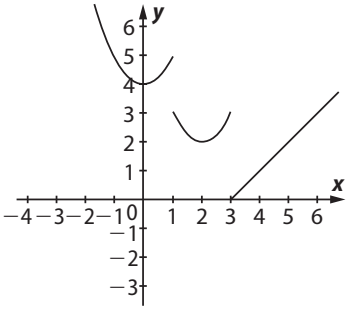
a)



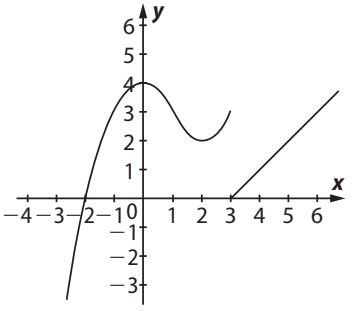
b)



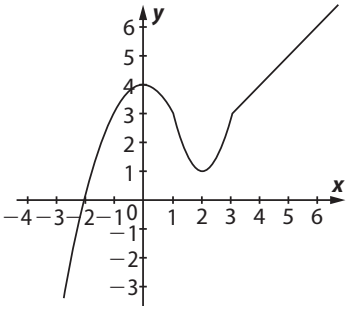
c)



d)



e)



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

3. (UEL-PR) Leia o texto a seguir.

> Em 1970, o matemático John Conway inventou o "Jogo da Vida", exemplo teórico de como regras fixas e simples permitem, com o passar das gerações, a criação, a sobrevivência e o fim de vidas simuladas. Daí o nome do jogo!
>
> Adaptado de: https://rpm.org.br/.

Admita uma variação do Jogo da Vida como dada a seguir.
Para cada geração $t \in \mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$, há uma sequência numérica infinita $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ tal que $a_n \in \{0, 1\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. O número 1 indica que há vida naquela posição e 0 o contrário.
As gerações se sucedem da seguinte forma:
se $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ é a sequência da geração t, então a sequência $a'_1, a'_2, a'_3, ..., a'_n, ...$ da geração $t + 1$ é dada por:

$$a'_n = \begin{cases} 1, \text{ se } n = 1 \text{ e } a_2 = 1 \\ 1, \text{ se } n > 1 \text{ e } a_{n+1} + a_{n-1} = 1 \\ 0, \text{ nos demais casos} \end{cases}$$

Por exemplo,

Geração	Sequência numérica								
t	$n = 1$,	$n = 2$,	$n = 3$,	$n = 4$,	$n = 5$,	$n = 6$,	$n = 7$,	$n = 8$,	...
1	1,	1,	0,	0,	1,	0,	0,	0,	...
2	1,	1,	1,	1,	0,	1,	0,	0,	...
3	1,	0,	0,	1,	0,	0,	1,	0,	...

Supondo agora que 1, 0, 0, 0, 0, 0, ... é a sequência da geração t, assinale a alternativa que apresenta, corretamente, a sequência da geração $t + 1$. alternativa **b**

a) 0, 0, 0, 0, 0, 0, ...
b) 0, 1, 0, 0, 0, ...
c) 1, 1, 0, 0, 0, ...
d) 1, 1, 0, 1, 0, ...
e) 1, 1, 1, 1, 1, ...

4. (UECE) Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x + 4, \text{ se } x \geqslant 2 \\ 2, \text{ se } -1 \leqslant x \leqslant 2 \\ x + 3, \text{ se } x \leqslant -1 \end{cases},$$

então, considerando o sistema de coordenadas usual com o metro (m) sendo a unidade de comprimento, a medida da área, em m^2, da região do plano limitada pelo gráfico de f e pelo eixo x é alternativa **b**

a) 12. **b)** 10. **c)** 9. **d)** 11.

5. (PUC-PR) Um economista, no início de 2007, fez uma projeção sobre a situação financeira de um grupo de investidores que aplicam na bolsa de valores, e observou que a variação dos ganhos dessas aplicações é alterada diariamente; assim, concluiu que o lucro diário é dado pela função $f(x) = |x - 200| \cdot 50$, onde x representa cada dia do ano, ($x = 1, 2, 3, ..., 365$), e o lucro é dado em real. Se o grupo de investidores pretende um lucro de R$ 5.750,00, em quais meses isso será possível?

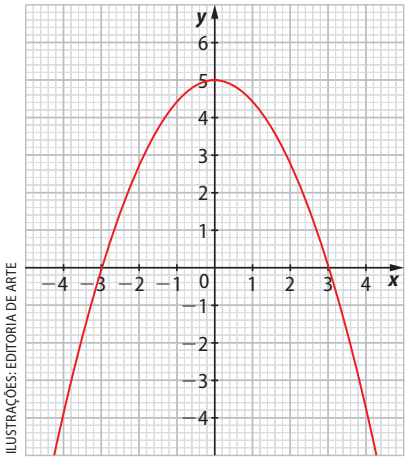
a) Abril e novembro.
b) Março e outubro.
c) Março e novembro.
d) Maio e outubro.
e) Abril e outubro. alternativa **c**

6. (UECE) Considerando, no plano, o sistema de coordenadas cartesianas usual, usando o metro (m) como unidade de comprimento, é correto dizer que a medida da área da região limitada pelo gráfico da função $f: [0, 4] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x - 2| - 2$ e pelo eixo das abscissas, em metros quadrados, é igual a alternativa **d**

a) 6. **b)** 8. **c)** 3. **d)** 4.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

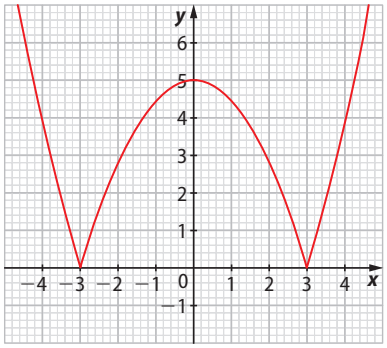
7. (UFRGS-RS) O gráfico de $f(x)$ está esboçado na imagem a seguir. alternativa **b**



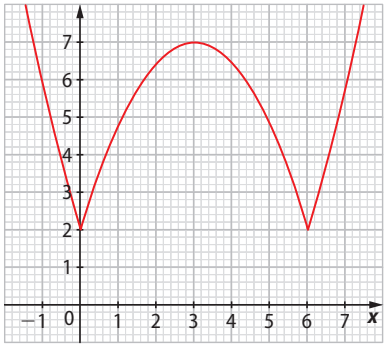
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

O esboço do gráfico de $|f(x - 3)| + 2$ está representado na alternativa

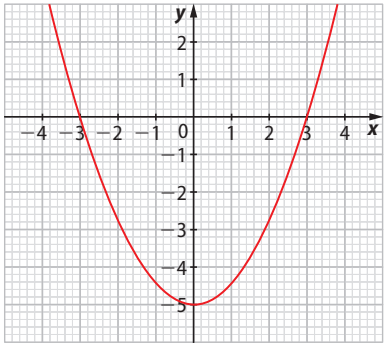
a)



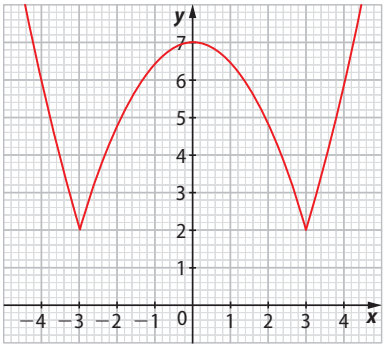
b)



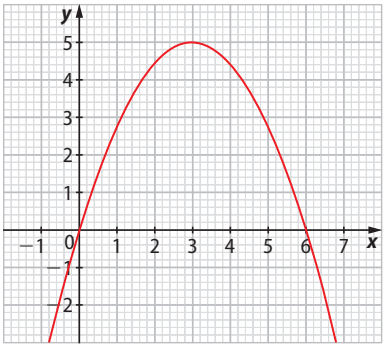
c)



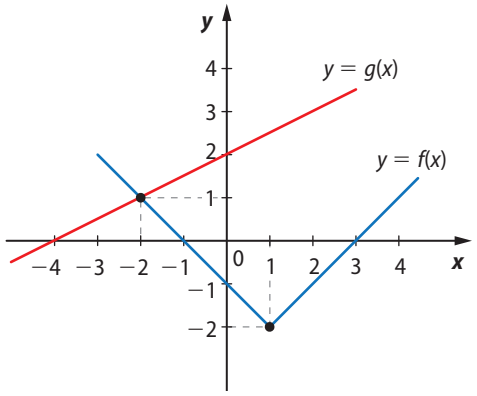
d)



e)



8. (Udesc) Considere os gráficos ilustrados na figura:



Classifique cada sentença abaixo em verdadeira (**V**) ou falsa (**F**).

(▨) O valor de $g(f(-1)) - f(g(-2) + 2)$ é igual a 2.

(▨) O valor de $f(g(-4) + 1) + 3$ é igual a 1.

(▨) A lei de formação de $y = f(x)$ é $y = |x - 1| - 2$.

Assinale a alternativa que contém a sequência correta, de cima para baixo: alternativa **b**

a) V – F – V

b) V – V – V

c) F – V – F

d) F – V – V

e) V – V – F

9. (IFSul-RS) Considere a função $f: [-5, 3] \to A \subset \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x + 2| - 3$. Se f é sobrejetora, então alternativa **d**

a) $A = [-6, 2]$.

b) $A = [-5, 2]$.

c) $A = [-4, 2]$.

d) $A = [-3, 2]$.

10. (ESPM-SP) Sejam f e g funções reais tais que $f(2x + 1) = 2x + 4$ e $g(x + 1) = 2x - 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Podemos afirmar que a função $f \circ g(x)$ é dada por: alternativa **d**

a) $2x - 1$

b) $x + 2$

c) $3x + 1$

d) $2x$

e) $x - 3$

11. (IFSul-RS) A função $f: [0, +\infty[\to [4, +\infty[$, definida por $f(x) = (x + 2)^2$, possui inversa $f^{-1}: [4, +\infty[\to [0, +\infty[$, definida por alternativa **d**

a) $f^{-1}(x) = \sqrt{x - 2}$

b) $f^{-1}(x) = \sqrt{x + 2}$

c) $f^{-1}(x) = \sqrt{x} + 2$

d) $f^{-1}(x) = \sqrt{x} - 2$

12. (UEPB) Dada a função bijetora tal que $f(x) = \frac{3x + 2}{x - 1}$, $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$, o domínio de f^{-1} é: alternativa **b**

a) $\mathbb{R}$

b) $\mathbb{R} - \{3\}$

c) $\mathbb{R} - \{1\}$

d) $\mathbb{R} - \{-1\}$

e) $\mathbb{R} - \left\{-\frac{2}{3}\right\}$

PARA REFLETIR

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Neste Capítulo, aprendemos que, em algumas situações do dia a dia, o comportamento de uma grandeza depende do comportamento de outra, mas essa relação é estabelecida de acordo com classes ou faixas de valores. Estudamos também como podemos utilizar a ideia de função para estabelecer modelos que podem ser utilizados para fazer estimativas e possibilitar algumas tomadas de decisão de maneira mais consciente.

Estudamos o conceito de função definida por mais de uma sentença e a representação gráfica desse tipo de função, bem como função composta e função inversa, módulo de números reais, função modular e equações modulares.

Nas páginas de abertura, foi apresentada uma situação envolvendo uma discussão sobre imposto de renda, que foi retomada um pouco mais adiante. Depois de ter estudado o conteúdo deste Capítulo, você consegue reconhecer que esses conceitos podem auxiliá-lo a compreender e a analisar a situação apresentada na abertura? Você já tinha essa percepção antes de estudar esses conceitos?

Vamos refletir a respeito das aprendizagens do Capítulo **3**:

- Você já conhecia algum dos conteúdos apresentados ao longo deste Capítulo? Qual(is)?
- Cite outras situações do dia a dia que envolvam as ideias de função definida por mais de uma sentença e de função modular.
- Explique como você acredita que seu entendimento sobre o conceito de função se aprofundou em relação ao que você conhecia anteriormente.
- Você utiliza os conceitos estudados para analisar situações antes de tomar decisões e de resolver problemas do dia a dia? Respostas pessoais.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

CAPÍTULO

4 FUNÇÃO LOGARÍTMICA

O som do despertador, nossa música favorita, a água corrente de um rio, os gritos de um torcedor, o canto dos passarinhos, o avião que passa pelo céu… Todos os sons que ouvimos podem ser medidos.

Fazer essa medição é importante, pois nossa orelha é composta de várias partes, algumas delas bastante sensíveis. Se estivermos expostos a ruídos altos por muito tempo, por exemplo, podemos sofrer com a perda auditiva. Por isso, aparelhos como aspiradores de pó, liquidificadores, secadores de cabelo, entre outros, devem passar por testes que identifiquem a intensidade do ruído que geram.

No caso dos fones de ouvido, o cuidado deve ser maior. O recomendável é que a intensidade sonora não ultrapasse o nível de 80 decibéis (uma unidade de medida da intensidade sonora), que é equivalente a uma sala de aula muito barulhenta. Alguns aparelhos celulares até alertam o usuário, quando os fones de ouvido são conectados, para que ele não ultrapasse certo volume, a fim de evitar danos auditivos. Portanto, procure não ouvir sua música favorita sempre no último volume, porque a perda de audição por ruídos é uma realidade que está atingindo cada vez mais jovens com maus hábitos auditivos.

MAURO PIMENTEL/AFP/GETTY IMAGES

- Os *shows* musicais são eventos que costumam ter um alto nível de ruído.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

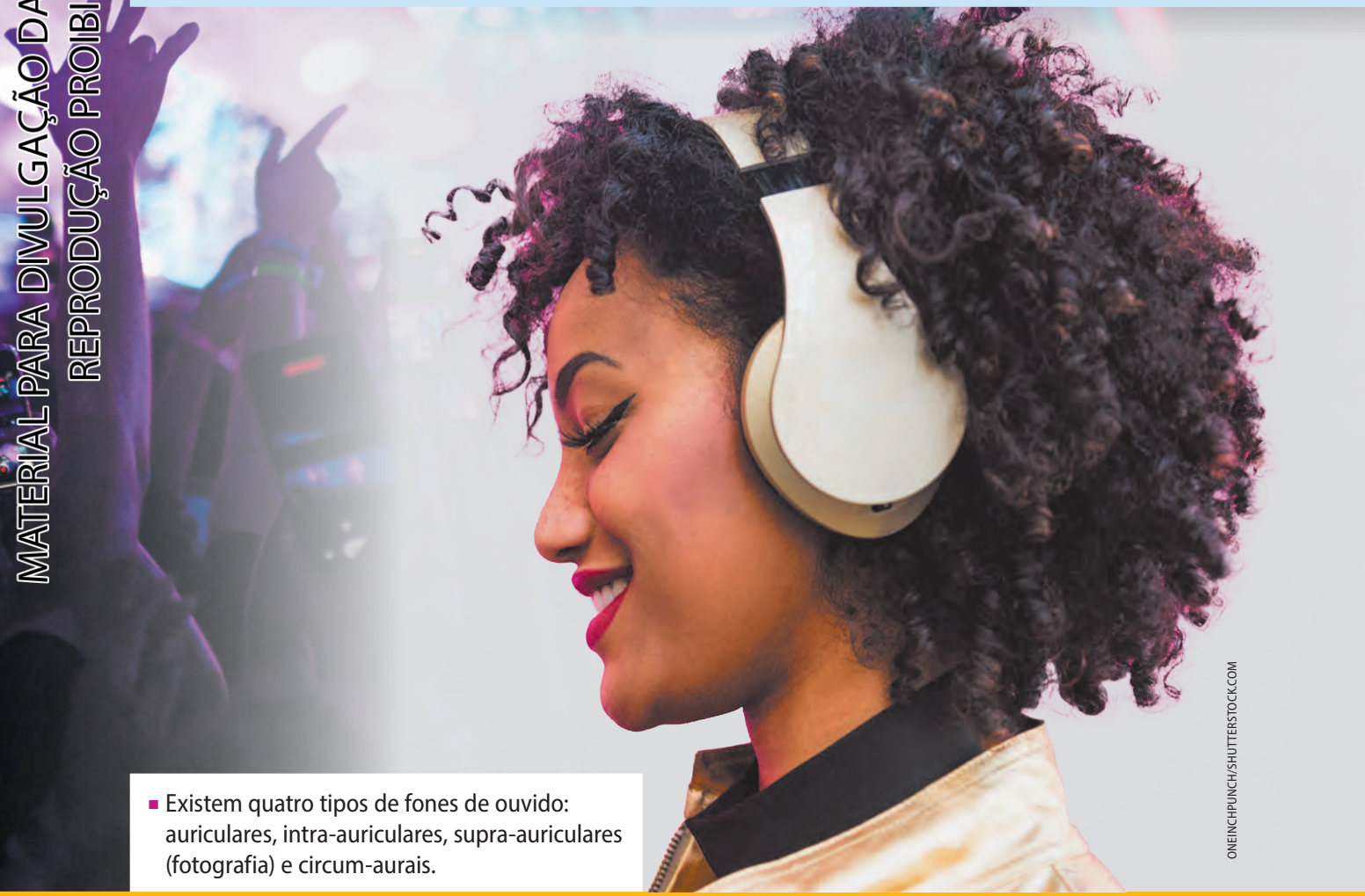
MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Ver as **Orientações para o professor**.

Agora, reúna-se a um colega, e façam o que se pede em cada questão.

1. No texto foi mencionada uma unidade de medida chamada **decibel** (**dB**). Façam uma pesquisa sobre essa unidade e sobre como ela se relaciona ao conteúdo que será estudado neste Capítulo.
2. Muitos aparelhos domésticos devem passar por testes para determinar a intensidade sonora que geram. No Brasil, eles recebem o Selo Ruído. Vocês já notaram esse selo? Informem-se sobre ele pesquisando seus objetivos e as informações que devem constar nele.
3. Por que fones de ouvido podem ser mais prejudiciais à saúde sonora do que alto-falantes como os da televisão? Pesquisem sobre isso e sobre a Perda Auditiva Induzida por Ruídos (Pair), suas principais causas e o grupo de pessoas mais atingido por esse problema.
4. Atualmente, estima-se que os aparelhos eletrônicos desvalorizam 10% ao ano após o seu lançamento. Suponha que um fone de ouvido recém-lançado custe R$ 300,00.
   a) Considerando essa depreciação, escreva o preço y desse fone após x anos. $y = 300 \cdot 0{,}9^x$
   b) O fone custará R$ 196,83 depois de quantos anos após o seu lançamento? 4 anos depois



ONEINCHPUNCH/SHUTTERSTOCK.COM

- Existem quatro tipos de fones de ouvido: auriculares, intra-auriculares, supra-auriculares (fotografia) e circum-aurais.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Introdução

No Volume anterior, aprendemos a solucionar um tipo de equação cuja incógnita se apresenta no expoente, as equações exponenciais. Por exemplo, $2^x = 4$.

Estudamos como solucionar esse tipo de equação quando ambos os membros da igualdade podem ser representados como potências de mesma base. Por exemplo:

$$2^x = 4 \Rightarrow 2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2$$

Mas e quando os membros da igualdade não podem ser representados como potências de mesma base? Como fazemos para resolver uma equação como $2^x = 3$?

Para solucionar uma equação como essa, utilizamos o conceito de **logaritmo**.

Esse conceito é amplamente utilizado no estudo de fenômenos físicos, químicos, biológicos e sociais, por exemplo, o cálculo da acidez de uma solução (conhecida como pH), o crescimento populacional, o nível de intensidade sonora (medido em decibel) etc.

JRJFIN/SHUTTERSTOCK.COM

■ O decibelímetro digital é um instrumento utilizado para medir o nível de intensidade sonora em um ambiente.

Logaritmo

Considerando uma potência cuja base seja um número positivo e diferente de 1, seu expoente é um logaritmo. Por exemplo, no caso da potência $2^5 = 32$, chamamos o expoente 5 de logaritmo de 32 na base 2. Usando a linguagem matemática, representamos:

$$2^5 = 32 \Leftrightarrow \log_2 32 = 5 \text{ (lê-se: logaritmo de 32 na base 2 é igual a 5)}$$

Acompanhe, a seguir, a definição de logaritmo.

> Dados dois números reais positivos a e b, com $a \neq 1$, o **logaritmo** de b na base a é o expoente x tal que $a^x = b$:
> $$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Na definição, b é o **logaritmando**, a é a **base** e x é o **logaritmo** de b na base a.

Exemplos:

a) $\log_3 81 = 4 \Leftrightarrow 3^4 = 81$

b) $\log_2 \frac{1}{4} = -2 \Leftrightarrow 2^{-2} = \frac{1}{4}$

c) $\log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{36} = 2 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$

» Condições de existência do logaritmo

De acordo com a definição de logaritmo, a existência de $\log_a b$ está associada às seguintes condições:

- logaritmando positivo: $b > 0$;
- base positiva e diferente de 1: $a > 0$ e $a \neq 1$.

Se uma dessas condições não for atendida, a existência do logaritmo não estará garantida no universo dos números reais. Por exemplo, vamos tentar calcular $\log_2 (-3)$. Caso existisse esse logaritmo em $\mathbb{R}$, aplicando a definição, teríamos:

$$\log_2 (-3) = x \Leftrightarrow 2^x = -3$$

Note que não existe valor real de x que satisfaça à igualdade descrita, logo não existe $\log_2 (-3)$ em $\mathbb{R}$.

» Consequências da definição

A partir da definição de logaritmo, sendo a, b, c e m números reais, em que a, b e c são positivos e a é diferente de 1, temos:

1ª consequência:

$$\log_a 1 = 0$$

Pois: $\log_a 1 = x \Leftrightarrow a^x = 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a^x = a^0 \Leftrightarrow x = 0$

2ª consequência:

$$\log_a a = 1$$

Pois: $\log_a a = x \Leftrightarrow a^x = a \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a^x = a^1 \Leftrightarrow x = 1$

3ª consequência:

$$\log_a a^m = m$$

Pois: $\log_a a^m = x \Leftrightarrow a^x = a^m \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = m$

4ª consequência:

$$a^{\log_a b} = b$$

Pois, fazendo $\log_a b = x$, temos: $a^x = b$

Substituindo x por $\log_a b$ em $a^x = b$, obtemos: $a^{\log_a b} = b$

5ª consequência:

$$\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$$

Pois, considerando $\log_a b = x$ e $\log_a c = y$, temos: $a^x = b$ e $a^y = c$

- Se $b = c$, temos:
  $a^x = a^y \Rightarrow x = y \Rightarrow \log_a b = \log_a c$
- Se $\log_a b = \log_a c$, temos:
  $x = y \Rightarrow a^x = a^y \Rightarrow b = c$

Observações:

- O logaritmo de um número na base 10 é chamado de **logaritmo decimal**.

  Costuma-se omitir a base dos logaritmos decimais. Assim:

  $\log_{10} b$ pode ser escrito como $\log b$.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

A base decimal é muito usada pelo fato de ser a mesma base do nosso sistema de numeração. Em muitos casos, utilizar o logaritmo decimal pode simplificar os cálculos.

- O logaritmo de um número na base *e* (número irracional cujo valor é 2,718281...) é chamado de **logaritmo natural** ou **logaritmo neperiano** (em homenagem ao matemático John Napier).

Os logaritmos naturais têm uma simbologia própria:

$\log_e b$ pode ser escrito como $\ln b$.

A base natural é muito utilizada na modelagem de fenômenos das Ciências da Natureza e das Ciências Humanas.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

ATIVIDADES RESOLVIDAS

1. Calcule:

a) $\log_{10} 0{,}01$ **b)** $\log_{\frac{1}{4}} 2\sqrt{2}$

Resolução

Em cada item, vamos aplicar a definição de logaritmo e resolver a equação exponencial obtida.

a) $\log_{10} 0{,}01 = x \Leftrightarrow 10^x = 0{,}01$

$10^x = 0{,}01 \Rightarrow 10^x = 10^{-2} \Rightarrow x = -2$

Então, $\log_{10} 0{,}01 = -2$.

b) $\log_{\frac{1}{4}} 2\sqrt{2} = x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^x = 2\sqrt{2}$

$\left(\frac{1}{4}\right)^x = 2\sqrt{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{2^2}\right)^x = 2^1 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow (2^{-2})^x =$

$= 2^{1+\frac{1}{2}} \Rightarrow 2^{-2x} = 2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow -2x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = -\frac{3}{4}$

Então, $\log_{\frac{1}{4}} 2\sqrt{2} = -\frac{3}{4}$.

2. Calcule $\log_{10} 1{,}4$. Use $2 \simeq 10^{0{,}301}$ e $7 \simeq 10^{0{,}845}$.

Resolução

Usando a definição de logaritmo, temos:

$\log_{10} 1{,}4 = x \Leftrightarrow 10^x = 1{,}4$

O logaritmo de 1,4 é o expoente x ao qual devemos elevar 10 para obter 1,4.

Resolvendo a equação exponencial, temos:

$10^x = 1{,}4 \Rightarrow 10^x = \frac{14}{10} \Rightarrow 10^x = \frac{2 \cdot 7}{10} \Rightarrow 10^x \simeq$

$\simeq \frac{10^{0{,}301} \cdot 10^{0{,}845}}{10} \Rightarrow 10^x \simeq 10^{0{,}301 + 0{,}845 - 1} \Rightarrow$

$\Rightarrow 10^x \simeq 10^{0{,}146} \Rightarrow x \simeq 0{,}146$

Portanto, $\log_{10} 1{,}4 \simeq 0{,}146$.

3. Determine o valor da expressão:

$\log_7 7^3 + \log_9 1^6 + 2^{\log_2 5}$

Resolução

Calculando o valor de cada parcela, temos:

- $\log_7 7^3 = 3$ (3ª consequência)
- $\log_9 1^6 = \log_9 1 = 0$ (1ª consequência)
- $2^{\log_2 5} = 5$ (4ª consequência)

Substituindo esses valores na expressão dada, obtemos:

$3 + 0 + 5 = 8$

Portanto, $\log_7 7^3 + \log_9 1^6 + 2^{\log_2 5} = 8$.

4. Para quais valores de x existe $\log_3 (x - 5)$?

Resolução

Para que o logaritmo exista, as duas condições de existência apresentadas na definição precisam ser obedecidas. Analisando $\log_3 (x - 5)$, temos:

- logaritmando: $x - 5$
- base: 3

Como 3 é um número positivo e diferente de 1, para que o logaritmo exista em $\mathbb{R}$, devemos ter:

$x - 5 > 0 \Rightarrow x > 5$

Logo, para que as duas condições de existência sejam obedecidas, precisamos ter $x > 5$.

Portanto, $\log_3 (x - 5)$ existe para x real tal que $x > 5$.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

5. Para quais valores reais de x existe $\log_{x+1}(x^2 + 3x - 18)$?

Resolução

Para que o logaritmo exista, as seguintes condições devem ser, simultaneamente, satisfeitas:

$$\begin{cases} x^2 + 3x - 18 > 0 & \text{(I)} \\ x + 1 > 0 \text{ e } x + 1 \neq 1 & \text{(II)} \end{cases}$$

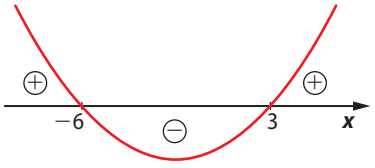
Resolvendo (I) e (II), temos:

(I) $x^2 + 3x - 18 > 0$

Os zeros da função f dada por $f(x) = x^2 + 3x - 18$ são:

$x^2 + 3x - 18 = 0 \Rightarrow x' = 3$ e $x'' = -6$

Estudo do sinal de f:



Logo, a solução de (I) é:

$x \in \mathbb{R}$ tal que $x < -6$ ou $x > 3$

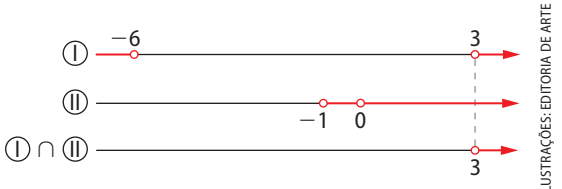
(II) $x + 1 > 0$ e $x + 1 \neq 1$

$$\begin{cases} x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1 \\ x + 1 \neq 1 \Rightarrow x \neq 0 \end{cases}$$

Logo, a solução de (II) é:

$x \in \mathbb{R}$ tal que $x > -1$ e $x \neq 0$

Fazendo a intersecção das soluções de (I) e (II), temos:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Portanto, $\log_{x+1}(x^2 + 3x - 18)$ existe para $x \in \mathbb{R}$ tal que $x > 3$.

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. Escreva no caderno o valor dos logaritmos:

a) $\log_9 1$ 0

b) $\log_8 8$ 1

c) $\log_{\frac{1}{10}}\left(\frac{1}{10}\right)^3$ 3

d) $5^{\log_5 7}$ 7

e) $\log_{\sqrt{10}}\sqrt{10}$ 1

f) $\log_{\frac{1}{3}}3^5$ −5

2. Aplicando a definição, calcule o valor dos logaritmos:

a) $\log_{\sqrt{8}}4$ $\frac{4}{3}$

b) $\log_5 0{,}000064$ −6

c) $\log_{49}\sqrt[3]{7}$ $\frac{1}{6}$

d) $\log_2\frac{1}{16}$ −4

e) $\log_{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{32}$ $-\frac{5}{3}$

f) $\log_{\frac{1}{4}}1024$ −5

3. Determine o valor das expressões a seguir.

a) $\log_5\frac{1}{25} + \log_{\frac{2}{3}}\frac{9}{4}$ −4

b) $\log_{\frac{1}{3}}27 + \log_{10}0{,}001 - \log_{0{,}1}10\sqrt{10}$ $-\frac{9}{2}$

4. Determine o valor de m, sabendo que:

$m = 2^{5 + \log_2 3} + 3^{\log_3 7 + \log_3 2}$ $m = 110$

5. Calcule o valor de cada uma das expressões a seguir:

a) $\log_4 4 - \log_5 5^{-7}$ 8

b) $3^{\log_3 27} : 4^{\log_4 \frac{1}{2}}$ 54

c) $(\log_{0,2} 1)^{\log_6 6^5}$ 0

d) $\dfrac{\log_3 1 + \log_{10} 0{,}01}{\log_2\frac{1}{64}\cdot\log_4\sqrt{8}}$ $\frac{4}{9}$

6. Calcule as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, em que:

$a = \log_{10} 0{,}001$; $b = \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{64}$ e $c = 3 \cdot \log_2 8$.

$S = \{-1, 3\}$

7. Um número é tal que seu logaritmo é 4 na base p e 8 na base $\frac{p}{3}$. Calcule esse número.

6 561

8. Determine os valores reais de x para que exista:

a) $\log(1 - x)$ $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$

b) $\log_5(5x - 2) + \log_5(x - 3)$ $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

c) $\log_5(x^2 + 4x - 5)$ $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -5 \text{ ou } x > 1\}$

d) $\log(50 - 5x - x^2)$ $\{x \in \mathbb{R} \mid -10 < x < 5\}$

» Propriedades operatórias dos logaritmos

Vamos estudar agora as propriedades operatórias dos logaritmos, que poderão ser utilizadas em diferentes situações envolvendo cálculos com logaritmos. Dados os números reais a, b, c e n, em que a, b e c são positivos e $a \neq 1$, temos as propriedades apresentadas a seguir.

Logaritmo de um produto

Em uma mesma base, o logaritmo de um **produto** de dois números positivos é igual à **soma** dos logaritmos de cada um dos fatores.

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

Demonstração

Considere os logaritmos:

$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$ (I)

$\log_a c = y \Leftrightarrow a^y = c$ (II)

$\log_a (b \cdot c) = z \Leftrightarrow a^z = b \cdot c$ (III)

Substituindo (I) e (II) em (III), temos: $a^z = b \cdot c \Rightarrow a^z = a^x \cdot a^y \Rightarrow a^z = a^{x+y} \Rightarrow z = x + y$

Dessa última igualdade, obtemos: $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

Exemplos:

a) $\log_2 (2 \cdot 3) = \log_2 2 + \log_2 3$

b) $\log_3 500 = \log_3 (5 \cdot 100) = \log_3 5 + \log_3 100$

Logaritmo de um quociente

Em uma mesma base, o logaritmo de um **quociente** de dois números positivos é igual à **diferença** entre o logaritmo do dividendo e o logaritmo do divisor.

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

Demonstração

Considere os logaritmos:

$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$ (I) $\quad \log_a c = y \Leftrightarrow a^y = c$ (II) $\quad \log_a \frac{b}{c} = z \Leftrightarrow a^z = \frac{b}{c}$ (III)

Substituindo (I) e (II) em (III), temos: $a^z = \frac{b}{c} \Rightarrow a^z = \frac{a^x}{a^y} \Rightarrow a^z = a^{x-y} \Rightarrow z = x - y$

Dessa última igualdade, obtemos: $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$

Exemplos:

a) $\log_6 \left(\frac{243}{5}\right) = \log_6 243 - \log_6 5$

b) $\log_4 \left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right) = \log_4 \sqrt{10} - \log_4 3$

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Logaritmo de uma potência

Em uma mesma base, o logaritmo de uma **potência** de base positiva é igual ao **produto** do expoente pelo logaritmo da base dessa potência.

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$$

Demonstração

Considere o logaritmo $\log_a b = x$. Pela definição, temos: $a^x = b$

Elevando os dois membros ao expoente n, temos: $a^x = b \Rightarrow (a^x)^n = b^n \Rightarrow a^{nx} = b^n$

Portanto, nx é o logaritmo de b^n na base a, isto é: $\log_a b^n = nx$

Substituindo x por $\log_a b$, obtemos: $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$

Exemplos:

a) $\log_3 5^2 = 2 \cdot \log_3 5$

b) $\log_5 (12)^{-2} = -2 \cdot \log_5 12$

Mudança de base do logaritmo

Até aqui, aprendemos as propriedades operatórias dos logaritmos que valem para os logaritmos de mesma base.

Vamos estudar agora uma propriedade que permite a **mudança de base** do logaritmo, muito útil nas situações em que é preciso realizar operações com logaritmos de bases diferentes.

Admitindo uma base c, tal que $c > 0$ e $c \neq 1$, temos:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Demonstração

Considere o logaritmo $\log_a b = x$.

Pela definição, temos $a^x = b$.

Agora, considere os logaritmos:

$\log_c b = y \Leftrightarrow c^y = b$

$\log_c a = z \Leftrightarrow c^z = a$

Assim, da igualdade $a^x = b$ e sabendo que $z \neq 0$, temos:

$$a^x = b \Rightarrow (c^z)^x = c^y \Rightarrow c^{zx} = c^y \Rightarrow zx = y \Rightarrow x = \frac{y}{z} \Rightarrow \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Exemplos:

a) $\log_2 6 = \dfrac{\log_3 6}{\log_3 2}$

b) $\log_{16} 64 = \dfrac{\log_2 64}{\log_2 16}$

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

» Calculadora e logaritmos

Podemos usar uma calculadora científica no cálculo de logaritmos. Nela, trabalharemos com o logaritmo decimal e com o logaritmo natural.

STOCKER SVP/SHUTTERSTOCK.COM

- A ordem das teclas a serem pressionadas para executar os cálculos e a quantidade de casas decimais dos resultados podem diferir de acordo com o modelo da calculadora científica utilizada.

MIKSER45/SHUTTERSTOCK.COM

Saiba que...

Caso tenhamos logaritmos em outras bases, é necessário fazer a mudança de base antes de efetuar os cálculos com a calculadora.

Professor, pode haver diferença entre o funcionamento e as funções das diferentes calculadoras. Se julgar interessante, pedir aos estudantes que consultem o manual da calculadora que eles estão usando.

Geralmente, as calculadoras científicas apresentam duas teclas para o cálculo de logaritmos: [log] e [ln]. Com elas, podemos calcular o logaritmo decimal e o natural de um número positivo. Por exemplo:

- Para calcular log 16,4, pressionamos [log] [1] [6] [·] [4] [=] e obtemos 1,214843848.
- Para calcular ln 6, pressionamos [ln] [6] [=] e obtemos 1,791759469.

Também podemos determinar o logaritmando em uma operação aplicando a definição de logaritmo e utilizando a opção da calculadora científica que permite calcular uma potência de 10. Por exemplo:

- Para determinar o valor de k em $\log k \simeq 0{,}434$, aplicamos a definição de logaritmo, de modo que $\log k \simeq 0{,}434 \Leftrightarrow k \simeq 10^{0{,}434}$.

  Pressionamos [SHIFT] [10^x log] [(] [0] [·] [4] [3] [4] [)] [=] e obtemos 2,716439269.

- Para determinar o valor de b em $\ln b \simeq 0{,}693$, aplicamos a definição de logaritmo, de modo que $\ln b \simeq 0{,}693 \Leftrightarrow b \simeq e^{0{,}693}$. Em seguida, pressionamos [SHIFT] [e^x ln] [(] [0] [·] [6] [9] [3] [)] [=] e obtemos 1,999705661.

ATIVIDADES RESOLVIDAS

6. Calcule os logaritmos a seguir considerando as aproximações $\log 2 = 0{,}301$, $\log 3 = 0{,}477$ e $\log 5 = 0{,}699$.

a) $\log 15$ **b)** $\log 18$ **c)** $\log \sqrt{3}$ **d)** $\log 7{,}2$

Resolução

a) $\log 15 = \log (3 \cdot 5)$

Usando a propriedade do logaritmo de um produto, temos:

$\log (3 \cdot 5) = \log 3 + \log 5 = 0{,}477 + 0{,}699 = 1{,}176$

Portanto, $\log 15 = 1{,}176$.

b) $\log 18 = \log (2 \cdot 3 \cdot 3) = \log (2 \cdot 3^2)$

Usando as propriedades do logaritmo de um produto e de uma potência, temos:

$\log (2 \cdot 3^2) = \log 2 + \log 3^2 = \log 2 + 2 \cdot \log 3 = 0{,}301 + 2 \cdot 0{,}477 = 1{,}255$

Portanto, $\log 18 = 1{,}255$.

c) $\log \sqrt{3} = \log 3^{\frac{1}{2}}$

Usando a propriedade do logaritmo de uma potência, temos:

$\log 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \log 3 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}477 = 0{,}2385$

Portanto, $\log \sqrt{3} = 0{,}2385$.

d) $\log 7{,}2 = \log \frac{72}{10}$

Usando a propriedade do logaritmo de um quociente, temos:

$\log \frac{72}{10} = \log 72 - \underbrace{\log 10}_{1} = \log 72 - 1$

Fatorando o número 72 e aplicando as propriedades estudadas, obtemos:

$\log 72 = \log (2^3 \cdot 3^2) = \log 2^3 + \log 3^2 = 3 \cdot \log 2 + 2 \cdot \log 3 = \underbrace{3 \cdot 0{,}301}_{0{,}903} + \underbrace{2 \cdot 0{,}477}_{0{,}954} = 1{,}857$

Assim, $\log 7{,}2 = \log 72 - 1 = 1{,}857 - 1 = 0{,}857$.

Portanto, $\log 7{,}2 = 0{,}857$.

7. Sendo $\log a = 4$, $\log c = 6$ e $\log d = -1$, calcule o valor de $\log \left(\frac{ac}{d}\right)$.

Resolução

Utilizando a propriedade do logaritmo de um quociente, temos:

$\log \left(\frac{ac}{d}\right) = \log (ac) - \log d$

Usando a propriedade do logaritmo de um produto, temos:

$\log (ac) - \log d = \log a + \log c - \log d$

Substituindo os valores dados, obtemos:

$\log a + \log c - \log d = 4 + 6 - (-1) = 11$

Portanto, $\log \left(\frac{ac}{d}\right) = 11$.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

8. Usando as aproximações $\log 2 = 0{,}301$, $\log 3 = 0{,}477$ e $\log 7 = 0{,}845$, determine o valor dos logaritmos a seguir.

a) $\log_6 70$ **b)** $\log_5 20$

Resolução

Como os dados do enunciado são logaritmos na base 10, em cada item, vamos primeiro efetuar a mudança de base para a base decimal. Em seguida, aplicamos as propriedades estudadas.

a) $\log_6 70 = \dfrac{\log 70}{\log 6} = \dfrac{\log (7 \cdot 10)}{\log (2 \cdot 3)} = \dfrac{\log 7 + \log 10}{\log 2 + \log 3} = \dfrac{0{,}845 + 1}{0{,}301 + 0{,}477} = \dfrac{1{,}845}{0{,}778} \simeq 2{,}371$

b) $\log_5 20 = \dfrac{\log 20}{\log 5} = \dfrac{\log (4 \cdot 5)}{\log 5} = \dfrac{\log 2^2 + \log \frac{10}{2}}{\log \frac{10}{2}} = \dfrac{(2 \cdot \log 2) + \log 10 - \log 2}{\log 10 - \log 2} =$

$= \dfrac{2 \cdot 0{,}301 + 1 - 0{,}301}{1 - 0{,}301} = \dfrac{1{,}301}{0{,}699} \simeq 1{,}861$

9. Com o auxílio de uma calculadora científica, escreva 783 como uma potência de base 10. Considere cinco casas decimais.

Resolução

Aplicando a definição de logaritmo, temos: $\log 783 = x \Leftrightarrow 783 = 10^x$

Para calcular $\log 783$ na calculadora e obter o valor de x, pressionamos

log 7 8 3 = e obtemos 2,893761762.

Considerando apenas cinco casas decimais depois da vírgula, temos: $\log 783 \simeq 2{,}89376$

Logo, $783 \simeq 10^{2{,}89376}$.

10. Com o auxílio de uma calculadora científica, calcule $\log_3 5$ com aproximação de cinco casas decimais.

Resolução

Para calcular um logaritmo que não seja decimal utilizando a calculadora científica, é necessário primeiro utilizar a propriedade de mudança de base, obtendo um quociente entre dois logaritmos decimais. Assim:

$\log_3 5 = \dfrac{\log 5}{\log 3}$

Para calcular $\dfrac{\log 5}{\log 3}$ e obter o valor de $\log_3 5$, pressionamos

(log 5) ÷ (log 3) = e obtemos 1,464973520.

Portanto, $\log_3 5 \simeq 1{,}46497$.

11. Com o auxílio de uma calculadora científica, calcule um valor aproximado para x em $\ln x \simeq -2{,}36653$.

Resolução

Aplicando a definição de logaritmo, temos: $\ln x \simeq -2{,}36653 \Leftrightarrow x \simeq e^{-2{,}36653}$

Para calcular $e^{-2{,}36653}$ na calculadora e determinar o valor de x, pressionamos

SHIFT ln (− 2 · 3 6 6 5 3) = e obtemos 0,093805668.

Logo, $x \simeq 0{,}09381$.

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

9. Usando a aproximação $\log 11 = 1{,}041$, calcule:

a) $\log 110$ 2,041
b) $\log 121$ 2,082
c) $\log \frac{1}{11}$ −1,041
d) $\log \sqrt{1331}$ 1,5615
e) $\log 1{,}21$ 0,082
f) $\log 0{,}121$ −0,918

10. Calcule o valor das expressões aplicando as propriedades dos logaritmos.

a) $\log 5 + \log 200$ 3
b) $\log 100 + \log 50 + \log 10 + \log 2$ 5
c) $\log_2 24 - \log_2 3$ 3
d) $\log_5 8 + \log_5 12{,}5 - \log_5 4$ 2

11. Sendo $\log_x a = 6$, $\log_x b = 4$ e $\log_x c = 2$, calcule:

a) $\log_c \sqrt{abc}$ 3
b) $\log_c (a^3 \cdot b^2)$ 13

12. Se $\log_2 3 = k$, qual é o valor do produto $\log_2 3 \cdot \log_3 2$? 1

13. Calcule o produto $\log_3 2 \cdot \log_2 5 \cdot \log_5 3$. 1

14. Simplifique a expressão $\log_3 5 \cdot \log_4 27 \cdot \log_{25} \sqrt[3]{2}$. $\frac{1}{4}$

15. Resolva o sistema a seguir: $S = \{(10, 10)\}$

$$\begin{cases} a + b = 20 \\ \log a + \log b = 2 \end{cases}$$

16. (PUC-SP) Se $\log 2 = x$ e $\log 3 = y$, determine $\log 375$. $y + 3 - 3x$

17. Um certo componente eletrônico processa n *bits* em $\log n$ milisegundos. Adotando $\log 5 = 0{,}699$, em quantos milisegundos serão processados 64 *bits*? 1,806 milisegundo

As atividades a seguir devem ser resolvidas com o auxílio de uma calculadora científica.

18. Calcule os valores a seguir com aproximação, quando necessário, de cinco casas decimais.

a) $\log 0{,}7$ −0,15490
b) $\log 0{,}12$ −0,92082
c) $\log 834$ 2,92117
d) $\log 0{,}00001$ −5
e) $\ln 25$ 3,21888
f) $\ln 0{,}92$ −0,08338

19. Em cada caso, determine b, com aproximação de duas casas decimais, quando necessário.

a) $\log b = 1{,}88081$ 76
b) $\log b = 1{,}75587$ 57
c) $\ln b = 6{,}20051$ 493
d) $\ln b = 1{,}05082$ 2,86

20. Determine o valor de x em cada caso, com aproximação de quatro casas decimais.

a) $\log x = -0{,}5$ 0,3162
b) $\log x = -0{,}15$ 0,7079
c) $10^x = 0{,}5$ −0,3010
d) $10^x = 2$ 0,3010
e) $e^x = 10$ 2,3026
f) $e^x = 0{,}5$ −0,6931
g) $e^x = 0{,}15$ −1,8971
h) $e^x = 0{,}005$ −5,2983

21. Copie no caderno o quadro a seguir e complete-o com os valores faltantes. Caso seja necessário, use aproximação com seis casas decimais.

Número (N)	Potência de 10	$\log N$
75	$10^{1{,}875061}$	1,875061
643	$10^{2{,}808211}$	2,808211
1320	$10^{3{,}120574}$	3,120574
1000000	10^6	6
0,00001	10^{-5}	−5
0,7	$10^{-0{,}154902}$	−0,154902
0,834	$10^{-0{,}078834}$	−0,078834

22. Determine b em cada caso.

a) $\ln b \simeq 1{,}098612289$ $b \simeq 3$
b) $\ln b \simeq 1{,}945910149$ $b \simeq 7$
c) $\ln b \simeq -0{,}69314718$ $b \simeq 0{,}5$
d) $\ln b = -1$ $b \simeq 0{,}367879$
e) $\ln b = 0$ $b = 1$

23. O valor aproximado do logaritmo natural de um número é 3,48124. Descubra qual é esse número, considerando aproximação de uma casa decimal. 32,5

24. Calcule o valor de $\log_4 e$ com aproximação de quatro casas decimais. 0,7213

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Função logarítmica

Existem diversas situações em que são usados logaritmos; uma delas, por exemplo, é a escala de pH (potencial hidrogeniônico). O pH indica a acidez de um meio aquoso e é calculado em função da concentração de íons de hidrogênio H^+ que esse meio apresenta. Na escala de pH, uma solução é considerada ácida quando $0 \leqslant pH < 7$, neutra quando $pH = 7$ e básica quando $7 < pH \leqslant 14$.

O cálculo do pH de um meio aquoso é feito usando-se logaritmo:

$$pH = \log \frac{1}{[H^+]}$$

← concentração de íons de hidrogênio (mol/L)

A igualdade anteriormente descrita é a representação de uma **função logarítmica**.

Por exemplo, podemos determinar o pH de uma xícara de café que apresenta 10^{-5} mol/L de íons de hidrogênio. Sabendo disso:

$$pH = \log \frac{1}{[H^+]} = \log \frac{1}{10^{-5}} = \log 1 - \log 10^{-5} = 0 - (-5) \Rightarrow pH = 5$$

Portanto, o café tem pH igual a 5, o que indica que ele é considerado um meio ácido.

PAWEL KACPEREK/SHUTTERSTOCK.COM

■ O papel indicador em tira absorvente é um indicador universal de pH que, ao ser mergulhado em solução aquosa, adquire coloração específica, indicando se o meio é ácido ou básico, dentro de uma escala de 1 a 14. Para descobrir o valor de pH da solução analisada, basta comparar a cor obtida na tira de papel com uma escala padrão de cores.

Agora, acompanhe a definição matemática de função logarítmica.

A função $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \log_a x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, é denominada **função logarítmica**.

Exemplos:

a) $f(x) = \log x$

b) $g(x) = \log_5 x$

c) $h(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

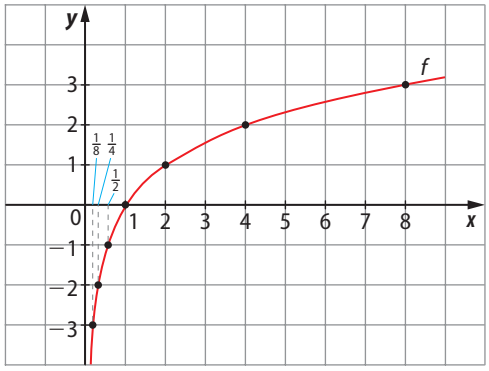
MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

» Gráfico da função logarítmica

Vamos esboçar o gráfico de algumas funções logarítmicas. Observe os exemplos a seguir.

- Esboço do gráfico de $f(x) = \log_2 x$.

x	$f(x) = \log_2 x$
$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3

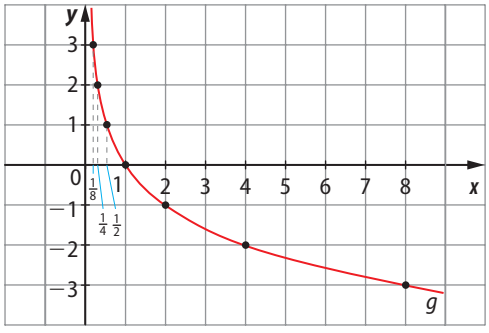


ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Observe que os valores de $\log_2 x$ aumentam conforme os valores de x aumentam.

- Esboço do gráfico de $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

x	$g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$
$\frac{1}{8}$	3
$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{2}$	1
1	0
2	-1
4	-2
8	-3



Observe que os valores de $\log_{\frac{1}{2}} x$ diminuem conforme os valores de x aumentam.

Saiba que...

Note que as curvas dos gráficos se aproximam do eixo y, mas não o tocam. Em contrapartida, ambas intersectam o eixo x no ponto (1, 0).

De modo geral, dada a função f definida por $f(x) = \log_a x$ (com $a > 0$ e $a \neq 1$), temos:

- O domínio da função é $D(f) = \mathbb{R}_+^*$.
- O contradomínio da função é $CD(f) = \mathbb{R}$.
- O conjunto imagem da função é $Im(f) = \mathbb{R}$.

A função logarítmica dada por $f(x) = \log_a x$ é bijetora, pois é sobrejetora e injetora.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Crescimento e decrescimento da função logarítmica

Pense e responda

- Espera-se que os estudantes percebam que, nos casos em que $a > 1$, as funções são crescentes e, nos casos em que $0 < a < 1$, são decrescentes.
- Nesses casos, nenhum gráfico é exibido, pois a função não está definida para esses valores.

Vamos analisar a influência da base a na função logarítmica dada por $f(x) = \log_a x$ traçando seu gráfico com o auxílio do **GeoGebra**.

Para isso, digite "$f(x)=\log(a,x)$" no campo de entrada. Ao digitar a função dessa maneira, o *software* interpreta o primeiro número entre parênteses como base do logaritmo e o segundo como logaritmando.

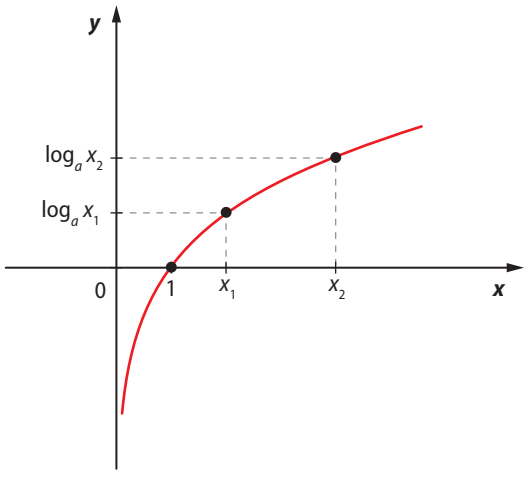
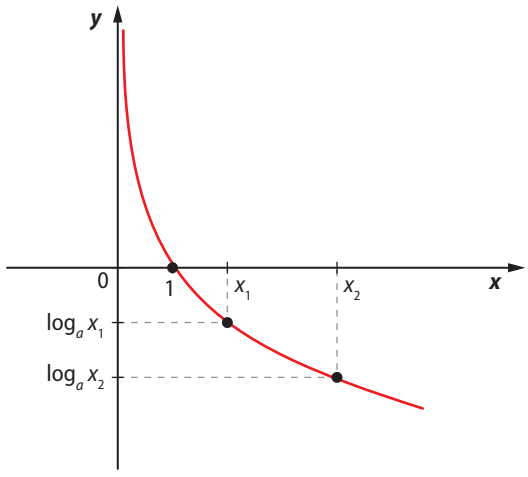
Aperte a tecla ***Enter***. O *software* criará um controle deslizante para a base a e exibirá, na janela de visualização, o gráfico da função dada por $f(x) = \log_a x$, de acordo com o valor indicado para a no controle deslizante.

Movimente o cursor do controle deslizante, observe as mudanças no gráfico e responda:

- Nos casos em que $a > 1$, as funções parecem ser crescentes ou decrescentes? E nos casos em que $0 < a < 1$?
- O que acontece na janela de visualização quando o controle deslizante está em um valor $a < 0$ ou $a = 1$?

Na atividade anterior, você deve ter observado que a base a influencia o comportamento da função logarítmica dada por $f(x) = \log_a x$.

De modo geral, considerando a função exponencial dada por $f(x) = \log_a x$, temos:

$a > 1$	$0 < a < 1$
	
• Quando $a > 1$, a função é **crescente**. • $\forall x_1, x_2 \in D(f), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$	• Quando $0 < a < 1$, a função é **decrescente**. • $\forall x_1, x_2 \in D(f), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

» Relação entre função exponencial e função logarítmica

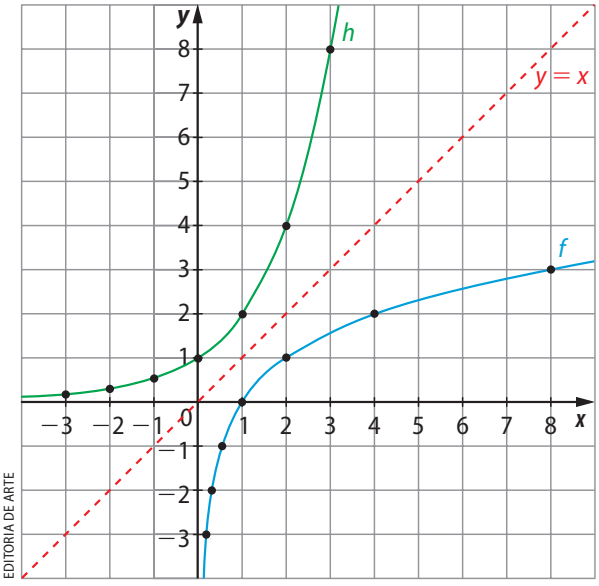
Aprendemos, no início deste Capítulo, que a potenciação e os logaritmos estão relacionados. Do mesmo modo, estudaremos a seguir que a função logarítmica e a função exponencial também estão relacionadas.

Anteriormente, esboçamos o gráfico da função logarítmica dada por $f(x) = \log_2 x$. Vamos traçar, no mesmo plano cartesiano, o gráfico dessa função e o gráfico da função exponencial dada por $h(x) = 2^x$. Observe.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

x	$y = f(x) = \log_2 x$
$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3

x	$y = h(x) = 2^x$
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8



EDITORIA DE ARTE

$D(f) = \mathbb{R}_+^*$ $\quad$ $D(h) = \mathbb{R}$

$CD(f) = \mathbb{R}$ $\quad$ $CD(h) = \mathbb{R}_+^*$

$Im(f) = \mathbb{R}$ $\quad$ $Im(h) = \mathbb{R}_+^*$

Observe que, para todos os valores de x e y apresentados anteriormente, para $f(x) = y$, temos $h(y) = x$. Note, ainda, que os gráficos das funções f e h são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares ($y = x$).

Nesse caso, as funções $f(x) = \log_2 x$ e $h(x) = 2^x$ são inversas uma da outra.

De modo geral, a função logarítmica $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \log_a x$ e a função exponencial $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ dada por $h(x) = a^x$, ambas com $a > 0$ e $a \neq 1$, são inversas uma da outra.

Considerando $f(x) = y = \log_a x$, para encontrar a inversa de f, trocamos a variável x por y e a variável y por x e, em seguida, isolamos y:

$$x = \log_a y \Rightarrow a^x = y$$

Assim, a lei da função inversa de f é $f^{-1}(x) = a^x$, ou seja, a função h é inversa da função f.

Do mesmo modo, considerando $h(x) = y = a^x$, para encontrar a inversa de h, trocamos a variável x por y e a variável y por x e, em seguida, isolamos y:

$$x = a^y \Rightarrow \log_a x = y$$

Assim, a lei da função inversa de h é $h^{-1}(x) = \log_a x$, ou seja, a função f é inversa da função h.

Portanto, as funções dadas por $f(x) = \log_a x$ e $h(x) = a^x$ são inversas uma da outra.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

ATIVIDADES RESOLVIDAS

12. Esboce o gráfico da função $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$.

Resolução

Sendo a base do logaritmo igual a $\frac{1}{3}$, é conveniente escolher potências de base $\frac{1}{3}$ para x.

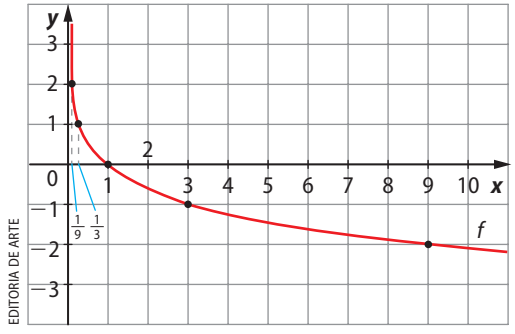
Assim:

- $x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \Rightarrow f\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\right) = \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = -2$
- $x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \Rightarrow f\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\right) = \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = -1$
- $x = \left(\frac{1}{3}\right)^{0} \Rightarrow f\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{0}\right) = \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{0} = 0$
- $x = \left(\frac{1}{3}\right)^{1} \Rightarrow f\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{1}\right) = \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{1} = 1$
- $x = \left(\frac{1}{3}\right)^{2} \Rightarrow f\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\right) = \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{2} = 2$

Assim, temos:

x	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
y	−2	−1	0	1	2

Marcando os pontos no plano cartesiano, esboçamos o gráfico:



13. Dada a função $f(x) = \log_2 (4x - 1)$, faça o que se pede.

a) Classifique a função em crescente ou decrescente.

b) Determine o domínio de f.

c) Determine $f^{-1}(x)$.

Resolução

a) Como a base do logaritmo de $f(x)$ é maior do que 1, pois $a = 2$, a função é crescente.

b) Pela condição de existência dos logaritmos, temos: $\log_a b = x \Leftrightarrow b = a^x$, $b > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$

Precisamos analisar a base e o logaritmando da função:

- Logaritmando ($b > 0$): $4x - 1 > 0$

  $4x - 1 > 0 \Rightarrow 4x > 1 \Rightarrow x > \frac{1}{4}$
- Base ($a > 0$ e $a \neq 1$): $a = 2$

Logo, o domínio de $f(x) = \log_2 (4x - 1)$ é $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{4}\right\}$.

c) Para determinar a função inversa, trocamos x por y e y por x na lei da função:

$f(x) = \log_2 (4x - 1)$

$x = \log_2 (4y - 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^x = 4y - 1 \Rightarrow 4y = 2^x + 1 \Rightarrow y = \frac{2^x + 1}{4}$

Portanto, a função inversa é $f^{-1}(x) = \frac{2^x + 1}{4}$.

14. (Enem/MEC) A exposição a alguns níveis sonoros pode causar lesões auditivas. Por isso, em uma indústria, são adotadas medidas preventivas de acordo com a máquina que o funcionário opera e o nível N de intensidade do som, medido em decibel (dB), a que o operário é exposto, sendo $N = \log_{10} I^{10} - \log_{10} I_0^{10}$, I a intensidade do som e $I_0 = 10^{-12}$ W/m².

Disponível em: www.sofisica.com.br.
Acesso em: 8 jul. 2015 (adaptado).

Quando o som é considerado baixo, ou seja, $N = 48$ dB ou menos, deve ser utilizada a medida preventiva I. No caso de o som ser moderado, quando N está no intervalo (48 dB, 55 dB), deve ser utilizada a medida preventiva II. Quando o som é moderado alto, que equivale a N no intervalo (55 dB, 80 dB), a medida preventiva a ser usada é a III. Se N estiver no intervalo (80 dB, 115 dB), quando o som é considerado alto, deve ser utilizada a medida preventiva IV. E se o som é considerado muito alto, com N maior que 115 dB, deve-se utilizar a medida preventiva V. Uma nova máquina, com $I = 8 \times 10^{-8}$ W/m², foi adquirida e será classificada de acordo com o nível de ruído que produz.

Considere 0,3 como aproximação para $\log_{10} 2$. O funcionário que operará a nova máquina deverá adotar a medida preventiva

a) I. **b)** II. **c)** III. **d)** IV. **e)** V.

Resolução

Para determinar a medida preventiva que será usada para a nova máquina, precisamos determinar o valor N para $I = 8 \cdot 10^{-8}$ W/m². Para isso, substituímos o valor de I em $N = \log_{10} I^{10} - \log_{10} I_0^{10}$; como $I_0 = 10^{-12}$ W/m², temos:

$N = \log_{10} I^{10} - \log_{10} I_0^{10} \Rightarrow$

$N = \log_{10} (8 \cdot 10^{-8})^{10} - \log_{10} (10^{-12})^{10}$

Utilizando as propriedades operatórias dos logaritmos, temos:

$N = \log_{10} \frac{(8 \cdot 10^{-8})^{10}}{(10^{-12})^{10}} \Rightarrow$

$\Rightarrow N = \log_{10} \left(\frac{8 \cdot 10^{-8}}{10^{-12}}\right)^{10} \Rightarrow$

$\Rightarrow N = 10 \cdot (\log_{10} 8 \cdot 10^{-8+12}) \Rightarrow$

$\Rightarrow N = 10 \cdot (\log_{10} 2^3 + \log_{10} 10^4) \Rightarrow$

$\Rightarrow N = 10 \cdot (3 \cdot \log_{10} 2 + 4 \cdot \log_{10} 10) \Rightarrow$

$\Rightarrow N \simeq 10 \cdot (3 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 1) \Rightarrow N \simeq 49$

Assim, o nível de intensidade do som da máquina é de aproximadamente 49 dB, e a medida preventiva para a nova máquina deverá ser a II. Portanto, a alternativa **b** é a correta.

FÓRUM

Poluição sonora

Diferentemente dos outros tipos de poluição, a poluição sonora se caracteriza por não produzir resíduos ou acúmulos poluentes no meio ambiente. No entanto, ela afeta diretamente o organismo dos seres vivos que vivem próximo às fontes emissoras de som. Os impactos da poluição sonora nos seres humanos incluem insônia, perda de atenção, dor de cabeça e perda de audição temporária ou permanente.

YUGANOV KONSTANTIN/SHUTTERSTOCK.COM

Em algumas profissões em que a intensidade dos ruídos é prejudicial, os protetores auriculares são parte dos equipamentos de proteção individual (EPIs).

O crescimento das cidades deixa os seres vivos cada dia mais vulneráveis a esses ruídos prejudiciais, de modo que a poluição sonora passou a ser uma constante na vida desses indivíduos, sendo vista como um dos problemas a serem combatidos nos grandes centros urbanos.

Agora, reúna-se a um colega, e façam uma pesquisa sobre o tema **poluição sonora** para debater atitudes pessoais e governamentais que ajudariam a mitigar esse problema.

Ver as **Orientações para o professor.**

Para ouvir

- CIDADE em movimento #4: poluição sonora. Locução de: Alessandra Ueno; Guilherme Castro Sousa. São Paulo: Jornal da USP, 12 set. 2024. *Podcast*. Disponível em: https://jornal.usp.br/podcast/cidade-em-movimento-4-poluicao-sonora/. Acesso em: 23 set. 2024.

  O *podcast* trata da poluição sonora e dos impactos desse tipo de poluição.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

25. Construa, em um mesmo plano cartesiano, os gráficos de: Ver as **Orientações para o professor**.

a) $f(x) = 3^x$ e $g(x) = \log_3 x$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ e $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

26. Faça o esboço do gráfico da função dada por $f(x) = \log |x|$ e determine o domínio e a imagem dessa função.

Ver as **Orientações para o professor**.

27. (Ufop-MG) Seja f a função real de variável real definida por $f(x) = \sqrt{x^2 - 9} + \log_{6-x}(x + 5)$. Encontre os valores de x para os quais f faz sentido. $\{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x \leq -3 \text{ ou } 3 \leq x < 6 \text{ e } x \neq 5\}$

28. Copie o quadro a seguir, referente às funções $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$ e $g(x) = 2 + \log_{\frac{1}{4}} x$, e, depois, complete-o. Ver as **Orientações para o professor**.

x	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	1	4	16
$f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$	2	1	0	−1	−2
$g(x) = 2 + \log_{\frac{1}{4}} x$	4	3	2	1	0

Agora, faça o que se pede nos itens a seguir.

a) Utilizando o **GeoGebra**, construa, em um mesmo plano cartesiano, os gráficos de f e de g.

b) Ao analisar os gráficos construídos, podemos dizer que f e g são funções crescentes ou decrescentes?

c) Quais são o domínio e a imagem dessas funções?

d) O que você observa ao comparar os valores no quadro que você completou e os dois gráficos construídos?

e) Descreva como seria o gráfico da função dada por $p(x) = \left(\log_{\frac{1}{4}} x\right) - 2$, em relação ao gráfico de f, sem construí-lo.

f) A partir do gráfico de f, descreva como obter o gráfico da função dada por $q(x) = \log_{\frac{1}{4}}(x + 2)$. Para responder, imagine que você esteja escrevendo um bilhete a um colega com essa instrução.

29. (UEPA) Por volta dos anos 80, durante a implantação do projeto Proálcool, uma montadora estimou que sua produção de carros a álcool teria um crescimento anual de acordo com a expressão: $P(t) = 10^5 \cdot \log_3 (t + 1)$, onde P é a quantidade produzida e t o número de anos. Dessa forma, daqui a 8 anos a produção estimada será de: alternativa **a**

a) 200 000 carros.

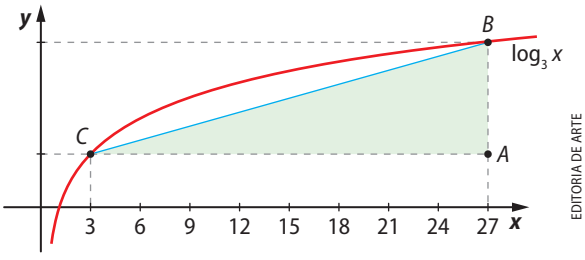
b) 220 000 carros.

c) 232 000 carros.

d) 250 000 carros.

e) 300 000 carros.

30. (UFAM) Na figura a seguir a curva representa o gráfico da função $f(x) = \log_3 x$. A área do triângulo ABC é igual a: alternativa **b**



EDITORIA DE ARTE

a) 25 unidades de área.

b) 24 unidades de área.

c) 23 unidades de área.

d) 21 unidades de área.

e) 20 unidades de área.

31. Ao analisar uma amostra aquosa, um químico verificou que a concentração de íons de hidrogênio na solução era de $6{,}4 \cdot 10^{-7}$ mol/L.

a) Sabendo que o pH de uma solução é dado pela expressão $\text{pH} = -\log [H^+]$, em que $[H^+]$ indica a concentração de íons de hidrogênio em mol/L, e considerando $\log 2 \simeq 0{,}30$, qual é o valor do pH dessa solução? $\text{pH} \simeq 6{,}2$

b) Sabendo que uma solução é considerada ácida quando $0 \leq \text{pH} < 7$, neutra quando $\text{pH} = 7$ e básica quando $7 < \text{pH} \leq 14$, a solução analisada pelo químico é neutra, básica ou ácida? ácida

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Equações logarítmicas

As equações que apresentam a incógnita no logaritmando ou na base de um logaritmo de base real, positiva e diferente de 1, são denominadas **equações logarítmicas**.

Exemplos:

a) $\log_3 (x - 1) = 2$

b) $\log_{x+1} (19 - x) = 2$

c) $1 - \log_2 x = \log_2 3 + 4 \cdot \log_2 x$

d) $\log_2 (x^2 + x + 2) = 5$

Para resolver essas equações, aplicamos a definição de logaritmo e a 5ª consequência da definição:

$$\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$$

Além disso, devemos considerar a condição de existência de todos os logaritmos envolvidos, ou seja, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ e $c > 0$.

Inequações logarítmicas

As desigualdades que apresentam a incógnita no logaritmando ou na base de um logaritmo de base real, positiva e diferente de 1, são denominadas **inequações logarítmicas**.

Exemplos:

a) $\log_2 x > 4$

b) $\log (x - 1) + \log (3x + 2) \leqslant \log x$

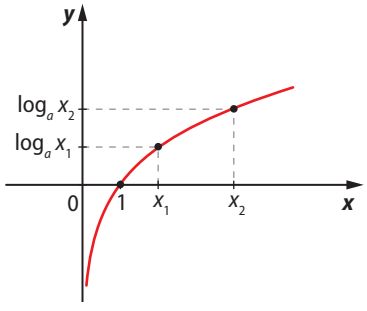
c) $\log_5 x + \dfrac{1}{\log_5 x} < \dfrac{1}{4}$

d) $\log_{x+1} (x^2 + 4x - 5) \geqslant 2$

Com base no gráfico da função f dada por $f(x) = \log_a x$, aplicamos as propriedades a seguir para resolver inequações logarítmicas. Além disso, devemos considerar a condição de existência de todos os logaritmos envolvidos.

1º caso: $a > 1$ (função crescente)

Quando a base do logaritmo é maior do que 1, a relação de desigualdade entre os logaritmos se mantém entre os logaritmandos.

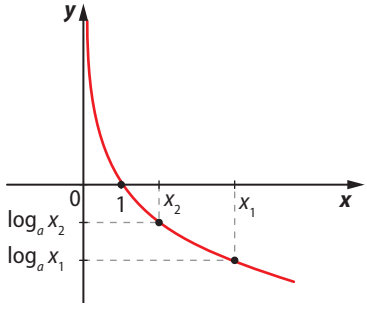


$$\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$$

Conservamos o sentido da desigualdade.

2º caso: $0 < a < 1$ (função decrescente)

Quando a base do logaritmo está entre 0 e 1, a relação de desigualdade entre os logaritmos se inverte entre os logaritmandos.



$$\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$$

Invertemos o sentido da desigualdade.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

ATIVIDADES RESOLVIDAS

15. Resolva a equação $\log_3 (2x - 7) = 4$.

Resolução

Inicialmente, verificamos a condição de existência do logaritmo:

$2x - 7 > 0 \Rightarrow 2x > 7 \Rightarrow x > \frac{7}{2}$

Para resolver a equação, vamos expressar o 2º membro como um logaritmo de base 3 (a mesma base do logaritmo no 1º membro da equação) do seguinte modo:

$4 = \log_3 3^4 \Rightarrow 4 = \log_3 81$

Assim: $\log_3 (2x - 7) = \log_3 81$

Como $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$, obtemos:

$2x - 7 = 81 \Rightarrow 2x = 88 \Rightarrow x = 44$

Como $x = 44$ satisfaz à condição de existência, o conjunto solução da equação é $S = \{44\}$.

16. Estudos de demografia indicam que a população de um certo país no ano zero é P_0 e que, decorridos t anos, a população será aproximadamente $P(t) = P_0 \cdot e^{0,03t}$. Quantos anos devem decorrer para que a população desse país duplique? Considere $\ln 2 = 0,69$.

Resolução

Para que a população duplique, devemos ter $P(t)$ igual ao dobro da população inicial P_0. Logo:

$P(t) = 2P_0 \Rightarrow 2P_0 = P_0 \cdot e^{0,03t} \Rightarrow 2 = e^{0,03t} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_e 2 = 0,03t \Rightarrow \ln 2 = 0,03t \Rightarrow 0,69 = 0,03t \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \frac{0,69}{0,03} = \frac{69}{3} \Rightarrow t = 23$

Portanto, devem decorrer 23 anos para que a população duplique.

17. Determine o valor real de x na equação $\log_{\sqrt{2}} x + \frac{1}{3} \cdot \log_2 x = 0$.

Resolução

A condição de existência é $x > 0$.

Mudando os termos para a base 2, tem-se:

$\frac{\log_2 x}{\log_2 \sqrt{2}} + \frac{1}{3} \cdot \log_2 x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\log_2 x}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} \cdot \log_2 x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6 \cdot \log_2 x + \log_2 x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 7 \cdot \log_2 x = 0 \Rightarrow \log_2 x = 0 \Rightarrow x = 1$

18. Resolva a inequação $\log_{\frac{1}{2}} (x - 3) \geqslant \log_{\frac{1}{2}} 4$.

Resolução

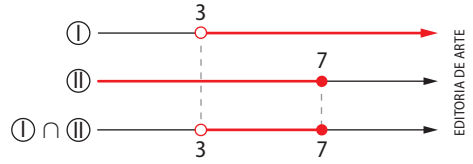
A condição de existência é:

$x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$ (I)

Como a base é um número entre 0 e 1, a função logarítmica dada por $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ é decrescente, e o sentido da desigualdade se inverte ao compararmos os logaritmandos:

$x - 3 \leqslant 4 \Rightarrow x \leqslant 3 + 4 \Rightarrow x \leqslant 7$ (II)

A solução da inequação deve satisfazer à condição de existência. Por isso, fazemos (I) ∩ (II):



Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \leqslant 7\}$.

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

32. (Fuvest-SP) Considere as funções f e g definidas por Ver as **Orientações para o professor**.

$f(x) = 2\log_2(x - 1)$, se $x \in \mathbb{R}$, $x > 1$,

$g(x) = \log_2 \left(1 - \frac{x}{4}\right)$, se $x \in \mathbb{R}$, $x < 4$.

a) Calcule $f\left(\frac{3}{2}\right)$, $f(2)$, $f(3)$, $g(-4)$, $g(0)$ e $g(2)$.

b) Encontre x, com $1 < x < 4$, tal que $f(x) = g(x)$.

c) Levando em conta os resultados dos itens a) e b), esboce os gráficos de f e de g.

33. (Unicamp-SP) Considere a função $f(x) = 10^{1+x} + 10^{1-x}$, definida para todo número real x.

Ver as **Orientações para o professor**.

a) Mostre que $f(\log_{10}(2 + \sqrt{3}))$ é um número inteiro.

b) Sabendo que $\log_{10} 2 \simeq 0,3$, encontre os valores de x para os quais $f(x) = 52$.

34. Calcule, com aproximação de 2 casas decimais, o valor de x na equação $7^x = 4,2$. Considere $\log 6 = 0,7781$ e $\log 7 = 0,8451$. 0,74

35. Determine o conjunto solução das equações:

a) $(\log_2 x)^2 - 9 \log_8 x = 4$ $S = \left\{\frac{1}{2}, 16\right\}$

b) $(\log_2 x)^2 + 4 \cdot \log_2 x - 32 = 0$ $S = \left\{\frac{1}{256}, 16\right\}$

36. Calcule o valor de x que satisfaz a equação $36^x = 24$. Adote $\log 2 = 0,30$ e $\log 3 = 0,48$. $\frac{23}{26}$

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

37. A velocidade máxima, em *bits* por segundo, com a qual os sinais podem passar por canais de comunicação pode ser obtida por meio da fórmula $v_{máx} = 3400 \cdot \log_2 (x + 1)$, em que 3400 hertz é a frequência limite da voz humana e x está relacionado à potência do sinal. Calcule o valor de x correspondente a uma velocidade máxima de 27200 *bits* por segundo. 255

38. O número de bactérias N em uma cultura, depois de um tempo t, em minuto, é dada pela função $N(t) = N_0 \cdot e^{0,05t}$, em que N_0 é o número inicial de bactérias da cultura. Em quanto tempo, aproximadamente, a população de bactérias passará a ser o triplo da inicial? Use $\ln 3 \simeq 1,099$.
aproximadamente 22 min

39. Quando compramos um bem de consumo durável, depois de certo tempo, pode ocorrer uma depreciação do valor inicial desse produto. A fórmula utilizada para calcular a desvalorização de determinados produtos é $V = V_0 \cdot (1 - i)^t$, em que:
V: valor atualizado em função do tempo t.
V_0: valor do produto no momento da compra
i: taxa de depreciação
t: tempo após a compra
Ver as **Orientações para o professor**.

- Elabore um problema que envolva a depreciação de um produto em que seja necessário calcular o tempo após a compra desse bem.
Troque a atividade criada por você com um colega e responda ao problema elaborado por ele. Em seguida, verifiquem as resoluções e as estratégias utilizadas por cada um.

40. Para medir o potencial destrutivo de um terremoto, utiliza-se a escala Richter. A energia calculada em um terremoto pode ser obtida pela fórmula a seguir:
Ver as **Orientações para o professor**.

$$I = \frac{2}{3} \cdot \log\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

Sabendo que I varia de 0 a 9, que E é o valor da energia liberada em kW/h e que $E_0 = 7 \cdot 10^{-3}$ kW/h, faça o que se pede.

- Elabore um problema que envolva a fórmula apresentada. Para tanto, pesquise acontecimentos reais e baseie-se nessa pesquisa.
Troque a atividade criada por você com um colega e responda ao problema elaborado por ele. Em seguida, verifiquem as resoluções e as estratégias utilizadas por cada um.

41. (Enem/MEC) Em setembro de 1987, Goiânia foi palco do maior acidente radioativo ocorrido no Brasil, quando uma amostra de césio-137, removida de um aparelho de radioterapia abandonado, foi manipulada inadvertidamente por parte da população. A meia-vida de um material radioativo é o tempo necessário para que a massa desse material se reduza à metade. A meia-vida do césio-137 é 30 anos e a quantidade restante de massa de um material radioativo, após t anos, é calculada pela expressão $M(t) = A \cdot (2,7)^{kt}$, onde A é a massa inicial e k é uma constante negativa. Considere 0,3 como aproximação para $\log_{10} 2$. Qual o tempo necessário, em anos, para que uma quantidade de massa do césio-137 se reduza a 10% da quantidade inicial?
alternativa **e**

a) 27 **d)** 54
b) 36 **e)** 100
c) 50

42. Determine o conjunto solução das inequações:

a) $\log_{10} (a^2 - 2a + 1) < 2$
$S = \{a \in \mathbb{R} \mid -9 < a < 11 \text{ e } a \neq 1\}$

b) $\log_{\frac{1}{2}} (x^2 + 4x - 5) \geqslant -4$
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -7 \leqslant x < -5 \text{ ou } 1 < x \leqslant 3\}$

43. Uma pessoa recebeu a injeção de certo medicamento. Uma vez na corrente sanguínea, esse medicamento é eliminado lentamente pela ação dos rins. Admita que, partindo de uma quantidade inicial de Q_0 miligramas, após t horas, a quantidade de medicamento na corrente sanguínea fique reduzida a $Q(t) = Q_0 \cdot (0,64)^t$ miligramas. Determine o intervalo de tempo para que a quantidade de medicamento $Q(t)$ presente na corrente sanguínea da pessoa satisfaça a desigualdade $\frac{Q_0}{4} < Q(t) < \frac{Q_0}{2}$. Use uma calculadora científica.
$1,55 < t < 3,1$

Resolução de inequações logarítmicas com o GeoGebra

Com o **GeoGebra**, é possível resolver equações e inequações graficamente; porém, nem sempre esse método é exato, pois pode não fornecer precisão adequada quando a solução é composta de números racionais com infinitas casas decimais (como as dízimas periódicas) ou de números irracionais. Nesses casos, o método gráfico é recomendado como aproximação.

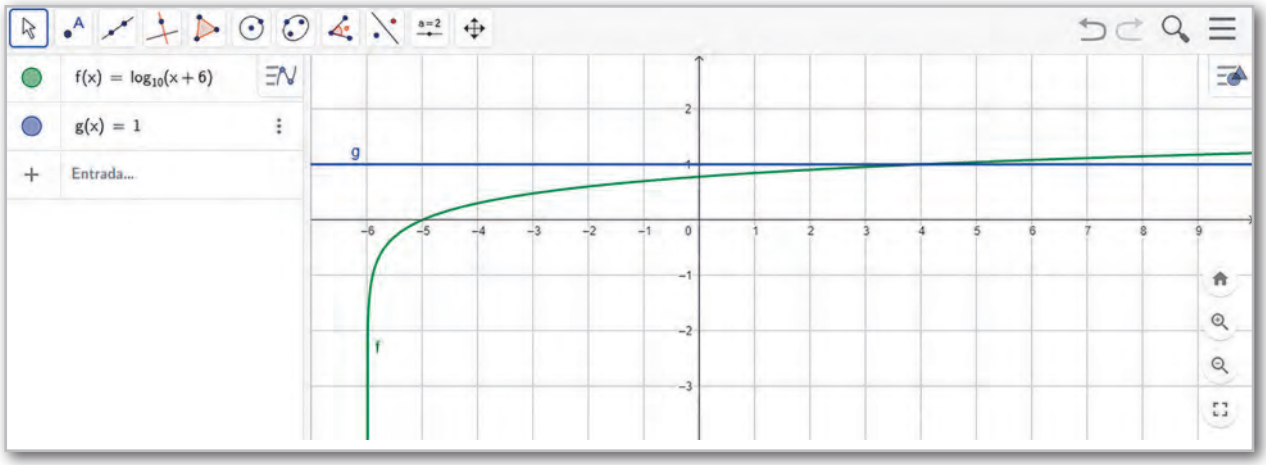
As inequações logarítmicas podem ser entendidas como uma comparação entre duas funções. Essa ideia pode ser estendida às inequações de maneira geral. Portanto, para resolver inequações logarítmicas graficamente, comparamos os gráficos das funções associadas aos membros da inequação.

Por exemplo, para resolver a inequação logarítmica $\log (x + 6) > 1$, siga a sequência de passos a seguir.

I. Vamos escrever o primeiro membro da inequação como a função $f(x) = \log (x + 6)$ e o segundo como a função $g(x) = 1$.

II. Para escrever o logaritmo decimal de um número no GeoGebra, utilizamos a função **lg(*x*)** ou **log(*x*)** ou, ainda, **log(10,*x*)**. Portanto, no campo de entrada, digite "$f(x)=\lg(x+6)$" ou "$f(x)=\log(x+6)$" ou "$\log(10,x+6)$" para construir o gráfico da função $f(x) = \log (x + 6)$, em seguida, pressione a tecla ***Enter***. Para construir o gráfico da função $g(x) = 1$, digite "$g(x)=1$" e pressione novamente ***Enter***.

Assim, a janela de visualização do GeoGebra fornecerá a seguinte construção:

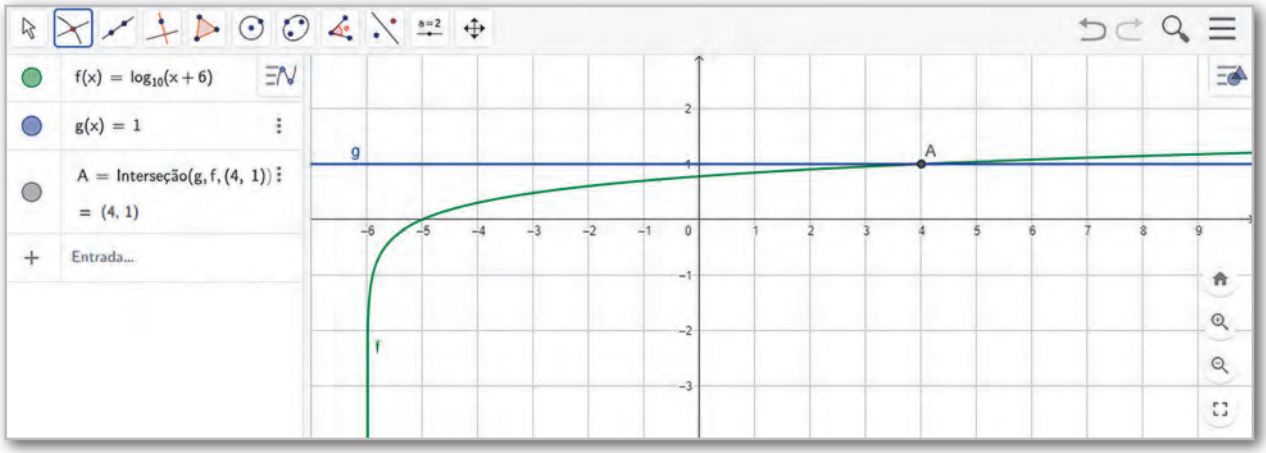


REPRODUÇÃO/GEOGEBRA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

III. Para determinar as coordenadas do ponto de intersecção, devemos utilizar a ferramenta **Intersecção de Dois Objetos**, , e selecionar os dois gráficos. Nesse caso, o ponto de intersecção é $A(4, 1)$, ele aparecerá na janela de visualização, e suas coordenadas serão mostradas na janela de Álgebra.



IMAGENS: REPRODUÇÃO/GEOGEBRA

IV. Observando os gráficos e o ponto A, notamos que, quando o valor de x for maior do que 4 (abscissa do ponto de intersecção), teremos $f(x) > g(x)$. Por outro lado, quando o valor de x for menor do que 4, teremos $g(x) > f(x)$ ou ainda $f(x) < g(x)$.

Como a inequação inicial é $\log (x + 6) > 1$, devemos encontrar os valores de x para os quais $f(x) > g(x)$, ou seja, para isso ocorrer, devemos ter $x > 4$.

Logo, a solução da inequação será $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$.

Esse método, que usa a comparação de gráficos, pode ser adotado para resolver outras inequações logarítmicas, inclusive quando ambos os membros da inequação têm logaritmos ou quando a base dos logaritmos é diferente de 10.

Saiba que...

Note que x não pode ser 4, pois, nesse caso, teríamos $f(x) = g(x)$, o que não contempla a situação inicial.

Agora, faça o que se pede nas atividades a seguir. NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. Utilizando o GeoGebra, determine o conjunto solução da inequação $\log (2x - 5) \leqslant 1$.

Ver as **Orientações para o professor**.

2. Crie um controle deslizante e determine o valor de m para que o conjunto solução da inequação $\log (x + 4) < m$ seja $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3\}$.

3. Utilizando o mesmo procedimento da atividade anterior, determine o valor de m para que a solução da inequação $\log_2 (x + 4) > m$ tenha apenas valores positivos.

PIXEL-SHOT/SHUTTERSTOCK.COM

Saúde

O uso de medicamentos requer cautela e não deve ser banalizado. O fácil acesso a eles tem gerado o seu uso incorreto, sendo o público jovem bastante afetado, uma vez que a mídia também exerce influência nesse mercado. Para saber um pouco mais sobre o assunto, leia o texto a seguir, que trata de medicamentos.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

[...]

Medicamentos e os jovens

Usar medicamentos por conta própria [...] faz parte dos hábitos de diversos adolescentes em todo o mundo. Com o intuito de curar alguma doença, alcançar o bem-estar pessoal ou uma aparência física desejável, os jovens se tornaram adeptos dos mais diversos tipos de medicamentos, desde um comprimido para dor de cabeça, até calmantes, estimulantes ou antidepressivos. Tudo isso sem nenhum acompanhamento médico.

Quais os medicamentos mais consumidos?

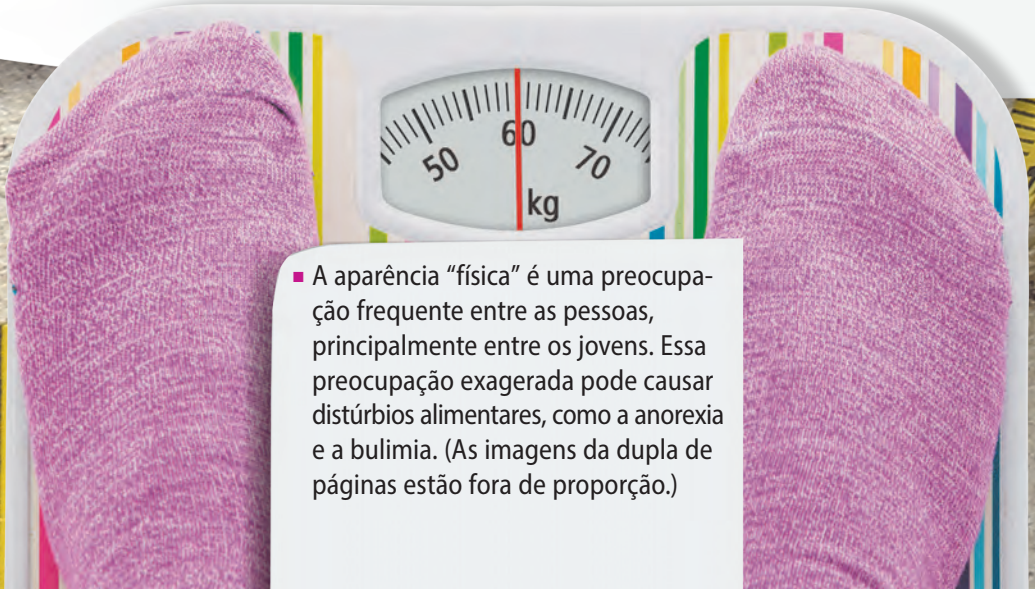
Entre os medicamentos mais consumidos pelos jovens estão os analgésicos e antibióticos, inalantes e tranquilizantes, medicamentos para emagrecimento e ansiedade, xaropes, anabolizantes e medicamentos para disfunção erétil.

Quais os riscos do uso indiscriminado de medicamentos pelos jovens?

Além dos riscos inerentes à automedicação, tal hábito quando praticado por jovens é ainda mais preocupante em função das misturas perigosas que eles costumam fazer, por exemplo:

- Alguns medicamentos tranquilizantes com álcool podem levar ao estado de coma e causar até mesmo a morte do usuário.
- Medicamentos para emagrecer (anorexígenos) com álcool e tabaco podem aumentar o risco de doenças cardíacas e respiratórias.

[...]



OKO LAA/SHUTTERSTOCK.COM

A aparência "física" é uma preocupação frequente entre as pessoas, principalmente entre os jovens. Essa preocupação exagerada pode causar distúrbios alimentares, como a anorexia e a bulimia. (As imagens da dupla de páginas estão fora de proporção.)

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Medicamentos para emagrecer

Atualmente, tem sido muito comum a busca de uma solução rápida para combater o excesso de peso, como o uso de medicamentos para emagrecer, chamados anorexígenos. Esses medicamentos agem diminuindo o apetite, facilitando a perda de peso por determinado tempo.

Os anorexígenos apresentam algum tipo de risco?

Os anorexígenos são produtos de alto risco porque podem causar dependência e inúmeras reações indesejadas, como humor instável, depressão nervosa, irritabilidade, agitação, confusão mental, alucinações, dentre outras. A retirada brusca desse tipo de medicamento pode ser acompanhada de fadiga (cansaço), sonolência ou depressão. Por apresentarem riscos elevados, esses produtos são controlados por lei e somente os médicos podem prescrevê-los.

[...]

AGÊNCIA NACIONAL DE VIGILÂNCIA SANITÁRIA. **O que devemos saber sobre medicamentos**. Brasília, DF: Anvisa, 2010. p. 66-67, 74. Disponível em: https://www.gov.br/anvisa/pt-br/centraisdeconteudo/publicacoes/medicamentos/publicacoes-sobre-medicamentos/o-que-devemos-saber-sobre-medicamentos.pdf. Acesso em: 23 set. 2024.

Agora, faça o que se pede nas atividades a seguir.

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Ver as **Orientações para o professor**.

1. Segundo o texto, qual é o problema relacionado ao consumo de medicamentos entre os jovens?

2. Entre os problemas decorrentes da automedicação está a ingestão excessiva de medicamentos. Ao entrar na corrente sanguínea, um medicamento é metabolizado, e sua concentração diminui a uma taxa proporcional à quantidade ingerida e ao tempo decorrido. Suponha que a quantidade de determinado medicamento no organismo possa ser modelada pela função $M(t) = M_0\,(0{,}5)^t$, em que M_0 é a quantidade ingerida (em mg) e $M(t)$ é a quantidade do medicamento no organismo (em mg) decorridas t horas da ingestão. Se forem ingeridos 500 mg desse medicamento, após quanto tempo no organismo a quantidade da droga será igual a 90 mg? Considere $\log 2 \simeq 0{,}3$ e $\log 0{,}18 \simeq -0{,}74$.

3. Conforme apresentado no texto, "atualmente, tem sido muito comum a busca de uma solução rápida para combater o excesso de peso".
A anorexia e a bulimia são dois transtornos alimentares muito comuns na sociedade atual, principalmente entre jovens. Em grupo, pesquisem cada um desses transtornos, listando as diferenças e o tratamento correto que deve ser realizado para cada um deles. Em seguida, produzam um vídeo de conscientização sobre os riscos da automedicação, abordando também os motivos do uso dos medicamentos e os impactos dos transtornos alimentares na vida das pessoas.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

A ideia de John Napier e o logaritmo

O texto a seguir apresenta um resumo do progresso científico ocorrido entre os séculos XVI e XVII. Nesse contexto, a participação do matemático escocês John Napier no intuito de simplificar cálculos matemáticos foi fundamental para o surgimento do conceito de logaritmo.

DEA PICTURE LIBRARY/DE AGOSTINI/GETTY IMAGES

JOHN Napier of Merchiston. 1616. Óleo sobre tela, 110,7 cm × 99,5 cm. Universidade de Edimburgo. Retrato do matemático escocês John Napier (1550-1617).

[...]

O século XVI e o início do século XVII testemunharam uma enorme expansão do conhecimento científico em todos os campos. A Geografia, a Física e a Astronomia, livres de antigos dogmas, mudaram rapidamente a percepção que o homem tinha do universo. O sistema heliocêntrico de Copérnico, depois de lutar durante quase um século contra as resoluções da Igreja, encontrara finalmente a aceitação. A circum-navegação do globo por Magalhães, em 1521, anunciou uma nova era de exploração marítima que não deixaria um canto do mundo sem ser visitado. Em 1569 Gerhard Mercator publicou o seu aclamado novo mapa do mundo, acontecimento que teve um impacto decisivo na arte da navegação. Na Itália, Galileu Galilei estabelecia as fundações da ciência da mecânica, enquanto na Alemanha Johannes Kepler formulava suas três leis do movimento planetário, livrando a astronomia, de uma vez por todas, do universo geocêntrico dos gregos.

Esses desenvolvimentos envolviam uma quantidade crescente de dados numéricos, forçando os eruditos a passarem boa parte de seu tempo fazendo cálculos tediosos. A época pedia uma invenção que livrasse os cientistas, de uma vez por todas, desse fardo. Napier aceitou o desafio.

[...]

Sua linha de pensamento era a seguinte: se pudermos escrever **qualquer** número positivo como uma potência de algum dado número fixo (o qual depois seria chamado de base), então **a multiplicação e a divisão de números seria o equivalente à adição ou à subtração de seus expoentes**. Além disso, elevar um número à enésima potência (isto é, multiplicá-lo por si mesmo n vezes) seria equivalente a **somar** o expoente n vezes a ele próprio, isto é, multiplicá-lo por n [...]. Resumindo, cada operação aritmética seria reduzida à que está abaixo dela na hierarquia das operações, o que reduziria muito a dificuldade das computações numéricas.

Vamos ilustrar como esta ideia funciona escolhendo como nossa base o número 2. A tabela 1.1 mostra as potências sucessivas de 2, começando com $n = -3$ e terminando com $n = 12$. Suponha que queremos multiplicar 128 por 32. Nós procuramos na tabela os expoentes correspondentes a 32 e a 128 e descobrimos que eles são, respectivamente, 5 e 7. Somando esses expoentes, obtemos 12.

Agora revertemos o processo, procurando o número cujo expoente correspondente é 12; este número é 4 096, a resposta desejada. [...]

Tabela 1.1 – Potências de 2

n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2^n	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096

MAOR, E. ***e***: a história de um número. Tradução: Jorge Calife. Rio de Janeiro: Record, 2003. p. 17-20.

ATIVIDADES COMPLEMENTARES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. (UERJ) Admita que, em um determinado lago, a cada 40 cm de profundidade, a intensidade de luz é reduzida em 20%, de acordo com a equação $I = I_0 \cdot 0{,}8^{\frac{h}{40}}$, na qual I é a intensidade da luz em uma profundidade h, em centímetros, e I_0 é a intensidade na superfície. Um nadador verificou, ao mergulhar nesse lago, que a intensidade da luz, em um ponto P, é de 32% daquela observada na superfície. A profundidade de P, em metros, considerando $\log_2 = 0{,}3$, equivale a: alternativa **c**

a) 0,64 **b)** 1,8 **c)** 2,0 **d)** 3,2

2. (IFCE) Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ com $x > 1$ e $y > 1$. A expressão $2\log_9 x + \log_3 6 - 6\log_9 \sqrt{y}$ pode ser simplificada para: alternativa **a**

a) $\log_9 \frac{36x^2}{y^3}$

b) $\log_3 \left(\frac{2x}{6\sqrt{y}} + 6\right)$

c) $\log_9 (2x + 6(1 - \sqrt{y}))$

d) $\log_3 (x^2 + 36 + y^{-3})$

e) $\log_3 (1 + 6xy)$

3. (IME-RJ) Se $\log_{10} 2 = x$ e $\log_{10} 3 = y$, então $\log_5 18$ vale: alternativa **a**

a) $\frac{x + 2y}{1 - x}$ **c)** $\frac{2x + y}{1 + x}$ **e)** $\frac{3x + 2y}{1 - x}$

b) $\frac{x + y}{1 - x}$ **d)** $\frac{x + 2y}{1 + x}$

4. (UFMG) O pH de uma solução aquosa é definido pela expressão $pH = -\log[H^+]$, em que $[H^+]$ indica concentração, em mol/l, de íons de hidrogênio na solução e log, o logaritmo na base 10. alternativa **a**

Ao analisar uma determinada solução, um pesquisador verificou que, nela, a concentração de íons de hidrogênio era $[H^+] = 5{,}4 \cdot 10^{-8}$ mol/l.

Para calcular o pH dessa solução, ele usou os valores aproximados de 0,30 para log 2, e de 0,48 para log 3. Então, o valor que o pesquisador obteve para o pH dessa solução foi:

a) 7,26 **b)** 7,32 **c)** 7,58 **d)** 7,74

5. (UEG-GO) Sendo $f(x) = \log_{x-1}(x^2 + 1)$, então

a) $x < -1$ e $x \neq -2$ **d)** $x > 1$

b) $x < 1$ **e)** $x > 1$ e $x \neq 2$

c) $-1 \leq x < 1$ alternativa **e**

6. (UFG-GO) O eucalipto é muito usado para a produção de papéis e celulose por causa da qualidade da matéria-prima e seu curto ciclo de vida. Um produtor de eucalipto possui uma plantação de determinada espécie adequada ao clima e ao tipo de solo de sua região. Essa espécie tem seu crescimento modelado pela função $h(t) = 50 \cdot (1 - 10^{-kt})$, onde h é a altura (em metro) em função do tempo t (em ano) e k é uma constante. Sabe-se que esse eucalipto alcança a altura de 10 m em 2 anos e que o produtor realizará o corte quando as árvores tiverem 8 anos.

Com base nessas informações, calcule o valor da constante k e a altura que os eucaliptos terão, em metro, quando o produtor for realizar o corte. $k = -\frac{1}{2} \cdot \log\left(\frac{4}{5}\right)$; as árvores terão 29,52 metros de altura.

7. (Fuvest-SP) Sobre a equação $(x + 3)2^{x^2 - 9}\log|x^2 + x - 1| = 0$, é correto afirmar que alternativa **e**

a) ela não possui raízes reais.

b) sua única raiz real é -3.

c) duas de suas raízes reais são 3 e -3.

d) suas únicas raízes reais são -3, 0 e 1.

e) ela possui cinco raízes reais distintas.

8. (Uneb-BA) Segundo uma pesquisa, após t meses da constatação da existência de uma epidemia, o número de pessoas, por ela atingidas, é obtido por $N(t) = \frac{10\,000}{1 + 8 \cdot 4^{-2t}}$.

Considerando-se que o mês tenha 30 dias, $\log 2 = 0{,}30$ e $\log 3 = 0{,}48$, pode-se estimar que 2500 pessoas serão atingidas por essa epidemia em, aproximadamente, alternativa **a**

a) dez dias. **d)** dez meses.

b) vinte e seis dias. **e)** um ano.

c) três meses.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

9. (Udesc) O conjunto solução da inequação $|\log_3(3x)| \leq 1$ é: alternativa **c**

a) $S = \left[\frac{1}{3}, 3\right]$

b) $S = [1, 3]$

c) $S = \left[\frac{1}{9}, 1\right]$

d) $S = \left]0, \frac{1}{9}\right]$

e) $S =]0, 1]$

Saiba que...

Se $|f(x)| \leq a \Rightarrow -a \leq f(x) \leq a$.

10. (Unicamp-SP) A solução da equação na variável real x, $\log_x(x + 6) = 2$, é um número alternativa **a**

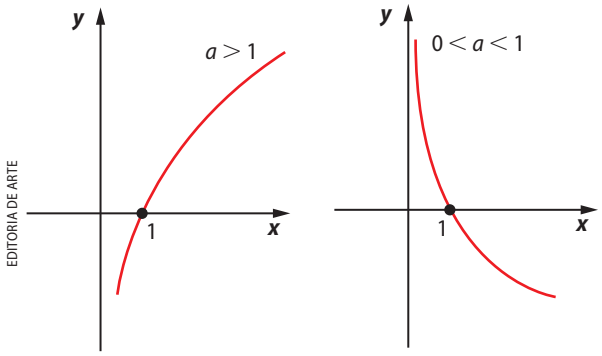
a) primo.

b) par.

c) negativo.

d) irracional.

11. (Fuvest-SP) Seja f uma função a valores reais, com domínio $D \subset \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \log_{10}\left(\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - x + 1)\right)$, para todo $x \in D$.



EDITORIA DE ARTE

■ Gráficos da função logarítmica de base a.

O conjunto que pode ser o domínio D é:

a) $\{x \in \mathbb{R}; 0 < x < 1\}$ alternativa **a**

b) $\{x \in \mathbb{R}; x \leq 0 \text{ ou } x \geq 1\}$

c) $\left\{x \in \mathbb{R}; \frac{1}{3} < x < 10\right\}$

d) $\left\{x \in \mathbb{R}; x \leq \frac{1}{3} \text{ ou } x \geq 10\right\}$

e) $\left\{x \in \mathbb{R}; \frac{1}{9} < x < \frac{10}{3}\right\}$

12. (Enem/MEC) Um contrato de empréstimo prevê que quando uma parcela é paga de forma antecipada, conceder-se-á uma redução de juros de acordo com o período de antecipação. Nesse caso, paga-se o valor presente, que é o valor, naquele momento, de uma quantia que deveria ser paga em uma data futura. Um valor presente P submetido a juros compostos com taxa i, por um período de tempo n, produz um valor futuro V determinado pela fórmula:

$$V = P \cdot (1 + i)^n$$

Em um contrato de empréstimo com sessenta parcelas fixas mensais, de R$ 820,00, a uma taxa de juros de 1,32% ao mês, junto com a trigésima parcela será paga antecipadamente uma outra parcela, desde que o desconto seja superior a 25% do valor da parcela.
Utilize 0,2877 como aproximação para $\ln\left(\frac{4}{3}\right)$ e 0,0131 como aproximação para ln (1,0132).
A primeira das parcelas que poderá ser antecipada junto com a 30ª é a alternativa **c**

a) 56ª

b) 55ª

c) 52ª

d) 51ª

e) 45ª

13. (Enem/MEC) Para realizar a viagem dos sonhos, uma pessoa precisava fazer um empréstimo no valor de R$ 5.000,00. Para pagar as prestações, dispõe de, no máximo, R$ 400,00 mensais. Para esse valor de empréstimo, o valor da prestação (P) é calculado em função do número de prestações (n) segundo fórmula

$$P = \frac{5\,000 \times 1{,}013^n \times 0{,}013}{(1{,}013^n - 1)}$$

Se necessário, utilize 0,005 como aproximação para log 1,013; 2,602 como aproximação para log 400; 2,525 como aproximação para log 335.
De acordo com a fórmula dada, o menor número de parcelas cujos valores não comprometem o limite definido pela pessoa é

a) 12

b) 14

c) 15

d) 16 alternativa **d**

e) 17

14. (FCMSCSP) O Nível de Pressão Sonora (*NPS*) é uma medida que determina o grau de potência de uma onda sonora, sendo o decibel (dB) sua unidade de medida mais usual. O infográfico traz dados do *NPS* de alguns sons:

(http://noticias.r7.com. Adaptado.)

O *NPS*, em dB, de um som emitido está relacionado à sua Intensidade Sonora (I), em W/m^2, pela seguinte lei:

$$NPS = 120 + 10 \cdot \log I$$

Desse modo, a razão entre a intensidade sonora do ronco mais alto já registrado e a do ronco moderado, nessa ordem, é um valor entre

a) 10 e 100.

b) 1 e 10.

c) 100 e 1 000.

d) 10 000 e 100 000. alternativa **d**

e) 1 000 e 10 000.

PARA REFLETIR

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Neste Capítulo, estudamos o logaritmo, sua definição e suas propriedades. Além disso, conhecemos algumas de suas aplicações, como no cálculo do pH e do nível de intensidade sonora. Estudamos, também, a função logarítmica, seu gráfico e sua relação com a função exponencial.

No Capítulo, também foi feito o estudo da equação e da inequação logarítmica.

Nas páginas de abertura, foi apresentada a unidade de medida da intensidade sonora e uma reflexão sobre a importância de saber medi-la, com o intuito de mostrar a presença da Matemática na preservação da saúde. Você conseguiu reconhecer essa relação? Se sim, qual é a importância dela? Se não, retome o texto de abertura de Capítulo e as perguntas iniciais. Se possível, pesquise também em livros e *sites* sobre o assunto.

Vamos refletir a respeito das aprendizagens do Capítulo **4**:

- Você já conhecia algum dos conteúdos apresentados ao longo deste Capítulo? Qual(is)? Resposta pessoal.
- Qual é a condição para que uma função logarítmica seja crescente? E decrescente? base a maior do que 1; base a entre 0 e 1
- Pesquise uma aplicação de logaritmo que não tenha sido apresentada neste Capítulo e explique, com suas palavras, essa aplicação e a relação dela com o logaritmo. Resposta pessoal.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

CAPÍTULO 5

RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NA CIRCUNFERÊNCIA

4. Espera-se que os estudantes respondam que: arco é uma parte de uma circunferência; ângulo central é o ângulo cujo vértice é o centro de uma circunferência; ângulo inscrito é aquele em que os seus lados são secantes à circunferência e o seu vértice é um ponto da circunferência. Espera-se que os estudantes mencionem as seguintes relações: a medida angular de um arco de circunferência é igual à medida do ângulo central correspondente, e a medida de um ângulo inscrito na circunferência é a metade da medida do ângulo central.

As rodas-gigantes são construções voltadas ao lazer e, por causa de suas dimensões, servem também como mirantes em cidades e parques de diversões em diversos locais do mundo. A primeira roda-gigante foi inaugurada em 1893 em Chicago, nos Estados Unidos. Desde então, muitas outras foram construídas, como a roda Ain Dubai, inaugurada em 2021, em Dubai, nos Emirados Árabes, com 250 metros de altura, que passou a ser a maior roda-gigante do mundo. A maior roda-gigante da América Latina é a Roda Rico, em São Paulo, que se destaca com seus 91 metros de altura.

Para realizar alguns cálculos envolvendo rodas-gigantes, como determinar a distância que certa cabine de uma roda-gigante se encontra do solo ou o comprimento do trajeto percorrido por uma cabine ao dar uma volta completa, podem-se usar conceitos que estudaremos neste Capítulo, como arcos de circunferência e razões em uma circunferência trigonométrica.

Fontes dos dados: DEURSEN, Felipe van. Roda-gigante surgiu há 400 anos e sofreu influências até da Torre Eiffel. **Nossa UOL**, [*s. l.*], 23 fev. 2022. Disponível em: https://www.uol.com.br/nossa/noticias/redacao/2022/02/23/roda-gigante-surgiu-ha-400-anos-e-sofreu-influencias-ate-da-torre-eiffel.htm. Acesso em: 2 out. 2024.

BRASIL. Ministério do Turismo. **Maior roda-gigante da América Latina é inaugurada em São Paulo**. Brasília, DF: MT, 12 dez. 2022. Disponível em: https://www.gov.br/turismo/pt-br/assuntos/noticias/maior-roda-gigante-da-america-latina-e-inaugurada-em-sao-paulo. Acesso em: 2 out. 2024.

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Agora reúna-se a um colega, e façam o que se pede em cada questão.

1. Vocês já andaram de roda-gigante? Em caso afirmativo, conversem sobre como foi essa experiência. Resposta pessoal.
2. Suponham que uma pessoa está em uma cabine no ponto mais baixo da roda-gigante. Quantos graus a roda deve girar para que essa pessoa fique no ponto mais alto? 180°
3. Se uma cabine de uma roda-gigante dá cinco voltas completas, quantos graus, ao todo, essa cabine percorreu? $5 \cdot 360° = 1\,800°$
4. Expliquem o que são e quais são as relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos em uma circunferência.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

RAFAELNLINS/SHUTTERSTOCK.COM

Vista de *drone* da Roda Rico, maior roda-gigante da América Latina, no parque Cândido Portinari, em São Paulo (SP). Fotografia de 2023.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Introdução

Nesta Coleção, estudamos as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente para o triângulo retângulo. No entanto, ao estudar os fenômenos periódicos, precisamos ampliar esse conceito para outros ângulos fora do intervalo entre 0° e 90° para, então, realizar a modelagem por meio das funções trigonométricas, assunto do Capítulo **6** deste Volume.

Sendo assim, serão apresentados alguns conceitos novos, como as razões trigonométricas na circunferência, que permitem o cálculo dessas razões para qualquer ângulo, inclusive para os ângulos maiores do que 90°.

Agora, vamos retomar alguns conceitos da Geometria que serão aplicados nesse estudo.

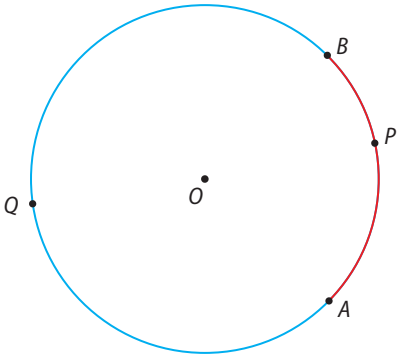
Arcos de circunferência

Ao marcarmos dois pontos A e B em uma circunferência de centro O, ela fica dividida em duas partes denominadas **arcos de circunferência** ou, simplesmente, **arcos**. Os pontos A e B são as extremidades dos arcos e, portanto, pertencem a ambos.

Os pontos A e B determinam dois arcos de circunferência que podem ser indicados por $\overset{\frown}{AB}$. Quando não ficar evidente a qual arco estamos nos referindo, podemos inserir um ponto entre as extremidades A e B e utilizar a notação $\overset{\frown}{APB}$ ou $\overset{\frown}{AQB}$ para identificar cada arco.

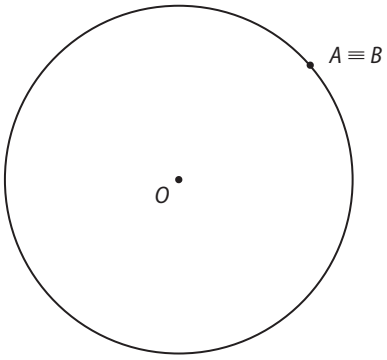
Se as extremidades A e B coincidem, um dos arcos fica reduzido a um ponto e o outro é a própria circunferência. Eles são chamados, respectivamente, de **arco nulo** e de **arco de uma volta**.

Quando as extremidades correspondem às extremidades de um diâmetro, teremos duas **semicircunferências** ou **arcos de meia-volta**.

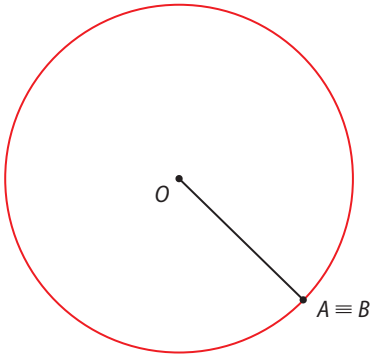


■ Arcos $\overset{\frown}{AB}$.

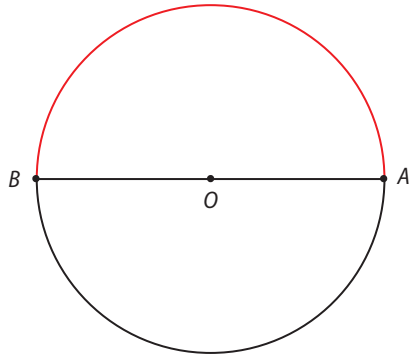
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE



■ Arco nulo.



■ Arco de uma volta.

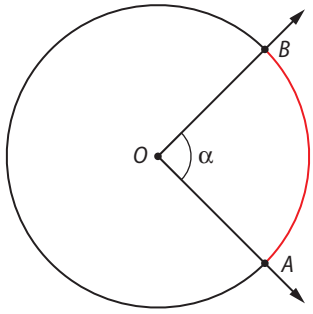


■ Arcos de meia-volta ou semicircunferências.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Ângulo central

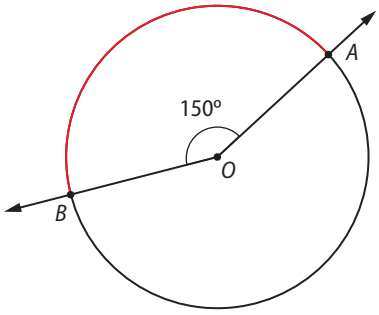
Todo ângulo que tem vértice no centro da circunferência é chamado de **ângulo central**. Assim, todo arco de circunferência tem um ângulo central que é correspondente a ele.



Na figura ao lado direito da página, $A\hat{O}B$ é o ângulo central correspondente ao arco $\overset{\frown}{AB}$. Além disso, $\text{med}(A\hat{O}B) = \alpha$.

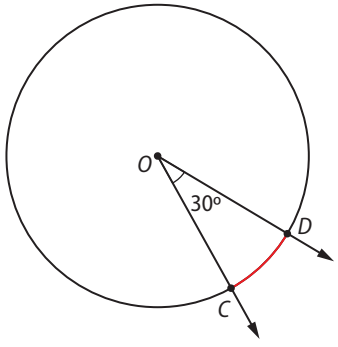
Acompanhe alguns exemplos a seguir.

a) O ângulo central $A\hat{O}B$ indicado mede 150°.



- $\text{med}(A\hat{O}B) = 150°$

b) O ângulo central $C\hat{O}D$ indicado mede 30°.

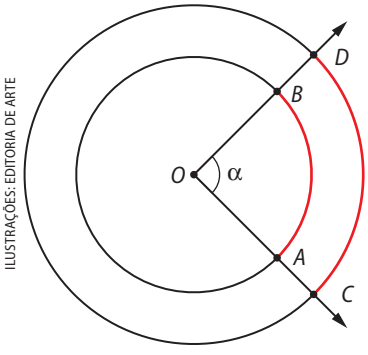


- $\text{med}(C\hat{O}D) = 30°$

Medida angular e comprimento de arcos de circunferência

A medida angular de um arco é a medida do ângulo central correspondente.

Por exemplo, na figura a seguir, a medida angular do arco $\overset{\frown}{AB}$ é igual a α. Também podemos representá-la por $\text{med}(\overset{\frown}{AB})$. Observe que a medida angular do arco $\overset{\frown}{CD}$ também é α.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

A medida linear de um arco é o comprimento ao longo do arco, ou seja, a medida de uma extremidade a outra.

Saiba que...

Quando dizemos apenas medida de um arco, geralmente nos referimos à medida angular do arco.

Pense e responda

O comprimento de um arco depende do raio da circunferência em que ele está? E a medida angular de um arco? Justifique.

sim; não

Ver as **Orientações para o professor**.

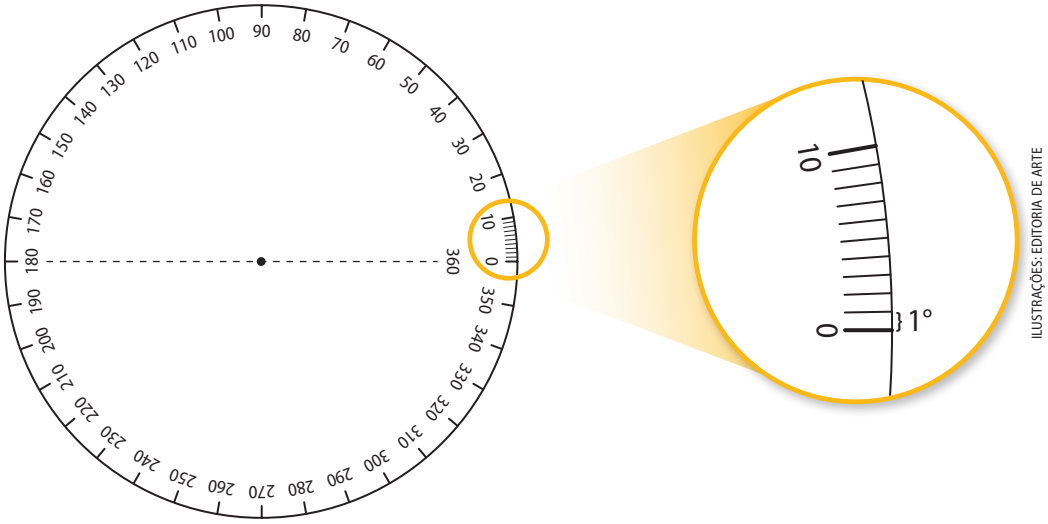
MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

» Unidades de medida de arcos de circunferência

A medida de um arco de circunferência pode ser expressa em grau ou em radiano. Provavelmente, você já estudou a unidade de medida grau em anos escolares anteriores. Vamos retomar algumas ideias relacionadas a essa unidade de medida e, em seguida, apresentar o radiano.

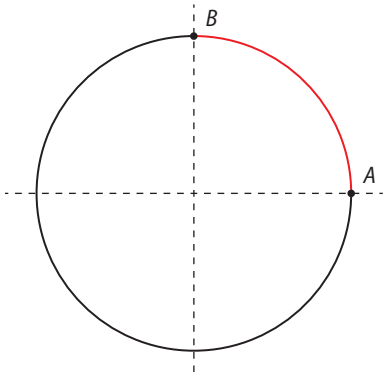
Grau

Ao dividir uma circunferência em 360 partes iguais, cada parte obtida é um arco que corresponde a $\frac{1}{360}$ da circunferência e tem medida angular 1 **grau**, que é indicado por 1°. Assim, uma circunferência tem 360°.

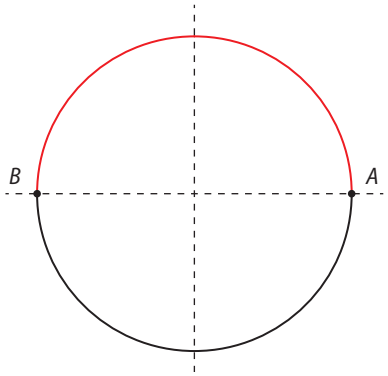


ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

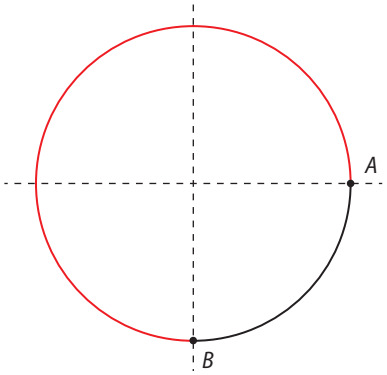
Os arcos de 90°, 180° e 270°, marcados em sentido anti-horário nas figuras a seguir, representam um quarto, metade e três quartos da circunferência, respectivamente, pois $\frac{90°}{360°} = \frac{1}{4}$, $\frac{180°}{360°} = \frac{1}{2}$ e $\frac{270°}{360°} = \frac{3}{4}$.



■ Arco de 90°.



■ Arco de 180°.



■ Arco de 270°.

Os submúltiplos do grau são o **minuto** e o **segundo**, dado que:

- um minuto (1′) é igual a $\frac{1}{60}$ do grau;
- um segundo (1″) é igual a $\frac{1}{60}$ do minuto.

Pense e responda

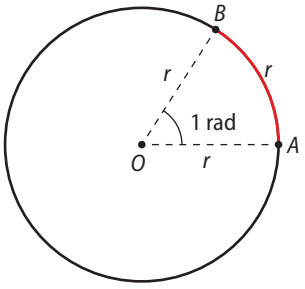
- Um grau corresponde a quantos minutos? 60 minutos
- Um minuto corresponde a quantos segundos? 60 segundos
- Um grau corresponde a quantos segundos? 3 600 segundos

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Radiano

Agora, vamos conhecer outra unidade de medida angular: o radiano.

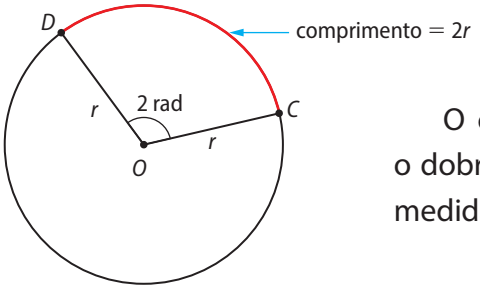
A medida de um arco é igual a 1 **radiano** (1 rad) quando o comprimento da sua medida linear é igual ao comprimento do raio da circunferência que o contém.



comprimento do arco $\overset{\frown}{AB}$ = comprimento do raio $\overline{OA}$ = r

med$(\overset{\frown}{AB})$ = 1 rad

Observe o arco $\overset{\frown}{CD}$ a seguir.



O comprimento do arco mede o dobro da medida do raio, então a medida angular do arco é 2 rad.

Saiba que...

- Assim como a medida do arco $\overset{\frown}{AB}$, o ângulo central $A\hat{O}B$ também mede 1 rad.
- Do mesmo modo, o ângulo central $C\hat{O}D$, assim como o arco $\overset{\frown}{CD}$, também mede 2 rad.

Pense e responda

- Qual é a medida de um arco cujo comprimento é o triplo da medida do raio da circunferência correspondente? 3 rad
- Qual é o comprimento de um arco contido em uma circunferência de raio r cujo ângulo central correspondente mede 5 radianos? $5r$
- Qual é o comprimento de um arco contido em uma circunferência de raio r cujo ângulo central correspondente mede x radianos? $x \cdot r$
- Um radiano equivale a aproximadamente quantos graus? Utilizando um transferidor, meça, na figura anterior desta página, o ângulo central $A\hat{O}B$ e verifique. aproximadamente 57°

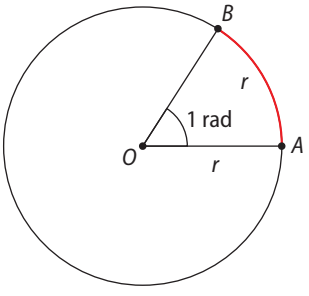
Relação entre grau e radiano

Como converter um ângulo medido em grau para a sua equivalência em radiano? No Ensino Fundamental, você estudou que o comprimento de uma circunferência de raio r é dado por $2\pi r$. Agora, vamos usar essa informação para estabelecer a relação entre grau e radiano e fazer conversões entre as unidades de medida angular.

Dada uma circunferência de raio r, o seu comprimento C é $C = 2\pi r$. Podemos interpretar essa expressão como o raio r que "cabe" 2π vezes nesse comprimento, ou seja, aproximadamente 6,28 vezes.

Como cada arco de comprimento igual a r corresponde a um ângulo central de medida 1 rad, então o arco de comprimento $2\pi r$ (a circunferência toda) corresponde a um ângulo central de medida 2π rad. Sabemos que a circunferência tem 360°, então concluímos que:

$$2\pi \text{ rad} = 360°$$



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Pense e responda

Que cálculos podemos fazer mentalmente para obter as relações apresentadas a partir da relação 2π rad $= 360°$?

Ver as **Orientações para o professor**.

A partir dessa relação, podemos escrever outras, por exemplo:

- π rad $= 180°$
- $\frac{\pi}{2}$ rad $= 90°$
- $\frac{\pi}{4}$ rad $= 45°$

Utilizando uma regra de três e a relação π rad $= 180°$, podemos converter em radiano qualquer medida angular expressa em grau e vice-versa. Por exemplo, para escrever $270°$ em radiano, fazemos:

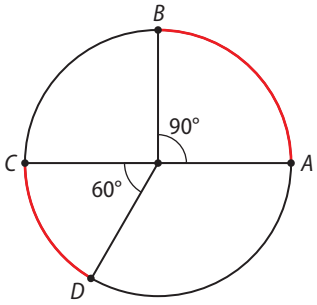
$$\begin{array}{rcl} \pi \text{ rad} & \text{———} & 180° \\ x & \text{———} & 270° \end{array}$$

Então: $x = \frac{\pi \text{ rad} \cdot 270°}{180°} = \frac{3\pi}{2}$ rad

Logo, $270°$ equivalem a $\frac{3\pi}{2}$ radianos.

Acompanhe, agora, alguns exemplos para determinarmos o comprimento e a medida angular de alguns arcos.

Na circunferência de raio r ao lado esquerdo da página, os arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{CD}$ medem, respectivamente, $90°$ e $60°$. Vamos expressar essas medidas em radiano e determinar o comprimento dos arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{CD}$.



Como a circunferência tem $360°$, o comprimento do arco $\overset{\frown}{AB}$ é a quarta parte do comprimento da circunferência, e o comprimento do arco $\overset{\frown}{CD}$ é a sexta parte do comprimento da circunferência. Assim, para determinar o comprimento do arco, dividimos $2\pi r$ (comprimento da circunferência) por quatro e por seis, respectivamente, como indicado a seguir.

	Ângulo (em grau)	Ângulo (em radiano)	Comprimento do arco
Circunferência completa	$360°$	2π	$2\pi r$
Arco $\overset{\frown}{AB}$	$90°$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{4} \cdot 2\pi r = \frac{\pi r}{2}$
Arco $\overset{\frown}{CD}$	$60°$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{6} \cdot 2\pi r = \frac{\pi r}{3}$

Pense e responda

Utilizando uma calculadora e a relação π rad $= 180°$, determine, aproximadamente, em grau, o valor de 1 rad.

aproximadamente $57{,}29°$

Saiba que...

Quando a unidade de medida angular não estiver explicitada, consideraremos que está em radiano. Por exemplo, $\frac{3\pi}{4}$ corresponde a $\frac{3\pi}{4}$ rad.

De modo geral, para calcular o comprimento ℓ de um arco de medida α em uma circunferência de raio r, usamos a regra de três e estabelecemos as seguintes relações:

- para α em grau

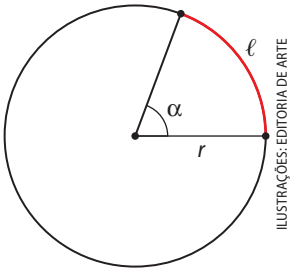
ângulo		comprimento
$360°$	———	$2\pi r$
α	———	ℓ

$\Rightarrow \ell = \frac{\alpha}{180°} \cdot \pi r$

- para α em radiano

ângulo		comprimento
1 rad	———	r
α	———	ℓ

$\Rightarrow \ell = \alpha r$



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

ATIVIDADES RESOLVIDAS

1. Expresse 22°30' em radiano.

Resolução

Primeiro, vamos converter 22°30' para minuto: $22°30' = 22 \cdot 60' + 30' = 1320' + 30' = 1350'$

Agora, vamos converter 180° para minuto: $180° = 180 \cdot 60' = 10\,800'$

Assim, podemos fazer a seguinte regra de três:

$$\left.\begin{array}{ll} 10\,800' & \text{——} \quad \pi \text{ rad} \\ 1350' & \text{——} \quad x \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{10\,800'}{1350'} = \frac{\pi \text{ rad}}{x} \Rightarrow \frac{8}{1} = \frac{\pi \text{ rad}}{x} \Rightarrow 8x = \pi \text{ rad} \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} \text{ rad}$$

Também podemos resolver de outro modo. Acompanhe:

Como 30 minutos equivalem a meio grau, temos $22°30' = 22{,}5°$.

Seja x a medida do arco, temos:

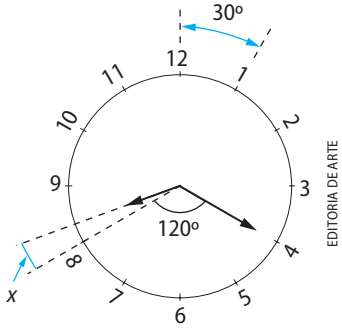
$$x = 22{,}5° \Rightarrow 2x = 45° \Rightarrow 4x = 90° \Rightarrow 4x = \frac{\pi}{2} \text{ rad} \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} \text{ rad}$$

Logo, $22°30' = \frac{\pi}{8}$ rad.

2. Determine, em grau, a medida do menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 8h20min.

Resolução

Sejam α a medida do ângulo pedido e x a medida do ângulo descrito pelo ponteiro das horas em 20 min a partir das 8 h. O mostrador do relógio é dividido em 12 arcos iguais. Por isso, o arco compreendido entre dois números consecutivos do relógio mede $\frac{360°}{12}$, ou seja, 30°. Assim, $\alpha = x + 120°$, já que 120° é o ângulo formado pelo arco com extremidade nos números 4 e 8 do relógio.



EDITORIA DE ARTE

A cada 60 minutos, o ponteiro das horas percorre 30°. Então, podemos fazer a seguinte relação:

tempo (min)		ângulo (grau)
60	——	30
20	——	x

$$\Rightarrow \frac{60}{20} = \frac{30}{x} \Rightarrow 3 = \frac{30}{x} \Rightarrow x = 10 \text{ (medida em grau)}$$

$\alpha = x + 120° \Rightarrow \alpha = 10° + 120° \Rightarrow \alpha = 130°$

Portanto, o ângulo solicitado mede 130°.

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. Expresse:

a) 60° em radiano; $\frac{\pi}{3}$ rad

b) 210° em radiano; $\frac{7\pi}{6}$ rad

c) $\frac{10\pi}{9}$ rad em grau; 200°

d) $\frac{\pi}{20}$ rad em grau. 9°

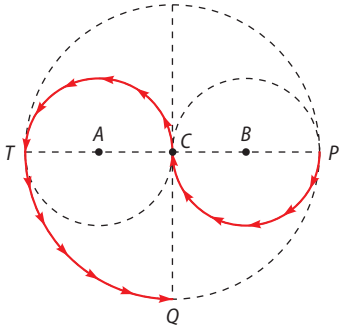
2. Em uma circunferência de 32 cm de diâmetro, marca-se um arco $\overset{\frown}{AB}$ de 8 cm de comprimento. Qual é a medida desse arco em radiano? 0,5 rad

3. Qual é, em radiano, a medida do arco descrito pelo ponteiro dos minutos de um relógio em um período de 25 minutos? $\frac{5\pi}{6}$ rad

- Reúna-se a um colega e expliquem um ao outro o raciocínio utilizado para resolver a atividade. Vocês resolveram da mesma maneira? Resposta pessoal.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

4. Na figura, têm-se três circunferências, de centros A, B e C, tangentes duas a duas. As retas $\overleftrightarrow{QC}$ e $\overleftrightarrow{PT}$ são perpendiculares. Sendo 4 m o raio da circunferência maior, quantos metros devemos percorrer para ir de P a Q, seguindo as flechas? 6π metros

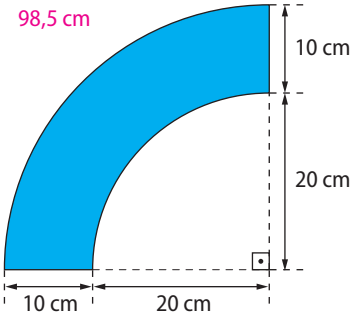


5. Luana é artesã e faz bordados em bastidor. Para estimar a quantidade de linha que usará na próxima encomenda, ela precisa saber algumas medidas do desenho bordado. Ajude Luana e determine o comprimento do contorno de cada detalhe indicado em azul nas figuras dos itens a seguir. Use $\pi = 3{,}14$.

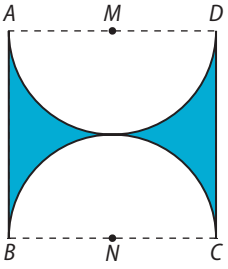
IRIS SOKOLOVSKAYA/SHUTTERSTOCK.COM

- O bastidor é uma peça que prende o tecido a ser bordado. Pode ser feito de madeira, como o da fotografia, ou de outros materiais.

a) 98,5 cm



b) Para fazer um detalhe, Luana desenhou um quadrado $ABCD$ de lado 10 cm. Em seguida, traçou as linhas curvas, que são semicircunferências com centros nos pontos médios, M e N, dos lados do quadrado. 51,4 cm

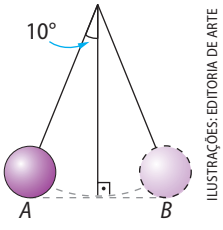


6. Você conhece o relógio de pêndulo? Ele foi criado pelo físico holandês Christian Huygens (1629-1695) em 1656 a partir do princípio de funcionamento desenvolvido por Galileu Galilei. Uma das peças principais desse tipo de relógio é o pêndulo, responsável por manter o equipamento funcionando.

Fonte dos dados: FERREIRA, Eduardo S. **O relógio cicloidal de Huygens**. Campinas: Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (Imecc-Unicamp), [201-]. Disponível em: https://www.ime.unicamp.br/sites/default/files/inline/1137/o_relogio_cicloidal_de_huygens.pdf. Acesso em: 10 out. 2024.

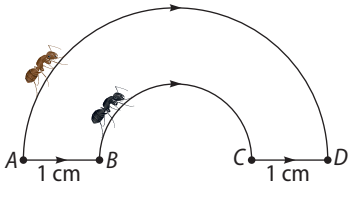
Suponha que o pêndulo de um relógio tenha comprimento 0,5 m e execute o movimento de A para B indicado na figura.

Determine o comprimento do arco $\overset{\frown}{AB}$ que a extremidade do pêndulo descreve. $\frac{\pi}{18}$ m



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

7. (OBMEP) Duas formigas partem do ponto A e vão até o ponto D, andando no sentido indicado pelas flechas. A primeira percorre o semicírculo maior; a segunda, o segmento $\overline{AB}$, o semicírculo menor e o segmento $\overline{CD}$. Os pontos A, B, C e D estão alinhados e os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ medem 1 cm cada um. Quantos centímetros a segunda formiga andou menos que a primeira? alternativa **d**



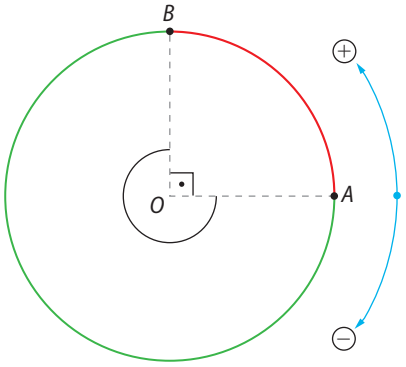
a) 2 **b)** π **c)** $\frac{\pi}{2}$ **d)** $\pi - 2$ **e)** 2π

Circunferência orientada

A figura a seguir mostra que, sobre a circunferência, o percurso de A para B pode ser feito no sentido anti-horário, seguindo o arco vermelho $\overset{\frown}{AB}$, ou no sentido horário, seguindo o arco verde $\overset{\frown}{AB}$.

Ao estabelecer o sentido anti-horário do percurso como positivo e o sentido horário como negativo, temos uma **circunferência orientada**.

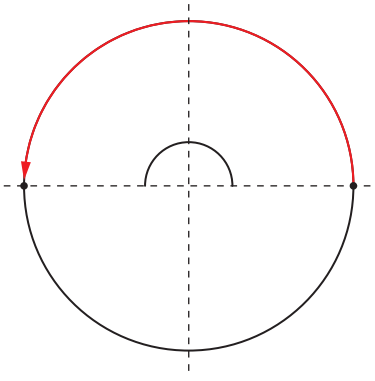
Assim, podemos ter as seguintes medidas angulares para o percurso de A para B da figura.



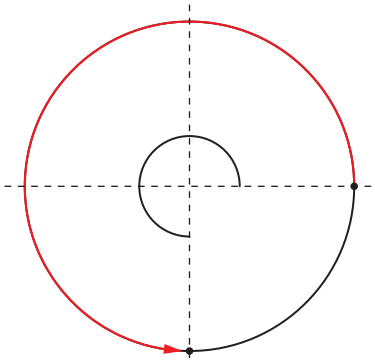
- arco vermelho: $\text{med}(\overset{\frown}{AB}) = \frac{\pi}{2}$ rad ou $\text{med}(\overset{\frown}{AB}) = 90°$
- arco verde: $\text{med}(\overset{\frown}{AB}) = -\frac{3\pi}{2}$ rad ou $\text{med}(\overset{\frown}{AB}) = -270°$

Acompanhe outros exemplos de arcos medidos na circunferência orientada:

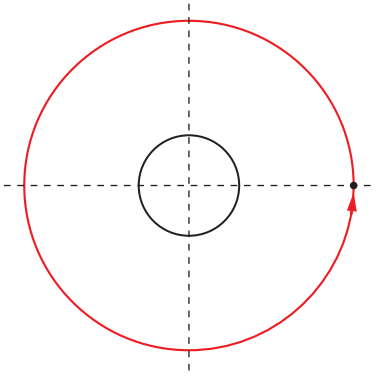
- no sentido anti-horário



■ Arco de π rad ou 180°.



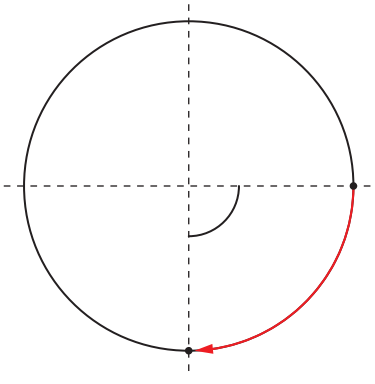
■ Arco de $\frac{3\pi}{2}$ rad ou 270°.



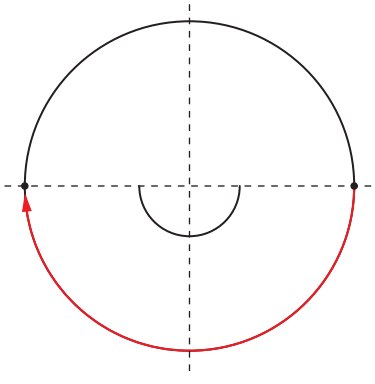
■ Arco de 2π rad ou 360°.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

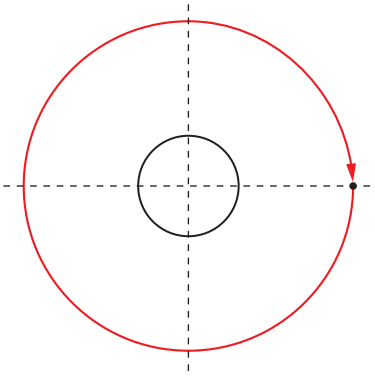
- no sentido horário



■ Arco de $-\frac{\pi}{2}$ rad ou −90°.



■ Arco de $-\pi$ rad ou −180°.



■ Arco de -2π rad ou −360°.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Circunferência trigonométrica

Vamos, agora, fixar um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais *xOy* no plano.

A circunferência orientada de centro na origem do sistema de coordenadas cartesianas de raio unitário ($r = 1$) é denominada **circunferência trigonométrica** ou **ciclo trigonométrico**. Os arcos da circunferência trigonométrica terão origem no ponto $A(1, 0)$, denominado **origem dos arcos**. Observe a figura 1 a seguir.

Os eixos *x* e *y* do sistema de coordenadas cartesianas determinam, no plano, quatro regiões, denominadas quadrantes. Os quadrantes são numerados no sentido anti-horário a partir do ponto *A*. Os pontos *A*, *B*, *C* e *D* estão nos eixos e não pertencem a quadrante algum. Observe a circunferência trigonométrica na figura 2, com a indicação das coordenadas dos pontos *A*, *B*, *C* e *D* e a indicação dos quadrantes.

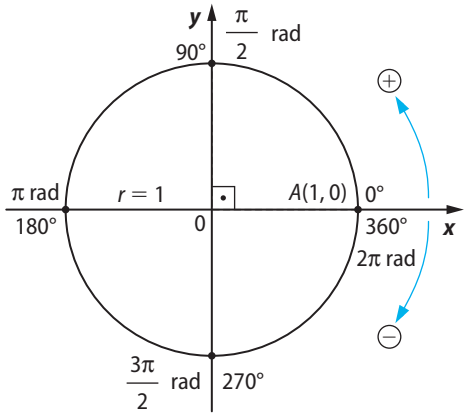


Figura 1.

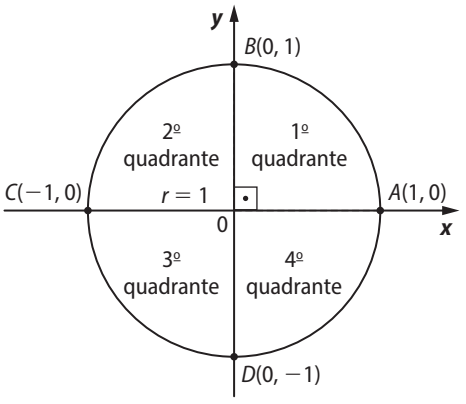


Figura 2.

Saiba que...

Observe que, para todo ponto (x, y) pertencente à circunferência trigonométrica, temos: $-1 \leqslant x \leqslant 1$ e $-1 \leqslant y \leqslant 1$.

Arcos côngruos

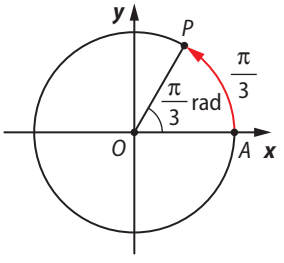
No início do Capítulo, comentamos que vamos estudar as razões trigonométricas para qualquer ângulo. Para isso, precisamos compreender como localizá-los na circunferência trigonométrica. Por exemplo, como representar um arco de 450° na circunferência trigonométrica? É o que acompanharemos a seguir.

Seja *P* um ponto da circunferência trigonométrica. Podemos verificar que há uma infinidade de arcos com origem em *A* e extremidade em *P*. Para isso, basta, a partir de *P*, dar voltas completas, ou seja, dar voltas em arcos cujas medidas sejam múltiplas de 2π, em qualquer sentido, horário ou anti-horário.

Considerando como exemplo o arco $\overset{\frown}{AP}$, mostrado na figura, o primeiro arco de que nos lembramos é o de medida $\frac{\pi}{3}$. No entanto, o ponto *P* é a extremidade de outros arcos, que podem ser obtidos adicionando (ou subtraindo) múltiplos inteiros de 2π a $\frac{\pi}{3}$.

Pense e responda

Por que os arcos múltiplos de 2π têm a mesma extremidade?



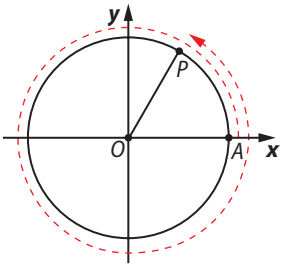
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Porque 2π é o comprimento da circunferência trigonométrica, que tem raio unitário.

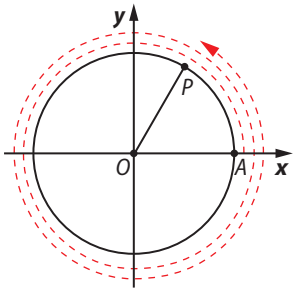
MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Observe os exemplos:

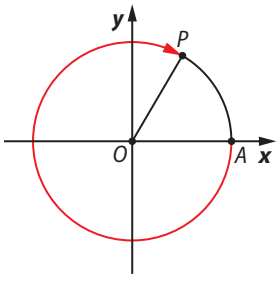
- No sentido anti-horário, ao dar uma volta completa mais $\frac{\pi}{3}$, obtemos o arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida $\frac{7\pi}{3}$, pois $\frac{7\pi}{3} = \left(\frac{\pi}{3} + 1 \cdot 2\pi\right)$.



- No sentido anti-horário, ao dar duas voltas completas mais $\frac{\pi}{3}$, obtemos o arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida $\frac{13\pi}{3}$, pois $\frac{13\pi}{3} = \left(\frac{\pi}{3} + 2 \cdot 2\pi\right)$.



- No sentido horário, ao dar uma volta completa menos $\frac{\pi}{3}$, obtemos o arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida $-\frac{5\pi}{3}$, pois $-\frac{5\pi}{3} = \left(\frac{\pi}{3} - 1 \cdot 2\pi\right)$.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Saiba que...

Poderíamos considerar a medida do arco $\overset{\frown}{AP}$ em grau; nesse caso, para obter arcos com extremidade em P, bastaria adicionar (ou subtrair) múltiplos inteiros de 180°.

Como $\frac{\pi}{3} = 60°$, teríamos, entre outros arcos:

- $60° + 1 \cdot 360° = 420°$
- $60° + 2 \cdot 360° = 780°$
- $60° - 1 \cdot 360° = -300°$

Os arcos que têm a mesma extremidade P são chamados de **arcos côngruos** ou **congruentes**.

O arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida θ, com $0° < \theta < 360°$, ou $0 < \theta < 2\pi$, é chamado de **1ª determinação positiva** dos arcos côngruos a ele, pois é o único representante desses arcos côngruos que está na primeira volta positiva.

De modo geral, um arco $\overset{\frown}{AP}$ que mede α radianos e cuja primeira determinação positiva mede θ tem como **expressão geral dos arcos côngruos** a ele:

$\theta + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$ ou $\theta + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

Caso a medida do arco seja dada em grau, como a circunferência tem 360°, teremos:

$\theta + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$

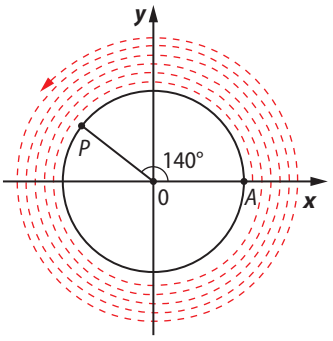
Pense e responda

- Qual é o arco obtido quando $k = 0$ na expressão dos arcos côngruos? A 1ª determinação positiva dos arcos côngruos ao arco considerado.
- O que acontece quando k é um valor negativo? Deve-se percorrer a circunferência no sentido horário para obter a extremidade do arco.
- Qual é o arco côngruo a $\frac{\pi}{3}$ na segunda volta negativa? Como você raciocinou para chegar à resposta?

$-\frac{11\pi}{3}$. Resposta pessoal. Para chegar a essa conclusão, os estudantes podem substituir $k = -2$ na expressão geral dos arcos côngruos.

Acompanhe um exemplo de como determinar a expressão geral dos arcos côngruos ao arco de 1 940°. Inicialmente, precisamos determinar a medida da 1ª determinação positiva desse arco. Vamos dividir 1 940° por 360° para determinar quantas voltas completas o arco dará na circunferência trigonométrica.

$$\begin{array}{r|l} 1940 & 360 \\ 140 & 5 \end{array}$$



Assim, podemos escrever: $1940° = 140° + 5 \cdot 360°$

1ª determinação positiva

número de voltas completas

Portanto, a expressão geral dos arcos côngruos ao arco de 1 940° é:

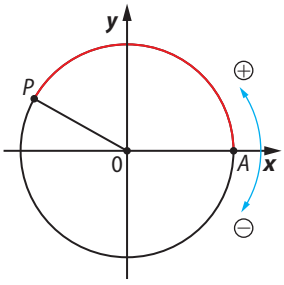
$140° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$

Números reais associados a pontos da circunferência trigonométrica

Estudamos que, além da origem A, cada arco da circunferência trigonométrica tem, como outra extremidade, um único ponto na circunferência. Assim, é possível indicar um arco apenas por esse ponto.

Vamos, agora, associar cada número real α a um único ponto P na circunferência trigonométrica, dado que:

- se $\alpha > 0$, percorremos, a partir de A e em sentido anti-horário, um arco de comprimento α com extremidades em A e P;
- se $\alpha < 0$, percorremos, a partir de A e em sentido horário, um arco de comprimento $|\alpha|$ com extremidades em A e P;
- se $\alpha = 0$, o ponto P coincide com o ponto A.

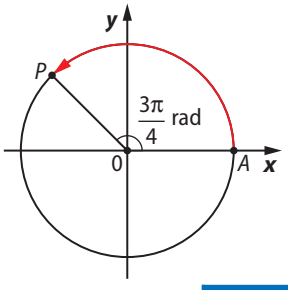


ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

É como se "enrolássemos" a reta real na circunferência trigonométrica, com os pontos associados aos números positivos no sentido anti-horário e com os pontos associados aos números negativos no sentido horário. A origem da reta real coincide com o ponto A.

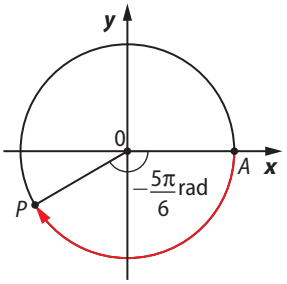
Acompanhe dois exemplos:

a) Para localizar o ponto associado ao número $\frac{3\pi}{4}$, partimos de A e percorremos um arco de comprimento $\frac{3\pi}{4}$ na circunferência no sentido anti-horário.



- $\alpha = \frac{3\pi}{4}$
- $\text{med}(\overset{\frown}{AP}) = \frac{3\pi}{4}$

b) Para localizar o ponto associado ao número $-\frac{5\pi}{6}$, que é negativo, percorremos um arco de comprimento $\left|-\frac{5\pi}{6}\right| = \frac{5\pi}{6}$ no sentido horário na circunferência a partir de A.



- $\alpha = -\frac{5\pi}{6}$
- $\text{med}(\overset{\frown}{AP}) = \frac{5\pi}{6}$

Saiba que...

Como a circunferência trigonométrica tem raio unitário, cada arco $\overset{\frown}{AP}$ associado a um número real α tem comprimento $|\alpha|$ e medida angular α rad.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

ATIVIDADES RESOLVIDAS

3. Escreva a expressão geral dos arcos côngruos aos arcos a seguir.

a) $\frac{\pi}{4}$

b) 175°

Resolução

a) A expressão geral para arcos em radiano é $\theta + 2k\pi$. Substituindo θ por $\frac{\pi}{4}$, já que $0 < \frac{\pi}{4} < 2\pi$, temos: $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

b) A expressão geral para arcos em grau é $\theta + k \cdot 360°$. Substituindo θ por 175°, já que $0° < 175° < 360°$, temos: $175° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$.

4. Um móvel percorreu um arco de 1690° na circunferência trigonométrica, partindo do ponto *A*, origem dos arcos. Quantas voltas completas na circunferência esse móvel deu? Em qual quadrante parou?

Resolução

Para determinar o número de voltas completas, vamos dividir a medida do arco, em grau, por 360°, que é a medida de uma volta na circunferência. Assim:

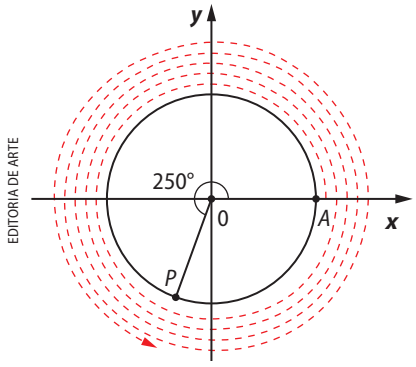
$$\begin{array}{r|l} 1690 & 360 \\ 250 & 4 \end{array}$$

Com isso, podemos escrever a seguinte expressão:

$1690° = 250° + 4 \cdot 360°$

número de voltas completas

O arco de 1690° tem a mesma extremidade que o arco de 250°.



EDITORIA DE ARTE

Portanto, o móvel deu quatro voltas completas no sentido anti-horário e, como $180° < 250° < 270°$, parou no terceiro quadrante.

5. Escreva a expressão geral dos arcos côngruos ao arco de $\frac{35\pi}{2}$.

Resolução

Temos que:

$$\frac{35\pi}{2} = 17{,}5\pi = 1{,}5\pi + 16\pi = \frac{3}{2}\pi + 8 \cdot 2\pi$$

Assim, a 1ª determinação positiva do arco de $\frac{35\pi}{2}$ é $\frac{3\pi}{2}$, e a expressão geral dos arcos côngruos é $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Outra maneira de resolver a atividade seria transformar o ângulo de radiano para grau:

$$\frac{35\pi}{2} = 35 \cdot \frac{\pi}{2} = 35 \cdot 90° = 3150°$$

Assim, dividindo 3150° por 360°, temos:

$$\begin{array}{r|l} 3150 & 360 \\ 270 & 8 \end{array}$$

Então, podemos escrever:

$3150° = 270° + 8 \cdot 360°$

número de voltas completas

1ª determinação positiva

Voltando para as medidas em radiano, temos:

$$\frac{35\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + 8 \cdot 2\pi$$

Assim, a expressão geral dos arcos côngruos ao arco de $\frac{35\pi}{2}$ é $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

8. Represente, na circunferência trigonométrica, os pontos associados aos números a seguir.

a) $\frac{\pi}{5}$ Ver as **Orientações para o professor**.

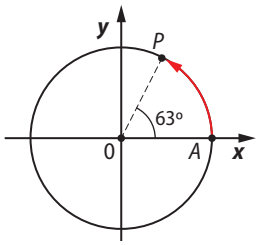
b) $\frac{3\pi}{4}$

c) $-\frac{5\pi}{9}$

d) -5π

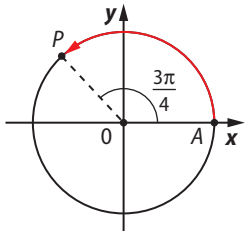
9. Determine a expressão geral dos arcos côngruos aos arcos destacados nas circunferências trigonométricas a seguir.

a) $63° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

b) $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$



10. Verifique se os números $-\frac{5\pi}{6}$ e $\frac{7\pi}{6}$ estão associados a pontos coincidentes na circunferência trigonométrica. sim

- Reúna-se a um colega e explique a ele como você fez para chegar a essa conclusão. Vocês pensaram da mesma maneira? Resposta pessoal.

11. Verifique se são côngruos os seguintes pares de arcos:

a) 1490° e −1030° São côngruos.

b) $\frac{14\pi}{3}$ rad e $\frac{19\pi}{3}$ rad Não são côngruos.

12. Determine o quadrante em que estão localizados os pontos correspondentes aos seguintes arcos:

a) −1640° segundo quadrante

b) $\frac{2\,487\pi}{4}$ rad quarto quadrante

13. Determine quantas voltas completas um móvel dá e em que quadrante ele para se, partindo da origem dos arcos, percorre, na circunferência trigonométrica, um arco de: Ver as **Orientações para o professor**.

a) 1810°

b) $\frac{25\pi}{4}$ rad

c) −1200°

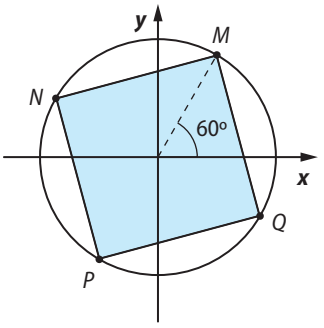
d) 900°

e) $\frac{31\pi}{6}$ rad

f) $\frac{9\pi}{2}$ rad

14. Quantos centímetros percorre um corpo que descreve um arco de 600° em uma circunferência de raio 10 cm? Use $\pi \simeq 3{,}14$. aproximadamente 104,67 cm

15. A figura a seguir representa um quadrado inscrito em uma circunferência trigonométrica. Determine, em grau e em radiano, as 1as determinações positivas dos arcos cujas extremidades são os vértices do quadrado. Ver as **Orientações para o professor**.



16. (Unicentro-PR) Analise as sentenças abaixo e assinale a alternativa correta:

I. A expressão geral dos arcos congruentes a 60° é $\alpha = 60° + x60°$; com $x \in \mathbb{N}$.

II. O menor valor não negativo côngruo ao arco de 1140° é $\alpha = 48°$.

III. Convertendo 60° para radianos, temos $\frac{\pi}{3}$ rad.

IV. Na transformação de $\frac{7\pi}{4}$ radianos para graus, encontramos 315° como resultado.

V. A expressão geral dos arcos côngruos aos arcos de 45° é $45° + k360°$, com $k \in \mathbb{Z}$.

alternativa **d**

a) I, II, III, IV e V são verdadeiras.

b) II, III, IV e V são verdadeiras.

c) I, II, III e V são verdadeiras.

d) III, IV e V são verdadeiras.

e) Somente II é verdadeira.

17. Represente, na circunferência trigonométrica, as extremidades dos arcos cujas medidas são dadas pelas expressões a seguir. Ver as **Orientações para o professor**.

a) $\alpha = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) $\alpha = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

c) $\alpha = 90° + k \cdot 90°, k \in \mathbb{Z}$

Seno e cosseno de um arco

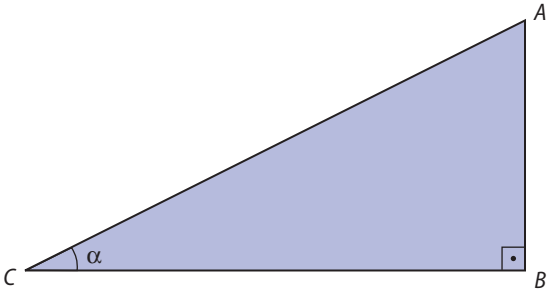
Você já estudou as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo. Vamos retomar essas ideias.

Seja o triângulo retângulo *ABC* representado a seguir. Definimos seno, cosseno e tangente do ângulo agudo α como razões entre as medidas dos lados do triângulo, como indicado a seguir.

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{AB}{AC}$$

$$\cos\alpha = \frac{BC}{AC}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{AB}{BC}$$



Pense e responda

Nesse triângulo retângulo, sendo $\text{med}(B\hat{A}C) = \beta$, quais são as expressões de sen β, de cos β e de tg β?

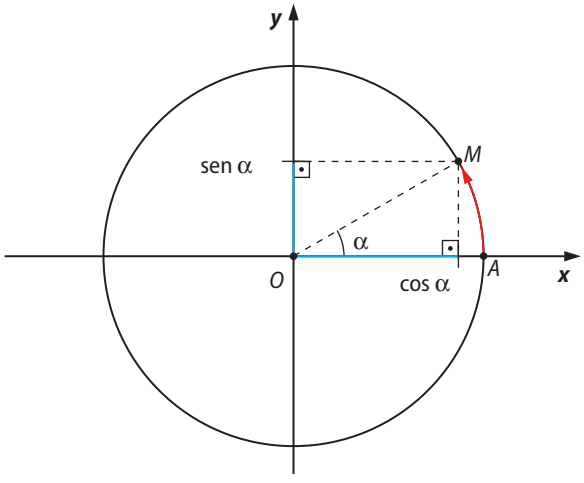
$\operatorname{sen}\beta = \frac{BC}{AC}$, $\cos\beta = \frac{AB}{AC}$ e $\operatorname{tg}\beta = \frac{BC}{AB}$

Agora, vamos estudar esses conceitos na circunferência trigonométrica, estendendo-os para ângulos quaisquer.

Seja *M* um ponto da circunferência trigonométrica associado ao número real α. Estudamos que *M* é a extremidade final do arco $\overset{\frown}{AM}$ de medida α em radiano. Define-se:

O **seno** de α é a ordenada do ponto *M*.

O **cosseno** de α é a abscissa do ponto *M*.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

O eixo vertical *y* é chamado de **eixo dos senos** e o eixo horizontal *x* é chamado de **eixo dos cossenos**.

Com isso, cada número real α corresponde a um ponto da circunferência trigonométrica de coordenadas (cos α, sen α).

Essas definições de seno e de cosseno são válidas para o ponto *M* em qualquer quadrante da circunferência trigonométrica e também para quando *M* está sobre os eixos. Os sinais do seno e do cosseno variam conforme mostrado na página a seguir.

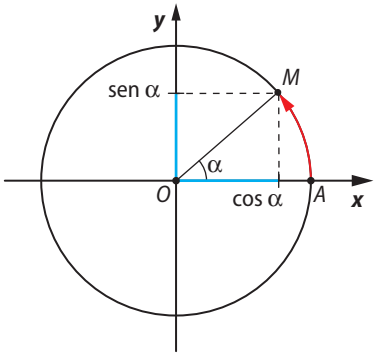
Pense e responda

Relacione a definição de seno e de cosseno no triângulo retângulo com a definição de seno e de cosseno para ângulos na circunferência trigonométrica. Justifique por que elas coincidem para $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$. Ver as **Orientações para o professor**.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

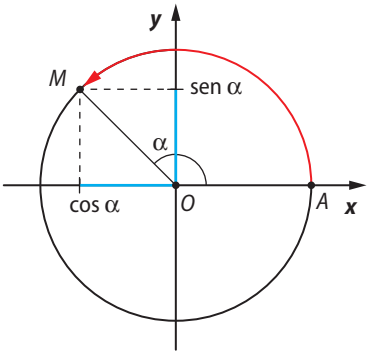
MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

1) No primeiro quadrante, o seno é positivo e o cosseno é positivo.



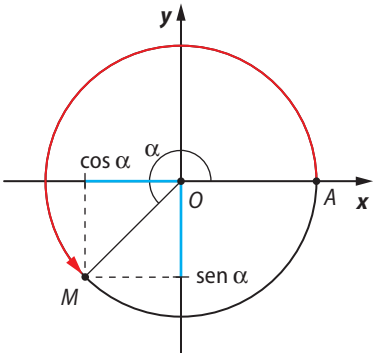
- ordenada de $M > 0 \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha > 0$
- abscissa de $M > 0 \Rightarrow \cos \alpha > 0$

2) No segundo quadrante, o seno é positivo e o cosseno é negativo.



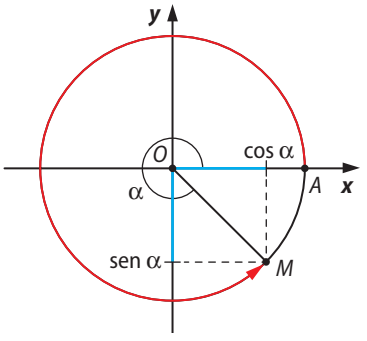
- ordenada de $M > 0 \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha > 0$
- abscissa de $M < 0 \Rightarrow \cos \alpha < 0$

3) No terceiro quadrante, o seno é negativo e o cosseno é negativo.



- ordenada de $M < 0 \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha < 0$
- abscissa de $M < 0 \Rightarrow \cos \alpha < 0$

4) No quarto quadrante, o seno é negativo e o cosseno é positivo.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

- ordenada de $M < 0 \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha < 0$
- abscissa de $M > 0 \Rightarrow \cos \alpha > 0$

Pense e responda

- Lembrando que a circunferência trigonométrica tem raio unitário, responda:
  - **a)** Qual é o valor máximo que o seno de um ângulo pode assumir? E o valor mínimo? 1; −1
  - **b)** Qual é o valor máximo que o cosseno de um ângulo pode assumir? E o valor mínimo? 1; −1
- O que acontece com os sinais do seno e do cosseno quando o ponto *M* está sobre o eixo *x*? E sobre o eixo *y*?

Ver as **Orientações para o professor**.

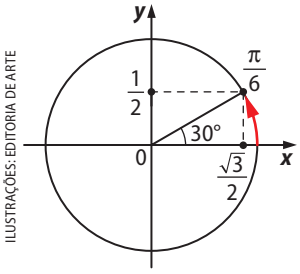
» Alguns valores do seno e do cosseno

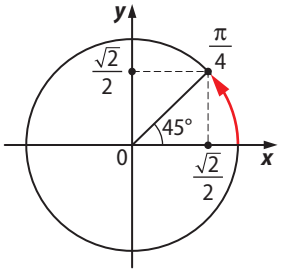
Agora que já definimos o seno e o cosseno de qualquer ângulo, podemos obter esses valores com o uso de um *software* de Geometria Dinâmica, como o GeoGebra, ou utilizando uma calculadora científica. Atualmente, a maioria das calculadoras disponíveis nos sistemas operacionais dos celulares possui essa opção. No entanto, assim como foi estudado para as razões trigonométricas no triângulo retângulo, alguns ângulos são utilizados com bastante frequência em situações nas quais não é possível recorrer a uma calculadora; portanto, saber os valores do seno e do cosseno desses ângulos ajuda na realização dos cálculos.

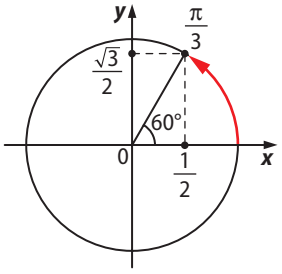
MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Observe o quadro a seguir.

Medida do arco	0° ou 0	30° ou $\frac{\pi}{6}$	45° ou $\frac{\pi}{4}$	60° ou $\frac{\pi}{3}$	90° ou $\frac{\pi}{2}$	180° ou π	270° ou $\frac{3\pi}{2}$	360° ou 2π
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1







ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Saiba que...

Como comentamos anteriormente, quando a unidade de medida angular do arco não estiver indicada, consideraremos que está em radiano.

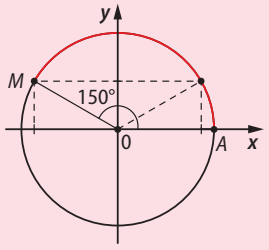
» Redução ao primeiro quadrante

A partir dos valores de seno e de cosseno para o primeiro quadrante e usando simetrias na circunferência trigonométrica, podemos estabelecer os valores de seno e de cosseno para arcos nos demais quadrantes. Ao fazer isso, dizemos que estamos fazendo uma **redução ao primeiro quadrante**.

Acompanhe, a seguir, como fazer essa redução ao primeiro quadrante a partir de cada um dos demais quadrantes.

Pense e responda

Reúna-se a um colega e discutam como vocês fariam, apenas com o quadro anterior e seus conhecimentos matemáticos, para determinar o seno e o cosseno do arco de 150°. Resposta pessoal.

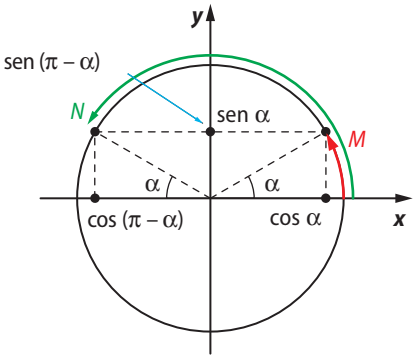


- **Redução do segundo quadrante para o primeiro quadrante**

Seja M o ponto da circunferência trigonométrica correspondente ao arco de medida α. O ponto N, correspondente ao arco de medida $(\pi - \alpha)$, pertencente ao segundo quadrante, é simétrico ao ponto M em relação ao eixo dos senos.

Note, na figura, que, pela simetria, os pontos M e N têm a mesma ordenada, porém abscissas opostas. Logo, temos:

$$\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$$
$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$



Pense e responda

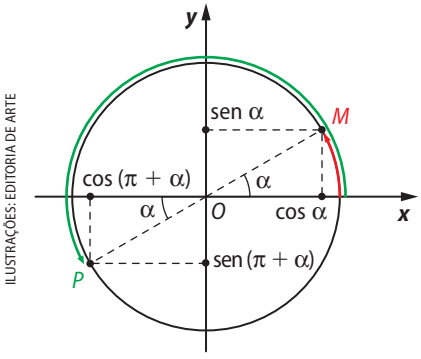
- Por que podemos afirmar que $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$?
  Dica: observe os tracejados que formam triângulos na imagem. Ver as **Orientações para o professor**.
- Retome a questão do **Pense e responda** anterior: Qual é o valor do seno e o do cosseno de 150°? Depois de estudar esse conteúdo, você pensou de maneira diferente? Resposta pessoal.

$\operatorname{sen}(150°) = \operatorname{sen}(30°) = \frac{1}{2}$ $\quad$ $\cos(150°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

- **Redução do terceiro quadrante para o primeiro quadrante**

O ponto *P*, correspondente ao arco de medida $(\pi + \alpha)$, pertencente ao terceiro quadrante, é simétrico ao ponto *M*, extremidade do arco de medida α, em relação ao centro da circunferência *O*.



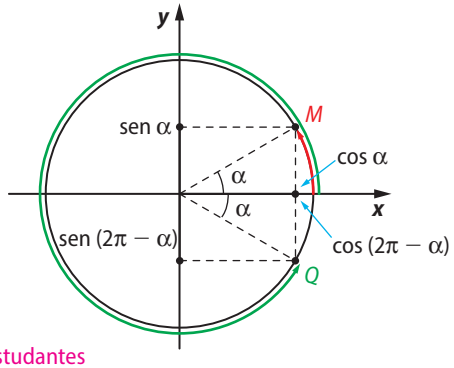
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Pela simetria, os pontos *M* e *P* têm ordenadas opostas e abscissas opostas. Logo:

$$\operatorname{sen}(\pi + \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$$
$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$$

- **Redução do quarto quadrante para o primeiro quadrante**

O ponto *Q*, correspondente ao arco de medida $(2\pi - \alpha)$, pertencente ao quarto quadrante, é simétrico ao ponto *M*, extremidade do arco de medida α, em relação ao eixo *x*.



Pela simetria, os pontos *M* e *Q* têm ordenadas opostas, porém mesma abscissa. Logo:

$$\operatorname{sen}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$$
$$\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha$$

Pense e responda

Descreva como determinar o seno e o cosseno de arcos que estão fora da primeira volta da circunferência trigonométrica, como $\frac{11\pi}{4}$.

Espera-se que os estudantes respondam que é necessário obter a 1ª determinação positiva do arco, pois o seno e o cosseno do arco fora da primeira volta terão o mesmo valor que o seno e o cosseno da 1ª determinação positiva. No caso, a 1ª determinação positiva de $\frac{11\pi}{4}$ é igual a $\frac{3\pi}{4}$, pois $\frac{11\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 1 \cdot 2\pi$.

Para acessar

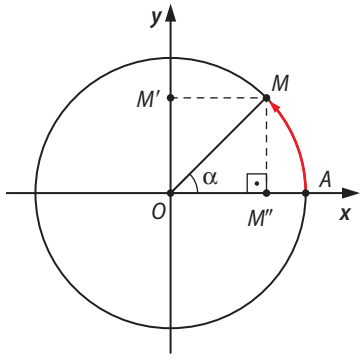
- FERREIRA, Fábio M. **Pontos simétricos na circunferência trigonométrica**. [*S. l.*]: GeoGebra, c2024. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/GXuzvmpM. Acesso em: 2 out. 2024.

  Esse *link* apresenta um *applet* do *software* **GeoGebra** em que é possível visualizar as simetrias na circunferência trigonométrica, variando a posição do ponto que representa um arco da circunferência.

» Relação fundamental da Trigonometria

No estudo das razões trigonométricas no triângulo retângulo, você estudou a relação fundamental da Trigonometria. Agora, vamos verificar que essa relação é válida para qualquer arco.

Considere, na circunferência trigonométrica, o arco $\overset{\frown}{AM}$ de medida α, como mostra a figura.



EDITORIA DE ARTE

Os pontos M' e M'' são as projeções ortogonais do ponto M sobre os eixos y e x, respectivamente. No triângulo retângulo $OM''M$, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$(MM'')^2 + (OM'')^2 = (OM)^2$$

Para M no primeiro quadrante, os valores do seno e do cosseno de α são positivos. Então, $OM'' = \cos \alpha$ e $OM' = MM'' = \operatorname{sen} \alpha$. Além disso, $OM = 1$. Assim:

$$(MM'')^2 + (OM'')^2 = (OM)^2 \Rightarrow (\operatorname{sen} \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1^2$$

Ou, ainda:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Pense e responda

Por que podemos afirmar que $OM = 1$?

Porque o segmento $\overline{OM}$ é o raio da circunferência trigonométrica, que, por definição, mede 1.

Essa relação, denominada **relação fundamental da Trigonometria**, é válida para todos os valores de α, inclusive para aqueles em que o ponto M pertence a um dos eixos. Observe.

- **Segundo quadrante**

  $\operatorname{sen} (180° - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha \Rightarrow \operatorname{sen}^2 (180° - \alpha) = \operatorname{sen}^2 \alpha$

  $\cos (180° - \alpha) = -\cos \alpha \Rightarrow \cos^2 (180° - \alpha) = (-\cos \alpha)^2 = \cos^2 \alpha$

  Então, temos que: $\operatorname{sen}^2 (180° - \alpha) + \cos^2 (180° - \alpha) = \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

- **Terceiro quadrante**

  $\operatorname{sen} (180° + \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha \Rightarrow \operatorname{sen}^2 (180° + \alpha) = (-\operatorname{sen} \alpha)^2 = \operatorname{sen}^2 \alpha$

  $\cos (180° + \alpha) = -\cos \alpha \Rightarrow \cos^2 (180° + \alpha) = (-\cos \alpha)^2 = \cos^2 \alpha$

  Então, temos que: $\operatorname{sen}^2 (180° + \alpha) + \cos^2 (180° + \alpha) = \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

- **Quarto quadrante**

  $\operatorname{sen} (360° - \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha \Rightarrow \operatorname{sen}^2 (360° - \alpha) = (-\operatorname{sen} \alpha)^2 = \operatorname{sen}^2 \alpha$

  $\cos (360° - \alpha) = \cos \alpha \Rightarrow \cos^2 (360° - \alpha) = \cos^2 \alpha$

  Então, temos que: $\operatorname{sen}^2 (360° - \alpha) + \cos^2 (360° - \alpha) = \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

- ***M* pertencente aos eixos**

  Para 0° ou 360°: $\operatorname{sen}^2 360° + \cos^2 360° = 0^2 + 1^2 = 1$

  Para 90°: $\operatorname{sen}^2 90° + \cos^2 90° = 1^2 + 0^2 = 1$

  Para 180°: $\operatorname{sen}^2 180° + \cos^2 180° = 0^2 + (-1)^2 = 1$

  Para 270°: $\operatorname{sen}^2 270° + \cos^2 270° = (-1)^2 + 0^2 = 1$

Assim, verificamos que a relação fundamental da Trigonometria vale para arcos em qualquer quadrante ou com extremidade nos eixos.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

ATIVIDADES RESOLVIDAS

6. Calcule o valor de $\cos 13\pi$.

Resolução

Como o arco de medida 13π não está na primeira volta, devemos estabelecer a 1ª determinação positiva dele, assim:

$13\pi = \pi + 12\pi = \pi + 6 \cdot 2\pi$

Então, 13π é côngruo a π, portanto

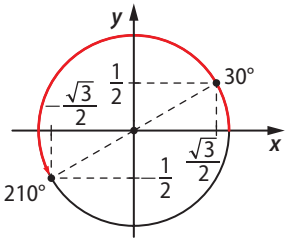
$\cos 13\pi = \cos \pi$.

Como $\cos \pi = -1$, então $\cos 13\pi = -1$.

7. Calcule os valores de $\operatorname{sen} 210°$ e de $\cos 210°$.

Resolução

O arco de 210° está no terceiro quadrante. Além disso, observamos que $210° = 180° + 30°$. Assim, temos:



Então, podemos concluir que:

$\operatorname{sen} 210° = -\operatorname{sen} 30° = -\frac{1}{2}$

$\cos 210° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. Calcule o valor da expressão:

$$E = \frac{\operatorname{sen} 1830° + \cos 14\pi}{\operatorname{sen} \frac{16\pi}{3}}$$

Resolução

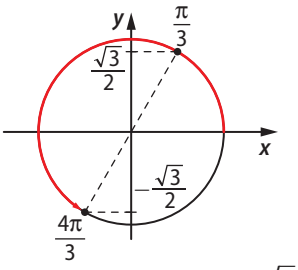
Para calcular o valor de E, precisamos determinar cada uma das razões trigonométricas da expressão. Como todos os arcos são maiores do que uma volta da circunferência trigonométrica, vamos calcular a 1ª determinação positiva de cada um deles:

- $1830° = 30° + 5 \cdot 360°$
- $14\pi = 7 \cdot 2\pi = 0 + 7 \cdot 2\pi$
- $\frac{16\pi}{3} = \frac{12\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + 2 \cdot 2\pi$

Então, 1830° é côngruo a 30°, 14π é côngruo a 0 e $\frac{16\pi}{3}$ é côngruo a $\frac{4\pi}{3}$. Com base nessas informações, vamos calcular as razões trigonométricas da expressão.

- $\operatorname{sen} 1830° = \operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}$
- $\cos 14\pi = \cos 0° = 1$
- $\operatorname{sen} \frac{16\pi}{3} = \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3}$

O arco $\frac{4\pi}{3}$ está no terceiro quadrante e $\frac{4\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3}$. Assim:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Então: $\operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} = -\operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Agora que temos os valores de todas as razões trigonométricas, vamos substituí-las na expressão para determinar o valor de E.

$$E = \frac{\frac{1}{2} + 1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) =$$

$$= -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\frac{3}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$$

Portanto, $E = -\sqrt{3}$.

9. Dado $\operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{4}$, com $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, calcule $\cos \alpha$.

Resolução

No enunciado, é dado o valor do seno de um ângulo no primeiro quadrante e é pedido o cosseno desse ângulo. A relação fundamental da Trigonometria relaciona o seno e o cosseno de um ângulo, então vamos aplicá-la.

$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$

$\frac{9}{16} + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{7}{16}$

$\cos \alpha = \pm\sqrt{\frac{7}{16}} \Rightarrow \cos \alpha = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$

Agora, precisamos determinar se o cosseno é positivo ou negativo. Do enunciado, sabemos que o ângulo α pertence ao primeiro quadrante. Estudamos que o cosseno nesse quadrante é positivo. Então:

$\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$

10. Para quais valores de m temos, simultaneamente, $\operatorname{sen}\alpha = m + 1$ e $\cos\alpha = m$?

Resolução

Vamos usar a relação fundamental para substituir os valores de seno e de cosseno e determinar os possíveis valores de α.

$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow (m+1)^2 + m^2 = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow m^2 + 2m + 1 + m^2 - 1 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2m^2 + 2m = 0 \Rightarrow m(2m+2) = 0 \Rightarrow m = 0$ ou $2m + 2 = 0 \Rightarrow m = -1$

Portanto, os possíveis valores são $m = 0$ ou $m = -1$.

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

18. Calcule os valores indicados a seguir.

a) $\operatorname{sen} 150° \ \frac{1}{2}$

b) $\cos 150° \ -\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\operatorname{sen} 240° \ -\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\cos 240° \ -\frac{1}{2}$

e) $\operatorname{sen} 315° + \cos 315°$ zero

19. Calcule os valores do seno e do cosseno dos seguintes arcos: Ver as **Orientações para o professor**.

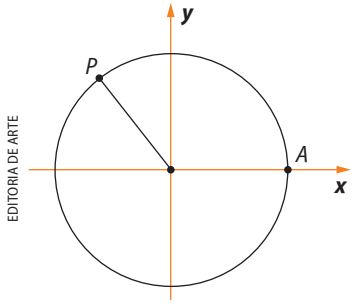
a) 135°

b) $\frac{5\pi}{6}$

c) $\frac{19\pi}{4}$

d) $-240°$

20. (UERJ) O círculo a seguir tem o centro na origem do plano cartesiano xy e raio igual a 1. Nele, $\overset{\frown}{AP}$ determina um arco de 120°. alternativa **a**



EDITORIA DE ARTE

As coordenadas de P são:

a) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

b) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

c) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

d) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

21. Encontre o número real expresso por:

a) $\operatorname{sen} 360° + \operatorname{sen} 540° - 4\operatorname{sen} 1710°$ 4

b) $\cos 810° + 4\cos 3780° - \frac{1}{2}\cos 1350°$ -4

22. Usando $\pi \simeq 3{,}14$, verifique se:

a) $\operatorname{sen} 8 > 0$; verdadeiro

b) $\cos 10 < 0$; verdadeiro

c) $\operatorname{sen} 5 > 0$. falso

- Reúna-se a um colega e explique a ele como você raciocinou para realizar a atividade. Vocês pensaram da mesma maneira?

Resposta pessoal.

23. Simplifique as expressões a seguir.

a) $\operatorname{sen}(9\pi - \alpha) + \operatorname{sen}(5\pi - \alpha)$ $2\operatorname{sen}\alpha$

b) $\operatorname{sen}(\alpha - 900°) + \cos(\alpha - 540°)$ $-\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha$

c) $\operatorname{sen}(4\pi - \alpha) + \cos(8\pi - \alpha) - \operatorname{sen}(720° - \alpha)$ $\cos\alpha$

24. Determine o quadrante em que está o arco α sabendo que:

a) $\cos\alpha > 0$ e $\operatorname{sen}\alpha > 0$ primeiro quadrante

b) $\operatorname{sen}\alpha > 0$ e $\cos\alpha < 0$ segundo quadrante

25. Represente, na circunferência trigonométrica, um ângulo α tal que: Ver as **Orientações para o professor**.

a) $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{3}{4}$

b) $\operatorname{sen}\alpha = \frac{7}{10}$

c) $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{5}$ com $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

26. Sabendo que $\alpha = \frac{\pi}{2}$, calcule:

$A = \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} - 3\operatorname{sen} 2\alpha + \frac{\operatorname{sen} 3\alpha}{4}$ $A = \frac{2\sqrt{2} - 1}{4}$

27. Calcule o valor da expressão: zero

$2\operatorname{sen}\pi \cdot \operatorname{sen}(\pi - \alpha) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$ para $\alpha = \frac{\pi}{5}$

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

28. Calcule o valor da expressão:

$\text{sen } 8\pi + \text{sen } \frac{11\pi}{2} - \text{sen } \frac{13\pi}{6}$ $-\frac{3}{2}$

29. Relacione os senos e cossenos da coluna da esquerda com os seus respectivos valores na coluna da direita. a-I; b-II; c-IV; d-III; e-IV; f-II; g-I; h-III

Alguns valores serão relacionados com mais de uma razão trigonométrica.

a) sen 120°
b) sen 150°
c) cos 120°
d) cos 150°
e) $\text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$
f) $\text{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right)$
g) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$
h) $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

I. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
II. $\frac{1}{2}$
III. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
IV. $-\frac{1}{2}$

30. (PUC-SP) Sendo $\cos x = \frac{1}{m}$ e $\text{sen } x = \frac{\sqrt{m+1}}{m}$, determine m. 2 ou −1

31. (Fuvest-SP) Qual dos números é maior? Justifique.

a) sen 830° ou sen 1195° sen 830°
b) cos (−535°) ou cos 190° cos 190°

32. (FEI-SP) Calcular $\text{sen}\left(\frac{7\pi}{2}\right) \cdot \cos(31\pi)$. 1

33. Se $k \in \mathbb{N}$ e $k < 4$, quanto vale a soma dos números da forma $\cos\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right)$? zero

34. Sendo $\text{sen } \alpha = \sqrt{a-2}$ e $\cos \alpha = a - 1$, determine a. $a = 2$

35. (UFMS) Calcule todos os valores reais de α, para os quais valem, simultaneamente, as igualdades $\text{sen } x = a + \frac{1}{2}$ e $\cos x = a - \frac{1}{2}$, sendo x um número real. $a = \pm\frac{1}{2}$

36. Adotando sen 25° = 0,42 e cos 25° = 0,91, calcule:

a) sen 205° e cos 205° −0,42; −0,91
b) sen (−25°) e cos (−25°) −0,42; 0,91
c) sen 335° e cos 335° −0,42; 0,91

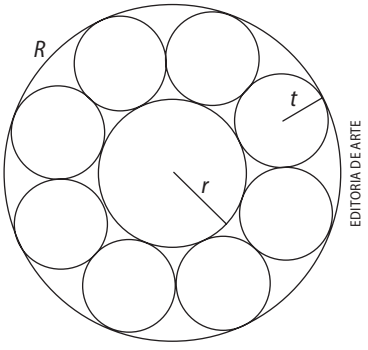
37. Você já ouviu falar no *Sangaku*?

Sangaku são gravuras em madeira que foram escritas em uma língua antiga do Japão durante o período Edo (1603-1868). Elas continham teoremas geométricos e normalmente eram entregues como oferendas em templos xintoístas em agradecimento por bons desempenhos escolares.

KAISORN/SHUTTERSTOCK.COM

- Acompanhe um exemplo de problema encontrado em um *Sangaku* datado de 1879.

> [...] um anel de oito pequenos círculos de raio t, cujos centros se encontram nos vértices de um octógono regular, é circunscrito por um círculo de raio R e circunscreve um círculo de raio r. Encontre R e r em termos de t.



EDITORIA DE ARTE

SANTOS, Thaynara K. O. **Sangaku**: a matemática sagrada. 2018. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia de São Paulo, São Paulo, 2018. p. 46. Disponível em: https://eadcampus.spo.ifsp.edu.br/pluginfile.php/167284/mod_resource/content/0/Thaynara%20Keiko%20Oda%20Santos.pdf. Acesso em: 12 set. 2024.

Agora, reúna-se a um colega e façam o que se pede em cada item a seguir. Ver as **Orientações para o professor**.

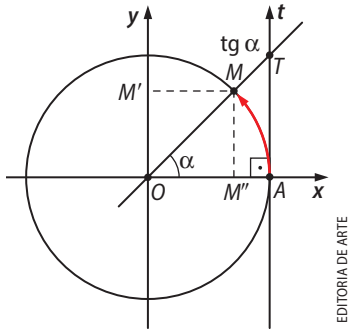
a) Vocês já tinham ouvido falar a respeito do *Sangaku*? Pesquisem sobre ele, suas origens, problemas escritos nele e informações que tenham curiosidade em saber.
b) Resolvam o problema do *Sangaku* apresentado. Dado: sen 22,5° ≃ 0,38.
c) Agora é a vez de vocês! Criem um painel inspirado no *Sangaku*: pensem em um problema geométrico que envolva os conteúdos vistos até agora e o representem em uma folha de papel. Depois, troquem o *Sangaku* criado com outra dupla, para que uma resolva o problema elaborado pela outra. Resposta pessoal.

Tangente de um arco

Já analisamos o comportamento das razões seno e cosseno na circunferência trigonométrica. Agora, vamos estudar o comportamento da tangente.

Seja M um ponto da circunferência trigonométrica associado ao número real α. Isto é, M é a extremidade final do arco $\overset{\frown}{AM}$ de medida α radianos.

Tomemos o eixo t, paralelo ao eixo dos senos, orientado no mesmo sentido e tangente à circunferência no ponto A. O eixo t é chamado de **eixo das tangentes**, e o ponto A é a origem do eixo das tangentes.



EDITORIA DE ARTE

Seja T o ponto de intersecção da reta $\overleftrightarrow{OM}$ com o eixo t das tangentes. Define-se:

> A **tangente** de α é a ordenada do ponto T.

Verificamos que:

- essa definição preserva a relação entre tangente, seno e cosseno para qualquer ângulo α, em que $\cos \alpha \neq 0$. Por exemplo, no primeiro quadrante, nos triângulos $OM''M$ e OAT da figura anterior, temos:

$$\triangle OM''M \sim \triangle OAT \Rightarrow \frac{OM''}{OA} = \frac{M''M}{AT} \Rightarrow \frac{\cos \alpha}{1} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha = 1 \cdot \operatorname{sen} \alpha \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}, \text{ com } \cos \alpha \neq 0$$

- quando a reta $\overleftrightarrow{OM}$ coincide com o eixo dos cossenos, temos $\operatorname{tg} \alpha = 0$. Observe que a ordenada de T é 0 quando isso acontece. Assim, $\operatorname{tg} 0° = 0$ e $\operatorname{tg} \pi = 0$.

  Note que, nesse caso, vale a relação $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$, pois $\operatorname{sen} 0° = 0$ e $\operatorname{sen} \pi = 0$.

- quando a reta $\overleftrightarrow{OM}$ coincide com o eixo dos senos, não existe ponto de intersecção T dessa reta com o eixo das tangentes, então não existe $\operatorname{tg} \alpha$. Assim, $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2}$ e $\operatorname{tg} 270°$ não estão definidas.

Portanto, a tangente só não está definida para $\frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Como o eixo das tangentes é orientado para cima, a tangente é positiva quando α é do primeiro ou do terceiro quadrantes e é negativa quando α é do segundo ou do quarto quadrantes, como indicado nas imagens da página a seguir.

Saiba que...

A tangente de um ângulo também pode ser indicada como tan. Escrever $\operatorname{tg} \alpha$ é o mesmo que escrever $\tan \alpha$. Essa notação pode ser encontrada, por exemplo, em algumas calculadoras científicas e programas de computador.

Pense e responda

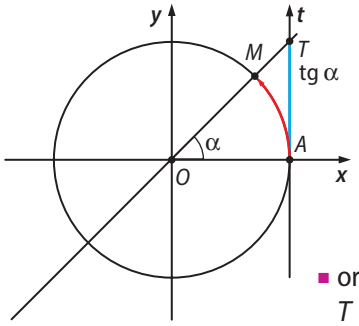
- Relacione a definição da tangente no triângulo retângulo com a definição da tangente para ângulos na circunferência trigonométrica. Justifique por que elas coincidem para $0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$.
- Por que podemos afirmar que $\triangle OM''M \sim \triangle OAT$?

Ver as **Orientações para o professor**.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

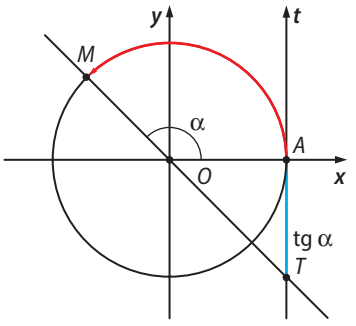
MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

1) No primeiro quadrante, a tangente é positiva.



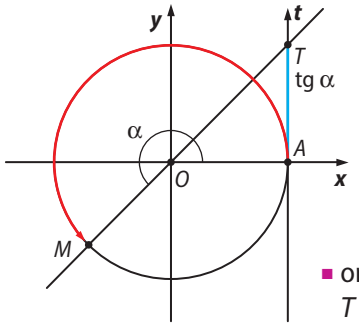
- ordenada de $T > 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha > 0$

2) No segundo quadrante, a tangente é negativa.



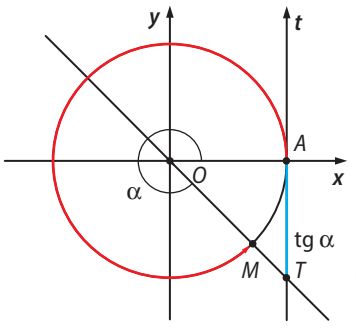
- ordenada de $T < 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha < 0$

3) No terceiro quadrante, a tangente é positiva.



- ordenada de $T > 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha > 0$

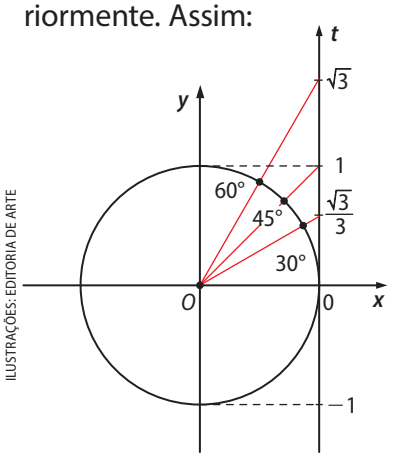
4) No quarto quadrante, a tangente é negativa.



- ordenada de $T < 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha < 0$

» Alguns valores da tangente

Assim como fizemos com o seno e o cosseno, vamos determinar o valor da tangente para alguns arcos mais comuns na circunferência trigonométrica. Para isso, será necessário usar a relação entre as razões $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$ e os valores de seno e cosseno desses ângulos vistos anteriormente. Assim:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

- $\operatorname{tg} 30° = \frac{\operatorname{sen} 30°}{\cos 30°} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
- $\operatorname{tg} 45° = \frac{\operatorname{sen} 45°}{\cos 45°} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$
- $\operatorname{tg} 60° = \frac{\operatorname{sen} 60°}{\cos 60°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

Pense e responda

Há um valor máximo que a tangente pode assumir? E um valor mínimo? Se sim, que valores são esses?

Espera-se que os estudantes concluam que não há um valor máximo nem um valor mínimo, pois a tangente cresce ou diminui indefinidamente.

Logo, podemos escrever:

Medida do arco	0° ou 0	30° ou $\frac{\pi}{6}$	45° ou $\frac{\pi}{4}$	60° ou $\frac{\pi}{3}$	90° ou $\frac{\pi}{2}$	180° ou π	270° ou $\frac{3\pi}{2}$	360° ou 2π
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	não está definida	0	não está definida	0

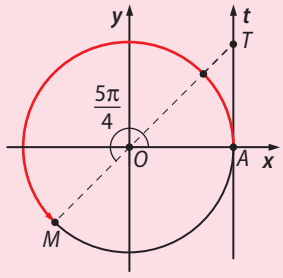
» Redução ao primeiro quadrante

Assim como fizemos com o seno e o cosseno, podemos usar as simetrias na circunferência trigonométrica e os valores da tangente no primeiro quadrante para determinar a tangente de arcos nos demais quadrantes. Nesse caso, também estamos fazendo uma **redução ao primeiro quadrante**.

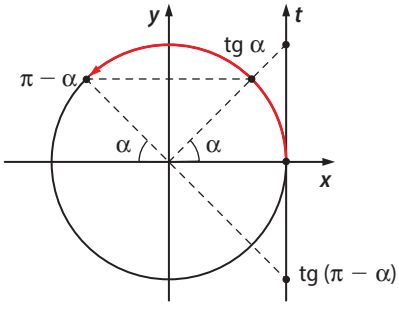
Acompanhe, a seguir, como fazer essa redução ao primeiro quadrante a partir de cada um dos demais quadrantes para $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Pense e responda

Reúna-se a um colega e discutam como vocês fariam, apenas com o quadro apresentado anteriormente e com seus conhecimentos matemáticos, para determinar a tangente do arco de $\frac{5\pi}{4}$. Resposta pessoal.

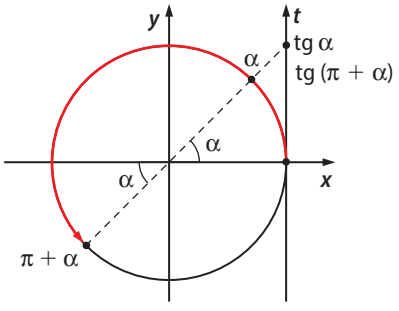


- **Redução do segundo quadrante para o primeiro quadrante**



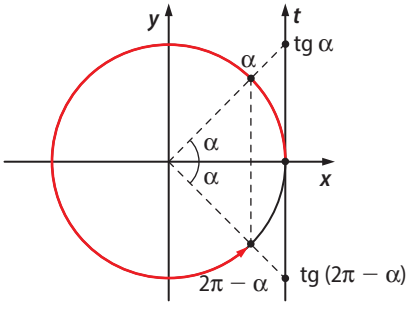
$$\text{tg}\,(\pi - \alpha) = -\text{tg}\,\alpha$$

- **Redução do terceiro quadrante para o primeiro quadrante**



$$\text{tg}\,(\pi + \alpha) = \text{tg}\,\alpha$$

- **Redução do quarto quadrante para o primeiro quadrante**



$$\text{tg}\,(2\pi - \alpha) = -\text{tg}\,\alpha$$

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

ATIVIDADES RESOLVIDAS

11. Determine o valor de tg 1845°.

Resolução

O arco de 1845° é maior do que uma volta. Então, vamos calcular a 1ª determinação positiva dele:

$1845° = 45° + 5 \cdot 360°$

Logo, 1845° é côngruo a 45°. Assim:

$\text{tg } 1845° = \text{tg } 45° = 1$

Portanto, $\text{tg } 1845° = 1$.

12. Sabendo que $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ e $\text{sen } \alpha > 0$, calcule $\text{tg } \frac{\alpha}{2} - \alpha$.

Resolução

Vamos usar a relação fundamental da Trigonometria para determinar o valor de sen α.

$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha + \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}^2 \alpha = 1 - \frac{25}{169} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}^2 \alpha = \frac{144}{169} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen } \alpha = \pm\frac{12}{13}$

Do enunciado, $\text{sen } \alpha > 0$. Então, $\text{sen } \alpha = \frac{12}{13}$.

Temos que $\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$, então:

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{12}{13} \cdot \frac{13}{5} = \frac{12}{5}$$

Portanto, $\text{tg } \alpha = \frac{12}{5}$.

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

38. Calcule o valor de:

a) $\text{tg } 150° \quad -\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\text{tg } (-945°) \quad -1$

c) $\text{tg } \frac{5\pi}{3} \quad -\sqrt{3}$

d) $\text{tg } 7\pi \quad$ zero

39. Determine o valor de tg α, dado que $\text{sen } \alpha = \frac{4}{5}$ e $\cos \alpha > 0$. $\frac{4}{3}$

40. Calcule $A = \text{sen } 3\alpha + \cos 4\alpha - \text{tg } 2\alpha$ para $\alpha = \frac{\pi}{2}$. zero

41. Calcule o valor de $\cos 510° + \text{tg } \frac{3\pi}{4}$. $\frac{-2-\sqrt{3}}{2}$

42. Que número é maior: tg 1 ou tg 7? tg 1

- Explique a um colega como você raciocinou para resolver a atividade. Vocês pensaram da mesma maneira? Resposta pessoal.

43. Calcule o valor de:

a) $\text{tg } \alpha + \text{tg } 3\alpha + \text{tg } 5\alpha$ para $\alpha = \frac{\pi}{4}$ 1

b) $\text{tg } \alpha + \text{tg } 2\alpha + \text{tg } 4\alpha$ para $\alpha = -60°$ $-\sqrt{3}$

44. Determine *m* para que $\frac{\pi}{3}$ seja raiz da equação:

$\text{tg}^2 \alpha - m \cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha = 0$ $m = 15$

45. Sendo $\text{sen } \alpha = -\frac{3}{5}$ e $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, calcule:

a) $\cos \alpha \quad -\frac{4}{5}$

b) $\text{tg } \alpha \quad \frac{3}{4}$

46. (FEI-SP) Sendo α um arco com extremidade no terceiro quadrante e sabendo que $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$, então $3\text{sen } \alpha + 4\text{tg } \alpha$ é igual a:

a) $-\frac{4}{5}$

b) $\frac{44}{15}$

c) $\frac{28}{15}$

d) $-\frac{5}{3}$

e) $\frac{4}{15}$

alternativa **b**

47. Simplifique a expressão $\frac{2 - \text{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \text{tg}^2 \alpha$. 2

48. (Fuvest-SP) Se $\text{tg } x = \frac{3}{4}$, com $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, determine o valor de $y = \cos x - \text{sen } x$. $-\frac{1}{5}$

49. Qual é o sinal do produto $\text{tg } 28° \cdot \text{tg } 230° \cdot \text{tg } 307°$? negativo

50. Verifique se $\text{tg } \frac{5\pi}{12} > \text{sen } \frac{5\pi}{12}$. verdadeiro

51. (ITA-SP) Sabendo que $\cos \theta = -\frac{3}{7}$ e $\text{tg } \theta < 0$, calcule o valor da expressão:

$x = \frac{2 \cdot \text{tg } \theta}{1 - \text{tg}^2 \theta}$ $\frac{12\sqrt{10}}{31}$

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Trigonometria em um triângulo qualquer

Já estudamos as razões trigonométricas em um triângulo retângulo e na circunferência. Agora, vamos ampliar essa teoria calculando as razões trigonométricas e as medidas de ângulos e lados em um triângulo qualquer. Para isso, serão apresentadas, neste tópico, a lei dos senos e a lei dos cossenos.

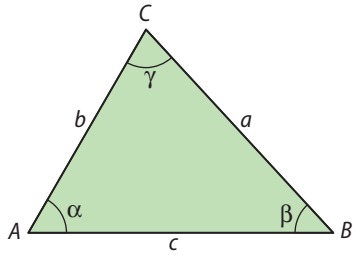
Lei dos cossenos

Em algumas situações, podemos modelar um problema por meio de um triângulo qualquer, em que é necessário calcular uma ou mais medidas dos lados ou dos ângulos. Para realizar esses cálculos, utilizamos a **lei dos cossenos**, enunciada a seguir.

> Em qualquer triângulo, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados menos o dobro do produto das medidas desses lados pelo cosseno do ângulo formado por eles.

Assim, dado um triângulo *ABC* qualquer com as medidas dos lados e dos ângulos como indicado na figura a seguir, podemos escrever:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$$

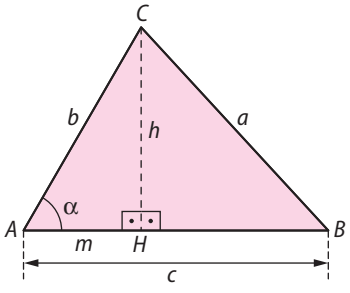


ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Vamos demonstrar apenas a primeira sentença para o ângulo α; as demais são análogas. Para isso, primeiro vamos demonstrar a validade da sentença para os casos em que α é um ângulo agudo ou obtuso e, em seguida, verificar a validade para o ângulo reto como consequência do teorema de Pitágoras. Acompanhe a seguir cada um desses casos.

1º caso: α é um ângulo agudo

Considere o triângulo acutângulo *ABC*, no qual $\overline{CH}$ é a altura relativa ao lado $\overline{AB}$, conforme mostra a figura.



No triângulo retângulo *BCH*, temos: $a^2 = h^2 + (c - m)^2$ (I)

No triângulo retângulo *ACH*, temos:

$$b^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow h^2 = b^2 - m^2 \quad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I), temos:

$$a^2 = b^2 - m^2 + (c - m)^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot m \quad \text{(III)}$$

Ainda no triângulo retângulo *ACH*, temos: $\cos \alpha = \frac{m}{b} \Rightarrow m = b \cdot \cos \alpha$ (IV)

Substituindo (IV) em (III), obtemos:

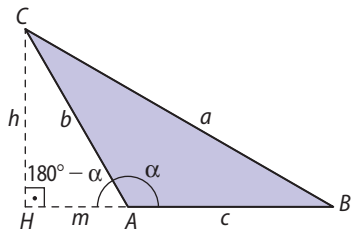
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot (b \cdot \cos \alpha) \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

2º caso: α é um ângulo obtuso

Considere o triângulo obtusângulo ABC, no qual $\overline{CH}$ é a altura relativa ao lado $\overline{AB}$ e $\hat{A}$ é o ângulo interno obtuso, conforme mostra a figura.



No triângulo retângulo BCH, temos:

$$a^2 = h^2 + (c + m)^2 \quad (I)$$

No triângulo retângulo ACH, temos:

$$b^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow h^2 = b^2 - m^2 \quad (II)$$

Substituindo (II) em (I), temos:

$$a^2 = b^2 - m^2 + (c + m)^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2 \cdot c \cdot m \quad (III)$$

Ainda no triângulo retângulo ACH, temos:

$$\cos(180° - \alpha) = \frac{m}{b}$$

Como $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, temos:

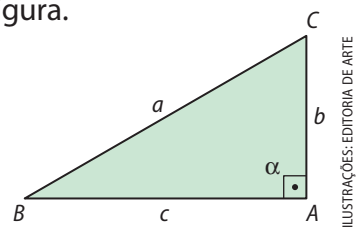
$$-\cos\alpha = \frac{m}{b} \Rightarrow m = -b \cdot \cos\alpha \quad (IV)$$

Substituindo (IV) em (III), obtemos:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2 \cdot c \cdot (-b \cdot \cos\alpha) \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$

3º caso: α é um ângulo reto

Considere um triângulo ABC retângulo em A, conforme mostra a figura.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

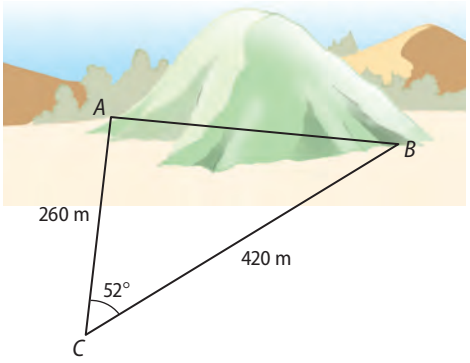
Como α é o ângulo reto e $\cos 90° = 0$, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \underbrace{\cos 90°}_{0} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

Note que, em relação ao ângulo reto, a lei dos cossenos fica reduzida ao teorema de Pitágoras.

ATIVIDADE RESOLVIDA

13. Um engenheiro quer construir um túnel entre os pontos A e B, onde se localiza um morro, conforme o esquema a seguir. Do ponto C, ele visualiza os pontos A e B e obtém os valores $AC = 260$ m, $BC = 420$ m e $A\hat{C}B = 52°$.

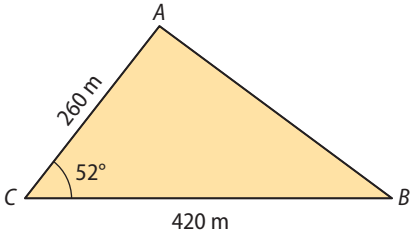


ALBERTO DE STEFANO

Qual será o comprimento, em metro, desse túnel? (Adote $\cos 52° = 0{,}62$.)

Resolução

O triângulo a seguir representa a situação.



Aplicando a lei dos cossenos:

$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2 - 2 \cdot (AC) \cdot (BC) \cdot \cos 52°$

$(AB)^2 = 260^2 + 420^2 - 2 \cdot 260 \cdot 420 \cdot 0{,}62$

$AB^2 = 67\,600 + 176\,400 - 135\,408$

$AB^2 = 108\,592 \Rightarrow AB \simeq 329{,}53$, pois $AB > 0$

Portanto, o comprimento do túnel será de aproximadamente 329,53 m.

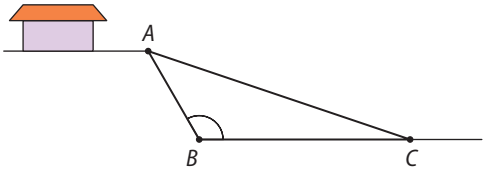
MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

52. Em um triângulo de vértices A, B e C, a medida do ângulo $A\hat{C}B$ é igual a $60°$. Se $AC = 80$ m e $BC = 100$ m, qual é, aproximadamente, em metro, a medida de $\overline{AB}$? $AB \simeq 91{,}65$ m

53. (UEPA) A figura a seguir mostra o corte lateral de um terreno onde será construída uma rampa reta $\overline{AC}$, que servirá para o acesso de veículos à casa, que se encontra na parte mais alta do terreno. A distância de A a B é de 6 m, de B a C é de 10 m e o menor ângulo formado entre $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ é de 120°.

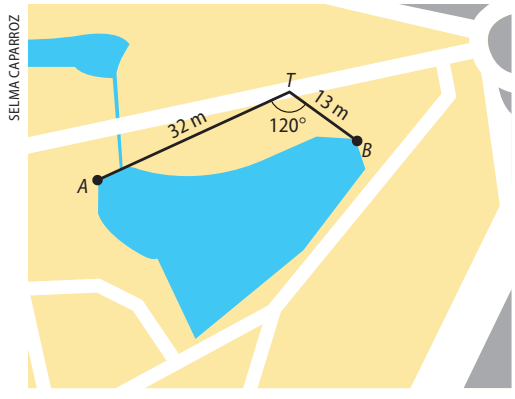


Então, o valor do comprimento da rampa deve ser de: alternativa **e**

a) 12 m. **c)** 13 m. **e)** 14 m.

b) 12,5 m. **d)** 13,5 m.

54. (UERJ) Ao coletar os dados para um estudo topográfico da margem de um lago a partir dos pontos A, B e T, um técnico determinou as medidas $AT = 32$ m; $BT = 13$ m e $A\hat{T}B = 120°$, representadas no esquema abaixo.



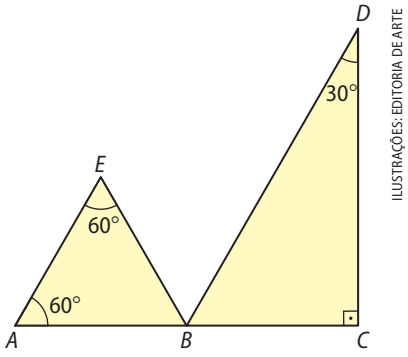
- Calcule a distância aproximada, em metro, entre os pontos A e B, definidos pelo técnico nas margens desse lago.

aproximadamente 40 m

55. Em um paralelogramo, o lado maior mede 7 cm e a diagonal menor mede $\sqrt{37}$ cm. Verifique se é possível calcular as medidas dos ângulos desse paralelogramo. Em caso afirmativo, quais são essas medidas?

A questão é irresolúvel, pois falta um dado.

56. (Fatec-SP) Na figura a seguir, além das medidas dos ângulos indicados, sabe-se que B é ponto médio de $\overline{AC}$ e $AC = 2$ cm.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

A medida de $\overline{DE}$, em centímetro, é igual a: alternativa **e**

a) $\frac{1}{2}$. **c)** $\sqrt{2}$. **e)** $\sqrt{3}$.

b) 1. **d)** 1,5.

57. Observe o visor de um relógio de ponteiros que marca 2 horas.

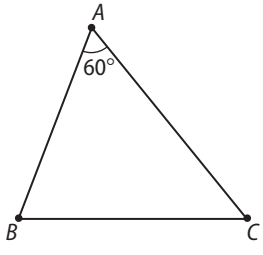
Sabendo que os ponteiros menor (das horas) e maior (dos minutos) medem, respectivamente, 50 cm e 80 cm, calcule a distância entre suas extremidades nesse horário. 70 cm

THAVORNC/SHUTTERSTOCK.COM

■ Relógio de ponteiros.

58. Joana é artesã e quer fazer um ornamento com fios coloridos. Ela escolheu uma peça em formato de triângulo, cujas medidas estão indicadas na figura 1, para compor o pingente de um colar. Ela precisa de quatro peças dessas para completar seu artesanato, como pode ser notado no modelo na figura 2. Sabendo que a medida do lado $\overline{AB}$ é 5 cm e que a de $\overline{AC}$ é 6 cm, quantos centímetros de fio colorido ela utilizará para fazer o pingente, considerando apenas o comprimento de fio utilizado para fazer os triângulos?

aproximadamente 66,28 cm



■ Figura 1.

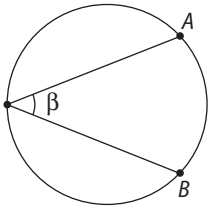
SELMA CAPARROZ

■ Figura 2.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Saiba que...

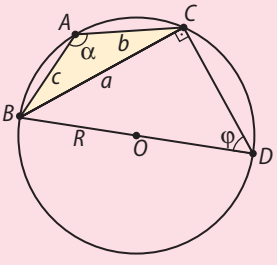
- Dizemos que um polígono é inscrito em uma circunferência se todos os vértices desse polígono forem pontos da circunferência. Nesse caso, podemos dizer também que a circunferência é circunscrita ao polígono.
- Um ângulo inscrito na circunferência é aquele cujos lados são secantes à circunferência e cujo vértice é um ponto da circunferência.



- A medida de um ângulo inscrito em uma circunferência é igual à metade da medida do arco da circunferência que ele determina.

Pense e responda

Se o ângulo α for obtuso, temos a seguinte figura:



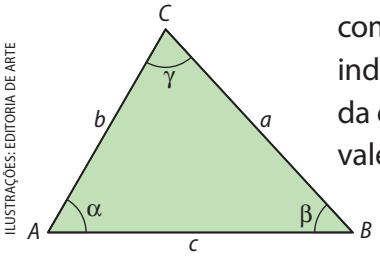
Mostre que a lei dos senos continua válida.

Ver as **Orientações para o professor**.

» Lei dos senos

Outra maneira de calcular as medidas de lados e ângulos de um triângulo qualquer é por meio da **lei dos senos**, apresentada a seguir.

> Em qualquer triângulo, as medidas dos lados são proporcionais aos senos dos respectivos ângulos opostos, e a constante de proporcionalidade é igual à medida do diâmetro da circunferência circunscrita a esse triângulo.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

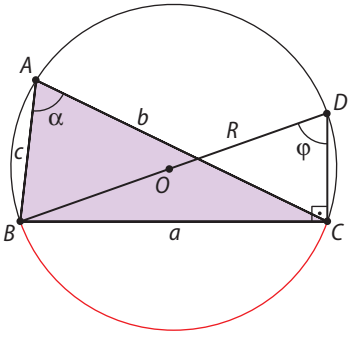
Assim, dado um triângulo ABC qualquer com as medidas dos lados e dos ângulos como indicado na figura, e tal que a medida do raio da circunferência circunscrita ao triângulo é R, valem as relações:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = 2R$$

Acompanhe agora a demonstração da lei dos senos. Faremos essa demonstração para o ângulo agudo α.

Demonstração

O triângulo ABC representado a seguir está inscrito em uma circunferência de centro O e raio R. Nessa figura, traçamos o diâmetro $\overline{BD}$.



Como $\hat{A}$ e $\hat{D}$ são ângulos inscritos, temos:

$$\left.\begin{aligned}\alpha &= \frac{\text{med}(\overset{\frown}{BC})}{2}\\ \varphi &= \frac{\text{med}(\overset{\frown}{BC})}{2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi = \alpha$$

Observe que o triângulo BCD é retângulo em C, pois o arco $\overset{\frown}{BAD}$ tem medida igual a 180°. Logo, o ângulo $B\hat{C}D$ tem medida igual a 90°. Assim, temos: $\operatorname{sen}\varphi = \frac{a}{2R} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{2R} \Rightarrow 2R = \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}$

Analogamente, podemos provar que: $2R = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta}$ e $2R = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$

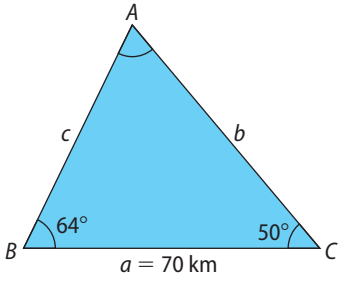
MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

ATIVIDADE RESOLVIDA

14. Um barco pesqueiro *A* emite um sinal de socorro, que é recebido por outros dois barcos, *B* e *C*, distantes entre si 70 km. Sabendo que os ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$ medem, respectivamente, 64° e 50°, responda: qual dos barcos, *B* ou *C*, encontra-se mais próximo do barco pesqueiro? A que distância ele está do barco *A*?

Resolução

Representando a situação em um triângulo *ABC*, temos a seguinte figura.



A soma das medidas dos ângulos internos do triângulo *ABC* é 180°. Logo:

$\text{med}(\hat{A}) + \text{med}(\hat{B}) + \text{med}(\hat{C}) = 180°$

$\text{med}(\hat{A}) + 64° + 50° = 180°$

$\text{med}(\hat{A}) = 66°$

Portanto, o ângulo $\hat{A}$ mede 66°.

Aplicando a lei dos senos, obtemos:

$$\frac{70}{\text{sen } 66°} = \frac{b}{\text{sen } 64°} = \frac{c}{\text{sen } 50°}$$

Usando uma calculadora científica, obtemos as seguintes aproximações: sen 50° ≃ 0,77, sen 64° ≃ 0,90 e sen 66° ≃ 0,91.

- Calculando a distância entre *A* e *C*, temos:

$$\frac{70}{0,91} \simeq \frac{b}{0,90} \Rightarrow b \simeq 69,2$$

- Calculando a distância entre *A* e *B*, temos:

$$\frac{70}{0,91} \simeq \frac{c}{0,77} \Rightarrow c \simeq 59,2$$

O barco mais próximo de *A* é o barco *B*, que está a aproximadamente 59,2 km de distância.

ATIVIDADES

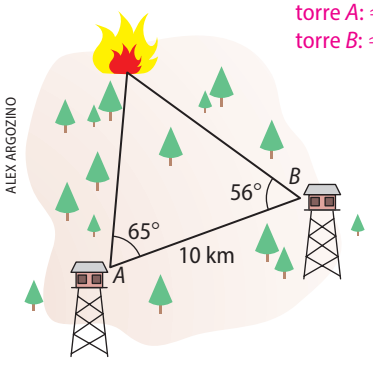
NÃO ESCREVA NO LIVRO.

59. De duas torres de vigilância, *A* e *B*, distantes 10 km uma da outra, avista-se um foco de incêndio na floresta, conforme os ângulos assinalados na figura.

Qual é a distância aproximada de cada uma das torres até o foco do incêndio?

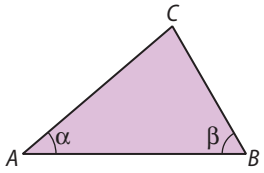
Utilize uma calculadora científica.

torre *A*: ≃9,67 km e torre *B*: ≃10,57 km

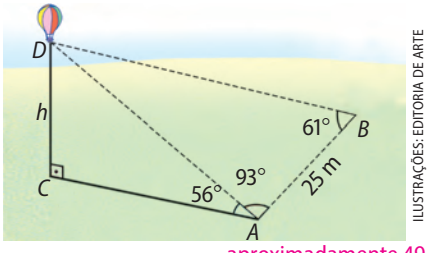


- Os elementos dessa ilustração estão fora de proporção.

60. No triângulo *ABC*, *AC* = 4 m, *BC* = 3 m e β = 60°. Calcule sen α. $\text{sen } \alpha = \frac{3\sqrt{3}}{8}$



61. Observe a figura.



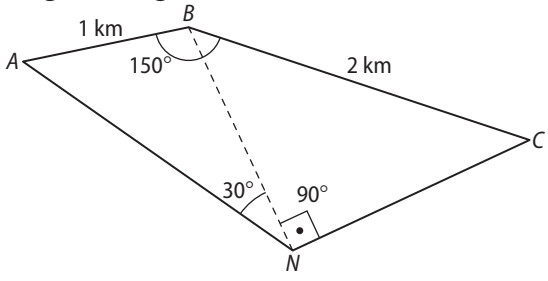
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

aproximadamente 49,43 m

a) Qual é a distância do balão até o ponto *A*?

b) A quantos metros de altura o balão está do solo? aproximadamente 41 m

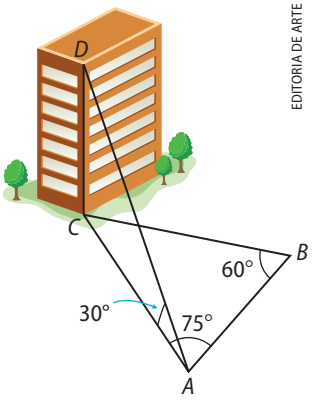
62. (Unicamp-SP) Sejam *A*, *B*, *C* e *N* quatro pontos em um mesmo plano, conforme mostra a figura a seguir.



a) Calcule o raio da circunferência que passa pelos pontos *A*, *B* e *N*. 1 km

b) Calcule o comprimento do segmento $\overline{NB}$. $\sqrt{2}$ km

63. (UnB-DF) Um observador, situado no ponto A, distante 30 m do ponto B, vê um edifício sob um ângulo de 30°, conforme a figura. Baseado nos dados da figura, determine a altura do edifício em metro e divida o resultado por $\sqrt{2}$.



EDITORIA DE ARTE

$CD = 15\sqrt{2}$ m; 15 m

64. (ITA-SP) Um navio, navegando em linha reta, passa sucessivamente pelos pontos A, B e C. O comandante, quando o navio está em A, observa um farol L e calcula o ângulo $L\hat{A}C = 30°$. Após navegar 4 milhas até B, verifica o ângulo $L\hat{B}C = 75°$. Quantas milhas separam o farol do ponto B? $2\sqrt{2}$ milhas

65. Um triângulo inscrito em uma circunferência de raio igual a 10 cm determina, nesta, três arcos cujos comprimentos são proporcionais aos números 3, 4 e 5. Determine a medida:

a) dos ângulos do triângulo; 45°; 60°; 75°

b) dos lados do triângulo. $10\sqrt{2} + \sqrt{3}$ cm; $10\sqrt{2}$ cm; $10\sqrt{3}$ cm

FÓRUM

Focos de queimadas

Uma área de mais de 17,3 milhões de hectares foi queimada no Brasil em 2023, tamanho maior que o território de alguns estados, como Acre ou Ceará. Houve aumento de 6% em relação a 2022, quando 16,3 milhões de hectares foram atingidos pelo fogo. Os dados são da plataforma Monitor do Fogo, do MapBiomas.

A área total queimada no ano passado [2023] corresponde a aproximadamente 2% do território brasileiro. O pico das queimadas aconteceu nos meses de setembro e outubro, atingindo 4 milhões de hectares.

[...]

BOEHM, Camila. Mais de 17,3 milhões de hectares foram queimados em 2023 no país. **Agência Brasil**, São Paulo, 19 jan. 2024. Disponível em: https://agenciabrasil.ebc.com.br/geral/noticia/2024-01/mais-de-173-milhoes-de-hectares-foram-queimados-em-2023-no-pais. Acesso em: 2 out. 2024.

NURPHOTO/GETTY IMAGES

- As queimadas podem ter origem em ações humanas ou podem ter causas naturais. Na fotografia, queimada em Manaus (AM). Fotografia de 2023.

Há queimadas que ocorrem como fenômeno natural, especialmente em regiões com clima seco e quente; no entanto, segundo a coordenadora do MapBiomas Fogo, Ane Alencar, a maioria das queimadas é provocada por atividades humanas deliberadas, como a limpeza de áreas para agricultura, pecuária e expansão urbana. Essas práticas contribuem significativamente para o aumento das áreas queimadas, intensificando os impactos negativos delas sobre o meio ambiente, a economia e a saúde pública.

Diante do cenário alarmante apresentado sobre o aumento das áreas atingidas por queimadas, discuta com os colegas e o professor a questão a seguir.

- Como podemos transformar a conscientização sobre os impactos das queimadas em ações concretas que promovam a preservação ambiental e a sustentabilidade?

Ver as **Orientações para o professor**.

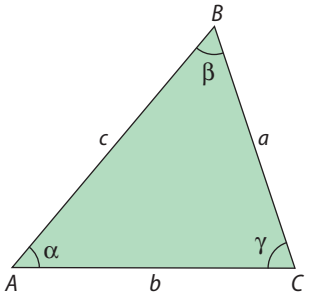
MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Área de um triângulo qualquer

Você já estudou no Ensino Fundamental que a área de um triângulo é calculada pela metade do produto da medida de um lado pela altura relativa a esse lado. Mas, se não se conhece a altura, e sim a medida de dois lados de um triângulo qualquer e o ângulo formado por esses lados, podemos calcular a área desse triângulo utilizando o conceito de seno de um ângulo. Assim, vamos enunciar o seguinte teorema:

A área de um triângulo qualquer é igual à metade do produto das medidas de dois de seus lados pelo seno do ângulo formado por esses lados.

Assim, dado um triângulo *ABC* qualquer com as medidas de dois lados e a medida do ângulo formado por esses lados como indicado na figura a seguir, sendo *S* a área do triângulo *ABC*, valem as seguintes relações:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

$$S = \frac{a \cdot b \cdot \operatorname{sen} \gamma}{2}$$

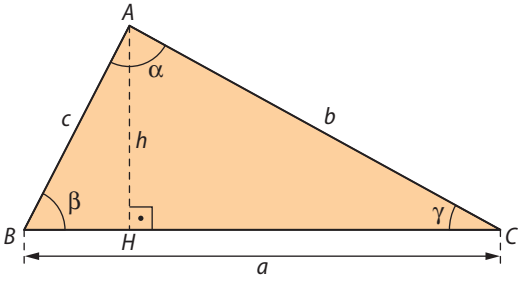
$$S = \frac{b \cdot c \cdot \operatorname{sen} \alpha}{2}$$

$$S = \frac{a \cdot c \cdot \operatorname{sen} \beta}{2}$$

Vamos demonstrar esse teorema para o ângulo γ, no caso em que γ é agudo e no caso em que é obtuso.

Demonstração

Considere o **triângulo acutângulo** *ABC*, no qual $\overline{AH}$ é a altura relativa ao lado $\overline{BC}$ e γ é um ângulo agudo, conforme mostra a figura a seguir.



A área *S* do triângulo é: $S = \frac{a \cdot h}{2}$ (I)

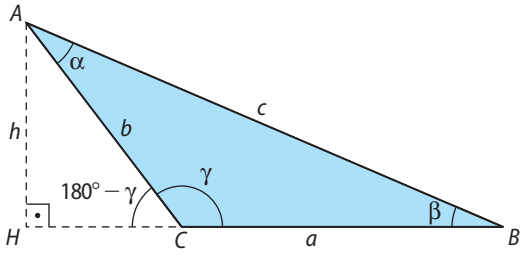
Do triângulo retângulo *AHC*, temos:

$\operatorname{sen} \gamma = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b \cdot \operatorname{sen} \gamma$ (II)

Substituindo (II) em (I), obtemos: $S = \frac{a \cdot b \cdot \operatorname{sen} \gamma}{2}$

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Agora, considere o **triângulo obtusângulo** *ABC*, no qual $\overline{AH}$ é a altura relativa ao lado $\overline{BC}$ e γ é um ângulo obtuso, conforme mostra a figura a seguir.



Sabemos que a área S é dada por: $S = \frac{a \cdot h}{2}$ (I)

Do triângulo retângulo *AHC*, temos:

$\text{sen}\,(180° - \gamma) = \text{sen}\,\gamma = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b \cdot \text{sen}\,\gamma$ (II)

Substituindo (II) em (I), temos: $S = \frac{a \cdot b \cdot \text{sen}\,\gamma}{2}$

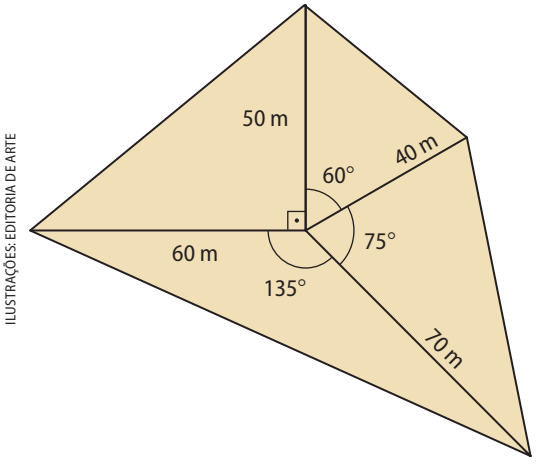
Analogamente, podemos mostrar que:

$$S = \frac{a \cdot c \cdot \text{sen}\,\beta}{2} \quad \text{e} \quad S = \frac{b \cdot c \cdot \text{sen}\,\alpha}{2}$$

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

ATIVIDADE RESOLVIDA

15. Para obter a área de um terreno irregular, um engenheiro dividiu esse terreno em quatro regiões triangulares, formadas a partir de um mesmo vértice, como mostra a figura.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

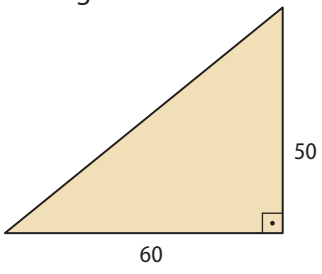
Qual é a área aproximada desse terreno? (Use as aproximações até centésimos.)

Resolução

Em cada um dos triângulos obtidos, temos as medidas de dois lados e do ângulo compreendido entre eles.

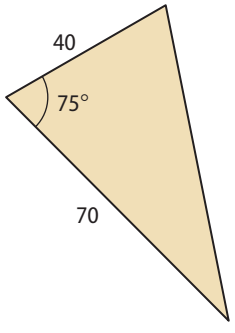
Assim, podemos calcular a área de cada triângulo e depois adicioná-las para obter a área total. Para isso, com uma calculadora científica, vamos determinar o seno de 75°. Para os outros ângulos, podemos utilizar os valores já apresentados anteriormente.

- Área do triângulo 1:



$A_1 = \frac{50 \cdot 60}{2} = 1500$

- Área do triângulo 2:

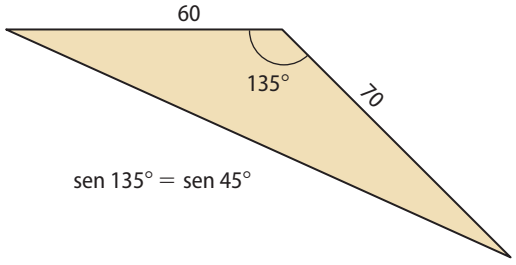


$A_2 = \frac{40 \cdot 70 \cdot \text{sen}\,75°}{2} \simeq 1400 \cdot 0{,}96$

$A_2 \simeq 1344$

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

- Área do triângulo 3:



$$A_3 = \frac{60 \cdot 70 \cdot \text{sen } 135°}{2} = \frac{4200 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}$$

$$A_3 = 1050 \cdot \sqrt{2} \simeq 1050 \cdot 1{,}41$$

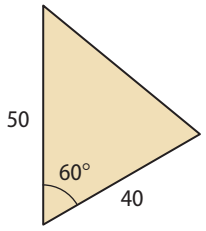
$$A_3 \simeq 1480{,}50$$

- Área do triângulo 4:

$$A_4 = \frac{50 \cdot 40 \cdot \text{sen } 60°}{2} =$$

$$= 1000 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 500 \cdot 1{,}73$$

$$A_4 \simeq 865$$



Então, a área total (A_t) do terreno é:

$A_t = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$

$A_t \simeq 1500 + 1344 + 1480{,}50 + 865 =$

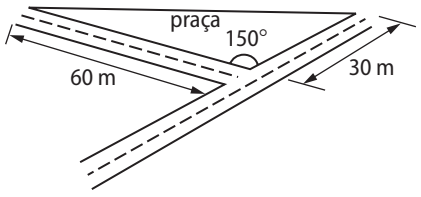
$= 5189{,}50$

Portanto, o terreno tem aproximadamente 5189,50 m² de área.

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

66. (IFMA) Preocupado com a falta de área verde em sua cidade, um governante resolveu aproveitar certo terreno triangular, localizado no cruzamento de duas ruas, para construir uma praça arborizada, conforme a figura abaixo:



SELMA CAPARROZ

A área da praça a ser construída, em m², é:

a) $250\sqrt{3}$. **c)** $300\sqrt{3}$. **e)** 450.

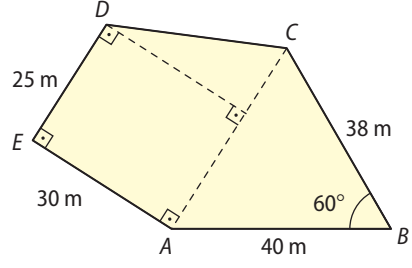
b) $450\sqrt{2}$. **d)** 250.

alternativa **e**

67. Qual é a área de um triângulo isósceles no qual cada lado congruente mede 10 cm e o ângulo adjacente à base mede 75°? 25 cm²

68. O terreno *ABCDE* representado pela figura a seguir foi vendido a R$ 35,00 o metro quadrado. Qual é o seu valor? (Use sen 60° ≃ 0,86.)

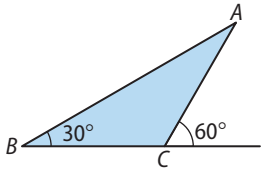
aproximadamente R$ 56.476,00



69. $\frac{35\sqrt{3}}{2}$ cm²

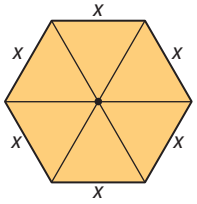
69. Qual é a área de um paralelogramo no qual dois lados consecutivos medem 7 cm e 5 cm, sabendo que eles formam um ângulo de 120°?

70. A área do triângulo *ABC* representado a seguir é $25\sqrt{3}$ cm².



Admitindo que $\sqrt{3} \simeq 1{,}7$, calcule o perímetro do triângulo *ABC*. aproximadamente 37 cm

71. O hexágono regular cuja medida do lado é *x* cm² é formado por seis triângulos equiláteros.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Calcule a área desse hexágono. $\frac{3x^2\sqrt{3}}{2}$ cm²

72. Elabore um problema cuja resolução envolva aplicar a lei dos cossenos e outro que envolva calcular a área de um triângulo usando as medidas de dois lados e o seno do ângulo formado por esses lados. Troque os problemas que você elaborou com um colega e resolvam os problemas um do outro. Resposta pessoal.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Ciclismo

Você já andou de bicicleta? Se sim, gosta de praticar essa atividade? A bicicleta pode servir de instrumento de lazer para muitas pessoas. Para outras, é um meio de transporte. Há, ainda, pessoas para quem ela é trabalho.

Os atletas profissionais são uma das categorias que utilizam a bicicleta como ferramenta de trabalho e, nesse caso, dependendo da modalidade praticada, as bicicletas possuem características específicas. Nos Jogos Olímpicos, são disputadas quatro modalidades de ciclismo: *mountain bike*, ciclismo de estrada, ciclismo de pista e ciclismo *bicycle motocross* (BMX). Vamos conhecer um pouco de cada uma delas.

Mountain Bike

[...]

Existem dois eventos de *mountain bike*: um para mulheres e outro para homens. Os ciclistas partem da mesma linha de largada e disputam várias voltas do circuito em um terreno montanhoso e acidentado, que testa sua técnica, resistência e energia.

As corridas possuem uma largada em massa e, em geral, várias voltas. Os ciclistas levam de uma a duas horas para completar o percurso cheio de reviravoltas e curvas, percorrendo dezenas de quilômetros durante a prova.

[...]

JARED C. TILTON/GETTY IMAGES

Ciclista brasileira Raiza Goulão Henrique durante prova de *mountain bike* nos Jogos Olímpicos de Paris (França). Fotografia de 2024.

O *mountain bike* fez sua estreia Olímpica 100 anos depois do ciclismo de pista e do ciclismo de estrada durante os Jogos Olímpicos Atlanta 1996, com provas individuais masculinas e femininas. [...]

COMITÊ OLÍMPICO INTERNACIONAL. **Ciclismo *mountain bike***. [*S. l.*]: Olympics.com, c2024. Localizável em: Jogos Olímpicos Paris 2024. Disponível em: https://olympics.com/pt/paris-2024/esportes/ciclismo-mountain-bike/. Acesso em: 3 out. 2024.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

***Sprint*:** é uma técnica de explosão que usa a maior velocidade possível que um ciclista consegue atingir, muitas vezes utilizada no momento final de uma prova.

Estrada

[...]

O ciclismo de estrada acontece ao ar livre e é dividido em dois tipos de eventos nos Jogos Olímpicos: a prova de resistência e o contrarrelógio individual.

A corrida de resistência, na qual todos os ciclistas partem ao mesmo tempo em uma largada em massa, é uma proeza altamente tática de esforço físico. A corrida (mais de 120 km e de 200 km para mulheres e homens, respectivamente) é frequentemente vencida em um ***sprint*** de algumas centenas de metros, o que significa que os ciclistas precisam se posicionar perfeitamente e conservar energia na primeira parte da prova.

O contrarrelógio é um esforço individual em que os competidores partem em tempos escalonados em vez de um pelotão agrupado. [...] o contrarrelógio raramente ultrapassa 50 km. Os eventos exigem consistência, concentração e preservação por meio de um posicionamento aerodinâmico eficaz e poderoso.

[...]

O ciclismo de estrada é um dos eventos Olímpicos originais porque foi incluído no programa competitivo da primeira edição dos Jogos Olímpicos modernos em 1896, em Atenas. [...]

[...]

COMITÊ OLÍMPICO INTERNACIONAL. **Ciclismo de estrada**. [*S. l.*]: Olympics.com, c2024. Localizável em: Jogos Olímpicos Paris 2024. Disponível em: https://olympics.com/pt/paris-2024/esportes/ciclismo-de-estrada/. Acesso em: 3 out. 2024.

KEVIN VOIGT/GETTY IMAGES

- Atletas paralímpicos Esteban Goddard Medica (do Panamá) e Carlos Alberto Gomes Soares (do Brasil) durante prova de estrada nos Jogos Paralímpicos de Paris (França). Fotografia de 2024.

Pista

[...]

O ciclismo de pista é disputado em uma arena de 250 m no formato de uma tigela e conhecida como velódromo, com eventos em diferentes formatos de corridas individuais e em equipes. As bicicletas da modalidade são diferentes das utilizadas no ciclismo de estrada por serem fixas e não terem freios.

Acontecem vários tipos de provas na pista, cada uma delas com regras e técnicas específicas. Algumas confiam mais na tática, enquanto outras favorecem a força e potência. [...]

[...]

Uma modalidade Olímpica de longa data, o ciclismo de pista apareceu em todas as edições dos Jogos Olímpicos modernos, com exceção da edição de 1912 em Estocolmo. As mulheres competiram pela primeira vez nestes eventos nos Jogos Olímpicos Seul 1988.

[...]

RENE NIJHUIS/BSR AGENCY/GETTY IMAGES

- Ciclistas durante prova de pista nos Jogos Olímpicos de Paris (França). Fotografia de 2024.

COMITÊ OLÍMPICO INTERNACIONAL. **Ciclismo de pista**. [*S. l.*]: Olympics.com, c2024. Localizável em: Jogos Olímpicos Paris 2024. Disponível em: https://olympics.com/pt/paris-2024/esportes/ciclismo-de-pista/. Acesso em: 3 out. 2024.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

BMX

[...]

BMX é a abreviação de "*bicycle motocross*". Refere-se a um tipo de corrida realizada em terra e com saltos, como uma corrida de *motocross*. Mas, no BMX, a bicicleta não tem motor: são utilizadas bicicletas com rodas pequenas e sem marchas. Segundo o regulamento da União de Ciclismo International (UCI), o órgão internacional de ciclismo que rege o esporte, as bicicletas de BMX devem ter pedais planos e rodas que não excedam 22,5 polegadas (57 cm) de diâmetro quando os pneus estiverem cheios.

ANDRE WEENING/BSR AGENCY/GETTY IMAGES

■ Ciclista representante da Holanda durante prova de BMX *Racing* nos Jogos Olímpicos de Paris (França). Fotografia de 2024.

Nas competições de BMX *Freestyle*, as mesmas bicicletas são usadas, mas não para corridas. Em vez disso, é uma competição julgada com base nas manobras executadas pelos atletas. Nos Jogos Olímpicos, as competições de BMX *Freestyle* são realizadas em um "parque", onde são montados rampas, saltos, corrimãos e degraus para os pilotos saltarem, girarem, darem cambalhotas e voarem.

[...]

O BMX *Freestyle* estreou nos Jogos Olímpicos de Tóquio 2020. [...]

[...]

PRESTO, Greg. **BMX *freestyle* na Olympic Qualifier Series**: tudo o que você precisa saber. [*S. l.*]: Olympics.com, 23 abr. 2024. Localizável em: Notícias: Jogos Olímpicos Paris 2024. Disponível em: https://olympics.com/pt/noticias/bmx-freestyle-na-olympic-qualifier-series-tudo-o-que-voce-precisa-saber/. Acesso em: 3 out. 2024.

[...]

O BMX *Racing* é um formato muito mais explosivo do que outras modalidades mais tradicionais do ciclismo, que tendem a recompensar a resistência ao longo de vários minutos. Já o BMX *Racing* requer uma intensa explosão de energia por um breve período de alguns segundos. As corridas [...] são disputadas por, no máximo, oito pilotos em uma pista repleta de saltos, curvas inclinadas e obstáculos, vencendo aquele que tiver as reações mais ágeis e o ritmo mais rápido.

[...]

Em 2003, o Comitê Olímpico Internacional fez do BMX *Racing* um esporte Olímpico a partir dos Jogos de Beijing 2008. [...]

COMITÊ OLÍMPICO INTERNACIONAL. **Ciclismo BMX *racing***. [*S. l.*]: Olympics.com, c2024. Localizável em: Jogos Olímpicos Paris 2024. Disponível em: https://olympics.com/pt/paris-2024/esportes/ciclismo-bmx-racing. Acesso em: 3 out. 2024.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Agora, reúna-se a um colega, e façam o que se pede nas atividades a seguir.

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. Vocês já conheciam essas modalidades de ciclismo? Qual delas mais despertou o interesse de vocês? No município onde vocês moram, há espaços para a prática de alguma dessas modalidades? Pesquisem a respeito do assunto. Respostas pessoais.

2. As características das bicicletas diferem de acordo com as necessidades de cada modalidade de ciclismo. Por exemplo, o pneu de uma bicicleta de *mountain bike* tem ranhuras e é mais largo do que o pneu de uma bicicleta de pista. Observem as imagens.

MAXPRO/SHUTTERSTOCK.COM

■ Detalhe do pneu da bicicleta de *mountain bike*.

OLEKSBOIKO/SHUTTERSTOCK.COM

■ Detalhe do pneu da bicicleta de pista.

Pesquisem como essas diferenças no pneu influenciam a velocidade e a aderência da bicicleta ao solo. Que outros elementos da bicicleta influenciam o desempenho dela? Elaborem um cartaz com fotos de bicicletas de cada modalidade e dos pneus usados em cada uma e façam uma comparação entre eles. Apresentem as características de cada tipo de pneu, como medidas de aro, largura, textura, entre outras. Pesquisa dos estudantes.

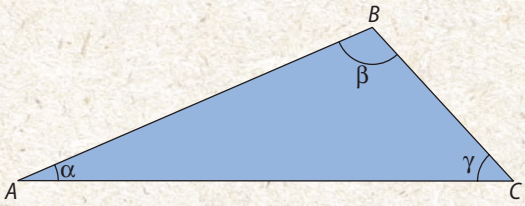
3. Vocês sabem como medir o aro da bicicleta? Pesquisem como fazer essa medição e elaborem um texto explicando o que significa dizer que uma bicicleta tem aro 26. Qual é a medida aproximada do perímetro externo, em centímetro, do pneu de uma bicicleta com esse aro?

Pesquisa dos estudantes. O perímetro é aproximadamente 207,4 cm.

4. Para um praticante de BMX executar determinada manobra com sua bicicleta, ele precisa de uma rampa com a vista lateral como a da figura a seguir.

Em seus cálculos, ele determinou que α deve medir 23°, β deve medir 110° e $AB = 2$ m. Dessa maneira, quais devem ser as medidas aproximadas de $\overline{BC}$ e de $\overline{AC}$? (Usem sen 23° = 0,39, sen 47° = 0,73 e sen 110° = 0,94.)

$BC \simeq 1{,}1$ m; $AC \simeq 2{,}6$ m



EDITORIA DE ARTE

Pense e responda

Que conceitos matemáticos você e seu colega utilizaram para realizar as atividades desta seção?

Resposta esperada: Comprimento da circunferência e lei dos senos.

Para assistir

- DICAS para escolher a bicicleta ideal. [*S. l.*: *s. n.*], 2019. 1 vídeo (4 min). Publicado pelo canal Sesc Santa Catarina. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=-yQeJfxQP10. Acesso em: 3 out. 2024.

  Nesse vídeo, você vai obter algumas recomendações sobre o tipo de bicicleta ideal para você e para o tipo de uso que você fará dela.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Construção de uma calculadora trigonométrica

Estudamos as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente na circunferência trigonométrica e conhecemos alguns valores notáveis para essas razões. Também estudamos como determinar essas razões de arcos do segundo, terceiro e quarto quadrantes da circunferência trigonométrica fazendo a redução ao primeiro quadrante. No entanto, pode haver situações do cotidiano em que seja necessário calcular as razões trigonométricas para outros arcos ou ângulos, inclusive para valores não inteiros, como 122,3°. Como proceder nesses casos? Podemos utilizar diversos recursos, entre eles, uma calculadora científica, um *software* de Matemática dinâmica ou uma planilha eletrônica, a qual escolhemos para usar neste momento.

Vamos utilizar uma planilha eletrônica para criar nossa própria calculadora trigonométrica, ou seja, uma planilha que calcula automaticamente os valores das razões trigonométricas para qualquer medida de ângulo.

Para isso, acompanhe a sequência de passos a seguir.

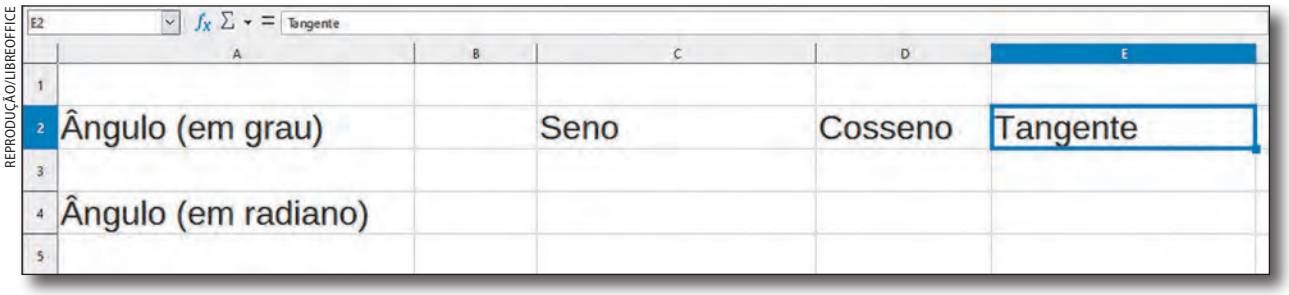
I. Abra uma planilha no **Libre Office** e salve-a como "CALCTRIGONOMETRICA".

II. Na planilha, para identificar cada uma das razões trigonométricas, digite cada palavra em uma célula, conforme indicado:

- na célula A2: "Ângulo (em grau)";
- na célula A4: "Ângulo (em radiano)";
- na célula C2: "Seno";
- na célula D2: "Cosseno";
- na célula E2: "Tangente".

Após esses passos, sua planilha estará semelhante à imagem a seguir.

REPRODUÇÃO/LIBREOFFICE



Em uma planilha eletrônica, o cálculo das razões trigonométricas é feito com ângulos na unidade radiano. Porém, para facilitar nosso trabalho, vamos digitar o ângulo em grau e utilizaremos uma função para que o programa realize a transformação de unidades.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

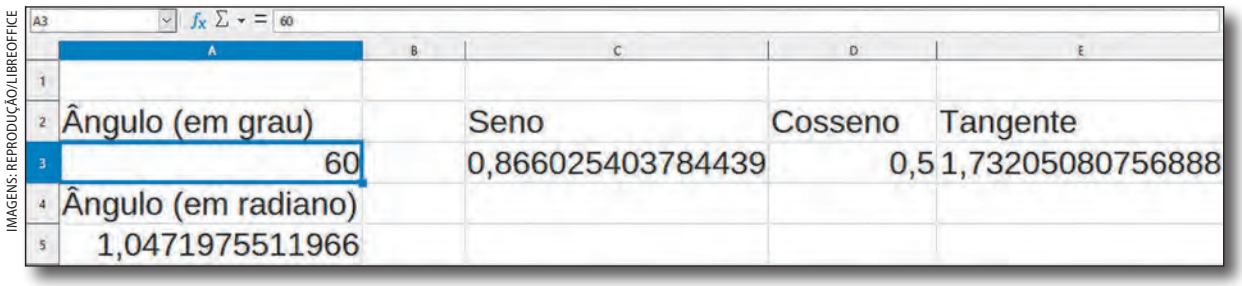
III. A função que vai realizar esse trabalho é "Radianos()" e, como digitaremos o valor do ângulo, em grau, na célula A3, devemos informar ao programa que é dessa célula que ele precisa pegar o valor para fazer a conversão de unidades.
Assim, na célula A5, digite "=Radianos(A3)", e o programa nos fornecerá, nessa célula, em radiano, o valor do ângulo digitado na célula A3.

IV. A planilha eletrônica já tem, em seu banco de dados, fórmulas para o cálculo das razões trigonométricas. Para os cálculos que queremos, as funções são "Sen()", "Cos()" e "Tan()". Então, digite:

- na célula C3: "=Sen(A5)";
- na célula D3: "=Cos(A5)";
- na célula E3: "=Tan(A5)".

V. Agora, basta inserir o valor do ângulo desejado na célula A3 para obter os valores das razões trigonométricas. A imagem a seguir mostra o exemplo para o ângulo de 60°.

IMAGENS: REPRODUÇÃO/LIBREOFFICE



- Podemos escolher quantas casas decimais queremos que a planilha nos mostre. Para alterar a quantidade de casas decimais, primeiro formatamos as células com o recurso **Formatar como número**, 0,00, presente na barra de ferramentas. Para aumentar a quantidade de casas decimais, basta usar a ferramenta ,00+ e, para diminuir a quantidade de casas decimais, basta usar a ferramenta ,00×.

Agora, teste sua calculadora trigonométrica!

Agora, faça o que se pede nas atividades a seguir. NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. No passo a passo apresentado, optamos por primeiro fazer a conversão da unidade do ângulo, de grau para radiano, para, em seguida, calcular as razões trigonométricas. No entanto, é possível realizar os dois passos de uma vez só. Como podemos fazer isso? Como fica a expressão das funções trigonométricas? É preciso compor as duas funções para obter uma única função. As expressões ficam: "sen(radianos(A3))", "cos(radianos(A3))" e "tan(radianos(A3))".

2. Se, em vez de inserir o ângulo em grau, quiséssemos inserir o valor em radiano, como poderíamos fazer para indicar o valor de π? Por exemplo, como poderíamos digitar o ângulo de medida $\frac{\pi}{4}$ para obter as razões trigonométricas? Respostas possíveis: Utilizar um valor aproximado ou utilizar a função pi().

3. Altere a cor da fonte das células A3 e A5 para branca. Reúna-se a um colega, e cada um de vocês deve digitar um ângulo sem que o outro veja. O colega terá de adivinhar o quadrante a que pertence o ângulo digitado observando os sinais das razões trigonométricas obtidas.
A resposta depende do ângulo escolhido pelos estudantes.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

ATIVIDADES COMPLEMENTARES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. (UFVJM-MG) Esta roleta foi utilizada para realizar um sorteio. Ela foi feita a partir da divisão de uma circunferência em doze partes iguais.

DMITRY MERKUSHIN/ALAMY/FOTOARENA/UFVJM-MG

No sorteio essa roleta foi girada saindo do ponto indicado na figura e rodando 780° no sentido horário. alternativa **c**

Com base no exposto, o número sorteado foi:

a) 2 **b)** 3 **c)** 11 **d)** 12

2. (Enem/MEC) As cidades de Quito e Singapura encontram-se próximas à linha do equador e em pontos diametralmente opostos no globo terrestre. Considerando o raio da Terra igual a 6 370 km, pode-se afirmar que um avião saindo de Quito, voando em média 800 km/h, descontando as paradas de escala, chega a Singapura em aproximadamente alternativa **c**

a) 16 horas.
b) 20 horas.
c) 25 horas.
d) 32 horas.
e) 36 horas.

3. (UEAP) Leia a observação: Sempre escrevemos sen (π) para significar seno de π radianos. Sobre o valor de *y*, sendo $y = \text{sen}(3)$ podemos dizer que: alternativa **c**

a) $\frac{\sqrt{3}}{2} < y < 1$
b) $\frac{1}{2} < y < \frac{\sqrt{3}}{2}$
c) $0 < y < \frac{1}{2}$
d) $-\frac{1}{2} < y < 0$
e) $-\frac{\sqrt{3}}{2} < y < -\frac{1}{2}$

4. (UFVJM-MG) Dada a expressão $\cos\theta = \frac{2p-1}{5}$, assinale a alternativa que contém o conjunto de valores que *p* pode assumir. alternativa **c**

a) $-1 \leqslant p \leqslant 1$
b) $-1 \leqslant p \leqslant 2$
c) $-2 \leqslant p \leqslant 3$
d) $-2 \leqslant p \leqslant 4$

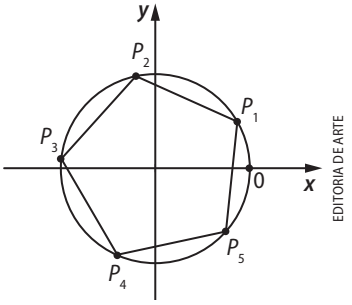
5. (UFRRJ) Os valores que *m* pode assumir, para que exista o arco *x* satisfazendo a igualdade $\text{sen}\, x = m - 4$, são: alternativa **b**

a) $m = 2$
b) $3 \leqslant m \leqslant 5$
c) $1 \leqslant m \leqslant 3$
d) $0 \leqslant m \leqslant 2$
e) $m = 3$

6. (Cefet-MG) Os valores de *x* de modo que a expressão $\cos\alpha = \frac{2x^2-3}{5}$ exista, são: alternativa **b**

a) $-1 \leqslant x \leqslant 1$
b) $-2 \leqslant x \leqslant 2$
c) $-1 \leqslant x \leqslant 2$
d) $1 \leqslant x \leqslant 2$
e) $-2 \leqslant x \leqslant -1$ ou $1 \leqslant x \leqslant 2$

7. (EsPCEx-SP) Na figura, está representado um círculo trigonométrico em que os pontos P_1 a P_5 indicam extremidades de arcos. Esses pontos, unidos, correspondem aos vértices de um pentágono regular inscrito no círculo. Se o ponto P_1 corresponde a um arco de $\frac{\pi}{6}$ radianos, então o ponto P_4 corresponderá à extremidade de um arco cuja medida, em radiano, é igual a alternativa **d**



EDITORIA DE ARTE

a) $\frac{13\pi}{30}$
b) $\frac{17\pi}{30}$
c) $\frac{29\pi}{30}$
d) $\frac{41\pi}{30}$
e) $\frac{53\pi}{30}$

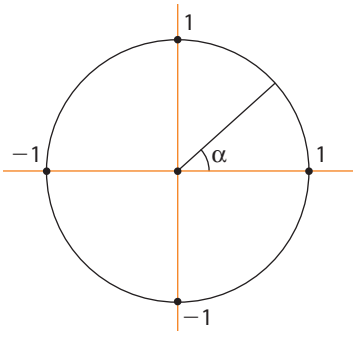
MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

8. (Uneb-BA) Considerando-se $\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha = \sqrt{m}$, $m > 0$ e $\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{n}{4}$, pode-se afirmar que o valor de $2m - n$ é igual a:

a) 2 **c)** 0 **e)** -3
b) 1 **d)** -2

alternativa **a**

9. (UERJ) Observe o ângulo central α do círculo trigonométrico a seguir:



Admitindo que $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ e $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, o valor de $\operatorname{sen}(2\pi - \alpha)$ é igual a: alternativa **c**

a) $\frac{3}{5}$ **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** $-\frac{3}{5}$ **d)** $-\frac{1}{2}$

10. (Unip-SP) Seja $\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5}$ e α um arco do segundo quadrante. Então $\operatorname{tg}\alpha$ vale: alternativa **c**

a) $\frac{4}{3}$ **c)** $-\frac{3}{4}$ **e)** $-\frac{4}{3}$
b) $\frac{3}{4}$ **d)** -1

11. (UEFS-BA) Sendo x um arco do 2º quadrante, tal que $\operatorname{sen} x = \frac{1}{3}$, pode-se afirmar que o valor de $A = \sqrt{2}\operatorname{tg} x$ é igual ao valor de alternativa **b**

a) $\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}$ **d)** $\cos\frac{5\pi}{6}$
b) $\cos\frac{2\pi}{3}$ **e)** $\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}$
c) $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}$

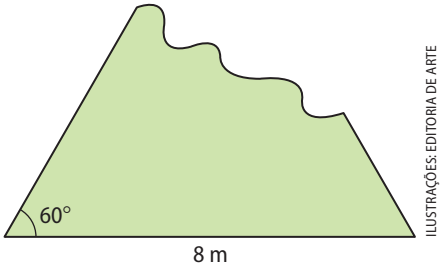
12. (UFRR) Indique qual das afirmações abaixo é verdadeira: alternativa **b**

a) $\cos 200° < \operatorname{tg} 200° < \operatorname{sen} 200°$
b) $\cos 200° < \operatorname{sen} 200° < \operatorname{tg} 200°$
c) $\operatorname{sen} 200° < \operatorname{tg} 200° < \cos 200°$
d) $\operatorname{sen} 200° < \cos 200° < \operatorname{tg} 200°$
e) $\operatorname{tg} 200° < \operatorname{sen} 200° < \cos 200°$

13. (Unicentro-PR) Sendo $270° < x < y < 360°$, assinale a alternativa correta. alternativa **d**

a) $\operatorname{sen} x > \operatorname{sen} y$
b) $\cos x > \cos y$
c) $\operatorname{tg} x > \operatorname{tg} y$
d) $\cos y - \operatorname{sen} x > 0$
e) $\operatorname{sen} x \cdot \cos y > 0$

14. (UEM-PR) Um engenheiro precisa conhecer a medida de cada lado de um terreno triangular cujo perímetro é 20 m, porém a planta do terreno foi rasgada e o que restou foi um pedaço, como na figura a seguir.

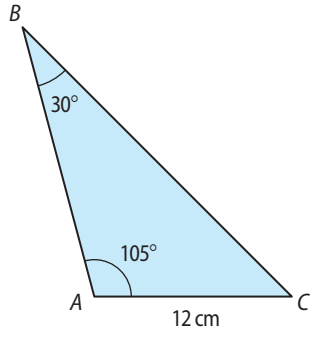


ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Os lados do triângulo que não aparecem totalmente na planta do terreno medem: alternativa **b**

a) $3\sqrt{3}$ m e $(12 - 3\sqrt{3})$ m.
b) 5 m e 7 m.
c) 4,5 m e 7,5 m.
d) 8 m e 4 m.
e) 3 m e 9 m.

15. (Mack-SP) Três ilhas A, B e C aparecem num mapa em escala 1:10 000, como na figura.

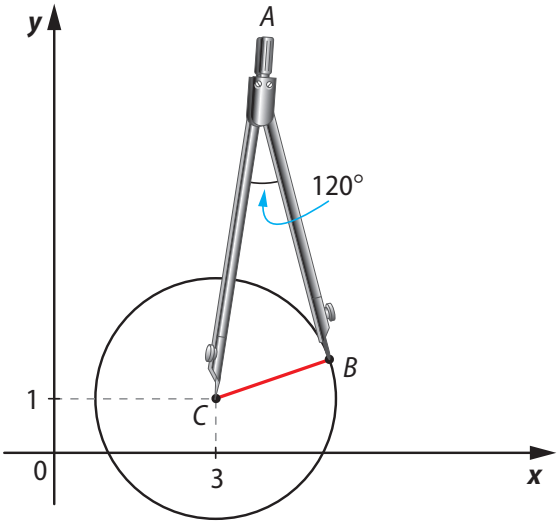


Das alternativas, a que melhor se aproxima da distância entre as ilhas A e B é: alternativa **e**

a) 2,3 km. **d)** 1,4 km.
b) 2,1 km. **e)** 1,7 km.
c) 1,9 km.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

16. (Enem/MEC) Uma desenhista projetista deverá desenhar uma tampa em forma circular. Para realizar esse desenho, ela dispõe, no momento, de apenas um compasso, cujo comprimento das hastes é de 10 cm, um transferidor e uma folha de papel com um plano cartesiano. Para esboçar o desenho dessa tampa, ela afastou as hastes do compasso de forma que o ângulo formado por elas fosse de 120°. A ponta-seca está representada pelo ponto *C*, a ponta do grafite está representada pelo ponto *B* e a cabeça do compasso está representada pelo ponto *A* conforme a figura.



Após concluir o desenho, ela o encaminha para o setor de produção. Ao receber o desenho com a indicação do raio da tampa, verificará em qual intervalo este se encontra e decidirá o tipo de material a ser utilizado na sua fabricação, de acordo com os dados.

Tipo de material	Intervalo de valores do raio (cm)
I	$0 < R \leqslant 5$
II	$5 < R \leqslant 10$
III	$10 < R \leqslant 15$
IV	$15 < R \leqslant 21$
V	$21 < R \leqslant 40$

Considere 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$.
O tipo de material a ser utilizado pelo setor de produção será: alternativa **d**

a) I. **c)** III. **e)** V.
b) II. **d)** IV.

17. (UEA-AM) Considere que em uma circunferência de raio *R* está inscrito um triângulo que tenha um ângulo de medida α oposto a um lado do triângulo de medida ℓ, conforme figura 1. A lei dos senos afirma que $\ell = 2R \cdot \text{sen}\,\alpha$.

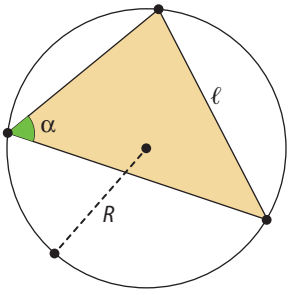
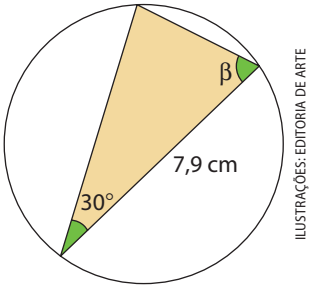


Figura 1.

Um triângulo que tem um lado de medida aproximadamente igual a 7,9 cm está inscrito em uma circunferência de raio 4 cm, conforme mostra a figura 2.



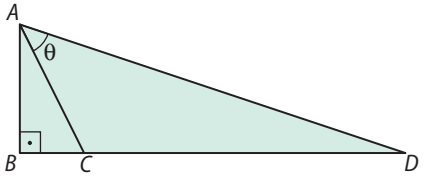
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Figura 2.

Sabendo que $\text{sen}\,\beta = \frac{15}{16}$, o perímetro do triângulo da figura 2 é, aproximadamente,

a) 19 cm. **d)** 20,5 cm. alternativa **b**
b) 19,4 cm. **e)** 21 cm.
c) 19,9 cm.

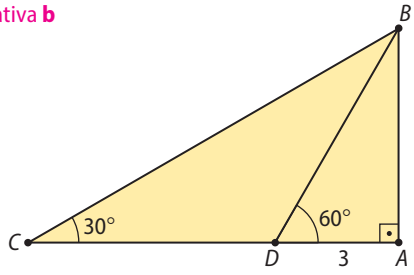
18. (Unicamp-SP) Considere o triângulo retângulo *ABD* exibido na figura abaixo, em que $AB = 2$ cm, $BC = 1$ cm e $CD = 5$ cm. Então, o ângulo θ é igual a: alternativa **c**



a) 15° **c)** 45°
b) 30° **d)** 60°

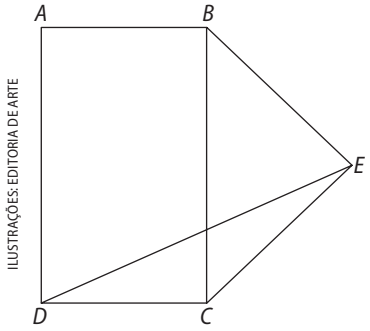
19. (IFRR) A figura abaixo mostra um triângulo ABC, reto em A, com D pertencente ao lado AC e $AD = 3$. Além disso, as retas $\overleftrightarrow{BD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ formam com a reta $\overleftrightarrow{AC}$ ângulos agudos de medidas iguais a 60° e 30°, respectivamente. Se p e q são as áreas dos triângulos BCD e ABD, respectivamente, então, pode-se afirmar que:

alternativa **b**



a) $p = 2{,}5q$
b) $p = 2q$
c) $p = \sqrt{2}q$
d) $p = \sqrt{2q}$
e) $p = \sqrt{9q}$

20. (UFRGS-RS) Na figura abaixo, tem-se um retângulo $ABCD$, de lados $AB = 3$ e $AD = 5$, e um triângulo equilátero BEC, construído sobre o lado $\overline{BC}$.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

A medida de $\overline{DE}$ é alternativa **e**

a) $\sqrt{34 + 15\sqrt{2}}$.
b) $\sqrt{34 - 15\sqrt{3}}$.
c) 7.
d) $\sqrt{19}$.
e) $\sqrt{34 + 15\sqrt{3}}$.

PARA REFLETIR

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Neste Capítulo, estudamos os conceitos de arco de circunferência e de ângulo central e estudamos como medir arcos e ângulos. Também estudamos as unidades de medida usadas para fazer essas medições. Conhecemos a circunferência trigonométrica e como associar os números reais a pontos dessa circunferência.

Estudamos também as relações trigonométricas seno, cosseno e tangente para qualquer arco da circunferência trigonométrica e as relações entre essas razões.

Em seguida, para determinar a medida dos lados e dos ângulos de um triângulo qualquer, aplicamos a lei dos cossenos e a lei dos senos. Por fim, pudemos determinar a área de um triângulo qualquer usando a Trigonometria.

Vamos refletir a respeito das aprendizagens do Capítulo **5**:

- Você já conhecia alguns dos conteúdos apresentados ao longo deste Capítulo? Qual(is)?
- Descreva a circunferência trigonométrica e como podemos associar os números reais a pontos dessa circunferência.
- Descreva o aprofundamento obtido neste Capítulo em relação ao que você conhecia sobre as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente.
- Mostre uma situação em que pode ser usada a lei dos senos e a lei dos cossenos.
- Quais dados são necessários para determinar a área de um triângulo ABC por meio da relação trigonométrica seno? Respostas pessoais.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

CAPÍTULO 6

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Desde a Antiguidade, o ser humano tem encanto pela Lua. Ao longo da História, muitas pessoas fizeram observações e estudos para entender o comportamento dela.

O movimento da Lua influencia muitos fenômenos naturais e até mesmo as culturas de certos povos. Alguns povos indígenas, por exemplo, baseiam-se nas fases da Lua para compor seus calendários. Os indígenas observaram que essas fases são periódicas, repetindo-se aproximadamente a cada 30 dias. Assim, o intervalo entre a aparição de uma mesma fase da Lua define, para esses povos, a duração de um mês. Normalmente, o mês indígena começa após a lua nova.

Eles perceberam também que a Lua influencia a caça e a pesca. Pois, na lua cheia, devido ao excesso de luz, os animais ficam mais agitados e expostos, tornando esse período ideal para a caça.

Note, então, que há diversas observações, científicas e empíricas que relacionam as fases da Lua e sua influência na Terra. Além disso, existem também diversas superstições sobre como as fases da Lua influenciam nossas vidas.

No entanto, independentemente da cultura e da crença, sabe-se que o movimento da Lua em torno da Terra é periódico. Dessa maneira, podemos estudar o movimento da Lua visto da Terra e os fenômenos ligados a ele por meio de funções periódicas, como as trigonométricas, que são o assunto deste Capítulo.

■ Os telescópios são instrumentos utilizados para observar os corpos celestes. Eles podem ser desde objetos caseiros bem simples, com alcance reduzido, até grandes e potentes aparelhos utilizados por cientistas e astrônomos profissionais.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

CASTLESKI/SHUTTERSTOCK.COM

- Esquema ilustrativo com as fases da Lua. O ciclo completo leva aproximadamente 30 dias para ocorrer. (Imagem sem escala; cores fantasia).

OORKA/ISTOCK/GETTY IMAGES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Agora, reúna-se a um colega, e façam o que se pede em cada questão.

1. O estudo da Lua e de suas características é feito pela Astronomia. Vocês sabem o que é Astronomia? Quais são seus objetos de estudo?
2. Foi dito que o movimento da Lua em torno da Terra é um fenômeno periódico. O que vocês entendem por isso? Se necessário, pesquisem os significados da palavra **período**.
3. As fases da Lua influenciam desde fenômenos naturais até os hábitos de alguns povos. Pesquisem a respeito da influência da Lua em diversas culturas e discutam com seus colegas: existem relações entre as crenças populares e o conhecimento científico? Ver as **Orientações para o professor**.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

ANDRII RUDYK/SHUTTERSTOCK.COM

O pêndulo do relógio realiza um movimento periódico.

Funções periódicas

Um pêndulo, como o do relógio da figura, realiza um movimento de vai e vem, alternando os sentidos regularmente.

Assim como no caso do pêndulo, existem diversos outros fenômenos com a mesma característica: a de se repetirem sempre em um mesmo intervalo de tempo, denominado **período**. Por conta disso, eles são chamados de **fenômenos periódicos** e podem ser modelados por **funções periódicas**.

Outro exemplo de fenômeno periódico é o movimento das marés. Observe a seguir um esquema com os horários e níveis de maré baixa, intermediária e alta em determinado dia, em certa praia do Nordeste do Brasil.

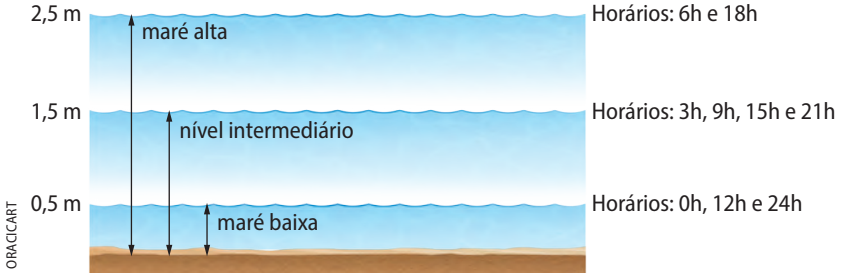
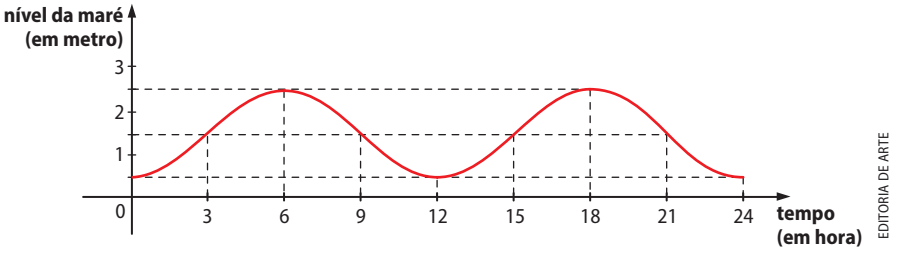


Imagem sem escala, cores fantasia.

Nesse caso, o nível da maré, em metro, em função do tempo, em hora, pode ser modelado por uma função periódica, representada no gráfico a seguir.



Observe que, a partir das 12 horas, o gráfico se repete até as 24 horas. Dizemos que o movimento dessa maré tem um período de 12 horas.

Uma função real de variável real é **periódica** se existe um número real positivo p tal que:

$f(x + p) = f(x)$ para todo x do domínio de f

O menor valor de p é chamado de **período da função**.

Um dos principais tipos de funções periódicas são as **funções trigonométricas**, que serão apresentadas neste Capítulo.

Para acessar

- CIENTISTAS descobrem planetas com órbitas sincronizadas ao redor de estrela. **Jornal Joca**, São Paulo, 14 dez. 2023. Ciência e Tecnologia. Disponível em: https://www.jornaljoca.com.br/cientistas-descobrem-planetas-com-orbitas-sincronizadas-ao-redor-de-estrela/. Acesso em: 6 out. 2024.

  Esse *site* apresenta uma reportagem sobre a descoberta de um sistema de planetas com órbitas sincronizadas em um ritmo cíclico e um vídeo mostrando essa sincronia.

Função seno

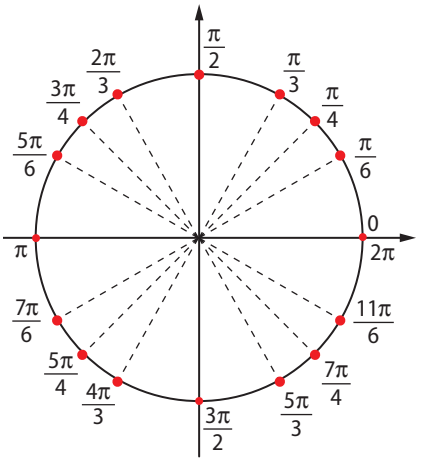
A primeira função trigonométrica que estudaremos é a **função seno**. Ela é a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa, a cada número real x, o número real sen x, ou seja, $y = \text{sen } x$ ou $f(x) = \text{sen } x$.

O domínio e o contradomínio da função seno são iguais a $\mathbb{R}$, ou seja, $D(f) = \mathbb{R}$ e $CD(f) = \mathbb{R}$.

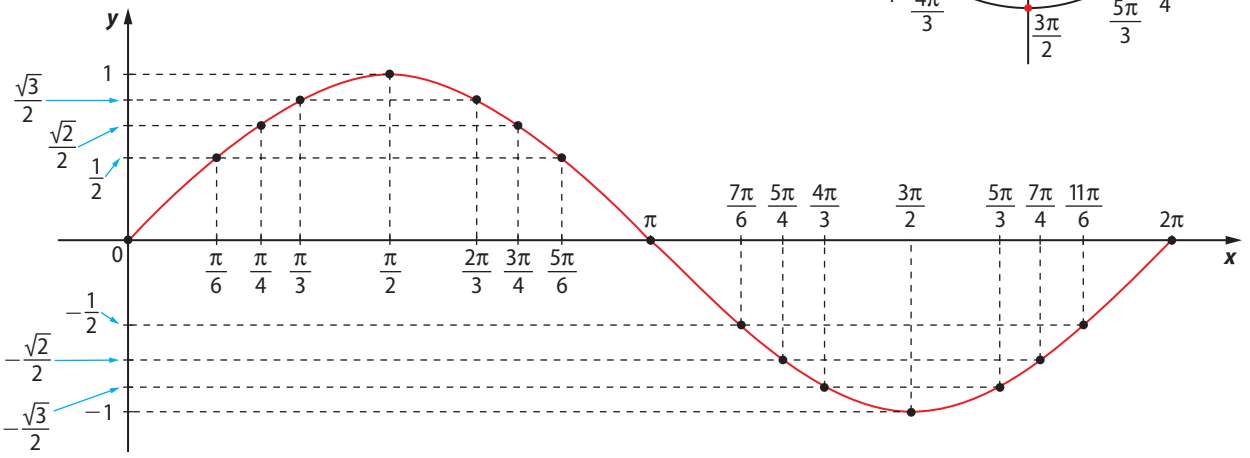
Gráfico da função seno

Para estudar a função seno, vamos tomar alguns valores de x no intervalo $[0, 2\pi]$ e obter alguns pontos (x, y) no plano para construir seu gráfico.

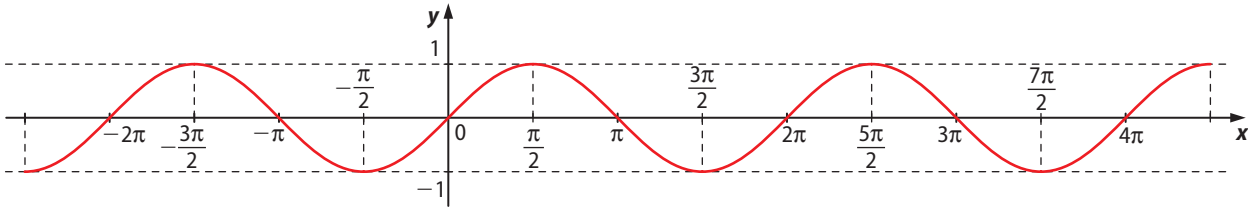
No Capítulo anterior, estudamos os valores de sen x para qualquer valor real de x na circunferência trigonométrica. Assim, para obter alguns pontos (x, y) pertencentes ao gráfico da função dada por $f(x) = \text{sen } x$, vamos utilizar esses valores já calculados na circunferência trigonométrica para $x \in [0, 2\pi]$.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE



Como o domínio da função seno é o conjunto dos números reais, a curva se estende para valores de x menores do que zero e maiores do que 2π. Assim, obtemos a curva a seguir, que é o gráfico de $y = \text{sen } x$.



Chamamos a curva descrita pela função seno de **senoide**.

Observe o que ocorre com a função dada por $y = \text{sen } x$ no intervalo $[0, 2\pi]$:

- de 0 a $\frac{\pi}{2}$, a função cresce, variando de 0 a 1;
- de $\frac{\pi}{2}$ a π, a função decresce de 1 a 0;
- de π a $\frac{3\pi}{2}$, a função decresce de 0 a -1;
- de $\frac{3\pi}{2}$ a 2π, a função cresce de -1 a 0.

Saiba que...

Note que o gráfico da função seno é simétrico em relação à origem, ou seja, para qualquer número real x, temos: $\text{sen}(-x) = -\text{sen } x$

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

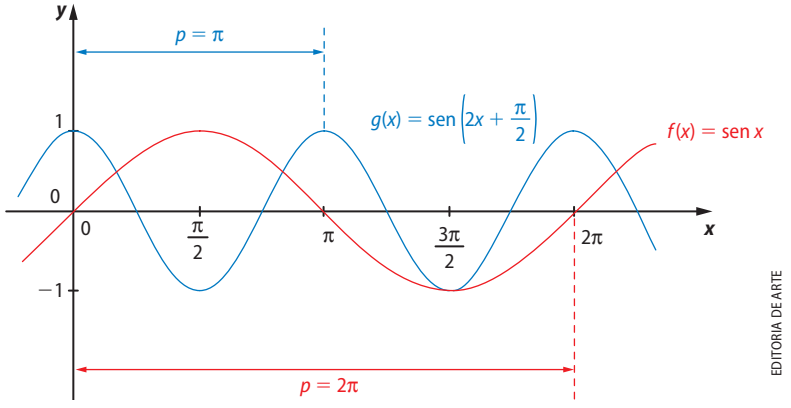
O conjunto imagem da função seno é o intervalo $[-1, 1]$, isto é: $-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1$

Ao observar o gráfico da função seno, percebemos que ela se repete periodicamente, como é característico das funções periódicas. Nesse caso, a função se repete a cada intervalo de 2π, ou seja, nos intervalos …, $[-4\pi, -2\pi]$, $[-2\pi, 0]$, $[0, 2\pi]$, $[2\pi, 4\pi]$, … Além disso, temos que:

$$\ldots = \operatorname{sen}(x - 4\pi) = \operatorname{sen}(x - 2\pi) = \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen}(x + 4\pi) = \ldots, \text{ ou seja,}$$
$$\operatorname{sen}(x + k \cdot 2\pi) = \operatorname{sen} x,\ k \in \mathbb{Z}$$

Assim, para a função dada por $f(x) = \operatorname{sen} x$, o período é $p = 2\pi$.

Observe, agora, os gráficos das funções dadas por $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = \operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$.



Note que o período da função g é igual à metade do período da função f e que o período da função f é a parte do gráfico relativa ao intervalo de 0 a 2π. Isto é, a distância entre 0 e 2π, que é igual a 2π, é o período de f.

O período da função g, que é igual a π, pode ser obtido pela distância entre 0 e π.

Podemos determinar o período de uma função g obtida a partir da função seno, com lei de formação $g(x) = \operatorname{sen}(cx + d)$, com c e d reais e $c \neq 0$, usando a seguinte fórmula:

$$p = \frac{2\pi}{|c|}$$

Para chegar a essa fórmula, utilizamos a informação de que um período para a função seno é dado de 0 a 2π. Assim, determinamos, inicialmente, os valores de x_1 e x_2 tais que o arco $(cx + d)$ da função g assuma valores iguais a 0 e a 2π. O período de g será dado pela distância entre x_1 e x_2, ou seja, por $|x_2 - x_1|$.

$$cx_1 + d = 0 \Rightarrow cx_1 = -d \Rightarrow x_1 = -\frac{d}{c}$$

$$cx_2 + d = 2\pi \Rightarrow cx_2 = 2\pi - d \Rightarrow x_2 = \frac{2\pi - d}{c}$$

Portanto: $p = |x_2 - x_1| = \left|\frac{2\pi - d}{c} - \left(-\frac{d}{c}\right)\right| = \left|\frac{2\pi}{c}\right| = \frac{2\pi}{|c|}$

Calculando, no caso do exemplo, o período da função dada por $g(x) = \operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ pela fórmula, temos:

$$p = \frac{2\pi}{|c|} = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$$

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

ATIVIDADES RESOLVIDAS

1. Construa os gráficos das funções dadas por $f(x) = \text{sen } 2x$ e $g(x) = \text{sen } \frac{x}{2}$, comparando-os com o gráfico da função dada por $h(x) = \text{sen } x$.

Resolução

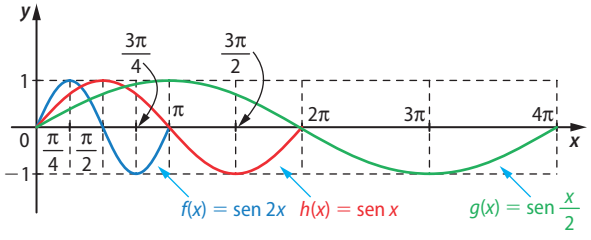
Como conhecemos o gráfico de $y = \text{sen } x$, podemos construir as tabelas e esboçar os três gráficos em um só sistema de eixos coordenados para compará-los.

$y = \text{sen } 2x$		
$2x$	x	y
0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	1
π	$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	-1
2π	π	0

$y = \text{sen } x$	
x	y
0	0
$\frac{\pi}{2}$	1
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1
2π	0

$y = \text{sen } \frac{x}{2}$		
$\frac{x}{2}$	x	y
0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	π	1
π	2π	0
$\frac{3\pi}{2}$	3π	-1
2π	4π	0

Para facilitar a comparação, os gráficos serão apresentados com apenas um período completo de cada uma das funções.



Observando os gráficos, verificamos que as funções $f(x) = \text{sen } 2x$ e $g(x) = \text{sen } \frac{x}{2}$ têm o mesmo conjunto imagem, $[-1, 1]$, e que o período de f é π, e o de g é 4π.

2. Determine o período p da função f dada por $f(x) = \text{sen}\left(\frac{3x}{4} + \pi\right)$.

Resolução

O período p da função é dado por:

$$p = \frac{2\pi}{\left|\frac{3}{4}\right|} = 2\pi \cdot \frac{4}{3} = \frac{8\pi}{3}$$

3. Determine k para que exista x tal que $\text{sen } x = 2k - 5$.

Resolução

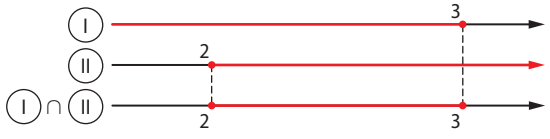
Sabemos que $-1 \leqslant \text{sen } x \leqslant 1$. Substituindo sen x por $2k - 5$, temos:

$$\underbrace{-1 \leqslant \overbrace{2k - 5}^{\text{II}} \leqslant 1}_{\text{I}}$$

(I) $2k - 5 \leqslant 1 \Rightarrow 2k \leqslant 6 \Rightarrow k \leqslant 3$

(II) $2k - 5 \geqslant -1 \Rightarrow 2k \geqslant 4 \Rightarrow k \geqslant 2$

Fazendo (I) $\cap$ (II):



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Logo, $S = \{k \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant k \leqslant 3\}$.

4. Quais são os valores máximo e mínimo que a função dada por $y = 3 + \text{sen } 5x$ pode assumir?

Resolução

A função seno tem valor máximo 1 e valor mínimo -1, e o fator 5 não influencia nesses valores. Então, os valores máximo e mínimo da função $y = 3 + \text{sen } 5x$ são:

- valor máximo: $y = 3 + 1 = 4$;
- valor mínimo: $y = 3 - 1 = 2$.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Ver as **Orientações para o professor**.

1. Esboce o gráfico e determine o domínio, a imagem e o período das seguintes funções:

a) $y = 3 \operatorname{sen} x$

b) $y = 2 - \operatorname{sen} x$

c) $y = \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

d) $y = 2 \operatorname{sen} \frac{x}{4}$

2. Determine o período das funções:

a) $y = \operatorname{sen} 8x$ $p = \frac{\pi}{4}$

b) $y = 5 \cdot \operatorname{sen} 10x$ $p = \frac{\pi}{5}$

3. Qual é o conjunto imagem da função dada por $f(x) = 7 \cdot \operatorname{sen}(3x)$? $\text{Im} = [-7, 7]$

4. (UFPR) O período da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ é: alternativa **b**

a) $\frac{\pi}{2}$

b) π

c) $\frac{\pi}{4}$

d) 2π

e) $\frac{\pi}{8}$

5. Escreva os valores máximo e mínimo que cada uma das expressões a seguir pode assumir.

a) $4 \cdot \operatorname{sen} \alpha$ valor máximo: 4; valor mínimo: -4

b) $5 - 2 \cdot \operatorname{sen} x$ valor máximo: 7; valor mínimo: 3

c) $\frac{1}{3 + \operatorname{sen} y}$ valor máximo: $\frac{1}{2}$; valor mínimo: $\frac{1}{4}$

6. Calcule os valores reais de m, de modo que $\operatorname{sen} x = 2m - 1$. $S = \{m \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant m \leqslant 1\}$

7. (Cefet-PR) Sejam as funções $f(x) = 2 \cdot \operatorname{sen}(x)$ e $g(x) = \operatorname{sen}(2x)$. A respeito delas, pode-se afirmar que: alternativa **a**

a) O período de $f(x)$ é o dobro do período de $g(x)$.

b) As funções $f(x)$ e $g(x)$ possuem os mesmos zeros.

c) O máximo de $f(x)$ é igual ao máximo de $g(x)$.

d) O máximo de $g(x)$ é o dobro do máximo de $f(x)$.

e) O período de $g(x)$ é o dobro do período de $f(x)$.

8. Determine o valor de k para que existam valores que satisfaçam à igualdade $\operatorname{sen} x = \frac{5k - 2}{k - 3}$. $S = \left\{k \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{4} \leqslant k \leqslant \frac{5}{6}\right\}$

9. (UFV-MG) Para a existência da expressão $\operatorname{sen}\theta = \frac{2x - 1}{3}$, os valores de x estão compreendidos no intervalo: alternativa **d**

a) $-1 \leqslant x < 1$

b) $-1 < x \leqslant 0$

c) $-1 \leqslant x < \frac{1}{3}$

d) $-1 \leqslant x \leqslant 2$

10. (FGV-SP) Um supermercado, que fica aberto 24 horas por dia, faz a contagem do número de clientes na loja a cada 3 horas. Com base nos dados observados, estima-se que o número de clientes possa ser calculado pela função trigonométrica $f(x) = 900 - 800 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{x \cdot \pi}{12}\right)$, em que $f(x)$ é o número de clientes e x, a hora da observação (x é um inteiro, tal que $0 \leqslant x \leqslant 24$).

Utilizando essa função, a estimativa da diferença entre o número máximo e o número mínimo de clientes dentro do supermercado, em um dia completo, é igual a: alternativa **e**

a) 600

b) 800

c) 900

d) 1500

e) 1600

11. (UFES) Considere que $V(t)$, volume de ar nos pulmões de um ser humano adulto, em litro, varia de no mínimo 2 litros a no máximo 4 litros, sendo t a variável tempo, em segundo. Dentre as funções abaixo, a que melhor descreve $V(t)$ é: alternativa **e**

a) $2 + 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}t\right)$

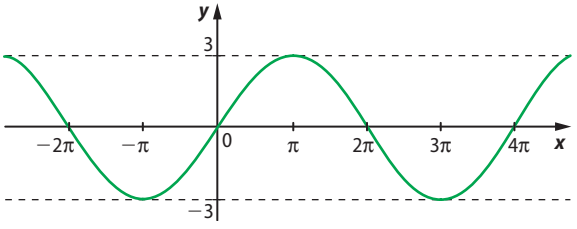
b) $4 + 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}t\right)$

c) $5 + 3\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}t\right)$

d) $1 + 3\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}t\right)$

e) $3 + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}t\right)$

12. Usando a função f dada por $f(x) = 3\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$ ou a representação gráfica dessa função, elabore uma atividade que envolva os conceitos estudados até o momento.



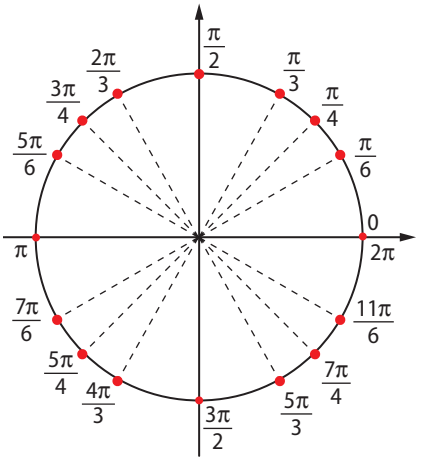
EDITORIA DE ARTE

Após a elaboração, troque a atividade com um colega para que um resolva a atividade do outro. Resposta pessoal.

Função cosseno

Denomina-se **função cosseno** a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa, a cada número real x, o número real cos x, ou seja, $y = \cos x$ ou $f(x) = \cos x$.

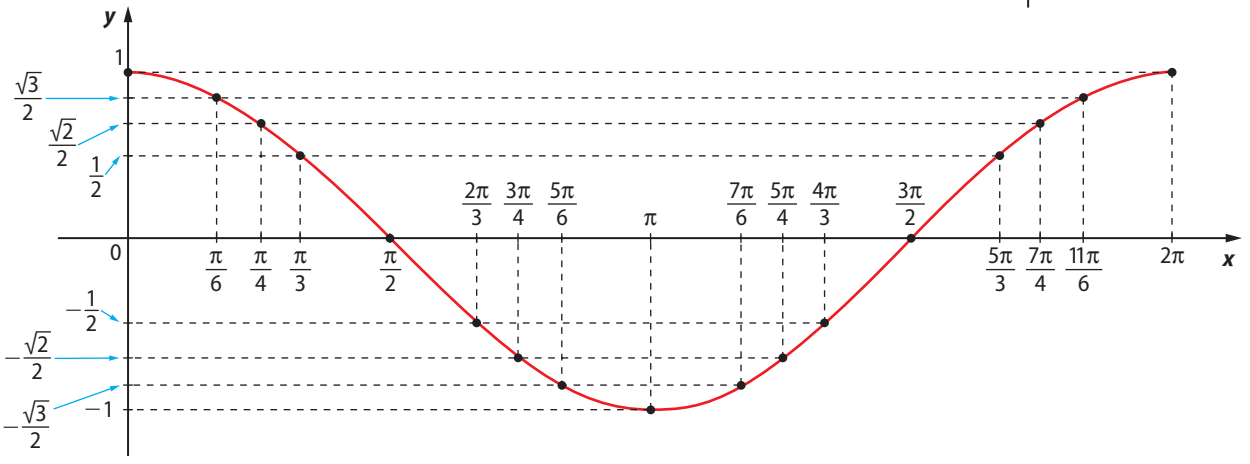
O domínio e o contradomínio da função cosseno são iguais a $\mathbb{R}$, ou seja, $D(f) = \mathbb{R}$ e $CD(f) = \mathbb{R}$.



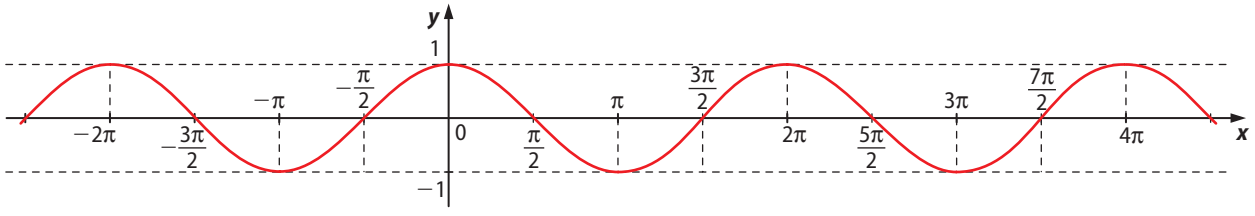
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Gráfico da função cosseno

Assim como fizemos para traçar o gráfico da função seno, vamos utilizar os valores de cos x para $x \in [0, 2\pi]$, já conhecidos da circunferência trigonométrica, para obter alguns pontos (x, y) pertencentes ao gráfico da função dada por $f(x) = \cos x$. Assim:



Como o domínio da função cosseno é o conjunto dos números reais, a curva é estendida para valores de x menores do que zero e maiores do que 2π. Assim, obtemos a curva a seguir, que é o gráfico da função dada por $y = \cos x$.



Observe o que ocorre com a função dada por $y = \cos x$ no intervalo $[0, 2\pi]$:

- de 0 a $\frac{\pi}{2}$, a função decresce, variando de 1 a 0;
- de $\frac{\pi}{2}$ a π, a função decresce de 0 a -1;
- de π a $\frac{3\pi}{2}$, a função cresce de -1 a 0;
- de $\frac{3\pi}{2}$ a 2π, a função cresce de 0 a 1.

Saiba que...

Note que o gráfico da função cosseno é simétrico em relação ao eixo das ordenadas, ou seja, para qualquer número real x, temos: $\cos(-x) = \cos x$

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

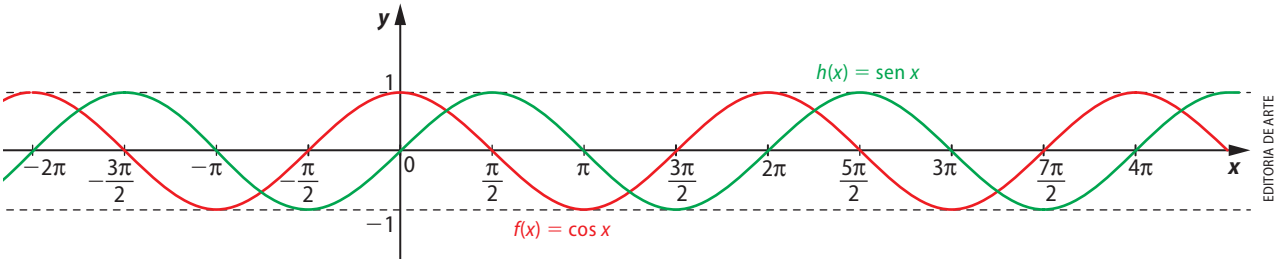
O conjunto imagem da função cosseno x é o intervalo $[-1, 1]$, isto é: $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$

A função cosseno também é periódica e se repete a cada intervalo de 2π, como nos intervalos $[-2\pi, 0]$, $[0, 2\pi]$ e $[2\pi, 4\pi]$. Além disso, temos que:

$$\ldots = \cos(x - 4\pi) = \cos(x - 2\pi) = \cos x = \cos(x + 2\pi) = \cos(x + 4\pi) = \ldots, \text{ ou seja,}$$

$$\cos(x + k \cdot 2\pi) = \cos x,\ k \in \mathbb{Z}$$

Note que o gráfico da função cosseno é congruente ao gráfico da função seno transladado $\frac{\pi}{2}$ unidades para a esquerda, como mostra a imagem a seguir.



EDITORIA DE ARTE

Utilizando raciocínio análogo ao usado para determinar o período de uma função obtida a partir da função seno, podemos concluir que o período p de uma função dada por $g(x) = \cos(cx + d)$, com c e d reais e $c \neq 0$, é $p = \frac{2\pi}{|c|}$.

Por exemplo, para a função $g(x) = \cos\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{3}\right)$, o período é:

$$p = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{4}\right|} = 2\pi \cdot 4 = 8\pi$$

Para ouvir

- TEMPESTADES solares. Campinas: Matemática Multimídia, [201-]. (Série Rádio Cangália). Disponível em: https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1353. Acesso em: 5 out. 2024.

  Esse *site* apresenta dois áudios que relacionam as tempestades solares com as funções periódicas.

ATIVIDADES RESOLVIDAS

5. Em certas espécies em perfeito equilíbrio ecológico, a variação no tamanho de sua população é periódica. Esse período depende de condições ambientais, como a quantidade de predadores, a quantidade de alimento disponível, entre outros fatores. Em uma ilha, a população P de certa espécie animal é dada pela função: $P(t) = 500 + 100 \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$, em que t corresponde aos meses do ano ($P(0)$ corresponde à população de animais no começo do ano; $P(1)$ corresponde à população no último dia de janeiro; $P(2)$, à população no último dia de fevereiro; e assim sucessivamente).

a) Esboce o gráfico da função $y = 100 \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$, determinando o período dessa função.

b) Esboce o gráfico de P em função de t que representa a população dessa espécie animal e determine o intervalo de variação dessa população no ano.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

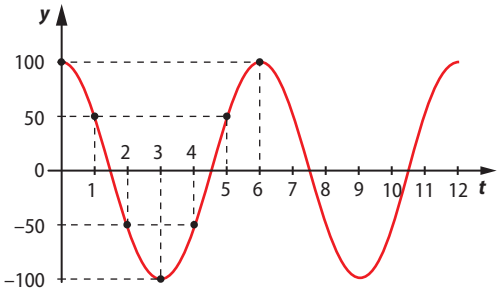
Resolução

a) Construindo uma tabela para alguns valores de t na função $y = 100 \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$, temos:

t	$\frac{\pi t}{3}$	$\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$	$y = 100 \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$
0	0	1	100
1	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	50
2	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$	−50
3	π	−1	−100
4	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$	−50
5	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	50
6	2π	1	100

Paramos em $t = 6$, pois, a partir desse número, os valores de y vão se repetir, por causa da periodicidade da função.

Esboçando o gráfico, temos:



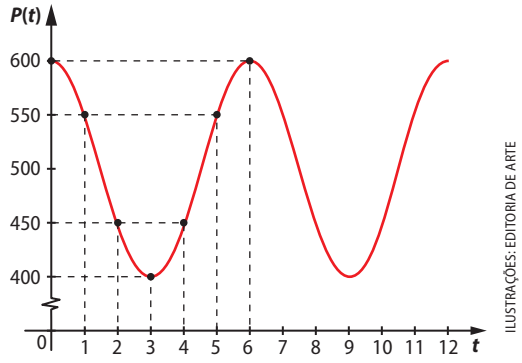
$$p = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 2\pi \cdot \frac{3}{\pi} = 6$$

O período dessa função é $p = 6$.

b) Usando os valores obtidos para a função $y = 100 \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$ na tabela do item **a**, vamos obter $P(t)$ para alguns valores de t.

t	$y = 100 \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$	$P(t) = 500 + 100 \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$
0	100	$P(0) = 500 + 100 = 600$
1	50	$P(1) = 500 + 50 = 550$
2	−50	$P(2) = 500 + (-50) = 450$
3	−100	$P(3) = 500 + (-100) = 400$
4	−50	$P(4) = 500 + (-50) = 450$
5	50	$P(5) = 500 + 50 = 550$
6	100	$P(6) = 500 + 100 = 600$

Com os valores obtidos, podemos esboçar o gráfico da função P.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Note que o gráfico da função P tem o mesmo formato do gráfico que representa a função dada por $y = 100 \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$, porém deslocado 500 unidades para cima.

Como a imagem de $y = 100 \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$ é tal que $-100 \leq y \leq 100$, a imagem da função P é dada por:

$500 - 100 \leq P(t) \leq 500 + 100 \Rightarrow$

$\Rightarrow 400 \leq P(t) \leq 600$

Assim, a população dessa espécie varia entre 400 e 600 indivíduos.

Saiba que...

O símbolo ⫰ foi usado no gráfico anterior para indicar que parte do eixo que não contém dados foi suprimida.

6. (PUC-PR) A variação da pressão sanguínea (em mmHG) de uma pessoa em função do tempo (em segundos) é uma função trigonométrica cuja lei é dada por:

$$P(t) = 100 - 20 \cdot \cos\left(\frac{8\pi}{3}t\right)$$

De acordo com os dados acima, assinale a alternativa que corresponde à CORRETA variação da pressão.

a) [−20, 20].
b) [0, 20].
c) [80, 100].
d) [80, 120].
e) [100, 120].

Resolução

A função P assume valor mínimo para $\cos\left(\frac{8\pi}{3} \cdot t\right) = 1$, pois, dessa maneira, o produto $20 \cdot \cos\left(\frac{8\pi}{3} \cdot t\right)$ será máximo e $100 - 20 \cdot \cos\left(\frac{8\pi}{3}t\right)$ será mínimo.

Assim, temos que o valor mínimo da função é dado por:

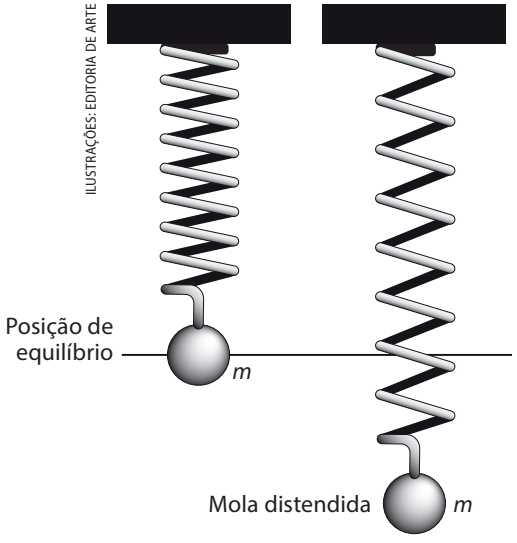
$100 - 20 \cdot \cos\left(\frac{8\pi}{3} \cdot t\right) = 100 - 20 \cdot 1 = 80$

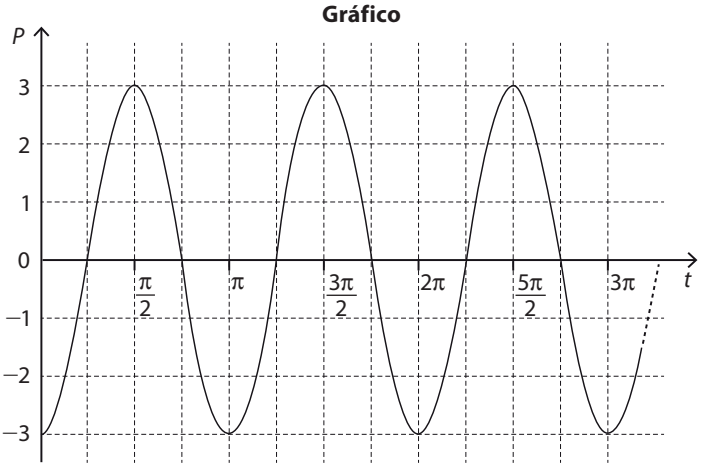
A função P assume valor máximo para $\cos\left(\frac{8\pi}{3} \cdot t\right) = -1$. Assim:

$100 - 20 \cdot \cos\left(\frac{8\pi}{3} \cdot t\right) = 100 - 20 \cdot (-1) = 100 + 20 = 120$

Portanto, a variação da pressão é [80, 120], intervalo que corresponde à alternativa **d**.

7. (Enem/MEC) Uma mola é solta da posição distendida conforme a figura. A figura do lado direito da página representa o gráfico da posição P (em cm) da massa m em função do tempo t (em segundo) em um sistema de coordenadas cartesianas.Esse movimento periódico é descrito por uma expressão do tipo $P(t) = \pm A\cos(\omega t)$ ou $P(t) = \pm A\,\text{sen}(\omega t)$, em que $A > 0$ é a amplitude de deslocamento máximo e ω é a frequência, que se relaciona com o período T pela fórmula $\omega = \frac{2\pi}{T}$.
Considere a ausência de quaisquer forças dissipativas.





A expressão algébrica que representa as posições $P(t)$ da massa m, ao longo do tempo, no gráfico, é

a) $-3\cos(2t)$ **b)** $-3\,\text{sen}(2t)$ **c)** $3\cos(2t)$ **d)** $-6\cos(2t)$ **e)** $6\cos(2t)$

Resolução

Pelo gráfico, é possível constatar que o período T da função é $T = \pi$; então: $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{\pi} = 2$

Assim, $P(t) = \pm A\cos(2t)$ ou $P(t) = \pm A\,\text{sen}(2t)$.

Podemos observar pelo gráfico que a imagem da função é dada por $[-3, 3]$. Então, temos que $A = 3$, pois, para qualquer t, temos $-1 \leqslant \cos 2t \leqslant 1$ e $-1 \leqslant \text{sen}\, 2t \leqslant 1$.

Então, $P(t) = \pm 3\cos(2t)$ ou $P(t) = \pm 3\,\text{sen}(2t)$,ou seja, as expressões das alternativas **a**, **b** e **c** atenderiam a essas condições.

Vamos analisar um ponto do gráfico de P. A imagem da função para $t = \frac{\pi}{2}$ é 3. Testando esse valor de t nas três alternativas possíveis, temos:

- alternativa **a**: $-3 \cdot \cos(2 \cdot t) = -3 \cdot \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = -3 \cdot \cos\pi = (-3) \cdot (-1) = 3$

  Ou seja, para a lei $P(t) = -3\cos(2t)$, $P\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

- alternativa **b**: $-3 \cdot \operatorname{sen}(2t) = -3 \cdot \operatorname{sen}\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = -3 \cdot \operatorname{sen}\pi = (-3) \cdot 0 = 0$

  Ou seja, para a lei $P(t) = -3\operatorname{sen}(2t)$, $P\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq 3$.

- alternativa **c**: $3 \cdot \cos(2t) = 3 \cdot \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 3 \cdot \cos\pi = 3 \cdot (-1) = -3$

  Ou seja, para a lei $P(t) = 3\cos(2t)$, $P\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq 3$.

Portanto, a única das expressões algébricas apresentadas que pode representar as posições $P(t)$ da massa m ao longo do tempo é da alternativa **a**.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Ver as **Orientações para o professor**.

13. Esboce o gráfico das funções dadas por:

a) $y = -\cos x$

b) $y = 3\cos\frac{x}{2}$

c) $y = 5 + \cos x$

d) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

14. Determine o período das funções a seguir:

a) $y = \cos 8x$ $p = \frac{\pi}{4}$

b) $y = 5\cos 10x$ $p = \frac{\pi}{5}$

c) $y = \cos\frac{4x}{7}$ $p = \frac{7\pi}{2}$

d) $y = 6\cos\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{2}\right)$ $p = 8\pi$

15. Calcule o valor de m para que o período da função $f(x) = 1 + \cos(4mx)$ seja igual a $\frac{\pi}{8}$. $m = 4$

16. Qual é o maior valor que a expressão $\frac{10}{3 + \cos x}$ pode assumir? 5

17. (UECE) As funções trigonométricas são, muitas vezes, utilizadas no estudo de tópicos básicos de Física. Alguns fenômenos físicos podem assumir valores máximos e/ou mínimos. Se um fenômeno físico é representado pela função $f(x) = 110(\operatorname{sen} x + \cos x)$, ele atingirá valor máximo e mínimo para os valores de $x = x_0$ tais que $\operatorname{sen} x_0 = \cos x_0$. Nesse caso, o valor máximo atingido pelo fenômeno é

a) $110 \cdot \sqrt{2}$. alternativa **a**

b) $110 \cdot \sqrt{3}$.

c) $220 \cdot \sqrt{2}$.

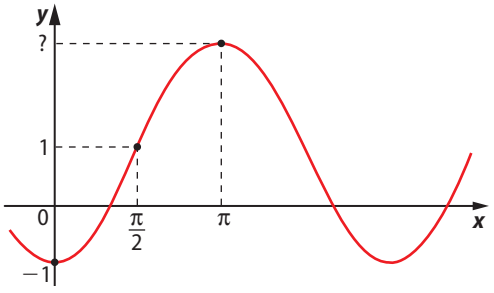
d) $220 \cdot \sqrt{3}$.

18. (UEA-AM) O ponto (0, 2) pertence à função trigonométrica $f(x) = a + \cos x$, em que a é um número real. O valor de $f(2\pi)$ é igual a

a) −2. **b)** −1. **c)** 2. **d)** 1. **e)** 0.

alternativa **c**

19. (UEA-AM) Considere o gráfico da função real $f(x) = a - b\cos x$, com a e b não nulos.

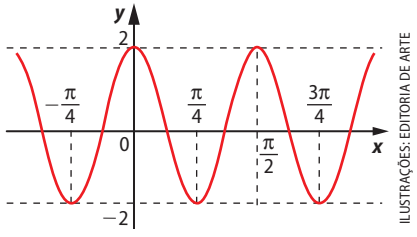


Sabendo que os pontos $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ e (0, −1) pertencem ao gráfico, o valor de $f(\pi)$ é alternativa **a**

a) 3,0. **b)** 2,5. **c)** 3,5. **d)** 1,5. **e)** 2,0.

20. Determine o conjunto imagem da função f dada por $f(x) = 3 \cdot \cos x + 2$. $[-1, 5]$

21. Observe o gráfico da função f.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Assinale a alternativa cuja lei poderia ser a lei da função f. alternativa **d**

a) $f(x) = \cos(2x)$

b) $f(x) = \cos(4x)$

c) $f(x) = 2\cos(2x)$

d) $f(x) = 2\cos(4x)$

e) $f(x) = -4\cos(4x)$

22. Sejam as funções f e g dadas por $f(x) = 2^{\cos x}$ e $g(x) = 2^{\operatorname{sen} x}$.

a) Calcule $f(\pi) \cdot g(\pi)$. $\frac{1}{2}$

b) Compare os valores $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ e $g\left(\frac{\pi}{4}\right)$. $f\left(\frac{\pi}{6}\right) > g\left(\frac{\pi}{4}\right)$

23. Um oceanógrafo registrou a altura das marés de uma praia, dia após dia, nos mesmos horários, e percebeu que há um padrão em que a maré alta atinge, no máximo, 3 m e a maré baixa sempre atinge 1 m em relação ao nível da superfície. A seguir estão as alturas e os horários marcados no primeiro dia de observação.

Horário	Altura da maré (em metro)
4:00	3
5:34	2
7:08	1
10:17	3
11:51	2
13:25	1
16:34	3

Com base nas informações fornecidas, faça o que se pede.

a) Sabendo que a função que se ajusta ao comportamento da maré é dada por $A(t) = \cos(t - a) + b$, em que $A(t)$ é a altura da maré no tempo t, determine a e b, com a e $b \in \mathbb{Z}$, de modo que, às 4:00, o valor da função se ajuste exatamente ao valor registrado pelo oceanógrafo. $a = 4$; $b = 2$

b) Preocupado com a segurança dos banhistas, o oceanógrafo fixou avisos nos quiosques da praia, alertando sobre os horários das marés altas (quando estas atingem de 2 m a 3 m). Utilizando esse contexto e as informações anteriores, elabore uma atividade com dois itens e troque-a com um colega para que ele a resolva. Em seguida, faça a correção da atividade elaborada por você. Resposta pessoal.

Equações trigonométricas

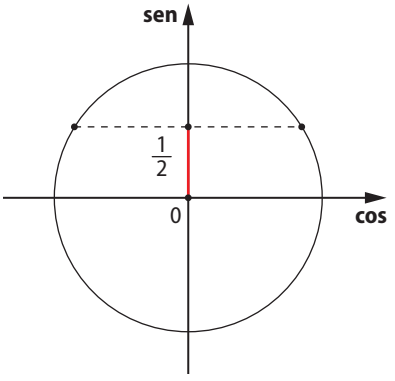
É denominada equação trigonométrica toda equação cuja incógnita ou expressões contendo a incógnita aparecem como se fossem variáveis de funções trigonométricas. Por exemplo:

a) $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}$ **b)** $\cos\left(x + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{4}$ **c)** $\cos^2 x + \cos x = 0$

Os valores da incógnita que satisfazem à equação dada, caso existam, constituem as soluções da equação trigonométrica.

Observe, como exemplo, a resolução da equação $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$. Primeiro, vamos resolver a equação no intervalo $0 \leq x < 2\pi$.

- Na circunferência trigonométrica, marcamos com um ponto, no eixo dos senos (eixo vertical), o valor $\frac{1}{2}$.
- Em seguida, traçamos, pelo ponto marcado, uma reta paralela ao eixo horizontal.

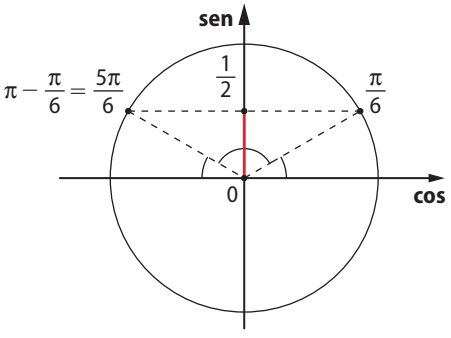


ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Os valores de x, soluções da equação, são as medidas dos arcos cujas extremidades são os pontos de intersecção da reta paralela ao eixo horizontal com a circunferência trigonométrica.

No primeiro quadrante, o arco cujo seno é $\frac{1}{2}$ é $\frac{\pi}{6}$.

No segundo quadrante, o arco cujo seno é $\frac{1}{2}$ é $\frac{5\pi}{6}$.



Portanto, a solução da equação $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ no intervalo $0 \leq x < 2\pi$ é $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Agora, acompanhe a solução dessa equação para o **conjunto dos números reais**. Essa solução é composta de todos os arcos côngruos aos arcos $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6}$.

Como a função seno tem período igual a 2π, temos a seguinte solução no conjunto $\mathbb{R}$:

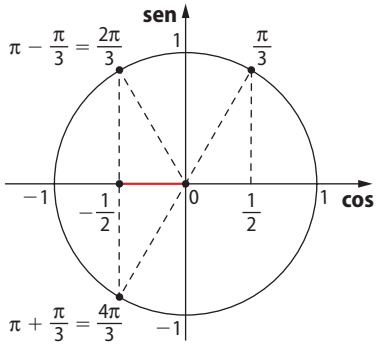
$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

ATIVIDADES RESOLVIDAS

8. Resolva a equação $\cos(3x - \pi) = -\frac{1}{2}$, sendo $U = \mathbb{R}$.

Resolução

Na circunferência trigonométrica, marcamos com um ponto o valor $-\frac{1}{2}$ no eixo dos cossenos e traçamos um segmento paralelo ao eixo vertical que passe por esse ponto.



Na circunferência, podemos observar que, no intervalo $[0, 2\pi[$, temos $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ e $\cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

Como a solução deve ser no conjunto dos números reais, o arco $(3x - \pi)$ deve ser côngruo a $\frac{2\pi}{3}$ ou côngruo a $\frac{4\pi}{3}$:

- $3x - \pi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow$

  $\Rightarrow 3x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{5\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$

- $3x - \pi = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow$

  $\Rightarrow 3x = \frac{7\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{7\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$

Portanto:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{7\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

9. Determine o conjunto solução da equação $2\,\text{sen}^2 x + \text{sen}\, x - 1 = 0$, para $x \in [0, 2\pi[$.

Resolução

Fazendo $y = \text{sen}\, x$, temos:

$2\,\text{sen}^2 x + \text{sen}\, x - 1 = 0 \Rightarrow 2y^2 + y - 1 = 0$

Calculando as raízes, temos:

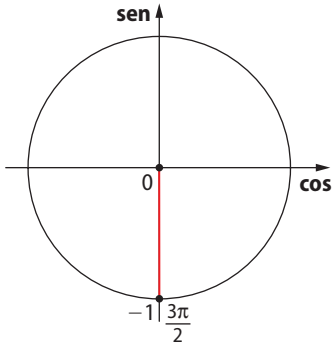
$2y^2 + y - 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{-1 \pm 3}{4}$

Então, $y' = \frac{1}{2}$ ou $y'' = -1$.

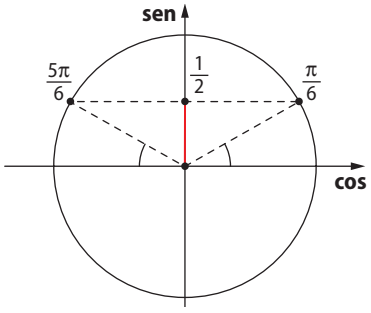
Como $y = \text{sen}\, x$, temos:

$\text{sen}\, x = -1$ ou $\text{sen}\, x = \frac{1}{2}$

- $\text{sen}\, x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2}$



- $\text{sen}\, x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Portanto, o conjunto solução da equação no intervalo $[0, 2\pi[$ é $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right\}$.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

24. Resolva as seguintes equações, sendo $0 \leqslant x < 2\pi$.

a) $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$

b) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ **b)** $S = \left\{\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$

c) $\operatorname{sen} x = -1$ $S = \left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$

d) $\cos x = -1$ $S = \{\pi\}$

25. Determine o conjunto solução das seguintes equações:

a) $2\operatorname{sen} x + 1 = 0$

b) $2\operatorname{sen} 2x = 1$

25. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

25. b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{12} + k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

26. Determine o conjunto solução da seguinte equação: $\operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

26. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

27. (Univiçosa-MG) Ao resolver a equação $\operatorname{sen} 4x = 1$, obtém-se como resultado alternativa **d**

a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pi + k\pi\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + \frac{k}{3}\pi\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{8} + \frac{k}{2}\pi\right\}$

28. Um gerador de corrente elétrica produz uma corrente dada pela equação $I(t) = 40\operatorname{sen}(120\pi t)$, em que t é o tempo em segundo, e I é a corrente em ampere. Determine o mínimo valor positivo de t para que $I = 20$ amperes. Dê a resposta com quatro casas decimais.

28. aproximadamente 0,0014 s

29. Determine o conjunto solução das equações:

a) $2\operatorname{sen}^2 x - 6\operatorname{sen} x - 8 = 0$

b) $\cos^2 x + \cos x = 0$

29. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

30. Calcule o conjunto solução da equação $2\operatorname{sen}^4 x - 3\operatorname{sen}^2 x + 1 = 0$.

30. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

31. Resolva a equação $4^{-\operatorname{sen} x} = \frac{1}{2}$.

31. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

32. Determine o conjunto solução da equação $|\cos(\pi - x)| = \frac{1}{2}$.

32. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

33. (UECE) O número de soluções, no intervalo $[0, 2\pi]$, da equação $2\cos^2 x + 3\operatorname{sen} x - 3 = 0$ é igual a alternativa **d**

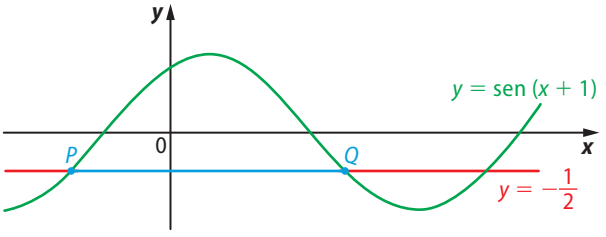
a) 2.

b) 0.

c) 1.

d) 3.

34. (FGV-SP) Observe a figura com a representação gráfica de uma função constante e de uma função trigonométrica, ambas definidas para todos os números reais.



EDITORIA DE ARTE

Sendo P e Q os pontos de intersecção dos gráficos das funções indicadas na figura, a medida de $\overline{PQ}$, em unidades de comprimento do plano cartesiano, é igual a alternativa **b**

a) 2

b) $\frac{2\pi}{3}$

c) $2\sqrt{3}$

d) 4

e) $\frac{4\pi}{3}$

35. (Enem/MEC) Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), produtos sazonais são aqueles que apresentam ciclos bem definidos de produção, consumo e preço. Resumidamente, existem épocas do ano em que a sua disponibilidade nos mercados varejistas ora é escassa, com preços elevados, ora é abundante, com preços mais baixos, o que ocorre no mês de produção máxima da safra. A partir de uma série histórica, observou-se que o preço P, em reais, do kilograma de um certo produto sazonal pode ser descrito pela função $P(x) = 8 + 5\cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right)$, onde x representa o mês do ano, sendo $x = 1$ associado ao mês de janeiro, $x = 2$ ao mês de fevereiro, e assim sucessivamente, até $x = 12$ associado ao mês de dezembro.

Disponível em: www.ibge.gov.br.
Acesso em: 2 ago. 2012 (adaptado).

Na safra, o mês de produção máxima desse produto é alternativa **d**

a) janeiro.

b) abril.

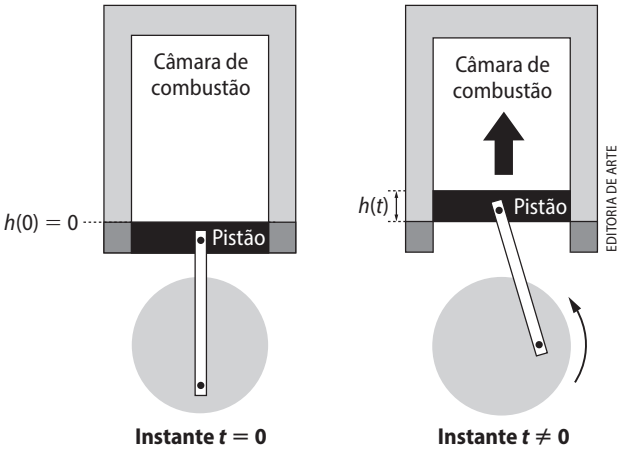
c) junho.

d) julho.

e) outubro.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

36. (Enem/MEC) Um grupo de engenheiros está projetando um motor cujo esquema de deslocamento vertical do pistão dentro da câmara de combustão está representado na figura.



A função $h(t) = 4 + 4 \operatorname{sen}\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$ definida para $t \geqslant 0$ descreve como varia a altura h, medida em centimetro, da parte superior do pistão dentro da câmara de combustão, em função do tempo t, medido em segundo. Nas figuras estão indicadas as alturas do pistão em dois instantes distintos.

O valor do parâmetro β, que é dado por um número inteiro positivo, está relacionado com a velocidade de deslocamento do pistão. Para que o motor tenha uma boa potência, é necessário e suficiente que, em menos de 4 segundos após o início do funcionamento (instante $t = 0$), a altura da base do pistão alcance por três vezes o valor de 6 cm. Para os cálculos, utilize 3 como aproximação para π.

O menor valor inteiro a ser atribuído ao parâmetro β, de forma que o motor a ser construído tenha boa potência, é alternativa **d**

a) 1. **b)** 2. **c)** 4. **d)** 5. **e)** 8.

FÓRUM

Modelos matemáticos

GORODENKOFF/SHUTTERSTOCK.COM

■ Os pesquisadores científicos são profissionais que dedicam suas vidas à pesquisa. Essa profissão pode ser exercida em empresas ou universidades.

Ao longo de sua vida estudantil, você explorou figuras geométricas, expressões matemáticas, gráficos e vários outros conhecimentos matemáticos construídos e desenvolvidos pelo ser humano ao longo da história. Todos esses conhecimentos nos servem (direta ou indiretamente) para compreendermos o ser humano, a natureza e a sociedade.

Quando utilizamos esses conhecimentos para representar uma situação real, dizemos que estamos trabalhando com **modelos matemáticos**. Essas situações podem ser tanto do nosso cotidiano como podem ser objetos de estudo de pesquisadores de diversas áreas, como as Ciências da Natureza e as Ciências Humanas e Sociais.

Agora, faça o que se pede a seguir. Ver as **Orientações para o professor**.

- Promova com seus colegas um fórum para debater a importância de compreender o mundo onde vivemos, as pesquisas acadêmicas e a maneira como utilizamos os modelos matemáticos em nosso cotidiano.

Movimento das marés

O movimento dos mares e sua relação com os ciclos lunares sempre despertou a curiosidade das pessoas. O movimento cíclico das marés se relaciona com o comportamento de funções trigonométricas. Leia o texto a seguir sobre esse assunto.

Marés

Há milhares de anos os homens sabem que a Lua tem alguma relação com as marés. Antes do ano 100 a.C., o naturalista romano Plínio escreveu sobre a influência da Lua nas marés. Mas as leis físicas desse fenômeno não foram estudadas até que o cientista inglês Isaac Newton descobriu a lei da gravitação no século XVII.

As marés são movimentos de fluxo e refluxo das águas dos mares provocados pela atração que a Lua e, secundariamente, o Sol exercem sobre os oceanos. Qualquer massa de água, grande ou pequena, está sujeita às forças causadoras de maré provindas do Sol e da Lua. Porém é somente no ponto em que se encontram os oceanos e os continentes que as marés têm grandeza suficiente para serem percebidas. As águas dos rios e lagos apresentam subida e descida tão insignificante que a diferença é inteiramente disfarçada por mudanças de nível devidas ao vento e ao estado do tempo.

[...]

Uma maré é bem semelhante a outra. Do seu nível mais baixo, a água sobe gradualmente por cerca de 6 horas até atingir a maré alta ou preamar. Daí então principia a baixar, continuando por cerca de 6 horas até alcançar a maré baixa ou baixa-mar. O ciclo então começa novamente. A diferença entre a maré alta e a baixa é chamada amplitude da maré. Enquanto a água sobe e desce, move-se em direção da costa e se afasta dela, alternadamente. Esse movimento da água é chamado fluxo da maré. Quando a água se move em direção à costa, é o fluxo enchente. Quando se desloca para alto-mar, é o fluxo vazante.

▪ Vista de *drone* do Forte dos Reis Magos na maré baixa na foz do rio Potengi, Natal (RN). Fotografia de 2024.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

A amplitude da maré difere dia após dia conforme a posição do Sol e da Lua. Quando ambos se colocam numa mesma linha em relação à Terra, como acontece na Lua Cheia e Nova, a maré fica mais alta do que o normal e é chamada de maré de Sizígia, ou maré de águas-vivas. Quando o Sol e a Lua formam com a Terra um ângulo reto, como quando a Lua está em quarto crescente ou quarto minguante, a maré é mais baixa que o normal, sendo chamada maré de Quadratura, ou maré de Águas-Mortas.

A própria formação da costa marítima produz também uma grande diferença na amplitude da maré. Nos estuários e baías com o formato de funil, a amplitude pode ser muito alta. A forma, tamanho e profundidade dos mares e oceanos provocam diferenças no modo de agir da maré.

DANDOLINI, Marlene. **Marés**. Florianópolis: Planetário da UFSC, maio 2000. Disponível em: http://planetario.ufsc.br/mares/. Acesso em: 6 out. 2024.

Agora, faça o que se pede nas atividades a seguir.

Ver as **Orientações para o professor**.

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. Os movimentos das marés têm relação com quais astros celestes?

2. Nos portos, há um serviço de auxílio aos capitães de embarcações realizado pelo prático. Esse profissional possui habilidades de condução marítima e conhecimento profundo das condições marítimas da região. Pesquise e explique como o conhecimento do movimento das marés auxilia esse profissional a atracar navios no cais do porto.

3. Em pequenos grupos, façam uma pesquisa sobre a influência das marés para o turismo brasileiro. Em seguida, façam uma apresentação de *slides* sobre o tema e apresentem-na para a turma.

4. Suponha que, em certa região, a maré baixa corresponda a apenas 1 m e a maré alta chegue a 3 m. Para efeito de comparação, considere π radianos como o período de 12 horas, em que o valor 0 do domínio corresponde às 6h da manhã, sendo esse um momento de maré alta. Represente graficamente o comportamento da maré, segundo os dados informados, e escreva a expressão matemática representada por esse gráfico.

Para acessar

- MARTEN, Michael. **Sea change**: south-west. Reino Unido: Michael Marten, 2003-2012. Disponível em: https://www.michaelmarten.com/sea-change/south-west. Acesso em: 6 out. 2024.

  Esse *site* apresenta a comparação, por meio de fotografias, de locais em maré baixa e maré alta.

DELFIM MARTINS/PULSAR IMAGENS

Vista de *drone* do Forte dos Reis Magos na maré alta na foz do rio Potengi, Natal (RN). Fotografia de 2024.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Análise dos gráficos das funções seno e cosseno

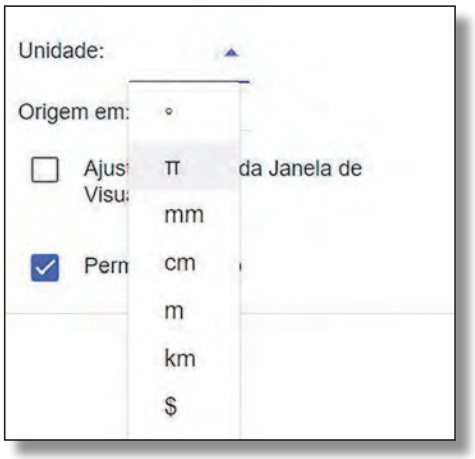
Os gráficos que representam as funções trigonométricas do tipo $f(x) = a + b \cdot \text{sen}\,(cx + d)$ ou $g(x) = a + b \cdot \cos\,(cx + d)$ podem ser modificados de acordo com a alteração dos valores dos parâmetros a, b, c e d. Com o uso do **GeoGebra**, vamos analisar essas variações no gráfico de $f(x) = a + b \cdot \text{sen}\,(cx + d)$.

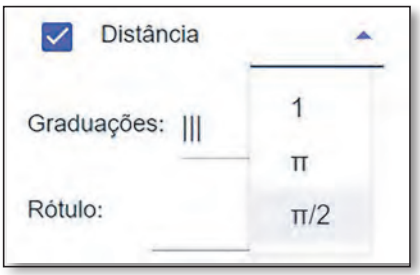
Siga os passos indicados.

I. Primeiro, vamos mudar a unidade do eixo horizontal para π.

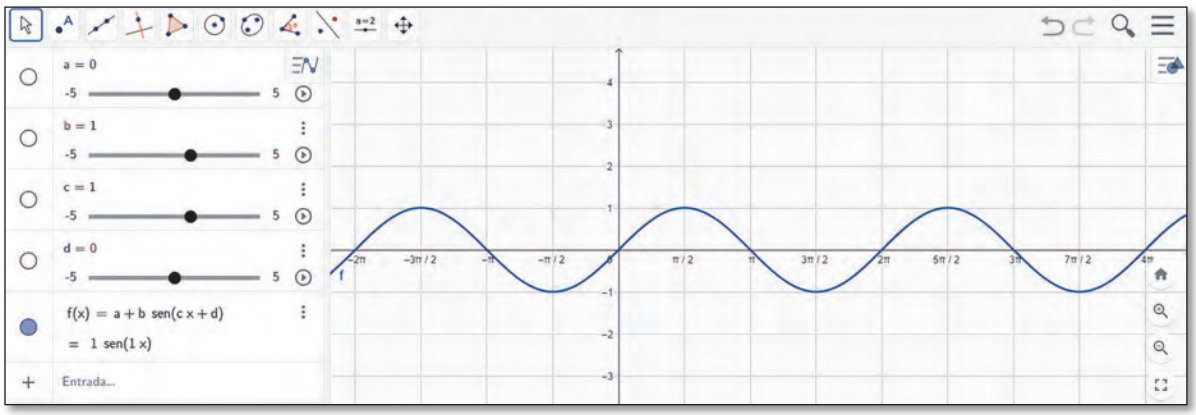
No canto superior direito da janela de visualização, clique no botão e, em seguida, clique em **Configurações**, . Depois, clique na aba **Eixo X**. Em **Unidade**, selecione π.

Depois, marque a caixa **Distância** e clique em $\frac{\pi}{2}$.





II. No campo de entrada, digite "$f(x)=a+b*\text{sen}(cx+d)$". Ao fazer isso, um gráfico surgirá na janela de visualização e o programa criará automaticamente controles deslizantes para a, b, c e d. Ao ajustar os controles deslizantes para $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$ e $d = 0$, teremos o gráfico da função seno na janela de visualização. Observe a figura.

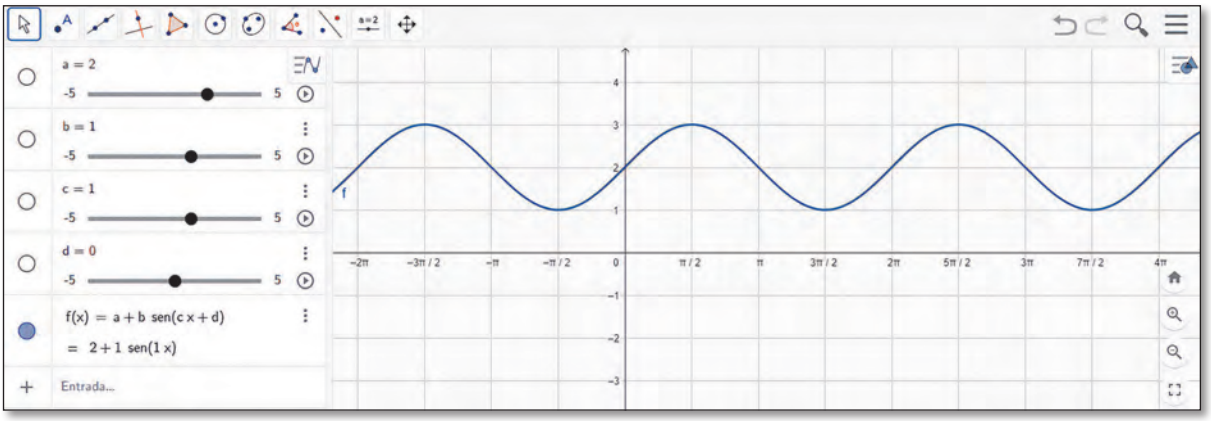


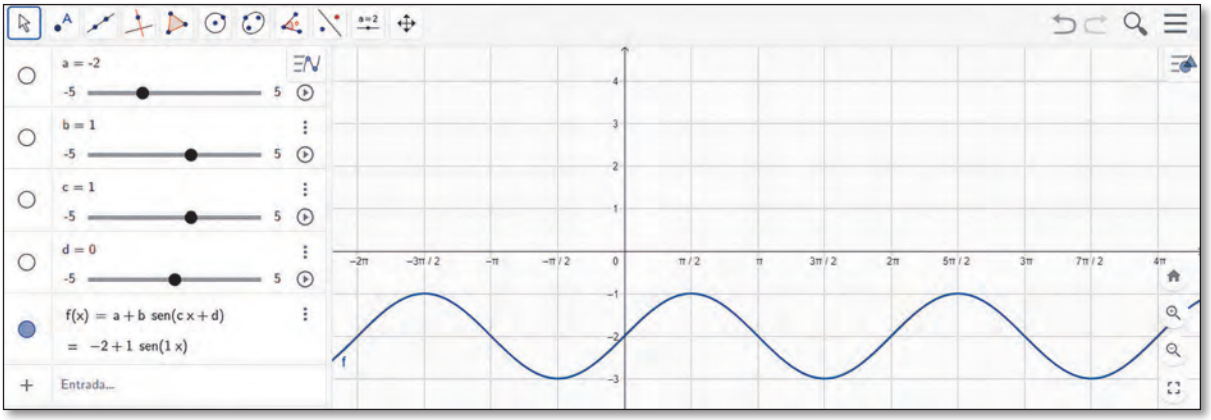
IMAGENS: REPRODUÇÃO/GEOGEBRA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Observe, agora, o que acontece com o gráfico da função seno ao deslizarmos o controle *a* para outros valores.





IMAGENS: REPRODUÇÃO/GEOGEBRA

Agora, manipule os controles deslizantes para observar o que acontece com o gráfico e faça o que se pede nas atividades a seguir.

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. Descreva o que acontece com o gráfico da função dada por $f(x) = a + b \cdot \text{sen}\,(cx + d)$ ao:

a) se manterem os parâmetros *b*, *c* e *d* fixos em $b = 1$, $c = 1$ e $d = 0$ e deslizar o controle do parâmetro *a* para valores positivos e negativos. Para valores positivos, o gráfico se desloca verticalmente *a* unidades para cima e, para valores negativos, o gráfico se desloca verticalmente *a* unidades para baixo.

b) se manterem os parâmetros *a*, *c* e *d* fixos em $a = 0$, $c = 1$ e $d = 0$ e deslizar o controle do parâmetro *b* para valores positivos. Os valores de máximo e mínimo da função se alteram. Porém, o período permanece o mesmo.

c) se manterem os parâmetros *a*, *b* e *d* fixos em $a = 0$, $b = 1$ e $d = 0$ e deslizar o controle do parâmetro *c* para valores positivos. Ocorrem alterações no período da função.

d) se manterem os parâmetros *a*, *b* e *c* fixos em $a = 0$, $b = 1$ e $c = 1$ e deslizar o controle do parâmetro *d* para valores positivos e negativos. Para valores positivos, o gráfico se desloca horizontalmente para a esquerda e, para valores negativos, o gráfico se desloca horizontalmente para a direita.

2. Em uma nova janela do GeoGebra, construa o gráfico da função dada por $g(x) = a + b \cdot \cos\,(cx + d)$ e repita os itens da atividade **1** para essa função. Verifique se as alterações nos parâmetros *a*, *b*, *c* e *d* interferem da mesma maneira no gráfico da função cosseno.
Espera-se que os estudantes concluam que os parâmetros interferem da mesma maneira no gráfico da função.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

ATIVIDADES COMPLEMENTARES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. (UEA-AM) Considere a função $f(x) = 4 \cdot \text{sen}(2x)$. O valor de $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ é alternativa **c**

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **c)** $2\sqrt{3}$ **e)** $\sqrt{3}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **d)** $2\sqrt{2}$

2. (UECE) Considere as funções reais de variável real definidas por $f(x) = \text{sen}\left(1 + \frac{x}{2}\right)\pi$ e $g(x) = \text{sen}\left(1 - \frac{x}{2}\right)\pi$. Se $K = f(9) \cdot g(9)$, então, pode-se afirmar corretamente que o valor de K é igual a alternativa **b**

a) 1. **b)** -1. **c)** 0. **d)** -2.

3. (Uneb-BA) Admitindo-se que o peso de determinada pessoa, ao longo de um ano, possa ser modelado pela função $P(t) = 65 - 5\cos\left(\left(\frac{t+3}{6}\right)\pi\right)$, em que $t = 1, \ldots, 12$ corresponde aos meses de janeiro a dezembro e, considerando $\sqrt{3} = 1{,}7$, pode-se estimar que, de maio até agosto, o peso dessa pessoa alternativa **03**

01) diminuiu 4,50 kg.

02) aumentou 4,50 kg.

03) diminuiu 6,75 kg.

04) aumentou 6,75 kg.

05) diminuiu 7,56 kg.

4. (UEPA) A altura das ondas em determinado trecho de um oceano varia de acordo com a expressão $H(t) = 5 + 3 \cdot \text{sen}(2t)$, onde t (em segundo) é o tempo e H (em metro), a altura dessas ondas. A altura máxima (crista da onda) atingida por essas ondas é de: alternativa **e**

a) 9 m **c)** 5 m **e)** 8 m

b) 3 m **d)** 6 m

5. (UEG-GO) Seja $f(x)$ uma função definida para todos os números reais. Dada a expressão $f(x)\cos\left(\frac{x}{2} + \pi\right) + 3 = f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)(x - \pi\text{sen}(x))$, o valor de $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ é alternativa **e**

a) $\pi^2 - 1$ **d)** $\sqrt{2}\pi + 3$

b) 0 **e)** $\frac{3\sqrt{2}(\pi + 2)}{2}$

c) $\pi - \frac{\sqrt{2}}{2}$

6. (UEG-GO) Duas ondas sonoras são descritas pelas funções $y = 1 + \text{sen}\, x$ e $y = 1 - \cos x$. Considerando $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, os gráficos dessas funções se interceptam em: alternativa **e**

a) $x = \frac{\pi}{4}$ e $x = \frac{3\pi}{4}$ **d)** $x = \frac{\pi}{4}$ e $x = \frac{5\pi}{4}$

b) $x = \frac{3\pi}{4}$ e $x = \frac{5\pi}{4}$ **e)** $x = \frac{3\pi}{4}$ e $x = \frac{7\pi}{4}$

c) $x = \frac{5\pi}{4}$ e $x = \frac{7\pi}{4}$

7. (UECE) No plano, com o sistema de coordenadas cartesianas usual, a interseção dos gráficos das funções reais de variável real $f(x) = \text{sen}\,(x)$ e $g(x) = \cos(x)$ são, para cada número inteiro k, os pontos $P(x_k, y_k)$. Então, os possíveis valores para y_k são alternativa **a**

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **c)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ e $-\frac{\sqrt{2}}{3}$. **d)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

8. (UFRGS-RS) Um ponto A, que se movimenta sobre uma circunferência, tem sua posição $p(t)$, considerada na vertical, no instante t, descrita pela relação $p(t) = 100 - 20\text{sen}\,(t)$, para $t \geqslant 0$. Nesse caso, a medida do diâmetro dessa circunferência é: alternativa **b**

a) 30 **c)** 50 **e)** 120

b) 40 **d)** 80

9. (UFRGS-RS) Considere a função real de variável real $f(x) = 3 - 5\text{sen}\,(2x + 4)$. Os valores de máximo, mínimo e o período de $f(x)$ são, respectivamente, alternativa **b**

a) $-2, 8, \pi$ **c)** $\pi, -2, 8$ **e)** $8, \pi, -2$

b) $8, -2, \pi$ **d)** $\pi, 8, -2$

10. (UECE) Se M e m são respectivamente os valores máximo e mínimo que a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3\,\text{sen}^2\, x + 7\cos^2 x$ pode assumir, então o produto $M \cdot m$ é igual a

a) 24. **b)** 15. **c)** 21. **d)** 18.

alternativa **c**

11. (PUC-SP) A imagem da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2 - 3\cos x$ é o intervalo: alternativa **e**

a) $[-1; 2]$ **d)** $[2; 3]$

b) $[-1; 0]$ **e)** $[-1; 5]$

c) $[3; 5]$

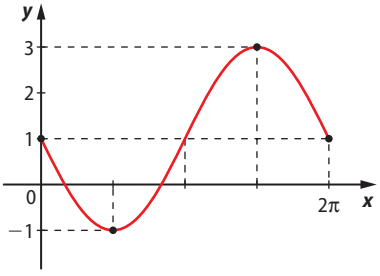
MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

12. (UFES) O período e a imagem da função $f(x) = 5 - 3\cos\left(\frac{x-2}{\pi}\right)$ são, respectivamente:

a) 2π e $[-1, 1]$
b) 2π e $[2, 8]$
c) $2\pi^2$ e $[2, 8]$
d) 2π e $[-3, 3]$
e) $2\pi^2$ e $[-3, 3]$

alternativa **c**

13. (UFRGS-RS) Se $f(x) = a + b \cdot \text{sen } x$ tem como gráfico alternativa **d**



Então:

a) $a = -2$ e $b = 1$
b) $a = -1$ e $b = 2$
c) $a = 1$ e $b = -1$
d) $a = 1$ e $b = -2$

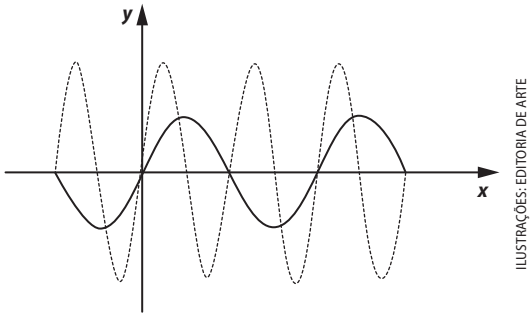
14. (Enem/MEC) Um cientista, em seus estudos para modelar a pressão arterial de uma pessoa, utiliza uma função $P(t) = A + B\cos(kt)$, em que A, B e k são constantes reais positivas e t representa a variável tempo, medida em segundo. Considere que um batimento cardíaco representa o intervalo de tempo entre duas sucessivas pressões máximas.
Ao analisar um caso específico, o cientista obteve os dados:

Pressão mínima	78
Pressão máxima	120
Número de batimentos por minuto	90

A função $P(t)$ obtida, por este cientista, ao analisar o caso específico foi: alternativa **a**

a) $P(t) = 99 + 21\cos(3\pi t)$
b) $P(t) = 78 + 42\cos(3\pi t)$
c) $P(t) = 99 + 21\cos(2\pi t)$
d) $P(t) = 99 + 21\cos(t)$
e) $P(t) = 78 + 42\cos(t)$

15. (Fuvest-SP)

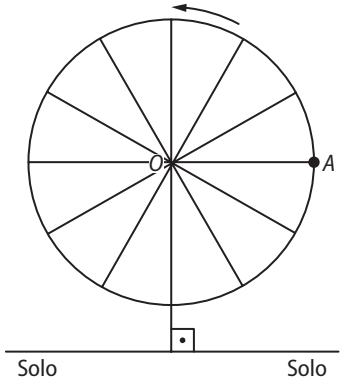


ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Admitindo que a linha pontilhada represente o gráfico da função $f(x) = \text{sen}(x)$ e que a linha contínua represente o gráfico da função $g(x) = \alpha\,\text{sen}(\beta x)$, segue que: alternativa **a**

a) $0 < \alpha < 1$ e $0 < \beta < 1$.
b) $\alpha > 1$ e $0 < \beta < 1$.
c) $\alpha = 1$ e $\beta > 1$.
d) $0 < \alpha < 1$ e $\beta > 1$.
e) $0 < \alpha < 1$ e $\beta = 1$.

16. (Enem/MEC) Em 2014 foi inaugurada a maior roda-gigante do mundo, a *High Roller*, situada em Las Vegas. A figura representa um esboço dessa roda-gigante, no qual o ponto A representa uma de suas cadeiras:

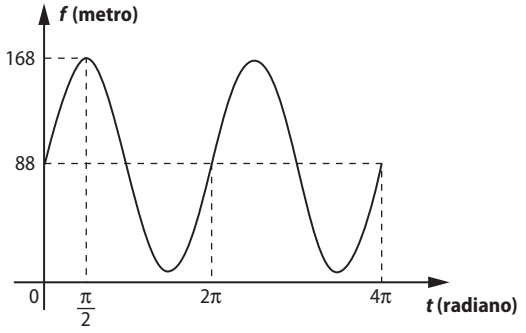


Disponível em: http://en.wikipedia.org.
Acesso em: 22 abr. 2014 (adaptado)

A partir da posição indicada, em que o segmento OA se encontra paralelo ao plano do solo, rotaciona-se a *High Roller* no sentido anti-horário, em torno do ponto O. Sejam t o ângulo determinado pelo segmento OA em relação à sua posição inicial, e f a função que descreve a altura do ponto A, em relação ao solo, em função de t.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Após duas voltas completas, f tem o seguinte gráfico: alternativa **a**



A expressão da função altura é dada por:

a) $f(t) = 80\text{sen}\,(t) + 88$

b) $f(t) = 80\cos\,(t) + 88$

c) $f(t) = 88\cos\,(t) + 168$

d) $f(t) = 168\text{sen}\,(t) + 88\cos\,(t)$

e) $f(t) = 88\text{sen}\,(t) + 168\cos\,(t)$

Saiba que...

Em 2021, foi inaugurada a roda-gigante Ain Dubai, em Dubai, nos Emirados Árabes, com 250 m de altura, tirando o posto da High Roller de maior roda-gigante do mundo.

17. (UFPE) Admita que a pressão arterial $P(t)$ de uma pessoa no instante t, medido em segundo, seja dada por: $P(t) = 96 + 18\cos(2\pi t)$, $t \geqslant 0$. Considerando esses dados, analise a veracidade das seguintes afirmações: I: V; II: V; III: V; IV: F; V: F

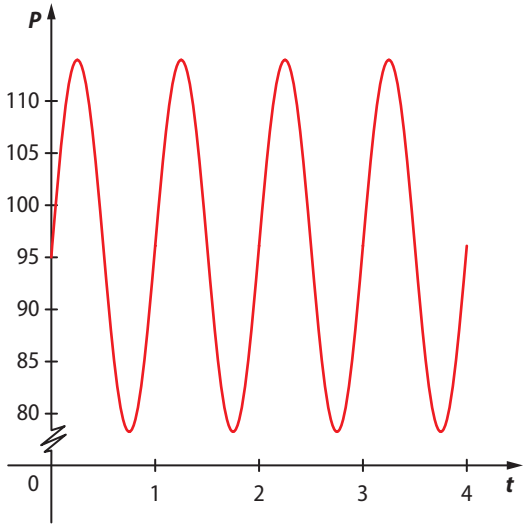
I. O valor máximo da pressão arterial da pessoa é 114.

II. O valor mínimo da pressão arterial da pessoa é 78.

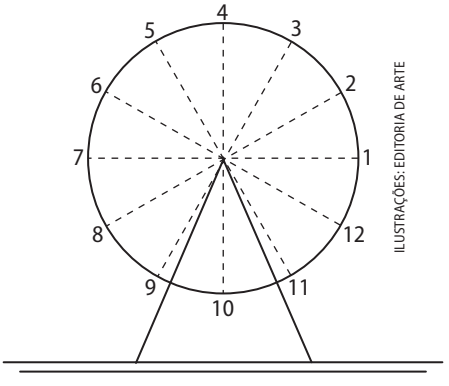
III. A pressão arterial da pessoa se repete a cada segundo, ou seja, $P(t + 1) = P(t)$, para todo $t \geqslant 0$.

IV. Quando $t = \frac{1}{3}$ de segundo, temos $P\left(\frac{1}{3}\right) = 105$.

V. O gráfico de $P(t)$ para $0 \leqslant t \leqslant 4$ é:



18. (UEFS-BA) Em um parque de diversões, uma roda-gigante de raio $r = 10$ m, tendo 12 cadeiras igualmente espaçadas ao longo de seu perímetro, faz uma volta completa em 30 segundos. Além disso, o ponto mais baixo atingido ao longo do percurso circular está a 0,5 m do solo. Certo dia, depois de todos os assentos estarem ocupados, o assento 1 se encontrava na posição indicada na figura, quando a roda começa a girar no sentido anti-horário.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Sendo a distância desse assento ao solo, t segundos após a roda ter começado a girar, dada pela expressão $D(t) = M + N\,\text{sen}\,(\alpha t)$, $\alpha > 0$, é correto afirmar que $M - N$ é igual a

a) $\cos(5\alpha)$

b) $\text{sen}\,(5\alpha)$

c) $\cos(10\alpha)$

d) $\text{sen}\,(10\alpha)$

e) $\cos(15\alpha)$

alternativa **a**

19. (UECE) O valor da soma $\text{sen}(x) + \text{sen}(x + \pi) + \text{sen}(x + 2\pi) + \text{sen}(x + 3\pi) + \ldots + \text{sen}(x + n\pi)$, onde n é um número natural par e menor do que 100 é: alternativa **a**

a) sen (x) **b)** cos (x) **c)** 0 **d)** 1

20. (UEG-GO) Resolvendo-se a equação $\text{sen } 2x = 1$, encontramos a 1ª determinação positiva de x igual a alternativa **c**

a) $\frac{\pi}{2}$ **b)** $\frac{\pi}{3}$ **c)** $\frac{\pi}{4}$ **d)** $\frac{\pi}{6}$ **e)** $\frac{\pi}{12}$

21. (IFPR) Em uma determinada região litorânea, a maré oscila segundo a função $h(t) = 3 - 2\,\text{sen}\left(\frac{\pi t}{12}\right)$, sendo h a altura em metros, que a maré atinge no tempo t em horas, medido a partir de 6 h da manhã. Uma embarcação, que se encontra encalhada às 11 h da manhã, precisa de uma profundidade mínima de 2 metros para navegar. Assinale a alternativa que apresenta quantas horas os tripulantes dessa embarcação ainda terão que esperar para prosseguirem viagem. alternativa **b**

a) 4 h. **b)** 5 h. **c)** 6 h. **d)** 7 h.

22. (Enem/MEC) Um satélite de telecomunicações, t minutos após ter atingido sua órbita, está a r kilometros de distância do centro da Terra. Quando r assume seus valores máximo e mínimo, diz-se que o satélite atingiu o apogeu e o perigeu, respectivamente. Suponha que, para esse satélite, o valor de r em função de t seja dado por $r(t) = \frac{5\,865}{1 + 0{,}15 \times \cos(0{,}06t)}$

Um cientista monitora o movimento desse satélite para controlar o seu afastamento do centro da Terra. Para isso, ele precisa calcular a soma dos valores de r, no apogeu e no perigeu, representada por S.

O cientista deveria concluir que, periodicamente, S atinge o valor de alternativa **b**

a) 12 765 km.

b) 12 000 km.

c) 11 730 km.

d) 10 965 km.

e) 5 865 km.

PARA REFLETIR

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Nas páginas de abertura, foram apresentadas algumas informações sobre a Lua e sobre como o seu ciclo é um exemplo de fenômeno periódico. Ao longo do Capítulo, estudamos que fenômenos como esse podem ser modelados por funções periódicas, como a função seno e a função cosseno. Você conseguiu reconhecer essa relação? Se sim, qual é a importância dela? Se não, retome o texto de abertura do Capítulo e as perguntas iniciais. Se possível, pesquise também em livros e *sites* a modelagem de fenômenos periódicos.

Estudamos também o que são funções periódicas (mais especificamente as funções trigonométricas seno e cosseno) e estudamos seus gráficos e suas aplicações na modelagem de fenômenos oscilatórios.

Além disso, estudamos as equações trigonométricas.

Vamos refletir a respeito das aprendizagens do Capítulo **6**:

- Você já conhecia algum dos conteúdos apresentados ao longo deste Capítulo? Qual(is)? Respostas pessoais.
- Explique o que significa dizer que uma função é periódica. Resposta esperada: É uma função cujo valor se repete após determinado intervalo.
- Quais exemplos de situações ou fenômenos podem ser modelados utilizando a função seno e a função cosseno? Algumas respostas possíveis: O movimento pendular, o movimento lunar e outros fenômenos oscilatórios.
- Qual é o valor máximo e o mínimo da função $f(x) = \text{sen } x$? E da função $g(x) = \cos x$? 1 e -1, tanto para $f(x)$ quanto para $g(x)$

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

CAPÍTULO 7

ÁREAS

No Brasil, assim como em outros países do mundo, o acesso à moradia ainda é um desafio para muitas pessoas. Inúmeras famílias não têm condições dignas de habitação e, muitas vezes, com poucos recursos disponíveis, acabam vivendo em locais inadequados. As organizações não governamentais (ONGs) são entidades sem fins lucrativos que, entre outros propósitos, auxiliam na captação de verbas e na distribuição do orçamento para auxiliar as camadas menos favorecidas da população.

Algumas dessas ONGs promovem campanhas específicas voltadas para esse fim e realizam projetos para a construção de moradias populares e para a reconstrução de lares de pessoas que sofreram com alguma catástrofe natural, como enchentes, terremotos, furacões e tsunâmis.

Muitos conjuntos habitacionais concebidos por meio de programas sociais, governamentais ou não, seguem uma série de especificações que ajudam a padronizar as construções. Entre essas especificações, encontram-se, por exemplo, a área útil da residência (espaço interno sem considerar a área das paredes) e as dimensões de tanques, pias, corredores e cômodos. Essas medidas são muito importantes para garantir conforto e acessibilidade aos moradores.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Agora, reúna-se a um colega, e façam o que se pede em cada questão.

Ver as **Orientações para o professor**.

1. Vocês já ouviram falar sobre trabalhos desenvolvidos por ONGs? Pesquisem se, na região onde vocês moram, há alguma ONG que se dedique à construção ou à reforma de moradias populares.
2. Vocês acham relevante que haja especificações para a construção de moradias de programas sociais? O que poderia acontecer, na opinião de vocês, se as dimensões das moradias pudessem ser livres?
3. Vocês já fizeram algum trabalho voluntário ou participaram de uma organização que ajuda outras pessoas? Se estiveram ou estão envolvidos nesse tipo de ação, compartilhem suas experiências com os colegas. Caso não tenham participado, vocês têm vontade de fazer parte de projetos de voluntariado? Debatam a importância desse tipo de trabalho para a sociedade.
4. Como vocês fariam para calcular a área útil de uma sala quadrada? E a de um quarto retangular?

ARQUITETURA NA PERIFERIA/INSTITUTO DE ASSESSORIA A MULHERES E INOVAÇÃO – IAMÍ

- Projeto Arquitetura na Periferia, sem fins lucrativos, executado pelo Instituto de Assessoria a Mulheres e Inovação (IAMÍ), Belo Horizonte (MG). Fotografia de 2024.

Introdução

Na abertura deste Capítulo, compreendemos como algumas ONGs auxiliam na construção de moradias para famílias sem recursos. Nesse processo de construção ou na reforma de um imóvel, muitas atividades envolvem medições e cálculos de áreas e perímetros. Neste Capítulo, estudaremos o cálculo da área de algumas figuras planas.

As áreas que precisamos determinar no dia a dia nem sempre são regiões poligonais, por exemplo, a piscina cuja vista aérea é mostrada na fotografia desta página ocupa uma região não poligonal no *deck*.

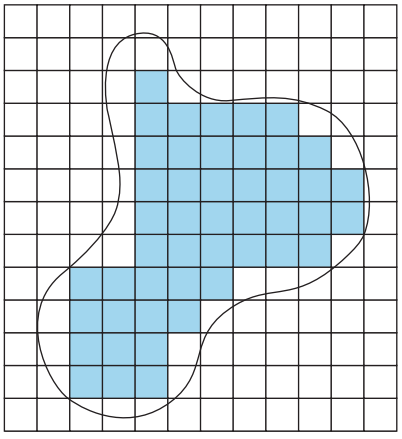
Para calcular a área ocupada pela superfície dessa piscina, pode-se considerar o contorno dela em uma malha quadriculada e tomar a área de um quadradinho da malha como unidade de área.

Inicialmente, contamos na malha a quantidade de quadradinhos que estão inteiramente contidos na região cuja área pretendemos determinar e dizemos que essa é a **área por falta** (S_{falta}) dessa região. Na figura com legenda área por falta, temos $S_{falta} = 47$ unidades de área (u.a.). Note que há espaços dentro do contorno cuja área é desprezada nessa contagem. Isso significa que a área real da figura é maior do que a área por falta.

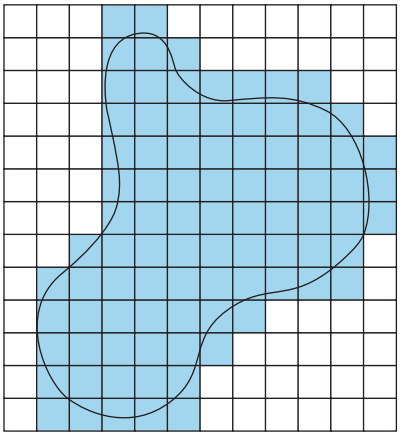
Em seguida, contamos na malha a quantidade de quadradinhos que estão inteiramente ou parcialmente contidos na região cuja área pretendemos determinar e dizemos que essa é a **área por excesso** ($S_{excesso}$) dessa região. Na figura com legenda área por excesso, temos $S_{excesso} = 88$ u.a. Note que há espaços fora do contorno cuja área é considerada nessa contagem. Isso significa que a medida da área real da figura é menor do que a medida da área por excesso.

STEFANO TAMMARO/SHUTTERSTOCK.COM

■ Vista aérea de piscina com formato irregular.



■ Área por falta.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

■ Área por excesso.

Para obter a área aproximada da superfície da piscina, podemos calcular a média aritmética entre a área por falta e a área por excesso. Assim, temos 67,5 u.a., pois:

$$S = \frac{S_{falta} + S_{excesso}}{2} \Rightarrow S = \frac{47 + 88}{2} = 67{,}5$$

Quanto menores forem as unidades de área (u.a.), correspondentes aos quadradinhos da malha nesse exemplo, mais precisas se tornam as áreas por falta e por excesso e melhor será a aproximação, uma vez que a área interna desprezada na medida da área por falta e a área externa considerada na medida da área por excesso serão menores.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Área de polígonos

A grafiteira Gugie Cavalcanti (1993-) é uma artista brasileira que retrata, em suas obras, o questionamento sobre os processos de criação de afetos, como nos sensibilizamos na construção das relações e do estar no mundo. Observe o mural "Triunfo" que está localizado em Santa Catarina. Esse mural foi pintado por Gugie, no ano de 2024, e ocupa uma superfície retangular da parede lateral do Edifício Dona Izabel, no centro de Florianópolis. Com dimensões de 21 m de altura por 8 m de largura, a artista retrata aquilo que, na visão dela, é o triunfo verdadeiro: "ver a mãe de um amigo no centro da cidade com a neta no colo".

PABLO FREITAS/ACERVO PESSOAL

- CAVALCANTI, Gugie. **Triunfo**. 2024. Mural, tinta acrílica e *spray*, 21 m × 8 m. Mural feito com cadeirinha instalado na Rua Anita Garibaldi, Edifício Dona Izabel, Florianópolis (SC). Fotografia de 2024.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Para determinar a área do mural "Triunfo", precisamos retomar o cálculo da área de um retângulo, assunto que foi estudado no Ensino Fundamental. A seguir, acompanhe a maneira de se determinar a área desse e de outros polígonos.

Pense e responda

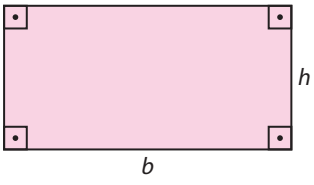
Como você determinaria a área do muro da fachada de sua escola?

Resposta pessoal.

Área do retângulo

A área S de um retângulo de lados de medidas b e h, com b e h reais positivos, é dada pelo produto da medida da base b pela medida da altura h.

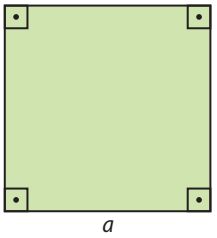
$$S = b \cdot h$$



Área do quadrado

Todo quadrado é um retângulo com lados de medidas iguais. Logo, a área S de um quadrado de lado de medida a é igual ao produto das medidas de dois de seus lados.

$$S = a \cdot a = a^2$$

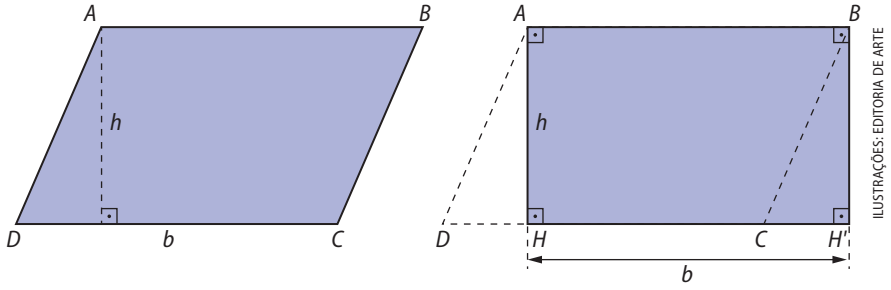


ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

» Área do paralelogramo

Vamos considerar um paralelogramo *ABCD* cuja base mede *b* e cuja altura mede *h*, conforme a figura.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Projetando ortogonalmente os vértices *A* e *B* desse paralelogramo sobre a reta que passa pelos pontos *D* e *C*, obtemos os pontos *H* e *H'*, respectivamente, determinando o retângulo *ABH'H*, como indicado na figura. Os triângulos *AHD* e *BH'C* são congruentes pelo caso LAA_O (Lado, Ângulo, Ângulo Oposto). Desse modo, eles têm a mesma área.

Logo, a área *S* do paralelogramo *ABCD* é igual à área do retângulo *ABH'H*:

$$S = b \cdot h$$

O resultado obtido independe do lado escolhido para ser a base do paralelogramo. Caso tivéssemos escolhido outro lado do paralelogramo como base e sua respectiva altura, o resultado seria o mesmo.

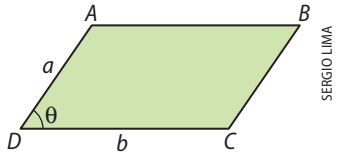
Pense e responda

Partindo da expressão $S = b \cdot h$ para o cálculo da área do paralelogramo, como chegar à expressão $S = b \cdot a \cdot \operatorname{sen} \theta$?

Ver as **Orientações para o professor**.

Fórmula trigonométrica para o paralelogramo

A área de um paralelogramo também pode ser calculada em função das medidas de dois de seus lados consecutivos e da medida do ângulo formado por eles.



SERGIO LIMA

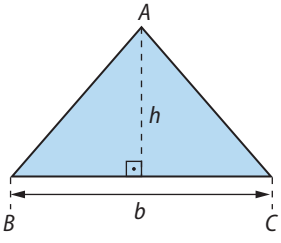
Considerando o paralelogramo *ABCD*, sua área *S* é dada por:

$$S = b \cdot a \cdot \operatorname{sen} \theta$$

» Área do triângulo

Vamos considerar um triângulo *ABC* cuja base $\overline{BC}$ mede *b*, e a altura relativa a essa base mede *h*.

A área *S* do triângulo *ABC* é igual à metade do produto da medida da base pela altura relativa a essa base.



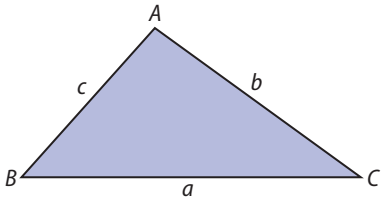
$$S = \frac{b \cdot h}{2}$$

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Fórmula de Heron

Outra maneira de calcular a área de um triângulo qualquer é a partir da medida de seus três lados.

Seja um triângulo *ABC*, em que *a*, *b* e *c* são as medidas dos lados, como mostra a figura.



Sendo $p = \frac{a + b + c}{2}$ o semiperímetro do triângulo *ABC*, a área *S* do triângulo é dada por:

$$S = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}$$

Essa expressão para o cálculo da área de um triângulo é conhecida como **fórmula de Heron**, ou **fórmula de Herão**.

Saiba que...

Heron de Alexandria foi um matemático grego que viveu entre, aproximadamente, 150 a.C. e a segunda metade do século I d.C. Ele ficou conhecido pela fórmula que calcula a área de um triângulo, a qual leva seu nome. O livro em que apresenta essa fórmula, **A métrica**, só foi encontrado em 1896.

Fonte dos dados: EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino Hugueros Domingues. 5. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011. p. 194, 205.

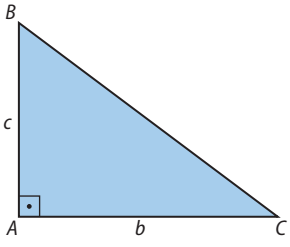
Para acessar

- OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS. Fórmula de Herão. *In*: OBMEP. **Clubes de Matemática da OBMEP**. Rio de Janeiro, 2019. Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/sala-de-estudo-formula-de-herao-2/. Acesso em: 4 set. 2024.

  Esse *link* apresenta várias demonstrações da fórmula de Heron.

Área do triângulo retângulo

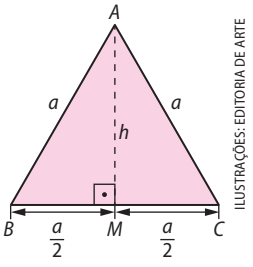
Em um triângulo retângulo *ABC*, o cateto $\overline{AB}$ é a altura relativa ao lado $\overline{AC}$, e o cateto $\overline{AC}$ é a altura relativa ao lado $\overline{AB}$. Assim, sendo $AB = c$, $AC = b$ e *S* a área do triângulo retângulo *ABC*, temos:



$$S = \frac{b \cdot c}{2}$$

Área do triângulo equilátero

Em um triângulo equilátero, todos os lados são congruentes, todos os ângulos internos são congruentes e toda altura é também bissetriz interna e mediana. Vamos considerar um triângulo equilátero *ABC*, como mostra a figura.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

A área *S* do triângulo equilátero *ABC* é dada por:

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Pense e responda

Partindo da expressão $S = \frac{b \cdot h}{2}$ para o cálculo da área do triângulo, como chegar à expressão $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ para o cálculo da área do triângulo equilátero?

DICA: Use o teorema de Pitágoras para determinar a medida da altura *h* em função do lado *a*.

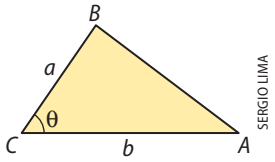
Ver as **Orientações para o professor**.

Fórmula trigonométrica para o triângulo

Assim como ocorre com os paralelogramos, a área de um triângulo também pode ser calculada em função das medidas de dois de seus lados consecutivos e da medida do ângulo formado por eles.

Considerando o triângulo *ABC*, sua área *S* é dada por:

$$S = \frac{b \cdot a \cdot \operatorname{sen} \theta}{2}$$

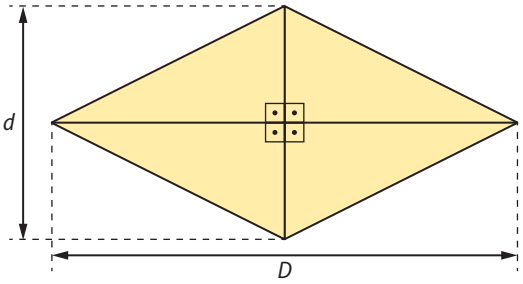


SERGIO LIMA

Conforme estudamos no Capítulo **5**, essa é uma maneira de calcular a área de um triângulo qualquer.

» Área do losango

Todo losango é um paralelogramo cujas medidas dos lados são iguais e as diagonais *d* e *D* são perpendiculares entre si.



Saiba que...

Em um losango:
- os ângulos opostos são congruentes;
- as diagonais são bissetrizes dos ângulos internos;
- as diagonais se intersectam no ponto médio.

Observe que o losango pode ser decomposto em quatro triângulos congruentes de mesma área. Assim, a área *S* de um losango é dada pelo produto de 4 pela área de um desses quatro triângulos:

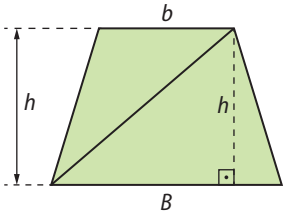
$$S = 4 \cdot S_{\triangle} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{D}{2} \cdot \frac{d}{2} = \frac{D \cdot d}{2}$$

Portanto, a área de um losango é igual à metade do produto das medidas das diagonais, ou seja:

$$S = \frac{D \cdot d}{2}$$

» Área do trapézio

Vamos considerar um trapézio cujas base maior, base menor e altura medem *B*, *b* e *h*, respectivamente. Traçando uma diagonal nesse trapézio, obtemos dois triângulos: um de base *B* e altura *h* e outro de base *b* e altura *h*, como mostra a figura.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

A área S do trapézio é a soma das áreas desses dois triângulos:

$$S = \frac{B \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2} = \frac{B \cdot h + b \cdot h}{2} = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

Portanto, a área de um trapézio é igual à metade do produto da soma das medidas das bases pela medida da altura, ou seja:

$$S = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

Para acessar

- MORAES, Mike. **Teorema de Pick**. [*S. l.*]: GeoGebra, c2024. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/QC4s3HB7. Acesso em: 4 set. 2024.

  Esse *link* apresenta o teorema de Pick, que permite calcular a área de um polígono qualquer em um geoplano.

FÓRUM

Você sabe o que é uma horta comunitária?

HANS VON MANTEUFFEL/PULSAR IMAGENS

Horta orgânica mantida pela ONG Pequenos Profetas, que educa crianças para cuidar do meio ambiente e distribui os alimentos produzidos entre as famílias das crianças, em Recife (PE). Fotografia de 2024.

Hortas comunitárias são áreas públicas nas quais são plantadas hortaliças, legumes e alguns frutos para consumo dos moradores locais. Nos espaços urbanos, existem muitas áreas públicas inutilizadas, que não têm uma destinação definida e acabam se tornando depósitos de entulhos e focos de contaminação, enquanto muitas famílias menos favorecidas não têm acesso a alimentos saudáveis. Por meio da implantação de hortas comunitárias, o solo urbano passa a ser aproveitado para a produção de alimentos livres de agrotóxicos, que servirão para alimentar essas famílias, minimizando os problemas de falta de alimentos e de carência nutricional e gerando renda com a venda do excedente. Muitas hortas comunitárias são construídas por estudantes em ambientes escolares ou próximas a escolas.

Fonte dos dados: OLIVEIRA, Giovanna B. de; CALVO, Paloma A. N.; CASTRO, Patrícia G. de. Horticultura urbana. **Boletim de inovação e sustentabilidade**, São Paulo, v. 1, p. 1-43, 2018. Disponível em: https://www.pucsp.br/sites/default/files/download/bisus2018-vol1-horticultura-urbana.pdf. Acesso em: 4 set. 2024.

Após ler o texto, reúna-se a um colega, e façam o que se pede a seguir.

- Inicialmente, respondam às questões: vocês conhecem alguma horta comunitária? Já participaram da organização e da manutenção desse tipo de projeto?
- Em seguida, iniciem uma roda de conversa com a turma e com o professor e debatam os benefícios de uma horta comunitária para a comunidade local e seus impactos sociais e na saúde. Respostas pessoais.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

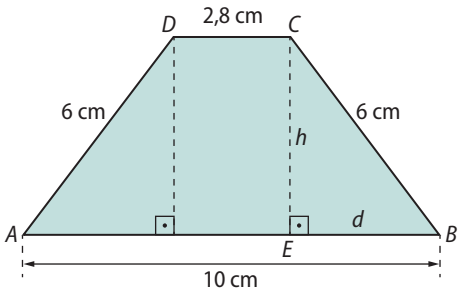
MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

ATIVIDADES RESOLVIDAS

1. As bases de um trapézio medem 10 cm e 2,8 cm. Se a medida de cada um dos outros dois lados é 6 cm, qual é a área desse trapézio?

Resolução

Como os lados não paralelos têm medidas iguais, o trapézio é isósceles.



Calculando a medida d no triângulo CEB, temos:

$$d = \frac{10 - 2{,}8}{2} = \frac{7{,}2}{2} = 3{,}6$$

Logo, $d = 3{,}6$ cm.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo CEB, temos:

$h^2 + 3{,}6^2 = 6^2 \Rightarrow h^2 = 23{,}04$

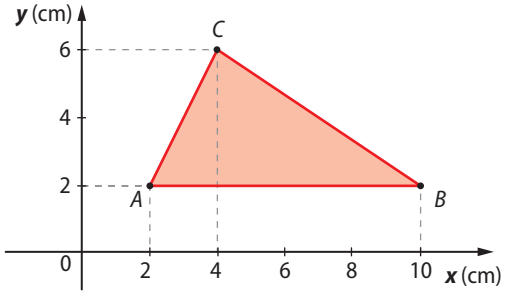
Logo, $h = 4{,}8$ cm.

Cálculo da área do trapézio:

$$S = \frac{(10 + 2{,}8) \cdot 4{,}8}{2} = \frac{12{,}8 \cdot 4{,}8}{2} = 30{,}72$$

Portanto, $S = 30{,}72$ cm^2.

2. Calcule a área do triângulo ABC.



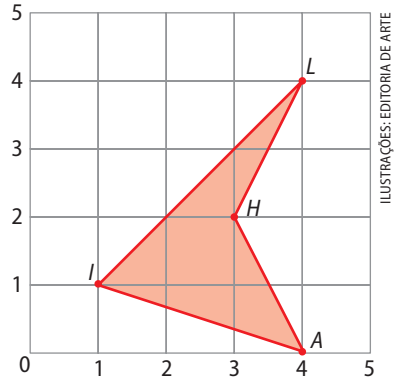
Resolução

A base do triângulo mede 8 cm, pois $10 - 2 = 8$, e a altura, 4 cm, pois $6 - 2 = 4$. Logo:

$$S = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow S = \frac{8 \cdot 4}{2} = 16$$

Assim, a área do triângulo ABC é 16 cm^2.

3. Determine a área do quadrilátero $ILHA$ representado a seguir.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Resolução

Inicialmente, observamos que o quadrilátero é não convexo.

Precisamos, então, decompor a figura em polígonos cuja área sabemos calcular. Uma possibilidade é considerar os triângulos ILA e LHA.

A área do quadrilátero $ILHA$ é a área do triângulo ILA menos a área do triângulo LHA.

No triângulo ILA, considerando-se a base como o lado $\overline{LA}$, a altura relativa a esse lado pode ser obtida com o auxílio da malha quadriculada e vale 3 u.c. (unidades de comprimento). Assim:

$$S_{ILA} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$

Logo, $S_{ILA} = 6$ u.a. (unidades de área).

Usamos raciocínio análogo no triângulo LHA e determinamos sua área:

$$S_{LHA} = \frac{4 \cdot 1}{2} = 2$$

Logo, $S_{LHA} = 2$ u.a.

De posse desses valores, conseguimos determinar a área do quadrilátero $ILHA$:

$S_{ILHA} = S_{ILA} - S_{LHA} = 6 - 2 = 4$

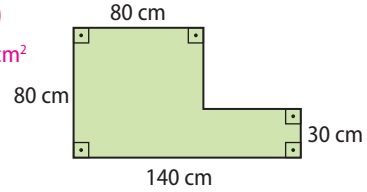
Portanto, a área do quadrilátero $ILHA$ é 4 u.a.

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

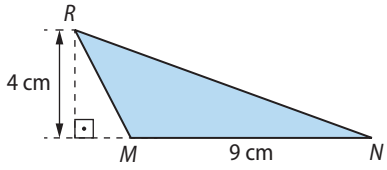
ATIVIDADES

1. Calcule a área das figuras a seguir.

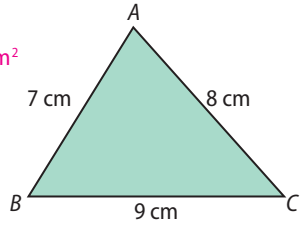
a) 8 200 cm²



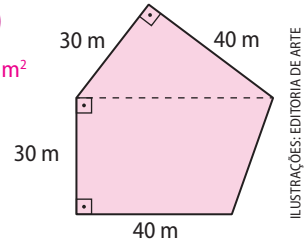
b) 18 cm²



c) 12√5 cm²



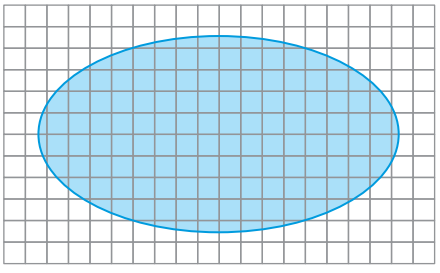
d) 1 950 m²



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

2. Conforme observamos anteriormente, neste Capítulo, as dimensões do mural "Triunfo", da grafiteira Gugie Cavalcanti, são 21 m de altura e 8 m de largura. Qual é a área, em metro quadrado, ocupada por esse mural? 168 m²

3. Considere a figura representada na malha quadriculada a seguir e considere que cada quadradinho tem 1 cm de lado.



SERGIO LIMA

Calcule:

a) A área da figura por falta. 100 cm²

b) A área da figura por excesso. 148 cm²

c) Uma medida aproximada da área da figura. 124 cm²

d) Qual é o erro percentual entre a medida aproximada calculada no item **c** e a medida real da área dessa figura, que, com aproximação até décimos, é 119,6 cm²? aproximadamente 3,68%

4. Se aumentarmos a medida do lado de um quadrado em 4 cm, sua área será aumentada em 56 cm². Qual é a medida da diagonal do quadrado inicial? 5√2 cm

5. O que ocorre com a área de um quadrado se aumentarmos em 20% a medida de seu lado? aumenta 44%

6. (Vunesp-SP) Uma parede de 350 cm de altura e 500 cm de comprimento será revestida de azulejos quadrados iguais. Desprezando-se a necessidade de deixar espaço entre os azulejos e supondo-se que não haverá perdas provenientes do corte deles:

a) determine o número de azulejos de 20 cm de lado necessários para revestir a parede; 437,5 azulejos

b) encontre a maior dimensão de cada peça de azulejo para que não haja necessidade de cortar nenhum deles. 50 cm

7. (Enem/MEC) Um agricultor utilizava toda a área de uma região plana, em formato retangular, com 50 m de largura e 240 m de comprimento, para o plantio de mudas. Seguindo recomendações técnicas, cada muda é plantada no centro de uma pequena região retangular de 10 cm de largura por 20 cm de comprimento.

Esse agricultor decidiu ampliar a área destinada ao plantio de mudas, utilizando agora um terreno, também plano, em formato retangular, com 100 m de comprimento por 200 m de largura. As mudas deverão ser plantadas respeitando-se as mesmas recomendações técnicas.

Com o aumento da área destinada ao plantio, a quantidade máxima de mudas que poderão ser plantadas a mais é alternativa **b**

a) 100 000.

b) 400 000.

c) 600 000.

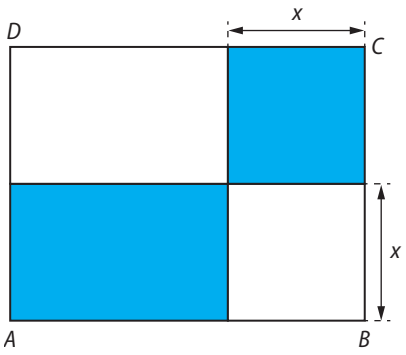
d) 1 000 000.

e) 1 600 000.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

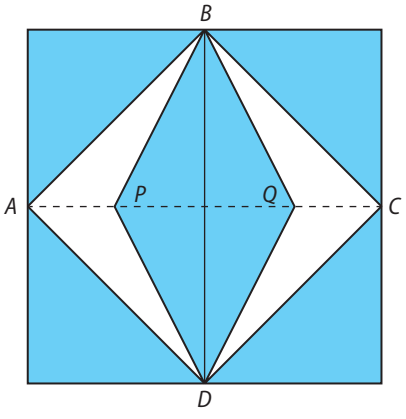
MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

8. Considere o retângulo *ABCD* a seguir.



Sabendo-se que $AB = 27$ cm e $AD = 21$ cm, calcule o valor de x, de modo que a soma das áreas dos retângulos em azul seja a maior possível. 12 cm

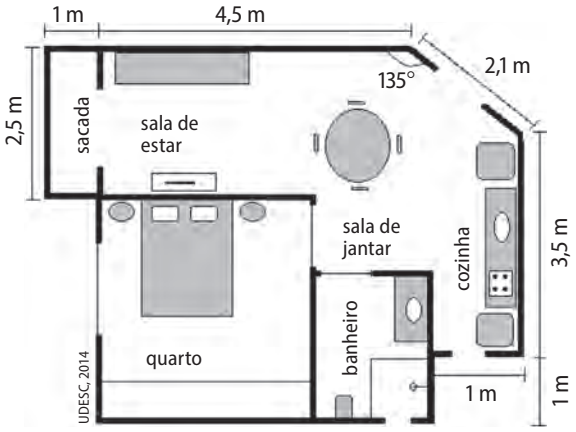
9. (Enem/MEC) Para decorar a fachada de um edifício, um arquiteto projetou a colocação de vitrais compostos de quadrados de lado medindo 1 m, conforme a figura a seguir.



Nesta figura, os pontos *A*, *B*, *C* e *D* são pontos médios dos lados do quadrado e os segmentos $\overline{AP}$ e $\overline{QC}$ medem $\frac{1}{4}$ da medida do lado do quadrado. Para confeccionar um vitral, são usados dois tipos de materiais: um para a parte sombreada da figura, que custa R$ 30,00 o m², e outro para a parte mais clara (regiões *ABPDA* e *BCDQB*), que custa R$ 50,00 o m².
De acordo com esses dados, qual é o custo dos materiais usados na fabricação de um vitral? alternativa **b**

a) R$ 22,50
b) R$ 35,00
c) R$ 40,00
d) R$ 42,50
e) R$ 45,00

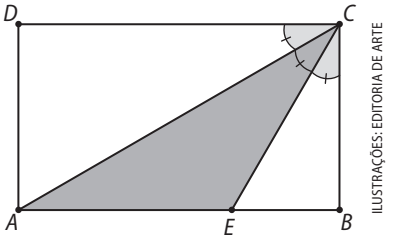
10. (Udesc) Maria precisa comprar piso para o seu apartamento, cuja planta baixa pode ser vista na figura. Devido aos recortes necessários para a colocação do piso, o mestre de obras solicitou 10% a mais da metragem total do apartamento. alternativa **c**



De acordo com as instruções do mestre de obras, Maria deve comprar aproximadamente:

a) 38 m²
b) 37 m²
c) 40 m²
d) 39 m²
e) 42 m²

11. (UFRGS-RS) No retângulo *ABCD*, representado na figura abaixo, os três ângulos destacados com vértice em *C* são iguais. alternativa **b**



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

A área do triângulo sombreado *AEC*, em relação à área total do retângulo, corresponde a:

a) $\frac{1}{2}$.
b) $\frac{1}{3}$.
c) $\frac{2}{5}$.
d) $\frac{3}{5}$.
e) $\frac{2}{3}$.

12. Reúna-se a dois colegas, e elaborem uma proposta de construção de uma horta comunitária na sua escola. Essa proposta deve apresentar:

- a indicação do local onde a horta poderia ser implementada na escola, bem como os alimentos e temperos que poderiam ser cultivados; Ver as **Orientações para o professor**.
- a planta baixa da horta comunitária, com cálculos de área para cada cultivo;
- os cálculos de perímetro para a construção de cercas em locais pertinentes.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Área do círculo e de suas partes

Atualmente, a agricultura tem recorrido a equipamentos cada vez mais tecnológicos para aumentar e melhorar a produtividade. O sistema chamado de pivô central, que faz irrigação de culturas, é um deles. Trata-se de uma máquina que irriga a plantação, cobrindo uma área circular do campo considerado.

ANDRE DIB/PULSAR IMAGENS

- Vista de *drone* de plantação de grãos irrigada com pivô central e área de Cerrado recém-desmatado, região denominada Matopiba, em Barreiras (BA). Fotografia de 2024.

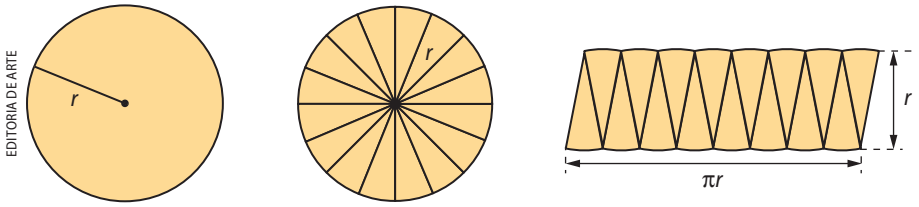
Para assistir

- ENTENDA como o braço de um pivô central de irrigação gira. [*S. l.*]: Globoplay, c2024. 1 vídeo (3 min). Publicado pelo canal Globo Rural. Disponível em: https://globoplay.globo.com/v/3336969/. Acesso em: 11 set. 2024.
  Esse vídeo mostra como funciona o sistema de irrigação de um pivô central.

No exemplo apresentado no vídeo do boxe **Para assistir**, o pivô central tem um braço de 580 m e é capaz de irrigar uma área de 100 hectares. Para estabelecer essa relação entre as dimensões do pivô central e a área atendida, é preciso saber calcular a área de um círculo. É o que compreenderemos a seguir.

Área do círculo

Vamos considerar um círculo cujo raio mede r. Dividindo-o em um número par de partes iguais, como feito a seguir, podemos observar que essas partes podem formar uma figura que lembra um paralelogramo. Quanto mais aumentarmos a quantidade dessas partes que dividem o círculo, mais a base da figura formada se aproximará de πr, ou seja, da metade do comprimento da circunferência.



Dessa forma, quanto mais aumentarmos a quantidade de partes, mais a área da figura se aproximará da área de um paralelogramo com base de medida πr e altura de medida r.

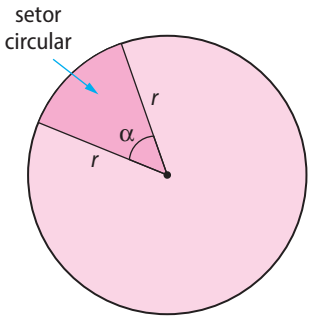
Portanto, ao aumentar indefinidamente a quantidade de partes que dividem o círculo, a área do círculo e a da figura vão coincidir, concluindo-se que a área do círculo é dada por: $S = \pi r \cdot r = \pi r^2$

Logo, a área de um círculo de raio r é dada por:

$$S = \pi r^2$$

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

» Área do setor circular



Denominamos **setor circular** a região do círculo delimitada por um de seus ângulos centrais.

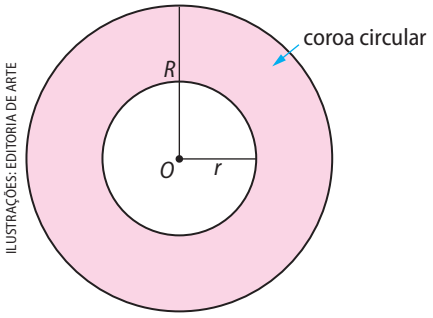
Vamos calcular a área de um setor circular relativo a um ângulo central α, montando uma regra de três simples que relacione a medida do ângulo central e a área:

$$\begin{array}{ll} 360^\circ & \text{——} \ \pi r^2 \\ \alpha & \text{——} \ S_\alpha \end{array}$$

Portanto: $S_\alpha = \dfrac{\alpha \cdot \pi r^2}{360^\circ}$

» Área da coroa circular

A **coroa circular** é a região compreendida entre duas circunferências concêntricas, isto é, de mesmo centro, que estão em um mesmo plano e que têm as medidas de seus raios diferentes.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

A área S de uma coroa circular é igual à diferença entre a área do círculo maior e a do círculo menor, cujos raios medem, respectivamente, R e r. Nesse caso, temos: $S = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2)$

Assim: $S = \pi(R^2 - r^2)$

Pense e responda

Reúna-se a um colega para realizar as atividades a seguir.

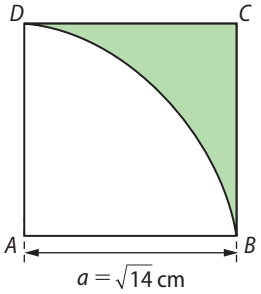
- Pesquisem o que é um segmento circular.
- Debatam e registrem uma maneira de calcular a área de um segmento circular. Em seguida, compartilhem-na com os demais colegas e com o professor. Vocês pensaram da mesma maneira?

Ver as **Orientações para o professor**.

ATIVIDADE RESOLVIDA

4. Na figura, $ABCD$ é um quadrado e $\overset{\frown}{BD}$ é um arco de circunferência de centro A. Qual é, aproximadamente, a área da parte colorida de verde?

Considere $\pi \simeq \dfrac{22}{7}$.



Resolução

A área S da parte colorida de verde é igual à área do quadrado $ABCD$ menos a quarta parte da área do círculo de raio a.

- $S_{quadrado} = a^2 \Rightarrow S_{quadrado} = (\sqrt{14})^2 = 14$
- $\dfrac{S_{círculo}}{4} = \dfrac{\pi a^2}{4} \Rightarrow \dfrac{S_{círculo}}{4} \simeq \dfrac{\frac{22}{7} \cdot 14}{4} = 11$

Assim: $S = S_{quadrado} - \dfrac{S_{círculo}}{4} \simeq 14 - 11 = 3$

Portanto, a área da parte colorida de verde é aproximadamente 3 cm².

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

13. Qual é a medida do diâmetro de um círculo de área 100π dm²? 20 dm

14. (ESPM-SP) Da área de um quadrado, retiramos a área correspondente a um círculo de diâmetro igual à metade da medida do lado do quadrado. A área restante, em percentagem da área original do quadrado, vale aproximadamente:

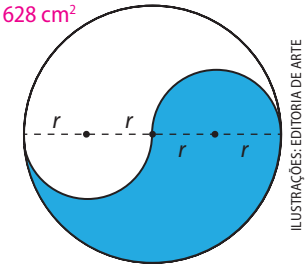
a) 50% **c)** 75% **e)** 90%
b) 60% **d)** 80%

alternativa **d**

15. Em 2009, foi instalado, no estado do Tocantins, o maior pivô central do mundo, com um raio de 1300 m. Qual é a área irrigada, em hectare (ha), por esse pivô? (Considere 1 ha = 1 hm² e $\pi \simeq 3{,}14$.) aproximadamente 530,660 ha

16. Sabendo que $r = 10$ cm, calcule a área da região colorida de azul na figura. (Adote $\pi \simeq 3{,}14$.)

aproximadamente 628 cm²

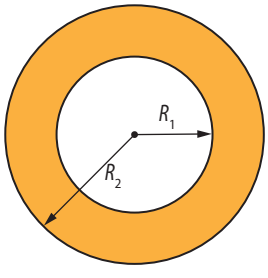


ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

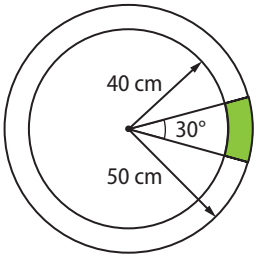
17. (Insper-SP) Uma pizzaria vende pizzas circulares com 32 cm de diâmetro, divididas em 8 pedaços iguais. O dono do estabelecimento pensou em criar uma *pizza* de tamanho maior, a ser dividida em 12 pedaços iguais, de modo que a área de cada um deles seja igual à área de um pedaço da *pizza* menor. Para isso, o diâmetro da *pizza* de 12 pedaços deve ser aproximadamente igual a: alternativa **b**

a) 36 cm **c)** 44 cm **e)** 52 cm
b) 40 cm **d)** 48 cm

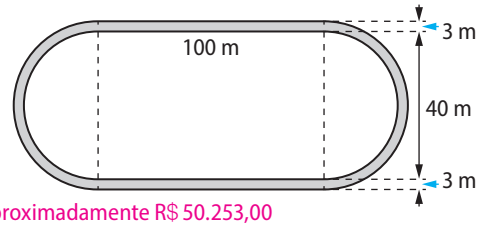
18. Determine a área da região colorida de laranja da figura. (Dados: $R_1 = 3$ m, $R_2 = 5$ m.) 16π m²



19. Duas circunferências concêntricas têm raios iguais a 50 cm e 40 cm, conforme indica a figura. Calcule a área destacada em verde. 75π cm²



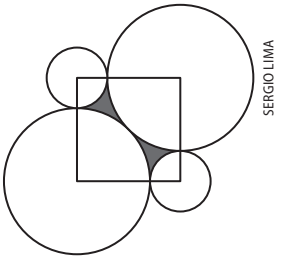
20. Uma praça é formada por um retângulo de comprimento 100 m e largura 40 m e por dois semicírculos com diâmetros coincidindo com os lados menores do retângulo.



aproximadamente R$ 50.253,00

Em torno da praça, será construída uma calçada de 3 m de largura, cujo preço, por metro quadrado, é R$ 50,00. Calcule o custo total desse projeto. (Adote $\pi \simeq 3{,}14$.)

21. (UFRGS-RS) Considere um quadrado de lado 1. Foram construídos dois círculos de raio R com centros em dois vértices opostos do quadrado e tangentes entre si; dois outros círculos de raio r com centros nos outros dois vértices do quadrado e tangentes aos círculos de raio R, como ilustra a figura abaixo.



SERGIO LIMA

A área da região sombreada é alternativa **e**

a) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)\pi$. **d)** $1+(\sqrt{2} - 1)\pi$.
b) $(\sqrt{2} - 1)\pi$. **e)** $1+\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)\pi$.
c) $1 + \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)\pi$.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Polígonos regulares

THOMAS SOELLNER/SHUTTERSTOCK.COM

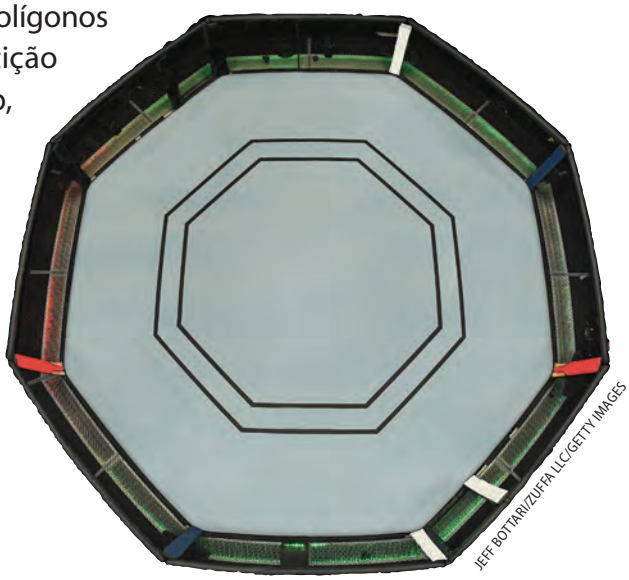
Porca sextavada encaixada em uma chave de boca. (As imagens da página estão fora de proporção.)

No Ensino Fundamental, você já estudou algumas características dos polígonos regulares. Agora, vamos aprender outras, inclusive o cálculo de suas áreas. Mas, antes, observe alguns exemplos de situações que envolvem polígonos regulares.

Você conhece uma chave de boca? Sabe para que ela serve?

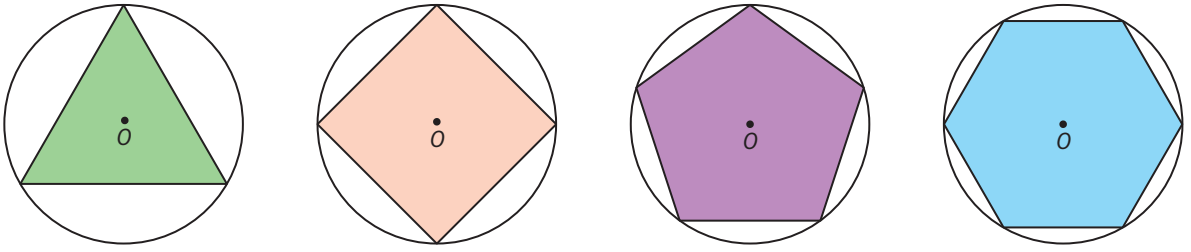
A chave de boca é uma ferramenta muito utilizada por profissionais de mecânica de automóvel quando precisam soltar ou apertar porcas ou parafusos dos carros. Porcas e parafusos, em sua maioria, têm o formato sextavado, ou seja, quando vistos de cima, lembram um hexágono regular.

No esporte também podemos identificar polígonos regulares. Por exemplo, os tatames de competição do UFC (sigla de Ultimate Fighting Championship, uma organização estadunidense de artes marciais mistas, também conhecida como Mixed Martial Arts – MMA), são conhecidos como octógonos.


JEFF BOTTARI/ZUFFA LLC/GETTY IMAGES

Área de competição de UFC.

Um polígono é regular se, e somente se, apresenta todos os seus lados congruentes e todos os ângulos internos congruentes. Um fato bastante significativo é que todo polígono regular pode ser inscrito em uma circunferência, como ilustram os polígonos regulares representados a seguir.



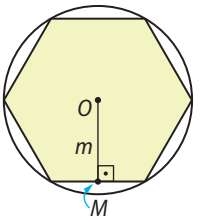
Da esquerda para a direita, triângulo equilátero, quadrado, pentágono regular e hexágono regular inscritos em circunferências.

A seguir, vamos estudar alguns polígonos regulares e relacionar seus elementos com os da circunferência na qual cada um deles está inscrito.

Elementos de um polígono regular inscrito em uma circunferência

O centro O da circunferência na qual o polígono regular está inscrito é denominado **centro do polígono**.

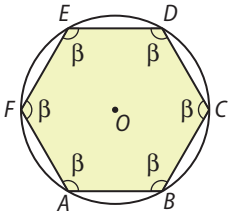
A distância m do centro O até o ponto médio M de um lado do polígono regular é denominada **apótema** do polígono.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

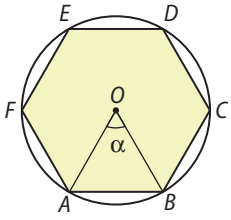
MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Os ângulos cujos lados são dois lados consecutivos do polígono são chamados de **ângulos internos** do polígono. A medida de cada ângulo interno de um polígono regular de n lados é dada por $\beta = \frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$.



Um ângulo α cujo vértice está no centro da circunferência circunscrita ao polígono regular e cujos lados passam por dois vértices consecutivos desse polígono é chamado de **ângulo central** do polígono.

A medida de um ângulo central de um polígono regular é dada por $\alpha = \frac{360°}{n}$, sendo n o número de lados do polígono.



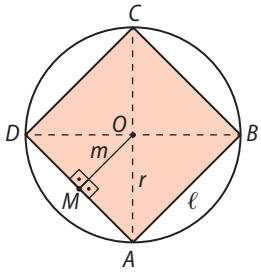
» Relações métricas nos polígonos regulares

Quando consideramos a medida ℓ do lado de um polígono regular, a medida m do apótema do mesmo polígono e a medida r do raio da circunferência na qual esse polígono está inscrito, podemos estabelecer relações métricas entre essas medidas.

Vamos estudar como obter essas relações no quadrado, no hexágono regular e no triângulo equilátero inscritos em uma circunferência.

Quadrado

Considere o quadrado $ABCD$, inscrito em uma circunferência de raio r, representado na figura. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo AOD, temos:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

$$\ell^2 = r^2 + r^2 \Rightarrow \ell^2 = 2r^2 \Rightarrow \ell = r\sqrt{2}$$

Assim:

$$\ell = r\sqrt{2}$$

O segmento de reta $\overline{OM}$ é congruente aos segmentos $\overline{DM}$ e $\overline{MA}$.

Observe, na figura anterior, que:

$$m + m = \ell \Rightarrow 2m = \ell \Rightarrow m = \frac{\ell}{2} \Rightarrow m = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$

Portanto:

$$m = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$

Pense e responda

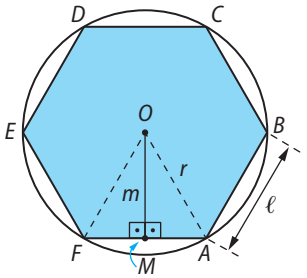
Analise a representação do quadrado $ABCD$, inscrito na circunferência de raio r, e justifique por que os segmentos $\overline{OM}$, $\overline{DM}$ e $\overline{MA}$ são congruentes. Essa é uma característica que só vale para os quadrados? Justifique.

Ver as **Orientações para o professor**.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Hexágono regular

Considere o hexágono regular *ABCDEF*, inscrito em uma circunferência de raio *r*, representado na figura. Observe que:



- $\text{med}(F\hat{O}A) = \frac{360°}{6} = 60°$
- $\overline{OA} \cong \overline{OF}$ e $O\hat{F}A \cong O\hat{A}F$ (pois o triângulo *OAF* é isósceles)

Assim, $\text{med}(O\hat{F}A) = \text{med}(O\hat{A}F) = 60°$, pois $\frac{180° - 60°}{2} = 60°$, de modo que podemos concluir que o triângulo *OAF* é equilátero.

Como *AOF* é um triângulo equilátero, então:

$$\ell = r$$

Como $MA = \frac{FA}{2} = \frac{\ell}{2} = \frac{r}{2}$, do teorema de Pitágoras aplicado no triângulo *AOM*, obtemos:

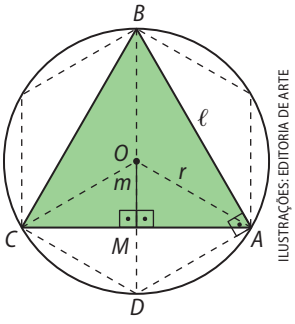
$$(OA)^2 = (OM)^2 + (MA)^2 \Rightarrow r^2 = m^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 \Rightarrow r^2 = m^2 + \frac{r^2}{4} \Rightarrow m^2 = \frac{3r^2}{4} \Rightarrow m = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

Assim:

$$m = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

Triângulo equilátero

Considere o triângulo equilátero *ABC*, inscrito em uma circunferência de raio *r*, representado na figura. Observe que $\overline{AD}$ é o lado de um hexágono regular inscrito nessa circunferência; então, pelo que estudamos, $AD = r$. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo *BDA*, temos:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

$$(BD)^2 = \ell^2 + (DA)^2 \Rightarrow (2r)^2 = \ell^2 + r^2 \Rightarrow 4r^2 = \ell^2 + r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ell^2 = 3r^2 \Rightarrow \ell = r\sqrt{3}$$

Assim:

$$\ell = r\sqrt{3}$$

Agora, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo *OMA*, temos:

$$(OA)^2 = (OM)^2 + (MA)^2 \Rightarrow r^2 = m^2 + \left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

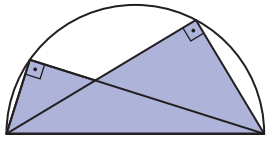
$$\Rightarrow m^2 = r^2 - \frac{r^2 \cdot 3}{4} \Rightarrow m^2 = \frac{r^2}{4} \Rightarrow m = \frac{r}{2}$$

Portanto:

$$m = \frac{r}{2}$$

Saiba que...

Se um lado do triângulo for o diâmetro da semicircunferência na qual ele está inscrito, então o triângulo é retângulo.



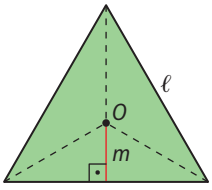
SERGIO LIMA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

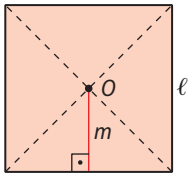
Área de um polígono regular

Vamos considerar os polígonos regulares a seguir, em que:

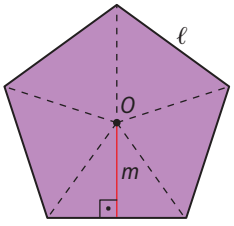
- ℓ é a medida do lado;
- m é a medida do apótema;
- O é o centro do polígono;
- n é a quantidade de lados;
- $n \cdot \ell$ é o perímetro;
- p é o semiperímetro, ou seja, $n \cdot \ell = 2p$.



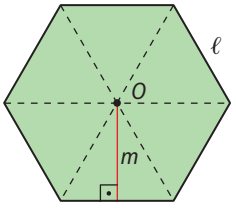
■ Triângulo equilátero.



■ Quadrado.



■ Pentágono regular.



■ Hexágono regular.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Unindo o centro O de um polígono regular de n lados a cada um dos seus vértices, esse polígono fica decomposto em n triângulos isósceles congruentes.

Como a medida da altura de cada um desses triângulos é igual à medida do apótema do polígono, a área S de cada um desses polígonos é igual a n vezes a área do triângulo formado:

$$S = n \cdot \left(\frac{\ell \cdot m}{2}\right) = \frac{n \cdot \ell \cdot m}{2}$$

Como $n \cdot \ell$ é a medida do perímetro do polígono, a área S também pode ser expressa por:

$$S = \frac{2pm}{2} = p \cdot m$$

Portanto, a área de um polígono regular de n lados é igual ao produto da medida p, do semiperímetro, pela medida m, do apótema, ou seja:

$$S = p \cdot m$$

Saiba que...

Em um hexágono regular de lado ℓ, o semiperímetro é $p = \frac{6\ell}{2} = 3\ell$ e o apótema é $m = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$. Assim, usando a fórmula apresentada, concluímos que a área S de um hexágono regular é:

$$S = p \cdot m = 3\ell \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}$$

Variação no perímetro e na área de um polígono regular

Considere a situação a seguir.

Para cercar um terreno quadrado de 4 metros de lado, Antônio usou 16 metros de arame. Seu cliente, satisfeito com o trabalho realizado, pediu que ele colocasse cerca em outro terreno, também quadrado, mas com o quádruplo da área do primeiro. Antônio ficou pensando se usaria, então, o quádruplo da metragem de arame.

Pense e responda

Junte-se a um colega, e avaliem a suposição de Antônio. Ele estava correto? Justifiquem a resposta.

Não. Espera-se que os estudantes respondam que, se a área quadruplica, o perímetro dobra.

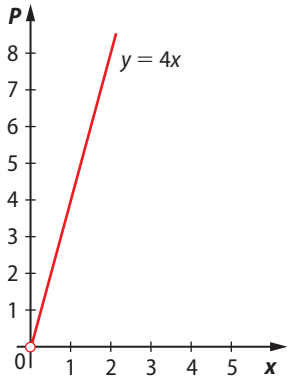
Para compreender melhor o problema, vamos relacionar o perímetro P e a área S de um quadrado em função da medida x do seu lado:

x (em metro)	P (em metro)	S (em metro quadrado)
1	4	1
2	8	4
3	12	9
4	16	16
5	20	25
6	24	36
7	28	49
8	32	64
n	$4n$	n^2

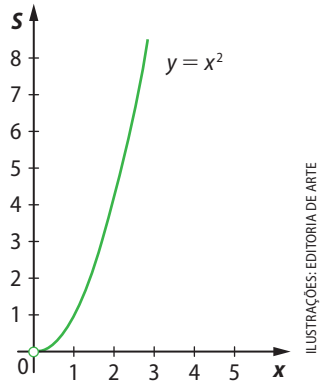
Assim, voltando para o problema de Antônio, concluímos que o novo terreno tem área de 64 m², pois $4 \cdot 16 = 64$; portanto, ele precisará de 32 metros de arame para cercá-lo, ou seja, o dobro da metragem anterior.

Analisando os dados do quadro apresentado, podemos perceber que, quando dobramos a medida do lado do quadrado, seu perímetro também dobra; porém, sua área quadruplica. Quando triplicamos a medida do lado, o perímetro triplica, mas a área passa a ser multiplicada por 9, ou seja, 3^2.

Agora, vamos observar essas variações graficamente:



■ Variação do perímetro do quadrado em função da medida x do lado.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

■ Variação da área do quadrado em função da medida x do lado.

Para construir esses gráficos, consideramos apenas valores de $x > 0$, pois x representa a medida do lado do quadrado.

O perímetro P de um quadrado é diretamente proporcional à medida de seu lado e pode ser modelado pela lei da função afim definida por $P(x) = 4x$, restrita ao domínio $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$. Já a área S do quadrado, em função da medida x do lado, pode ser modelada pela lei da função quadrática definida por $S(x) = x^2$, restrita ao domínio D. Assim, podemos perceber que a variação do perímetro do quadrado em função do lado é linear, enquanto a variação da área é quadrática.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Considerando agora o caso do triângulo equilátero, temos $P(x) = 3x$ e $S(x) = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$, de modo que a variação de seu perímetro em função do lado é linear e a variação de sua área é quadrática. O mesmo ocorre com o hexágono regular, uma vez que, para esse polígono, $P(x) = 6x$ e $S(x) = \frac{3x^2\sqrt{3}}{2}$.

Saiba que...

Em polígonos semelhantes cuja razão de semelhança é k, a razão entre lados, alturas e apótemas homólogos é k. Além disso, a razão entre os perímetros também é k, enquanto a razão entre as áreas é k^2. Isso vale para quaisquer dois polígonos semelhantes, inclusive para o caso de eles serem regulares. Portanto, se multiplicarmos as medidas de todos os lados de um polígono por k, obteremos um polígono semelhante ao primeiro e observaremos que a variação do perímetro ocorrerá linearmente, enquanto a variação da área ocorrerá de maneira quadrática.

ATIVIDADES RESOLVIDAS

5. Determine a medida R do raio da circunferência inscrita no hexágono regular cujo lado mede 4 cm.

Resolução

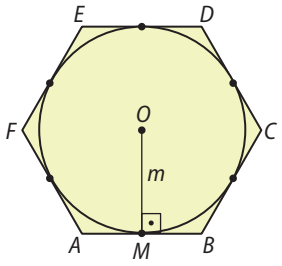
A medida do raio da circunferência inscrita em um polígono regular é igual à medida do apótema desse polígono. Assim, $R = m$.

Para o hexágono regular, temos: $\ell = r$ e $m = \frac{r\sqrt{3}}{2}$, em que r é a medida do raio da circunferência circunscrita ao hexágono.

De acordo com o enunciado, temos $\ell = r = 4$ cm. Assim:

$m = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

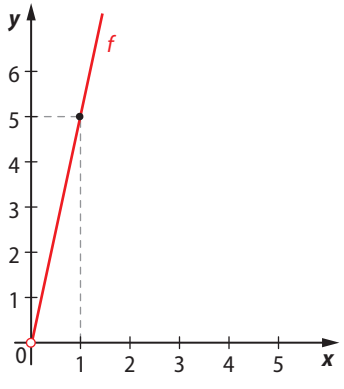
Logo, a medida R do raio da circunferência inscrita é $2\sqrt{3}$ cm.



6. Observe o gráfico representado e faça o que se pede a seguir.

a) Escreva a lei de formação da função representada.

b) Considerando que essa função representa a variação do perímetro P de um polígono regular em função da medida do seu lado, identifique esse polígono e justifique sua resposta.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Resolução

a) Conhecemos dois pares ordenados da reta suporte do gráfico: (0, 0) e (1, 5). Vamos considerar que a equação dessa reta é $y = ax + b$. Como a reta passa por (0, 0), $b = 0$. Assim, $y = ax$. Para $x = 1$, $y = 5$. Logo, $a = 5$. Assim, a equação da reta é $y = 5x$.

Portanto, a lei de formação da função é $f(x) = 5x$, com $x > 0$.

b) A lei da função é $f(x) = 5x$. Isso quer dizer que, para uma medida x do lado desse polígono, o perímetro é $5x$. Como se trata de um polígono regular, todos os lados têm a mesma medida, então concluímos que esse polígono é um pentágono regular.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

22. Dado um triângulo equilátero, cujo lado mede 6 cm, calcule:

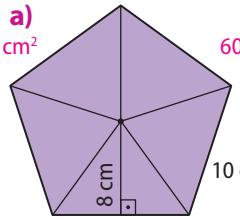
a) a medida do raio da circunferência circunscrita; $2\sqrt{3}$ cm

b) a medida do apótema. $\sqrt{3}$ cm

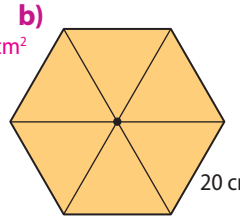
23. Em uma circunferência de raio 2 cm está inscrito um hexágono regular. Qual é a área desse polígono? (Adote $\sqrt{3} \simeq 1{,}73$.)
aproximadamente 10,38 cm²

24. Calcule as áreas dos polígonos regulares representados a seguir.

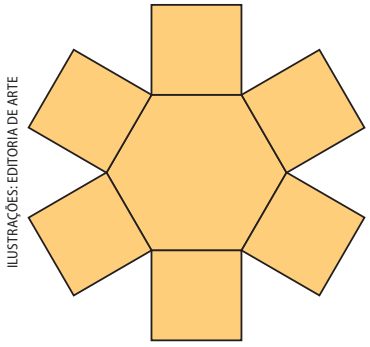
a) 200 cm²



b) $600\sqrt{3}$ cm²



25. A figura a seguir foi recortada de uma cartolina e é formada por um hexágono regular e seis quadrados. Cada lado do hexágono mede 10 cm.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Considerando $\sqrt{3} \simeq 1{,}73$, quantos centímetros quadrados de cartolina foram usados para fazer a figura? aproximadamente 859,5 cm²

26. Calcule a área de um triângulo equilátero, sabendo que seu apótema mede 3 cm. $27\sqrt{3}$ cm²

27. São dados dois quadrados: um inscrito e outro circunscrito à mesma circunferência. Determine a razão entre:

a) o perímetro do quadrado inscrito e o do quadrado circunscrito; $\frac{\sqrt{2}}{2}$

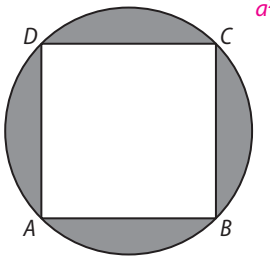
b) a área do quadrado inscrito e a do quadrado circunscrito. $\frac{1}{2}$

28. O apótema de um hexágono regular mede $6\sqrt{3}$ cm. Nessas condições, determine:

a) a medida do seu lado; 12 cm

b) sua área. $216\sqrt{3}$ cm²

29. Na figura a seguir, o quadrado *ABCD* está inscrito em uma circunferência. Sabendo que o lado desse quadrado mede *a*, expresse, em função de *a*, a área da região sombreada.
$a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$ u.a.

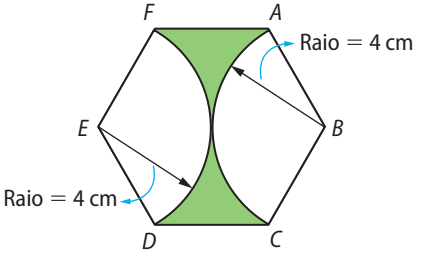


30. Observe a relação entre a medida dos lados e o perímetro de um polígono regular. Identifique qual é esse polígono regular e justifique sua resposta. Decágono; a medida do lado é x e o perímetro, $10x$.

Medida do lado	2	3	4	5
Perímetro	20	30	40	50

31. Considerando os estudos sobre a variação da área e do perímetro de um polígono regular em função da medida do lado, elabore um problema e resolva-o. Depois, troque-o com um de seus colegas e resolva o problema proposto por ele. Em seguida, discutam as soluções, verificando se chegaram às mesmas conclusões e quais procedimentos utilizaram.
Resposta pessoal.

32. (Ence-RJ) A figura abaixo representa um hexágono regular.



Calcule:

a) a medida do seu apótema; $2\sqrt{3}$ cm

b) a área da região colorida de verde.
$\frac{72\sqrt{3} - 32\pi}{3}$ cm²

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

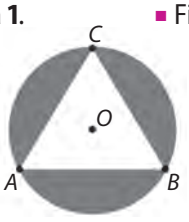
33. Calcule a área de um hexágono regular cujo lado mede 6 cm. $54\sqrt{3}$ cm²

34. (UEL-PR) Algumas figuras geométricas são utilizadas em símbolos, como, por exemplo, a "Estrela de David" (Figura 1).

■ Figura **1**.

UEL-PR, 2017

■ Figura **2**.



■ Figura **3**.

A partir das Figuras 1 e 2, desenhou-se um esquema, representado na Figura 3, que não obedece a uma escala. Sabe-se que, na Figura 3, estão representados uma circunferência de centro no ponto *O* e um triângulo equilátero (*ABC*), inscrito nessa circunferência.
Considerando que o raio da circunferência é de $\sqrt{48}$ cm, responda aos itens a seguir.

a) Determine a medida do lado do triângulo *ABC*. Justifique sua resposta apresentando os cálculos realizados na resolução deste item. 12 cm

b) Determine a área representada pela cor cinza na Figura 3. Justifique sua resposta apresentando os cálculos realizados na resolução deste item. aproximadamente 88 cm²

35. Em alguns municípios, serão construídas praças na forma de octógono regular. Para isso, foi elaborado um projeto em que consta a medida *m* do lado do octógono, uma vez que o comprimento do lado poderia variar conforme o local para a construção da praça.

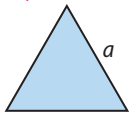
a) Faça um esboço do polígono regular que representa a praça. Ver as **Orientações para o professor**.

b) Qual é a função que relaciona o perímetro *P* e a medida do lado *m* do octógono regular? $P(m) = 8m$

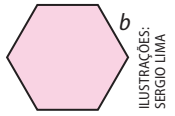
c) Construa o gráfico que representa essa função. Ver as **Orientações para o professor**.

36. Considere os polígonos regulares representados na Figura **1** e na Figura **2**.

36. a) $P_1(a) = 3a$, com $a > 0$; $S_1(a) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, com $a > 0$



■ Figura **1**.



ILUSTRAÇÕES: SERGIO LIMA

■ Figura **2**.

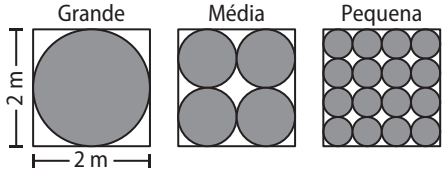
a) Escreva as funções P_1 e S_1 que descrevem, respectivamente, o perímetro e a área da Figura **1** em função da medida *a* do seu lado.

b) Esboce os gráficos das funções P_1 e S_1. Ver as **Orientações para o professor**.

c) Escreva as funções P_2 e S_2 que descrevem, respectivamente, o perímetro e a área da Figura **2** em função da medida *b* do seu lado. $P_2(b) = 6b$, com $b > 0$; $S_2(b) = \frac{3b^2\sqrt{3}}{2}$, com $b > 0$.

d) Esboce os gráficos das funções P_2 e S_2. Ver as **Orientações para o professor**.

37. (Enem/MEC) Uma empresa produz tampas circulares de alumínio para tanques cilíndricos a partir de chapas quadradas de 2 metros de lado, conforme a figura. Para 1 tampa grande, a empresa produz 4 tampas médias e 16 tampas pequenas.



Área do círculo: πr^2

As sobras de material de produção diária das tampas grandes, médias e pequenas dessa empresa são doadas, respectivamente, a três entidades: I, II e III, para efetuarem reciclagem do material. A partir dessas informações, pode-se concluir que: alternativa **e**

a) a entidade I recebe mais material do que a entidade II;

b) a entidade I recebe metade do material da entidade III;

c) a entidade II recebe o dobro de material da entidade III;

d) as entidades I e II recebem, juntas, menos material do que a entidade III;

e) as três entidades recebem iguais quantidades de material.

RONSTIK/SHUTTERSTOCK.COM

Homem assenta pisos com formato hexagonal.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

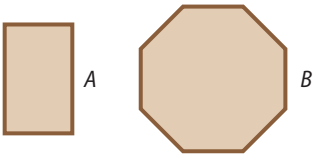
Ladrilhamento do plano

Na instalação de pisos e azulejos em cozinhas e banheiros, por exemplo, o termo usado pelos profissionais da construção civil é "assentar" (o piso ou o azulejo). Nesse processo, para obter um bom acabamento, os profissionais precisam recobrir a maior área possível, utilizando apenas peças inteiras. Porém, normalmente, é necessário fazer o que se chama de "recorte", assentando pedaços dessas peças para recobrir totalmente a superfície.

Em Matemática, a ideia de ladrilhamento está associada ao recobrimento do plano utilizando determinadas composições de polígonos.

Considere a situação a seguir.

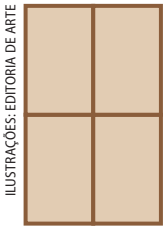
Carlos foi contratado para assentar pisos na superfície plana de um pátio retangular. Para obter um bom acabamento, ele pretende recobrir a maior área possível da superfície desse pátio, utilizando apenas pisos inteiros e de um único modelo, *A* ou *B*, conforme representado pelas figuras.



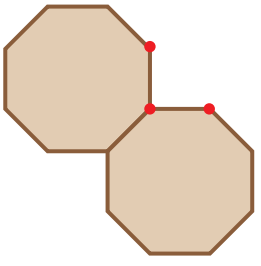
Modelos de pisos.

Se Carlos utilizar o piso do modelo *A*, poderá compor um ladrilhamento seguindo o padrão indicado a seguir, à esquerda. Note que, para determinar esse padrão, não é necessário realizar nenhum recorte do piso do modelo *A*. Porém, se Carlos utilizar o piso do modelo *B*, ele teria a situação indicada a seguir, à direita.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE



Composição com pisos do modelo *A*.



Composição com pisos do modelo *B*.

Observe que, na composição com pisos do modelo *B*, não é possível encaixar um novo piso desse mesmo modelo na região triangular determinada pelos pontos destacados em vermelho.

Assim, ao utilizar o modelo *B*, seria necessário fazer recortes nos pisos para conseguir recobrir toda a superfície plana do pátio. Portanto, o modelo *A* é o mais adequado à necessidade de Carlos.

Saiba que...

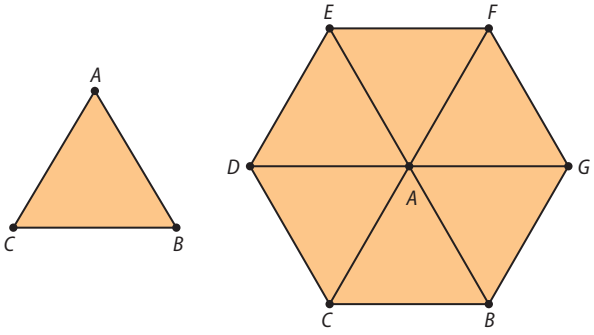
A ideia de ladrilhamento é utilizada em diferentes manifestações artísticas. Por exemplo, o artista gráfico holandês Escher (1898-1972), em suas obras de tesselação, partia de figuras geométricas para criar imagens, como de peixes ou de aves, que se encaixavam perfeitamente. A tesselação é um tipo de pavimentação, com peças de mosaico, de uma superfície plana.

A situação anterior nos dá ideia do que, em Matemática, denominamos **ladrilhamento do plano**, que é o recobrimento do plano com base em determinado padrão geométrico. Esse padrão pode ser composto de um único tipo de polígono ou da combinação de diferentes tipos de polígonos.

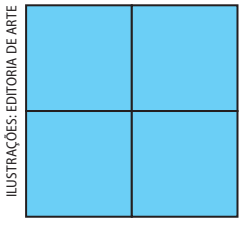
Os polígonos utilizados para fazer o ladrilhamento devem obedecer às seguintes condições:

- A intersecção entre os polígonos é sempre um vértice ou um lado ou é vazia;
- A distribuição ao redor de cada vértice é sempre a mesma, obedecendo a um padrão.

Considere um triângulo equilátero *ABC*. É possível compor um ladrilhamento com seis triângulos equiláteros congruentes ao triângulo *ABC*, todos com vértice *A*.

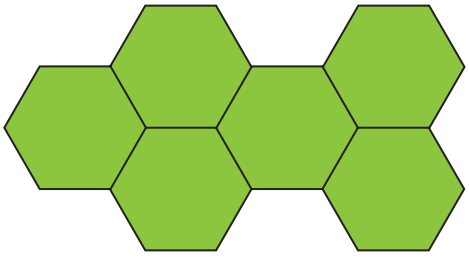


Observe outros exemplos de ladrilhamento do plano com polígonos regulares:



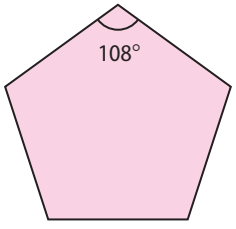
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

■ Ladrilhamento feito com quadrados.

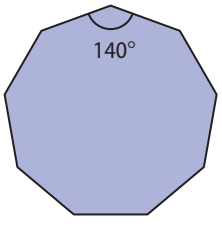


■ Ladrilhamento feito com hexágonos regulares.

Vamos, agora, investigar se é possível ladrilhar o plano utilizando outro polígono regular. Primeiro, vamos estudar os casos do pentágono e do eneágono regulares, cujas medidas dos ângulos internos estão destacadas nas figuras a seguir.



■ Pentágono regular.



SERGIO LIMA

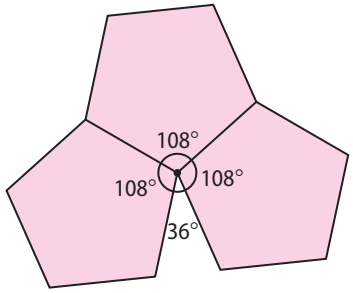
■ Eneágono regular.

Ao dispor três pentágonos regulares em torno de um vértice, percebemos que, na região não preenchida, forma-se um ângulo de 36°, que não comporta um quarto pentágono regular. No caso do eneágono regular, ao dispor duas dessas figuras em torno de um vértice, é formado um ângulo de 80° na região não preenchida, de modo que não é possível dispor um terceiro eneágono regular em torno desse vértice.

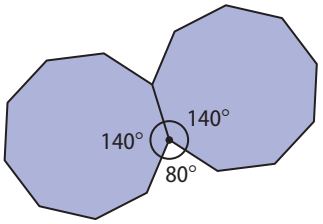
MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Pense e responda

- Qual é a medida dos ângulos internos do heptágono regular? $\frac{900°}{7}$



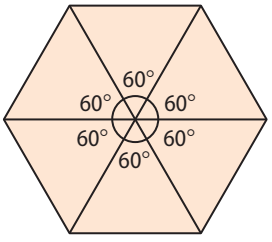
■ Tentativa de ladrilhamento do plano utilizando pentágonos regulares.



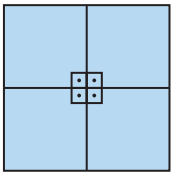
■ Tentativa de ladrilhamento do plano utilizando eneágonos regulares.

Com isso, é possível perceber que, para obter um ladrilhamento do plano, a soma das medidas dos ângulos internos dos polígonos, relativos aos vértices coincidentes, deve ser 360°.

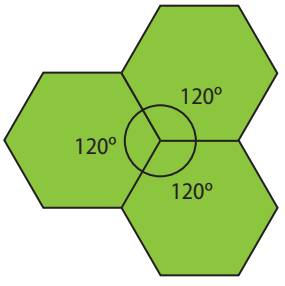
Além disso, no caso de ladrilhamentos utilizando apenas um tipo de polígono regular, a medida dos ângulos internos do polígono deve ser um divisor de 360°. Portanto, há apenas três possibilidades de escolha para o tipo de polígono regular: triângulos equiláteros, quadrados ou hexágonos regulares.



■ A medida de cada ângulo interno de um triângulo equilátero é 60°.



■ A medida de cada ângulo interno de um quadrado é 90°.



ILUSTRAÇÕES: SERGIO LIMA

■ A medida de cada ângulo interno de um hexágono regular é 120°.

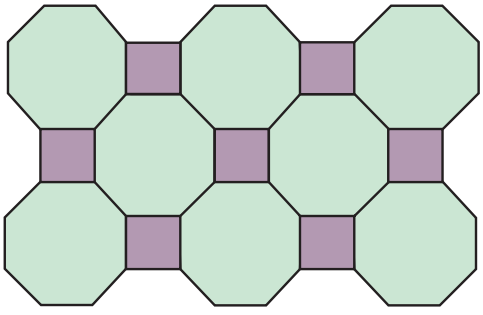
O ladrilhamento do plano também pode ser feito por meio da composição de dois ou mais polígonos regulares convexos com lados congruentes, de modo que o padrão de cada vértice obedeça sempre à mesma ordem.

A figura a seguir representa uma maneira de se obter o ladrilhamento do plano, utilizando octógonos regulares e quadrados.

Pense e responda

Quais são as medidas dos ângulos internos dos polígonos regulares que compõem essa figura?

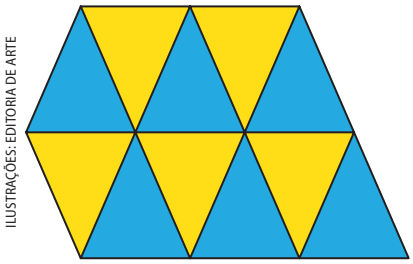
135° (do octógono regular); 90° (do quadrado)



EDITORIA DE ARTE

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Os ladrilhamentos também podem ser feitos com alguns polígonos congruentes, ainda que sejam não regulares. Na figura a seguir, por exemplo, o padrão geométrico utilizado é composto de triângulos que não são regulares.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

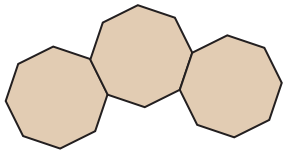
Para assistir

- ISTO é Matemática: T05E09: o estranho mundo de Escher. [*S. l.*: *s. n.*], 2013. 1 vídeo (8 min). Publicado pelo canal sigma3web. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=7ac0WC3tzwU. Acesso em: 4 set. 2024.

  O vídeo apresenta noções básicas de ladrilhamento por meio de contextualização com azulejos e com as obras de Escher.

ATIVIDADE RESOLVIDA

7. Para fazer o ladrilhamento de uma superfície, Caio comprou pisos em formato de octógonos regulares. Ao iniciar o trabalho de revestimento, notou que não seria possível recobrir todo o piso. Observe:



a) Explique o motivo pelo qual Caio não conseguirá ladrilhar a superfície usando somente pisos nesse formato.

b) Caio resolveu voltar à loja para comprar algum outro piso que se encaixe perfeitamente ao ladrilhamento já iniciado. Ele deve procurar pisos no formato de qual polígono regular?

Resolução

a) A medida do ângulo interno do octógono regular é dada por $\beta = \frac{(8 - 2) \cdot 180°}{8} = 135°$, e 135 não é divisor de 360.

Com dois octógonos regulares, a soma dos ângulos justapostos em um mesmo vértice é 270°; com três octógonos regulares, essa soma passa a 405°. Assim, usando somente octógonos regulares, não é possível ladrilhar o piso.

b) Sabemos que a medida de cada ângulo interno do octógono regular é igual a 135°. Assim, temos:

$2 \cdot 135° + x = 360°$, em que x é a medida do ângulo do polígono regular desconhecido.

Assim, temos: $x = 360° - 270°$

Logo, $x = 90°$.

O polígono regular que possui ângulos iguais a 90° é o quadrado, portanto Caio deve procurar pisos quadrados.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

38. Ao utilizarmos a combinação de dois hexágonos regulares e dois triângulos equiláteros, cujos lados tenham a mesma medida, é possível ladrilhar o plano? Justifique sua resposta.

Sim. Ver as **Orientações para o Professor**.

39. Uma construtora decidiu inovar e encomendou ladrilhos no formato de dodecágonos regulares (polígonos de 12 lados congruentes). Ao se depararem com esses ladrilhos de formato inusitado, alguns pedreiros disseram que não seria possível usar apenas esse ladrilho, pois sobraria espaço entre eles. Ao ouvir os colegas, o mestre de obras encontrou a solução para esse problema. Ele afirmou que somente com os ladrilhos no formato de dodecágonos regulares, de fato, não era possível recobrir todo o piso, mas se esses ladrilhos fossem combinados com outro tipo de ladrilho poligonal, o problema estaria resolvido.

Ver as **Orientações para o professor**.

a) Explique por que não é possível usar somente os ladrilhos em formato de dodecágono regular para cobrir todo o piso, sem deixar espaço. Se possível, utilize um *software* de Geometria Dinâmica para auxiliar sua explicação.

b) Considerando a solução dada pelo mestre de obras, que tipo de ladrilho seria possível combinar com o dodecágono regular para satisfazer às condições de ladrilhamento?

triângulo equilátero

40. (Saresp-SP) Uma parede precisa ser revestida com azulejos em formato de polígonos regulares. Para tanto, será escolhido um tipo de azulejo, de modo a se obter um ladrilhamento. Das alternativas a seguir, qual é a forma de azulejo ideal para revestir essa parede?

alternativa **e**

a) Um heptágono (7 lados).

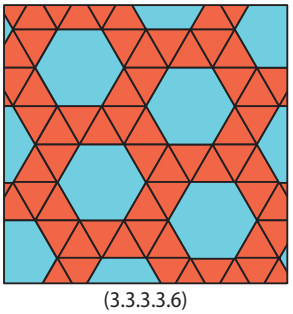
b) Um pentágono (5 lados).

c) Um octógono (8 lados).

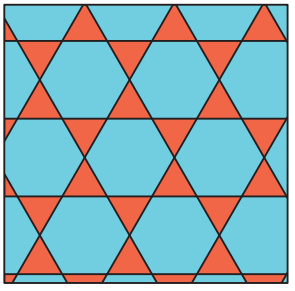
d) Um decágono (10 lados).

e) Um hexágono (6 lados).

41. (Fuvest-SP) Um ladrilhamento é chamado de uniforme se é composto por polígonos regulares que preenchem todo o plano sem sobreposição e, além disso, o padrão é o mesmo em cada vértice. Para classificá-los, utilizamos uma notação dada por uma sequência de números que é definida desta forma: escolhemos um vértice qualquer e indicamos o número de lados de cada polígono que contém este vértice, seguindo o sentido anti-horário, iniciando com os polígonos de menos lados, conforme os exemplos:



(3.3.3.3.6)



(3.6.3.6)

SERGIO LIMA

A foto mostra o piso de um museu em Sevilha.

FUVEST, 2023

A notação que representa o padrão do ladrilhamento do piso é: alternativa **e**

a) (3 . 3 . 3 . 4)

b) (3 . 3 . 4 . 6)

c) (3 . 4 . 4 . 4)

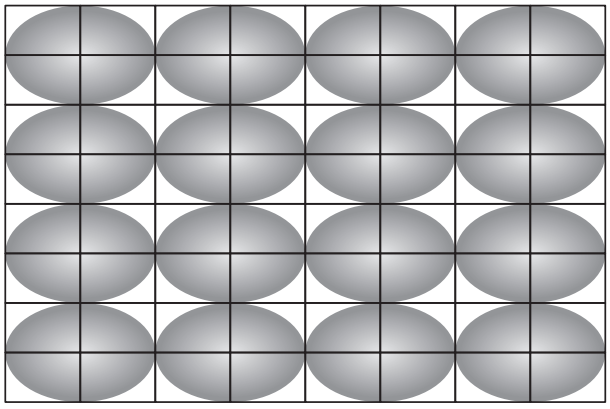
d) (3 . 4 . 4 . 6)

e) (3 . 4 . 6 . 4)

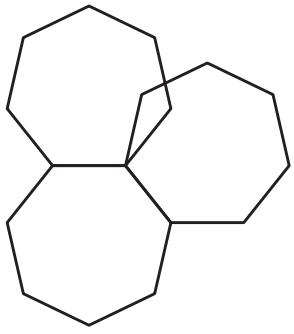
MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

42. (Enem/MEC) Na construção civil, é muito comum a utilização de ladrilhos ou azulejos com a forma de polígonos para o revestimento de pisos ou paredes. Entretanto, não são todas as combinações de polígonos que se prestam a pavimentar uma superfície plana, sem que haja falhas ou superposições de ladrilhos, como ilustram as figuras:

ILUSTRAÇÕES: SERGIO LIMA

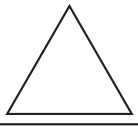
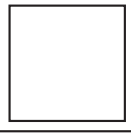
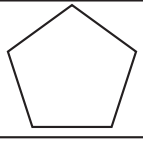
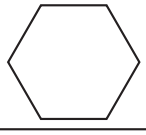
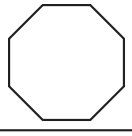
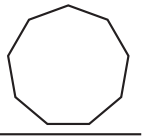


■ Figura 1: Ladrilhos retangulares pavimentando o plano



■ Figura 2: Heptágonos regulares não pavimentam o plano (há falhas ou superposição)

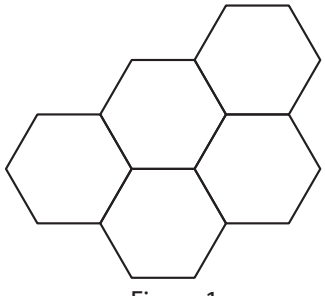
A tabela traz uma relação de alguns polígonos regulares, com as respectivas medidas de seus ângulos internos. alternativa **b**

Nome	Triângulo	Quadrado	Pentágono	Hexágono	Octógono	Eneágono
Figura						
Ângulo interno	60°	90°	108°	120°	135°	140°

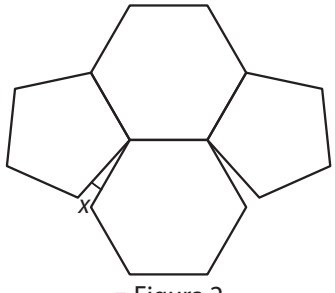
Se um arquiteto deseja utilizar uma combinação de dois tipos diferentes de ladrilhos entre os polígonos da tabela, sendo um deles octogonal, o outro tipo escolhido deverá ter a forma de um

a) triângulo.
b) quadrado.
c) pentágono.
d) hexágono.
e) eneágono.

43. (CPII-RJ) Alguns polígonos regulares, quando postos juntos, preenchem o plano, isto é, não deixam folga, espaço entre si. Por outro lado, outras combinações de polígonos não preenchem o plano. A seguir, exemplos desse fato: a Figura 1, formada por hexágonos regulares, preenche o plano; a Figura 2, formada por pentágonos e hexágonos regulares, não preenche o plano.



■ Figura 1



■ Figura 2

Na Figura 2, a medida x do ângulo é igual a alternativa **b**

a) 14°.
b) 12°.
c) 10°.
d) 8°.

Áreas verdes urbanas

As áreas verdes, em centros urbanos, são fundamentais para diversos aspectos, entre eles, a melhora na qualidade do ar. Leia o texto a seguir.

A importância das áreas verdes nas cidades

Desde a Antiguidade, as áreas verdes e jardins tinham finalidades de passeio, lugar para expor luxo e de repouso. Atualmente com os problemas gerados pelas cidades modernas, elas e os parques e jardins são uma exigência não só para a ornamentação urbana, mas também como necessidade higiênica, de recreação e principalmente de defesa do meio ambiente diante da degradação das cidades.

[...]

Além de servirem como equilíbrio do ambiente urbano e de locais de lazer, também podem oferecer um colorido e plasticidade ao meio urbano.

Outro fator importante referente à vegetação é a arborização das vias públicas que serve como um filtro para atenuar ruídos, retenção de pó, reoxigenação do ar, além de oferecer sombra e a sensação de frescor.

[...]

LIMA, Valéria; AMORIM, Margarete C. de C. T. A importância das áreas verdes para a qualidade ambiental das cidades. **Revista Formação**, Presidente Prudente, v. 1, n. 13, p. 69-82. 2006. p. 71. Disponível em: http://revista.fct.unesp.br/index.php/formacao/article/viewFile/835/849. Acesso em: 4 set. 2024.

ERICH SACCO/SHUTTERSTOCK.COM

▪ Vista aérea do Parque Farroupilha, em Porto Alegre (RS). Fotografia de 2022.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Índice de Áreas Verdes

Indicadores e índices são números que procuram descrever um determinado aspecto da realidade, ou apresentam uma relação entre vários deles [...]. Dentre alguns indicadores que expressam a qualidade ambiental de uma cidade, destaca-se: o Índice de Áreas Verdes (IAV) que mede a relação entre a quantidade de área verde (m^2) e a população que vive em determinada cidade.

[...]

[...] em termos gerais, o IAV é aquele que denota a quantidade de espaços livres de uso público, em km^2 (kilometro quadrado) ou m^2 (metro quadrado) dividido pela quantidade de habitantes de uma cidade. [...]

[...]

TAVC = Σ áreas de parques (m^2) + Σ áreas de praças (m^2)

$$IAV = \frac{TAVC}{NH}$$

Onde:

TAVC = Total de áreas verdes consideradas (parques e praças)

IAV = Índice de áreas verdes

NH = Número de habitantes

[...]

TOLEDO, Fabiane dos S.; MAZZEI, Kátia; SANTOS, Douglas G. dos. Um índice de áreas verdes (IAV) na cidade de Uberlândia/MG. **REVSBAU**, Piracicaba, v. 4, n. 3, p. 86-97, 2009. p. 91, 99. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/332823831_UM_INDICE_DE_AREAS_VERDES_IAV_NA_CIDADE_DE_UBERLANDIA_MG. Acesso em: 4 set. 2024.

A Organização Mundial da Saúde (OMS) recomenda um mínimo de 12 m^2 de área verde por habitante.

Fonte dos dados: ÁREA verde por habitante. [*S. l.*]: Programa Cidades Sustentáveis, 2016. Disponível em: https://2013-2016-indicadores.cidadessustentaveis.org.br/area-verde-por-habitante. Acesso em: 4 set. 2024.

Saiba que...

Σ é o símbolo utilizado para o somatório, que indica a soma de determinados números. É também a décima oitava letra do alfabeto grego, que corresponde ao **S** maiúsculo.

Agora, faça o que se pede nas atividades a seguir.

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. Em sua opinião, por que é importante haver áreas verdes na cidade? Há áreas verdes em sua cidade? Converse com seus colegas sobre esses espaços. Respostas pessoais.

2. Uma cidade que tinha, em 2023, 62 961 882 m^2 de áreas verdes (praças e parques), tinha, na mesma data, a população de 1 409 351 habitantes.
Calcule o índice de áreas verdes (IAV) dessa cidade em 2023 e compare-o com o índice mínimo estabelecido pela ONU. IAV = 44,6744 m^2/hab. O índice está acima do recomendado pela ONU.

3. Junte-se a três colegas, e façam uma pesquisa sobre os parques urbanos do Brasil, incluindo aqueles que vocês já tenham visitado. Em seguida, organizem uma apresentação sobre o assunto, utilizando fotografias para ilustrar os parques pesquisados. Pesquisa do estudante.

WATIN/SHUTTERSTOCK.COM

Explorando polígonos inscritos na circunferência

De acordo com o que estudamos, a área (S) de um polígono regular é o produto de seu apótema (m) pelo semiperímetro (p), $S = p \cdot m$. Aprendemos, também, que todo polígono regular pode ser inscrito em uma circunferência.

Utilizando essas informações, podemos criar um arquivo no **GeoGebra**, em que é possível construir um polígono regular com tantos lados quanto desejarmos. Em seguida, o programa calcula o valor de sua área. Desse modo, podemos comparar o valor obtido com a fórmula anterior.

Para isso, siga os passos a seguir.

I. Utilizando a ferramenta **Ponto**, , clique na origem do sistema de coordenadas, definindo, assim, o ponto $A(0, 0)$.

II. Em seguida, ainda utilizando a ferramenta **Ponto**, , clique no ponto (1, 0) sobre o eixo x, ficando definido o ponto $B(1, 0)$.

III. Utilizando a ferramenta **Círculo dados Centro e Um de seus Pontos**, , clique primeiro no ponto A e, depois, no ponto B. O programa fornecerá uma circunferência de raio 1, cujo centro é o ponto A, e B é um de seus pontos.

Pode-se, então, utilizar a ferramenta **Ampliar**, , e clicar sobre a circunferência até que ela se ajuste ao espaço disponível, ou simplesmente utilizar o *scroll* do *mouse* para ampliar a imagem visível na janela de visualização.

IV. Utilize a ferramenta **Controle deslizante**, , e clique em qualquer lugar da janela de visualização. Na caixa de diálogo aberta (Figura **1**), nomeie-o como n e selecione a opção **Inteiro**. Além disso, altere os valores **min** e **max** para 3 e 200, respectivamente. Mantenha o incremento em 1.

IMAGENS: REPRODUÇÃO/GEOGEBRA

Figura **1**.

V. Para criar outro ponto na circunferência, vamos defini-lo de modo que sua distância ao ponto B coincida com a medida do lado do polígono regular de n lados. Para isso, digite "C=(cos(2*pi/n),sen(2*pi/n))" no campo de entrada para criar o ponto C.

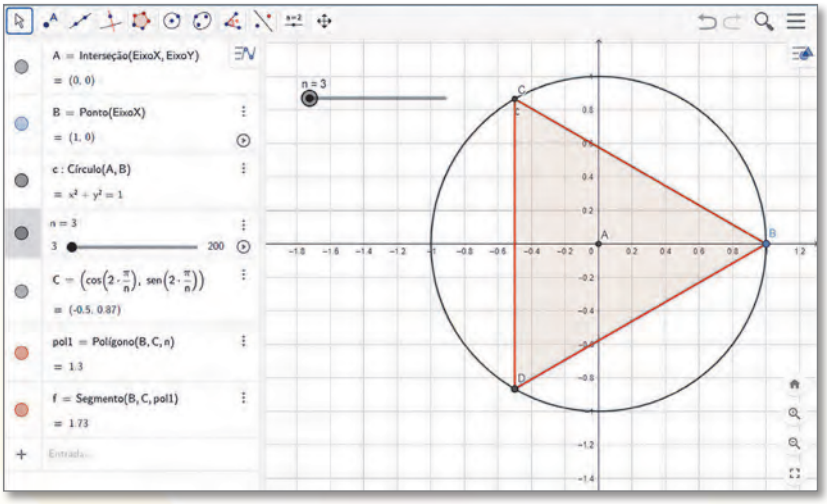
MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

PASSION ARTIST/SHUTTERSTOCK.COM

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

VI. Utilizando a ferramenta **Polígono Regular**, , clique primeiro no ponto *B* e, depois, no ponto *C*. Para o número de lados, digite "n". Assim, o valor do controle deslizante *n* vai determinar o número de lados do polígono regular. Surgirá, na janela de visualização, o triângulo equilátero inscrito na circunferência recém-criada (Figura **2**).

Observe que, na janela de Álgebra, aparece um objeto chamado **pol1** e, ao lado, um número. Esse número representa a área do polígono regular construído inscrito na circunferência de raio unitário.



IMAGENS: REPRODUÇÃO/GEOGEBRA

■ Figura **2**.

Agora, faça o que se pede nas atividades a seguir. Ver as **Orientações para o professor**.

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. Durante a construção, definimos o intervalo do controle deslizante de 3 a 200. Explique por que faz sentido o valor mínimo para essa construção ser $n = 3$.

2. Para $n = 3$, o polígono na tela será um triângulo equilátero.

- Utilizando a ferramenta **Reta Perpendicular**, , trace uma reta perpendicular a um dos lados do triângulo, a partir do ponto *A*.
- Marque o ponto de intersecção dessa reta com o lado do triângulo, utilizando a ferramenta **Interseção de Dois Objetos**, . A distância entre esse ponto e o ponto *A* é o apótema desse triângulo.

a) Utilizando a ferramenta **Distância, Comprimento ou Perímetro**, , meça o apótema e anote.

b) Com a mesma ferramenta anterior, meça um dos lados do triângulo e anote.

c) Calcule a área do triângulo equilátero usando a fórmula do semiperímetro.

d) Compare o valor calculado com o valor fornecido pelo GeoGebra.

3. O que acontece com o valor da área quando aumentamos o número de lados?

4. Ao definir $n = 200$, o polígono inscrito se parece com qual figura? O que podemos afirmar sobre o valor da área do polígono para esse caso?

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Pentágonos convexos que pavimentam o plano

Leia o texto a seguir sobre Marjorie Rice, uma dona de casa autodidata estadunidense que descobriu novas formas de ladrilhar o plano usando pentágonos. Observe que, mesmo sem uma formação acadêmica na disciplina, Rice pôde contribuir com a Matemática.

BOB GRIESER/LOS ANGELES TIMES/GETTY IMAGES

- Marjorie Rice, aos 75 anos, trabalha à sua mesa de cozinha na cidade de Los Angeles (EUA). Fotografia de 1998.

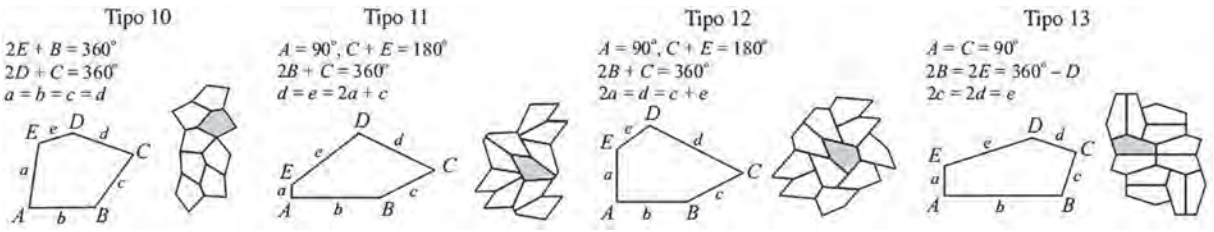
[...]

Em julho de 1975, *Martin Gardner* publicou na *Scientific American*, uma revista de divulgação científica, o problema de pavimentação do plano por polígonos convexos e a lista dos oito tipos de pentágonos convexos que conhecidamente pavimentam o plano. Essa publicação permitiu que um público mais amplo tivesse contato com o problema e, como veremos, estimulou a descoberta de novas pavimentações.

Richard James III, um cientista da área de computação, leu o artigo publicado por Martin Gardner e decidiu [...] tentar descobrir sozinho algum pentágono convexo que pavimentasse o plano. Após algumas tentativas, conseguiu encontrar um exemplo e o enviou para Martin Gardner [...].

Esse resultado foi publicado por Gardner no exemplar de dezembro de 1975 da *Scientific American*, elevando para nove o total de tipos de pentágonos que pavimentam o plano.

[...] essa descoberta despertou a curiosidade de outra leitora da *Scientific American*: uma dona de casa de San Diego, Califórnia, *Marjorie Rice*, com cinco filhos, sem formação matemática específica além daquela obtida no ensino médio. Após ler o artigo de Martin Gardner de dezembro de 1975, começou a desenvolver sua própria pesquisa sistemática sobre quais tipos de pentágonos convexos podem pavimentar o plano. Dentre os vários resultados obtidos por ela, destaca-se a descoberta, em 1976 e em 1977, de quatro novos tipos de pavimentações do plano por pentágonos convexos [...].



- Os quatros tipos de pavimentações do plano por pentágonos convexos descobertos por Marjorie Rice.

O décimo quarto tipo de pentágono convexo que pavimenta o plano foi descoberto somente em 1985 por *Rolf Stein*, um estudante de Matemática da Universidade de Dortmund, Alemanha.

[...]

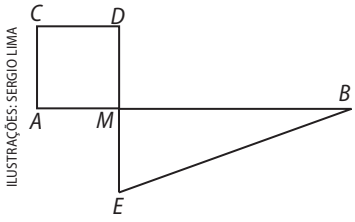
Fonte: DUTENHEFNER, Francisco; CASTRO, Rosiene de F. C. R. Uma história sobre pavimentações do plano euclidiano: acertos e erros. **Revista do Professor de Matemática (RPM)**, São Paulo, n. 70, [200-]. Disponível em: https://rpm.org.br/cdrpm/70/2.html. Acesso em: 4 set. 2024.

FRANCISCO DUTENHEFNER/ROSIENE DE FÁTIMA C. RUIZ CASTRO/RPM-REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

ATIVIDADES COMPLEMENTARES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. (UFRGS-RS) Considere $\overline{AB}$ um segmento de comprimento 10 e M um ponto desse segmento, distinto de A e de B, como na figura abaixo. Em qualquer posição do ponto M, $AMDC$ é quadrado e BME é triângulo retângulo em M.



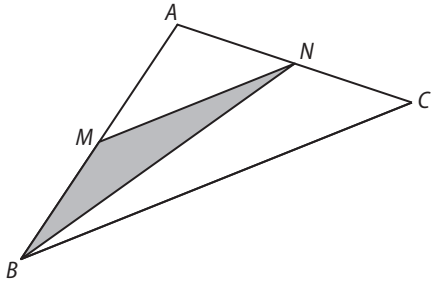
ILUSTRAÇÕES: SERGIO LIMA

Tomando x como a medida dos segmentos $\overline{AM}$ e $\overline{EM}$, para que valor(es) de x as áreas do quadrado $AMDC$ e do triângulo BME são iguais?

a) 0 e $\frac{10}{3}$.
b) 0, 2 e 3.
c) $\frac{10}{3}$.
d) 0, $\frac{10}{3}$ e 10.
e) 5.

alternativa **c**

2. (Unicamp-SP) No triângulo ABC exibido na figura a seguir, M é o ponto médio do lado AB, e N é o ponto médio do lado AC.

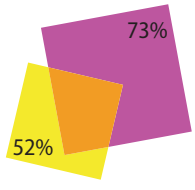


Se a área do triângulo MBN é igual a t, então a área do triângulo ABC é igual a alternativa **c**

a) $3t$. **b)** $2\sqrt{3}t$. **c)** $4t$. **d)** $3\sqrt{2}t$.

3. (OBMEP) Dois quadrados de papel se sobrepõem como na figura. A região não sobreposta do quadrado menor corresponde a 52% de sua área e a região não sobreposta do quadrado maior corresponde a 73% de sua área. Qual é a razão entre o lado do quadrado menor e o lado do quadrado maior? alternativa **a**

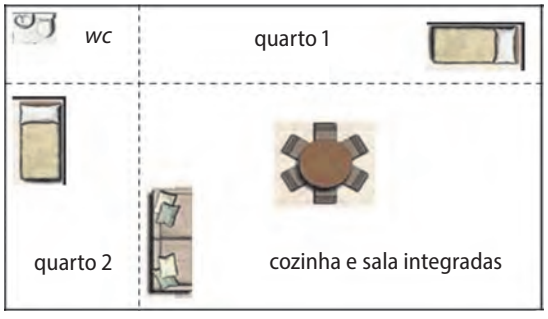
a) $\frac{3}{4}$
b) $\frac{5}{8}$
c) $\frac{2}{3}$
d) $\frac{4}{7}$
e) $\frac{4}{5}$



4. (Unifor-CE) Um pequeno terreno retangular tem área de 104 m². Sabendo que seu comprimento tem 3 m a menos que o dobro de sua largura, é correto concluir que a medida desse comprimento está entre: alternativa **b**

a) 14 m e 16 m
b) 12 m e 14 m
c) 10 m e 12 m
d) 8 m e 10 m
e) 6 m e 8 m

5. (Udesc) O projeto de uma casa é apresentado em forma retangular e dividido em quatro cômodos, também retangulares, conforme ilustra a Figura 3.



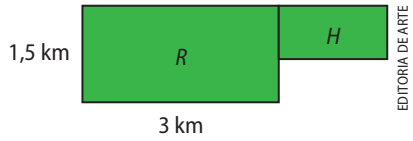
UDESC, 2010

Figura 3: Projeto de uma casa de quatro cômodos.

Sabendo que a área do banheiro (*wc*) é igual a 3 m² e que as áreas dos quartos 1 e 2 são, respectivamente, 9 m² e 8 m², então a área total do projeto desta casa, em metros quadrados, é igual a: alternativa **c**

a) 24 **b)** 32 **c)** 44 **d)** 72 **e)** 56

6. (UFABC-SP) Observe a figura. As duas áreas retangulares são utilizadas para o plantio de cana-de-açúcar, sendo que a área R está para a área H na razão de 9 para 5. Sabe-se que um hectare (ha) de cana produz 8 mil litros de etanol. Dado: 1 ha = 10 000 m² alternativa **d**



EDITORIA DE ARTE

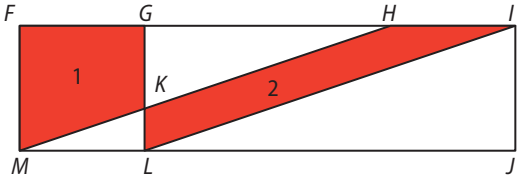
Pode-se concluir, então, que as áreas R e H, juntas, produzem:

a) $2{,}5 \cdot 10^6$ litros de etanol.
b) $3{,}6 \cdot 10^6$ litros de etanol.
c) $4{,}5 \cdot 10^6$ litros de etanol.
d) $5{,}6 \cdot 10^6$ litros de etanol.
e) $6{,}2 \cdot 10^6$ litros de etanol.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

7. (UFRN) Miguel pintará um painel retangular com motivos geométricos. As duas regiões destacadas, a região 1 (*FGKM*), contida no quadrado *FGLM*, e a região 2 (*HILK*), contida no paralelogramo *HILM*, conforme figura abaixo, serão pintadas de vermelho. Sabe-se que a tinta utilizada para pintar uma região qualquer depende proporcionalmente de sua área.



Se Miguel gastasse, na pintura da região 1, $\frac{3}{7}$ da tinta vermelha de que dispõe, poderíamos afirmar que alternativa **d**

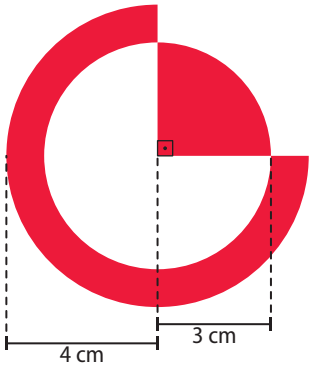
a) o restante de tinta vermelha daria, exatamente, para a pintura da região 2.

b) o restante de tinta vermelha seria insuficiente para a pintura da região 2.

c) a região 2 seria pintada e ainda sobrariam $\frac{3}{7}$ de tinta vermelha.

d) a região 2 seria pintada e ainda sobraria $\frac{1}{7}$ de tinta vermelha.

8. (FCMSCSP) Na figura, vê-se uma forma geométrica em vermelho que foi obtida pela junção de um setor circular de raio 3 cm e ângulo 90° com um setor de uma coroa circular de raio interno 3 cm, raio externo 4 cm e ângulo 270°. alternativa **a**



O círculo cuja área é igual à área da forma geométrica em vermelho tem raio igual a

a) $\frac{\sqrt{30}}{2}$ cm **c)** $\frac{\sqrt{33}}{2}$ cm **e)** $\frac{\sqrt{35}}{2}$ cm

b) $\frac{\sqrt{31}}{2}$ cm **d)** $\frac{\sqrt{34}}{2}$ cm

9. (Enem/MEC) O dono de uma loja pretende usar cartões imantados para a divulgação de sua loja. A empresa que fornecerá o serviço lhe informa que o custo de fabricação do cartão é de R$ 0,01 por centímetro quadrado e que disponibiliza modelos tendo como faces úteis para impressão: alternativa **e**

- um triângulo equilátero de lado 12 cm;
- um quadrado de lado 8 cm;
- um retângulo de lados 11 cm e 8 cm;
- um hexágono regular de lado 6 cm;
- um círculo de diâmetro 10 cm.

O dono da loja está disposto a pagar, no máximo, R$ 0,80 por cartão. Ele escolherá, dentro desse limite de preço, o modelo que tiver maior área de impressão.

Use 3 como aproximação para π e use 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$.

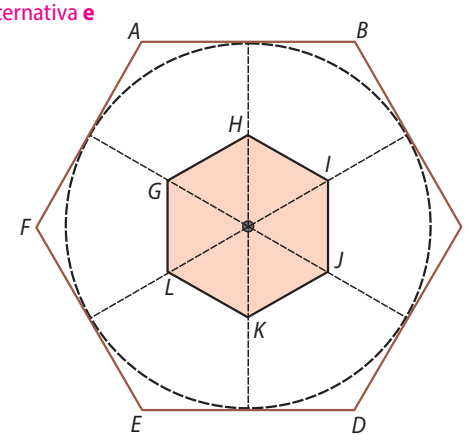
Nessas condições, o modelo que deverá ser escolhido tem como face útil para impressão um

a) triângulo. **d)** hexágono.

b) quadrado. **e)** círculo.

c) retângulo.

10. (FGV-SP) A figura indica um hexágono regular *ABCDEF*, de área S_1, e um hexágono regular *GHIJKL*, de vértices nos pontos médios dos apótemas do hexágono *ABCDEF* e área S_2. alternativa **e**



ILUSTRAÇÕES: SERGIO LIMA

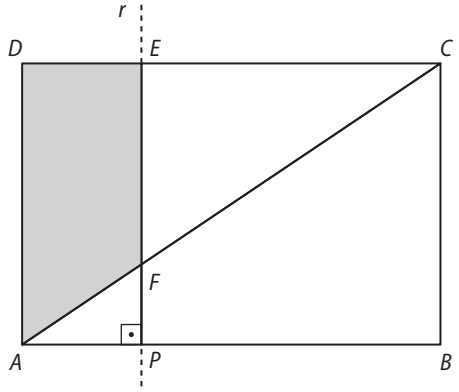
Nas condições descritas, $\frac{S_2}{S_1}$ é igual a

a) $\frac{3}{4}$ **c)** $\frac{7}{25}$ **e)** $\frac{3}{16}$

b) $\frac{8}{25}$ **d)** $\frac{1}{5}$

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

11. (UFRGS-RS) Considere um retângulo *ABCD*, de lados $\overline{AB} = 12$ e $\overline{AD} = 8$, e um ponto *P* construído sobre o lado $\overline{AB}$. Traçando a reta *r* perpendicular ao lado $\overline{AB}$ que passa pelo ponto *P*, determina-se o polígono *ADEF*, em que *E* e *F* são pontos de interseção de *r* com os segmentos $\overline{DC}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, como mostra a figura abaixo. alternativa **d**



Tomando *x* como a medida do segmento $\overline{AP}$, a função *A*(*x*) que expressa a área de *ADEF* em função de *x*, entre as alternativas abaixo, é

a) $A(x) = 8x - \frac{x^2}{6}$, para $0 \leqslant x \leqslant 12$.

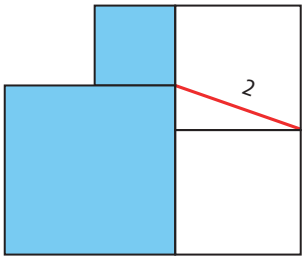
b) $A(x) = 8x - \frac{2x^2}{3}$, para $0 \leqslant x \leqslant 12$.

c) $A(x) = 16x - \frac{2x^2}{3}$, para $0 \leqslant x \leqslant 12$.

d) $A(x) = 8x - \frac{x^2}{3}$, para $0 \leqslant x \leqslant 12$.

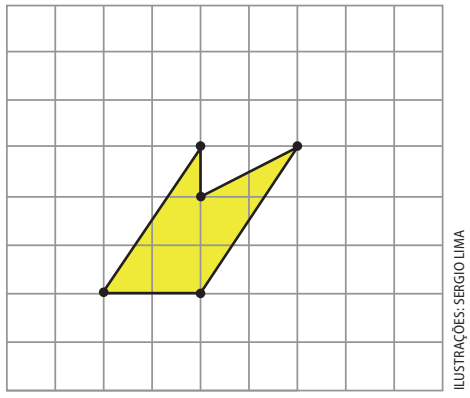
e) $A(x) = 8x - \frac{3x^2}{4}$, para $0 \leqslant x \leqslant 12$.

12. (OBMEP) A figura a seguir é formada por quatro quadrados. A medida do segmento destacado em vermelho é 2. Qual é a soma das áreas dos quadrados azuis? alternativa **d**



a) 2 **c)** 6 **e)** 10
b) 4 **d)** 8

13. (OBMEP) A área do polígono amarelo com vértices em pontos do quadriculado é 30 cm². Qual é a área, em cm², de cada quadradinho do quadriculado? alternativa **e**



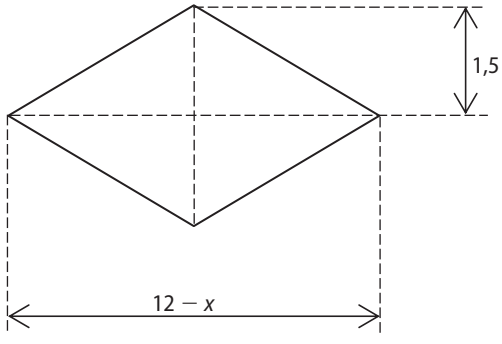
ILUSTRAÇÕES: SERGIO LIMA

a) 2 **c)** 4 **e)** 6
b) 3 **d)** 5

14. (IFRN) Como lembrança da Cúpula da Amazônia, uma empresa entregou uma miniatura retangular do parque estadual Mangal das Garças. Sabendo que essa miniatura tinha dimensões de 2 cm de comprimento por 8 cm de largura e que foi feita numa escala de 1:5 000, a área real do mangal das garças, que foi representada, em m², na miniatura é alternativa **a**

a) 40 000. **c)** 25 000.
b) 30 000. **d)** 35 000.

15. (Epcar-MG) A figura abaixo é um losango e as medidas indicadas estão em metros.



Todos os possíveis valores reais de *x* para que a área desse losango seja maior ou igual a 72 m², são tais que alternativa **d**

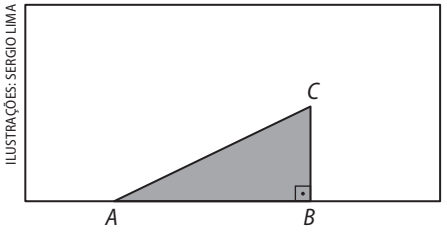
a) $x \geqslant -84$ **c)** $x \leqslant -84$
b) $x \geqslant -36$ **d)** $x \leqslant -36$

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

16. b) $AC = \frac{x\sqrt{5}}{2}$

16. (PUC-RJ) Seja R um retângulo com base igual a 24 e altura igual a 12. Um triângulo retângulo ABC com ângulo reto em B e base AB com comprimento igual ao dobro da altura BC deve ser construído dentro do retângulo R, de forma que a base AB fique sobre a base do retângulo R. Considere x o comprimento da base AB.

ILUSTRAÇÕES: SERGIO LIMA

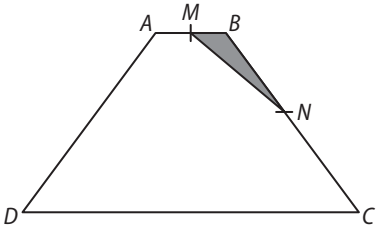


a) Para quais valores de x é possível construir esse triângulo? $0 < x \leq 24$

b) Encontre a expressão da hipotenusa do triângulo retângulo ABC em termos de x.

c) Determine o valor de x para o qual a área do triângulo ABC é igual a 64. $x = 16$

17. (Unicamp-SP) Na figura a seguir, $ABCD$ é um trapézio com $AB = 1$ e $CD = 5$. Os pontos M e N são pontos médios de AB e BC, respectivamente.



Sabendo que a área de MBN é 1, a área do trapézio é: alternativa **d**

a) 18. **b)** 20. **c)** 22. **d)** 24.

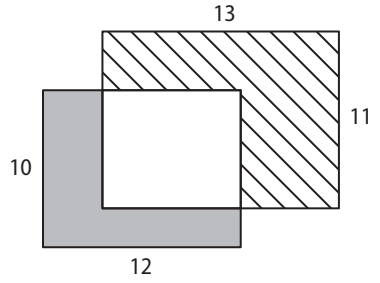
18. (UFJF-MG) Um restaurante vende pizzas tamanho família que são produzidas em formas quadradas de 40 centimetros de lado e circulares de 40 centimetros de diâmetro. Para estimular a venda das pizzas quadradas, o dono do restaurante utiliza a frase: "Leve mais *pizza* pelo mesmo preço: compre *pizza* quadrada!". Ao optar pela *pizza* quadrada, quantos cm^2 a mais de *pizza* o cliente está comprando? (Utilize $\pi = 3{,}14$). alternativa **c**

a) 34,4 cm^2 **d)** 912 cm^2

b) 91,2 cm^2 **e)** 1348,8 cm^2

c) 344 cm^2

19. (IFSC) Marcelo recortou dois retângulos, um de dimensões 10 cm × 12 cm e outro de dimensões 11 cm × 13 cm. Em seguida, Marcelo colocou um retângulo sobre o outro, como mostra a imagem, e percebeu que a região cinza tinha uma área equivalente a 58 cm^2. Sendo assim, a área da região hachurada é: alternativa **e**



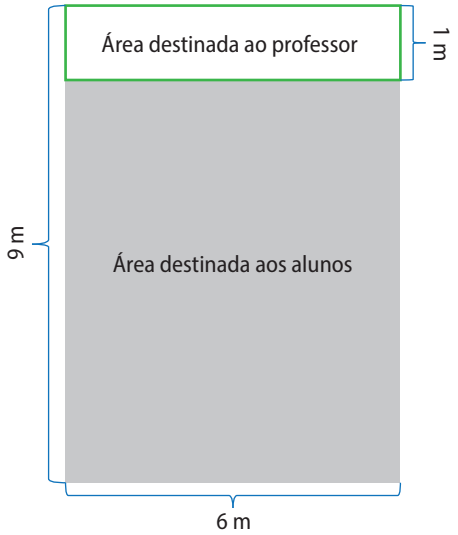
a) 62 cm^2. **d)** 84 cm^2.

b) 92 cm^2. **e)** 81 cm^2.

c) 79 cm^2.

20. (IFMA) Suponha que uma sala de aula esteja sendo construída para ser utilizada sem o apoio de recursos digitais, conforme a Figura 1. Sabendo que, nessa sala de aula, cada aluno necessita de um espaço correspondente a 1,50 m^2, o número máximo de alunos que podem estar presentes, simultaneamente, nesse ambiente, considerando a área destinada aos alunos, é alternativa **c**

Figura 1



Fonte: Elaboração própria.

a) 36. **c)** 32.

b) 28. **d)** 40.

21. (UFRGS-RS) Na figura abaixo, o triângulo *ABC* é equilátero de lado 4. O ponto *D* pertence ao lado *AB*, o ponto *E* pertence ao lado *BC*, o ponto *F* pertence ao lado *AC*, e os segmentos *AD*, *BE* e *CF* têm medida *x*.

A função $A(x)$ que expressa a área do triângulo equilátero *DEF*, para $0 \leqslant x \leqslant 4$, é alternativa **e**

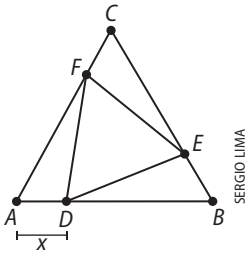
a) $A(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}(3x^2 - 6x + 8)$.

b) $A(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}(3x^2 + 12x + 16)$.

c) $A(x) = -\frac{\sqrt{3}}{4}(3x^2 + 12x - 16)$.

d) $A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}(3x^2 + 12x + 16)$.

e) $A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}(3x^2 - 12x + 16)$.



SERGIO LIMA

PARA REFLETIR

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Neste Capítulo, retomamos o conceito de área de polígonos e de área do círculo e de suas partes. Aprofundamos nosso estudo refletindo sobre a variação da área e do perímetro de polígonos regulares em função do comprimento dos lados. Aprendemos que a medida do ângulo interno de polígonos regulares está diretamente relacionada à possibilidade de ladrilhamento do plano.

Nas páginas de abertura, abordamos o trabalho das ONGs e os programas sociais direcionados à construção e à reforma de moradias populares.

Na seção **Conexões**, conhecemos o conceito de índice de áreas verdes (IAV) de um município e pudemos pensar sobre a importância de parques e praças arborizados nas grandes cidades.

Vamos refletir a respeito das aprendizagens do Capítulo **7**: Respostas pessoais.

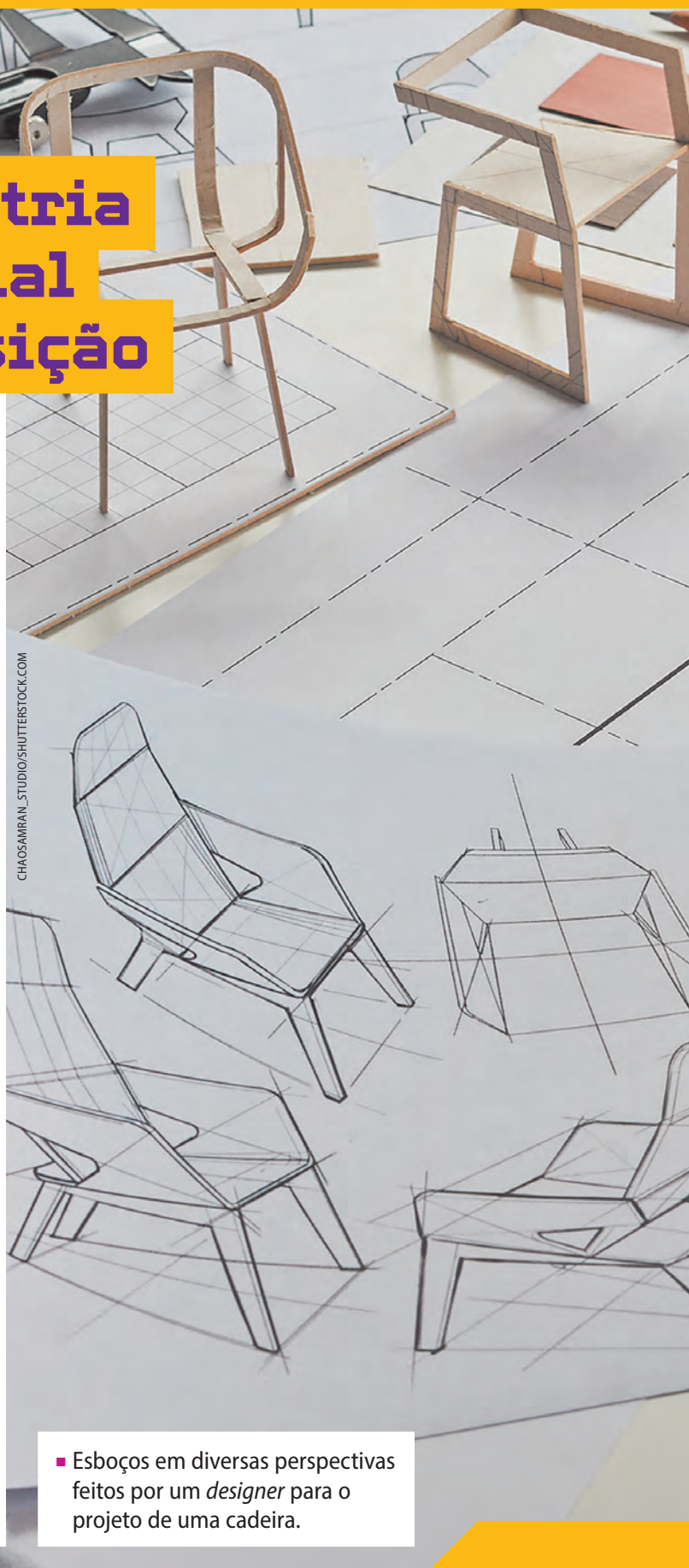
- Você lembrava como calcular a área de figuras como o quadrado, o triângulo e o losango?
- A partir da área do círculo, podemos calcular a área de uma coroa circular e do setor circular. Você recorda como?
- Aprendemos que a variação da área de um polígono regular em função da medida do comprimento do seu lado é modelada pela função quadrática restrita ao domínio dos números reais positivos. Qual função modela a relação entre o perímetro e a medida do lado de um polígono regular?
- Ao escolher polígonos regulares para ladrilhar um plano, qual critério geométrico devemos considerar?
- Sobre o estudo relacionado às áreas de polígonos regulares inscritos na circunferência, as atividades da seção **Explorando a tecnologia** ajudaram você a compreender melhor esse tema?

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

CAPÍTULO

8

Geometria Espacial de Posição



CHAOSAMRAN_STUDIO/SHUTTERSTOCK.COM

O mundo em que vivemos é tridimensional. Pensando nisso, você já refletiu sobre como podemos representar objetos do mundo real em superfícies bidimensionais, como uma folha de papel ou a tela de um computador? Para realizar essa tarefa, são usados conhecimentos da Geometria Espacial, assunto deste Capítulo.

Profissionais como engenheiros, arquitetos e *designers* são algumas das pessoas que precisam fazer essa representação do mundo real, desenhando peças automobilísticas, plantas de imóveis, projetos de cadeiras e de outros móveis etc. Para isso, é preciso saber os fundamentos do desenho técnico e da Geometria Descritiva.

Os desenhos técnicos são representações gráficas de formas, dimensões e posições de um objeto seguindo algumas regras e padrões. Essas regras são necessárias para que qualquer pessoa que tenha acesso ao desenho consiga entendê-lo e interpretá-lo, sem precisar de explicações adicionais.

A Geometria Descritiva é a área do conhecimento dedicada a fazer essa transposição do mundo real (3D) para a folha de papel ou para a tela do computador (2D). Isso pode ser feito usando as vistas e projeções ou as perspectivas.

■ Esboços em diversas perspectivas feitos por um *designer* para o projeto de uma cadeira.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Ver as **Orientações para o professor**.

Agora, reúna-se a mais dois colegas, e façam o que se pede em cada questão.

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. O que significa dizer que algo é tridimensional? E que algo é bidimensional?
2. No Brasil, as normas para a realização do desenho técnico são coordenadas pela Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT). Vocês já conheciam o desenho técnico ou já fizeram um? Quais são as principais diferenças entre o desenho técnico e o desenho artístico?
3. No desenho técnico, podemos ter representações de objetos por meio de perspectivas e de projeções. Vocês conhecem essas técnicas? Pesquisem cada uma delas e os principais tipos de perspectiva.
4. Desenhem um objeto em perspectiva e suas vistas frontal, lateral e superior.

Elaboração dos estudantes.

Introdução

Os objetos que nos cercam podem ser pensados como objetos tridimensionais, isto é, que têm três dimensões: comprimento, largura e altura (ou profundidade). Para formalizar a maneira como descrevemos e entendemos esses objetos, são necessários alguns conceitos da chamada **Geometria Espacial de Posição**, que estuda a posição entre os entes geométricos e é o tema deste Capítulo.

Além disso, como estudamos na abertura, o desenho técnico, muito presente em áreas como o *Design*, a Arquitetura e a Engenharia, utiliza conceitos da Geometria Descritiva, relacionada com a Geometria Espacial de Posição.

Noções primitivas

Para iniciar os estudos da Geometria Espacial de Posição, precisamos partir de algumas noções que são aceitas sem definição. Essas noções são as de ponto, reta e plano e são chamadas de **noções primitivas**.

Observe a seguir como essas noções são representadas.

- Ponto *A*. Em geral, para dar nome aos pontos, usamos letras maiúsculas de nosso alfabeto.
- Reta *r*. Para nomear as retas, é comum usarmos letras minúsculas de nosso alfabeto.

- Plano α. Para nomear os planos, usamos letras gregas minúsculas.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Essas representações são úteis para o estudo de Geometria, pois dão uma ideia do que são esses entes geométricos, uma vez que eles não existem no mundo real. Apesar disso, alguns objetos do cotidiano lembram as representações dessas noções primitivas. Podemos dizer, por exemplo, que o ponto-final da ortografia lembra um ponto, uma corda esticada lembra uma reta e uma folha de papel lembra um plano.

Qualquer outro conceito geométrico diferente das noções primitivas precisa ser definido com base nelas ou em outros conceitos já estabelecidos anteriormente.

Conceitos preliminares

Ao longo deste Capítulo, apresentaremos diversas afirmações, que podem ser divididas em três tipos.

- **Postulados** ou **axiomas**: são proposições (afirmações matemáticas) aceitas sem necessidade de demonstração.
- **Definições**: são proposições feitas a partir de noções primitivas, de definições anteriores ou de resultados já demonstrados. As definições também não são demonstradas.
- **Teoremas**: são proposições enunciadas com base em postulados, em definições e em resultados já demonstrados. Só têm validade porque são demonstrados, ou seja, são validados com base em uma argumentação lógica.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Nesta Coleção, não apresentaremos a demonstração de todos os teoremas enunciados, apenas a de alguns, considerados mais importantes ou cuja demonstração auxilie no entendimento de algum conteúdo. Ainda a respeito dos teoremas, eles são essencialmente constituídos de duas partes, a hipótese e a tese. A **hipótese** é o conjunto de afirmações que supomos verdadeiras, e a **tese** é aquilo que queremos demonstrar como verdadeiro. A demonstração de um teorema é o raciocínio percorrido para se chegar da hipótese à tese usando os resultados admitidos e/ou demonstrados anteriormente.

Saiba que...

Para fazer a demonstração de um teorema, podemos utilizar diversas técnicas estabelecidas ao longo do desenvolvimento da Matemática. Alguns exemplos de tipos de demonstração são: demonstração **direta**, demonstração **por absurdo**, demonstração **por contrapositiva**, **princípio da indução finita** e demonstração por **contraexemplo**.

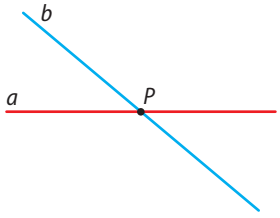
Para iniciar os estudos da Geometria Espacial, ou seja, da geometria do espaço, apresentamos a seguir a definição de espaço no contexto da Geometria.

Espaço é o conjunto formado por todos os pontos.

Além disso, também precisamos retomar as definições de retas paralelas e de retas concorrentes. Assim:

Duas retas são **concorrentes** se elas têm um único ponto em comum.

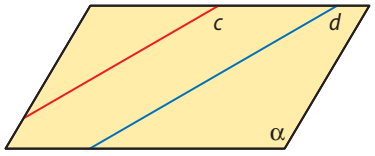
As retas a e b são concorrentes, e o ponto P é o único ponto em comum entre elas. Usando a notação de conjuntos, podemos escrever: $a \cap b = \{P\}$



EDITORIA DE ARTE

Duas retas são **paralelas** se são coplanares (estão em um mesmo plano) e não têm ponto em comum.

As retas c e d são paralelas, pois estão no mesmo plano (plano α) e não têm ponto em comum entre elas. Usando a notação de conjuntos, escrevemos: $c \cap d = \varnothing$ ou $c \cap d = \{\}$



SERGIO LIMA

$c /\!/ d$

Este símbolo significa **paralelo a**.

Pense e responda

Dê exemplos de situações do cotidiano que podemos relacionar com retas paralelas.

Respostas possíveis: As linhas paralelas de um campo de futebol, a faixa de pedestres etc.

Postulados

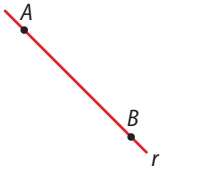
As primeiras proposições que vamos apresentar são alguns postulados relacionados a pontos, retas e planos que serão utilizados no estudo da Geometria Espacial.

Postulados da reta

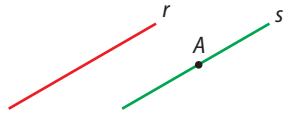
■ $A \in r$ e $B \notin r$.

R_1: Em uma reta, bem como fora dela, existem infinitos pontos.

R_2: Dois pontos distintos determinam uma única reta que os contém.



■ Reta r ou reta $\overleftrightarrow{AB}$.



■ $A \notin r$, $A \in s$ e $r \parallel s$.

R_3: Por um ponto A, fora de uma reta r, passa uma única reta s paralela à reta r.

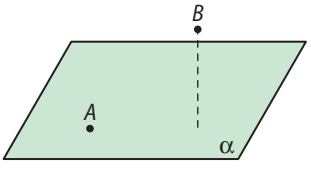
O postulado **R_3** também é conhecido como postulado de Euclides.

Saiba que...

Podemos denotar uma reta tomando dois pontos que a determinem. Por exemplo, se A e B são pontos distintos, então podemos denotar a reta que contém A e B por $\overleftrightarrow{AB}$.

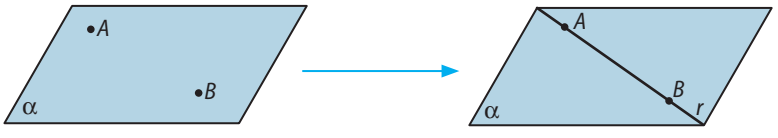
Postulados do plano

P_1: Em um plano, bem como fora dele, existem infinitos pontos.



■ $A \in \alpha$ e $B \notin \alpha$.

P_2: Toda reta que tem dois pontos distintos em um plano está contida nesse plano.



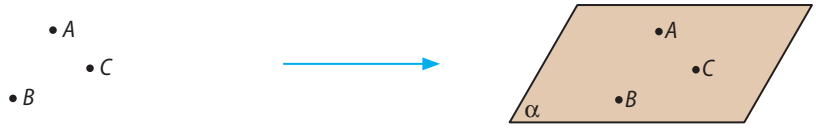
■ $A \in \alpha$ e $B \in \alpha$.

■ $r \subset \alpha$

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

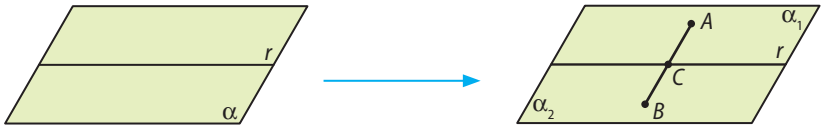
MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

P_3: Três pontos que não estão em uma mesma reta (não colineares) determinam um único plano que os contém.



■ *A*, *B* e *C* não colineares. ■ Plano α.

P_4: Uma reta contida em um plano divide-o em duas regiões denominadas **semiplanos**.

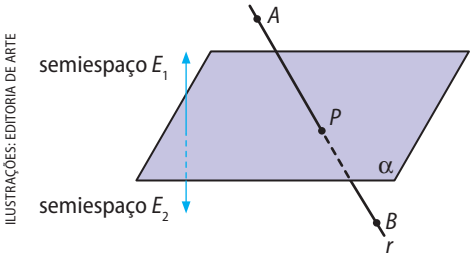


■ $r \subset \alpha$ ■ α_1 e α_2: semiplanos de origem *r*.

A reta *r* é considerada a **origem dos semiplanos**, e os semiplanos α_1 e α_2 são ditos **opostos**.

Um segmento de reta que liga um ponto qualquer de α_1 a um ponto qualquer de α_2 tem um único ponto em comum com a reta *r*.

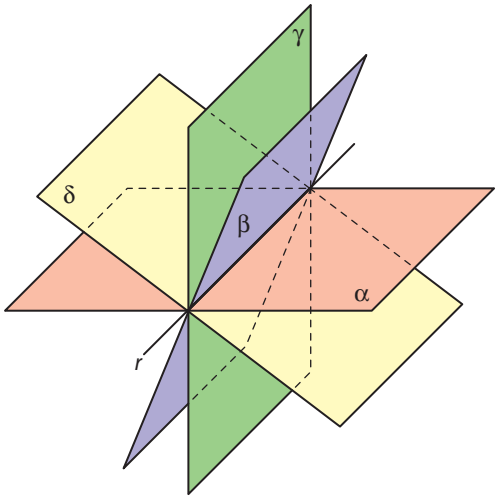
P_5: Um plano divide o espaço em duas regiões denominadas **semiespaços**.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

O plano α é considerado a **origem dos semiespaços**.

Uma reta determinada por dois pontos, um em cada semiespaço, intersecta necessariamente o plano em um único ponto.



P_6: Por uma reta passam infinitos planos.

Com base nesses postulados, poderemos enunciar definições e teoremas da Geometria Espacial de Posição.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Determinação do plano

Um plano pode ser determinado de quatro maneiras distintas. Acompanhe cada uma delas a seguir.

1ª) Pelo postulado $\mathbf{P}_3$ do plano.

> Três pontos que não estão em uma mesma reta (não colineares) determinam um único plano que passa por eles.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

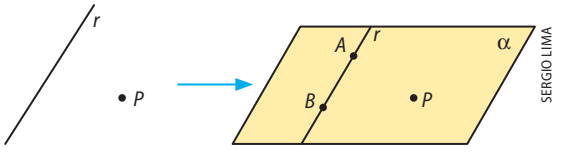
Além da indicação usando as letras gregas, também podemos denotar um plano pelos pontos que o determinam. Assim, escrevemos **plano *ABC*** para o plano determinado pelos pontos *A*, *B* e *C*.

2ª) Pelo teorema a seguir.

> **Teorema 1**: Uma reta e um ponto fora dela determinam um único plano que os contém.

Demonstração

Sejam *r* uma reta e *P* um ponto fora dessa reta. Pelo postulado $\mathbf{R}_1$ da reta, existem infinitos pontos distintos em *r*. Tomando em *r* dois pontos distintos *A* e *B*, e não sendo colineares os pontos *A*, *B* e *P*, pelo postulado $\mathbf{P}_3$ do plano, eles determinam um único plano que os contém.



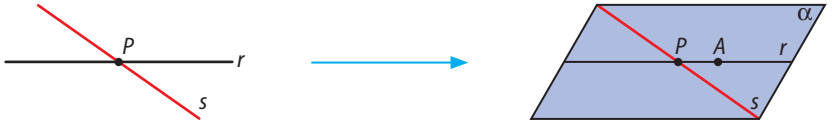
SERGIO LIMA

3ª) Pelo teorema a seguir.

> **Teorema 2**: Duas retas concorrentes determinam um único plano que as contém.

Demonstração

Sejam duas retas *r* e *s* concorrentes no ponto *P*. Considerando um ponto *A* sobre a reta *r*, distinto do ponto *P* (que existe pelo postulado $\mathbf{R}_1$ da reta), sabemos, pelo teorema **1**, que a reta *s* e o ponto *A*, exterior a *s*, determinam um único plano α.



Observe que esse plano α contém a reta *s*, por construção, e a reta *r*, na qual estão contidos dois pontos distintos, *P* e *A* (postulado $\mathbf{P}_2$ do plano).

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

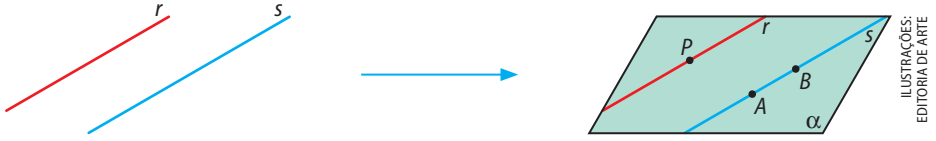
MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

4ª) Pelo teorema a seguir.

Teorema 3: Duas retas paralelas determinam um único plano que as contém.

Demonstração

Sejam as retas paralelas *r* e *s*. Pelo postulado $\mathbf{R}_1$ da reta, considerando um ponto *P* em *r* e dois pontos *A* e *B* distintos em *s*, determinamos o plano α, uma vez que *P*, *A* e *B* são três pontos não alinhados (postulado $\mathbf{P}_3$ do plano).



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

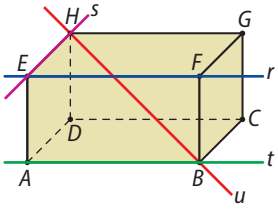
Posições relativas de duas retas

No início deste Capítulo, retomamos os conceitos de retas concorrentes e retas paralelas. Essas definições são utilizadas para retas coplanares. Agora, vamos ampliar os estudos de posição relativa de duas retas para retas no espaço.

Para determinar quais são as possíveis posições relativas de retas, observamos se as retas estão em um mesmo plano e se há pontos em comum entre elas.

Duas retas são **coplanares** se existe um plano que as contém.

Por exemplo, na figura a seguir, as retas *r* e *s* são coplanares. Note que elas são concorrentes no ponto *E* (pelo teorema **2**, determinam um único plano).



Pense e responda

Observe a representação do bloco retangular *ABCDEFGH*, em que estão destacadas as retas *r*, *s*, *t* e *u*.

- Indique um par de retas contidas em um mesmo plano.
- Indique um par de retas que não estão contidas em um mesmo plano.

retas *r* e *t*; retas *r* e *s*; retas $\overleftrightarrow{FG}$ e $\overleftrightarrow{BC}$. Existem outras respostas possíveis.

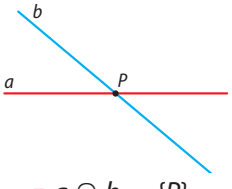
retas *r* e *u*; retas *s* e *t*; retas $\overleftrightarrow{GH}$ e $\overleftrightarrow{AD}$. Existem outras respostas possíveis.

Saiba que...

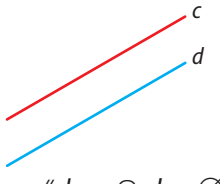
Uma reta que contém dois pontos ou um segmento de reta e que passa por esses dois pontos ou pelo segmento de reta que os contém é chamada **reta suporte**. Por exemplo, a reta *r* é a reta suporte da aresta $\overline{EF}$, e a reta *s* é a reta suporte da aresta $\overline{EH}$.

Duas retas coplanares são:

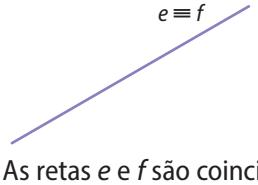
- **concorrentes** se têm apenas um ponto em comum;
- **paralelas** se não têm ponto em comum;
- **coincidentes** se têm todos os pontos em comum.



■ $a \cap b = \{P\}$



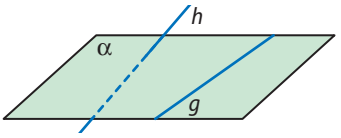
■ $c \parallel d$ e $c \cap d = \varnothing$



■ As retas *e* e *f* são coincidentes ($e \equiv f$ ou $e = f$).

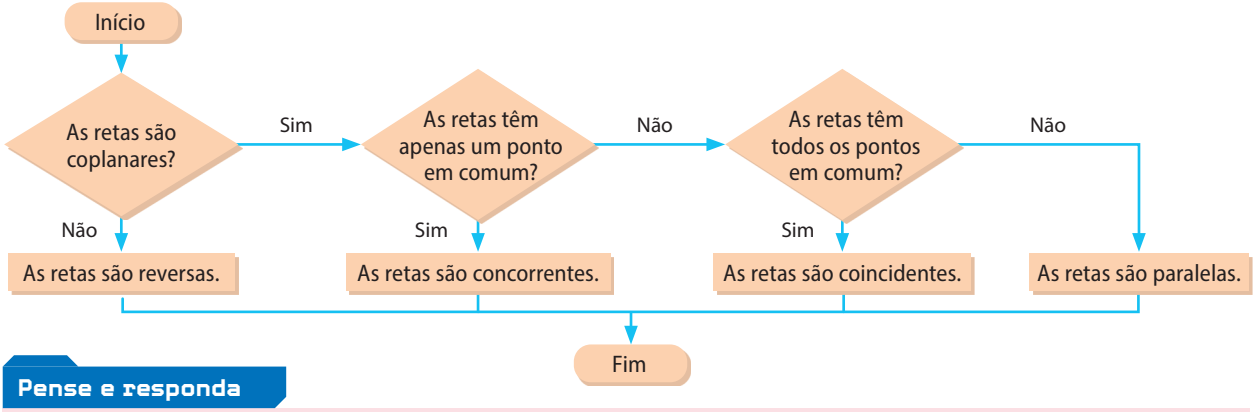
Este símbolo significa **coincidente com**.

Duas retas são **reversas** se não existe um plano que as contenha.



■ As retas g e h são reversas.

Com as classificações apresentadas, podemos montar um fluxograma que nos auxilia a compreender cada um dos casos de posições relativas de duas retas no plano e no espaço.

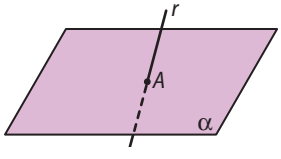


Pense e responda

Reúna-se a um colega, e debatam: essa é a única maneira de representar as posições relativas de duas retas no plano e no espaço por meio de um fluxograma? Justifiquem sua resposta e, caso não seja a única, construam outro fluxograma. Não. Ver as **Orientações para o professor**.

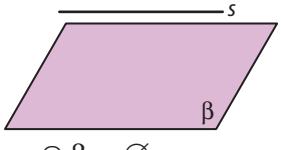
Posições relativas de uma reta e um plano no espaço

Agora, estudaremos como uma reta e um plano podem estar posicionados no espaço. Para isso, vamos observar o número de pontos em comum que eles têm.



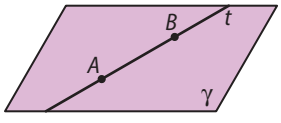
■ $r \cap \alpha = \{A\}$

Uma reta r e um plano α são **secantes**, ou **concorrentes**, se têm um único ponto em comum.



■ $s \cap \beta = \varnothing$

Uma reta s e um plano β são **paralelos** se não têm ponto em comum.



■ $t \subset \gamma$

Uma reta t está **contida** em um plano γ se ambos têm em comum todos os pontos da reta t.

Pelo postulado $\mathbf{P}_2$ do plano, basta que a reta t e o plano γ tenham mais de um ponto em comum para que essa reta esteja contida nesse plano.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

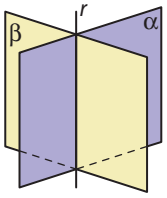
Pense e responda Ver as **Orientações para o professor**.

Reúna-se a um colega, e construam um fluxograma para identificar as posições relativas de uma reta e um plano no espaço.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Posições relativas de dois planos no espaço

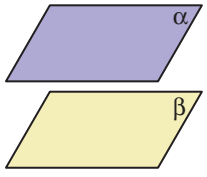
Vamos estudar, agora, como dois planos no espaço podem se relacionar. Mais uma vez, vamos observar os pontos comuns entre eles.



▪ $\alpha \cap \beta = r$

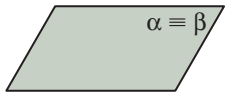
Dois planos α e β são **secantes**, ou **concorrentes**, se têm uma única reta em comum.

Dois planos α e β são **paralelos** se não têm ponto em comum.



▪ $\alpha \cap \beta = \varnothing$

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE



▪ $\alpha = \beta$ ou $\alpha \equiv \beta$

Dois planos α e β são **coincidentes** se têm mais de uma reta em comum.

ATIVIDADE RESOLVIDA

1. Dadas, em um plano, duas retas distintas tangentes a uma mesma circunferência, classifique as afirmações a seguir em verdadeiras ou falsas e justifique suas respostas.

a) As retas são necessariamente concorrentes.

b) As retas são necessariamente paralelas.

c) As retas podem ser paralelas.

Resolução

Para cada item, vamos buscar um contraexemplo para comprovar que a afirmação é falsa ou utilizaremos os resultados já estudados para mostrar que a afirmação é verdadeira.

a) Essa afirmação é falsa, pois, caso as retas sejam tangentes em pontos diametralmente opostos da circunferência, elas serão paralelas.

b) Essa afirmação é falsa, pois as retas só serão paralelas na situação indicada no item anterior. Em qualquer outra situação, as retas serão concorrentes.

c) Como observamos nos itens anteriores, as retas podem ser paralelas ou concorrentes. Então, essa afirmação é verdadeira. Note que a afirmação traz uma possibilidade, e não uma afirmação absoluta, isto é, válida para todos os casos. Isso faz com que não precisemos demonstrá-la, mas apenas determinar um caso que a atenda.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. Leia as afirmações a seguir.

I. _____ pontos distintos determinam uma única reta.

II. Em um plano, estão contidas _____ retas.

III. Uma reta em um plano divide-o em duas regiões, denominadas _____.

IV. Por uma reta passam _____ planos.

V. Podemos determinar um plano de _____ maneiras.

As palavras que preenchem corretamente as lacunas, na ordem, são: alternativa **c**

a) Dois – infinitas – semiespaços – infinitos – quatro

b) Infinitos – infinitas – semiespaços – infinitos – quatro

c) Dois – infinitas – semiplanos – infinitos – quatro

d) Infinitos – duas – semiplanos – dois – infinitas

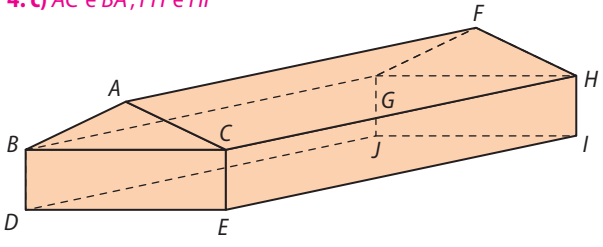
e) Dois – duas – semiplanos – dois – infinitas

2. Quantos são os planos determinados por três retas distintas, duas a duas, paralelas entre si? um ou três

3. Quantos são os planos determinados por quatro pontos, dois a dois, distintos entre si? Ver as **Orientações para o professor**.

4. Dada a figura, considere a reta suporte de cada segmento de reta e identifique:

4. c) $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BA}$, $\overleftrightarrow{FH}$ e $\overleftrightarrow{HI}$



a) um par de retas reversas; $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{EI}$

b) um par de retas coplanares; $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$

c) dois pares de retas concorrentes;

d) dois pares de retas paralelas. $\overleftrightarrow{CE}$ e $\overleftrightarrow{HI}$, $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{DE}$

Em todos os itens, existem outras respostas possíveis.

Ver as **Orientações para o professor**.

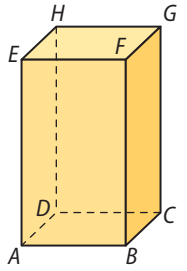
5. Considere um ponto M em um plano α e uma reta r, secante a α, que o intersecta em um ponto distinto de M. Reúna-se a um colega, e façam o que se pede em cada item.

a) Façam um desenho que represente a situação.

b) Verifiquem se a frase a seguir é verdadeira ou falsa. Justifiquem sua resposta.

> Existem infinitas retas contidas em α que passam pelo ponto M e pelo ponto de intersecção de r e α.

6. Observando a figura a seguir, responda aos itens.



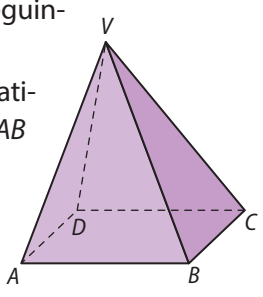
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

a) Qual é a posição da reta $\overleftrightarrow{BF}$ em relação ao plano ABC? secante

b) Qual é a posição da reta $\overleftrightarrow{FG}$ em relação ao plano FGH? A reta $\overleftrightarrow{FG}$ está contida no plano FGH.

- Reúna-se a um colega, e elaborem duas outras perguntas sobre posições relativas com base na figura. Depois, troquem-nas com outra dupla e confiram juntos as respostas. Resposta pessoal.

7. Observando a figura seguinte, responda aos itens.



a) Qual é a posição relativa entre os planos VAB e VBC? secantes

b) Qual é a intersecção dos planos ABC e VBC? a reta $\overleftrightarrow{BC}$

c) Há planos paralelos na figura? não

8. (UEM-PR) Em relação à determinação e à posição de retas e planos, assinale o que for correto. alternativas **04** e **08**

01) No espaço, duas retas são sempre paralelas ou concorrentes.

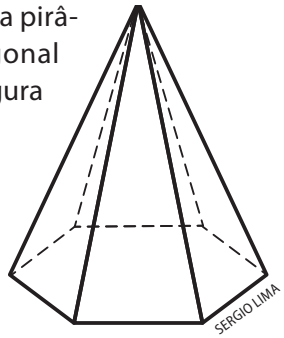
02) Uma reta e um ponto determinam, sempre, um único plano.

04) Uma reta determina infinitos planos que a contêm.

08) Se uma reta tem um único ponto em comum com dois planos distintos, então esses dois planos são secantes.

16) Três pontos distintos determinam um único plano.

9. (UFMS) Considere uma pirâmide de base hexagonal regular conforme a figura a seguir:



Disponível em: https://img2.gratispng.com/20180519/bky/kisspng-hexagonal-pyramid-square-pyramid-solid-geometry-ar-5affd960c84ee4.09540727152671676882 05.jpg. Acesso em: 14 dez. 2020.

A quantidade de pares de arestas reversas é: alternativa **b**

a) maior que 24.
b) igual a 24.
c) maior que 12 e menor que 24.
d) igual a 12.
e) menor que 12.

10. (Ficsae-SP) Seja uma reta r e os planos secantes α e β, de modo que $\alpha \cap \beta = r$. Seja s uma reta paralela à reta r, de modo que $s \cap \beta = \varnothing$. Seja t uma reta secante ao plano β no ponto P, de modo que $P \in r$. De acordo com essas informações, necessariamente alternativa **d**

a) $s \cap \alpha = s$
b) $t \cap \beta = \varnothing$
c) $P \notin \alpha$
d) $r \cap t \neq \varnothing$

Paralelismo no espaço

Estudamos as posições relativas de duas retas, de uma reta e um plano e de dois planos. Em alguns desses casos, falamos a respeito de paralelismo no espaço. Vamos retomar essas ideias:

- Duas retas são paralelas se são coplanares e não têm ponto em comum.
- Uma reta é paralela a um plano se eles não têm ponto em comum.
- Dois planos são paralelos se não têm ponto em comum.

Teoremas sobre paralelismo

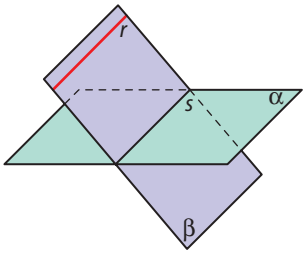
Apresentaremos, agora, alguns teoremas relacionados ao paralelismo que se destacam no estudo da Geometria Espacial.

Teorema 4: Se uma reta r é paralela a um plano α e se um plano β contém r e é secante a α segundo uma reta s, então as retas r e s são paralelas.

Para demonstrar esse teorema, vamos primeiro explicitar a hipótese e a tese.

Hipótese
$r \parallel \alpha$
$\beta \supset r$
$\alpha \cap \beta = s$

Tese
$r \parallel s$



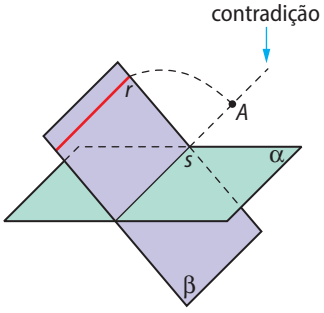
EDITORIA DE ARTE

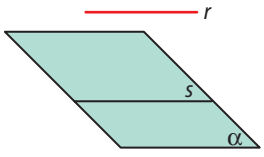
MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Demonstração

Vamos realizar a demonstração por absurdo. Para isso, admitimos que a negação da tese seja verdadeira, isto é, *r* não é paralela a *s*. Se isso fosse verdade, como *r* e *s* estão contidas no plano β, elas seriam retas concorrentes e teriam um ponto *A* em comum. Mas, como $s \subset \alpha$, o ponto *A* pertenceria a *r* e a α, o que contraria a hipótese $r \parallel \alpha$.

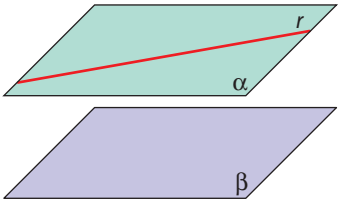
Como chegamos a uma contradição da hipótese, concluímos que a afirmação inicial de que *r* não é paralela a *s* é falsa. Portanto, *r* é paralela a *s*.

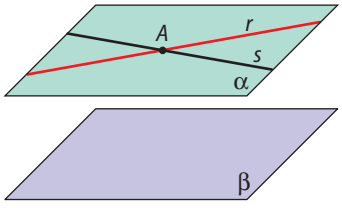




Teorema 5: Se uma reta *r*, não contida em um plano α, é paralela a uma reta *s*, contida em α, então *r* e α são paralelos.

Teorema 6: Se α e β são planos paralelos, então qualquer reta *r* contida em α é paralela ao plano β.





Teorema 7: Se um plano α contém duas retas, *r* e *s*, concorrentes e ambas paralelas a outro plano, β, então α e β são paralelos.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

ATIVIDADE RESOLVIDA

2. Entre as afirmações a seguir, referentes à Geometria de Posição, determine a única que é falsa.

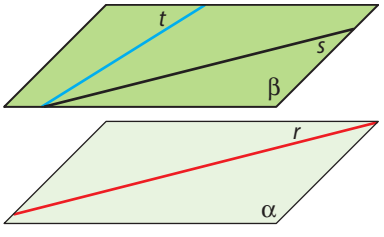
I. Se dois planos são paralelos, então toda reta de um deles é paralela ou é reversa a qualquer reta do outro.

II. Se uma reta é paralela a dois planos, então os planos são paralelos.

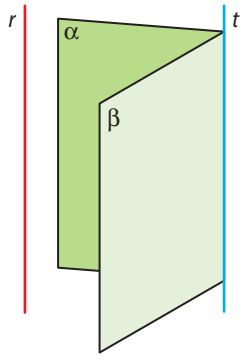
III. Se dois planos paralelos intersectam um terceiro, então as intersecções são retas paralelas.

Resolução

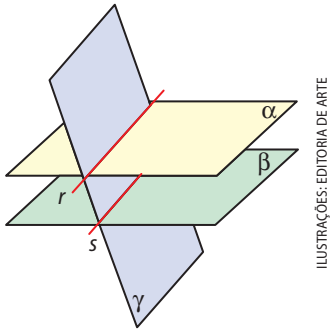
I. A afirmação é verdadeira. Se $r \subset \alpha$, $s \subset \beta$ e $\alpha \cap \beta = \varnothing$, então $r \cap s = \varnothing$. Logo, $r \parallel s$ ou *r* é reversa a *s*. Na figura a seguir, $r \parallel s$ e *r* é reversa a *t*.



II. A afirmação é falsa, pois podemos ter $r \parallel \alpha$, $r \parallel \beta$ e $r \parallel t$, em que $t = \alpha \cap \beta$, como mostra a figura a seguir.



III. A afirmação é verdadeira. Se $\alpha \cap \beta = \varnothing$, $r \subset \alpha$ e $s \subset \beta$, então $r \cap s = \varnothing$.
Como $r \cap s = \varnothing$, $r \subset \gamma$ e $s \subset \gamma$, então $r \parallel s$.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Portanto, a única afirmação falsa é a **II**.

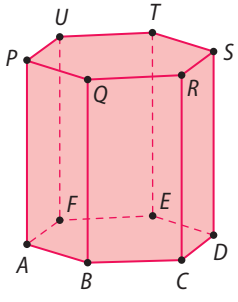
ATIVIDADES

11. a) $\overleftrightarrow{ST}$. Existem outras respostas possíveis.

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

11. A figura a seguir representa um sólido geométrico chamado prisma reto de base hexagonal. Nessa figura, temos que:

- as bases são os hexágonos regulares *ABCDEF* e *PQRSTU*;
- os planos que contêm as bases são paralelos;
- as arestas que unem as bases são paralelas entre si. Por exemplo: $\overline{AP} \parallel \overline{CR}$;
- as arestas que unem as bases são perpendiculares aos planos das bases.



A partir dessas informações, faça o que se pede em cada item.

a) Indique uma reta paralela à reta $\overleftrightarrow{DE}$.

b) A reta $\overleftrightarrow{BC}$ é paralela ao plano que contém o hexágono *PQRSTU*? Justifique.

c) Sabendo que $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{UF}$ são paralelas ao plano que contém o quadrilátero *BCRQ*, o que podemos afirmar sobre esse plano e o plano que contém o quadrilátero *EFUT*? Justifique sua resposta. Resposta esperada: Os planos são paralelos, pelo teorema **7**.

12. (PUC-SP) Qual das afirmações abaixo é verdadeira? alternativa **a**

a) Se duas retas concorrentes de um plano são respectivamente paralelas a duas retas de outro plano, então esses planos são paralelos.

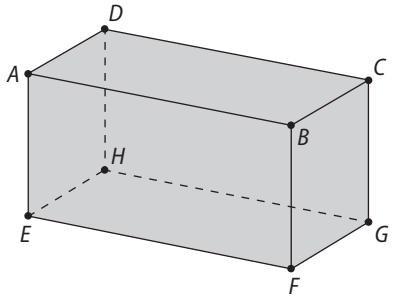
b) Por uma reta dada pode-se conduzir um plano paralelo a um plano dado.

c) Por qualquer ponto é possível conduzir uma reta que se apoie em duas retas reversas dadas.

d) Se uma reta é paralela a dois planos, então esses planos são paralelos.

e) Existem planos reversos.

13. (ESA) Observe o paralelepípedo reto-retângulo da figura abaixo.



Sobre este sólido, assinale a única alternativa correta. alternativa **b**

a) As retas $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{CG}$ são ortogonais entre si.

b) A reta $\overleftrightarrow{CF}$ é paralela ao plano (*ADH*).

c) As retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{HF}$ são paralelas entre si.

d) A reta $\overleftrightarrow{AB}$ é perpendicular ao plano (*EFG*).

e) As retas $\overleftrightarrow{BF}$ e $\overleftrightarrow{DH}$ são perpendiculares entre si.

11. b) Resposta esperada: Sim, pelo teorema **6**.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

14. (ITA-SP) Quais são as sentenças falsas?

I. Se dois planos são secantes, todas as retas de um deles interceptam o outro.

II. Se um plano contém duas retas distintas e paralelas a outro plano, então esses planos são paralelos.

III. Em dois planos paralelos distintos, todas as retas de um são paralelas ao outro plano.

IV. Se uma reta é paralela a um plano, então essa reta é paralela a infinitas retas desse plano.

V. Se uma reta é paralela a um plano, então é paralela a todas as retas do plano.

a) I; II; III

b) I; II; V

c) I; III; IV

d) II; III; IV

e) I; II; IV

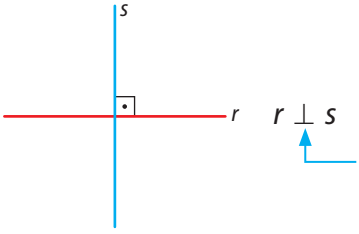
alternativa **b**

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Perpendicularismo no espaço

Estudamos que duas retas coplanares podem ser concorrentes, paralelas ou coincidentes. No caso de retas concorrentes, podemos, ainda, classificá-las de acordo com o ângulo entre elas.

Duas retas concorrentes são **perpendiculares** se formam entre si um ângulo de 90°.

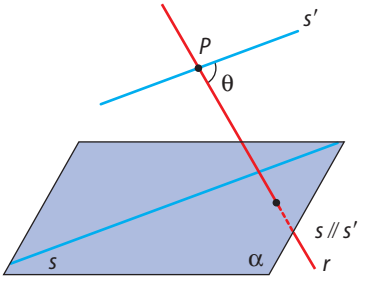


Este símbolo significa **perpendicular a**.

Duas retas concorrentes são **oblíquas** se formam um ângulo diferente de 90°.

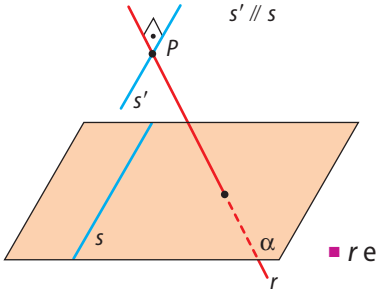
Agora vamos analisar o que acontece com o ângulo entre retas reversas. Para isso, precisamos compreender o que é ângulo entre retas reversas.

Sejam *r* e *s* duas retas reversas. Consideremos sobre a reta *r* um ponto *P* e por ele tracemos a reta *s'*, paralela à reta *s*, como mostra a figura. O ângulo θ formado pelas retas *r* e *s'* é, por definição, o ângulo formado pelas retas reversas *r* e *s*. É possível demonstrar que esse ângulo não depende do ponto *P* escolhido.



Assim, dizemos:

Duas retas reversas são **ortogonais** se formam um ângulo de 90°.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

■ *r* e *s* são retas reversas ortogonais.

Pense e responda

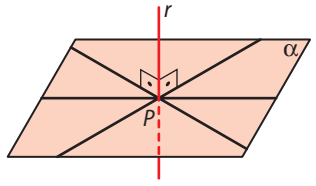
Na definição de ângulo entre retas reversas, por que podemos traçar a reta *s'*, paralela à reta *s* no ponto *P*?

Resposta esperada: O postulado R_3 da reta garante essa construção.

» Perpendicularismo entre reta e plano

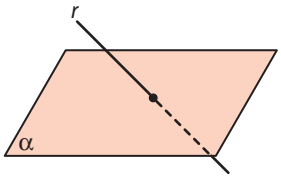
Estudamos que uma reta e um plano podem ser paralelos, secantes ou a reta pode estar contida no plano. No caso de a reta ser secante ao plano, vamos verificar que ela pode ser perpendicular ou oblíqua a ele.

Sejam uma reta r e um plano α secantes em um ponto P. Dizemos que r é **perpendicular** a α quando r é perpendicular a todas as retas de α que passam por P.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

■ $r \perp \alpha$



■ A reta r é oblíqua a α.

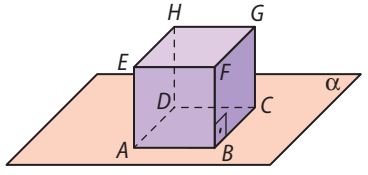
Toda reta que intersecta um plano e não é perpendicular a ele é chamada **oblíqua** a esse plano.

Teorema 8: Se uma reta r é perpendicular a duas retas concorrentes s e t de um plano α, então ela é perpendicular ao plano α.

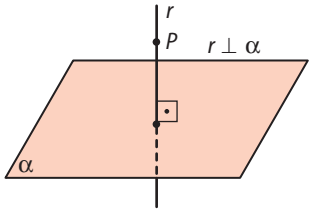
É possível demonstrar que o teorema **8** é uma condição necessária e suficiente para determinar a perpendicularidade entre reta e plano. Isso quer dizer que, para a reta r ser perpendicular ao plano α, basta que ela seja perpendicular a duas retas concorrentes de α que passam pelo ponto P.

Por exemplo, observe a figura do cubo apoiado no plano α. Como $\overleftrightarrow{BF}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ e a $\overleftrightarrow{BC}$, então $\overleftrightarrow{BF}$ é perpendicular ao plano ABC.

A seguir, são apresentadas algumas propriedades do perpendicularismo que podem ser demonstradas.

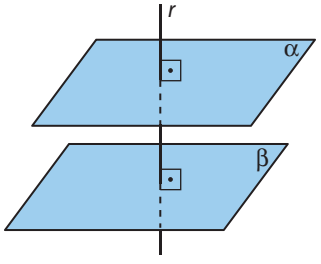


■ $\overleftrightarrow{BF} \perp \overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BF} \perp \overleftrightarrow{BC}$.



Propriedade 1: Por um ponto P fora de um plano α passa uma única reta r perpendicular a α.

Propriedade 2: Dois planos distintos perpendiculares a uma mesma reta são planos paralelos.



MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

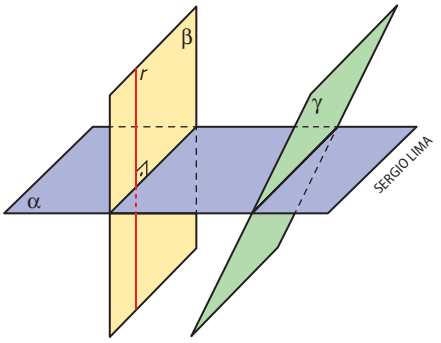
MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

» Planos perpendiculares

Estudamos que dois planos podem ser coincidentes, paralelos ou secantes. Vamos observar agora que, neste último caso, eles podem ser perpendiculares ou oblíquos.

Dados dois planos secantes α e β, α é **perpendicular** a β se existe uma reta r contida em um deles que é perpendicular ao outro.

Se dois planos secantes não são perpendiculares, eles são denominados **oblíquos**.



■ Os planos α e β são perpendiculares, e os planos α e γ são oblíquos.

» Teoremas sobre perpendicularismo

Apresentamos a seguir alguns teoremas sobre perpendicularismo.

Teorema 9: Se uma reta r é perpendicular a um plano α, então r faz ângulo de 90° com qualquer reta contida em α.

Para demonstrar esse teorema, vamos primeiro explicitar a hipótese e a tese.

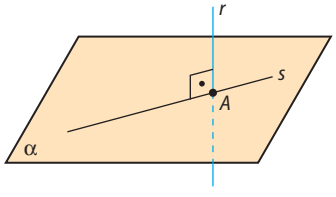
Hipótese
$r \perp \alpha$

Tese
r faz ângulo de 90° com qualquer reta contida no plano α.

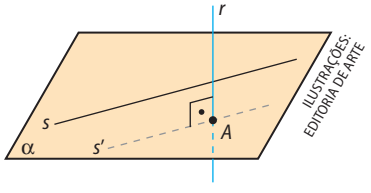
Demonstração

Seja r uma reta perpendicular a um plano α que intersecta α no ponto A. Se s é uma reta do plano α e passa pelo ponto A, então, pela definição de reta perpendicular a um plano, $r \perp s$ (figura **1**).

Supondo que s não passe pelo ponto A, pelo postulado $\mathbf{R}_3$ da reta, podemos considerar uma reta s' de α que passa por A e é paralela à reta s (figura **2**).



■ Figura **1**.



■ Figura **2**.

Então, novamente pela definição de reta perpendicular a um plano, se r é perpendicular a α, é também perpendicular a todas as retas de α que passam pelo ponto A, ou seja, $r \perp s'$. Como $s \parallel s'$, então r e s são ortogonais e, portanto, r faz um ângulo de 90° com s.

Teorema 10: Se uma reta *r*, secante a um plano α, forma um ângulo de 90° com duas retas concorrentes *s* e *t* desse plano α, então a reta *r* é perpendicular ao plano α.

Para demonstrar esse teorema, vamos primeiro explicitar a hipótese e a tese.

Hipótese
r secante a α
r forma ângulo de 90° com $s \subset \alpha$
r forma ângulo de 90° com $t \subset \alpha$
s concorrente com *t*

Tese
$r \perp \alpha$

Demonstração

Seja *A* o ponto de intersecção de *r* com α. Se *s* e *t* passam pelo ponto *A*, então *r* e α são perpendiculares pelo teorema **8**.

Vamos analisar agora os demais casos possíveis.

1º caso: $A \in s$ e $A \notin t$ (o caso $A \notin s$ e $A \in t$ demonstra-se de forma análoga)

Pelo postulado $\mathbf{R}_3$ da reta, podemos considerar a reta *t'*, com $t' \parallel t$ e $A \in t'$, conforme mostra a figura **3**.

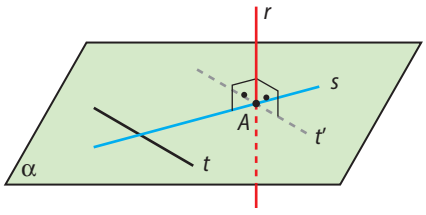


Figura **3**.

Como *r* e *t* são ortogonais e $t' \parallel t$, então $r \perp t'$.

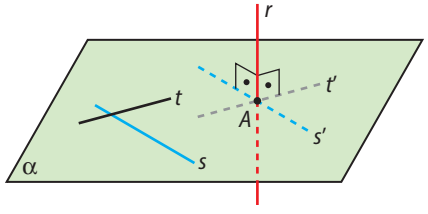
Logo, $r \perp \alpha$, pois *r* é perpendicular a duas retas concorrentes, *s* e *t'*, de α que passam por *A* (teorema **8**).

2º caso: $A \notin s$ e $A \notin t$

Pelo postulado $\mathbf{R}_3$ da reta, podemos traçar as retas *s'* e *t'* de α passando por *A* e tais que $s' \parallel s$ e $t' \parallel t$ (figura **4**).

Como *r* e *s* são ortogonais e $s' \parallel s$, então $r \perp s'$. Analogamente, concluímos que $r \perp t'$.

Logo, $r \perp \alpha$, pois *r* é perpendicular a duas retas concorrentes, *s'* e *t'*, de α que passam por *A* (teorema **8**).



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Figura **4**.

Teorema 11: Sejam uma reta *r* e um plano α tais que $r \perp \alpha$ no ponto *A*. Sendo *s* uma reta de α que passa pelo ponto *A* e *t* uma reta de α perpendicular a *s* e concorrente com esta em um ponto $B \neq A$, então qualquer reta que passa pelo ponto *B* e por um ponto *C* de *r* é perpendicular à reta *t*.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Para demonstrar esse teorema, vamos primeiro explicitar a hipótese e a tese.

Hipótese

$r \perp \alpha$ | $t \subset \alpha$

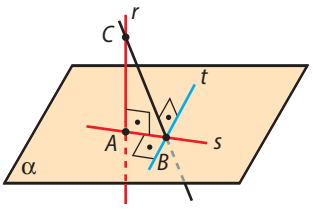
$r \cap \alpha = \{A\}$ | $t \perp s$

$s \subset \alpha$ | $t \cap s = \{B\}$

$A \in s$ | $B \neq A$ e $C \in r$

Tese

$\overleftrightarrow{BC} \perp t$



Demonstração

Se $C = A$, as retas $\overleftrightarrow{BC}$ e s coincidem e, portanto, $\overleftrightarrow{BC} \perp t$, por hipótese.

Se $C \neq A$, então A, B e C são pontos não colineares e, pelo primeiro caso de determinação de um plano, determinam um plano ABC que contém as retas r, s e $\overleftrightarrow{BC}$, já que o plano ABC contém dois pontos de cada uma dessas retas (postulado $\mathbf{P}_2$ do plano).

Como $r \perp \alpha$, pelo teorema **9**, r é ortogonal à reta t. Sendo $t \perp s$ e ortogonal a r, e como o plano ABC contém r e s, pelo teorema **10**, obtemos $t \perp$ plano ABC.

Como a reta $\overleftrightarrow{BC}$ está no plano ABC, pelo teorema **9**, concluímos que $t \perp \overleftrightarrow{BC}$.

Teorema 12: Duas retas distintas, r e s, perpendiculares a um mesmo plano α, são paralelas.

Para demonstrar esse teorema, vamos primeiro explicitar a hipótese e a tese.

Hipótese

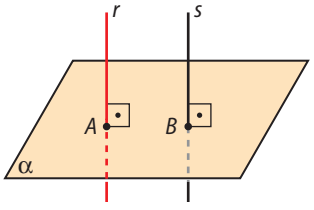
$r \neq s$

$r \perp \alpha$

$s \perp \alpha$

Tese

$r \parallel s$

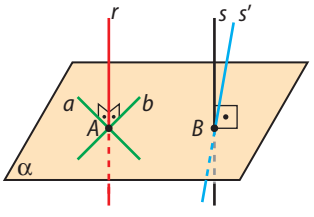


Demonstração

Sejam A e B, respectivamente, os pontos de intersecção de r e s com α. Vamos traçar a reta s' passando por B tal que $s' \parallel r$. Pelo postulado $\mathbf{R}_3$ da reta, s' existe e é única.

Como $r \perp \alpha$, então r é perpendicular a duas retas concorrentes, a e b, passando pelo ponto A e contidas em α.

Sendo $s' \parallel r$, então s' é ortogonal às mesmas retas a e b de α (pelo teorema **10**). Logo, $s' \perp \alpha$.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Pela propriedade **1** vista anteriormente, pelo ponto B do plano α passa uma única perpendicular a esse plano, então resulta que $s' = s$.

Portanto, $r \parallel s$.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

ATIVIDADES RESOLVIDAS

3. Considere as retas r, s e t distintas tais que $s \perp r$ e $t \perp r$. Relativamente às retas s e t, podemos afirmar que:

I. Elas podem ser unicamente paralelas ou concorrentes.

II. Elas podem ser unicamente paralelas ou reversas.

III. Elas podem ser unicamente concorrentes ou reversas.

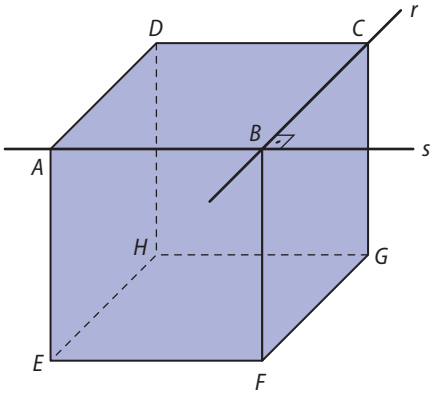
IV. Elas podem ser paralelas, concorrentes ou reversas.

V. Elas podem ser unicamente reversas.

Qual dessas afirmações é verdadeira?

Resolução

Uma das maneiras de resolver esse problema é desenhando as retas como retas suporte de arestas de um cubo. No cubo *ABCDEFGH*, representado na figura a seguir, sejam r a reta que passa por B e C, que indicaremos por $\overleftrightarrow{BC}$, e s a reta que passa por A e B, que indicaremos por $\overleftrightarrow{AB}$. Note que $s \perp r$.



Nas condições do enunciado, podemos ter:

- $t = \overleftrightarrow{CD}$, então $s \perp r$, $t \perp r$ e $s \parallel t$.
- $t = \overleftrightarrow{BF}$, então $s \perp r$, $t \perp r$ e s e t são retas concorrentes.
- $t = \overleftrightarrow{CG}$, então $s \perp r$, $t \perp r$ e s e t são retas reversas.

Portanto, a afirmação verdadeira é a **IV**.

4. Sejam um plano α e uma reta r, paralela a α. Verifique se as proposições a seguir são verdadeiras.

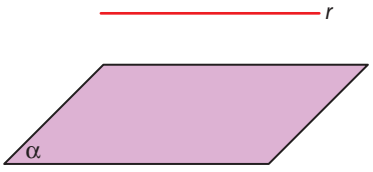
I. Toda reta paralela a r está contida em α.

II. Toda reta perpendicular a r é perpendicular a α.

III. Toda reta ortogonal a r é perpendicular a α.

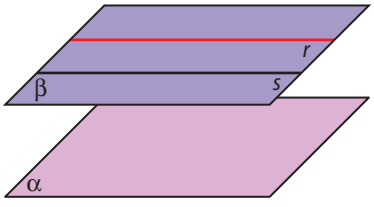
Resolução

Ilustrando o enunciado, temos a figura a seguir.

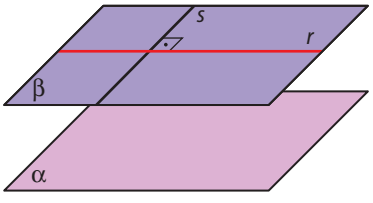


Agora, analisaremos cada uma das afirmações.

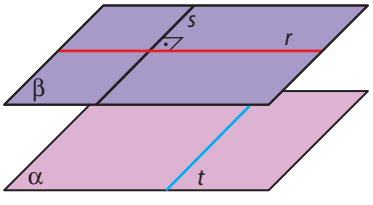
I. Falsa, pois existe um plano $\beta \parallel \alpha$ que contém r. Em β existe uma reta s, $s \parallel r$ e s não está contida em α.



II. Falsa. Considerando o plano β do item **I**, existe $s \perp r$, $s \subset \beta$ e $s \parallel \alpha$; logo, s não é perpendicular a α.



III. Falsa. Considerando a reta s do item **II**, existe uma reta t, $t \subset \alpha$ e $t \parallel s$; t é ortogonal a r e não é perpendicular a α.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Portanto, nenhuma das proposições é verdadeira.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

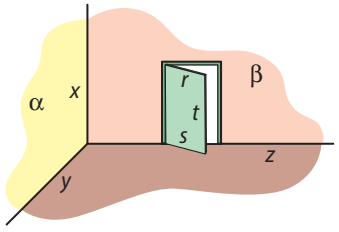
MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

ATIVIDADES

15. a) As retas são, respectivamente, paralelas, perpendiculares, reversas e reversas.

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

15. A figura a seguir mostra uma porta entreaberta e o canto de uma sala.



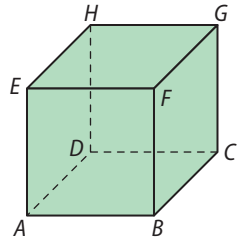
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

a) Que posições relativas têm as retas suporte que contêm *r* e *s*; *s* e *t*; *x* e *r*; *y* e *t*?

b) Que posições relativas têm a reta suporte de *t* e o plano suporte de α? E a reta suporte de *r* e o plano suporte de β?

São, respectivamente, paralelos e secantes.

16. A figura seguinte representa um cubo. Observando-a, determine as posições relativas:



a) das retas $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{FG}$. As retas são perpendiculares.

b) das retas $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{BC}$. As retas são reversas ortogonais.

17. (EsPCEx-SP) Considere duas retas *r* e *s* no espaço e quatro pontos distintos, *A*, *B*, *C* e *D*, de modo que os pontos *A* e *B* pertencem à reta *r* e os pontos *C* e *D* pertencem à reta *s*. Dentre as afirmações abaixo:

I. Se as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BD}$ são concorrentes, então *r* e *s* são necessariamente concorrentes.

II. Os triângulos *ABC* e *ABD* serão sempre coplanares.

III. Se $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BD}$ forem concorrentes, então as retas *r* e *s* são coplanares.

Pode-se concluir que: alternativa **c**

a) somente a I é verdadeira.

b) somente a II é verdadeira.

c) somente a III é verdadeira.

d) as afirmações II e III são verdadeiras.

e) as afirmações I e III são verdadeiras.

18. Reúna-se a um colega, e refaçam o fluxograma feito na página **262**, no boxe **Pense e responda**, para identificar as posições relativas de uma reta e um plano no espaço, considerando agora também o caso de uma reta perpendicular a um plano. Ver as **Orientações para o professor**.

19. Reúna-se a um colega, e façam um fluxograma para identificar as posições relativas de dois planos no espaço, considerando também o caso de dois planos perpendiculares. Ver as **Orientações para o professor**.

20. (EEM-SP)

I. Duas retas reversas podem ser ambas perpendiculares a uma mesma reta *t*.

II. Se *r* é uma reta de um plano e *s* uma paralela ao mesmo plano, então, certamente, *r* e *s* são paralelas.

III. Se uma reta é perpendicular a um plano, então ela é perpendicular a qualquer reta do plano.

Relativamente às afirmações acima, podemos afirmar que: alternativa **e**

a) todas são verdadeiras.

b) somente I e II são verdadeiras.

c) somente II e III são verdadeiras.

d) somente II é verdadeira.

e) somente I é verdadeira.

21. (Fuvest-SP) É correta a afirmação: alternativa **e**

a) Se dois planos forem perpendiculares, todo plano perpendicular a um deles será paralelo ao outro.

b) Se dois planos forem perpendiculares, toda reta paralela a um deles será perpendicular ao outro.

c) Duas retas paralelas a um plano são paralelas.

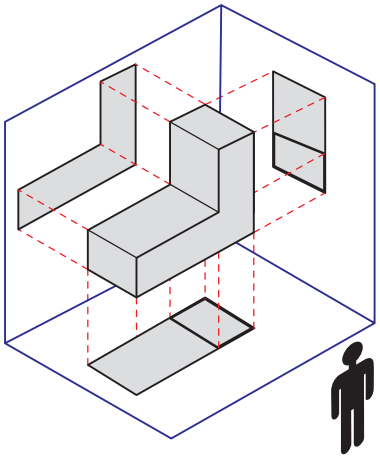
d) Se duas retas forem ortogonais reversas, toda reta ortogonal a uma delas será paralela à outra.

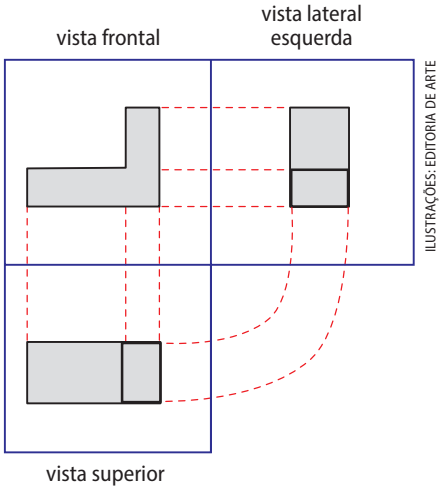
e) Se duas retas forem ortogonais, toda paralela a uma delas será ortogonal ou perpendicular à outra.

Projeção ortogonal

Na abertura deste Capítulo, conhecemos algumas ideias do desenho técnico. Uma delas é a projeção, que consiste em projetar as vistas de um objeto em planos. As mais conhecidas são as vistas frontal, superior e lateral.

Observe, a seguir, um exemplo de uma peça e suas vistas.





ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Essa projeção é chamada de projeção ortogonal, pois é feita perpendicularmente ao plano de projeção, e as vistas são chamadas de **ortográficas**. Ela é muito utilizada nos projetos de fabricação de peças industriais.

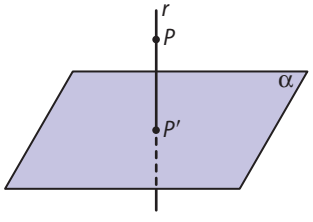
Estudaremos, a seguir, os conceitos de projeção ortogonal relativa a um ponto, a uma reta e a uma figura qualquer, que são a base para a execução dos projetos.

Projeção ortogonal de um ponto sobre um plano

Consideremos um ponto P e um plano α, $P \notin \alpha$.

Pelo ponto P, tracemos a reta r, perpendicular ao plano α. Pela propriedade **1**, essa reta é única e intersecta α no ponto P'.

A projeção ortogonal de um ponto P sobre um plano α é o ponto P', $P' \in \alpha$, de modo que $\overline{PP'} \perp \alpha$. Se $P \in \alpha$, definimos $P' \equiv P$.



Para acessar

- BORTOLOSSI, Humberto J.; EL ADJI, Victor I. S. **Projeções ortogonais**: matemática: geometria. Rio de Janeiro: UFF: Conteúdos digitais para o ensino e aprendizagem de matemática e estatística, [201-]. Disponível em: http://www.cdme.im-uff.mat.br/html5/pro/pro-html/pro-br.html. Acesso em: 9 set. 2024. Nesse *link*, é possível explorar diversas projeções ortogonais.

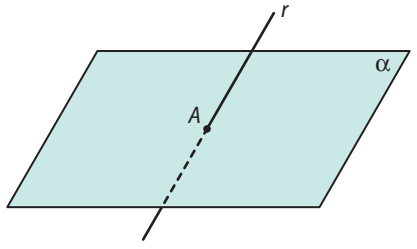
MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

» Projeção ortogonal de uma reta sobre um plano

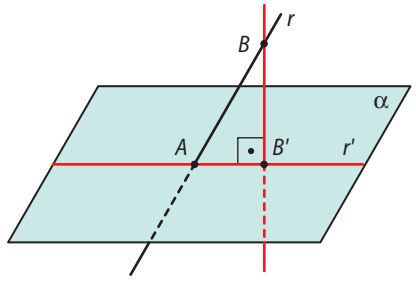
A projeção ortogonal de uma reta *r* sobre um plano α é a figura obtida pelas projeções ortogonais, sobre α, de todos os pontos de *r*.

Consideremos, primeiro, o caso em que a reta *r* é oblíqua a um plano α e intersecta o plano no ponto *A*, conforme mostra a figura **1**.

Tomando outro ponto, *B* de *r*, determinamos o ponto *B'*, que é a projeção ortogonal de *B* sobre o plano α, conforme mostra a figura **2**.



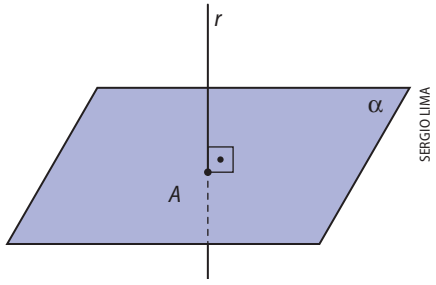
■ Figura **1**.



■ Figura **2**.

Pelo postulado $\mathbf{R}_2$ da reta, obtemos, então, a reta *r'*, determinada pelos pontos *A* e *B'*, que é a projeção ortogonal da reta *r* sobre o plano α.

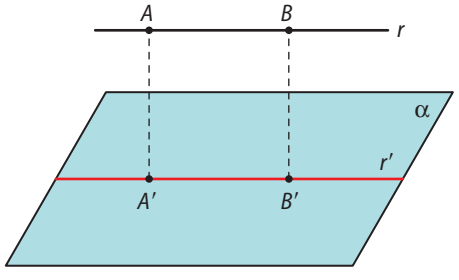
Vamos considerar agora o caso em que *r* é perpendicular a α. Nesse caso, a projeção ortogonal de *r* sobre α é o ponto em que a reta *r* intersecta o plano α.



SERGIO LIMA

■ O ponto *A* é a projeção ortogonal da reta *r* no plano α.

Vamos analisar, por fim, casos em que a reta *r* não é secante ao plano α.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

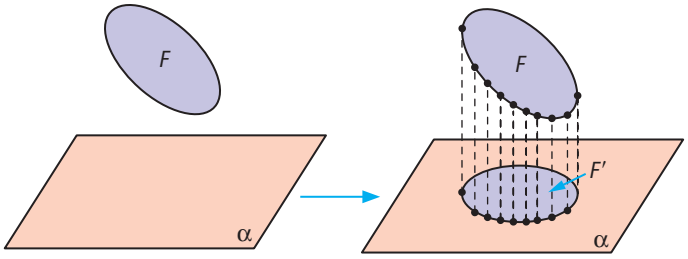
■ *A'*: projeção ortogonal de *A* sobre α.
B': projeção ortogonal de *B* sobre α.

- Se *r* é paralela a α, então a projeção ortogonal de *r* sobre α é uma reta *r'* no plano α paralela a *r*.
- Se *r* está contida em α, então *r'* coincide com *r*.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

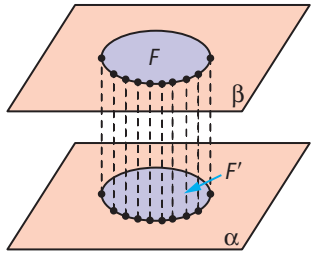
» Projeção ortogonal de uma figura sobre um plano

A projeção ortogonal de uma figura F sobre um plano α é a figura F' obtida pelas projeções ortogonais de todos os pontos de F sobre α.



Saiba que...

Se a figura F está contida em um plano β paralelo ao plano α, então F' é congruente a F.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

ATIVIDADE RESOLVIDA

5. Mostre que a projeção ortogonal de um segmento de reta oblíquo a um plano, sobre esse plano, é menor do que o segmento.

Resolução

Para demonstrar esse resultado, vamos primeiro identificar a hipótese e a tese.

Hipótese

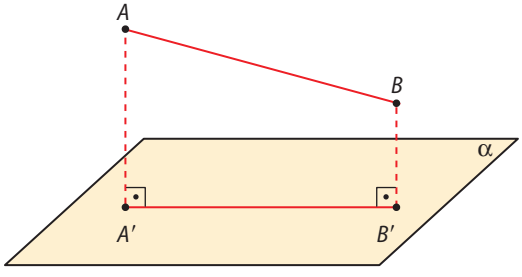
$\overline{AB}$ oblíquo a α

$\overline{A'B'}$ é a projeção ortogonal de $\overline{AB}$ sobre α.

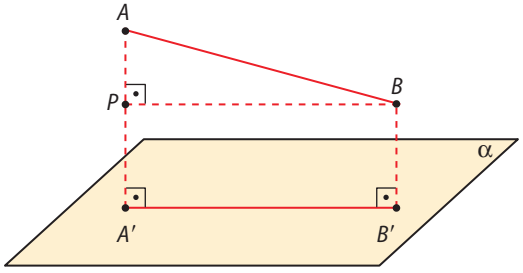
Tese

$A'B' < AB$

Primeiro, vamos considerar o caso em que $A \notin \alpha$, $B \notin \alpha$ e $AA' > BB'$ (o caso $AA' < BB'$ é análogo).



Traçamos um segmento paralelo ao segmento $\overline{A'B'}$ passando por B, o qual intersecta o segmento $\overline{AA'}$ no ponto P.

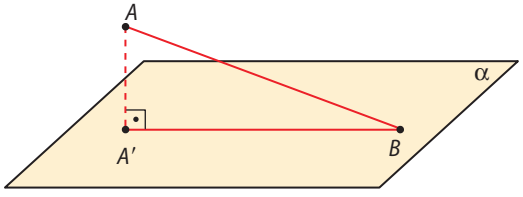


Por construção, $A'B'BP$ é um retângulo, portanto $A'B' = PB$.

Também por construção, $\triangle ABP$ é retângulo em $\hat{P}$. Então, $PB < AB$, pois $\overline{AB}$ é a hipotenusa desse triângulo.

Portanto, de $A'B' = PB$ e $PB < AB$, concluímos que $A'B' < AB$.

Agora, vamos considerar o caso em que $A \notin \alpha$ e $B \in \alpha$ (o caso $A \in \alpha$ e $B \notin \alpha$ é análogo).



Nesse caso, $\triangle ABA'$ é retângulo em $\hat{A'}$.

Então, $A'B < AB$, pois $\overline{AB}$ é a hipotenusa desse triângulo. Como $B \in \alpha$, $B' \equiv B$.

Portanto, $A'B' < AB$.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

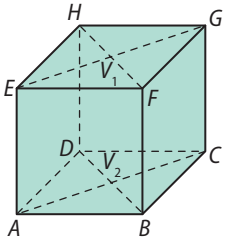
MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

22. Como é a projeção ortogonal de um polígono convexo sobre um plano α, sabendo que ele está contido em um plano β, perpendicular a α? um segmento de reta

23. Observando o cubo da figura, responda às perguntas.

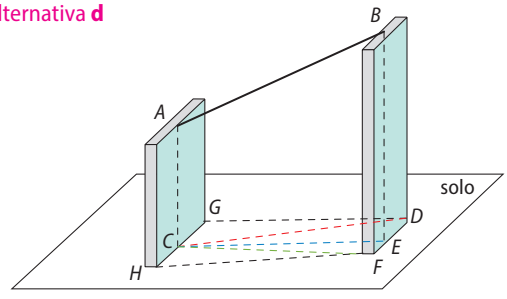


a) Qual é a projeção ortogonal do ponto *G* sobre o plano *ABC*? o ponto *C*

b) Qual é a projeção ortogonal do ponto *A* sobre o plano *BCF*? o ponto *B*

c) Qual é a projeção ortogonal do ponto V_1 sobre o plano *ABC*? o ponto V_2

24. (UEA-AM) Uma haste de metal foi presa entre dois muros, ambos perpendiculares ao solo, nos pontos *A* e *B*, conforme mostra a figura. alternativa **d**

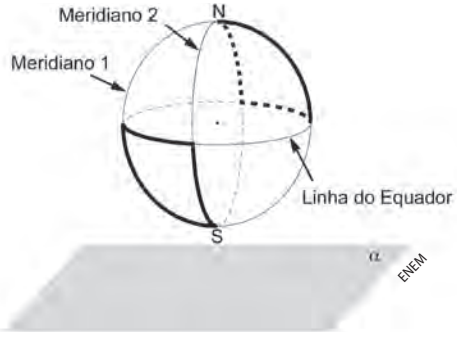


ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

A projeção ortogonal dessa haste, no solo, é representada na figura pelo segmento

a) $\overline{HF}$ **b)** $\overline{GD}$ **c)** $\overline{CD}$ **d)** $\overline{CE}$ **e)** $\overline{CF}$

25. (Enem/MEC) Na figura estão destacadas duas trajetórias sobre a superfície do globo terrestre, descritas ao se percorrer parte dos meridianos 1, 2 e da Linha do Equador, sendo que os meridianos 1 e 2 estão contidos em planos perpendiculares entre si. O plano α é paralelo ao que contém a Linha do Equador.



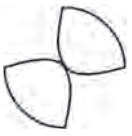
ENEM

A vista superior da projeção ortogonal sobre o plano α dessas duas trajetórias é alternativa **e**

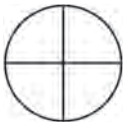
a)

b)

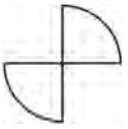
c)



d)



e)

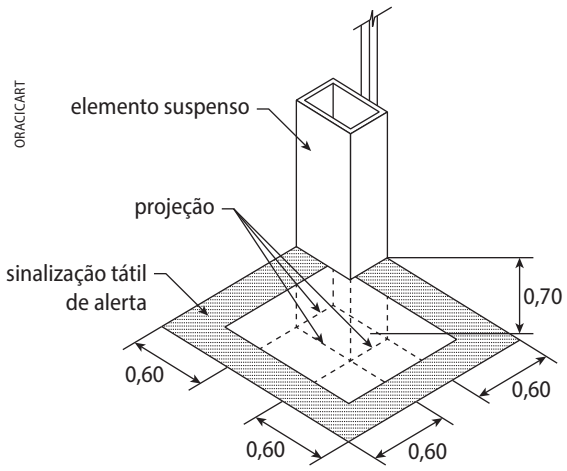


ENEM

26. Leia o texto a seguir.

> [...]
>
> As áreas públicas ou de uso comum em edificações, espaços e equipamentos urbanos devem ter sinalização tátil de alerta no piso para:
>
> a) informar à pessoa com deficiência visual sobre a existência de desníveis ou outras situações de risco permanente, como objetos suspensos não detectáveis pela bengala longa;
>
> b) orientar o posicionamento adequado da pessoa com deficiência visual para o uso de equipamentos como elevadores, equipamentos de autoatendimento ou serviços;
>
> c) informar as mudanças de direção ou opções de percursos [...];
>
> d) indicar o início e o término de escadas e rampas;
>
> e) indicar a existência de patamares, nas situações indicadas;
>
> f) indicar o local de travessia de pedestres.
>
> [...]
>
> ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 16537**: acessibilidade: sinalização tátil no piso: diretrizes para elaboração de projetos e instalação. 1. ed. Rio de Janeiro: ABNT, 2016. Disponível em: https://www.prefeitura.sp.gov.br/cidade/secretarias/upload/pessoa_com_deficiencia/NBR16537-2016.pdf. Acesso em: 9 set. 2024.

A figura na página seguinte mostra um objeto suspenso que requer sinalização tátil de alerta ao seu redor com as medidas indicadas em metro.



Sabendo que o elemento suspenso tem altura igual a 1,50 m, largura igual a 0,25 m e comprimento igual a 0,55 m, responda:

a) Quais dimensões do elemento suspenso são relevantes para a instalação do piso tátil? largura e comprimento

b) Qual é a área da projeção do elemento suspenso sobre o piso? 0,1375 m²

c) Qual é o perímetro externo da sinalização tátil de alerta? 6,4 m

FÓRUM

A importância das normas de acessibilidade para pessoas com deficiência

Viver em uma sociedade verdadeiramente inclusiva requer o reconhecimento e a implementação de normas de acessibilidade que garantam igualdade de oportunidades para todas as pessoas, independentemente de suas habilidades físicas ou cognitivas. Conforme destacado pela Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT), as normas de acessibilidade não se referem apenas à presença física de elementos como rampas ou elevadores, mas também à conformidade com regras técnicas específicas.

RESHETNIKOV_ART/SHUTTERSTOCK.COM

O piso tátil é uma ferramenta de acessibilidade para pessoas com deficiência visual.

Além de melhorar o acesso físico, as normas de acessibilidade também abrangem aspectos como comunicação, tecnologia e transporte. Por exemplo, a disponibilização de informações em formatos acessíveis, como braille, áudio ou linguagem simples, garante que as pessoas com deficiência possam compreender e participar plenamente da sociedade. Da mesma forma, o desenvolvimento de tecnologias assistivas e de aplicativos acessíveis permite que essas pessoas realizem tarefas diárias, como se comunicar, estudar e trabalhar, de forma mais independente e eficaz.

É importante ressaltar que a acessibilidade beneficia a sociedade como um todo. As normas de acessibilidade promovem a inovação e a criatividade, incentivando o desenvolvimento de soluções e produtos que atendam às necessidades de uma variedade maior de pessoas.

Após ler o texto, faça um fórum com os colegas e o professor para discutir as questões a seguir. Ver as **Orientações para o professor**.

- Acessibilidade vai muito além de fornecer rampas ou elevadores em espaços físicos. Discutam outras soluções de acessibilidade.
- Na sua escola, vocês observam algumas dessas soluções de acessibilidade? Se sim, quais? Discutam estratégias que poderiam ser implementadas na sua escola para torná-la mais acessível para todos.

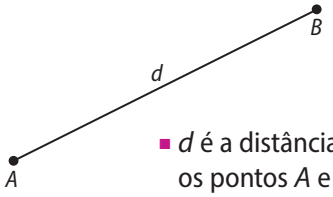
MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Distâncias

Observemos agora algumas definições envolvendo distâncias.

Distância entre dois pontos

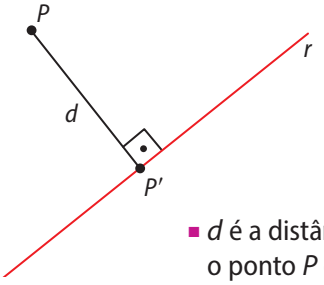
A distância entre dois pontos distintos A e B é igual à medida do segmento $\overline{AB}$.



■ d é a distância entre os pontos A e B.

Distância entre ponto e reta

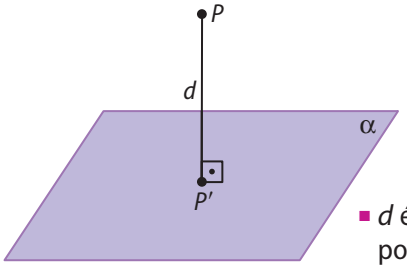
A distância entre um ponto P e uma reta r que não o contém é igual à medida do segmento $\overline{PP'}$, em que P' é a projeção ortogonal de P sobre r.



■ d é a distância entre o ponto P e a reta r.

Distância entre ponto e plano

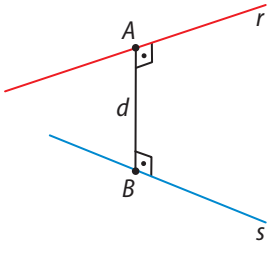
A distância entre um ponto P e um plano α que não o contém é igual à medida do segmento $\overline{PP'}$, em que P' é a projeção ortogonal de P sobre α.



■ d é a distância entre o ponto P e o plano α.

Distância entre duas retas

A distância entre duas retas reversas r e s é igual à medida do segmento $\overline{AB}$, em que $A \in r$, $B \in s$ e $\overleftrightarrow{AB}$ é perpendicular a r e a s.

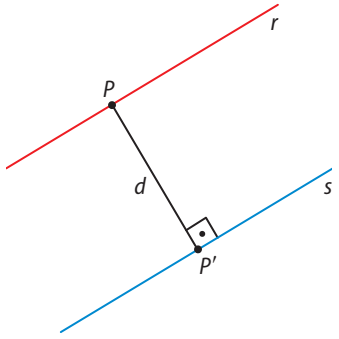


ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

■ d é a distância entre as retas reversas r e s.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

A distância entre duas retas paralelas é igual à medida do segmento $\overline{PP'}$, em que P é um ponto qualquer de uma das retas e P' é a projeção ortogonal de P sobre a outra reta.



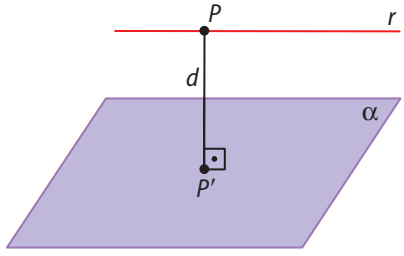
■ d é a distância entre as retas paralelas r e s.

Saiba que...

A distância entre retas que têm pelo menos um ponto em comum é zero. Assim, tanto a distância entre retas concorrentes quanto a distância entre retas coincidentes são iguais a zero.

» Distância entre reta e plano paralelos

A distância entre uma reta r e um plano α paralelo a ela é igual à medida do segmento $\overline{PP'}$, em que P é um ponto qualquer de r e P' é a projeção ortogonal de P sobre α.

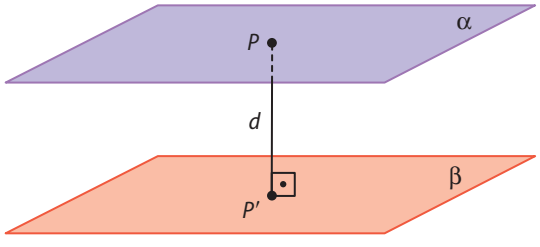


ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

■ d é a distância entre a reta r e o plano α, paralelo a r.

» Distância entre dois planos paralelos

A distância entre dois planos paralelos é igual à medida do segmento $\overline{PP'}$, em que P é um ponto qualquer de um dos planos e P' é a projeção ortogonal de P sobre o outro plano.



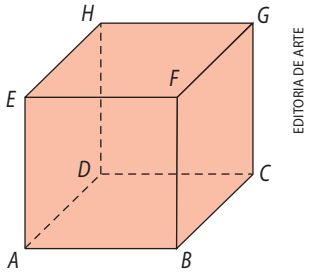
■ d é a distância entre os planos paralelos α e β.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

ATIVIDADES RESOLVIDAS

6. O cubo *ABCDEFGH* tem aresta de 2 cm.



EDITORIA DE ARTE

Calcule:

a) a distância entre os pontos *A* e *C*.

b) a distância entre o ponto *B* e a reta $\overleftrightarrow{GH}$.

c) a distância entre o ponto *C* e o plano *EFG*.

d) a distância entre as retas reversas $\overleftrightarrow{BF}$ e $\overleftrightarrow{EH}$.

e) a distância entre as retas paralelas $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{EF}$.

f) a distância entre a reta $\overleftrightarrow{AC}$ e o plano *EFG*.

g) a distância entre os planos paralelos *ADE* e *BCF*.

Resolução

a) A distância entre os pontos *A* e *C* é $d = AC$. Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo *ABC*, obtemos:

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$d^2 = 2^2 + 2^2$

$d^2 = 8$

$d = 2\sqrt{2}$

Portanto, a distância entre os pontos *A* e *C* é $2\sqrt{2}$ cm.

b) A distância entre o ponto *B* e a reta $\overleftrightarrow{GH}$ é $d = BG$. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo *BCG*, obtemos:

$BG^2 = CG^2 + BC^2$

$d^2 = 2^2 + 2^2$

$d^2 = 8$

$d = 2\sqrt{2}$

Portanto, a distância entre o ponto *B* e a reta $\overleftrightarrow{GH}$ é $2\sqrt{2}$ cm.

c) A distância entre o ponto *C* e o plano *EFG* é $d = CG$, ou seja, igual a 2 cm.

d) A distância entre as retas reversas $\overleftrightarrow{BF}$ e $\overleftrightarrow{EH}$ é $d = EF$, ou seja, igual a 2 cm.

e) A distância entre as retas paralelas $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{EF}$ é $d = CF$. Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo *CFG*, obtemos:

$CF^2 = CG^2 + FG^2$

$d^2 = 2^2 + 2^2$

$d^2 = 8$

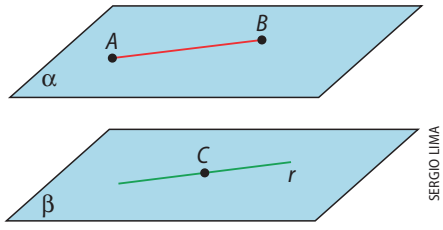
$d = 2\sqrt{2}$

Portanto, a distância entre as retas paralelas $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{EF}$ é $2\sqrt{2}$ cm.

f) A distância entre a reta $\overleftrightarrow{AC}$ e o plano *EFG* é $d = CG$, ou seja, igual a 2 cm.

g) A distância entre os planos paralelos *ADE* e *BCF* é $d = AB$, ou seja, igual a 2 cm.

7. (UEA-AM) Considere dois planos paralelos distintos α e β, o segmento $\overline{AB}$ contido no plano α, a reta *r* contida no plano β e um ponto *C*, tal que $C \in r$, conforme mostra a figura.



SERGIO LIMA

De acordo com essas informações, pode-se afirmar que

a) a distância do ponto *C* ao plano α é igual à distância do ponto *A* ao plano β.

b) a projeção ortogonal do ponto *C* sobre o plano α está sobre o segmento $\overline{AB}$.

c) a projeção ortogonal do ponto *A* sobre o plano β não está sobre a reta *r*.

d) a projeção do segmento $\overline{AB}$ sobre o plano β coincide com a reta *r*.

e) a distância do ponto *C* ao plano α é igual à distância do ponto *C* ao ponto *B*.

Resolução

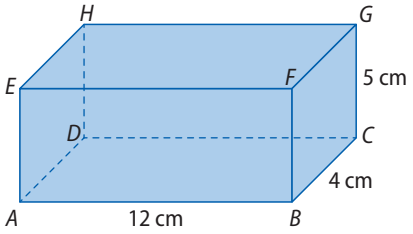
A distância de qualquer ponto do plano α ao plano β é igual à distância de qualquer ponto do plano β ao plano α. Portanto, podemos afirmar que a distância do ponto *C* ao plano α é igual à distância do ponto *A* ao plano β, de modo que a alternativa **a** está correta.

ATIVIDADES

27. b) 4 cm
27. c) 12 cm
27. d) 4 cm
27. f) 4 cm

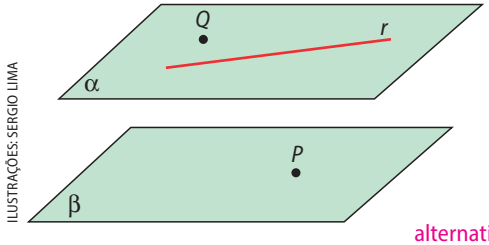
NÃO ESCREVA NO LIVRO.

27. Considere o paralelepípedo reto-retângulo *ABCDEFGH* e calcule o que se pede.



a) A distância entre os pontos *C* e *H*. 13 cm
b) A distância entre o ponto *D* e a reta $\overleftrightarrow{AB}$.
c) A distância entre o ponto *F* e o plano *ADH*.
d) A distância entre as retas reversas $\overleftrightarrow{GH}$ e $\overleftrightarrow{BF}$.
e) A distância entre as retas paralelas $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{EH}$. 13 cm
f) A distância entre a reta $\overleftrightarrow{BE}$ e o plano *CDG*.
g) A distância entre os planos paralelos *ABC* e *EFG*. 5 cm

28. (UEA-AM) Considere dois planos distintos e paralelos, α e β, uma reta *r* contida no plano α, um ponto *Q* pertencendo ao plano α, mas com *Q* não pertencendo à reta *r*, e um ponto *P* pertencendo ao plano β, conforme mostra a figura.



ILUSTRAÇÕES: SERGIO LIMA

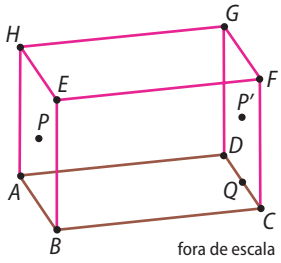
alternativa **c**

De acordo com essas informações, afirma-se que

a) a distância do ponto *Q* ao ponto *P* é igual à distância do ponto *Q* ao plano β.
b) a projeção ortogonal da reta *r* sobre o plano β passará pelo ponto *P*.
c) a distância do ponto *Q* ao plano β é igual à distância de qualquer ponto da reta *r* ao plano β.
d) ao se projetar ortogonalmente a reta *r* e o ponto *Q* sobre o plano β, os pontos *Q* e *P* ficarão sobre a reta *r*.
e) a distância entre o ponto *Q* e sua projeção ortogonal no plano β é igual à distância entre os pontos *Q* e *P*.

29. (UEA-AM) Seja α o plano que passa pelos pontos *C*, *D*, *G* e *F*. Seja *P* um ponto distante 8 cm de α, tal que a sua projeção ortogonal sobre α é o ponto *P'*.

Sabendo que o ponto *Q* pertence ao plano α e que a distância entre os pontos *P* e *Q* é igual a $\sqrt{89}$ cm, a distância entre os pontos *P'* e *Q* é igual a



fora de escala

a) 4 cm.
b) 5 cm.
c) 8 cm.
d) 9 cm.
e) 12 cm.

alternativa **b**

30. (EsPCEx-SP) Considere um plano α e os pontos *A*, *B*, *C* e *D* tais que

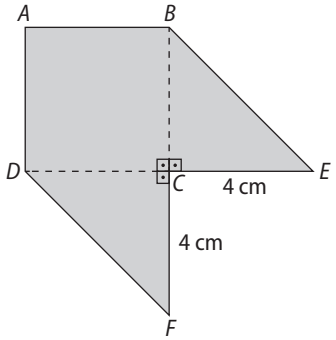
- O segmento *AB* tem 6 cm de comprimento e está contido em α.
- O segmento *BC* tem 24 cm de comprimento, está contido em α e é perpendicular a *AB*.
- O segmento *AD* tem 8 cm de comprimento e é perpendicular a α.

Nessas condições, a medida do segmento *CD* é

a) 26 cm
b) 28 cm
c) 30 cm
d) 32 cm
e) 34 cm

alternativa **a**

31. (ESPM-SP) Na figura plana abaixo, *ABCD* é um quadrado de área 10 cm². Os segmentos *CE* e *CF* medem 4 cm cada. Essa figura deverá ser dobrada nas linhas tracejadas, fazendo com que os pontos *E* e *F* coincidam com um ponto *P* do espaço. A distância desse ponto *P* ao ponto *A* é igual a: alternativa **a**



a) 6 cm
b) 5 cm
c) $4\sqrt{2}$ cm
d) $5\sqrt{2}$ cm
e) $6\sqrt{2}$ cm

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Arquitetura e Urbanismo

A Arquitetura é uma das áreas em que são feitos muitos projetos utilizando conceitos do desenho técnico. Para tornar-se arquiteto, é necessário realizar o curso de Arquitetura e Urbanismo. Mas você sabe o que faz um arquiteto? Leia o texto a seguir para conhecer um pouco mais a respeito dessa profissão.

O arquiteto-urbanista lida basicamente com o espaço, seja ele interno ou externo. Cabe a ele projetar, planejar, organizar e intervir em empreendimentos, áreas urbanas, restaurações do patrimônio histórico e arquitetura de interiores. É o profissional responsável por elaborar a planta e determinar os materiais que serão utilizados na obra, levando em conta funcionalidade, estética e conforto. Para isso, pensa no uso do imóvel, disposição dos ambientes e dos objetos, acústica, ventilação e iluminação.

NUTTAPONG PUNNA/SHUTTERSTOCK.COM

Os arquitetos são responsáveis pelos projetos de imóveis, e, em alguns casos, a construção de uma maquete é uma das etapas do projeto.

Com uma formação técnica, humanista e com interfaces social e artística, o arquiteto-urbanista pode ir além da área de edificações. Respaldado pela legislação que regulamenta a profissão, o profissional pode buscar especialização em arquitetura paisagística, cenografia, conjuntos arquitetônicos e monumentos, projetos de interiores, planejamento físico, urbano e regional. Além disso, pode trabalhar em planos de orientação do crescimento das cidades; projetos de habitação, de transportes, de saneamento; desenhos industriais e comunicação visual.

[...]

ARQUITETURA e urbanismo. Fortaleza: Portal da Universidade Federal do Ceará, c2024. Disponível em: https://www.ufc.br/ensino/guia-de-profissoes/586-arquitetura-e-urbanismo. Acesso em: 23 set. 2024.

Durante a execução de um projeto arquitetônico, o profissional precisa fazer diversos desenhos para que a obra saia como o planejado; para isso, são usadas as vistas e as projeções. Além da forma do edifício, sua intencionalidade também deve ser levada em conta. Nesse sentido, questões como inovação e sustentabilidade podem nortear o projeto.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Leia o texto a seguir, que mostra a visão do arquiteto que projetou o Museu do Amanhã, no Rio de Janeiro, exemplo de inovação e sustentabilidade.

[...]

"A ideia é que o edifício fosse o mais etéreo possível, quase flutuando sobre o mar, como um barco, um pássaro ou uma planta", explica o autor do projeto, o arquiteto espanhol Santiago Calatrava [...].

[...]

O edifício, em sua arquitetura e diretrizes de sustentabilidade, integra-se como parte do conteúdo do Museu do Amanhã, incentivando a discussão de temas como utilização da energia solar, novas formas da arquitetura moderna, relação com a paisagem da cidade e recuperação da Baía de Guanabara. "Um passeio ao redor do Museu é uma lição de sustentabilidade, de botânica, uma aula do que significa energia solar", exemplifica Calatrava. [...]

[...]

JOAO PAULO V TINOCO/SHUTTERSTOCK.COM

Museu do Amanhã, Rio de Janeiro (RJ). Fotografia de 2024.

A ARQUITETURA de Santiago Calatrava. Rio de Janeiro: Museu do Amanhã, [202-]. Disponível em: https://museudoamanha.org.br/pt-br/content/arquitetura-de-santiago-calatrava. Acesso em: 9 set. 2024.

Para acessar

- MUSEU do Amanhã: visitas virtuais. [*S. l.*]: Google Arts & Culture, [202-]. Disponível em: https://artsandculture.google.com/explore/collections/museu-do-amanh%C3%A3?c=three_d. Acesso em: 9 set. 2024.

  Por meio do *site*, é possível fazer *tours* virtuais pelo Museu do Amanhã, tanto para navegar pela parte externa do edifício e apreciar sua arquitetura como para visitar algumas exposições feitas no museu.

Agora, faça o que se pede nas atividades a seguir.

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. Você já tinha ouvido falar na profissão arquiteto? Na região onde você mora, existe alguma universidade que disponibilize esse curso de graduação? Pesquise a respeito do curso: qual é a duração dele, quantas vagas há, qual é o processo de ingresso etc. Resposta pessoal.
2. Você conhece outras profissões que utilizem desenho técnico e projeções no seu dia a dia? Pesquise sobre o assunto e compartilhe os resultados com os demais colegas da turma.
3. Reúna-se a dois colegas, e escolham um monumento ou um edifício que seja conhecido na sua cidade. Pesquisem quem foi o responsável pela concepção do projeto: foi um arquiteto? Ele tem outros projetos na cidade? Façam um vídeo para apresentar os resultados da pesquisa feita para o restante da turma. Respostas pessoais.
4. Reúna-se a dois colegas, e escolham um objeto para fazer a projeção ortogonal das vistas frontal, superior e lateral. Resposta pessoal.

2. Resposta pessoal. Resposta possível: Profissões como engenheiro e *designer* (de interiores, de embalagens, por exemplo).

Programando posições relativas de retas e de planos

Para que os computadores executem tarefas, é necessário que sejam programados para isso. Essa programação pode ser feita por meio de diversas linguagens e formas. Para esta atividade, vamos utilizar o **Scratch**, um *software* que pode ser usado *on-line*, pelo *link* https://scratch.mit.edu/ (acesso em: 9 set. 2024), ou pode ser realizado o *download* no computador e usado *off-line*.

O Scratch utiliza uma linguagem de programação em blocos. Basta identificar, à esquerda da tela, os comandos que se deseja executar e arrastar os blocos para a área de trabalho no centro da tela. Não se esqueça de garantir que seu bloco, isto é, sua sequência de comandos, seja coerente e atenda a seu objetivo. Antes de começar, lembre-se de alterar o idioma para o Português, clicando, consecutivamente, em ***Settings***, ***Language*** e **Português Brasileiro**.

Nesta atividade, será explorada a posição relativa entre duas retas com base nas propriedades verificadas, isto é, será construído um programa que vai perguntar sobre uma série de propriedades envolvendo duas retas e, com base nas respostas fornecidas, retornará um resultado sobre a posição relativa entre essas retas.

Para construir esse programa, é preciso pensar em quais são as perguntas necessárias para determinar precisamente a posição relativa entre duas retas. Usaremos o fluxograma construído na página **262** para isso, acompanhando os passos a seguir.

I. Adicione, na área de trabalho, o bloco alaranjado, conforme imagem a seguir, que está na barra lateral na categoria **Eventos**. Esse bloco indica que, ao clicar na bandeira verde no topo direito, ao lado da figura cor-de-rosa, o programa será executado.

II. Na categoria **Sensores**, arraste o bloco azul, conforme imagem a seguir, encaixe-o no bloco alaranjado e altere a pergunta para "As retas são coplanares? Responda sim ou não.".

REPRODUÇÃO/SCRATCH

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

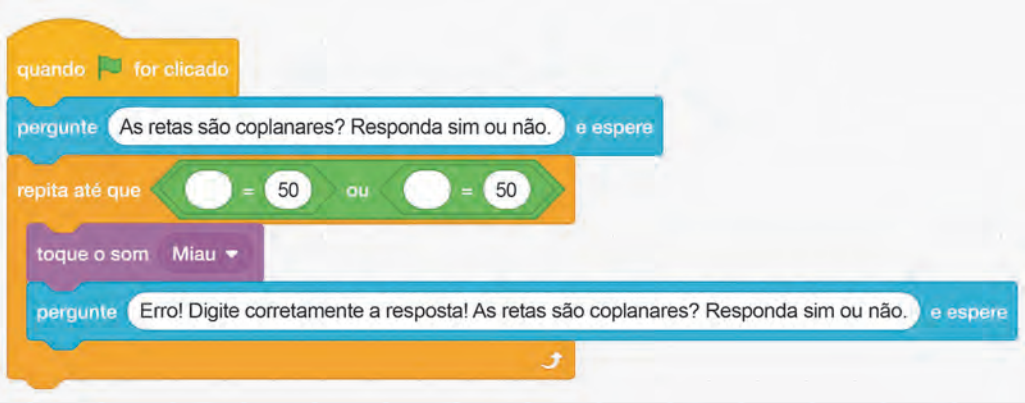
TOPIC SENTENCES/SHUTTERSTOCK.COM

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

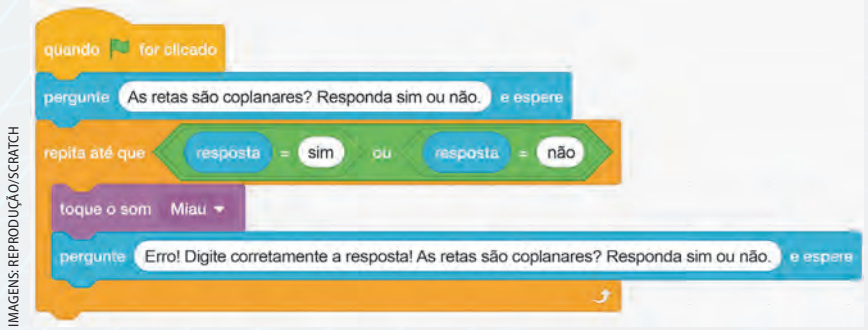
III. Se a resposta dada pelo usuário for diferente de "sim" ou "não", o programa pode interpretar as informações equivocadamente, apresentando um erro ou chegando a uma conclusão incorreta. Para que isso não aconteça, vamos garantir que as únicas respostas possíveis sejam "sim" ou "não", clicando em **Controle** e arrastando o bloco "repita até que", também alaranjado, para o código.

IV. Clique em **Som** e arraste o bloco roxo "toque o som", encaixando-o no bloco alaranjado "repita até que" anterior. Repita a pergunta, colocando um aviso de erro no início da frase. Para isso, arraste um novo bloco de criação de pergunta e escreva "Erro! Digite corretamente a resposta! As retas são coplanares? Responda sim ou não.", conforme a imagem a seguir.

V. É preciso restringir o programa para que não seja repetida a notificação de erro e siga com o código quando a resposta "sim" ou "não" for dada. Para fazer isso, adicione essa verificação no espaço vazio logo após "repita até que". Como há duas respostas possíveis, em **Operadores**, arraste o bloco verde "ou", encaixando-o nesse espaço vazio, e, na sequência, arraste outros dois blocos verdes com "= 50", encaixando-os no bloco verde "ou", conforme figura a seguir.



VI. Clique em **Sensores**, arraste o bloco azul "resposta", encaixando-o na primeira igualdade e substitua o "50" por "sim". Repita o processo para a segunda igualdade e troque o "50" por "não".



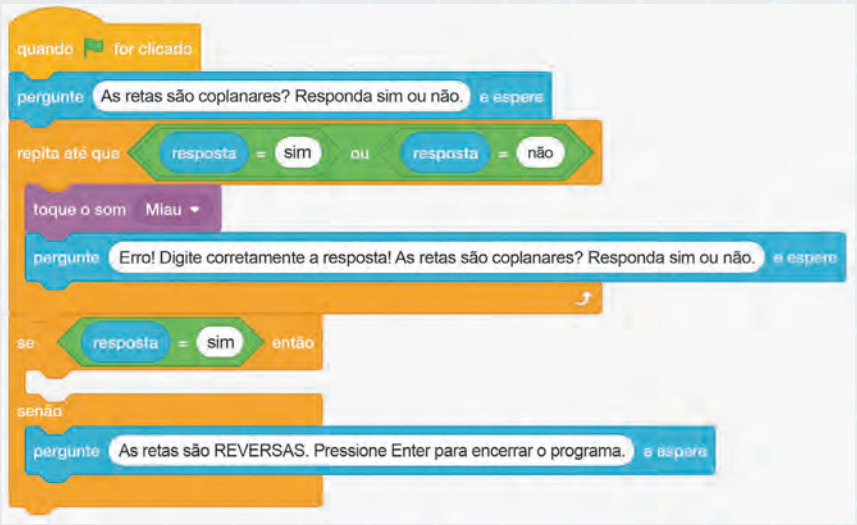
IMAGENS: REPRODUÇÃO/SCRATCH

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

VII. Agora que as respostas foram dadas, é necessário instruir o programa sobre o que fazer com elas. Se a resposta for "sim", é necessário perguntar se as retas têm um único ponto em comum. Para isso, em **Controle,** arraste o bloco alaranjado "se <espaço> então" para o fim do bloco anterior e preencha esse espaço vazio com os blocos verde "= sim" e azul "resposta", conforme imagem a seguir.

VIII. Caso a resposta seja "não", as retas são reversas, e precisamos notificar o usuário sobre isso. Para isso, clique em **Sensores**, arraste o bloco azul "pergunte e espere", encaixando-o ao bloco alaranjado "senão" e digite "As retas são REVERSAS. Pressione ***Enter*** para encerrar o programa.", conforme imagem a seguir.

REPRODUÇÃO/SCRATCH



IX. Com isso, finalizamos a primeira pergunta a ser feita para descobrir a posição relativa entre duas retas. Para fazer as demais perguntas, a estrutura é muito parecida com a da primeira. Assim, repita o que foi criado até aqui. Vá até a primeira pergunta, clique com o botão direito, selecione **Duplicar** e arraste o bloco copiado para dentro do "se". Troque as perguntas para "As retas têm apenas um ponto em comum? Responda sim ou não.". Não se esqueça de trocar a pergunta na mensagem de erro também.

Se a resposta for "sim", a conclusão é de que as retas são concorrentes. Para notificar essa resposta ao usuário, mova o bloco copiado do "senão" para o "se" e altere o texto para "As retas são CONCORRENTES. Pressione ***Enter*** para encerrar o programa.". Para o caso em que a resposta seja "não", precisamos perguntar se as retas têm todos os pontos em comum. Para isso, repita os passos anteriores para copiar o bloco da pergunta e altere as perguntas e respostas correspondentes.

TOPIC SENTENCES/SHUTTERSTOCK.COM

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

X. O programa final ficará assim:

REPRODUÇÃO/SCRATCH

XI. Pressione a bandeira verde e teste as perguntas que aparecerão na tela da direita. Experimente dar respostas erradas também, para observar as mensagens de erro.

Agora, faça o que se pede nas atividades a seguir.

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Ver as **Orientações para o professor**.

1. Crie um programa para determinar a posição relativa entre uma reta e um plano.

2. Crie um código que diga qual é a posição relativa entre dois planos considerados.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. Analise as afirmações a seguir e indique qual delas é falsa. alternativa **d**

a) Três pontos distintos de uma circunferência definem um plano.

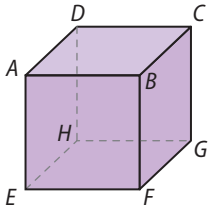
b) O centro e os extremos de um diâmetro de uma circunferência não definem um plano.

c) Dois diâmetros distintos de uma circunferência definem um plano.

d) Se dois pontos de uma circunferência pertencem a um plano, então a circunferência está contida nesse plano.

e) Dadas uma reta e uma circunferência em um mesmo plano, as quais não se intersectam, há somente uma reta paralela à reta dada que passa pelo centro da circunferência.

2. (Vunesp-SP) Considere o cubo da figura. Das alternativas abaixo, aquela correspondente a pares de vértices que determinam três retas, duas a duas reversas, é: alternativa **e**



a) (*A*, *D*), (*C*, *G*), (*E*, *H*)

b) (*A*, *E*), (*H*, *G*), (*B*, *F*)

c) (*A*, *H*), (*C*, *F*), (*F*, *H*)

d) (*A*, *E*), (*B*, *C*), (*D*, *H*)

e) (*A*, *D*), (*C*, *G*), (*E*, *F*)

3. (UERN) Seja um plano α e uma reta *s* secante a α. Para qualquer reta *r* contida em α, é correto afirmar: alternativa **e**

a) *r* e *s* podem ser paralelas, apenas.

b) *r* e *s* podem ser reversas, apenas.

c) *r* e *s* podem ser concorrentes, apenas.

d) *r* e *s* podem ser paralelas ou reversas.

e) *r* e *s* podem ser reversas ou concorrentes.

4. (FURRN) Um plano é determinado por: alternativa **d**

a) uma única reta.

b) duas retas quaisquer.

c) três pontos quaisquer.

d) uma reta e um ponto não pertencente a ela.

e) uma reta e um ponto a ela pertencente.

5. (Vunesp-SP) Entre todas as retas suportes das arestas de um certo cubo, considere duas, *r* e *s*, reversas. Seja *t* a perpendicular comum a *r* e a *s*. Então: alternativa **c**

a) *t* é a reta suporte de uma das diagonais de uma das faces do cubo.

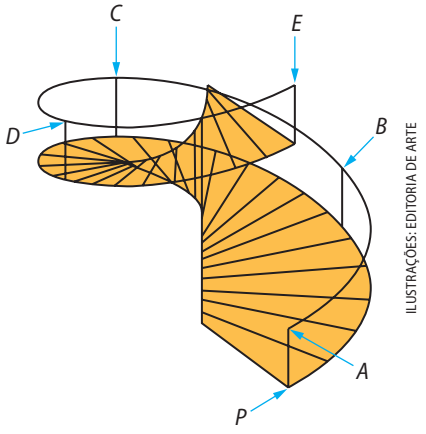
b) *t* é a reta suporte de uma das diagonais do cubo.

c) *t* é a reta suporte de uma das arestas do cubo.

d) *t* é a reta que passa pelos pontos médios das arestas contidas em *r* e *s*.

e) *t* é a reta perpendicular a duas faces do cubo, por seus pontos médios.

6. (Enem/MEC) O acesso entre dois andares de uma casa é feito através de uma escada circular (escada caracol), representada na figura. Os cinco pontos *A*, *B*, *C*, *D* e *E* sobre o corrimão estão igualmente espaçados, e os pontos *P*, *A* e *E* estão em uma mesma reta. Nessa escada, uma pessoa caminha deslizando a mão sobre o corrimão do ponto *A* até o ponto *D*.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

A figura que melhor representa a projeção ortogonal sobre o piso da casa (plano) do caminho percorrido pela mão dessa pessoa é:

a)

b)

c)

d)

e)

alternativa **c**

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

alternativa **d**

7. (UFAM) Assinale a alternativa **CORRETA**:

a) Dois planos que possuem três pontos em comum são coincidentes.

b) Se dois planos α e β são perpendiculares ao plano γ, então os planos α e β são paralelos.

c) Existem dois planos distintos, passando ambos por um mesmo ponto e perpendiculares a uma reta.

d) Duas retas perpendiculares a um plano são paralelas.

e) Toda reta paralela a um plano é perpendicular a infinitas retas desse plano.

8. (UFAL) Sejam α e β dois planos perpendiculares entre si. A reta r é perpendicular ao plano α e a reta s é perpendicular ao plano β. Nessas condições: alternativa **c**

a) a reta r não pode ter pontos em comum com o plano β.

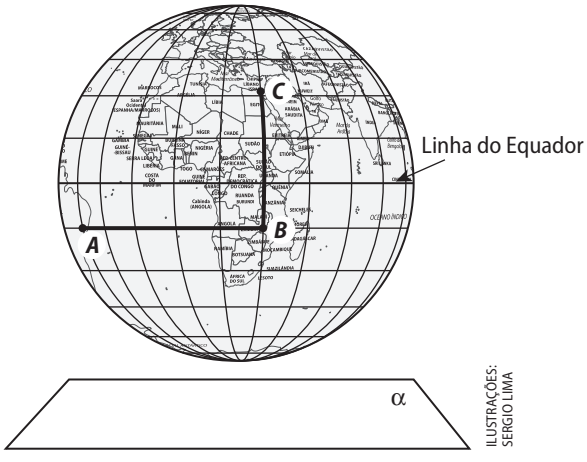
b) as retas r e s são concorrentes.

c) as retas r e s podem ser reversas.

d) a reta s está contida em um plano perpendicular a α.

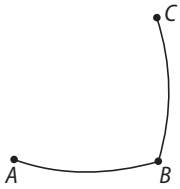
e) as retas r e s são paralelas entre si.

9. (Enem/MEC) A figura representa o globo terrestre e nela estão marcados os pontos A, B e C. Os pontos A e B estão localizados sobre um mesmo paralelo, e os pontos B e C, sobre um mesmo meridiano. É traçado um caminho do ponto A até C, pela superfície do globo, passando por B, de forma que o trecho de A até B se dê sobre o paralelo que passa por A e B e, o trecho de B até C se dê sobre o meridiano que passa por B e C. Considere que o plano α é paralelo à linha do equador na figura.

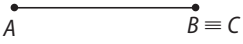


ILUSTRAÇÕES: SERGIO LIMA

A projeção ortogonal, no plano α, do caminho traçado no globo pode ser representada por

a)


b)

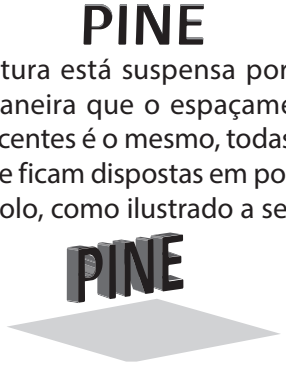
c)


d)

alternativa **e**

e)

10. (Enem/MEC) Um grupo de países criou uma instituição responsável por organizar o Programa Internacional de Nivelamento de Estudos (PINE) com o objetivo de melhorar os índices mundiais de educação. Em sua sede foi construída uma escultura suspensa, com a logomarca oficial do programa, em três dimensões, que é formada por suas iniciais, conforme mostrada na figura.



Essa escultura está suspensa por cabos de aço, de maneira que o espaçamento entre letras adjacentes é o mesmo, todas têm igual espessura e ficam dispostas em posição ortogonal ao solo, como ilustrado a seguir.

Ao meio-dia, com o sol a pino, as letras que formam essa escultura projetam ortogonalmente suas sombras sobre o solo.

A sombra projetada no solo é alternativa **e**

a)

b)

c)

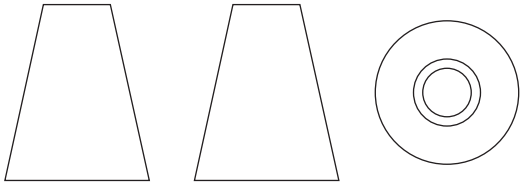
d)

e)

ILUSTRAÇÕES: SUELLEN MACHADO

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

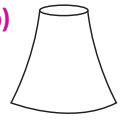
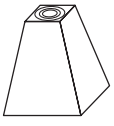
11. (Enem/MEC) No desenho técnico, é comum representar um sólido por meio de três vistas (frontal, perfil e superior), resultado da projeção do sólido em três planos, perpendiculares dois a dois.
A figura representa as vistas de uma torre.



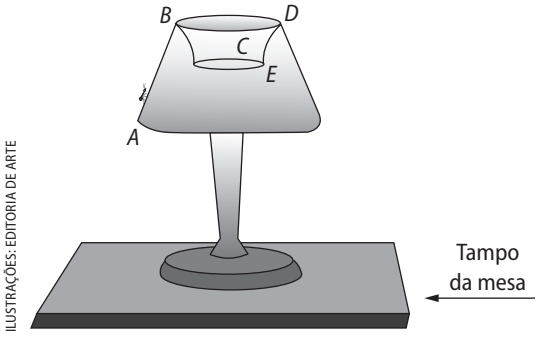
Vista frontal | Vista perfil | Vista superior

Disponível em: www.uems.br. Acesso em: 11 dez. 2012 (adaptado).

Com base nas vistas fornecidas, qual figura melhor representa essa torre? alternativa **e**

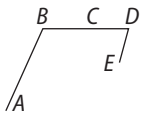
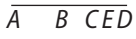
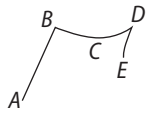
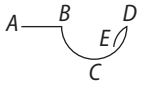
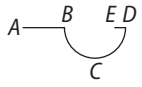
a)
c)
e)
b) 
d) 

12. (Enem/MEC) Uma formiga move-se sobre um castiçal de vidro transparente, do ponto *A* para *B* em linha reta, percorre o arco circular *BCD*, sendo *C* localizado na parte da frente do castiçal, e desce o arco *DE*, como representado na figura.

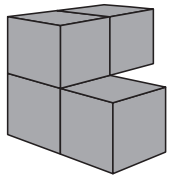


ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

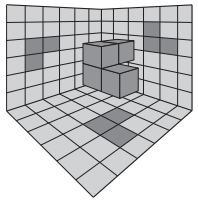
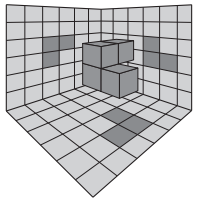
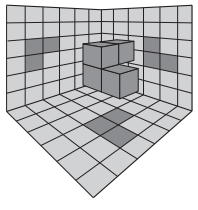
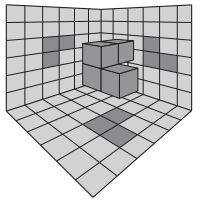
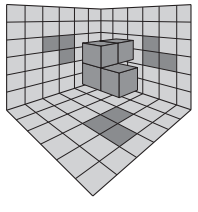
Os pontos *A*, *B*, *D* e *E* estão sobre um mesmo plano perpendicular à mesa sobre a qual se encontra o castiçal. A projeção ortogonal, sobre o plano da mesa, do trajeto percorrido pela formiga, do ponto *A* até o ponto *E*, é melhor representada por alternativa **c**

a) 
d) 
b) 
e) 
c) 

13. (Enem/MEC) Em um jogo desenvolvido para uso no computador, objetos tridimensionais vão descendo do alto da tela até alcançarem o plano da base. O usuário pode mover ou girar cada objeto durante sua descida para posicioná-lo convenientemente no plano horizontal. Um desses objetos é formado pela justaposição de quatro cubos idênticos, formando assim um sólido rígido, como ilustrado na figura.

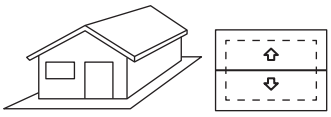


Para facilitar a movimentação do objeto pelo usuário, o programa projeta ortogonalmente esse sólido em três planos quadriculados perpendiculares entre si, durante sua descida. A figura que apresenta uma possível posição desse sólido, com suas respectivas projeções ortogonais sobre os três planos citados, durante sua descida é alternativa **e**

a) 
d) 
b) 
e) 
c) 

ILUSTRAÇÕES: SUELLEN MACHADO

14. (Enem/MEC) A Figura 1 apresenta uma casa e a planta do seu telhado, em que as setas indicam o sentido do escoamento da água de chuva. Um pedreiro precisa fazer a planta do escoamento da água de chuva de um telhado que tem três caídas de água, como apresentado na Figura 2.



(a) Casa (b) Planta do telhado

Figura 1

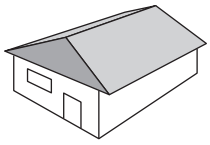
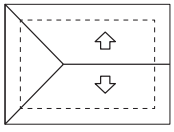


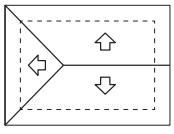
Figura 2

A figura que representa a planta do telhado da Figura 2 com o escoamento da água de chuva que o pedreiro precisa fazer é alternativa **b**

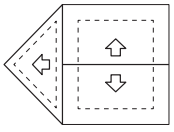
a)



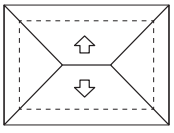
b)



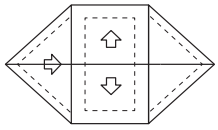
c)



d)



e)



ILUSTRAÇÕES: SUELLEN MACHADO

PARA REFLETIR

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Neste Capítulo, estudamos noções primitivas, definições, postulados e teoremas da Geometria Espacial de Posição. Estudamos também as posições relativas entre os principais entes geométricos (ponto, reta e plano) no plano e no espaço.

Compreendemos os conceitos de paralelismo e de perpendicularismo e como eles se relacionam. Analisamos também alguns teoremas e propriedades relacionados a esses conceitos. Outro conteúdo abordado foi o de projeção ortogonal e sua relevância para projetistas e para o trabalho com vistas e projeções. Por fim, estudamos o conceito de distância entre pontos, retas e planos.

Nas páginas de abertura, foi discutido como o desenho técnico é importante para representarmos o nosso mundo tridimensional em um suporte bidimensional (como a folha de papel). Depois de ter estudado o conteúdo deste Capítulo, você consegue reconhecer que esses conceitos podem auxiliá-lo a fazer essa transposição utilizando o desenho técnico e a Geometria Descritiva?

Vamos refletir a respeito das aprendizagens do Capítulo **8**: Respostas pessoais.

- Você já conhecia algum dos conteúdos apresentados neste Capítulo? Qual(is)?
- Você se sente confiante para realizar uma demonstração em Matemática?
- Você consegue reconhecer se houve um aprofundamento em relação ao que você conhecia sobre o conceito de posições relativas? E sobre o de projeções ortogonais?
- Você compreendeu o conceito de distância entre dois pontos? E entre duas retas? E entre dois planos?
- Você consegue relacionar o conteúdo estudado neste Capítulo com algumas das tarefas executadas por arquitetos, engenheiros e projetistas?

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

RESPOSTAS DAS ATIVIDADES

Capítulo 1 – Pesquisa estatística

Atividades

1. **b)** Aproximadamente 30,46%.
   c) Não.
   d) Região Norte.
   e) Resposta pessoal.
2. Resposta pessoal.
3. O senador **2**.
4. Amostra sistemática.
5. Alternativa **a**.
6. **a)** Resposta pessoal.
   b) É variável quantitativa.
7. **a)** [14,96%; 18,96%]
   b) Não.
   c) Aproximadamente 346 votos.
   d) Aproximadamente 381 pessoas.
8. Alternativa **d**.
9. A soma indica o total de pessoas entrevistadas que responderam "sim", ou seja, que já fizeram uma cirurgia. A média indica a fração de pessoas entrevistadas que já fizeram cirurgias.
10. **a)** As informações necessárias são: quem contratou a pesquisa, quem a pagou, a origem e o valor dos recursos, a metodologia utilizada, o plano amostral, o questionário completo, o nível de confiança, a margem de erro, o período da coleta dos dados e o nome do profissional estatístico responsável pela pesquisa.
    b) Amostra estratificada.
    c) Enquetes e sondagens não têm plano amostral e não utilizam metodologia científica.
11. **a)** Amostral.
    b) Por telefone.
    c) 90%
12. Realização de pesquisa.
13. **a)** Aproximadamente 0,392.
    b) 85 anos
14. O IDHM do Brasil, em 2021, foi 0,766.
15. Alternativa **d**.
16. Alternativa **d**.
17. Alternativa **e**.
18. Alternativa **c**.
19. Alternativa **b**.
20. Alternativa **a**.
21. Alternativa **c**.
22. Alternativa **c**.
23. Alternativa **c**.
24. Resposta pessoal.

Atividades complementares

1. Alternativa **d**.
2. Alternativa **d**.
3. Alternativa **e**.
4. Alternativa **c**.
5. Alternativa **d**.
6. Alternativa **d**.
7. Alternativa **d**.
8. Alternativa **c**.
9. **a)** Resposta pessoal.
   b) Resposta pessoal.

Capítulo 2 – Progressões

Atividades

1. **a)** (2, 5, 8, 11, …)
   b) (1, 2, 4, 8, …)
   c) (0, 2, 0, 2, …)
   d) (0, 3, 8, 15, …)
2. **a)** $a_5 = 16$; $a_8 = 25$
   b) 16ª posição
   c) Não é.
3. **a)** 199
   b) 50ª posição
   c) $f(1) + f(7) = f(2) + f(6) = f(3) + f(5) = 14$
4. **a)** (3, 1, −3, −11, ...)
   b) (2, 4, 16, 256, ...)
   c) $\left(2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, \ldots\right)$
   d) $\left(0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{\sqrt{2}+1}, \ldots\right)$
   • Respostas pessoais.
5. **a)** Macieiras: n^2; pinheiros: $8n$.
   b) A partir de $n = 9$.
6. **a)** Não.
   b) Sim; $r = 0$.
   c) Sim; $r = -6$.
   d) Não.
   e) Sim; $r = 7$.
7. **a)** (10, 13, 16, 19, 22)
   b) (−3, 2, 7, 12, 17, 22)
   c) $(a + 2, 2a + 2, 3a + 2, 4a + 2)$
8. **a)** É uma PA de razão 3.
   b) Não é uma PA.
9. Alternativa **d**.
10. 87
11. 9ª posição
12. $a_n = 5n - 3$
13. 119
14. 157 termos
15. **a)** $a_{15} = 13{,}5$
    b) $a_{20} = 22 - 18\sqrt{5}$
    c) $a_{10} = -17 + 10\pi$
    • Resposta pessoal.
16. 60° e 80°
17. $a_1 = 2$; $r = 2$
18. 201 palitos
19. (−1, 2, 5, …)
20. (2, 5, 8, 11, 14)
21. **a)** $f(x) = 3x + 1$
    b) $D(f) = \mathbb{N}^*$; $Im(f) = \{4, 7, 10, 13, 16, \ldots\}$
22. **a)** 101 emissoras; 300
    b) 104,9 MHz
23. Alternativa **d**.
24. Alternativa **d**.
25. **a)** $q = 4$
    b) $q = -3$
    c) $q = \sqrt{5}$

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

d) $q = 2^4$
e) $q = \frac{1}{2}$
f) $q = 10^2$

26. a) Constante.
b) Decrescente.
c) Decrescente.
d) Oscilante.
e) Crescente.
f) Crescente.

27. É uma PG em que $a_1 = \frac{5}{4}$ e $q = 4$.

28. 36

29. $a = \frac{9}{2}$ e $b = 6$

30. 16

31. 2 048

32. $q = \pm 2$

33. $q = 2$ e $a_1 = 2$

34. 3

35. $b = 486$

36. $n = 5$

37. $S_6 = 555\,555$

38. 8 termos

39. a) 256 tábuas
b) 1,28 m

40. 8 190 litros

41. a) $a_n = 5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$; $f(n) = 25 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n$; $S = \frac{25}{4}$

b) $a_n = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$; $f(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n$; $S = \frac{1}{3}$

c) $a_n = \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$; $f(n) = \frac{10}{81} \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^n$; $S = \frac{10}{9}$

43. a) $S = \{2\}$
b) $S = \{3\}$

44. 60 metros

45. $S = 8\ell$

46. a) 1 820
b) 4 704
c) 79

Atividades complementares

1. Alternativa **d**.
2. Alternativa **b**.
3. Alternativa **c**.
4. Alternativa **c**.
5. Alternativa **d**.
6. Alternativa **c**.
7. Alternativa **a**.
8. Alternativa **d**.
9. Alternativa **e**.
10. Alternativa **b**.
11. Alternativa **b**.
12. Alternativa **c**.
13. Alternativa **a**.
14. Alternativa **e**.
15. Alternativa **02**.
16. Alternativa **a**.

Capítulo 3 – Função definida por mais de uma sentença

Atividades

1. a) Função definida por mais de uma sentença.

b)
$$f(x) = \begin{cases} 1\,200, \text{se } x = 0 \\ 1\,200 + 3{,}6x, \text{se } 0 < x \leqslant 25 \\ 1\,200 + 8{,}4x, \text{se } 25 < x \leqslant 50 \\ 1\,200 + 14{,}4x, \text{se } 50 < x \leqslant 75 \\ 1\,200 + 20{,}4x, \text{se } 75 < x \leqslant 100 \\ 1\,200 + 26{,}4x, \text{se } x > 100 \end{cases}$$

c) R$ 2.872,80
d) 36 alarmes

2. a) 16
b) -7
c) -18

3. a) $-\frac{4}{3}$ ou 2
b) -2 ou 0

5.
$$g(x) = \begin{cases} -x - 3, \text{se } x \leqslant -1 \\ -2, \text{se } -1 < x \leqslant 1 \\ x - 3, \text{se } x > 1 \end{cases}$$

6. a) Resposta pessoal.
b) Resposta pessoal.
c)
$$f(x) = \begin{cases} 9{,}68 + 2{,}79x, \text{se } 0 < x \leqslant 1 \\ 15{,}43 + 9{,}20(x - 1), \text{se } 1 < x \leqslant 3 \\ 33{,}83 + 4{,}80(x - 3), \text{se } 3 < x \leqslant 7 \\ 54{,}62 + 7{,}96(x - 7), \text{se } 7 < x \leqslant 14 \\ 111{,}92 + 9{,}46(x - 14), \text{se } 14 < x \leqslant 34 \end{cases}$$
d) Resposta pessoal.

7. a) 2
b) 2
c) 8
d) 7
e) 5
f) -8

8. a) 3
b) 1
c) 6
d) 9

9. a) -12
b) $\frac{3}{7}$
c) -1

10. a) $-2x - 2$
b) 2
c) $2x + 2$

11. $3x + 2$

12. a) 3
b) -3

13. a) Sim, $x = 3$.
b) $\frac{4}{5}$

15. $f(x) = |x + 1| + 2$; $D(f) = \mathbb{R}$; $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 2\}$

16. $n = 12$

18. a) $S = \left\{-\frac{7}{3}, \frac{5}{3}\right\}$
b) $S = \{-1, 5\}$
c) $S = \{-6, 2\}$

19. Alternativa **e**.
20. Alternativa **d**.
21. Alternativa **d**.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

22. a) No kilometro 200 da rodovia.
b) No kilometro 65 ou no 335.
23. Alternativa **a**.
24. Alternativa **e**.
25. Alternativa **c**.
26. Alternativa **b**.
27. Alternativa **a**.
28. a) Apenas sobrejetora.
b) Nem sobrejetora nem injetora.
c) Bijetora.
d) Apenas injetora.
29. Alternativa **d**.
30. Alternativa **a**.
31. a) $9x^2 - 12x + 3$
b) $-3x^2 - 6x + 1$
c) $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x$
d) $9x - 2$
32. a) $x = \frac{2}{3}$
b) $x = -\frac{7}{6}$
33. $x = \frac{3}{2}$
34. 1 ou 9
35. Alternativa **c**.
36. 56
37. a) $f^{-1}(x) = x + 3$
b) $g^{-1}(x) = 4x - 2$
38. $g(x) = \frac{-x - 2}{6}$
39. a) $f^{-1}(x) = \frac{3x - 1}{x - 2}$
b) $D(f^{-1}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$
c) 2
40. a) Não são inversas.
b) São inversas.
c) Não são inversas.

Atividades complementares

1. Alternativa **a**.
2. Alternativa **b**.
3. Alternativa **b**.
4. Alternativa **b**.
5. Alternativa **c**.
6. Alternativa **d**.
7. Alternativa **b**.
8. Alternativa **b**.
9. Alternativa **d**.
10. Alternativa **d**.
11. Alternativa **d**.
12. Alternativa **b**.

Capítulo 4 – Função logarítmica

Atividades

1. a) 0
b) 1
c) 3
d) 7
e) 1
f) -5
2. a) $\frac{4}{3}$
b) -6
c) $\frac{1}{6}$
d) -4
e) $-\frac{5}{3}$
f) -5
3. a) -4
b) $-\frac{9}{2}$
4. $m = 110$
5. a) 8
b) 54
c) 0
d) $\frac{4}{9}$
6. $S = \{-1, 3\}$
7. 6561
8. a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -5 \text{ ou } x > 1\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -10 < x < 5\}$
9. a) 2,041
b) 2,082
c) $-1,041$
d) 1,5615
e) 0,082
f) $-0,918$
10. a) 3
b) 5
c) 3
d) 2
11. a) 3
b) 13
12. 1
13. 1
14. $\frac{1}{4}$
15. $S = \{(10, 10)\}$
16. $y + 3 - 3x$
17. 1,806 milisegundo
18. a) $-0,15490$
b) $-0,92082$
c) 2,92117
d) -5
e) 3,21888
f) $-0,08338$
19. a) 76
b) 57
c) 493
d) 2,86
20. a) 0,3162
b) 0,7079
c) $-0,3010$
d) 0,3010
e) 2,3026
f) $-0,6931$
g) $-1,8971$
h) $-5,2983$
22. a) $b \simeq 3$
b) $b \simeq 7$
c) $b \simeq 0,5$
d) $b \simeq 0,367879$
e) $b = 1$
23. 32,5
24. 0,7213
27. $\{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x \leqslant -3 \text{ ou } 3 \leqslant x < 6 \text{ e } x \neq 5\}$

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

28. **b)** As funções são decrescentes.
c) $D(f) = D(g) = \mathbb{R}_+^*$;
$Im(f) = Im(g) = \mathbb{R}$
d) Resposta pessoal.
e) Resposta pessoal.
f) Resposta pessoal.
29. Alternativa **a**.
30. Alternativa **b**.
31. **a)** pH $\simeq$ 6,2
b) Ácida.
32. **a)** $f\left(\frac{3}{2}\right) = -2$; $f(2) = 0$; $f(3) = 2$;
$g(-4) = 1$; $g(0) = 0$; $g(2) = -1$
b) $S = \left\{\frac{7}{4}\right\}$
33. **a)** $f\left(\log_{10}(2 + \sqrt{3})\right) = 40$
b) $S = \{-0{,}7; 0{,}7\}$
34. 0,74
35. **a)** $S = \left\{\frac{1}{2}, 16\right\}$
b) $S = \left\{\frac{1}{256}, 16\right\}$
36. $\frac{23}{26}$
37. 255
38. Aproximadamente 22 minutos.
39. Resposta pessoal.
40. Resposta pessoal.
41. Alternativa **e**.
42. **a)** $S = \{a \in \mathbb{R} \mid -9 < a < 11 \text{ e } a \neq 1\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -7 \leq x < -5 \text{ ou } 1 < x \leq 3\}$
43. $1{,}55 < t < 3{,}1$

Atividades complementares

1. Alternativa **c**.
2. Alternativa **a**.
3. Alternativa **a**.
4. Alternativa **a**.
5. Alternativa **e**.
6. $k = -\frac{1}{2} \cdot \log\left(\frac{4}{5}\right)$ e as árvores terão 29,52 metros de altura.
7. Alternativa **e**.
8. Alternativa **a**.
9. Alternativa **c**.
10. Alternativa **a**.
11. Alternativa **a**.
12. Alternativa **c**.
13. Alternativa **d**.
14. Alternativa **d**.

Capítulo 5 – Razões trigonométricas na circunferência

Atividades

1. **a)** $\frac{\pi}{3}$ rad
b) $\frac{7\pi}{6}$ rad
c) 200°
d) 9°
2. 0,5 rad
3. $\frac{5\pi}{6}$ rad
• Resposta pessoal.
4. 6π metros
5. **a)** 98,5 cm
b) 51,4 cm
6. $\frac{\pi}{18}$ m
7. Alternativa **d**.
9. **a)** $63° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$
b) $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$
10. Sim.
• Resposta pessoal.
11. **a)** São côngruos.
b) Não são côngruos.
12. **a)** Segundo quadrante.
b) Quarto quadrante.
13. **a)** Cinco voltas; primeiro quadrante.
b) Três voltas; primeiro quadrante.
c) Três voltas; terceiro quadrante.
d) Duas voltas; para sobre o eixo x, no ponto $(-1, 0)$.
e) Duas voltas; terceiro quadrante.
f) Duas voltas; para sobre o eixo y, no ponto $(0, 1)$.
14. Aproximadamente 104,67 cm.
15. $med(\overset{\frown}{AM}) = 60° = \frac{\pi}{3}$ rad; $med(\overset{\frown}{AN}) = 150° = \frac{5\pi}{6}$ rad; $med(\overset{\frown}{AP}) = 240° = \frac{4\pi}{3}$ rad; $med(\overset{\frown}{AQ}) = 330° = \frac{11\pi}{6}$ rad
16. Alternativa **d**.
18. **a)** $\frac{1}{2}$
b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
c) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
d) $-\frac{1}{2}$
e) Zero.
19. **a)** $\text{sen } 135° = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
b) $\text{sen } \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$; $\cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
c) $\text{sen } \frac{19\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos \frac{19\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
d) $\text{sen } (-240°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos (-240°) = -\frac{1}{2}$
20. Alternativa **a**.
21. **a)** 4
b) -4
22. **a)** Verdadeiro.
b) Verdadeiro.
c) Falso.
• Resposta pessoal.
23. **a)** $2\text{sen } \alpha$
b) $-\text{sen } \alpha - \cos \alpha$
c) $\cos \alpha$
24. **a)** Primeiro quadrante.
b) Segundo quadrante.
26. $A = \frac{2\sqrt{2} - 1}{4}$
27. Zero.
28. $-\frac{3}{2}$
29. a-I; b-II; c-IV; d-III; e-IV; f-II; g-I; h-III
30. 2 ou -1
31. **a)** sen 830°
b) cos 190°
32. 1
33. Zero.
34. $a = 2$

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

35. $a = \pm\frac{1}{2}$
36. a) $-0{,}42$; $-0{,}91$
    b) $-0{,}42$; $0{,}91$
    c) $-0{,}42$; $0{,}91$
37. a) Pesquisa do estudante.
    b) $R \simeq 3{,}63t$; $r \simeq 1{,}63t$
    c) Resposta pessoal.
38. a) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
    b) -1
    c) $-\sqrt{3}$
    d) Zero.
39. $\frac{4}{3}$
40. Zero.
41. $\frac{-2-\sqrt{3}}{2}$
42. tg 1
    • Resposta pessoal.
43. a) 1
    b) $-\sqrt{3}$
44. $m = 15$
45. a) $-\frac{4}{5}$
    b) $\frac{3}{4}$
46. Alternativa **b**.
47. 2
48. $-\frac{1}{5}$
49. Negativo.
50. Verdadeiro.
51. $\frac{12\sqrt{10}}{31}$
52. $AB \simeq 91{,}65$ m
53. Alternativa **e**.
54. Aproximadamente 40 m.
55. A questão é irresolúvel, pois falta um dado.
56. Alternativa **e**.
57. 70 cm
58. Aproximadamente 66,28 cm.
59. Torre A: $\simeq$9,67 km e torre B: $\simeq$10,57 km.
60. $\operatorname{sen}\alpha = \frac{3\sqrt{3}}{8}$
61. a) Aproximadamente 49,43 m.
    b) Aproximadamente 41 m.
62. a) 1 km
    b) $\sqrt{2}$ km
63. $CD = 15\sqrt{2}$m; 15 m
64. $2\sqrt{2}$ milhas
65. a) 45°; 60°; 75°
    b) $10\sqrt{2} + \sqrt{3}$ cm; $10\sqrt{2}$ cm; $10\sqrt{3}$ cm
66. Alternativa **e**.
67. 25 cm²
68. Aproximadamente R$ 56.476,00.
69. $\frac{35\sqrt{3}}{2}$ cm²
70. Aproximadamente 37 cm.
71. $\frac{3x^2\sqrt{3}}{2}$ cm²
72. Resposta pessoal.

Atividades complementares

1. Alternativa **c**.
2. Alternativa **c**.
3. Alternativa **c**.
4. Alternativa **c**.
5. Alternativa **b**.
6. Alternativa **b**.
7. Alternativa **d**.
8. Alternativa **a**.
9. Alternativa **c**.
10. Alternativa **c**.
11. Alternativa **b**.
12. Alternativa **b**.
13. Alternativa **d**.
14. Alternativa **b**.
15. Alternativa **e**.
16. Alternativa **d**.
17. Alternativa **b**.
18. Alternativa **c**.
19. Alternativa **b**.
20. Alternativa **e**.

Capítulo 6 – Funções trigonométricas

Atividades

2. a) $p = \frac{\pi}{4}$
    b) $p = \frac{\pi}{5}$
3. $\text{Im} = [-7, 7]$
4. Alternativa **b**.
5. a) Valor máximo: 4; valor mínimo: -4.
    b) Valor máximo: 7; valor mínimo: 3.
    c) Valor máximo: $\frac{1}{2}$; valor mínimo: $\frac{1}{4}$.
6. $S = \{m \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant m \leqslant 1\}$
7. Alternativa **a**.
8. $S = \left\{k \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{4} \leqslant k \leqslant \frac{5}{6}\right\}$
9. Alternativa **d**.
10. Alternativa **e**.
11. Alternativa **e**.
12. Resposta pessoal.
14. a) $p = \frac{\pi}{4}$
    b) $p = \frac{\pi}{5}$
    c) $p = \frac{7\pi}{2}$
    d) $p = 8\pi$
15. $m = 4$
16. 5
17. Alternativa **a**.
18. Alternativa **c**.
19. Alternativa **a**.
20. $[-1, 5]$
21. Alternativa **d**.
22. a) $\frac{1}{2}$
    b) $f\left(\frac{\pi}{6}\right) > g\left(\frac{\pi}{4}\right)$
23. a) $a = 4$; $b = 2$
    b) Resposta pessoal.
24. a) $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$
    b) $S = \left\{\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$
    c) $S = \left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$
    d) $S = \{\pi\}$
25. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
    b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{12} + k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
26. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
27. Alternativa **d**.
28. Aproximadamente 0,0014 s.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

29. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
    b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
30. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
31. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
32. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
33. Alternativa **d**.
34. Alternativa **b**.
35. Alternativa **d**.
36. Alternativa **d**.

Atividades complementares

1. Alternativa **c**.
2. Alternativa **b**.
3. Alternativa **03**.
4. Alternativa **e**.
5. Alternativa **e**.
6. Alternativa **e**.
7. Alternativa **a**.
8. Alternativa **b**.
9. Alternativa **b**.
10. Alternativa **c**.
11. Alternativa **e**.
12. Alternativa **c**.
13. Alternativa **d**.
14. Alternativa **a**.
15. Alternativa **a**.
16. Alternativa **a**.
17. I: V; II: V; III: V; IV: F; V: F
18. Alternativa **a**.
19. Alternativa **a**.
20. Alternativa **c**.
21. Alternativa **b**.
22. Alternativa **b**.

Capítulo 7 – Áreas

Atividades

1. a) 8 200 cm²
    b) 18 cm²
    c) $12\sqrt{5}$ cm²
    d) 1 950 m²
2. 168 cm²
3. a) 100 cm²
    b) 148 cm²
    c) 124 cm²
    d) Aproximadamente 3,68%.
4. $5\sqrt{2}$ cm
5. Aumenta 44%.
6. a) 437,5 azulejos
    b) 50 cm
7. Alternativa **b**.
8. 12 cm
9. Alternativa **b**.
10. Alternativa **c**.
11. Alternativa **b**.
12. Atividade de construção de horta comunitária.
13. 20 dm
14. Alternativa **d**.
15. Aproximadamente 530,660 ha.
16. Aproximadamente 628 cm².
17. Alternativa **b**.
18. 16π m²
19. 75π cm²
20. Aproximadamente R$ 50.253,00.
21. Alternativa **e**.
22. a) $2\sqrt{3}$ cm
    b) $\sqrt{3}$ cm
23. Aproximadamente 10,38 cm².
24. a) 200 cm²
    b) $600\sqrt{3}$ cm²
25. Aproximadamente 859,5 cm².
26. $27\sqrt{3}$ cm²
27. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
    b) $\frac{1}{2}$
28. a) 12 cm
    b) $216\sqrt{3}$ cm²
29. $a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$ u.a.
30. Decágono; a medida do lado é x e o perímetro, $10x$.
31. Resposta pessoal.
32. a) $2\sqrt{3}$ cm
    b) $\frac{72\sqrt{3} - 32\pi}{3}$ cm²
33. $54\sqrt{3}$ cm²
34. a) 12 cm
    b) Aproximadamente 88 cm².
35. b) $P(m) = 8m$
36. a) $P_1(a) = 3a$, com $a > 0$;
    $S_1(a) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, com $a > 0$
    c) $P_2(b) = 6b$, com $b > 0$;
    $S_2(b) = \frac{3b^2\sqrt{3}}{2}$, com $b > 0$
37. Alternativa **e**.
38. Sim.
39. b) Triângulo equilátero.
40. Alternativa **e**.
41. Alternativa **e**.
42. Alternativa **b**.
43. Alternativa **b**.

Atividades complementares

1. Alternativa **c**.
2. Alternativa **c**.
3. Alternativa **a**.
4. Alternativa **b**.
5. Alternativa **c**.
6. Alternativa **d**.
7. Alternativa **d**.
8. Alternativa **a**.
9. Alternativa **e**.
10. Alternativa **e**.
11. Alternativa **d**.
12. Alternativa **d**.
13. Alternativa **e**.
14. Alternativa **a**.
15. Alternativa **d**.
16. a) $0 < x \leq 24$
    b) $AC = \frac{x\sqrt{5}}{2}$
    c) $x = 16$

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

17. Alternativa **d**.
18. Alternativa **c**.
19. Alternativa **e**.
20. Alternativa **c**.
21. Alternativa **e**.

Capítulo 8 – Geometria Espacial de Posição

Atividades

1. Alternativa **c**.
2. Um ou três.
3. Nenhum, um ou quatro.
4. Respostas possíveis:
   a) $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{EI}$
   b) $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$
   c) $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BA}$; $\overleftrightarrow{FH}$ e $\overleftrightarrow{HI}$
   d) $\overleftrightarrow{CE}$ e $\overleftrightarrow{HI}$; $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{DE}$
5. b) Falsa.
6. a) Secante.
   b) Está contida.
   • Resposta pessoal.
7. a) Secantes. b) A reta $\overleftrightarrow{BC}$. c) Não.
8. Alternativas **04** e **08**.
9. Alternativa **b**.
10. Alternativa **d**.
11. a) Resposta possível: $\overleftrightarrow{ST}$.
    b) Sim.
    c) Os planos são paralelos.
12. Alternativa **a**.
13. Alternativa **b**.
14. Alternativa **b**.
15. a) Paralelas; perpendiculares; reversas; reversas.
    b) Paralelos; secantes.
16. a) Perpendiculares. b) Reversas ortogonais.
17. Alternativa **c**.
20. Alternativa **e**.
21. Alternativa **e**.
22. Um segmento de reta.
23. a) O ponto C.
    b) O ponto B.
    c) O ponto V_2.
24. Alternativa **d**.
25. Alternativa **e**.
26. a) Largura e comprimento.
    b) 0,1375 m²
    c) 6,4 m
27. a) 13 cm
    b) 4 cm
    c) 12 cm
    d) 4 cm
    e) 13 cm
    f) 4 cm
    g) 5 cm
28. Alternativa **c**.
29. Alternativa **b**.
30. Alternativa **a**.
31. Alternativa **a**.

Atividades complementares

1. Alternativa **d**.
2. Alternativa **e**.
3. Alternativa **e**.
4. Alternativa **d**.
5. Alternativa **c**.
6. Alternativa **c**.
7. Alternativa **d**.
8. Alternativa **c**.
9. Alternativa **e**.
10. Alternativa **e**.
11. Alternativa **e**.
12. Alternativa **c**.
13. Alternativa **e**.
14. Alternativa **b**.

» REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS COMENTADAS

ALMEIDA, Lourdes W. de; SILVA, Karina P. da; VERTUAN, Rodolfo Eduardo. **Modelagem matemática na educação básica**. São Paulo: Contexto, 2016.
Essa obra proporciona oportunidades de integração envolvendo atividades normalmente desenvolvidas nas aulas de Matemática e em situações do dia a dia, no que tange a aspectos econômicos, sociais e ambientais.

BARUFI, Maria Cristina B.; LAURO, Maira M. **Funções elementares, equações e inequações**: uma abordagem utilizando microcomputador. 1. ed. São Paulo: CAEM-IME/USP, 2001.
Esse material aborda aspectos sobre o ensino de funções afim e quadrática a partir do uso de *softwares*.

BOYER, Carl B. **História da matemática**. 3. ed. Tradução: Helena de Castro. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.
O livro aborda fatos e estudos da História da Matemática, destacando a fascinante relação da humanidade com números, formas e padrões ao longo do tempo.

BRASIL. **Lei nº 13.415, de 16 de fevereiro de 2017**. Altera as Leis nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, e 11.494, de 20 de junho 2007, que regulamenta o Fundo de Manutenção e Desenvolvimento da Educação Básica e de Valorização dos Profissionais da Educação, a Consolidação das Leis do Trabalho [...]. Brasília, DF: Presidência da República, [2023]. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2015-2018/2017/lei/l13415.htm. Acesso em: 7 out. 2024.
Lei que alterou a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf. Acesso em: 7 out. 2024.
Documento oficial contendo um conjunto de orientações que norteia a (re)elaboração dos currículos de referência das escolas das redes pública e privada de ensino de todo o Brasil. Traz os conhecimentos essenciais, as competências, as habilidades e as aprendizagens pretendidas para crianças e jovens em cada etapa da Educação Básica.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Currículos e Educação Integral. **Diretrizes Curriculares**

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Nacionais da Educação Básica. Brasília, DF: MEC: SEB: Dicei, 2013. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/media/seb/pdf/d_c_n_educacao_basica_nova.pdf. Acesso em: 18 out. 2024.

As Diretrizes Curriculares Nacionais (DCNs) são normas obrigatórias para a Educação Básica que orientaram a elaboração da BNCC. Elas são discutidas, concebidas e fixadas pelo Conselho Nacional de Educação (CNE).

BRASIL. Ministério da Saúde. Secretaria de Atenção à Saúde. Departamento de Atenção Básica. **Guia alimentar para a população brasileira**. 2. ed. Brasília, DF: MS, 2014. Disponível em: https://bvsms.saude.gov.br/bvs/publicacoes/guia_alimentar_populacao_brasileira_2ed.pdf. Acesso em: 7 out. 2024.
Apresenta aspectos sobre os alimentos saudáveis e contribui para a adequação de uma rotina de alimentação saudável.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Temas Contemporâneos Transversais na BNCC**: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília, DF: MEC: SEB, 2019. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/contextualizacao_temas_contemporaneos.pdf. Acesso em: 7 out. 2024.
Documento explicativo sobre os temas transversais a serem abordados na Educação Básica.

CARRANO, Paulo; DAYRELL, Juarez. Juventude e Ensino Médio: quem é este aluno que chega à escola. *In*: DAYRELL, Juarez; CARRANO, Paulo; MAIA, Carla L. **Juventude e Ensino Médio**: sujeitos e currículos em diálogo. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2014. Disponível em: https://educacaointegral.org.br/wp-content/uploads/2015/01/livro-completo_juventude-e-ensino-medio_2014.pdf. Acesso em: 7 out. 2024.
Como o próprio título indica, trata-se de um texto que procura "descrever" o jovem atual.

CARVALHO, João P. de. Um problema de Fibonacci. **Revista do Professor de Matemática (RPM)**, São Paulo, n. 17, [201-]. Disponível em: http://www.rpm.org.br/cdrpm/17/2.htm. Acesso em: 7 out. 2024.
Apresenta uma explicação sobre a história do matemático Leonardo Fibonacci e como ele chegou à sequência de Fibonacci.

COELHO, José Renato P. **O GeoGebra no ensino das funções exponenciais**. 2016. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Laboratório de Ciências Matemáticas, Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campos dos Goytacazes, 2016. Disponível em: https://uenf.br/posgraduacao/matematica/wp-content/uploads/sites/14/2017/09/30052016Jos%C3%A9-Renato-Paveis-Coelho.pdf. Acesso em: 7 out. 2024.
O material explora a utilização do *software* GeoGebra e de planilhas no estudo das funções exponenciais.

COSTA, Antonio Carlos G. da; VIEIRA, Maria A. **Protagonismo juvenil**: adolescência, educação e participação democrática. Salvador: Fundação Odebrecht: FTD, 2000.
O livro apresenta, de forma sistematizada, diversos estudos sobre protagonismo juvenil, com relatos de estudantes que vivenciaram, durante a vida escolar deles, ações protagonistas e os impactos dessa experiência em suas trajetórias acadêmica e profissional.

CRESPO, Antônio A. **Estatística fácil**. 19. ed. São Paulo: Saraiva, 2009.
O livro apresenta conceitos básicos e avançados de Estatística de maneira direta e simplificada, contextualizando com dados e problemas reais. Em todos os tópicos, há problemas e exercícios relacionados aos conceitos recém-apresentados.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Etnomatemática**: elo entre as tradições e a modernidade. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.
O autor, que é um dos precursores da pesquisa em etnomatemática no Brasil, apresenta seus pensamentos sobre a área, definindo esse campo de pesquisa e construindo um histórico da pesquisa etnomatemática no Brasil e no exterior. Nesse contexto, o autor discute também o conceito de cultura, que está intimamente relacionado ao conceito de etnomatemática. Ao longo de toda a obra, há discussões sobre a importância e a relevância desses estudos para a sala de aula.

DOMINGUES, Hygino H.; IEZZI, Gelson. **Álgebra moderna**. 4. ed. reimp. São Paulo: Atual, 2003.
Essa obra apresenta conceitos matemáticos, como conjuntos, funções, entre outros, destacando demonstrações e a importância de uma linguagem formal na escrita matemática.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.
O livro aborda vários fatos e estudos da Matemática organizados de forma cronológica.

FAZENDA, Ivani C. A. **Interdisciplinaridade**: história, teoria e pesquisa. 18. ed. Campinas: Papirus, 2012. (Coleção Magistério: Formação e Trabalho Pedagógico).
Essa obra propõe reflexões sobre a construção de um saber mais integrado e livre, destacando a integração de diferentes áreas de conhecimento, permeando o processo de ensino e aprendizagem.

GOWERS, Timothy. **Matemática**: uma breve introdução. Lisboa: Gradiva, 2008.
O autor Timothy Gowers é professor de Matemática na Universidade de Cambrigde e ganhador da medalha Fields, que equivale ao prêmio Nobel para a área da Matemática. Nessa obra, ele explica, de maneira simples, as diferenças fundamentais entre a Matemática escolar e a Matemática acadêmica. Ele também aborda questões filosóficas sobre a natureza dos conhecimentos matemáticos historicamente construídos pela humanidade, proporcionando uma compreensão de conceitos abstratos de modo intuitivo, como números complexos e infinito. Pare ler esse livro, é necessário apenas o conhecimento da Matemática escolar.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Censo demográfico 2022**: população e domicílios: primeiros resultados. Rio de Janeiro: IBGE, 2023. Disponível em: https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv102011.pdf. Acesso em: 21 out. 2024.
Documento que apresenta os primeiros resultados de população e domicílios referentes ao Censo 2022.

KENSKI, Vani M. **Educação e tecnologias**: o novo ritmo da informação. 8. ed. Campinas: Papirus, 2012. (Coleção Papirus Educação).
Essa obra busca refletir sobre as relações entre educação e tecnologias, evitando jargões, teorias e abordagens específicas desses campos de conhecimento, de modo que as discussões propostas sejam mais acessíveis a todos.

LIMA, Elon L. *et al*. **A matemática do Ensino Médio**. 11. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016. (Coleção Professor de Matemática, 1 v.).
Livro que aborda conceitos matemáticos desenvolvidos no Ensino Médio, destacando demonstrações e atividades de aprofundamento.

LOPES, Celi E.; NACARATO, Adair M. (org.). **Escritas e leituras na educação matemática**. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.
Livro que traz um compilado de artigos discutindo perspectivas consideradas fundamentais no ensino de Matemática, que deve

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

focalizar os saberes do estudante, incentivando a criação dos próprios procedimentos e o desenvolvimento do raciocínio e da criatividade, priorizando a aquisição e a comunicação em linguagem matemática.

MACHADO, Nilson José. **Epistemologia e didática**: as concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente. 6. ed. São Paulo: Cortez, 2005.
Essa obra apresenta reflexões que buscam articular questões epistemológicas e ações docentes, bem como analisar formas usuais do trabalho escolar propondo alternativas didáticas.

MELO, Marcela Camila P. de; JUSTULIN, Andresa Maria. A resolução de problemas: uma metodologia ativa na construção do conceito de semelhança de triângulos. *In*: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 15., 2019, Londrina. **Anais** […]. Londrina: Sociedade Brasileira de Educação Matemática – Regional Paraná, 2019. Disponível em: http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/EPREM/XV_EPREM/paper/viewFile/1019/881. Acesso em: 7 out. 2024.
Apresentação teórica e prática da metodologia de resolução de problemas.

MONTEIRO, Martha S.; CERRI, Cristina. **História dos números complexos**. São Paulo: Centro de Aperfeiçoamento de Ensino de Matemática: Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 2001. Disponível em: https://www.ime.usp.br/~martha/caem/complexos.pdf. Acesso em: 7 out. 2024.
Apresenta informações sobre o desenvolvimento dos números complexos ao longo da história.

MORGADO, Augusto César. **Matemática discreta**. Rio de Janeiro: SBM, 2015.
O livro apresenta tópicos sobre números naturais, progressões, análise combinatória, probabilidade, médias e princípio das gavetas. Ele também tem um capítulo sobre Matemática financeira, no qual explica como funcionam os dois tipos de sistemas de amortização utilizados nos financiamentos em geral.

ORGANIZAÇÃO DAS NAÇÕES UNIDAS PARA A EDUCAÇÃO, A CIÊNCIA E A CULTURA. **Declaração Mundial sobre Educação para Todos**: satisfação das necessidades básicas de aprendizagem, Jomtien, 1990. Brasília, DF: Unesco, 1990. Disponível em: https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000086291_por. Acesso em: 7 out. 2024.
Documento importante para conhecimento do professor e que foi um dos suportes para a elaboração da BNCC.

PASQUAL JÚNIOR, Paulo Antonio. **Pensamento computacional e tecnologias**: reflexões sobre a educação no século XXI. Caxias do Sul: Educs, 2020.
Mostra os preceitos básicos do pensamento computacional como uma série de ferramentas mentais para a decomposição do problema e para o reconhecimento de padrões, de abstração e de algoritmo de resolução em um contexto de aprendizagem ativa, na qual o sujeito aprenderá por meio de ações próprias. Dessa forma, discute-se o desenvolvimento computacional na educação à luz das metodologias ativas de aprendizagem.

PATERLINI, Roberto R. Técnicas de máximos e de mínimos. **Revista do Professor de Matemática (RPM)**, São Paulo, n. 35, [201-]. Disponível em: http://www.rpm.org.br/cdrpm/35/6.htm. Acesso em: 7 out. 2024.
Artigo no qual são investigadas situações-problema por meio de diferentes técnicas para se encontrar os valores de máximo ou de mínimo da função.

POMMER, Wagner M. O número de Euler: possíveis abordagens no ensino básico. **Nilson José Machado**, São Paulo, 2010. Seminário sobre Ensino de Matemática apresentado no Programa de pós-graduação da Faculdade de Educação da USP (Feusp). Disponível em: https://www.nilsonjosemachado.net/sema20100831.pdf. Acesso em: 7 out. 2024.
Esse material apresenta aspectos históricos sobre o número de Euler que contribuem para ampliar o estudo sobre o tema.

PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.
Nessa obra, são apresentadas algumas vantagens de se trabalhar com investigações matemáticas em sala de aula, destacando-se o estabelecimento de conjecturas, reflexões e formalização do conhecimento matemático pelos estudantes.

PORTAL DA OBMEP. Rio de Janeiro, c2024. *Site*. Disponível em: https://portaldaobmep.impa.br/. Acesso em: 7 out. 2024.
Portal que disponibiliza materiais teóricos, videoaulas e atividades interativas sobre Matemática na Educação Básica.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.
Esse é o primeiro livro de história da Matemática publicado no Brasil, escrito por uma autora que apresenta um olhar crítico de como a história da matemática tem sido contada ao longo do tempo.

SKOVSMOSE, Ole. **Educação matemática crítica**: a questão da democracia. Tradução: Abgail Lins e Jussara de Loiola Araújo. 6. ed. Campinas: Papirus, 2013. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).
Nesse livro, as discussões destacam a importância da perspectiva democrática na educação matemática e seu caráter emancipatório, enfatizando o papel da modelagem na educação matemática.

SOARES, Evanildo C. **Uma investigação histórica sobre os logaritmos com sugestões didáticas para a sala de aula**. 2011. Dissertação (Mestrado em Ciências Naturais e Matemática) – Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2011. Disponível em: https://repositorio.ufrn.br/bitstream/123456789/16070/1/EvanildoCS_DISSERT.pdf. Acesso em: 7 out. 2024.
Explora o trabalho com logaritmos em situações de sala de aula, considerando uma perspectiva histórica.

WAGNER, Eduardo. Por que as antenas são parabólicas? **Revista do Professor de Matemática (RPM)**, São Paulo, n. 33, [201-]. Disponível em: http://rpm.org.br/cdrpm/33/3.htm. Acesso em: 7 out. 2024.
Artigo que apresenta uma reflexão sobre a forma parabólica das antenas.

ZABALA, Antoni; ARNAU, Laia. **Como aprender e ensinar competências**. Tradução: Carlos Henrique Lucas Lima. Porto Alegre: Artmed, 2010.
Uma obra que apresenta um novo enfoque no ensino e na aprendizagem de competências, priorizando as capacidades cognitivas, em relação à aquisição de conhecimento.

SIGLAS DOS EXAMES OFICIAIS

Cebraspe-PA: Centro Brasileiro de Pesquisa em Avaliação e Seleção e de Promoção de Eventos
Cefet-MG: Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
Cefet-PR: Centro Federal de Educação Tecnológica do Paraná
CPII-RJ: Colégio Pedro II
EEM-SP: Escola de Engenharia Mauá
Ence-RJ: Escola Nacional de Ciências Estatísticas
Enem/MEC: Exame Nacional do Ensino Médio
Epcar-MG: Escola Preparatória de Cadetes do Ar
ESA: Escola de Sargentos das Armas
EsPCEx-SP: Escola Preparatória de Cadetes do Exército
ESPM-SP: Escola Superior de Propaganda e *Marketing*
Fafeod-MG: Faculdade Federal de Odontologia de Diamantina
Famema-SP: Faculdade de Medicina de Marília
Fatec-SP: Faculdade de Tecnologia
FCMSCSP: Faculdade de Ciências Médicas da Santa Casa de São Paulo
FEI-SP: Centro Universitário FEI
FGV-SP: Fundação Getulio Vargas
Ficsae-SP: Faculdade Israelita de Ciências da Saúde Albert Einstein
FMJ-SP: Faculdade de Medicina de Jundiaí
Furg-RS: Fundação Universidade Federal do Rio Grande
FURRN: Fundação Universidade do Rio Grande do Norte
Fuvest-SP: Fundação Universitária para o Vestibular
IFCE: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará
IFMA: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão
IFPR: Instituto Federal do Paraná
IFRJ: Instituto Federal do Rio de Janeiro
IFRN: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte
IFRR: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Roraima
IFSC: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Santa Catarina
IFSul-RS: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Sul-rio-grandense
Insper-SP: Instituto de Ensino e Pesquisa
IME-RJ: Instituto Militar de Engenharia
ITA-SP: Instituto Tecnológico de Aeronáutica
Mack-SP: Universidade Presbiteriana Mackenzie
OBMEP: Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
PMMG: Polícia Militar de Minas Gerais
PUC-PR: Pontifícia Universidade Católica do Paraná
PUC-RJ: Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
PUC-SP: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Saresp-SP: Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo
Udesc: Universidade do Estado de Santa Catarina
UEA-AM: Universidade do Estado do Amazonas

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

UEAP: Universidade do Estado do Amapá
UECE: Universidade Estadual do Ceará
UEFS-BA: Universidade Estadual de Feira de Santana
UEG-GO: Universidade Estadual de Goiás
UEL-PR: Universidade Estadual de Londrina
UEM-PR: Universidade Estadual de Maringá
UEPA: Universidade do Estado do Pará
UEPB: Universidade Estadual da Paraíba
UERJ: Universidade do Estado do Rio de Janeiro
UERN: Universidade Estadual do Rio Grande do Norte
UFABC-SP: Universidade Federal do ABC
UFAL: Universidade Federal de Alagoas
UFAM: Universidade Federal do Amazonas
UFES: Universidade Federal do Espírito Santo
UFG-GO: Universidade Federal de Goiás
UFJF-MG: Universidade Federal de Juiz de Fora
UFMG: Universidade Federal de Minas Gerais
UFMS: Universidade Federal do Mato Grosso do Sul
UFMT: Universidade Federal do Mato Grosso
Ufop-MG: Universidade Federal de Ouro Preto
UFPA: Universidade Federal do Pará
UFPE: Universidade Federal de Pernambuco
UFPel-RS: Universidade Federal de Pelotas
UFPR: Universidade Federal do Paraná
UFRGS-RS: Universidade Federal do Rio Grande do Sul
UFRN: Universidade Federal do Rio Grande do Norte
UFRR: Universidade Federal de Roraima
UFRRJ: Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
UFSC: Universidade Federal de Santa Catarina
UFSM-RS: Universidade Federal de Santa Maria
UFV-MG: Universidade Federal de Viçosa
UFVJM-MG: Universidade Federal dos Vales Jequitinhonha e Mucuri
UnB-DF: Universidade de Brasília
Uneb-BA: Universidade do Estado da Bahia
Unicamp-SP: Universidade Estadual de Campinas
Unicentro-PR: Universidade Estadual do Centro-Oeste
Unifor-CE: Universidade de Fortaleza
Unilasalle-RS: Universidade La Salle
Unip-SP: Universidade Paulista
Univiçosa-MG: Centro Universitário de Viçosa
USCS-SP: Universidade Municipal de São Caetano do Sul
Vunesp-SP: Fundação para o Vestibular da Universidade Estadual Paulista

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

ORIENTAÇÕES PARA O PROFESSOR

Caro professor,

Atualmente, o ensino de Matemática, assim como o de outras áreas do conhecimento, está pautado pelas indicações presentes nos documentos oficiais do governo, principalmente na Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

As perspectivas desse trabalho estão voltadas para atender aos estudantes do século XXI, reconhecendo que "as rápidas transformações na dinâmica social contemporânea nacional e internacional, em grande parte decorrentes do desenvolvimento tecnológico, atingem diretamente as populações jovens e, portanto, suas demandas de formação"[1].

Diante desse cenário, ensinar Matemática hoje significa desenvolver nos estudantes competências e habilidades apoiadas em noções, conceitos e métodos matemáticos que lhes possibilitem empregar estratégias próprias e criar soluções por meio da observação, da análise, do estabelecimento de conexões e do levantamento de conjecturas, percebendo e expressando regularidades.

Promover tais ações nos estudantes requer que você, professor, tenha domínio dos conteúdos da área, identifique as dificuldades de aprendizagem deles e, com o apoio de estudos da Educação Matemática, ajude-os a superá-las, favorecendo a autonomia e a cooperação em sala de aula.

Cientes disso, e com a intenção de contribuir para o trabalho docente, elaboramos estas **Orientações para o professor**, nas quais, além das discussões sobre os conteúdos e os métodos de ensino, procuramos fornecer subsídios para o seu trabalho como professor, por meio de comentários a respeito das seções e dos conteúdos abordados e de sugestões de leituras complementares, a fim de colaborar para a sua formação.

Na parte específica de cada volume, oferecemos observações e sugestões que visam enriquecer os temas abordados nos capítulos, tanto no aspecto teórico quanto no metodológico. Além disso, apresentamos as respostas e as resoluções das atividades, proporcionando uma compreensão mais completa dos conteúdos.

Para finalizar, desejamos a você muito sucesso em seu trabalho e esperamos que estas orientações possam ajudar a aprimorar sua prática pedagógica.

Os autores.

[1] BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. Brasília, DF: MEC, 2018. p. 462. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 11 set. 2024.

SUMÁRIO

PARTE GERAL

Estrutura da obra 307

Pressupostos teóricos e metodológicos 308

- Objetivos da obra 309
- A etapa do Ensino Médio 310
- A BNCC 310
- O ensino da Matemática e o papel do professor 317
- Avaliação 322

Bibliografia consultada e comentada 325

PARTE ESPECÍFICA

Comentários e sugestões de abordagem para este Volume 328

- Capítulo 1 – Pesquisa estatística 329
- Capítulo 2 – Progressões 332
- Capítulo 3 – Função definida por mais de uma sentença 335
- Capítulo 4 – Função logarítmica 338
- Capítulo 5 – Razões trigonométricas na circunferência 341
- Capítulo 6 – Funções trigonométricas 344
- Capítulo 7 – Áreas 346
- Capítulo 8 – Geometria Espacial de Posição 349

Transcrições dos *podcasts* do 2º ano 352

Resoluções das atividades 354

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Estrutura da obra

Esta Coleção é formada por três volumes, um para cada série do Ensino Médio, sendo cada um constituído por um conjunto de objetos de conhecimento que estão integrados na própria Matemática. Além disso, apresentam também situações cuja contextualização evidencia modelos matemáticos que representam fatos e fenômenos de outras áreas de conhecimento que estão presentes no cotidiano, em especial a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

Ela foi elaborada tendo em vista atender à BNCC, contemplando propostas de trabalho que promovam o desenvolvimento das competências gerais e específicas e das habilidades presentes nesse documento, sem, no entanto, deixar de lado suas características essenciais de atendimento às expectativas de professores e estudantes do Ensino Médio.

Tal estruturação pode ser observada em todos os volumes da Coleção, uma vez que essas integrações são ressaltadas em várias das seções que compõem os capítulos – **Abertura**, **Conexões com…** e **História da Matemática**. Há também destaques sobre alguns aspectos do conhecimento matemático, que embasam reflexões sobre temas transversais e pontos curiosos de sua presença na vida e no desenvolvimento humano, apontados nos boxes **Fórum**, **Saiba que**… e **Pense e responda**. Essas seções e esses boxes possibilitam ao professor uma exploração mais dinâmica do material, podendo indicar aos estudantes por qual das propostas iniciar o trabalho.

Cada um dos livros que compõem esta Coleção está estruturado da forma descrita a seguir.

A proposta da **Abertura** de capítulo é apresentar uma contextualização de aplicação do conteúdo que será abordado. Considerando a diversidade possível de uso dos conteúdos matemáticos, ora são apresentadas situações atuais, ora situações que envolvem a história da Matemática ou que tratam de alguma profissão, porém sempre tendo em vista o estabelecimento de uma relação entre o que está sendo apresentado e os conteúdos a serem desenvolvidos no capítulo. O professor poderá usá-la para um levantamento diagnóstico dos conhecimentos prévios que os estudantes já possuem sobre o conteúdo a ser desenvolvido.

A seção **Atividades resolvidas** tem por princípio a apresentação de uma forma organizada de resolução e de emprego da linguagem matemática. Um aspecto dessa seção a ser considerado e analisado tanto pelos professores como pelos estudantes é que há situações nas quais diferentes caminhos são discutidos para se chegar à solução de uma questão, destacando-se, assim, o fato de que não há um modo único de resolução em Matemática e de que, portanto, os estudantes têm liberdade para criar estratégias próprias de resolução.

Com as **Atividades**, busca-se a familiarização dos estudantes com os conteúdos estudados no capítulo, tanto com relação a problemas envolvendo diferentes contextos do dia a dia quanto com questões específicas para a sistematização de procedimentos necessários para utilização desses conhecimentos em diferentes situações. Estão presentes nessa seção questões do Enem e de vestibulares de instituições de Ensino Superior de todas as regiões do país, questões de olimpíadas nacionais e questões elaboradas pelos autores, para que os estudantes tenham maiores oportunidades de desenvolvimento das competências e habilidades abordadas em cada capítulo.

A seção **Conexões com…** explora temas diversos, com foco na interdisciplinaridade e com o propósito de desenvolver a competência leitora, a cidadania e o senso crítico dos estudantes. A seção apresenta um texto seguido de algumas questões que relacionam a Matemática com temas do cotidiano, explorando gráficos, infográficos, tabelas etc. que se conectem com o conteúdo tratado no capítulo. As questões apresentadas nessa seção são principalmente voltadas a atividades investigativas a serem realizadas em duplas ou em grupos colaborativos e vão exigir processos reflexivos e/ou tomadas de decisão sobre intervenções na comunidade. Outro aspecto importante dessa seção é o fato de, em muitas propostas, os estudantes serem convidados a apresentar suas produções à comunidade escolar, o que possibilita o desenvolvimento de sua comunicação matemática.

A seção **História da Matemática** aborda fatos históricos ligados à Matemática, a fim de contextualizar o conteúdo abordado no capítulo e/ou apresentar o desenvolvimento e a evolução de determinada ideia ou teoria ao longo do tempo. A abordagem histórica é sempre um modo interessante de motivar os estudantes para as possibilidades de criação em Matemática e de destacar aspectos referentes à observação, à análise e à percepção de regularidades que estão por trás dessas descobertas.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Explorando a tecnologia é uma seção que promove o desenvolvimento e/ou o aprofundamento de conhecimentos matemáticos por meio da exploração de *softwares* livres, propiciando um trabalho interativo com alternativas para investigar possibilidades de resolução e para analisar consequências em uma representação ao se fazerem modificações em outra, por exemplo. Para esse trabalho, há orientações iniciais de como utilizar o *software* indicado para cada situação, além da indicação do endereço para o *download* e de orientações para sua instalação. O pensamento computacional também poderá ser desenvolvido por meio de atividades chamadas de desplugadas, isto é, que não dependem do uso do computador, as quais colocam em evidência o emprego da lógica de programação.

A seção **Atividades complementares** tem por objetivo apresentar questões presentes em exames oficiais, como Enem, olimpíadas nacionais e vestibulares realizados em todas as regiões brasileiras, priorizando-se os mais recentes. Sua presença no livro e as possíveis discussões a serem realizadas pelos professores a partir delas apontam para a necessidade da sistematização de alguns aspectos e procedimentos abordados no capítulo.

Com a seção **Para refletir**, os estudantes são incentivados a realizar reflexões a fim de identificar possíveis conexões com o que foi estudado no capítulo e de avaliar sua aprendizagem com relação às ações desenvolvidas no decorrer do trabalho. É uma ótima oportunidade para a realização da autoavaliação pelos estudantes.

Além dessas seções, os volumes apresentam também boxes que enriquecem as propostas apresentadas e ampliam as possibilidades de desenvolvimento das competências gerais da BNCC.

No boxe **Fórum**, é apresentada uma situação referente a algum tema contemporâneo que tenha relação com o conteúdo abordado no capítulo. Em seguida, são propostas algumas questões, com o intuito de promover debates e/ou trocas e compartilhamento de conhecimentos. Tais ações exigem a mobilização de estratégias de debate e de construção de argumentação coerente para defesa do ponto de vista. Além disso, há a possibilidade de esse boxe ser utilizado em momentos *on-line*, por meio de grupos fechados de discussão em *e-mail*, rede social ou aplicativos de troca de mensagens.

O **Pense e responda** é um boxe que traz perguntas curtas e diretas sobre propostas a serem investigadas pelos estudantes, incentivando-os a elaborar hipóteses e buscar sua comprovação ou negação.

O boxe **Saiba que...** tem como função principal fornecer uma dica interessante ou uma informação relevante a respeito do conteúdo. Pode ser referente à teoria apresentada ou a uma determinada forma de resolução de um problema e pode ser utilizado para implementar o conteúdo apresentado.

Nos boxes **Para ler**, **Para assistir**, **Para acessar** e **Para ouvir**, como o próprio nome indica, são fornecidas sugestões de livros, *links*, filmes, *podcasts* etc. Sua finalidade é fornecer um canal confiável com informações complementares a respeito do tópico em estudo.

Pressupostos teóricos e metodológicos

Os pressupostos teóricos e metodológicos que fundamentam esta Coleção foram cuidadosamente construídos com base nas pesquisas mais recentes em Educação Matemática e nas orientações oficiais do Ministério da Educação (MEC), especialmente a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Esta Coleção proporciona oportunidades para o planejamento de aulas baseadas em metodologias ativas que promovem o protagonismo dos estudantes no processo de aprendizagem, aliadas ao uso pedagógico de tecnologias digitais e ao pensamento computacional. O pluralismo de ideias é aspecto central, criando um ambiente que valoriza a diversidade cultural e promove a cultura de paz e o respeito às diferenças.

Além disso, no decorrer dos volumes, é possível encontrar abordagens relacionadas aos Temas Contemporâneos Transversais conectados aos conteúdos matemáticos. Também são consideradas as exigências de avaliações externas, como o Enem e os vestibulares, de modo a preparar os estudantes para esses desafios com uma visão crítica e contextualizada.

A Coleção busca não apenas ensinar Matemática de maneira formal, mas também contribuir para a formação de uma visão interdisciplinar e integradora. Para isso, sempre que possível, apresenta a Matemática de forma integrada com as outras áreas do conhecimento, em específico, com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. A obra incentiva o uso do raciocínio lógico e do pensamento crítico em conjunto com a compreensão de questões sociais e ambientais que afetam a vida cotidiana. A construção de conhecimentos é realizada de forma colaborativa e reflexiva, sempre com ênfase no desenvolvimento da autonomia intelectual e emocional dos estudantes e na promoção de uma cidadania ativa e ética.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Objetivos da obra

- Incentivar discussões justas e respeitosas, a fim de promover a socialização de ideias, a prática colaborativa e o respeito ao outro e às diferenças.
- Refletir sobre aspectos relacionados à saúde física e emocional, como prática de esportes, conhecimento dos nutrientes presentes nos alimentos, formas de prevenção e de controle de doenças, entre outros, de modo a promover a tomada de decisões conscientes e responsáveis com base na análise de dados.
- Refletir, discutir e argumentar sobre questões relacionadas à necessidade de conservação do meio ambiente, tais como desmatamento, efeito estufa, urbanização e gestão de resíduos, utilizando, para isso, a interpretação de dados e o conhecimento científico.
- Compreender e fazer uso da linguagem matemática e de suas diferentes representações (simbólica, algébrica e gráfica), ampliando as possibilidades de se comunicar, ler e interpretar o mundo.
- Apropriar-se de diferentes tipos de raciocínio lógico-matemático (indução, dedução e raciocínio por analogia) para solucionar problemas, comunicar-se (oralmente e por escrito), argumentar e inferir.
- Compreender e analisar a produção e a circulação de textos de divulgação científica e de mídias sociais, considerando os elementos que constituem esses textos (em termos de gêneros discursivos) e os procedimentos de leitura multimodal e inferencial.
- Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para compreender, analisar e propor soluções para situações do cotidiano e demandas econômicas do dia a dia, incluindo temas como inflação, juros, orçamento, financiamento e empréstimo, refletindo sobre questões sociais relacionadas ao uso do dinheiro e a alternativas, como o uso de planilhas eletrônicas, que possibilitem controlar gastos e poupar.
- Apropriar-se da linguagem e dos conceitos de conjuntos, suas propriedades e as operações que podem ser feitas nessa estrutura, a fim de fazer uso desse conhecimento nos diversos campos da Matemática e no cotidiano.
- Ser capaz de aplicar o conceito de função na modelagem de situações em diversos contextos e identificar momentos em que a tecnologia pode ser uma aliada nesse processo, solucionando problemas que envolvam funções afins, funções quadráticas, funções exponenciais, funções logarítmicas, funções definidas por mais de uma sentença e funções trigonométricas.
- Ser capaz de identificar e aplicar o conceito de sequências em diferentes contextos da Matemática e do cotidiano, identificando padrões e regularidades em experimentações, com ou sem uso de tecnologia, propondo conjecturas e generalizações.
- Diferenciar demonstrações matemáticas de experimentações empíricas (visualização de desenhos, construção de modelos materiais, medições de grandezas, entre outros), identificando hipótese e tese em propriedades e teoremas matemáticos, compreendendo sua demonstração e validando seus resultados pelo método dedutivo.
- Apropriar-se do conceito de matrizes, suas principais aplicações em diferentes áreas de conhecimento e em situações do cotidiano, suas propriedades e das operações que podem ser realizadas com esse tipo de representação.
- Consolidar a noção de sistemas de equações lineares para interpretar, modelar e resolver situações em diversos contextos e identificar momentos em que a tecnologia pode ser uma aliada nesse processo.
- Investigar e registrar, por meio de fluxograma, quando possível, o algoritmo que resolve um problema, utilizando conceitos iniciais de linguagem de programação escritos em linguagem corrente e/ou matemática.
- Analisar e compreender problemas e demandas do cotidiano para refletir e propor ações e soluções que utilizem conceitos como perímetro, área, volume, massa, capacidade, entre outras grandezas.
- Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras. Compreender e utilizar as unidades de medida dessas diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), e expressar, quando necessário, medidas em notação científica, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro.
- Utilizar representações que possibilitem a aplicação de relações métricas e trigonométricas na resolução de problemas, consolidando as noções de congruência e de semelhança de polígonos.
- Apropriar-se do conceito de transformações geométricas e das propriedades relacionadas a essas transformações para analisar elementos da natureza e de diferentes produções humanas, bem como construir figuras e modelos geométricos que possibilitem compreender e solucionar problemas do dia a dia.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

- Refletir e debater sobre questões relacionadas aos resultados de pesquisas estatísticas divulgadas pela mídia, assim como elaborar e executar essas pesquisas para investigar questões e problemas do mundo contemporâneo, comunicando os resultados por meio de relatórios contendo gráficos adequados e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão, utilizando ou não recursos tecnológicos.
- Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvam a contagem de possibilidades e o cálculo de probabilidades.
- Identificar fenômenos e experimentos aleatórios e recorrer a análises probabilísticas para tomar decisões conscientes e responsáveis.

A etapa do Ensino Médio

O Ensino Médio tem passado por mudanças nos últimos anos. Novas ideias, discussões e propostas circulam constantemente nas comunidades escolares e nos órgãos voltados à Educação.

Essa etapa tem grande importância para a formação dos jovens e, consequentemente, para o futuro do país, por isso o interesse em investir em reformas que permitam construir o Ensino Médio desejado.

Espera-se que o Ensino Médio faça, de maneira competente, a articulação entre o Ensino Fundamental e o Ensino Superior/vida profissional, para que os estudantes possam consolidar, ampliar e utilizar as competências e habilidades desenvolvidas na etapa anterior, chegando à vida adulta, pessoal e profissional, com as capacidades e qualidades necessárias.

Espera-se também que, durante o Ensino Médio, os estudantes cultivem e aprimorem habilidades sociais, morais e emocionais para as etapas seguintes da vida, como respeito, cooperação, tolerância, equilíbrio emocional e resiliência.

Com base nessas expectativas, importantes mudanças aconteceram nos últimos anos. A carga horária foi ajustada, e a organização curricular sofreu alterações. Para garantir as aprendizagens desejadas em todo o território nacional, foi proposta a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que norteia não apenas a etapa do Ensino Médio, mas toda a Educação Básica.

Com novos direcionamentos, ficou estabelecida a etapa do Ensino Médio composta pela formação geral básica, com carga horária mínima de 2 400 horas, e pelos itinerários formativos, com carga horária mínima de 600 horas.

A formação geral básica consiste no ensino obrigatório das áreas apresentadas na BNCC e dos respectivos componentes curriculares.

- Linguagens e suas Tecnologias: Artes, Educação Física, Língua Inglesa e Língua Portuguesa
- Matemática e suas Tecnologias: Matemática
- Ciências da Natureza e suas Tecnologias: Biologia, Física e Química
- Ciências Humanas e Sociais Aplicadas: História, Geografia, Sociologia e Filosofia

Os itinerários formativos correspondem à parte flexível do currículo, e cada estudante pode escolhê-los de acordo com seus interesses, dentro das quatro áreas do conhecimento da BNCC.

Cabe ao Conselho Nacional de Educação, em conjunto com os sistemas de ensino, estabelecer diretrizes nacionais contendo orientações e objetivos de aprendizagem, que devem ser contemplados nos itinerários. Além disso, também fica estabelecido que cada instituição de ensino deverá ofertar, pelo menos, dois itinerários.

Tomando por base as competências e habilidades apresentadas pela BNCC, que garantem as aprendizagens essenciais para esta etapa da Educação Básica, cabe aos sistemas de ensino e às escolas construir seus norteadores curriculares. Nesse sentido, cada sistema de ensino vem, desde 2019, (re)elaborando seus currículos estaduais, considerando não apenas os documentos normativos, como a BNCC e as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCNs), mas também as características e as necessidades regionais, suas culturas locais e os anseios dos estudantes.

Os referenciais curriculares devem servir de base para que as unidades escolares, em conjunto com seus professores, desenhem seus planejamentos curriculares e definam as estratégias pedagógicas e metodológicas que serão adotadas, bem como a forma como os materiais didáticos disponíveis podem ser utilizados para atender aos objetivos a serem atingidos.

As mudanças descritas começaram a ser implantadas, de maneira gradual, a partir de 2025. Educadores e autoridades da Educação prosseguem avaliando o processo, buscando corrigir rumos e aprimorar propostas que foram assertivas. Assim, o Ensino Médio que todos desejamos ainda está em construção.

A BNCC

Os desafios impostos à educação escolar de um público múltiplo e dinâmico inserido em uma efervescência de desenvolvimento em todas as áreas, provocada principalmente pelo avanço tecnológico, exigem um novo olhar e um posicionamento sobre a abordagem que deve ser dada ao conhecimento a ser construído e à constituição de um sujeito consciente de toda a contribuição que ele pode dar ao mundo de modo geral.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Para que essa **formação integral** seja possível, estudos em Educação e construções curriculares de diferentes países têm indicado que o ensino precisa estar orientado ao desenvolvimento de competências e habilidades.

A BNCC também apresenta tal posicionamento e, diante do fato de que diferentes significados têm sido atribuídos ao termo **competência**, ela apresenta a definição que adota:

> [...] **competência** é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho.[2]

No que tange ao termo **habilidade**, o documento também especifica:

> As **habilidades** expressam as aprendizagens essenciais que devem ser asseguradas aos alunos nos diferentes contextos escolares.[3]

Em outro trecho, esse documento destaca que o desenvolvimento de competências exige que

> [...] as decisões pedagógicas devem estar orientadas para o desenvolvimento de competências. Por meio da indicação clara do que os alunos devem "saber" (considerando a constituição de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores) e, sobretudo, do que devem "saber fazer" (considerando a mobilização desses conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho) [...][4]

Dessa forma, a BNCC delega à escola uma função social urgente, tendo em vista o mundo globalizado e a consequente necessidade de pessoas que "saibam fazer" e que tenham a capacidade de planejar e resolver problemas, que saibam ler o mundo por meio de palavras, imagens, fatos, números, códigos e outras linguagens, usando esses recursos para saber agir e conviver.

As **competências gerais** apresentadas pela BNCC têm o propósito do desenvolvimento integral do estudante:

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

[2] BRASIL, ref. 1, p. 8.
[3] BRASIL, ref. 1, p. 29.
[4] BRASIL, ref. 1, p. 13.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.[5]

Tendo em vista que a proposta de ensino é o desenvolvimento de competências, deve-se repensar o estudo de conteúdos, o que não significa menosprezá-los, mas sim mudar o foco do trabalho com eles. Ao longo das orientações específicas de cada capítulo, são destacados os momentos propícios para o desenvolvimento das competências gerais da BNCC. A memorização de fatos e/ou procedimentos referentes aos conteúdos abordados nos diferentes componentes curriculares não precisa ser totalmente abandonada, porém ela deve fazer sentido para os estudantes. Dentro do possível, as situações propostas devem buscar estabelecer integração entre as diferentes áreas, possibilitando o emprego de noções e conhecimentos matemáticos, geográficos, biológicos etc., além do domínio da língua.

Esses elementos apontam que o ensino por competências exige o repensar da prática docente. O professor precisa reconhecer que os objetos de conhecimento devem ser apresentados, sempre que possível, por meio de situações e problemas contextualizados que provoquem conflitos e exijam que os estudantes mobilizem seus processos cognitivos de observação, visualização, compreensão, organização, análise e síntese como suporte para a elaboração de uma argumentação consistente. É necessário lembrar que muitas situações matemáticas podem ser contextualizadas por meio de questões internas à própria Matemática e por meio da análise de seus procedimentos.

Temas Contemporâneos Transversais (TCTs) e competências socioemocionais

Trazer para a sala de aula problematizações sobre temas vividos pelas pessoas em seu dia a dia que influenciam suas vidas é uma forma de tratar os **Temas Contemporâneos Transversais (TCTs)**, que são referidos na BNCC. Esses temas não se vinculam a uma determinada área ou disciplina escolar, ao contrário, devem ser abordados por todas elas. Eles devem ser considerados como um conjunto de aprendizagens essenciais e indispensáveis a que todos os estudantes, crianças, jovens e adultos, têm direito.

A importância desse trabalho é a possibilidade de transformar a escola em um espaço voltado para a compreensão da realidade social e dos direitos e responsabilidades de todos em relação à vida pessoal, coletiva e ambiental. Esses temas são indicados por serem "aqueles que são intensamente vividos pelas comunidades, pelas famílias, pelos estudantes e pelos educadores no dia a dia, que influenciam e são influenciados pelo processo educacional"[6].

Observe a seguir os temas propostos[7].

- **Ciência e Tecnologia**: Ciência e Tecnologia;
- **Meio ambiente**: Educação Ambiental e Educação para o Consumo;
- **Economia**: Trabalho, Educação Financeira e Educação Fiscal;
- **Saúde**: Saúde e Educação Alimentar e Nutricional;
- **Cidadania e Civismo**: Vida Familiar e Social, Educação para o Trânsito, Educação em Direitos Humanos, Direitos da Criança e do Adolescente e Processo de envelhecimento, respeito e valorização do Idoso;
- **Multiculturalismo**: Diversidade Cultural e Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras.

[5] BRASIL, ref. 1, p. 9-10.
[6] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Temas Contemporâneos Transversais na BNCC**: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília, DF: MEC: SEB, 2019. p. 7. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/contextualizacao_temas_contemporaneos.pdf. Acesso em: 9 set. 2024.
[7] BRASIL, ref. 6, p. 13.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

É preciso considerar as possibilidades de integração dos assuntos específicos de cada área com esses temas, pois eles têm caráter social e político e são um caminho promissor para os estudantes reconhecerem suas reais possibilidades de ação sobre a realidade em que vivem. Ao mesmo tempo, essa integração pode contribuir muito para a valorização dos conhecimentos escolares. Além disso, essa abordagem é profundamente significativa para a construção da cidadania e para a participação ativa do estudante na vida em sociedade. Ao longo das orientações específicas de cada capítulo, são destacadas as situações presentes na obra que desenvolvem os Temas Contemporâneos Transversais (TCTs), apresentando-se sugestões de como desenvolver esse trabalho.

O trabalho com os TCTs tem grande potencial para que atitudes e valores sejam colocados em discussão dentro da sala de aula.

A incorporação de atitudes e valores pelos estudantes está intimamente ligada ao desenvolvimento de **competências socioemocionais**. Tais competências são consideradas fundamentais para a construção de um percurso escolar que promova a educação integral dos estudantes, preparando-os para sua vida futura.

Tais competências dizem respeito ao relacionamento com os outros e consigo mesmo, à compreensão e gestão das emoções, ao estabelecimento e alcance de objetivos, à tomada de decisões autônomas e responsáveis e ao enfrentamento de situações adversas de maneira criativa e construtiva.

Estudos e discussões analisando quais estudantes que se saem melhor em atividades escolares indicam aqueles que apresentam características como organização, persistência, resiliência, enfrentamento e resolução de conflitos com controle da frustração e da ansiedade, além de autoestima, confiança e criatividade. Com base nessas conclusões, torna-se, então, evidente que o desenvolvimento cognitivo do jovem não se dá de modo isolado do seu desenvolvimento socioemocional. Desse modo, o professor assume um papel fundamental, tanto na criação de novas atividades quanto no planejamento e na condução das rotinas e ações que já têm lugar na escola. O professor, como mediador, pode integrar a esses momentos propostas na quais os estudantes, distribuídos em duplas, trios ou quartetos, possam discutir e colaborar entre si na resolução de problemas.

Em trabalhos colaborativos, o objetivo não é a homogeneização do pensamento e do conhecimento dos sujeitos participantes. Deve-se rejeitar o autoritarismo e a condução pedagógica com motivação hierárquica. Ao contrário, a colaboração entre os pares tem como objetivo a reconstrução do conhecimento dos participantes. Para isso, é importante respeitar a individualidade de cada sujeito, seus recursos e seu ritmo pessoal. Esse tipo de trabalho permite que as pessoas nele envolvidas passem a reconhecer o que sabem, o que os outros sabem e o que todos não sabem, resultando na busca de superação dos limites de cada um e do grupo como um todo.

Para que esse tipo de interação ocorra nos grupos colaborativos, é essencial que o professor determine os participantes, reunindo-os não pela amizade ou pela proximidade de localização na sala, mas por características que possibilitem que todos tenham voz no grupo e sejam considerados como participantes necessários. Essa ação favorece o desenvolvimento da autoestima, da confiança e da criatividade, o que promoverá o desenvolvimento cognitivo dos estudantes, além de fornecer as bases para a aceitação social.

A mediação do professor é o ponto-chave de todo esse processo, por meio de suas intervenções, com a acolhida de diferentes pontos de vista e com discussões realizadas principalmente com perguntas que instiguem os estudantes a justificar seus posicionamentos e suas conclusões. As questões podem ser do tipo: Todos chegaram a essa conclusão ou alguém teve alguma consideração um pouco diferente dessa?; E se fosse de tal forma? Vocês pensaram nessa outra possibilidade?; Vocês levaram em consideração outros pontos de vista?; Apoiaram-se no que já estudamos antes a respeito desse assunto?; Que tal estudarem também em outros livros e *sites* para dar maior respaldo ao que estão afirmando? etc.

A BNCC e o ensino de Matemática

No Ensino Médio, a área de Matemática e suas Tecnologias, de acordo com a BNCC, tem a responsabilidade de aproveitar todo o potencial já constituído pelos estudantes no Ensino Fundamental para promover ações que ampliem o letramento matemático iniciado na etapa anterior. O conceito de letramento matemático considerado pelo documento apoia-se naquele utilizado pelo Programa Internacional de Avaliação dos Estudantes (Pisa). Assim, é

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

> [...] definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. [...][8]

Desse modo, pretende-se que, ao final do Ensino Médio, os estudantes tenham se apropriado de seu papel como cidadãos nos contextos social, político, cultural e econômico.

Tal posicionamento exige que a postura no trato com as propostas matemáticas escolares considere a busca de problemas fora da Matemática, de modo a proporcionar aos estudantes a consciência de que essa área do conhecimento se abre para muitas outras, nas quais ela pode ser utilizada como uma ferramenta de compreensão e análise. Porém, é preciso destacar que a presença da Matemática nas diversas áreas do conhecimento não ocorre somente por meio dos registros fornecidos pelos fatos e fenômenos estudados, mas também pelo seu amplo conjunto de procedimentos de cálculo, análise, medição e estimativa dos fenômenos da realidade e de suas relações. Esse fato é o que traz a necessidade de também se trabalhar de modo cuidadoso a linguagem, as definições e os procedimentos matemáticos que darão suporte às resoluções dos problemas.

As competências específicas e as habilidades vinculadas à área de Matemática apresentadas na BNCC expressam esses aspectos, conferindo a professores e estudantes maiores oportunidades de reconhecer a presença da Matemática em situações reais e em outras áreas do conhecimento. A Matemática pode ser identificada na base de uma série de processos que organizam a vida contemporânea, ao mesmo tempo que aponta os conhecimentos específicos a serem construídos, como apresentado a seguir.

Competência específica 1 – Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

(**EM13MAT101**) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(**EM13MAT102**) Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.

(**EM13MAT103**) Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.

(**EM13MAT104**) Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.

(**EM13MAT105**) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).

(**EM13MAT106**) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).

Competência específica 2 – Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

(**EM13MAT201**) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.

(**EM13MAT202**) Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos.

[8] BRASIL, ref. 1, p. 266.

(**EM13MAT203**) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.

Competência específica 3 – Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

(**EM13MAT301**) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(**EM13MAT302**) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(**EM13MAT303**) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.

(**EM13MAT304**) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.

(**EM13MAT305**) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.

(**EM13MAT306**) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.

(**EM13MAT307**) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(**EM13MAT308**) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

(**EM13MAT309**) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(**EM13MAT310**) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.

(**EM13MAT311**) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.

(**EM13MAT312**) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.

(**EM13MAT313**) Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro.

(**EM13MAT314**) Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.).

(**EM13MAT315**) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

(**EM13MAT316**) Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).

Competência específica 4 – Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

(**EM13MAT401**) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.

(**EM13MAT402**) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.

(**EM13MAT403**) Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.

(**EM13MAT404**) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(**EM13MAT405**) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

(**EM13MAT406**) Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de *softwares* que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra.

(**EM13MAT407**) Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (*box-plot*), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise.

Competência específica 5 – Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

(**EM13MAT501**) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.

(**EM13MAT502**) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.

(**EM13MAT503**) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.

(**EM13MAT504**) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.

(**EM13MAT505**) Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.

(**EM13MAT506**) Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.

(**EM13MAT507**) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

(**EM13MAT508**) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

(**EM13MAT509**) Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.

(**EM13MAT510**) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

(**EM13MAT511**) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.[9]

Nesta Coleção, as oportunidades de reconhecer a presença da Matemática em situações reais e em outras áreas do conhecimento se dão em vários momentos, como na **Abertura** de cada capítulo, nas seções **Atividades resolvidas** e **Atividades**, bem como na seção **Conexões**, entre outras. Esses são os elementos que dão suporte ao professor para propor aos estudantes os trabalhos em grupos colaborativos em diferentes situações de investigação.

O ensino da Matemática e o papel do professor

Nessa etapa da Educação Básica, há que se considerar que o desenvolvimento intelectual dos jovens permite maior capacidade de abstração e potencializa o pensar de modo rigoroso e criativo na resolução de problemas. Desse modo, a finalidade dos estudos não é apenas saber os conceitos e procedimentos matemáticos, mas saber usá-los como suporte para a realização de uma reflexão crítica em relação:

- à própria aprendizagem, que inclui o desenvolvimento do pensamento computacional e dos diferentes tipos de raciocínio lógico-matemáticos (indução, dedução e raciocínio por analogia);
- aos contextos sociais contemporâneos, isto é, a produção, a circulação e a recepção de textos de divulgação científica e de mídias sociais, considerando os elementos que constituem esses textos (em termos de gêneros discursivos) e procedimentos de leitura multimodal e inferencial.

Para contemplar essas metas, o professor pode se valer de vários recursos pedagógicos e metodológicos que façam com que o trabalho desenvolvido atenda aos objetivos estabelecidos em seu planejamento escolar, considerando e respeitando as particularidades e necessidades dos estudantes. Nesse sentido, esta Coleção busca trazer subsídios diversificados para desenvolver uma ação pedagógica que vai além da apresentação de conceitos e técnicas. Além disso, são descritas a seguir algumas metodologias de ensino e o pensamento computacional, propiciando uma reflexão sobre a prática docente. É importante ressaltar que a escolha de qual metodologia utilizar e do momento pedagógico no qual ela deve ser aplicada cabe ao professor. O livro didático não determina o emprego de uma ou outra metodologia; no entanto, ele oferece suporte para a estruturação e o desenvolvimento da atividade docente.

Atividades investigativas

Pensar sobre o ensino de Matemática exige pensar o que significa aprender Matemática. As perspectivas atuais de educadores matemáticos consagram que, para aprender Matemática, é preciso fazer Matemática.

Esse fazer significa se engajar em uma atividade que promova a observação e a análise de dados e informações, o estabelecimento de conexões e relações, a criação de conjecturas, a identificação e a expressão de regularidades, a busca de explicações, a criação de soluções, a invenção de estratégias próprias que envolvam noções, conceitos e procedimentos matemáticos, a validação de suas produções e a comunicação com os pares.

Assim, ensinar Matemática é, para um professor, criar as condições que possibilitarão que os estudantes façam Matemática. Embora possa parecer que essa seja uma missão impossível, na verdade, trata-se de promover, em sala de aula, uma atitude investigativa por parte dos estudantes, possibilitando-lhes mobilizar sua intuição e seus conhecimentos antigos em alternativas diversas de exploração. Esse tipo de atividade

> ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e o professor.[10]

Tendo como pressuposto que todos podem produzir Matemática, nas suas diferentes expressões, as atividades de investigação podem contribuir para aulas de Matemática mais dinâmicas e interessantes.

---

[9] BRASIL, ref. 1, p. 532-541.

[10] PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003. p. 23.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Chamar o estudante a agir como um matemático não implica trabalhar obrigatoriamente com problemas muito difíceis. Ponte, Brocardo e Oliveira[11] destacam que, ao contrário, investigar significa trabalhar questões que nos interpelam e, por isso, constitui uma poderosa forma de construir conhecimento. Assim, é em torno de um ou mais problemas que uma investigação matemática se desenvolve, porém as descobertas que ocorrem durante a busca da solução podem ser tão ou mais importantes do que a própria solução.

Aulas de investigação podem representar um desafio à prática do professor, pois elas demandam um equilíbrio entre garantir que o trabalho dos estudantes ocorra e seja significativo do ponto de vista do conhecimento matemático e conceder a eles o ambiente necessário para que desenvolvam sua autonomia, possibilitando a autoria da investigação.

Considerando esse equilíbrio, o professor precisa interagir com os estudantes para estar ciente de suas necessidades e características particulares, sem perder de vista os aspectos gerais da gestão da situação didática. Desse modo, o professor é levado a desempenhar diversos papéis no decorrer de uma atividade de investigação.

Criar o cenário e desafiar os estudantes: o sucesso de uma investigação depende do ambiente de aprendizagem que se cria na sala de aula, de modo que o estudante se sinta à vontade e lhe seja dado tempo para pensar, colocar questões, explorar suas ideias e exprimi-las. Dependendo da situação proposta, é preciso disponibilizar aos estudantes materiais diversos para manipulação ou consulta, sendo o livro didático o ponto de partida essencial para as suas buscas e pesquisas.

Ao propor uma atividade, é fundamental garantir que todos os estudantes entendam o sentido da tarefa proposta e aquilo que se espera deles no decurso da aula, de modo que compreendam o que significa investigar e aprender a fazê-lo. A proposta inicial da tarefa não pode ser demasiadamente pormenorizada sobre o que é para ser feito, uma vez que a interpretação pelo estudante do que se propõe é um dos objetivos dessas aulas, esperando-se que ele evolua para realizá-la autonomamente.

O professor precisa dar uma atenção especial à própria tarefa docente, escolhendo questões ou situações iniciais e colocadas no decorrer da atividade que, potencialmente, constituam um verdadeiro desafio aos estudantes.

Acompanhar o progresso dos estudantes: uma vez que os estudantes já estejam em processo de investigação, cabe ao professor manter uma posição de retaguarda, procurando compreender como eles estão pensando. Para isso, pode-se fazer questionamentos ou solicitar explicações.

É um desafio para o professor perceber aonde os estudantes querem chegar, uma vez que ele pode não ter acompanhado todo o processo de discussão dentro do grupo. Aqui o professor deve considerar que os estudantes podem ainda não ter os registros organizados e que sua comunicação matemática oral pode ser limitada e conter erros, precisando, assim, esforçar-se para compreendê-los, evitando corrigir cada afirmação ou conceito matemático apresentado de forma imprecisa.

Acompanhar o progresso dos estudantes possibilita ao professor sinalizar que eles podem continuar, por estarem indo na direção correta, intervir, de acordo com a necessidade do grupo, ou fornecer apoio mais direto para influenciar positivamente o trabalho deles.

A avaliação do desenvolvimento dos estudantes durante a atividade pode também levar o professor a decidir conceder mais tempo para a investigação, fazer uma pequena discussão intermediária com toda a turma ou passar à discussão final.

Apoiar o trabalho dos estudantes: na condução da aula, o apoio a ser dado precisa estar pautado na manutenção dos aspectos característicos do processo investigativo. Assim, a intervenção do professor pode assumir várias formas, como colocar questões, fornecer ou recordar informações relevantes, fazer sínteses e promover a reflexão por parte dos estudantes.

A postura interrogativa é a que o professor deve privilegiar, e suas questões podem ter diferentes intenções, como a de esclarecer ideias, próprias e dos jovens, a de refazer uma questão proposta por um estudante, para que ele pense melhor sobre a dúvida levantada, ou a de transformar uma questão em uma sugestão orientadora para a atividade.

Essa postura tem, também, a função de ajudar os estudantes a compreender que o papel principal do professor é apoiá-los em seu trabalho, e não simplesmente dizer se estão certos ou não, o que, aliás, deve ocorrer cada vez menos nessas aulas.

Em alguns momentos, a atividade investigativa pode sofrer bloqueio, porque os estudantes não com-

[11] PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, ref. 10.

preendem certos conceitos ou representações importantes para a sua continuidade. A intervenção do professor nesses momentos precisa ser a de fornecer ou recordar conceitos anteriormente estudados, para que os estudantes possam dar continuidade à tarefa.

Outra prática importante por parte do professor é a de promover a reflexão dos estudantes sobre o trabalho realizado e ajudá-los a fazer uma síntese da atividade, descrevendo avanços e recuos, os objetivos que tinham em mente e as estratégias que seguiram.

Raciocinar matematicamente: em atividades de investigação, é natural que os estudantes apresentem questões ou conjecturas em que o professor não havia pensado antes. É preciso avaliar rapidamente se será apropriado parar para refletir com os estudantes ou deixar isso para um momento posterior.

Construir o raciocínio matemático com os estudantes pode ser interessante, pois é uma oportunidade de eles acompanharem o desenvolvimento da ideia, enquanto o professor pensa em voz alta, colocando a questão debatida em termos matemáticos e buscando a sua justificativa.

Tudo o que foi exposto até este ponto deixa claro que, em toda atividade de investigação, devem ser dados tempo e oportunidade aos estudantes para que possam organizar e desenvolver seus modos de pensar, expressá-los para os colegas e para o professor e registrá-los utilizando linguagem matemática adequada. Desse modo, será possível a todos reconhecer o valor dos processos matemáticos, adquirir confiança em sua capacidade de fazer Matemática e, finalmente, tornarem-se aptos a resolver problemas.

No entanto, isso não quer dizer que as atividades matemáticas a serem propostas se restrinjam apenas às investigativas. Depois de propor problemas de investigação, o professor deve abordar problemas de familiarização com o novo conhecimento, apresentando diferentes domínios matemáticos e contextos.

Os contextos podem variar entre propostas envolvendo aspectos da história da Matemática, explorações de situações envolvendo a Etnomatemática, e, como os jovens estão conectados o tempo todo – inclusive durante as aulas –, atividades envolvendo as Tecnologias da Informação e Comunicação são potencialmente ricas nesse processo.

Nesta Coleção, há inúmeras possibilidades para se desenvolver uma atividade investigativa, por exemplo, na seção **Explorando a tecnologia** do Capítulo 3, "Introdução às funções e função afim", do Volume 1, o estudante é conduzido a analisar, por meio de um simulador virtual, as relações entre os coeficientes da função afim e sua representação gráfica.

Metodologias ativas

Todos temos consciência de que a educação formal não acontece apenas no espaço físico da sala de aula, e, atualmente, considerando as possibilidades de uso das tecnologias que promovem uma integração de diferentes espaços e tempos, esse fato se tornou mais evidente. Dessa forma, é necessário fornecer aos estudantes possibilidades de aprendizagem que rompam com sua atitude passiva e ultrapassem o espaço físico da sala de aula.

Se queremos que os estudantes sejam proativos, precisamos adotar metodologias nas quais eles se envolvam em atividades cada vez mais complexas, em que tenham de tomar decisões e avaliar os resultados, com apoio de materiais relevantes. Se queremos que sejam criativos, eles precisam experimentar inúmeras novas possibilidades de mostrar sua iniciativa[12].

Segundo Morán[13], os estudantes devem ser mobilizados por meio de desafios e atividades bem planejadas e avaliadas por meio de acompanhamento do professor. Tais desafios contribuem para mobilizar competências intelectuais, emocionais, pessoais e de comunicação.

Ainda segundo o mesmo autor, as metodologias ativas são o ponto de partida para processos de reflexão, de integração cognitiva e de generalização. Desafios e atividades propostos devem ser do tipo investigativo, que exigem aprender pela descoberta por meio de pesquisas, análise de situações e identificação dos diferentes aspectos envolvidos, reconhecendo regularidades, fazendo escolhas e validando as conclusões.

As metodologias ativas mais aplicadas são a aprendizagem por projetos, a aprendizagem por resolução de problemas, a sala de aula invertida e a rotação por estações.

[12] MORÁN, José. Mudando a educação com metodologias ativas. *In*: SOUZA, Carlos Alberto de; MORALES, Ofelia Elisa T. (org.). **Convergências midiáticas, educação e cidadania**: aproximações jovens. Ponta Grossa: Proex: UEPG, 2015. (Coleção Mídias Contemporâneas, v. 2, p. 15-33). Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4941832/mod_resource/content/1/Artigo-Moran.pdf. Acesso em: 30 set. 2024.

[13] MORÁN, ref. 12.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Na **metodologia por projetos**, os estudantes são motivados a trabalhar de forma colaborativa em propostas interdisciplinares nas quais se abordam conceitos-chave dos objetos de conhecimento envolvidos. As aprendizagens são vinculadas a experiências e interesses deles, o que implica questionamento constante e reconstrução de certezas. Os conteúdos surgem de acordo com o desenvolvimento da pesquisa e são explorados de modo mais profundo do que se tivessem sido determinados previamente. O ponto de partida deve ser a definição de uma questão central, que irá determinar o que investigar. Em seguida, um conjunto de certezas provisórias e dúvidas temporárias estará presente ao longo da pesquisa, podendo também o professor prever a amplitude do projeto a partir dos conhecimentos prévios que os estudantes apresentam. A busca de informação na internet, em livros, revistas, entre outros meios, vai requerer a elaboração de registros importantes para o processo em desenvolvimento e para a socialização de ideias.

A **metodologia de resolução de problemas** propõe uma abordagem em que a construção do conhecimento se faz a partir de problemas geradores, propostos como ponto de partida para o ensino de conceitos e conteúdos matemáticos. O problema matemático é apresentado antes de se iniciar o conteúdo, e o estudante, ao resolvê-lo, construirá um conceito que ainda não conhece. Segundo Huanca e Onuchic, pesquisadores citados por Melo e Justulin[14], nessa metodologia "os professores, através e durante a resolução dos problemas, devem fazer conexões entre diferentes ramos da Matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos"[15]. Allevato e Onuchic indicam que as atividades podem ser organizadas em dez etapas:

(1) proposição do problema,
(2) leitura individual,
(3) leitura em conjunto,
(4) resolução do problema,
(5) observar e incentivar,
(6) registro das soluções na lousa,
(7) plenária,
(8) busca do consenso,
(9) formalização do conteúdo e
(10) proposição e resolução de novos problemas.[16]

Se surgirem dúvidas, o professor poderá auxiliar, porém as ações são exclusivamente dos estudantes; o docente age como observador e incentivador, estimulando o trabalho em grupo, incentivando a reflexão e a troca de ideias entre eles. Depois de os grupos concluírem suas resoluções, um representante é convidado a registrar na lousa sua resolução, esteja certa ou errada. Diante das respostas, os estudantes são convidados a refletir e a discutir os diferentes métodos utilizados na solução. Depois desse momento, o professor busca, com toda a turma, chegar a um consenso sobre o resultado obtido. Ao final das discussões, o professor formaliza o conteúdo matemático do qual emergiu o problema gerador, institucionaliza os conceitos, destaca diferentes formas operatórias e/ou demonstra propriedades específicas do assunto. É importante que sejam propostos novos problemas relacionados ao conteúdo que foi formalizado, para a familiarização com o novo conhecimento e reconhecimento de sua aplicação em diferentes contextos.

A **sala de aula invertida** se caracteriza por inverter o ciclo típico das aulas, no qual o professor apresenta o conteúdo e este é aplicado. Nessa metodologia, os estudantes devem ter contato antecipado com o conhecimento necessário antes da aula, para que, no ambiente da sala de aula possam interagir de forma ativa para esclarecer, trabalhar e aplicar o conhecimento com o qual tiveram contato. Embora muitas pesquisas apontem resultados positivos do emprego dessa metodologia, há também pesquisadores que apresentam críticas a ela. Segundo Valente[17], citado por Honório[18], alguns críticos destacam a dependência que esse modelo tem da tecnologia, o que pode criar um ambiente de aprendizagem desigual, tanto em termos do acesso à tecnologia quanto à motivação para os estudos independentes. Outra crítica é a da possibilidade de o estudante ir para a sala de aula sem se preparar, não tendo, com isso, condições de acompanhar as discussões ou

[14] MELO, Marcela Camila P. de; JUSTULIN, Andresa Maria. A resolução de problemas: uma metodologia ativa na construção do conceito de semelhança de triângulos. *In*: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 15., 2019, Londrina. **Anais** […]. Londrina: Sociedade Brasileira de Educação Matemática – Regional Paraná, 2019. p. 1-14. Disponível em: http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/EPREM/XV_EPREM/paper/viewFile/1019/881. Acesso em: 29 set. 2024.
[15] HUANCA; ONUCHIC, 2011, *apud* MELO; JUSTULIN, ref. 14, p. 5.
[16] ALLEVATO; ONUCHIC, 2014, *apud* MELO; JUSTULIN, ref. 14, p. 5.
[17] VALENTE, 2014, *apud* HONÓRIO, ref. 18, p. 2.
[18] HONÓRIO, Hugo Luiz G. Sala de aula invertida: uma abordagem colaborativa na aprendizagem de matemática: estudos iniciais. *In*: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 20., 2016, Curitiba. **Anais** […]. Curitiba: UFPR, 2016. p. 1-12. Disponível em: http://www.ebrapem2016.ufpr.br/wp-content/uploads/2016/04/gd6_Hugo_Hono%CC%81rio.pdf. Acesso em: 29 set. 2024.

prejudicando as interações possíveis. No entanto, essas críticas são rebatidas, com base justamente nessas interações entre os participantes do processo colaborativo, que tem como paradigma o predomínio da comunicação, da coordenação e da cooperação, o que faz com que as aprendizagens possam ocorrer. Nesse modelo, o professor disponibiliza materiais, normalmente em ambiente virtual (videoaula, tutorial, textos e questões) de acordo com seu planejamento de trabalho e, na sala de aula, dá *feedback* aos estudantes, de modo a esclarecer dúvidas e corrigir erros, pois, agora, seu papel é amparar, e não mais transmitir informações.

Na **metodologia de rotação por estações de aprendizagem**, os estudantes são divididos em pequenos grupos, que participarão de algumas estações de trabalho, sendo recomendado que, em pelo menos uma delas, a proposta envolva o uso de ambiente virtual. Essas estações podem estar alocadas em diferentes ambientes da escola. Os grupos executam um rodízio pelas estações, cada uma contendo uma atividade que se comunica com o objetivo central da aula. As estações precisam ser planejadas de forma que sejam independentes, sem exigência de algum pré-requisito ou exercício prévio, levando em consideração que cada grupo iniciará as atividades em uma estação diferente. Desse modo, o professor necessita ocupar-se de diferentes ações que cercam o planejamento das estações: definir quantas, quais serão e qual deve ser a quantidade de estudantes em cada estação; organizar o(s) espaço(s); delimitar o tempo necessário para cada estação e o tempo limite para a mudança de estação de trabalho; e pensar nos recursos didáticos necessários para cada estação. As propostas em cada estação podem variar, abrangendo tarefas de leitura, escrita, produção, discussão, realização de exercícios, atividades em plataformas virtuais, atividades envolvendo aplicativos e recursos tecnológicos, podendo, por exemplo, haver uma estação com o professor, uma na qual se realizem atividades individualizadas e uma com computadores para o desenvolvimento da atividade *on-line*.

Um exemplo de recurso desta Coleção para o uso de metodologias ativas é a atividade **12** do Capítulo 1, "Pesquisa Estatística", do Volume 2, que pode ser desenvolvida por meio de uma metodologia por projetos. Nessa atividade, os estudantes organizam-se em grupos para realizar um estudo seguindo as etapas de uma pesquisa estatística.

Pensamento computacional

O desenvolvimento do pensamento computacional, iniciado no Ensino Fundamental, pode ser aprofundado nesta etapa da escolaridade. A BNCC aponta que esse tipo de pensamento

> [...] envolve as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos.[19]

Desse modo, ele pode ser entendido como um processo de formulação e resolução de problemas cujas soluções são representadas por meio de passos claros, de forma que uma pessoa ou uma máquina possam executá-los eficazmente. Esse processo envolve ações de pensamento que tratam da decomposição do problema em etapas, do reconhecimento de padrões e suas repetições, da abstração e da generalização que permitem a construção de algoritmos e, por fim, da avaliação da solução.

Para auxiliar os estudantes a desenvolver seu pensamento computacional, é necessário orientá-los para que empreguem estas quatro ações no momento da resolução de problemas:

- **ponto de partida**: decomposição do problema em partes, dividindo-o em problemas menores e mais fáceis de manejar. Tal ação, além de tornar todo o processo de solução mais explícito, facilita a detecção de erros pelo caminho.
- **reconhecimento de padrões**: essa ação é composta de dois momentos; no primeiro, devem-se buscar características e/ou propriedades que sejam comuns às várias partes do problema decomposto e que possam ser replicadas em cada uma delas; no segundo, deve ocorrer uma busca de soluções já utilizadas anteriormente que possam ser empregadas no problema atual, mesmo que com adaptações. Esse segundo momento é o passo necessário para a próxima ação.
- **abstração e generalização**: trata-se de identificar, em uma situação, os elementos que não são relevantes, reduzindo, assim, o foco de atenção aos detalhes substanciais para a resolução do problema. Nesse movimento, é possível detectar características/propriedades comuns a um conjunto de dados, identificar, por generalização, os procedimentos ou algoritmos que poderão ser adotados e, por fim, escrever o algoritmo. Reconhecer tipos de estruturas que podem ser reaplicadas faz os problemas se tornarem mais simples.

[19] BRASIL, ref. 1, p. 474.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

- **avaliação**: ela ocorre a todo momento, desde que se toma conhecimento do problema a resolver até se chegar ao algoritmo que o resolve. É necessário que, em cada uma das ações, aspectos como eficácia, consumo de recursos, rapidez, facilidade, abrangência da solução, entre outros, sejam analisados para que se tenha, ao final, um resultado mais robusto e confiável. Outra característica da avaliação é a de manter controle sobre as necessidades e propósitos das estratégias adotadas, para prevenir que pequenos erros de percurso se tornem grandes complicações ao final.

Muitos dos problemas discutidos em sala de aula podem ser analisados sob esse ponto de vista, sendo recomendado propor aos estudantes que representem as soluções por meio de fluxogramas que descrevam o processo de solução ou que realizem descrições orais e/ou escritas do passo a passo de suas resoluções.

Por outro lado, é também necessário que, no planejamento de sequências de trabalho e de ações pedagógicas a serem desenvolvidas em sala de aula, sejam consideradas as descobertas recentes, as novas tecnologias e a sua influência no conhecimento científico. Nesse contexto, destaca-se a importância do recurso a tecnologias digitais e aplicativos para o ensino e a aprendizagem matemática. Nesta Coleção, a seção **Explorando a tecnologia**, presente em todos os volumes, relaciona explorações matemáticas a *softwares* específicos, que atendem ao proposto na BNCC referente à cultura digital:

> fluência no uso da tecnologia digital para expressão de soluções e manifestações culturais de forma contextualizada e crítica.[20]

Os *softwares* explorados na Coleção são o **GeoGebra**, o **LibreOffice** e o **Scratch**, todos eles gratuitos e de fácil acesso *on-line*.

O GeoGebra é um *software* específico de Matemática voltado para o estudo de Geometria, Álgebra, Planilhas de Cálculo, Gráficos, Probabilidade e Estatística. Ele é conhecido como um *software* de matemática dinâmica por proporcionar movimentações e modificações do objeto matemático construído, permitindo, assim, o desenvolvimento de processos investigativos nas diferentes frentes estudadas, graças à interconexão que possui entre Geometria, Álgebra e planilha de cálculo. Em todos os capítulos em que se propõe sua utilização, há uma sugestão de uso com suporte para sua exploração pelos estudantes.

O LibreOffice também é apresentado nesta Coleção como um recurso gratuito para o uso de planilhas eletrônicas, edição de fórmulas matemáticas e gráficos, além de textos e apresentações. Nos capítulos em que seu uso é sugerido, há indicações de possibilidades de exploração pelos estudantes, cabendo ao professor mobilizar os processos investigativos por meio de questões que os incentivem a realizar ações de busca para a aprendizagem esperada.

O Scratch é um *software* voltado para a programação de animações ou jogos, utilizando imagens e sons disponíveis. Essa programação é feita a partir de blocos com os comandos básicos para a movimentação pretendida do personagem em cena. Seu uso em sala de aula é favorecido por ser extremamente intuitivo e visual, com manipulação simples de suas estruturas e da construção dos comandos. Esse recurso dá respaldo ao trabalho do desenvolvimento do pensamento computacional, pois favorece a capacidade analítica de antecipação da ação que se espera do personagem, montada por meio de blocos preestabelecidos, passíveis de serem encaixados uns aos outros de acordo com a lógica desejada. Sua aplicação também tem caráter investigativo, uma vez que os resultados podem ser imediatamente testados e observados na tela, de modo a permitir a análise do erro e sua correção a cada etapa construída.

Avaliação

Perrenoud[21] nos explica, em sua obra **Avaliação: da excelência à regulação das aprendizagens**, que ensinar, aprender e avaliar são ações que precisam ser coesas, equilibradas, para que professor e estudantes atinjam seus objetivos. Uma ação se liga à outra, como em um círculo.

Avaliar não é o final do processo, é um recurso a serviço do desenvolvimento do estudante e um instrumento importante para o professor, que atua como agente regulador da aprendizagem. Quando o professor planeja cada estratégia de avaliação, deve ter claros os objetivos a alcançar.

- Quais são as habilidades que se pretende verificar?
- Quais são os objetos do conhecimento que devem ser aplicados pelo estudante?
- Qual ou quais competências serão desenvolvidas?

É com base nesse planejamento que a estratégia deve ser criada, e não o contrário.

[20] BRASIL, ref. 1, p. 474.
[21] PERRENOUD, Phillipe. **Avaliação**: da excelência à regulação das aprendizagens: entre duas lógicas. Porto Alegre: Artmed, 1999.

É importante compartilhar com os estudantes os objetivos do instrumento de avaliação, para que eles sejam parte do processo e possam saber como e quando serão avaliados.

Cada resultado de avaliação deve ser analisado por ambas as partes, a fim de dar significado ao conceito ou nota atribuída. Com base na análise, definem-se as ações que serão necessárias – tanto do professor como do estudante. A implementação das ações faz com que se retome o círculo de ensinar, aprender e avaliar.

Diversificar as estratégias de avaliação é essencial para promover um aprendizado mais inclusivo e eficaz. Cada indivíduo tem habilidades e fragilidades distintas, e oferecer diferentes formas de avaliação permite que cada um seja reconhecido em suas áreas de maior competência, enquanto é incentivado a desenvolver habilidades nas áreas que acha mais desafiadoras. Assim, o professor cria um ambiente de aprendizado mais equilibrado e justo.

A área de Matemática no Ensino Médio é fértil para oferecer aos estudantes instrumentos diversificados de avaliação. Seu caráter de linguagem e instrumento para as demais ciências possibilita resolver problemas variados presentes em inúmeras áreas do conhecimento.

Concomitantemente, capacidades como formular e testar hipóteses, deduzir, generalizar e argumentar são desenvolvidas pelo pensamento matemático. A estrutura e as características da Matemática propiciam o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, tanto práticos quanto teóricos. Ao lidar com esses desafios, o estudante exercita e consolida as estruturas de pensamento necessárias para enfrentar situações diversas.

A seguir, são apresentados cinco modelos avaliativos, que podem ser combinados de acordo com os objetivos específicos do curso no Ensino Médio.

1. Avaliação diagnóstica
Utilizada, em geral, no início de um período (ano, semestre etc.) para verificar se o estudante tem os pré-requisitos necessários para adquirir novos conhecimentos. Por meio dela, pode-se conhecer o estágio de aprendizagem de cada indivíduo, salientando-se que seu objetivo não é classificar o estudante, mas detectar a presença ou a fragilidade de alguma habilidade. Os resultados podem levar a um replanejamento para o período ou a um trabalho específico com grupos de estudantes. Este tipo de avaliação pode ser precedido por uma sondagem oral com a turma, fazendo-se perguntas que facilitem resgatar conhecimentos, conceitos e definições, enfim, que sejam pré-requisitos importantes para o prosseguimento dos estudos. Os estudantes podem registrar tudo o que for lembrado, com mediação do professor. Em seguida, pode-se apresentar algumas questões para resolução individual que verifiquem as principais habilidades.
2. Avaliação formativa
Foca no processo de ensino-aprendizagem e é contínua, sendo composta de instrumentos diversificados aplicados ao longo de um período. O estudante recebe *feedbacks* de seu desempenho em cada atividade avaliativa e, com o professor, decide que ações podem ser tomadas para aprimorar seu desempenho. O professor avalia seu próprio trabalho com base nos resultados dos estudantes, verificando se é preciso rever conteúdos, reforçar habilidades etc. Os instrumentos avaliativos podem e devem contemplar atividades orais e escritas, atividades individuais, em duplas e em grupos, pesquisa, mapas conceituais, projetos, portfólios etc., proporcionando ao estudante oportunidades variadas e suficientes para demonstrar suas habilidades.
3. Avaliação somativa
É o modelo mais comumente utilizado, constando de provas dissertativas ou do tipo teste aplicadas ao final de um período. O objetivo é medir o grau de domínio do estudante a respeito de determinados saberes. Em geral, atribui-se uma nota ou conceito para o desempenho, sendo, portanto, uma avaliação classificatória. A presença deste modelo é importante no Ensino Médio, pois provavelmente os jovens terão contato com exames vestibulares e concursos na vida adulta. A ideia é que esse não seja o único tipo de avaliação proposto. Pode fazer parte da avaliação, sendo combinada com os outros modelos de avaliação.
4. Avaliação comparativa
Este modelo de avaliação compara o desempenho do estudante com o de outros estudantes na mesma fase de ensino. Pode ser utilizado de maneiras diferentes: • comparar o desempenho dos estudantes de uma turma com os de outra do mesmo ano, na mesma escola, aplicando-se a ambas as turmas a mesma avaliação. • comparar o desempenho dos estudantes de escolas distintas utilizando-se uma avaliação externa (Saeb, Saresp e Enem, por exemplo). A comparação dos resultados permite identificar se o desempenho está de acordo com as expectativas e, se necessário, implementar ações que minimizem discrepâncias.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

5. Avaliação ipsativa
Neste modelo, o mesmo estudante é avaliado em momentos diferentes. Compara-se a situação do estudante no início da observação com a situação no final do período escolhido (bimestre, semestre, ano etc.). Não há comparação com outros colegas. O envolvimento do estudante é importante, pois a definição dos parâmetros que serão observados deve ser feita em parceria com ele. Ao longo do tempo, o estudante recebe *feedbacks* do professor, discute seus progressos ou dificuldades e repensa suas estratégias de estudo. A autoavaliação do estudante é um instrumento que complementa este modelo, incluindo aspectos de conteúdo e de postura de aprendizagem.

Outro aspecto da avaliação a ser tratado é o da autoavaliação, que contribui para incentivar o estudante a tomar consciência de seu próprio percurso de aprendizagem e se responsabilizar pelo seu empenho em avançar.

Nessa perspectiva, entende-se que a autoavaliação é um componente importante ao ser utilizada como instrumento da avaliação formativa, pois auxilia os estudantes a adquirir uma capacidade cada vez maior de analisar suas próprias responsabilidades, atitudes, comportamento, pontos fortes e fracos, sua condição de aprendizagem e suas necessidades para atingir os objetivos. Com o exercício constante da autoavaliação, os estudantes serão capazes de desenvolver sentimentos de responsabilidade pessoal e de apreciação da força dos empenhos individuais e de grupo. Além disso, aprendem a encarar prontamente as capacidades em várias empreitadas e a afinar suas potencialidades e contribuições, além de desenvolver a capacidade de análise contínua, na qual consideram o que já aprenderam, o que ainda não aprenderam, os aspectos facilitadores e os dificultadores do trabalho, conseguindo planejar as próprias ações. Além disso, a autoavaliação também incentiva os jovens a pensar sobre si mesmos e os conduz a uma modalidade de apreciação que se pratica durante a vida inteira, ajudando-os a avançar em sua autonomia.

A autoavaliação também deve ser orientada pelo professor, por meio de questões que incentivem os estudantes a refletir sobre suas ações durante a realização das atividades. No quadro a seguir, há exemplos de questões para esse fim.

AUTOAVALIAÇÃO
1. Entre os assuntos abordados, qual você considerou o mais interessante? E o menos interessante? Explique suas escolhas.
2. Comparando o trabalho de seu grupo com o dos outros grupos, como você avalia a produção de vocês?
3. Considerando a avaliação feita anteriormente, você acha que a produção do seu grupo poderia ter sido melhor? Em qual(is) aspecto(s)?
4. Como você avalia a participação de cada um dos integrantes de seu grupo na realização do trabalho? Como você se classifica dentro do seu grupo de trabalho: colaborativo(a), proativo(a), coordenador(a), inovador(a), organizador(a)?
5. As discordâncias entre você e seus colegas de grupo ocorreram de modo a chegarem a um consenso, com respeito pelas ideias do outro e com a construção de argumentação consistente, proposta com cordialidade? Dê um exemplo.
6. Você e seu grupo criaram estratégias para evitar distrações e manter a concentração, o esforço e a motivação durante a realização das tarefas? Dê um exemplo.
7. Durante as apresentações dos vários grupos, você se manteve envolvido e participante das discussões? O que você aprendeu que não sabia?
8. Quais conhecimentos matemáticos você adquiriu com a elaboração desse trabalho?
9. Quais conhecimentos de outras áreas você adquiriu com a elaboração desse trabalho?
10. Em que medida a seção **Para refletir** contribuiu para a análise de sua aprendizagem em cada um dos capítulos que compuseram os temas desse período?

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

A seguir são apresentados momentos do Livro do Estudante que podem ser usados para explorar alguns dos modelos de avaliação apresentados.

As **Aberturas** de capítulo contêm questões que possibilitam uma avaliação diagnóstica. Geralmente, elas mobilizam competências e habilidades relacionadas ao Ensino Fundamental – Anos Finais (EFAF), permitindo ao professor obter informações que contribuam para o planejamento das aulas.

As seções **Atividades**, distribuídas ao longo de cada capítulo, têm como finalidade constituir um instrumento de avaliação formativa (contínua), além de gerar novas oportunidades de aprendizagem, contribuindo para a assimilação e a compreensão dos conceitos matemáticos estudados até o momento. Nesse sentido, recomenda-se explicar aos estudantes que as atividades são um momento de avaliação que ocorre durante o ensino e aprendizagem da Matemática, pois, ao fazer as atividades, os estudantes poderão identificar suas aptidões, preferências e dificuldades, informações importantes para que eles reflitam e autorregulem seu próprio processo de aprendizagem. Ao mesmo tempo, as resoluções dessas atividades podem fornecer ao professor dados significativos para compreender o desenvolvimento de cada estudante. Por isso, as orientações específicas de cada capítulo apresentam, como sugestão, atividades cuja análise das resoluções pode contribuir para avaliar a evolução de cada estudante e para orientar seus estudos.

A seção **Atividades complementares**, apresentadas no final de cada capítulo, tem caráter de avaliação formativa relacionada ao preparo dos estudantes para os exames de larga escala que ocorrem ao término do Ensino Médio, em específico, o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) e os vestibulares, que são porta de entrada para cursos universitários. Uma possibilidade é solicitar a formação de duplas para a resolução dessas atividades. Quando todos finalizarem, por meio de um sorteio, estabelecer uma ordem para cada dupla explicar para a turma a resolução de uma dessas atividades. Com isso, além da correção, é possível sanar as dúvidas e verificar o desempenho dos estudantes. Além disso, as apresentações orais em Matemática desempenham papel relevante em relação aos objetivos de ensino. Ao expor seu raciocínio perante os colegas, o estudante trabalha sua capacidade de comunicação e argumentação, o que possibilita ao professor avaliar o progresso dos estudantes em relação ao domínio das aprendizagens envolvidas.

A seção final do capítulo, **Para refletir**, possibilita aos estudantes a oportunidade de realizar uma autoavaliação em relação ao seu processo de aprendizagem. Essa etapa contribui para o desenvolvimento da autopercepção e da autonomia, pois compreender seus avanços e investigar suas dificuldades é uma maneira de se perceber no processo de aprendizagem e incentivar um agir de forma responsável e comprometida. Além disso, a reflexão permite identificar a necessidade de retomar e/ou aprofundar alguns dos tópicos estudados. Um modo de utilizar essa seção como instrumento de avaliação é analisar o progresso dos estudantes de maneira qualitativa. Por exemplo, pode-se solicitar a entrega das atividades propostas nessa seção e classificar o trabalho realizado nos seguintes níveis:

- Não demonstra compreensão das perguntas, apresentando apenas respostas incorretas e incompletas;
- Demonstra alguma compreensão das perguntas, mas muitas respostas estão incompletas ou incorretas;
- Demonstra compreensão das perguntas, mas algumas respostas estão incompletas ou incorretas.
- Demonstra compreensão das perguntas, com boa organização e apresentação, estando a maioria das respostas corretas e completas.

Desse modo, é possível avaliar a pertinência das respostas em relação às situações propostas, a relevância e a correção dos aspectos matemáticos envolvidos, a qualidade da argumentação, bem como a clareza e a organização do raciocínio utilizado.

Bibliografia consultada e comentada

- BARUFI, Maria Cristina B.; LAURO, Maira M. **Funções elementares, equações e inequações**: uma abordagem utilizando microcomputador. 1. ed. São Paulo: CAEM-IME/USP, 2001. v. 1.
  O livro aborda aspectos do ensino de funções afim e quadrática a partir do uso de *softwares*.
- BOYER, Carl B. **História da matemática**. 4. ed. Tradução: Elza Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 2002.
  O livro aborda fatos e estudos da história da Matemática.
- BRASIL. **Lei nº 14.945, de 31 de julho de 2024**. Altera a Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996 (Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional), a fim de definir diretrizes para o ensino médio, e as Leis nºs 14.818, de 16 de janeiro de 2024, 12.711, de 29 de agosto de 2012, 11.096, de 13 de janeiro de 2005, e 14.640, de 31 de julho de 2023. Brasília, DF: Presidência da República, 2024. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2023-2026/2024/lei/l14945.htm. Acesso em: 24 out. 2024.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Lei que alterou a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional e estabeleceu uma mudança na estrutura do Ensino Médio, definindo a carga horária mínima dos estudantes na escola de 1 000 horas anuais e definindo uma nova organização curricular, mais flexível, que contemple a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 11 set. 2024.

  Documento oficial contendo um conjunto de orientações que norteia a (re)elaboração dos currículos de referência das escolas das redes pública e privada de ensino de todo o Brasil. Traz os conhecimentos essenciais, as competências, as habilidades e as aprendizagens pretendidas para crianças e jovens em cada etapa da Educação Básica.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Currículos e Educação Integral. **Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica**. Brasília, DF: MEC: SEB: Dicei, 2013. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/media/seb/pdf/d_c_n_educacao_basica_nova.pdf. Acesso em: 25 set. 2024.

  As Diretrizes Curriculares Nacionais (DCNs) são normas obrigatórias para a Educação Básica e orientaram a elaboração da BNCC. Elas são discutidas, concebidas e fixadas pelo Conselho Nacional de Educação (CNE).
- BRASIL. Ministério da Saúde. Secretaria de Atenção à Saúde. Departamento de Atenção Básica. **Guia alimentar para a população brasileira**. 2. ed. Brasília, DF: MS, 2014. Disponível em: https://bvsms.saude.gov.br/bvs/publicacoes/guia_alimentar_populacao_brasileira_2ed.pdf. Acesso em: 29 set. 2024.

  Apresenta aspectos sobre alimentos saudáveis e contribui para a adequação de uma rotina de alimentação saudável.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Temas Contemporâneos Transversais na BNCC**: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília, DF: MEC: SEB, 2019. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/contextualizacao_temas_contemporaneos.pdf. Acesso em: 11 set. 2024.

  Documento explicativo sobre os Temas Contemporâneos Transversais (TCTs) a serem abordados na Educação Básica.
- CARRANO, Paulo; DAYRELL, Juarez. Juventude e Ensino Médio: quem é este aluno que chega à escola. *In*: DAYRELL, Juarez; CARRANO, Paulo; MAIA, Carla L. **Juventude e Ensino Médio**: sujeitos e currículos em diálogo. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2014. p. 101-133. Disponível em: https://educacaointegral.org.br/wp-content/uploads/2015/01/livro-completo_juventude-e-ensino-medio_2014.pdf. Acesso em: 29 set. 2024.

  Como o próprio título indica, trata-se de um texto que procura "descrever" o jovem atual.
- CARVALHO, João P. de. Um problema de Fibonacci. **Revista do Professor de Matemática (RPM)**, São Paulo, n. 17, [201-]. Disponível em: http://www.rpm.org.br/cdrpm/17/2.htm. Acesso em: 29 set. 2024.

  Apresenta a história de Fibonacci e uma explicação sobre como ele chegou à sequência conhecida como sequência de Fibonacci.
- COELHO, José Renato P. **O GeoGebra no ensino das funções exponenciais**. 2016. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Laboratório de Ciências Matemáticas, Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campos dos Goytacazes, 2016. Disponível em: https://uenf.br/posgraduacao/matematica/wp-content/uploads/sites/14/2017/09/30052016Jos%C3%A9-Renato-Paveis-Coelho.pdf. Acesso em: 29 set. 2024.

  O material explora a utilização do *software* **GeoGebra** e de planilhas no estudo das funções exponenciais.
- CORREIA, Rosangela P. **Dos erros aos acertos**: o processo de avaliação na aprendizagem: perspectiva compensatória ou emancipatória? Porto Alegre: Dialética, 2023.

  A obra fala sobre como a avaliação pode ajudar o estudante a corrigir os erros ou a se libertar deles.
- DAMIANI, Magda F. Entendendo o trabalho colaborativo em educação e revelando seus benefícios. **Educar**, Curitiba, n. 31, p. 213-230, 2008. Disponível em: https://www.scielo.br/pdf/er/n31/n31a13.pdf. Acesso em: 29 set. 2024.

  Reflexões sobre o trabalho colaborativo e seu uso em sala de aula.
- EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

  O livro aborda vários fatos e estudos da Matemática cronologicamente.
- HIPPOLYTO, Luzia de Q. A avaliação educacional da matemática no ensino médio: avanços ou retrocessos? *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2016, São Paulo. **Anais** […]. São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2016. Disponível em: https://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/8479_4409_ID.pdf. Acesso em: 29 set. 2024.

  O texto revisa como a avaliação de matemática mudou no Brasil ao longo dos anos e a compara com práticas internacionais, além de discutir os desafios que os educadores enfrentam.
- HOFFMANN, Jussara. **Avaliação mediadora**: uma prática em construção da pré-escola à universidade. 8. ed. Porto Alegre: Mediação, 1996.

  O texto aborda a avaliação como algo contínuo e humanizado, por meio da qual o professor media o aprendizado, auxiliando o estudante a se desenvolver.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

- HONÓRIO, Hugo Luiz G. Sala de aula invertida: uma abordagem colaborativa na aprendizagem de matemática: estudos iniciais. *In*: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 20., 2016. Curitiba. **Anais** [...]. Curitiba: UFPR, 2016. Disponível em: http://www.ebrapem2016.ufpr.br/wp-content/uploads/2016/04/gd6_Hugo_Hono%CC%81rio.pdf. Acesso em: 29 set. 2024.

  Reflexões sobre a metodologia ativa de sala de aula invertida com base em sua aplicação prática.
- LIMA, Elon L. *et al*. **A matemática do Ensino Médio**. Rio de Janeiro: SBM, 2016. v. 1.

  Livro que aborda os conceitos de conjuntos, números e funções.
- LUCKESI, Cipriano. **Avaliação da aprendizagem escolar**: estudos e proposições. São Paulo: Cortez, 2018.

  A obra defende uma avaliação mais focada no aprendizado do que em notas, ajudando o estudante a crescer sem se prender a erros.
- LUCKESI, Cipriano. Tipificação da avaliação em educação: uma questão epistemológica. *In*: LUCKESI, Cipriano. **Luckesi**: avaliação em educação. Salvador, 6 jul. 2016. Disponível em: https://luckesi.blogspot.com/2016/07/109-tipificacao-da-avaliacao-em.html. Acesso em: 26 set. 2024.

  Nesse artigo, há reflexões sobre as adjetivações aplicadas ao ato de avaliar, discutindo como são colocadas de acordo com os momentos de sua execução.
- MELO, Marcela Camila P. de; JUSTULIN, Andresa Maria. A resolução de problemas: uma metodologia ativa na construção do conceito de semelhança de triângulos. *In*: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 15., 2019, Londrina. **Anais** [...]. Londrina: Sociedade Brasileira de Educação Matemática – Regional Paraná, 2019. Disponível em: http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/EPREM/XV_EPREM/paper/viewFile/1019/881. Acesso em: 29 set. 2024.

  Apresentação teórica e prática da metodologia ativa de resolução de problemas.
- MONTEIRO, Martha S.; CERRI, Cristina. **História dos números complexos**. São Paulo: Centro de Aperfeiçoamento de Ensino de Matemática: Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 2001. Disponível em: https: //www.ime.usp.br/~martha/caem/complexos.pdf. Acesso em: 29 set. 2024.

  Texto que apresenta informações sobre o desenvolvimento dos números complexos ao longo da história.
- MORÁN, José. Mudando a educação com metodologias ativas. *In*: SOUZA, Carlos Alberto de; MORALES, Ofelia Elisa T. (org.). **Convergências midiáticas, educação e cidadania**: aproximações jovens. Ponta Grossa: Proex: UEPG, 2015. (Coleção Mídias Contemporâneas, v. 2). Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4941832/mod_resource/content/1/Artigo-Moran.pdf. Acesso em: 30 set. 2024.

  Discussões do pesquisador brasileiro sobre a importância do trabalho com metodologias ativas no ensino atual.
- PERRENOUD, Phillipe. **Avaliação**: da excelência à regulação das aprendizagens: entre duas lógicas. Porto Alegre: Artmed, 1999.

  A obra explora a avaliação como ferramenta para acompanhar o aprendizado, comparando a busca pela excelência ao processo de monitoramento constante.
- PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

  Nessa obra, são apresentadas algumas vantagens de se trabalhar com investigações matemáticas em sala de aula, destacando-se o estabelecimento de conjecturas, reflexões e formalização do conhecimento matemático pelos estudantes.
- SANTOS, Emily. Não é brincadeira, é *bullying*: entenda comportamentos que configuram crime e saiba como agir. **G1**, São Paulo, 7 abr. 2024. Disponível em: https://g1.globo.com/educacao/noticia/2024/04/07/nao-e-brincadeira-e-bullying-entenda-comportamentos-que-configuram-crime-e-saiba-como-agir.ghtml. Acesso em: 24 out. 2024.

  A reportagem apresenta informações estatísticas sobre *bullying*, quais são os principais sinais e como agir diante dessa situação em ambiente escolar.
- SOARES, Evanildo C. **Uma investigação histórica sobre os logaritmos com sugestões didáticas para a sala de aula**. 2011. Dissertação (Mestrado em Ciências Naturais e Matemática) – Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2011. Disponível em: https://repositorio.ufrn.br/bitstream/123456789/16070/1/EvanildoCS_DISSERT.pdf. Acesso em: 29 set. 2024.

  A dissertação explora o trabalho com logaritmos em situações de sala de aula, considerando uma perspectiva histórica.
- TARDIF, Maurice. **Saberes docentes e formação profissional**. Petrópolis: Vozes, 2002.

  Nessa obra, o autor discute e qualifica os saberes que servem de base ao ofício de professor.
- ORGANIZAÇÃO DAS NAÇÕES UNIDAS PARA A EDUCAÇÃO, A CIÊNCIA E A CULTURA. **Declaração Mundial sobre Educação para Todos**: satisfação das necessidades básicas de aprendizagem, Jomtien, 1990. Brasília, DF: Unesco, 1990. Disponível em: https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000086291_por. Acesso em: 29 set. 2024.

  Documento importante para conhecimento do professor e que foi um dos suportes para a elaboração da BNCC.
- WAGNER, Eduardo. Por que as antenas são parabólicas? **Revista do Professor de Matemática (RPM)**, São Paulo, n. 33, [201-]. Disponível em: http://rpm.org.br/cdrpm/33/3.htm. Acesso em: 29 set. 2024.

  Artigo que apresenta uma reflexão sobre a forma parabólica das antenas.

Comentários e sugestões de abordagem para este Volume

O objetivo deste material é oferecer subsídios para a atividade docente, que assume um papel relevante dentro do complexo processo de ensino-aprendizagem, de forma articulada com as propostas apresentadas no Livro do estudante.

Nas **Orientações para o professor**, há uma descrição explicando de que forma estão sendo contempladas neste Volume as habilidades, as competências específicas e as competências gerais da BNCC. Em seguida, são apresentadas estratégias para auxiliar o processo de ensino-aprendizagem, de forma a contribuir para o desenvolvimento dessas competências e habilidades. Além disso, há sugestões de atividades complementares, instrumentos avaliativos e referências de outros materiais atualizados que podem ser utilizados. Vale ressaltar que esta obra não pretende ser a única referência de consulta nem apresentar soluções completas para os desafios enfrentados pelos professores, mas sim constituir uma alternativa para auxiliar a atividade docente e o processo de ensino-aprendizagem, contribuindo para a otimização do planejamento de aulas, sem deixar de respeitar a autonomia do docente, que age de acordo com os desafios reais da comunidade escolar e da turma em que atua lecionando.

Este Volume é organizado em 8 capítulos. O quadro a seguir apresenta uma sugestão de cronograma, considerando 200 dias letivos, consequentemente, 40 semanas de aula. A proposta contempla 34 semanas, considerando 6 semanas para ajustes, avaliações e outras demandas pedagógicas.

Para planejamentos bimestrais, recomenda-se considerar 9 semanas de aula para cada bimestre; para planejamentos trimestrais, 12 semanas; e, para planejamentos semestrais, 17 semanas. No entanto, é importante que o professor avalie sua realidade e realize as adequações necessárias conforme o calendário escolar, de modo a privilegiar o desenvolvimento dos estudantes de acordo com suas necessidades e com as escolhas feitas pela comunidade escolar.

Semana	Capítulo	Tópicos
1ª	1	Pesquisar e informar e Pesquisa estatística
2ª	1	Pesquisa amostral e Explorando a tecnologia
3ª	1	Fórum, História da Matemática e Indicadores
4ª	1	Conexões, Atividades complementares e Para refletir
5ª	2	Introdução, Sequências e Progressão aritmética
6ª	2	Progressão aritmética e Fórum
7ª	2	Progressão geométrica
8ª	2	Conexões, Explorando a tecnologia e História da Matemática
9ª	2	Atividades complementares e Para refletir
10ª	3	Função definida por mais de uma sentença, Fórum e Conexões
11ª	3	Módulo de um número real, Função modular e Equações modulares
12ª	3	Funções sobrejetora, injetora e bijetora, Função composta e Função inversa
13ª	3	Explorando a tecnologia, Atividades complementares e Para refletir
14ª	4	Logaritmo
15ª	4	Função logarítmica e Fórum
16ª	4	Equações logarítmicas, Inequações logarítmicas e Explorando a tecnologia
17ª	4	Conexões, História da Matemática, Atividades complementares e Para refletir
18ª	5	Arcos de circunferência, Ângulo central e Medida angular e comprimento de arcos de circunferência
19ª	5	Circunferência orientada, Circunferência trigonométrica, Arcos côngruos e Números reais associados a pontos da circunferência trigonométrica
20ª	5	Seno e cosseno de um arco
21ª	5	Tangente de um arco e Trigonometria em um triângulo qualquer
22ª	5	Fórum, Área de um triângulo qualquer e Conexões
23ª	5	Explorando a tecnologia, Atividades complementares e Para refletir
24ª	6	Funções periódicas, Função seno e Função cosseno
25ª	6	Equações trigonométricas, Fórum e Conexões
26ª	6	Explorando a tecnologia, Atividades complementares e Para refletir
27ª	7	Introdução, Áreas de polígonos e Fórum
28ª	7	Área do círculo e de suas partes, Polígonos regulares e Variação no perímetro e na área de um polígono regular

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Semana	Capítulo	Tópicos
29ª	7	Ladrilhamento do plano e Conexões
30ª	7	Explorando a tecnologia, História da Matemática, Atividades complementares e Para refletir
31ª	8	Noções primitivas, Conceitos preliminares, Postulados, Determinação do plano e Posições relativas
32ª	8	Paralelismo no espaço e Perpendicularismo no espaço
33ª	8	Projeção ortogonal, Fórum e Distâncias
34ª	8	Conexões, Explorando a tecnologia, Atividades complementares e Para refletir

Para todos os blocos semanais, estão disponíveis atividades resolvidas e atividades propostas. Recomenda-se a seleção de parte das atividades para ser desenvolvida em sala de aula (individualmente, em duplas ou grupos maiores) e outra parte para ser realizada fora do horário de aula.

Professor, caso tenha estudantes PcD (Pessoa com Deficiência), recomenda-se a leitura dos textos a seguir.

- IBGEeduca: simulador de gráfico para deficientes visuais. [*S. l.*: *s. n.*], 2019. 1 vídeo (14 min). Publicado pelo canal IBGE. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=9PB4I18asDk. Acesso em: 10 nov. 2024.
- LANDIM, Evanilson; MAIA, Lícia de Souza Leão; SOUSA, Wilma Pastor de Andrade Sousa. A aprendizagem de trigonometria por estudantes cegos. **Benjamin Constant**: estudos sobre educação matemática e deficiência visual, parte II, Rio de Janeiro, v. 29, n. 67, 8 set. 2023. Seção Dossiê Temático. Disponível em: https://revista.ibc.gov.br/index.php/BC/article/view/949. Acesso em: 31 out. 2024.
- MILLI, Elcio Pasolini; PALMEIRA, Cátia Aparecida. Estratégias em busca da aprendizagem matemática de alunos com deficiência intelectual no ensino médio. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2016, São Paulo. **Anais** […]. São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2016. Comunicação científica. Disponível em: https://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/6962_3707_ID.pdf. Acesso em: 3 nov. 2024.

Capítulo 1 Pesquisa estatística

Orientações

O Capítulo possibilita ao estudante conhecer as características e os procedimentos de uma pesquisa estatística, saber diferenciar os tipos de pesquisa e compreender a aplicação de índices estatísticos, colaborando para o desenvolvimento da competência específica 1 da área de Matemática e suas Tecnologias e, em particular, das habilidades EM13MAT102 e EM13MAT104. Nesse Capítulo, o estudante também é direcionado a elaborar pesquisas estatísticas a partir dos conceitos estudados, propondo ou participando de ações que servem de investigação de situações-problema do dia a dia e fazendo uso de diferentes registros de representação. Essa prática colabora para o desenvolvimento das competências específicas 2 e 4 da área de Matemática e suas Tecnologias e das habilidades EM13MAT202, EM13MAT406 e EM13MAT407.

Na **Abertura** do Capítulo, são apresentadas informações numéricas, como a taxa de analfabetismo e a quantidade de escolas no Brasil, obtidas e divulgadas pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). Para ressaltar a importância do trabalho estatístico realizado por esse instituto para o nosso país, recomenda-se o vídeo **Muito prazer, sou o IBGE!**, disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=6Q5DWTY34Bg (acesso em: 4 out. 2024). O vídeo faz uma apresentação do instituto, contando sua história e sua função social. As questões da **Abertura** têm o intuito de proporcionar aos estudantes um momento de reflexão, discussão e interação a respeito das pesquisas estatísticas, servindo de verificação dos conhecimentos prévios deles sobre o assunto abordado no Capítulo.

O objetivo do tópico **Pesquisar e informar** é mostrar como as informações obtidas por meio de pesquisas estatísticas contribuem para a compreensão, por exemplo, de fenômenos naturais e problemas sociais. A notícia apresentada mostra, por meio de análises de dados estatísticos, como a prática de atividades físicas contribui para a saúde humana. O boxe **Pense e responda**, relacionado a esse tema, fomenta a reflexão de como é difícil, para algumas pessoas, estabelecer uma rotina para a prática de atividades físicas. Durante essa reflexão, pode-se comentar que o desenvolvimento de determinados hábitos, como a prática de atividades físicas na juventude, contribui para uma vida adulta mais saudável, incentivando a competência geral 8. Com isso, trabalha-se o Tema Contemporâneo Transversal Saúde.

No tópico **Pesquisa estatística**, recomenda-se desenvolver um projeto de pesquisa com os estudantes, que podem ser organizados em grupos. Assim, oportuniza-se que o estudante seja agente em seu processo de aprendizagem, pois exercitará o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, desenvolvendo as competências gerais 9 e 10. Além disso, o processo de investigação, ocasionado pela pesquisa estatística, colabora para o desenvolvimento da competência específica 2 da área de Matemática e suas Tecnologias e, em particular, da habilidade EM13MAT202, uma vez que o estudante planeja e executa uma pesquisa estatística. Essa proposta ilustra uma organização do trabalho pedagógico, além do trabalho enfileirado, de modo que os estudantes experienciam situações que os desafiam a agir com criatividade, colaboração, criticidade, entre outras habilidades que serão requeridas deles durante a aprendizagem contínua na fase adulta e no mercado de trabalho.

O projeto de pesquisa a ser desenvolvido pode ser orientado de acordo com as etapas descritas no tópico **Etapas de uma pesquisa estatística**. Após estudar a etapa **Escolha do objeto de estudo, do público-alvo e do tipo de pesquisa**, os estudantes podem escolher o tema da pesquisa e a população de interesse. O tipo de pesquisa é prioritariamente amostral, mas, caso a população de interesse seja pequena e de fácil acesso, cabe uma discussão sobre a possibilidade de realizar uma pesquisa censitária. Vale lembrar que populações

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

que fazem parte da comunidade escolar tornam a pesquisa mais viável (estudantes, professores e funcionários da escola, formandos do ano, responsáveis pelos estudantes etc.).

Recomenda-se que o tema da pesquisa seja de livre escolha do grupo, permitindo o exercício da autonomia e ampliando as possibilidades de engajamento do grupo no projeto. As possibilidades de tema são inúmeras, por exemplo: gosto musical dos estudantes do Ensino Médio, engajamento nos estudos, planos de carreira, saúde física e mental etc. Após escolhido o tema, é necessário que se escolha a pergunta que direcionará a pesquisa, ou seja, a pergunta a que se pretende responder com a pesquisa. A pergunta precisa estar bem definida, de modo que seja possível respondê-la por meio da pesquisa.

O planejamento e a elaboração do questionário devem estar bem ajustados a essa pergunta de pesquisa para que a coleta de dados seja eficaz em seu objetivo. Para a construção do questionário, recomenda-se que utilizem em torno de cinco variáveis. Enfatizar aos estudantes que perguntas abertas são possíveis, mas recomenda-se que sejam poucas, pois a tabulação não é imediata: serão necessários a classificação e o agrupamento das respostas. Elaborado o questionário, recomenda-se realizar um teste piloto, no qual possibilita-se perceber se as questões estão objetivas para o entrevistado e se há a necessidade de ajustes. O cuidado na elaboração de um questionário é importante para garantir uma coleta de dados consistente e que permita, após a análise, uma conclusão a respeito do que se deseja. Um questionário mal elaborado compromete toda a pesquisa. Desse modo, ao elaborarem as perguntas, os estudantes devem atentar para a objetividade e a clareza no texto e cuidar para que elas não influenciem a resposta do entrevistado.

Após o estudo do tópico **Pesquisa amostral**, os estudantes podem escolher o tipo de amostragem que será mais adequado e planejar a coleta dos dados. Após finalizados o questionário e o planejamento da coleta, realizam-se as aplicações do questionário. Recomenda-se apresentar o vídeo **Entenda como o Datafolha faz a pesquisa eleitoral**, disponível em: https://youtu.be/qll03g997rU (acesso em: 4 out. 2024), para exemplificar o que é uma pesquisa amostral. Em pouco mais de dois minutos, tem-se uma ideia geral de como funciona a coleta de informações e de como são possíveis inferências nas conclusões. Um vídeo que explica o conceito e os diferentes tipos de amostragem é **Dando IBOPE**, disponível em: https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1082 (acesso em: 4 out. 2024). Para aprofundar mais os aspectos matemáticos presentes nas pesquisas eleitorais, pode-se consultar a dissertação de Mestrado Profissional **A Matemática por meio da Estatística ajudando a entender o processo eleitoral**, pela Universidade Federal de Alagoas, disponível em: http://www.repositorio.ufal.br/handle/riufal/6707 (acesso em: 4 out. 2024).

Para tabulação dos dados, recomenda-se utilizar uma planilha eletrônica. Assim, os estudantes podem perceber que o trabalho é facilitado, pois é possível criar diferentes gráficos e utilizar fórmulas próprias da planilha para calcular as medidas estatísticas de tendência central e de dispersão de maneira rápida e precisa. Para essa etapa, sugere-se retomar o tópico **Cuidados requeridos na leitura e no tratamento de dados**.

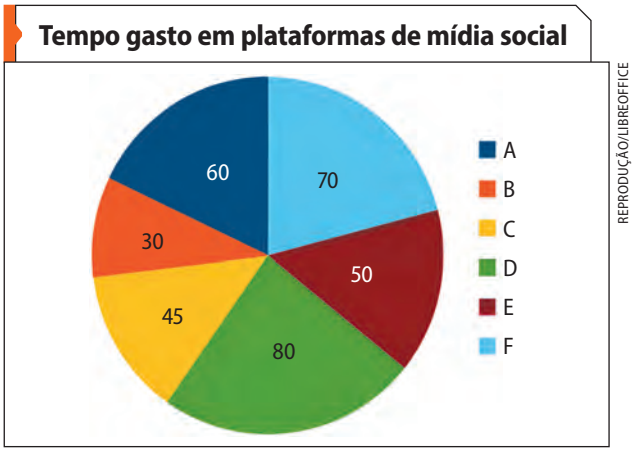
Os estudantes poderão aplicar procedimentos matemáticos estatísticos para interpretar situações em diferentes contextos, desenvolvendo a competência específica 1 da área de Matemática e suas Tecnologias e, em particular, a habilidade EM13MAT102. A utilização da linguagem científica e gráfica para se comunicar contribui para o desenvolvimento da competência geral 4. Ao calcular as medidas estatísticas para realizar a análise dos dados coletados, os estudantes também aplicam registros de representação matemáticos, desenvolvendo a competência específica 4 da área de Matemática e suas Tecnologias e, em particular, as habilidades EM13MAT406 e EM13MAT407.

Por fim, recomenda-se propor aos estudantes que produzam um relatório da pesquisa realizada. Nele, é obrigatório constar uma descrição da metodologia do projeto elaborado pelos estudantes (tema, população de interesse, tipo de amostra escolhido, como foi realizada a coleta de dados etc.) e, principalmente, a análise dos gráficos e das tabelas elaborados pelos estudantes, de modo a apresentar as conclusões principais da pesquisa, argumentando com base em fatos e informações confiáveis, o que contribui para o desenvolvimento da competência geral 7. Além disso, sugere-se que cada grupo elabore um vídeo, no qual apresente as principais conclusões da pesquisa, e, se possível, compartilhe esses resultados com a comunidade escolar.

A seção **Explorando a tecnologia** trabalha a construção de tabelas e gráficos na planilha eletrônica do **LibreOffice**. O LibreOffice é um *software* livre e de código aberto desenvolvido por usuários que compartilham seus trabalhos com o mundo de maneiras não restritivas. Esses usuários buscam eliminar a exclusão digital, capacitar todos como cidadãos plenos, apoiar a preservação das línguas maternas e evitar *software* proprietário e bloqueio de formato.

As atividades propostas nessa seção contribuem para o desenvolvimento da competência específica 4 da área de Matemática e suas Tecnologias e das habilidades EM13MAT406 e EM13MAT407, ao construir diferentes tipos de gráfico e explorar como cada um pode ser usado para representar o mesmo conjunto de dados. Assim, os estudantes aprendem a interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos. Além disso, a discussão sobre a escolha do gráfico mais adequado para representar um conjunto de dados ajuda os estudantes a desenvolver uma compreensão mais profunda de como cada tipo de gráfico pode destacar diferentes aspectos dos dados, colaborando para a competência geral 5.

Na atividade **1**, espera-se que os estudantes obtenham um gráfico como o que segue.



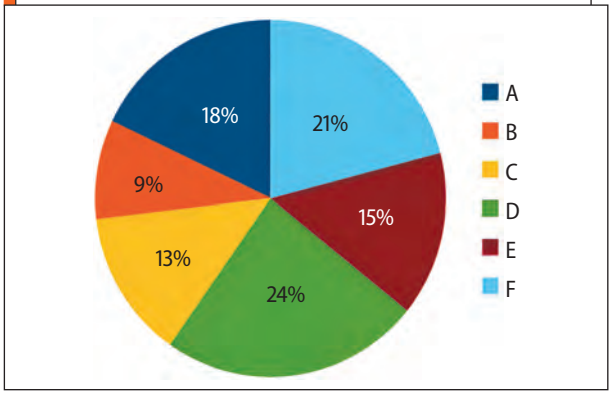
REPRODUÇÃO/LIBREOFFICE

Visualização do gráfico com valores absolutos.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Tempo gasto em plataformas de mídia social

REPRODUÇÃO/LIBREOFFICE



■ Visualização do gráfico com valores em porcentagem.

A atividade **12** da página 29 solicita a execução de uma pesquisa estatística. As sugestões e orientações para a execução dessa pesquisa foram descritas, anteriormente, no tópico **Pesquisa estatística**.

Ao debater as *fake news* no boxe **Fórum**, os estudantes têm a oportunidade de argumentar, com base em dados e informações confiáveis, para defender pontos de vista, desenvolvendo a competência geral 7. Para fomentar o debate, recomenda-se a leitura da seguinte reportagem.

> ***Fake news* prejudicam tomada de decisão por afetados em catástrofe**
>
> *Cidadãos assustados podem tomar decisões irracionais, diz pesquisadora*
>
> […]
>
> A pesquisadora da Universidade Federal Fluminense (UFF) Thaiane Moreira de Oliveira é parte de um grupo de pesquisadores dos Institutos Nacionais de Ciência e Tecnologia (INCT) que acompanha a divulgação de mensagens sobre o desastre climático do Rio Grande do Sul nas redes sociais.
>
> […]
>
> De acordo com a pesquisadora, as redes sociais permitiram que qualquer pessoa se tornasse uma "autoridade" em qualquer assunto e opiniões baseadas apenas no achismo passassem a ser valorizadas pelo público.
>
> "Antes das redes sociais, a gente tinha alguns atores que eram legitimados para apresentar uma informação que fosse considerada de credibilidade. Eram jornalistas, comunicadores públicos, divulgadores científicos, agentes públicos. Com as mídias sociais e a reconfiguração da forma como nos comunicamos, hoje em dia, emitir uma opinião é motivo de autoridade. Qualquer um que tenha uma certa visibilidade nas redes sociais ganha uma certa autoridade, emitindo sua opinião apenas baseado nas suas experiências pessoais e no achismo", destaca a pesquisadora.
>
> Com a credibilidade das instituições públicas sendo questionadas por notícias falsas, as pessoas afetadas pelo desastre ficam sem referência para tomar decisões.
>
> […]
>
> Não há apenas um risco para a democracia, segundo a pesquisadora, mas também para a própria segurança e saúde das vítimas.
>
> […]

ABDALA, Vitor. *Fake news* prejudicam tomada de decisão por afetados em catástrofe. **Agência Brasil**, Brasília, DF, 14 maio 2024. Disponível em: https://agenciabrasil.ebc.com.br/geral/noticia/2024-05/fake-news-prejudicam-tomada-de-decisao-por-afetados-em-catastrofe. Acesso em: 4 out. 2024.

Em relação ao combate às *fake news*, os estudantes podem propor:

- procurar informações e opiniões contrárias ao que a notícia retrata. Ter contato com informações que são aparentemente incompatíveis ajuda na construção de uma opinião mais sensata e equilibrada.
- checar as informações em várias fontes. Cruzar informações, buscar a origem e pesquisar as informações em outros canais para confrontá-las.
- manter-se informado. Estar sempre bem-informado ajuda a desconfiar e a não cair em informações falsas.

Ao se conscientizarem dos efeitos nocivos das *fake news* e elaborarem propostas para combatê-las, os estudantes desenvolvem as competências gerais 5 e 10.

A seção **História da Matemática** conta como a enfermeira inglesa Florence Nightingale revolucionou a enfermagem ao utilizar indicadores e gráficos estatísticos para reduzir as mortes nos hospitais militares onde trabalhou durante a guerra da Crimeia. Conhecer essa história é um modo de sensibilizar os estudantes para a importância do desenvolvimento, da análise e do uso dos indicadores estatísticos. Para complementar essa seção, sugere-se o documentário **O Prazer da Estatística**, disponível em https://www.ime.usp.br/ativestat/atividades/filmes/fv18.php (acesso em: 4 out. 2024). O documentário, com cerca de 1 hora, pode ser trabalhado em partes. No *site* mencionado, há uma descrição das partes do vídeo e sugestões de questões para discutir cada assunto.

No tópico **Indicadores**, pode-se retomar as ideias discutidas na **Abertura** do Capítulo sobre índices. Recomenda-se o vídeo **80 anos contando a história do Brasil e dos brasileiros**, disponível em https://educa.ibge.gov.br/jovens/conheca-o%20-brasil/populacao/20590%20-introducao.html (acesso em: 4 out. 2024). Por meio de um relato da história de dois personagens, um nascido em 1960 e outro, em 2000, é feita uma comparação entre os dados da população brasileira nesse período, evidenciando as mudanças na população, contando parte da história do Brasil e mostrando como os indicadores socioeconômicos produzidos pelo IBGE são importantes para o país.

Compreender os indicadores e as taxas possibilita interpretar criticamente situações econômicas e sociais, desenvolvendo a competência específica 1 da área de Matemática e suas Tecnologias e, em particular, a habilidade EM13MAT104.

Pontuar que qualquer índice, por mais sofisticado que seja, apresenta informações relevantes, mas também possui limitações. Para evitar conclusões equivocadas a respeito de índices e indicadores, é necessário compreender como eles são determinados e analisá-los considerando as especificidades do contexto em que estão inseridos.

No tópico **Índice de Desenvolvimento Humano (IDH)**, ao estudar como esse índice é calculado, os estudantes compreendem melhor o que, de fato, está sendo medido. Comentar que o termo "desenvolvimento humano" pode ser interpretado de diferentes maneiras, por isso é necessário saber o que é exatamente esse índice para evitar conclusões equivocadas.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Destacar que a sociedade é complexa e que o estudo e a análise de tendências e de diferentes movimentos de grupos sociais não devem se limitar a um único índice. O conjunto de fatores, estudos e dados e o aprimoramento de pesquisas e técnicas de análise possibilitam uma melhor compreensão da realidade.

Estudar esses indicadores auxilia na compreensão da sociedade e contribui para uma possível transformação, uma vez que embasa políticas públicas. Por meio dessa investigação e da análise crítica, trabalham-se as competências gerais 1 e 2, a competência específica 1 da área de Matemática e suas Tecnologias e, em particular, a habilidade EM13MAT104.

No estudo de cada um dos aspectos que integram o IDH (longevidade, educação e renda), recomenda-se indicar quais são as limitações de cada um deles. O índice de educação, por exemplo, não leva em consideração a qualidade do aprendizado.

Para aprofundar esse tema, sugerem-se os vídeos da Univesp, **IDH: parte 1** e **IDH: parte 2**, disponíveis, respectivamente, em https://www.youtube.com/watch?v=fARlTzyUPgY e https://www.youtube.com/watch?v=07L2dP4nKlg (acessos em: 4 out. 2024). Neles, mostra-se como o cálculo do IDH funciona.

O boxe **Pense e responda**, no tópico **Cálculo do IDH**, leva os estudantes a refletir sobre as dificuldades de se frequentar e concluir a Educação Básica no Brasil.

A seção **Conexões com...** aborda o **Índice de Desenvolvimento Humano Municipal (IDHM)**, contribuindo para o trabalho com o Tema Contemporâneo Transversal Educação em Direitos Humanos. Ao ter contato com esses índices, os estudantes exploram conhecimentos construídos historicamente que ajudam a colaborar para uma sociedade mais inclusiva, desenvolvendo a competência geral 1.

Os estudantes também têm a oportunidade de utilizar conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações de natureza socioeconômica, conforme menciona a competência específica 1 da área de Matemática e suas Tecnologias e, em particular, a habilidade EM13MAT104.

Nas atividades propostas nessa seção, os estudantes precisam pesquisar os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS) no Brasil, cujas informações podem ser obtidas no *site* https://brasil.un.org/pt-br/sdgs (acesso em: 4 out. 2024). Pode-se propor aos estudantes que discutam com os colegas e enumerem ações, existentes ou não, que afetam positivamente o desenvolvimento dos pilares contidos no IDHM. Essa reflexão permite aos estudantes perceberem como os indicadores podem desencadear políticas e ações públicas para a melhoria da sociedade. Essa discussão pode ser realizada em parceria com os professores da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, de modo a explorar aspectos mais específicos da área.

Avaliação

A atividade **2** da **Abertura** do Capítulo possibilita uma avaliação diagnóstica da seguinte habilidade relacionada à pesquisa estatística que foi trabalhada no Ensino Fundamental – Anos Finais.

(**EF09MA23**) Planejar e executar pesquisa amostral envolvendo tema da realidade social e comunicar os resultados por meio de relatório contendo avaliação de medidas de tendência central e da amplitude, tabelas e gráficos adequados, construídos com o apoio de planilhas eletrônicas.

O trabalho proposto nas orientações deste Capítulo, que os estudantes realizem uma pesquisa estatística, constitui um instrumento de avaliação formativa que possibilita verificar a evolução dos estudantes em relação às competências e habilidades envolvidas em uma proposta pedagógica dessa magnitude. Nesse sentido, é importante avaliar como os estudantes realizam cada etapa desse trabalho, analisando a relevância do tema escolhido, o público-alvo que foi definido, os procedimentos adotados para a coleta dos dados, o questionário elaborado e o relatório produzido. Cada uma dessas etapas possibilita identificar aptidões que precisam ser aprimoradas e consolidar os conceitos estudados.

A seguir, sugestões de atividades cuja análise das resoluções pode contribuir para avaliar a evolução de cada estudante e orientar seus estudos.

1ª avaliação formativa: atividades **1**, **3** e **7** (páginas 25, 26 e 27, respectivamente).

2ª avaliação formativa: atividades **14** e **19** (páginas 37 e 38, respectivamente).

Capítulo 2 Progressões

Orientações

O estudo sobre sequências e sua relação com padrões presentes na natureza e em desenhos feitos na areia por diferentes povos africanos apresentados na **Abertura** deste segundo Capítulo permite aos estudantes o contato com conhecimentos historicamente construídos, bem como a valorização de diferentes manifestações artísticas e culturais, reforçando o desenvolvimento das competências gerais 1 e 3. Além disso, o uso de estratégias e conceitos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, promovendo o trabalho com as progressões e a relação com funções de domínio discreto para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas, contribui para o desenvolvimento das habilidades EM13MAT507 e EM13MAT508, referentes à competência específica 5 da área de Matemática e suas Tecnologias.

A **Abertura** do Capítulo mostra como os *sona,* desenhos feitos na areia pelo povo africano tchokwe, podem ser estudados matematicamente pelo conceito de sequência e, ao mesmo tempo, apresenta aos estudantes um elemento cultural de um povo africano. Com isso, trabalham-se as competências gerais 1 e 3 e o Tema Contemporâneo Transversal Diversidade Cultural.

Além da leitura do texto e das imagens da **Abertura**, é importante que os estudantes assistam ao vídeo indicado no boxe **Para assistir** para que possam aprofundar a discussão inicial. Recomenda-se retomar o conceito de Etnomatemática, caso isso já tenha sido feito na **Abertura** do Capítulo **3** do Volume **1**. Para isso, pode-se comentar como a Matemática está presente em diferentes povos e verificar se os estudantes têm essa percepção de que um mesmo conceito pode ser desenvolvido de diferentes maneiras. O texto a seguir trata desse assunto.

> [...]
>
> É amplamente aceita a percepção de que a matemática está presente em diferentes contextos culturais. Fala-se na "matemática do pedreiro", na "matemática do marceneiro", na "matemática dos camponeses", e assim por diante. Decorre, portanto, que há saberes e fazeres matemáticos (sim, no plural!) para além daqueles que circulam na academia e na escola.
>
> Este entendimento levou pesquisadores em Educação Matemática a constituírem um programa de pesquisa, iniciado em meados dos anos 70 e 80, chamado de Etnomatemática, do qual o brasileiro Ubiratan D'Ambrósio foi um dos mais destacados pioneiros.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Para ele, o Programa Etnomatemática é um conceito amplo que busca entender como a espécie humana desenvolveu seus meios de sobrevivência e transcendência, não restringindo-se, portanto, às ideias, práticas e técnicas matemáticas (D'AMBRÓSIO, 2018)

Por vezes, a pesquisa etnomatemática focaliza a compreensão de saberes e fazeres (classificar, quantificar, medir etc.) que reconhecemos como matemáticos. Digo "que reconhecemos", pois somos nós, com a perspectiva da academia ou da escola, que os vemos dessa forma. Nas diferentes culturas, o mais provável é que os saberes e fazeres estão tão entrelaçados, que não faz sentido falar deles como separados de suas respectivas culturas (KNIJNIK; WANDERER; GIONGO; DUARTE, 2012).

[…]

Um possível exemplo é discutir com os estudantes como um marceneiro realiza a cubagem da madeira. Biembengut e Hein (2000) contam que marceneiros no sul do país usam o seguinte procedimento: passam uma linha de cordel contornando o tronco na metade da altura estimada; dobram a linha em quatro partes iguais, elevando ao quadrado a medida do ¼ da linha do contorno; e finalmente, multiplicam pela medida da altura do tronco. […]

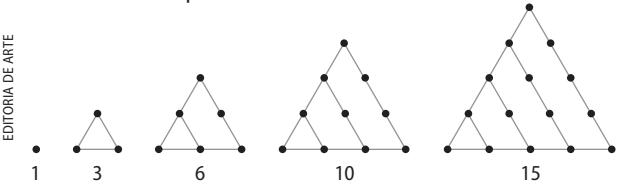
BARBOSA, Jonei C. Existem outras matemáticas? **Nova escola**, São Paulo, 3 maio 2019. Disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/17149/etnomatematica-existem-outras-matematicas. Acesso em: 4 out. 2024.

Para conhecer mais a Etnomatemática e suas possibilidades, recomenda-se:

- REBOUÇAS, Ana Priscila S.; OLIVEIRA, Kelly A. de. Etnomatemática e ensino de matemática: o que revelam as pesquisas da BDEm. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura (Rematec)**, Belém, n. 45, p. 1-17, 2023. Disponível em: https://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/470/507. Acesso em: 4 out. 2024.
- BIBLIOTECA DIGITAL ETNOMATEMATICAS. [*S. l.*], 2021. *Site*. Disponível em: https://sites.google.com/view/etnomatematicas/. Acesso em: 4 out. 2024.

  Essa biblioteca reúne a maior quantidade de publicações sobre Etnomatemática, disponibilizando um acesso rápido a artigos, livros, monografias, dissertações, teses e vídeos que foram publicados em anais de eventos, revistas, livrarias ou em *sites* de relevância ao tratar do assunto.

Na atividade **1** da **Abertura** do Capítulo, é esperado que os estudantes conheçam algum exemplo, como a sequência dos números triangulares. A seguir, os cinco primeiros números dessa sequência.



A atividade **2** propõe uma pesquisa para que os estudantes busquem mais informações sobre os *sona*. Os *sona* (plural de *lusona*) são utilizados pelo povo tchokwe para auxiliar a memória durante a contação de histórias. Os *sona* são construídos a partir de uma grelha de pontos equidistantes (*tobe*) desenhados na areia. Os desenhos são feitos sem levantar o dedo e sem passar duas vezes por cima da mesma linha. Após a pesquisa, é importante que os estudantes compartilhem as informações obtidas. Para mais informações sobre como os *sona* podem auxiliar na aprendizagem dos estudantes, acessar o livro de Paulus Gerdes, que trata das explorações educacionais e matemáticas de desenhos africanos na areia, disponível em https://resistir.info/livros/paulus_gerdes_geometria_sona_de_angola.pdf (acesso em: 4 out. 2024).

A **Introdução** apresenta a sequência de Fibonacci. Pode-se aprofundar o conhecimento sobre a história de Leonardo Fibonacci com o texto a seguir.

[…]

[…] nasceu em Pisa, então próspera cidade mercantil italiana, **Leonardo Fibonacci** (1170, 1240?), também conhecido como Leonardo Pisano ou Leonardo de Pisa. Seu pai foi importante funcionário de Pisa e representou, durante algum tempo, os interesses comerciais de sua cidade em Bugia, na atual Argélia, norte da África. Devido às viagens do pai, Leonardo percorreu todo o Mediterrâneo, visitando a Espanha muçulmana, a Sicília, o Levante, conhecendo nestes lugares diversas culturas, familiarizando-se com a Matemática árabe, que era então mais desenvolvida do que a Matemática da Europa Ocidental.

Leonardo se identificava como descendente de Bonacci, provavelmente um antepassado não muito distante. Este costume de referir-se a antepassados mais ou menos ilustres era comum na Itália de então. O uso do cognome Fibonacci para Leonardo é recente e deve-se provavelmente ao historiador matemático Guillaume Libri, em 1838.

[…]

Leonardo impressionou-se muito com os algarismos indo-arábicos, achando-os superiores aos métodos então usados na Europa para registrar os números e operar com eles. Foi um dos responsáveis pela divulgação do sistema de numeração decimal na Europa, por meio de seu *Liber Abaci* escrito em 1202. Neste livro, Fibonacci apresentou um tratamento satisfatório da Aritmética e da Álgebra Elementar. […]

[…]

CARVALHO, João P. de. Um problema de Fibonacci. **Revista do Professor de Matemática (RPM)**, São Paulo, n. 17, [201-]. Disponível em: http://www.rpm.org.br/cdrpm/17/2.htm. Acesso em: 4 out. 2024.

O estudo do tópico **Sequências** contribui para o desenvolvimento do pensamento algébrico, pois os estudantes são incentivados a identificar regularidades e padrões em sequências, estabelecendo leis matemáticas para expressá-las, quando elas existirem. Os números primos, por exemplo, formam uma sequência numérica; no entanto, até hoje não foi possível determinar um termo geral para essa sequência.

No boxe **Pense e responda**, espera-se que os estudantes respondam que, em uma sequência obtida por recorrência, o cálculo de cada termo depende dos termos anteriores, enquanto, em uma sequência determinada pelo termo geral (a_n), ele depende apenas de n.

A atividade resolvida **1** retoma o problema dos coelhos e a sequência de Fibonacci. Esse mesmo problema pode ser apresentado por meio do vídeo **Eu acho que vi um coelhinho**, pro-

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

duzido pela equipe de Matemática Multimídia da Unicamp-SP, disponível em https://www.youtube.com/watch?v=T0fa5TEYjdQ&feature=emb_title (acesso em: 4 out. 2024).

O estudo do tópico **Progressão aritmética** contribui para o desenvolvimento da competência específica 5 da área de Matemática e suas Tecnologias, habilidade EM13MAT507. Pode-se iniciar esse estudo ouvindo a história da jovem Alice, disponível em https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1256 (acesso em: 4 out. 2024). A história relata um desafio que é solucionado por uma progressão aritmética.

No tópico **Soma dos termos de uma PA**, a demonstração de sua fórmula contribui para que o estudante compreenda gradualmente o método lógico dedutivo característico da matemática para validar seus resultados. Recomenda-se a leitura da dissertação **Demonstração de fórmulas matemáticas no ensino médio**, de Román Héctor Abril, disponível em http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/1700 (acesso em: 4 out. 2024). Nesse trabalho, Román apresenta uma abordagem para que as demonstrações se tornem um fator motivador da aprendizagem.

O objetivo do tópico **Progressão aritmética e função afim** é possibilitar situações matemáticas para que os estudantes reconheçam a progressão aritmética como uma função afim cujo domínio é o conjunto dos números inteiros positivos. Os boxes **Pense e responda** enfatizam esse fato. No segundo boxe, espera-se que os estudantes concluam que o gráfico de uma PA decrescente é o conjunto de pontos (n, a_n) que fazem parte do gráfico da função afim dada por $h(x) = ax + b$, com $a < 0$, ou seja, h é uma função decrescente.

O boxe **Fórum** aborda o Tema Contemporâneo Transversal Saúde ao propor uma pesquisa e um debate sobre a importância das vacinas na proteção coletiva da sociedade. Além disso, possibilita um trabalho em conjunto com o professor de Biologia e uma contribuição para a competência específica 3 da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Em relação à atividade proposta, os estudantes têm à disposição diversos temas interessantes a respeito de doenças que foram consideradas erradicadas em determinadas regiões do mundo, mas que ressurgiram em anos recentes, e dos fatores que contribuíram para essa situação. Algumas possibilidades que poderão ser abordadas:

- Sarampo, uma doença altamente contagiosa que foi considerada erradicada em muitas partes do mundo em razão da vacinação em massa. No entanto, seu ressurgimento em alguns países pode ser atribuído à queda nas taxas de vacinação, causada, por exemplo, por preocupações infundadas sobre os efeitos colaterais das vacinas.
- Poliomielite, ou pólio, foi quase erradicada globalmente devido aos esforços de vacinação intensivos. No entanto, em algumas regiões, como partes da África e do Oriente Médio, a poliomielite ressurgiu devido a problemas de acesso às vacinas, em razão de conflitos armados que dificultam as campanhas de vacinação.
- Em muitos países, a tuberculose estava sob controle (embora ainda não tenha sido erradicada em escala global), devido ao acesso a tratamentos eficazes. Contudo, o aumento da resistência aos medicamentos, a falta de adesão aos regimes de tratamento e as condições de vida precárias em certas populações contribuíram para o ressurgimento da tuberculose em algumas regiões.
- A sífilis é outra doença que experimentou um ressurgimento em algumas partes do mundo, apesar de ter sido controlada anteriormente com o uso de antibióticos. Fatores como a falta de educação sexual abrangente, o uso inadequado de preservativos e o aumento das práticas de alto risco contribuíram para o aumento dos casos de sífilis em algumas comunidades.
- Embora não tenha sido erradicada, o controle da malária teve progressos significativos em muitas regiões. Mas o ressurgimento dessa doença em algumas áreas pode ser atribuído à resistência aos medicamentos antimaláricos, à falta de acesso a mosquiteiros tratados com inseticida e ao enfraquecimento dos programas de controle de vetores.

Esses são apenas alguns dos possíveis temas que os estudantes podem oferecer ao discutir doenças que foram consideradas erradicadas ou sob controle. Ao instigar a curiosidade intelectual, a atividade pode gerar uma discussão rica e informativa sobre os desafios contínuos na área da saúde pública e a importância da vigilância e da prevenção, e todos os argumentos devem ser embasados em informações confiáveis, desenvolvendo, assim, as competências gerais 2 e 7.

O estudo da **Progressão geométrica** contribui para o desenvolvimento da competência específica 5 da área de Matemática e suas Tecnologias, habilidade EM13MAT508. Pode-se iniciar esse estudo apresentando o vídeo **Pra lá de Bagdá**, disponível em https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1158 (acesso em: 4 out. 2024). O vídeo relata um exemplo interessante de uma progressão geométrica por meio de uma lenda, contada em muitos livros, sobre a origem do jogo de xadrez.

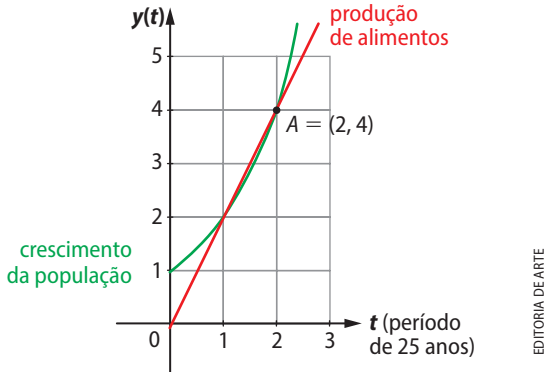
As demonstrações das fórmulas nos tópicos **Soma dos termos de uma PG finita** e **Soma dos termos de uma PG infinita**, assim como o trabalho com demonstrações em sala de aula das fórmulas matemáticas, contribuem para o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo, da capacidade argumentativa, da capacidade analítica e da melhor compreensão da Matemática como Ciência. Por isso, é importante que os estudantes compreendam essas demonstrações, diferenciando-as das verificações empíricas.

No tópico **Progressão geométrica e função exponencial**, recomenda-se comentar que é possível definir uma progressão geométrica de razão negativa; porém, nesse caso, não se associa essa progressão a uma função exponencial, que só está definida para bases positivas.

O tema da seção **Conexões com...** diz respeito às teorias demográficas e é uma oportunidade para trabalhar em parceria com os professores das áreas de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. A seção enfatiza conhecimentos históricos e proporciona a investigação de uma situação-problema por meio do conhecimento científico e tecnológico, contribuindo para o desenvolvimento da competência geral 1 e da competência específica 3 da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

Na atividade **2**, espera-se que os estudantes construam um gráfico, conforme o apresentado a seguir, indicando o crescimento da população, por meio de uma curva exponencial, e o crescimento da produção de alimentos, indicado por uma reta. Essas duas representações gráficas devem se interceptar em um ponto, que corresponde ao colapso na oferta de alimentos, conforme previsão de Malthus. Nota-se que o ponto do gráfico que indica o colapso na relação dos alimentos e da população é quando o crescimento populacional ultrapassa a produção de alimentos.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA



EDITORIA DE ARTE

Na atividade **3**, os estudantes precisam considerar o dado informado: em 1798, a população mundial era de aproximadamente 1 bilhão de habitantes. Segundo a teoria populacional apresentada, esse valor dobrava a cada 25 anos; portanto, no ano de 2000, a população seria de 256 bilhões de pessoas (2^8).

As atividades **4** e **5** propõem uma pesquisa a respeito da teoria reformista e um resumo comparativo em relação às teorias malthusiana e neomalthusiana. A ideia básica da teoria reformista é a adoção de profundas reformas sociais e econômicas para superar os graves problemas dos países subdesenvolvidos. À medida que as famílias obtêm condições dignas de vida, tendem a diminuir o número de filhos para não comprometer o acesso de seus dependentes aos sistemas de educação e saúde. Por outro lado, a teoria malthusiana descartava a utilização de métodos contraceptivos para limitar o crescimento populacional; para os defensores dessa teoria, a solução estaria no controle da natalidade, e o referido controle deveria se basear na sujeição moral do homem (casamento tardio, abstinência sexual etc.).

O texto a seguir traz informações sobre a teoria reformista.

> […]
>
> Contrários às teorias Malthusiana e Neomalthusiana, que atribuem ao grande crescimento populacional dos países subdesenvolvidos a culpa pelo estado de pobreza e fome, os reformistas ou marxistas admitem que a situação de pobreza e subdesenvolvimento, a que foi submetido os países subdesenvolvidos, é a responsável pelo acelerado crescimento demográfico e consequente estado de fome e miséria. […]
>
> […] os reformistas defendem a adoção de profundas reformas sociais e econômicas para superar os graves problemas dos países subdesenvolvidos. A redução do crescimento viria como consequência de tais reformas. Eles citam o exemplo dos países desenvolvidos, cuja redução do crescimento só foi possível após a adoção de reformas socioeconômicas e consequente melhoria do padrão de vida das suas populações. […]

FONTANA, Raphael Luiz M. *et al*. Teorias demográficas e o crescimento populacional no mundo. **Cadernos de Graduação**: Ciências Humanas e Sociais, Aracaju, v. 2, n. 3, p. 113-124, mar. 2015. Disponível em: https://periodicos.set.edu.br/index.php/cadernohumanas/article/view/1951. Acesso em: 4 out. 2024.

A seção **Explorando a tecnologia** contribui para o desenvolvimento das competências específicas 4 e 5 da área de Matemática e suas Tecnologias, habilidades EM13MAT507 e EM13MAT508, ao oportunizar a representação de uma PA e de uma PG em gráficos, em uma planilha eletrônica, a fim de analisar o comportamento de seus pontos.

Na atividade **4**, espera-se que os estudantes repitam o passo a passo, trocando os valores do primeiro termo e da razão. Além disso, nas células C2 e B5, devem utilizar as fórmulas "=B2*B3" e "=B2*B3^(B4−1)", respectivamente. Devem observar que o gráfico apresenta pontos que pertencem a uma curva exponencial.

A **História da Matemática** relata a história de Gauss relacionada à soma dos números de 1 a 100. Até hoje, não se sabe se o fato descrito realmente ocorreu. Para complementar, pode-se apresentar o resumo bibliográfico **Gauss, Carl Friedrich (1777-1855)**, disponível em http://www.fem.unicamp.br/~em313/paginas/person/gauss.htm (acesso em: 4 out. 2024).

As atividades complementares **12** e **16** trabalham com fractais. O texto "O que são os fractais, padrões matemáticos infinitos apelidados de 'impressão digital de Deus'", disponível em https://www.bbc.com/portuguese/geral-50656301 (acesso em: 4 out. 2024), apresenta, a respeito desse assunto, informações interessantes que podem ser compartilhadas com os estudantes.

Avaliação

As atividades **3** e **4** da **Abertura** do Capítulo possibilitam uma avaliação diagnóstica da seguinte habilidade relacionada à regularidade de uma sequência que foi trabalhada no Ensino Fundamental – Anos Finais.

(**EF08MA10**) Identificar a regularidade de uma sequência numérica ou figural não recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números ou as figuras seguintes.

A seguir, sugestões de atividades cuja análise das resoluções pode contribuir para avaliar a evolução de cada estudante e orientar seus estudos.

1ª avaliação formativa: atividades **2** e **4** (página 50).

2ª avaliação formativa: atividades **10**, **14** e **23** (página 59).

3ª avaliação formativa: atividades **30**, **36**, **40** e **44** (páginas 66 e 67, respectivamente).

Capítulo 3 Função definida por mais de uma sentença

Orientações

Neste Capítulo, as funções definidas por mais de uma sentença são aplicadas para interpretar e analisar o cálculo do imposto de renda e de outras faturas de consumo, o que favorece principalmente o desenvolvimento da competência específica 4 da área de Matemática e suas Tecnologias e, particularmente, da habilidade EM13MAT404. Além disso, esse estudo possibilita a investigação de dados referentes ao comportamento de duas variáveis numéricas, considerando-se a variação e utilizando-se a representação no plano, permitindo o desenvolvimento da habilidade EM13MAT510 e, consequentemente, da competência específica 5 da área de Matemática e suas Tecnologias.

O texto a seguir aborda os diferentes estilos de aprendizagem dos estudantes e a relação deles com a Álgebra. Conhecer os diversos estilos pode auxiliar na criação de estratégias de ensino diversificadas, contribuindo para o aprendizado dos estudantes.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Álgebra e educação algébrica: concepções de alunos e professores de Matemática

[...]

[...] É importante notar, no entanto, que não há um estilo "puro" e que as características indicam apenas o estilo **preferencial**.

a) Ativo / Reflexivo:

Os aprendizes ativos preferem aprender agindo sobre algo, testando, aplicando, manipulando, discutindo ou explicando o conteúdo para os outros. Privilegiam o trabalho em grupo e lhes é muito difícil quedar-se apenas a ouvir explanações. [...]

O aluno reflexivo prefere pensar sobre as informações, processando-as introspectivamente antes de trabalhar com elas. [...]

[...]

b) Sensitivo / Intuitivo:

Ao selecionar as informações a que estão expostos constantemente, através dos sentidos ou de suas próprias reconstruções mentais, os aprendizes sensoriais preferem as informações práticas, concretas, os fatos, as observações, o que vêm através dos sentidos. São metódicos, preferem resolver os problemas através de testagens.

[...]

Os intuitivos fixam-se mais nos conceitos e teorias, no que surge através da reflexão, da imaginação. Assim, ainda que tenham compreendido a analogia, aos intuitivos não basta essa ideia, é necessário refletir sobre o que se viu e voltar às definições várias vezes.

[...]

c) Visual / Verbal:

Em atividades de ensino-aprendizagem, as informações que chegam do mundo exterior atingem, principalmente, nossos olhos e ouvidos. Os aprendizes visuais privilegiam as que vêm por imagens, diagramas, gráficos, esquemas, enquanto que os verbais preferem captar o que é falado, o que está escrito, as fórmulas que estão arroladas.

[...]

d) Indutivo / Dedutivo:

Muito se tem discutido sobre a melhor forma de apresentar um assunto, ou seja, se devemos partir do particular para o geral ou vice-versa. Os aprendizes indutivos preferem ver primeiramente os casos específicos (as observações, os resultados de experiências, os exemplos gráficos ou numéricos) para depois chegar à compreensão dos princípios e teorias. Os dedutivos, ao contrário, preferem ter primeiramente a visão geral da teoria e deduzir as suas aplicações para os casos específicos.

[...]

e) Sequencial / Global:

Os aprendizes sequenciais gostam de aprender passo a passo, de forma que cada informação seja obtida logicamente da anterior. São capazes de resolver problemas ainda que não tenham uma compreensão global do assunto em pauta e suas soluções são ordenadas e fáceis de entender. Os aprendizes globais captam as informações quase que aleatoriamente, não vendo as conexões até que de repente todo o quadro se lhes configura na mente, sendo então capazes de resolver rapidamente problemas complexos, apesar de ter dificuldade em explicar as sequências de passos de seus raciocínios.

[...]

CURY, Helena N. *et al*. Álgebra e educação algébrica: concepções de alunos e professores de matemática. **Educação Matemática em Revista – RS**, Rio Grande, v. 1, n. 4, p. 9-15, 2002. p. 12-13. Disponível em: https://www.sbembrasil.org.br/periodicos/index.php/EMR-RS/article/view/2276/1559. Acesso em: 10 out. 2024.

O texto da **Abertura** do Capítulo propõe uma reflexão a respeito dos compromissos financeiros de uma família e menciona o Imposto sobre a Renda das Pessoas Físicas (IRPF), seu objetivo e seus valores. É oportuno perguntar aos estudantes se conhecem o significado da palavra "imposto" e se sabem para que ele serve. Uma das funções desse tipo de contribuição é aplicar melhorias nos serviços públicos. Ao conversar a respeito do orçamento familiar, é possível utilizar materiais didáticos disponibilizados pelo Banco Central do Brasil em https://www.bcb.gov.br/Pre/Surel/RelAdmBC/2013/o-banco-central-do-brasil-e-a-sociedade/cidadania-e-sistema-financeiro/educacao-financeira.html (acesso em: 10 out. 2024). Ao discutir a participação dos estudantes na organização e no planejamento de gastos que impactam o orçamento familiar, está sendo desenvolvido o Tema Contemporâneo Transversal Educação Financeira. Ao utilizar conceitos e procedimentos matemáticos para compreender e explicar a realidade nos mais diferentes contextos, como o socioeconômico, o estudante está desenvolvendo a competência geral 1 e a competência específica 1 da área de Matemática e suas Tecnologias.

A atividade **1** tem o objetivo de conscientizar os estudantes da importância de participarem da organização financeira familiar. A proposta é discutir a necessidade do empenho de todos os membros da família para alcançar uma vida financeira saudável, além de buscar alternativas para que as despesas não superem a renda familiar. Eles podem pesquisar como elaborar um orçamento familiar e construir um planejamento conjunto, considerando valores que conheçam ou fazendo estimativas. A pesquisa proposta incentiva os estudantes a refletir sobre suas próprias despesas, a maneira como podem contribuir para a organização financeira de suas famílias e a importância do planejamento financeiro.

Na atividade **2**, propor aos estudantes que pesquisem a história dos impostos e sua importância no financiamento dos gastos públicos. O IRPF foi instituído no Brasil em 31 de dezembro de 1922 pela Lei nº 4.625; o primeiro processamento eletrônico do IRPF ocorreu em 1968, e o preenchimento da declaração pela internet teve início em 1997. Conhecer a história do imposto possibilita aos estudantes a construção de argumentos com base em fatos e informações confiáveis, o que pode ser usado para defender ideias e pontos de vista, contribuindo para o desenvolvimento da competência geral 7.

Na atividade **3**, os estudantes devem indicar exemplos de contas que cobram tarifas com base em faixas de consumo, como água, internet (cobrança por consumo de dados em MB ou GB) e energia elétrica (tarifas baseadas no consumo por hora e nas bandeiras tarifárias). Espera-se que os estudantes percebam que é possível associar, por exemplo, cada faixa de consumo a um tipo de função matemática. Esse momento pode ser aproveitado para questioná-los sobre a relação desses exemplos com o estudo de funções.

O tópico **Função definida por mais de uma sentença** retoma a discussão sobre o IRPF, apresentando a tabela de

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

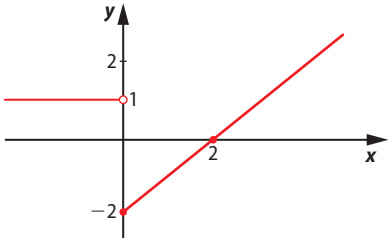
incidência mensal para 2024. O boxe **Saiba que...** traz a explicação do termo **alíquota**. É interessante propor perguntas, como: "Como você interpreta a parcela a deduzir?", "Por que existe uma parcela a deduzir?" e "A função definida nesse caso é linear?". Dessa maneira, trabalha-se a competência específica 1 da área de Matemática e suas Tecnologias.

Em relação ao imposto de renda, é importante explicar que, mesmo que a renda mensal de um trabalhador seja isenta, é possível que, em determinados meses, ocorra o desconto de IR no salário, em razão de horas extras, férias ou décimo terceiro salário. Nesses casos, recomenda-se fazer a declaração anual para verificar possíveis restituições.

Para ampliar o estudo da análise de função, propor aos estudantes que representem graficamente a função da atividade resolvida **1** e que determinem o domínio e o conjunto imagem da função.

A primeira sentença, $y = 1$ se $x < 0$, corresponde a uma função constante, e a segunda sentença, $y = x - 2$, se $x \geqslant 0$, corresponde a uma função afim.

Para essa função, $D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = [-2, +\infty[$.



EDITORIA DE ARTE

Na atividade **6** da seção **Atividades**, para determinar a lei de uma função *f* definida por mais de uma sentença, que modela os valores a serem pagos pelo consumo de gás, considerar o valor fixado correspondente ao total consumido, adicionado aos resultados dos produtos por faixa de consumo, entre o volume consumido e o valor variável correspondente, conforme exemplificado na atividade.

É interessante propor um trabalho integrado com os professores da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, investigando as propriedades físicas e químicas do gás natural, como pressão e combustão. Esse trabalho pode ser um projeto de investigação em grupo, de modo que os estudantes busquem embasamento para relatar as vantagens e as desvantagens do uso do gás encanado em uma residência do bairro ou na escola em que estudam. Uma das vantagens desse tipo de serviço, por exemplo, é o funcionamento contínuo do gás; no entanto, também é importante analisar aspectos econômicos, de segurança, ambientais, entre outros. Esse tipo de pesquisa pode ser resumido em um quadro, ou os estudantes podem elaborar um folheto explicativo com as informações obtidas. Esse trabalho favorece o desenvolvimento das competências gerais 2, 4 e 7, além da competência específica 1 da área de Matemática e suas Tecnologias, habilidade EM13MAT101.

O boxe **Fórum** estimula a reflexão e o diálogo sobre a infraestrutura básica existente na cidade ou no bairro em que os estudantes moram, comparando-a com outras regiões do país. É importante que as argumentações apresentadas sejam fundamentadas em informações confiáveis, com um posicionamento ético em relação ao cuidado com o planeta, promovendo a consciência socioambiental e desenvolvendo, assim, a competência geral 7. Para informações sobre o saneamento básico no Brasil, pode-se recomendar o *site* do Ministério da Integração Nacional e do Desenvolvimento Regional, disponível em https://www.gov.br/ana/pt-br/assuntos/saneamento-basico/saneamento-basico-no-brasil/panorama-do-saneamento-no-brasil-1 (acesso em: 10 out. 2024).

A seção **Conexões com...** tem como objetivo despertar a curiosidade intelectual por meio da abordagem científica, fundamentada nos conhecimentos das diversas áreas, conforme descrito na competência geral 2. Além disso, busca desenvolver a capacidade de argumentar e agir com base em informações confiáveis, promovendo a consciência ambiental e o consumo responsável, conforme orienta a competência geral 7. As discussões propostas incentivam os estudantes a praticar o diálogo e a empatia em um ambiente de cooperação, respeitando a diversidade e desenvolvendo, assim, a competência geral 9. A partir do tema "consumo de água", são propostas atividades que possibilitam a compreensão e a utilização de diferentes registros de representação matemática para solucionar problemas, desenvolvendo a competência específica 4 da área de Matemática e suas Tecnologias, bem como os Temas Transversais Contemporâneos Educação Ambiental e Educação para o Consumo.

Recomenda-se destacar que as informações sobre a distribuição e o consumo de água envolvem dados matemáticos que podem ser utilizados para realizar uma análise crítica e auxiliar a tomada de decisões relacionadas ao consumo e à sustentabilidade. Se considerar necessário, solicitar aos estudantes que tragam uma conta de água para essa aula, para que possam acompanhar a interpretação de cada parte que a compõe.

Resposta possível da atividade **1** da seção **Conexões com...**:

$$f(x) = \begin{cases} 75{,}92, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 10 \\ 75{,}92 + 12{,}02(x - 10), \text{ se } 10 < x \leqslant 20 \\ 196{,}12 + 29{,}96(x - 20), \text{ se } 20 < x \leqslant 50 \\ 1\,094{,}92 + 33{,}00(x - 50), \text{ se } x > 50 \end{cases}$$

A resposta da atividade **2** depende do município em que a pesquisa for realizada. Para obter informações sobre a coleta de esgoto, acesse o *site* elaborado pela Agência Nacional de Águas (ANA) e pela Secretaria Nacional de Saneamento Ambiental, disponível em https://www.ana.gov.br/atlasesgotos/ (acesso em: 10 out. 2024).

No panfleto elaborado para a atividade **3**, espera-se que sejam incluídas informações como: ao lavar a louça, retirar os restos de alimentos dos pratos e das panelas e depositá-los no lixo e deixar a torneira fechada enquanto se ensaboam os utensílios. Também é importante orientar os estudantes a apresentar números referentes à pesquisa realizada.

No tópico **Módulo de um número real**, pode-se comentar que, em Ciências da Natureza e suas Tecnologias, a nomenclatura "módulo da velocidade" ou "módulo da força" é frequentemente utilizada e significa o valor absoluto da velocidade e da força.

No tópico **Função modular**, vale a pena questionar se os estudantes compreendem por que a função modular é um caso particular da função definida por mais de uma sentença, o que favorece o desenvolvimento da competência específica 4 da área de Matemática e suas Tecnologias, habilidade EM13MAT404. Um exemplo de contextualização para a função modular pode ser consultado na página http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vii/paper/viewFile/7737/3944 (acesso em: 10 out. 2024), que descreve um trabalho com a função modular aplicada em eletrônica, envolvendo uma ponte retificadora. Esse relato foi apresentado no VII Congresso Internacional de Ensino da Matemática em 2017.

No tópico **Função injetora**, sugere-se o seguinte exemplo: considere a função em que cada estudante, ao ser matriculado na escola, tenha associado um número de matrícula. Nesse caso, não há possibilidade de dois estudantes terem o mesmo número de matrícula. Assim, elementos distintos do domínio possuem imagens distintas. Como contraexemplo, tem-se:

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

considere a função em que cada estudante, ao ser matriculado na escola, tenha seu cadastro associado à sua data de nascimento. Nesse caso, é possível que dois estudantes tenham a mesma data de nascimento, resultando em elementos distintos do domínio que compartilham a mesma imagem.

No primeiro boxe **Pense e responda** do tópico **Função bijetora**, espera-se que os estudantes respondam que a função *f* é sobrejetora, pois todo elemento do contradomínio é imagem de pelo menos um elemento do domínio. Além disso, é injetora, pois elementos distintos do domínio são associados pela função *f* a elementos distintos do contradomínio. No segundo boxe, a função *g* não é injetora, pois existem $x_1, x_2 \in D(g)$, com $x_1 \neq x_2$, para os quais temos $g(x_1) = g(x_2)$; ou seja, elementos distintos do domínio são associados pela função *g* à mesma imagem. No terceiro, a função *h* é injetora, pois elementos distintos do domínio são associados pela função *h* a elementos distintos do contradomínio.

No tópico **Função composta**, são utilizados conceitos que possibilitam a criação de modelos envolvendo funções, bem como situações que tratam da interpretação de atividades cotidianas e da resolução de problemas de diferentes naturezas. Isso contribui para o desenvolvimento das competências específicas 1 e 3 da área de Matemática e suas Tecnologias, habilidade EM13MAT302.

Pode-se propor a seguinte atividade aos estudantes para que relacionem o conceito de função composta a outro conteúdo, que é explorado na área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias:

Uma função que pode ser utilizada para converter certa temperatura expressa em °F para °C é $C(x) = 5 \cdot \left(\frac{x - 32}{9}\right)$, em que *x* é a medida em grau Fahrenheit. Outra função utilizada para converter uma temperatura em °C para K é $K(x) = x + 273$, em que *x* é a medida em grau Celsius. Determine a lei da função composta que possibilita converter diretamente uma temperatura em °F para K.

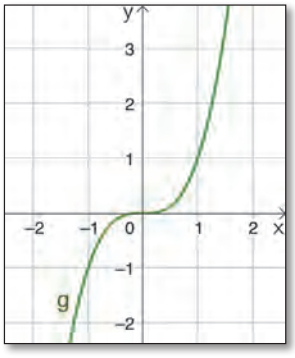
Resolução:

$K(C(x)) = 5 \cdot \left(\frac{x - 32}{9}\right) + 273 \Rightarrow$

$\Rightarrow K(C(x)) = \frac{5x - 160}{9} + 273 \Rightarrow K(C(x)) = \frac{5x - 2\,297}{9}$

A seção **Explorando a tecnologia** trabalha o gráfico da função inversa utilizando o *software* de matemática dinâmica **GeoGebra**, incentivando a competência específica 4 da área de Matemática e suas Tecnologias, habilidade EM13MAT402. No *site* https://ogeogebra.com.br/site/index.php (acesso em: 10 out. 2024), há materiais e recursos para capacitar usuários em seus aspectos técnicos e fomentar reflexões sobre uso do *software* em situações de ensino e aprendizagem.

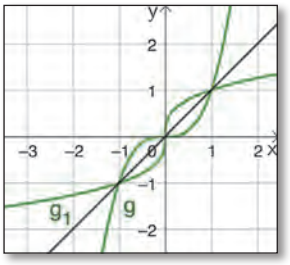
O gráfico solicitado na atividade **1** dessa seção que se espera que os estudantes construam é o seguinte.



A função *g* é bijetora, pois, ao traçar retas paralelas ao eixo *x* passando por pontos cuja ordenada pertence a CD(*g*), elas cruzam o gráfico de *g* em um único ponto. Também é possível verificar se a função é inversível algebricamente, analisando os passos que determinam a função inversa.

Na atividade **2**, não é necessário restringir o domínio, uma vez que *g* é uma função bijetora e, portanto, admite a função inversa.

Na atividade **3**, ao representar o gráfico da função g^{-1}, encontram-se três pontos de intersecção: (1, 1), (0, 0) e (−1, −1), conforme pode ser observado a seguir.



IMAGENS: REPRODUÇÃO/GEOGEBRA

Avaliação

As atividades de **Abertura** do Capítulo permitem incentivar e avaliar o desenvolvimento da seguinte habilidade do Ensino Médio.

(**EM13MAT101**) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

A seguir, sugestões de atividades cuja análise das resoluções pode contribuir para avaliar a evolução de cada estudante e orientar seus estudos.

1ª avaliação formativa: atividades **2** e **5** (página 83).

2ª avaliação formativa: atividades **9** e **18** (item **a**) (página 96).

3ª avaliação formativa: atividades **31** (item **b**) e **37** (página 107).

Capítulo 4 Função logarítmica

Orientações

Neste Capítulo, a curiosidade intelectual é motivada por meio do estudo de alguns fenômenos, como o potencial hidrogeniônico (pH), o nível de intensidade do som (decibéis), a magnitude dos terremotos (escala Richter), entre outras abordagens da Ciência. Isso faz com que o exercício da reflexão e da análise crítica para investigar causas a fim de elaborar e testar hipóteses seja valorizado, o que incentiva o desenvolvimento da competência geral 2 da BNCC. Além disso, ao estudar esses assuntos, com o auxílio da função logarítmica, fazendo uso de diferentes registros matemáticos (algébricos, geométricos e computacionais), busca-se contribuir para o desenvolvimento das competências específicas 3 e 4 da área de Matemática e suas Tecnologias e, em particular, das habilidades EM13MAT305 e EM13MAT403.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

A atividade **1** da **Abertura** do Capítulo propõe uma pesquisa sobre a unidade de medida de intensidade sonora decibel, colaborando, assim, para a competência específica 1 da área de Matemática e suas Tecnologias e para a habilidade EM13MAT103. Se possível, fazer o *download* de um aplicativo de decibelímetro no celular e utilizá-lo para medir os ruídos da sala de aula e de outras áreas da escola, exemplificando a aplicação. Espera-se que os estudantes compreendam que a intensidade sonora pode ser apresentada em algumas unidades, entre elas o bel e o decibel (que é uma décima parte do bel). O nível de pressão sonora (do inglês *Sound Pressure Level – SPL*) está relacionado à potência do som e é medido em Pa (N/m^2). Para saber mais informações a respeito do som e do decibelímetro, acessar http://www.uel.br/pessoal/renatoikeoka/pages/arquivos/Fisica%20Aplicada%20a%20Engenharia%20II/OSC4_som_Intensidade_uso_do%20_decibelimetro.pdf (acesso em: 8 out. 2024).

A atividade **2** propõe uma pesquisa a respeito do Selo Ruído, que foi criado pelo Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia (Inmetro) e pelo Instituto Brasileiro do Meio Ambiente e dos Recursos Naturais Renováveis (Ibama). Esse selo é uma etiqueta que informa aos consumidores o nível de ruído produzido por eletrodomésticos. Alguns aparelhos, como aspiradores de pó, secadores de cabelo, liquidificadores e ventiladores devem receber o Selo Ruído. Para mais informações, consultar o *site* https://www.gov.br/ibama/pt-br/servicos/autorizacoes/selo-ruido (acesso em: 8 out. 2024).

A atividade **3** traz uma reflexão sobre o uso de fones de ouvido e propõe uma pesquisa a respeito da Perda Auditiva Induzida por Ruídos (Pair). O som está relacionado à variação de pressão exercida no ar que chega à nossa orelha, o qual passa a vibrar, propagando, pelo meato acústico externo (canal auditivo), a onda sonora. Como os fones ficam muito próximos da orelha, quando emitem sons de alta intensidade por certo tempo, podem danificar o meato acústico externo mais rapidamente. A Pair é uma lesão causada na orelha ou no sistema auditivo a longo prazo. As principais causas estão associadas a sons altos ouvidos por muito tempo ou instantâneos (explosões e impactos sonoros). Atualmente, o grupo de maior risco para a Pair é o de jovens e adultos. Para saber mais informações, consultar a notícia **Seconci-SP alerta para risco de Perda Auditiva Induzida por Ruído (PAIR)**, publicada na revista eletrônica **Cipa&Incêndio**, em 2017, disponível em https://revistacipa.com.br/seconci-sp-alerta-para-risco-de-perda-auditiva-induzida-por-ruido-pair/ (acesso em: 8 out. 2024).

Sugere-se desenvolver um trabalho em parceria com o professor do componente curricular Física, da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, a respeito da intensidade sonora e dos hábitos auditivos para que os estudantes promovam uma campanha de conscientização na comunidade escolar e com os familiares, relatando problemas que podem ser causados pela exposição prolongada ao som alto, contribuindo para o desenvolvimento da competência geral 8. A fim de coletar dados estatísticos da localidade, os estudantes podem elaborar um questionário e entrevistar as pessoas, verificando a maneira como costumam utilizar os fones de ouvido, a frequência de utilização e o volume do aparelho de reprodução do som. Os dados da pesquisa precisam ser compilados e podem ser compartilhados com a comunidade por meio de infográficos.

No tópico **Logaritmo**, pode-se comentar que os logaritmos surgiram para simplificar os cálculos matemáticos que eram muito extensos em áreas como Astronomia, Economia e Engenharia. Os primeiros estudos a esse respeito são atribuídos ao matemático escocês John Napier (1550-1617), no final do século XVI, que será comentado com mais detalhes na seção **História da Matemática**. A leitura do artigo **Sistemas de logaritmos**, do professor Elon Lages Lima, disponível em http://rpm.org.br/cdrpm/18/6.htm (acesso em: 8 out. 2024), pode contribuir para os planejamentos das aulas relacionadas aos logaritmos.

No tópico **Condições de existência do logaritmo**, enfatizar que o logaritmando só pode ser positivo e que a base do logaritmo deve ser positiva e diferente de 1. Comentar também que a maioria dos logaritmos é um número irracional; portanto, ao realizar cálculos com os logaritmos, em geral, usamos aproximações.

O trabalho nos tópicos **Consequências da definição** e **Propriedades operatórias dos logaritmos** é uma ótima oportunidade para verificar como os estudantes estão compreendendo as demonstrações matemáticas. Recomenda-se solicitar aos estudantes que façam essas demonstrações.

Ao desenvolver o tópico **Calculadora e logaritmos**, se possível, solicitar aos estudantes que tragam para a sala de aula uma calculadora científica ou então que usem as disponíveis nos *smartphones*. Em seguida, questioná-los se sabem operar as calculadoras que têm em mãos. Sugere-se realizar um trabalho de manuseio dessas calculadoras para praticar o cálculo de operações logarítmicas. Uma alternativa é reunir os estudantes em grupos para que se ajudem nesse manuseio. Eles devem considerar a informação apresentada no boxe **Saiba que...**, a qual diz que, ao se realizar algum cálculo com logaritmos, a mudança de base é necessária.

O estudo que explora o potencial hidrogeniônico (pH), no tópico **Função logarítmica**, colabora para a competência específica 3 da área de Matemática e suas Tecnologias e para a habilidade EM13MAT305. É importante comentar que o termo de comparação é a água pura, cujo pH é 7 a 25 °C. O pH é medido em escala logarítmica de base 10, o que significa que, com a diminuição de um ponto na escala de pH, a solução se torna 10 vezes mais ácida. Esse assunto pode ser desenvolvido em parceria com o professor do componente curricular Química, da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

No tópico **Relação entre função exponencial e função logarítmica**, ressaltar que tanto a função exponencial como a função logarítmica são bijetoras. Se necessário, retomar esse conceito. É importante que os estudantes compreendam que a função logarítmica e a função exponencial são inversas uma da outra e que, além disso, seus gráficos são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares. Esse tema favorece o desenvolvimento das competências específicas 3 e 4 da área de Matemática e suas Tecnologias e da habilidade EM13MAT403.

No boxe **Fórum**, um modo de sensibilizar os estudantes para o tema e iniciar a atividade é apresentando a reportagem sobre poluição sonora nas grandes cidades, disponível em https://www.youtube.com/watch?v=hs-pUsvmi-A (acesso em: 8 out. 2024). Para a pesquisa, sugerir o *site* do INAD Brasil (Dia Internacional da Conscientização Sobre o Ruído), disponível em http://inadbrasil.com/ (acesso em: 8 out. 2024), que apresenta ações com o objetivo de conscientizar a população a respeito da poluição sonora. Sugerir também a leitura da legislação do Distrito Federal sobre as normas de como conter e minimizar a poluição sonora, disponível em https://www.sinj.df.gov.br/sinj/Norma/57055/Lei_4092_30_01_2008.html (acesso em: 8 out. 2024). Ao realizar a pesquisa proposta, os

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

estudantes têm a oportunidade de exercitar elementos da investigação científica e da análise crítica, como prevê a competência geral 2, sendo possível também ampliar a capacidade de argumentação e de defesa de ideias sobre a consciência socioambiental, desenvolvendo a competência geral 7. Para finalizar, os estudantes podem criar postagens para redes sociais, materiais informativos para conscientização dos perigos dessa poluição, além de informativos com as medidas e ações que podem contribuir para solucionar ou minimizar esse problema, desenvolvendo, assim, a competência específica 2 da área de Matemática e suas Tecnologias.

No tópico **Equações logarítmicas**, pode-se explicar que a propriedade a seguir é verdadeira, porque as funções logarítmicas são bijetoras.

$\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$

Tanto nas equações quanto nas inequações, é importante ressaltar as condições de existência dos logaritmos. Se for o caso, apresentar exemplos numéricos.

Ao discutir a resolução das atividades **39** e **40**, é interessante que os problemas elaborados sejam compartilhados por diferentes duplas, para que os estudantes possam observar os conceitos matemáticos inseridos na criação de cada colega.

Para uma atividade complementar, sugere-se pedir aos estudantes que pesquisem o pH da pele. Atualmente, as pessoas fazem uso de muitos produtos para a pele, como maquiagens e cosméticos, os quais devem ser escolhidos considerando o pH da pele. O texto a seguir trata desse assunto.

[...]

> O pH varia numa faixa até 14. Quanto mais próximo do 0 [zero], mais ácido. Se o valor está mais para 14, é alcalino. O pH da pele é 5,5, explica Sônia Corazza. Se é sensível ou ressecada, o ideal é usar um sabonete com pH mais próximo da pele. Nestes casos, deve-se optar pelos produtos líquidos e cremosos (o pH vai de 5,5 a 7). O sabão em barra, de forma geral, tem pH mais alcalino, de 8 a 9. Por isso, são bons para a higiene do corpo.
>
> [...]

MACHADO, Andrea. Saiba como escolher o sabonete certo de acordo com o tipo de pele. **Extra**, Rio de Janeiro, 14 jun. 2014. Economia e finanças. Disponível em: https://extra.globo.com/noticias/economia/saiba-como-escolher-sabonete-certo-de-acordo-com-tipo-de-pele-12855123.html. Acesso em: 8 out. 2024.

Após a pesquisa, propor a seguinte atividade.

Considerando o pH da pele humana levemente ácido, no intervalo de 5,5 a 5,8, se uma pessoa utilizar um produto cuja concentração hidrogeniônica, em mol, é $1{,}48 \cdot 10^{-5}$, ela estará usando um produto básico ou ácido? Esse produto poderá fazer mal à pele dessa pessoa?

Resolução:

$pH = -\log [H+]$
$pH = -\log [1{,}48 \cdot 10^{-5}]$
$pH = -[\log 1{,}48 + \log 10^{-5}]$
$pH = -[\log 1{,}48 - 5 \cdot \log 10]$
$pH = -[0{,}17 - 5]$
$pH = -[-4{,}83]$
$pH = 4{,}83$

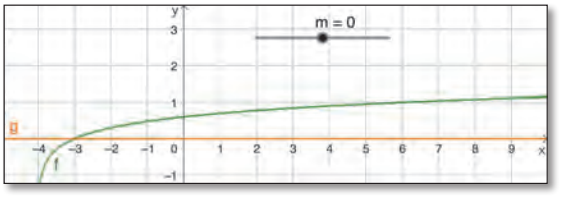
Portanto, esse produto poderá fazer mal à pele dessa pessoa, pois ele é muito ácido. Essa atividade complementar desenvolve a competência específica 3 da área de Matemática e suas Tecnologias e a habilidade EM13MAT305.

A seção **Explorando a tecnologia** trabalha a resolução de inequações logarítmicas, a partir da análise gráfica, utilizando o **GeoGebra**, contribuindo para o desenvolvimento da competência específica 3 da área de Matemática e suas Tecnologias.

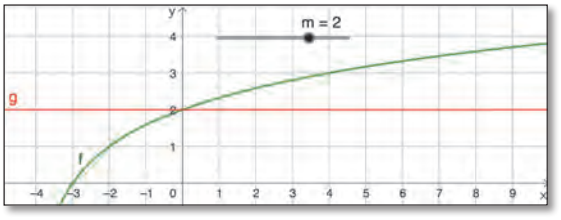
Para resolver a atividade **1** dessa seção, os estudantes podem considerar as funções f e g, dadas, respectivamente, por $f(x) = \log (2x - 5)$ e $g(x) = 1$. Ao construir os gráficos dessas funções no GeoGebra, obtém-se a imagem a seguir.

Observando o gráfico, nota-se que $f(x) \leqslant g(x)$ para $x \in \mathbb{R} \mid 2{,}5 < x \leqslant 7{,}5$.

Para resolver a atividade **2**, os estudantes podem considerar as funções f e g dadas, respectivamente, por $f(x) = \log (x + 4)$ e $g(x) = m$ e criar um **Controle deslizante** no GeoGebra. Pela condição de existência, tem-se $x > -4$. Assim, para obter $f(x) < g(x)$, com $x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < -3$, m deve ser 0, conforme a representação a seguir.



A atividade **3** é resolvida de maneira semelhante à anterior, considerando as funções f e g dadas, respectivamente, por $f(x) = \log_2 (x + 4)$ e $g(x) = m$. Assim, $f(x) > g(x)$ terá apenas valores positivos para $m = 2$, conforme a imagem a seguir.



IMAGENS: REPRODUÇÃO/GEOGEBRA

A seção **Conexões com...** traz informações que envolvem o uso de medicamentos por conta própria, seu uso incorreto e sua relação com a saúde dos jovens. Um dos objetivos da seção é levar os estudantes a refletir sobre o tema e agir com responsabilidade e ética, desenvolvendo as competências gerais 8 e 10. Ao interpretar textos como o dessa seção, os estudantes têm contato com a competência específica 1 da área de Matemática e suas Tecnologias e com o Tema Contemporâneo Transversal Saúde.

As questões propostas levam os estudantes à investigação e à reflexão sobre o tema abordado, colaborando para a competência geral 2.

Na atividade **1**, espera-se que os estudantes compreendam os riscos da automedicação a fim de resolver um problema de saúde de maneira rápida ou interferir na estética do corpo. Como sugestão, compartilhar a cartilha disponível em https://portal.fiocruz.br/sites/portal.fiocruz.br/files/documentos/USO%20CORRETOcartilha_final.pdf (acesso em: 8 out. 2024), que traz informações sobre o uso correto de medicamentos.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Na atividade **2,** deve-se considerar que $M_0 = 500$ e $M(t) = 90$. Logo:

$$90 = 500 \cdot 0{,}5^t \Rightarrow 0{,}5^t = 0{,}18 \Rightarrow t = \frac{\log 0{,}18}{\log 0{,}5} =$$

$$= \frac{\log 0{,}18}{\log 2^{-1}} = \frac{\log 0{,}18}{-1 \cdot \log 2} \simeq \frac{-0{,}74}{-1 \cdot 0{,}3} \simeq 2{,}47$$

Portanto, a quantidade da droga será igual a 90 mg após 2,47 horas, ou seja, aproximadamente 2 horas e 28 minutos da ingestão de 500 mg do medicamento.

A atividade **3** propõe uma pesquisa de alguns transtornos alimentares: anorexia e bulimia. Essa pesquisa pode ser realizada em parceria com o professor do componente curricular Biologia da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Sugere-se que os estudantes, organizados em grupos, preparem um roteiro de vídeo com as informações obtidas para divulgar aos colegas da escola. Esse vídeo pode conter gráficos, dados estatísticos, definições relacionadas a termos da saúde etc. Para obter mais materiais a respeito de transtornos alimentares, pode-se consultar o *site* https://astralbr.org/ (acesso em: 8 out. 2024), da Associação Brasileira de Transtornos Alimentares.

A seção **História da Matemática** apresenta um pouco da história de como surgiram os logaritmos, possibilitando o reconhecimento da Matemática como uma ciência construída pelo ser humano e influenciada por questões da sociedade. Sugere-se complementar a seção citando Briggs, que deu continuidade aos estudos de Napier.

O matemático inglês Henry Briggs (1561-1630) foi o primeiro a reconhecer a importância dos logaritmos de Napier. Briggs visitou Napier em 1615, na Escócia, e discutiram algumas alterações no método dos logaritmos. O texto a seguir traz algumas informações sobre esses estudos.

> […]
>
> Levando em conta a iniciativa das ideias e das descobertas de Neper e Briggs, podemos afirmar que os logaritmos tiveram pouco sucesso, mas em meio a condições da época efetuou-se de maneira rápida e extensa, no entanto, não foi tão adquirido pelas circunstâncias; os meios de comunicação eram muito lentos, pouco numerosos e não eram certos. Os livros viajavam apenas com as mercadorias transportadas para o meio de grandes feiras, numa data marcada, e em lugares bem determinados, que limitavam as possibilidades de indicá-los. Apesar das dificuldades enfrentadas, esses trabalhos foram alvo de pesquisas para a ampliação de avanços tecnológicos, no qual levaram cientistas, professores e analistas a estudar esse instrumento de muita significância para o progresso científico.
>
> […]

NAUX, 1971 *apud* SOARES, Evanildo C. **Uma investigação histórica sobre os logaritmos com sugestões didáticas para a sala de aula**. 2011. Dissertação (Mestrado em Ciências Naturais e Matemática) – Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2011. p. 62. Disponível em: https://repositorio.ufrn.br/jspui/bitstream/123456789/16070/1/EvanildoCS_DISSERT.pdf. Acesso em: 8 out. 2024.

Essa seção valoriza conhecimentos historicamente construídos, trabalhando estratégias e conceitos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, como descreve a competência geral 1 e a competência específica 1 da área de Matemática e suas Tecnologias.

Avaliação

A atividade **4** da **Abertura** do Capítulo permite uma avaliação diagnóstica da habilidade a seguir, trabalhada no Capítulo **Função exponencial**, Capítulo **5**, Volume **1**.

(**EM13MAT304**) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.

A seguir, sugestões de atividades cuja análise das resoluções pode contribuir para avaliar a evolução de cada estudante e orientar seus estudos.

1ª avaliação formativa: atividade **3** (página 121).
2ª avaliação formativa: atividades **11** e **13** (página 127).
3ª avaliação formativa: atividades **29** e **31** (página 134).
4ª avaliação formativa: atividades **38** e **41** (página 137).

Capítulo 5 Razões trigonométricas na circunferência

Orientações

Neste Capítulo, ocorre a ampliação das noções relacionadas à Trigonometria no triângulo retângulo para a circunferência trigonométrica, contribuindo para o desenvolvimento da competência específica 3 da área de Matemática e suas Tecnologias e, em específico, da habilidade EM13MAT308. O Capítulo trabalha com a aplicação das leis do seno e do cosseno para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos e com a elaboração e a resolução de situações que envolvem fenômenos periódicos.

As atividades propostas na **Abertura** do Capítulo podem promover um diálogo inicial sobre os conceitos que serão abordados e ampliados, contribuindo para sistematizar conhecimentos já adquiridos em relação a esses conceitos.

A seguir, sugestões de leitura que contribuirão para os planejamentos das aulas relacionadas às razões trigonométricas na circunferência.

- ZILKHA, Esther. **Utilização do GeoGebra na construção de instrumentos**: teodolito. 2014. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2014. Disponível em: https://impa.br/wp-content/uploads/2016/12/esther_zilkha.pdf. Acesso em: 8 out. 2024.
- 1001 INVENTIONS BRASIL. **Guia de atividades para o professor**: para Ensino Fundamental II e Médio. [*S. l.*]: 1001 Inventions Brasil, c2014. Disponível em: https://www.1001inventions.com/files/teachers_guide_brazil.pdf. Acesso em: 8 out. 2024.

  Material com diversas atividades sobre Ciência e Astronomia. Na página 23, há instruções para a construção de um astrolábio simples.
- OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS. Brincando com trigonometria: oficinas: obtendo medidas inacessíveis… *In*: OBMEP. **Clubes de Matemática da OBMEP**. Rio de Janeiro, 2020. Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/brincando-com-trigonometria-oficinas-obtendo-medidas-inacessiveis/. Acesso em: 8 out. 2024.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Nesse *site*, pode-se observar uma sequência de atividades práticas para explorar o uso da Trigonometria para o cálculo de medidas inacessíveis diretamente.

- NÓBREGA, Jorge Cássio C. **Aprendendo trigonometria com a plataforma GeoGebra**. [*S. l.*]: GeoGebra. *E-book*. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/M3vta5Uv. Acesso em: 8 out. 2024.

  É possível utilizar esse *e-book* ao longo do estudo deste Capítulo, por exemplo, solicitando aos estudantes que façam as atividades desse livro em casa, antes das aulas, para trabalharem a proposta de sala de aula invertida (metodologia ativa). Espera-se que, com isso, o uso da matemática dinâmica para investigar padrões e desenvolver conjecturas contribua para a construção e a apropriação de conhecimentos por parte dos estudantes, que podem desempenhar um papel autônomo em relação ao processo de aprendizagem.

No tópico **Medida angular e comprimento de arcos de circunferência**, ao trabalhar o boxe **Pense e responda**, espera-se que os estudantes compreendam que o comprimento de um arco depende do raio da circunferência, pois, quanto maior o raio, maior o comprimento do arco subtendido pelo mesmo ângulo central. Já a medida angular de um arco depende apenas do ângulo central dele. Por exemplo, na imagem apresentada no tópico, os arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{CD}$ indicados têm mesma medida angular, mas comprimentos diferentes.

No tópico **Radiano**, o objetivo do boxe **Pense e responda** é auxiliar os estudantes a compreender a definição de radiano e conseguir generalizá-la às aberturas de um ângulo central qualquer. Isso auxiliará no desenvolvimento da relação entre o grau e o radiano. O quarto item do boxe faz com que os estudantes verifiquem, experimentalmente, a equivalência de 1 radiano em grau.

No tópico **Relação entre grau e radiano**, uma resposta possível para a questão apresentada no primeiro boxe **Pense e responda** é dividir por 2 o valor em radiano e o valor em grau. Espera-se que os estudantes percebam a proporcionalidade existente nas relações, por exemplo: π é metade de 2π, então, para determinar o equivalente em grau, dividimos 360° por 2, obtendo 180°.

No segundo boxe **Pense e responda**, a resolução da atividade é dada por:

π rad ——— 180°

1 rad ——— x

$x = \frac{180°}{\pi} \approx 57{,}29°$

Caso estejam trabalhando com calculadora simples, é possível utilizar a aproximação $\pi = 3{,}14$. Nesse caso, o resultado obtido será 57,32.

A atividade **3** da seção **Atividades** é uma oportunidade para que os estudantes troquem ideias em duplas sobre as possibilidades de resolução. Ao compartilharem o raciocínio utilizado, os estudantes são convidados a revisitar e a explicar ao colega a resolução que fizeram. Com isso, a argumentação é trabalhada, e o estudante precisa encadear o raciocínio feito para conseguir explicar a resolução. Assim, é possível que os próprios estudantes percebam incorreções ao longo da execução da atividade ou confirmem o resultado obtido. Essa atividade contribui para o desenvolvimento da competência geral 4. Quanto ao resultado, alguns estudantes podem ter feito os cálculos em grau e, no final, transformaram-nos em radiano; já outros podem ter feito os cálculos usando os ângulos em radiano. A atividade **6** dessa seção faz uma relação com o relógio de pêndulo e pode oferecer uma oportunidade de aprofundamento em parceria com o professor de Física da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Sugere-se pedir aos estudantes que pesquisem um pouco mais os pêndulos para que descubram a importância de se expressar a medida de ângulos em radiano.

No tópico **Seno e cosseno de um arco**, o segundo boxe **Pense e responda** propõe retomadas das ideias de seno e de cosseno no triângulo retângulo para relacioná-las com as noções de seno e de cosseno de um arco. Essas definições coincidem para $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, pois todos os triângulos formados no 1º quadrante da circunferência trigonométrica são retângulos. Em seguida, são destacados os sinais que seno e cosseno assumem em função do quadrante no qual está localizada a extremidade do arco na circunferência trigonométrica. O terceiro boxe **Pense e responda** aborda os valores máximo e mínimo do seno e do cosseno na circunferência trigonométrica, além dos valores para pontos que estão sobre os eixos. Os valores máximo e mínimo do seno e do cosseno são, respectivamente, iguais a 1 e -1. Quando um ponto M está sobre o eixo x, o seno é zero, e o cosseno pode ser negativo ou positivo, dependendo da posição do ponto M. Quando um ponto M está sobre o eixo y, o seno pode ser negativo ou positivo, dependendo da posição do ponto M, e o cosseno é zero.

No trabalho com o tópico **Alguns valores do seno e do cosseno**, recomenda-se a animação disponível em http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri2014/modulo5/mod3_recursos/geogebra/circulo_trigo.html (acesso em: 8 out. 2024). Ela contribui para a visualização desses valores.

Durante a abordagem do tópico sobre **Redução ao primeiro quadrante**, o primeiro boxe **Pense e responda** propõe aos estudantes que analisem como fariam para determinar o seno e o cosseno de um arco de 150°. Incentive-os a compartilhar estratégias, contribuindo para o desenvolvimento da argumentação e da comunicação de ideias.

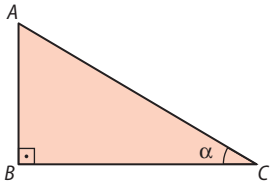
No segundo boxe **Pense e responda**, espera-se que os estudantes verifiquem que é possível afirmar que $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ pela congruência dos triângulos, que podem ser observados na figura indicada pela dica. Além disso, $\cos(\pi - \alpha)$ é um arco localizado no 2º quadrante, em que o sinal do cosseno é negativo. Como resposta para sen 150° e cos 150°, tem-se $\operatorname{sen} 150° = \operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}$ e $\cos 150° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Aproveitar essa oportunidade para incentivar os estudantes a compartilhar, entre si, o modo como refletiram para responder à questão proposta.

A atividade **37** da seção **Atividades** solicita aos estudantes que se reúnam em duplas para a execução dela. Além disso, oferece uma oportunidade de ampliação do universo cultural e artístico dos estudantes, colocando-os em contato com elementos matemáticos da cultura japonesa. É interessante propor uma exposição com a produção dos estudantes.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

No tópico **Tangente de um arco**, o primeiro item do boxe **Pense e responda** solicita que seja feita uma relação entre as definições de tangente no triângulo retângulo e na circunferência trigonométrica. Uma possibilidade para abordar essa relação é considerar um triângulo retângulo *ABC*, conforme a figura.

EDITORIA DE ARTE



Nesse triângulo, pode-se escrever, para um de seus ângulos agudos $\alpha\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$, as seguintes razões: $\operatorname{sen}\alpha = \frac{AB}{AC}$, $\cos\alpha = \frac{BC}{AC}$ e $\operatorname{tg}\alpha = \frac{AB}{BC}$.

Na razão $\operatorname{tg}\alpha = \frac{AB}{BC}$, dividindo-se numerador e denominador pela medida *AC* da hipotenusa, temos $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{AB}{AC}}{\frac{BC}{AC}} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$. Essas definições coincidem para $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, pois todos os triângulos formados no 1º quadrante da circunferência trigonométrica são retângulos. No segundo item do boxe **Pense e responda**, é possível afirmar que os triângulos *OM"M* e *OAT* são semelhantes pelo caso ângulo-ângulo, pois ambos são retângulos e possuem o ângulo α em comum.

No tópico **Alguns valores da tangente**, o boxe **Pense e responda** provoca algumas reflexões importantes sobre os valores que a tangente pode assumir. Espera-se que os estudantes concluam que não há um valor máximo nem um valor mínimo, pois ela cresce ou diminui indefinidamente. Além disso, quando o ponto *M* está sobre o eixo *x*, a tangente é zero, e quando está sobre o eixo *y*, a tangente não está definida.

No tópico **Redução ao primeiro quadrante**, o primeiro boxe **Pense e responda** propõe aos estudantes que discutam como fariam para determinar a tangente de $\frac{5\pi}{4}$. Espera-se que reconheçam a correspondência com $\frac{\pi}{4}$ e concluam que $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$, pois $\frac{5\pi}{4}$ é um arco do 3º quadrante.

Explorar a demonstração do tópico **Lei dos cossenos** é importante para que os estudantes compreendam o encadeamento das noções matemáticas envolvidas e desenvolvam a habilidade EM13MAT308. Destacar que essa lei pode ser aplicada a qualquer triângulo.

A atividade **55** da seção **Atividades** não tem solução, pois falta um dado. Uma sugestão é solicitar aos estudantes que façam mudanças necessárias para que a atividade possa ser resolvida. Feito isso, cada estudante deve solicitar a um colega de turma que resolva a atividade modificada. Por fim, o estudante que a elaborou e o estudante que a resolveu devem discutir se a resolução está correta.

O trabalho no tópico **Lei dos senos** contribui para a habilidade EM13MAT308. O boxe **Pense e responda** solicita a demonstração da lei dos senos para triângulos obtusângulos. Note que $\varphi = \pi - \alpha$, pois ambos são ângulos inscritos na circunferência, e as extremidades de seus arcos são os pontos *B* e *C*, logo:

$\operatorname{sen}\varphi = \operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$

Pelo triângulo *BCD*, retângulo em *C*, temos que $\operatorname{sen}\varphi = \frac{a}{2R}$. Desse modo, temos:

$\operatorname{sen}\varphi = \frac{a}{2R} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{2R} \Rightarrow 2r = \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}$

De modo análogo, demonstra-se que $2r = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta}$ e $2r = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$.

O boxe **Fórum** propõe um debate que busca contribuir para o desenvolvimento da competência geral 7 e do Tema Contemporâneo Transversal Educação ambiental. Para incentivar a troca de ideias, pode-se apresentar dois episódios dos cinco da série **Cerrado Sem Fogo 2024**, publicada pelo Canal Rural e disponível em https://www.youtube.com/watch?v=ldrCioKeUAU (acesso em: 8 out. 2024). O quarto episódio (Os impactos dos incêndios florestais na produção agrícola), com duração de cerca de 6 minutos, mostra a grave situação que foram as queimadas no Brasil em 2024. Com quase 70000 focos de incêndio registrados em agosto, houve um aumento de 144% em relação ao ano anterior. O segundo episódio (Os impactos ao Meio Ambiente), com duração de cerca de 5 minutos, retrata as consequências das queimadas que destroem a vegetação, causando danos irreparáveis ao solo, aos animais e a todos os seres vivos que dependem desse bioma.

Em relação à atividade proposta, os estudantes podem criar campanhas de sensibilização com o objetivo de informar os impactos negativos das queimadas sobre o meio ambiente, a biodiversidade e a qualidade do ar. Essas campanhas podem incluir palestras, *workshops* e exibições de documentários para a comunidade escolar. Além disso, eles podem atuar em mutirões de limpeza de áreas afetadas, com atividades de reflorestamento e restauração de ecossistemas degradados. Com essas práticas, pode-se promover alternativas sustentáveis, tanto na escola quanto na comunidade local, como o uso de técnicas agrícolas mais sustentáveis, o manejo florestal comunitário e o estímulo ao uso de energias renováveis, por exemplo.

A seguir, dois *sites* que podem contribuir para o debate e o desenvolvimento da atividade.

- BRASIL. Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação. Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais. **Programa Queimadas do Inpe**: BDQueimadas. São José dos Campos: Inpe, c2024. Disponível em: https://terrabrasilis.dpi.inpe.br/queimadas/bdqueimadas/. Acesso em: 8 out. 2024.
  BD Queimadas dá acesso ao acervo de focos de todos os satélites recebidos pelo Inpe desde 1998, com imagens, dados meteorológicos e limites políticos oficiais.
- SOS MATA ATLÂNTICA. Itu, c2024. *Site*. Disponível em: https://www.sosma.org.br/. Acesso em: 8 out. 2024.
  SOS Mata Atlântica busca engajar as pessoas em prol da recuperação da floresta, da valorização dos parques e das reservas, da conservação da água limpa e da proteção do mar na Mata Atlântica.

A seção **Conexões com...** oferece possibilidades interessantes para explorar temas diversos e promover a interdisciplinaridade, quando possível. Contribui também para o desenvolvimento da comunicação em diferentes linguagens, do senso crítico e da argumentação, capacidades essenciais para a participação cidadã dos estudantes, relacionadas às competências gerais 1, 2, 4 e 7. Nesse caso, são apresentados quatro textos que remetem às modalidades de ciclismo que integraram os Jogos Olímpicos.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Na atividade **1**, propor aos estudantes que pesquisem espaços, na cidade onde moram, para a prática de atividades com bicicleta. Se não houver, sugerir que pensem em formas de solicitar ao poder público a construção de espaços como esses. Essa atividade pode ser desenvolvida em um trabalho integrado com os professores da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. Destacar a questão da cidadania na busca por soluções para a comunidade. Comentar com os estudantes acerca do ciclismo como esporte e como expressão das culturas juvenis.

Na atividade **2**, sugere-se realizar um trabalho com o professor de Física, da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, para falar sobre atrito, velocidade, aerodinâmica e aderência do pneu ao solo. Esse trabalho favorece o desenvolvimento da competência específica 2 da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

Na atividade **3**, espera-se que os estudantes associem o aro da bicicleta ao comprimento da circunferência do pneu. Se possível, levar uma bicicleta de aro 26 para a sala de aula e realizar, com os estudantes, a medição do comprimento externo do pneu. A resposta esperada é aproximadamente 207,4 cm.

Resolução da atividade **4**:

Como $\alpha = 23°$ e $\beta = 110°$, então $\gamma = 47°$. Da lei dos senos, temos:

$$\frac{AB}{\text{sen } 47°} = \frac{BC}{\text{sen } 23°} \Rightarrow \frac{2}{0{,}73} = \frac{BC}{0{,}39} \Rightarrow BC \simeq 1{,}1$$

$$\frac{AB}{\text{sen } 47°} = \frac{AC}{\text{sen } 110°} \Rightarrow \frac{2}{0{,}73} = \frac{AC}{0{,}94} \Rightarrow AC \simeq 2{,}6$$

Portanto, as medidas são $BC \simeq 1{,}1$ metro e $AC \simeq 2{,}6$ metros.

A seção **Explorando a tecnologia** é uma oportunidade para promover o aprofundamento de conhecimentos matemáticos associados ao uso de recursos tecnológicos disponíveis e da linguagem digital, proporcionando novas formas de resolver uma atividade. Dessa maneira, é possível favorecer o desenvolvimento da competência geral 4 e das competências específicas 3 e 4 da área de Matemática e suas Tecnologias ao promover uma experiência que faz uso de tecnologia para facilitar a aprendizagem. Se possível, desenvolver a atividade em uma sala de informática, com os estudantes reunidos em duplas, para promover a troca de ideias.

Avaliação

A atividade **4** da **Abertura** do Capítulo permite uma avaliação diagnóstica da seguinte habilidade trabalhada no Ensino Fundamental – Anos Finais.

(**EF09MA11**) Resolver problemas por meio do estabelecimento de relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência, fazendo uso, inclusive, de *softwares* de geometria dinâmica.

A seguir, sugestões de atividades cuja análise das resoluções pode contribuir para avaliar a evolução de cada estudante e orientar seus estudos.

1ª avaliação formativa: atividades **2** e **7** (páginas 153 e 154, respectivamente).

2ª avaliação formativa: atividades **9** e **12** (página 160).

3ª avaliação formativa: atividades **19** e **31** (páginas 167 e 168, respectivamente).

4ª avaliação formativa: atividades **41** e **47** (página 172).

5ª avaliação formativa: atividades **57**, **61** e **70** (páginas 175, 177 e 181, respectivamente).

Capítulo 6 Funções trigonométricas

Orientações

O Capítulo proporciona o estudo de fenômenos periódicos, como as fases e os calendários lunares, permitindo aos estudantes que tenham contato com conhecimentos historicamente construídos, o que reforça o desenvolvimento de uma abordagem interdisciplinar que envolve a competência geral 1 e a competência específica 2 da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Além disso, o uso de estratégias e conceitos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, promovendo o estudo das funções trigonométricas aplicadas à resolução de problemas, contribui para o desenvolvimento da competência específica 3 da área de Matemática e suas Tecnologias, habilidade EM13MAT306.

O tema da **Abertura** do Capítulo pode ser explorado com os professores da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, podendo ser desenvolvidos aspectos da competência específica 2 dessa área, e com os professores da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, podendo ser desenvolvida a competência específica 1 dessa área. Uma sugestão é propor investigações em relação à cultura de povos indígenas e ao conhecimento utilizado por eles no dia a dia. Pode-se também ampliar a pesquisa para outros povos em diferentes tempos e espaços.

Na atividade **1**, espera-se que os estudantes reconheçam a Astronomia como a Ciência que estuda o Universo e os corpos celestes, com a finalidade de situá-los no espaço e no tempo, além de buscar explicar seus movimentos e seu funcionamento.

Na atividade **2**, a pesquisa sobre o significado do termo **período** vai ajudar os estudantes a perceber que esse termo significa a repetição de um fato dentro de um intervalo de tempo determinado.

No trabalho com a atividade **3**, destacar que muitas culturas possuem crenças e tradições tendo as fases da Lua como referência, por exemplo: povos indígenas e povos asiáticos que utilizam calendários lunares. O debate deve ser promovido em sala de aula, para discutir crenças populares e conhecimento científico, sempre respeitando as características de cada cultura e ressaltando as semelhanças entre os saberes, colaborando, assim, com a competência geral 9. Esse debate pode contribuir para o desenvolvimento da competência geral 1, à medida que se valorizam os conhecimentos historicamente construídos para explicar a realidade.

Artigos e outros materiais que abordam a influência da Lua na agricultura também podem ser analisados pelos estudantes, como o artigo que trata do cultivo da cenoura, disponível em https://orgprints.org/27592/ (acesso em: 8 out. 2024).

No estudo do tópico **Funções periódicas**, é importante incentivar os estudantes a apresentar outros fenômenos periódicos, promovendo um diálogo sobre o que entendem a respeito do termo.

Para explorar a definição de função periódica, pode-se fazer uso de *softwares* que permitem obter os gráficos dessas funções, de modo que os estudantes comparem o comportamento de cada uma delas. Neste momento, não é necessário explorar qual é a lei de formação da função cujo gráfico é analisado, mas sim possibilitar aos estudantes a visualização gráfica.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

No tópico **Função seno**, é interessante realizar, com os estudantes, o experimento com um sistema massa-mola para ilustrar um fenômeno periódico modelado por uma função seno. A intenção não é fazê-los compreender todos os elementos que compõem a função da velocidade de um oscilador harmônico simples, mas sim entender que a função seno pode ser utilizada na modelagem de fenômenos com essas características. Se possível, alinhar esse conteúdo com os professores da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade EM13MAT101.

Para analisar a velocidade do oscilador harmônico, podem-se utilizar *softwares* de matemática dinâmica a fim de simular o comportamento da função velocidade em questão. Uma sugestão é, utilizando o GeoGebra, criar três controles deslizantes, w, A e b, e obter o gráfico da função definida por $v(t)$, dada por $v(t) = -w \cdot A \cdot \text{sen}\,(w \cdot t + b)$. Em seguida, criar um ponto B relacionado ao gráfico (no GeoGebra, isso pode ser feito com o botão **Ponto em objeto**, por exemplo) e criar a reta y (que passa por B e é perpendicular ao eixo vertical) e o ponto C (intersecção dessa reta com o eixo vertical). Sugere-se manter a reta y invisível e manter visível apenas o segmento $\overline{BC}$. Com essa construção no *software*, é possível simular e analisar diferentes funções da velocidade do oscilador harmônico e explorar o conteúdo, relacionando-o às funções trigonométricas, particularmente à função seno.

Na abordagem do tópico **Gráfico da função cosseno**, incentivar os estudantes a reconhecer diferenças e similaridades em relação ao gráfico da função seno. Um quadro com as observações dos estudantes pode ser feito para ajudá-los nessa visualização. Uma sugestão para comparação é utilizar recursos, como *softwares* de matemática dinâmica, para obter o gráfico, por exemplo, de $f(x) = \text{sen}\ x$ e de $g(x) = \cos x$. Verificar se os estudantes percebem o conjunto imagem de cada função, o período, as raízes, os valores do domínio em que $f(x) = g(x)$ etc.

O tópico **Equações trigonométricas** pode ser trabalhado coletivamente e por meio da análise gráfica em um primeiro momento. Motivar os estudantes a resolver a equação do item **a** do exemplo, incentivando-os a compartilhar os resultados e a argumentar a estratégia utilizada. O mesmo pode ser feito com os demais itens. Os recursos tecnológicos, como calculadora científica ou *softwares* de matemática dinâmica, são recomendados para o desenvolvimento. Os estudantes também podem ter acesso a uma tabela trigonométrica, por exemplo.

O boxe **Fórum** apresenta uma oportunidade para que os estudantes pesquisem e promovam discussões com seus colegas sobre o papel da Matemática na descrição e na compreensão de fenômenos, complementando aquilo que vem sendo apresentado em exemplos ao longo deste Capítulo, como o estudo das marés, por exemplo.

Sugere-se organizar pequenos seminários e promover um momento de exposição das ideias dos estudantes. É interessante que eles reflitam e exponham suas impressões sobre o papel da Matemática e suas contribuições para a compreensão de fenômenos da natureza, da sociedade e do ser humano. Essa ocasião também favorece o desenvolvimento das competências gerais 2 e 5 e da competência específica 3 da área de Matemática e suas Tecnologias.

Como material complementar sobre modelos matemáticos, sugere-se o disponível em http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/pdfs/modelos.pdf (acesso em: 8 out. 2024). Nesse material, o autor explora a maneira como a Matemática é aplicada em diferentes áreas.

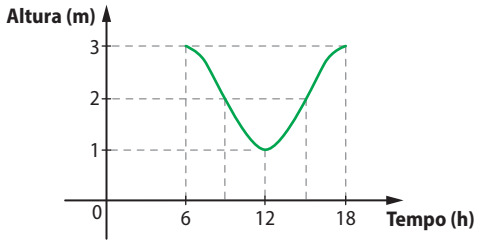
A seção **Conexões com...** explora o movimento das marés. Pode-se propor um trabalho integrado com os professores da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, por exemplo, retomando a situação da influência da Lua explorada inicialmente na **Abertura** deste Capítulo, desenvolvendo, assim, a competência específica 2 dessa área, as competências específicas 1 e 3 da área de Matemática e suas Tecnologias e a habilidade EM13MAT306.

Espera-se que, na atividade **1**, os estudantes respondam que os movimentos das marés têm relação com a Lua e com o Sol, conforme apontado no texto.

Na atividade **2**, pode-se incentivar os estudantes a pesquisar o tema e espera-se que respondam que o conhecimento sobre o movimento das marés auxilia o profissional citado a definir parâmetros, como velocidade e distância entre as embarcações, evitando acidentes, como colisões entre navios, e prejuízos a pessoas e cargas, por exemplo. Também é possível propor uma pesquisa sobre a temática para favorecer o desenvolvimento do Tema Contemporâneo Transversal Ciência e Tecnologia, incentivando os estudantes a realizar atividades que relacionem os conhecimentos matemáticos e o desenvolvimento tecnológico e científico. A dissertação de mestrado profissional disponível em http://www.bdtd.ufrr.br/tde_arquivos/7/TDE-2015-06-19T045317Z-235/Publico/JoerkdaSilvaOliveira.pdf (acesso em: 8 out. 2024) traz aplicações da Trigonometria em diversas áreas do conhecimento, como Ciências Econômicas, Engenharia Civil, Astronomia, Ciências Biológicas e outras. O trabalho com projetos de pesquisa relacionados a esses temas favorece o desenvolvimento da habilidade EM13MAT101.

Na atividade **3**, espera-se que os estudantes descubram que determinadas atividades turísticas dependem das tábuas de maré.

Na atividade **4**, a lei de uma função que expressa o que está descrito é $h(t) = 2 + \cos(2t)$, sendo $h(t)$ a altura da maré, em metro, e t a hora do dia em que a altura foi registrada. O esboço do gráfico dessa função é mostrado a seguir.



EDITORIA DE ARTE

A seção **Explorando a tecnologia** é uma oportunidade de promover o aprofundamento de conhecimentos matemáticos associados ao uso de recursos tecnológicos e de contribuir para o desenvolvimento das competências gerais 2 e 5.

Nesse caso, propõe-se uma investigação sobre as alterações que ocorrem nos gráficos das funções seno e cosseno em função das mudanças em seus parâmetros. A utilização de um *software* de matemática dinâmica, como o GeoGebra, além de promover a aproximação com o Tema Contemporâneo Transversal Ciência e Tecnologia, justifica-se pela possibilidade de a atividade cumprir os objetivos de aprendizagem relacionados ao tópico das funções trigonométricas, ampliando as compreensões e incorporando novos hábitos de pensamento, além de utilizar diferentes tipos de representação matemática na busca por soluções, conforme preconiza a competência específica 4 da área de Matemática e suas Tecnologias.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Uma sugestão é reunir os estudantes no laboratório de informática, organizando-os em duplas, e orientá-los a acompanhar o passo a passo descrito no Livro do estudante. Após a criação dos controles deslizantes, na atividade **1**, espera-se que os estudantes descrevam a translação vertical do gráfico da função seno. A curva em si não se altera, mas se desloca de cima para baixo, conforme se movimenta o controle *a*.

Na atividade **2**, espera-se que os estudantes notem que há mudanças na amplitude vertical da função cosseno, conforme se movimenta o controle *b*. Quando $b = 0$, o gráfico se torna uma reta sobre o eixo *x*, representando a função constante $y = 0$. Outras explorações podem ser propostas, como manter o controle *a* fixo em 0 e variar o controle *b* para a função seno.

Incentivar que os estudantes explorem mais os controles e registrem suas conclusões.

Avaliação

As atividades da **Abertura** do Capítulo conduzem os estudantes a interpretar criticamente um fenômeno relativo às Ciências da Natureza que envolve variação entre grandezas. Elas possibilitam, ao mesmo tempo, incentivar e avaliar o desenvolvimento da seguinte habilidade já trabalhada no Ensino Médio, como no Capítulo **Introdução às funções e função afim**, Capítulo **3**, Volume **1**.

(**EM13MAT101**) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

As atividades propostas na seção **Explorando a tecnologia** podem ser utilizadas como avaliação formativa. Para isso, solicitar aos estudantes o registro das conclusões deles, que podem dar indícios da compreensão desenvolvida por eles na exploração do tópico e do conteúdo deste Capítulo, bem como fornecer subsídios para eventuais retomadas de temas que precisam ser mais bem trabalhados.

A seguir, sugestões de outras atividades cuja análise das resoluções pode contribuir para avaliar a evolução de cada estudante e orientar seus estudos.

1ª avaliação formativa: atividades **1** (item **d**) e **10** (página 198).

2ª avaliação formativa: atividades **13** (item **b**) e **18** (página 203).

3ª avaliação formativa: atividades **26** e **36** (páginas 206 e 207, respectivamente).

Capítulo 7 Áreas

Orientações

Neste Capítulo, são estudadas e retomadas as áreas de figuras geométricas planas, com base em situações-problema atreladas a questões sociais e ambientais, conforme sugerido na competência específica 2 da área de Matemática e suas Tecnologias, habilidade EM13MAT201. A análise da variação da área e do perímetro de polígonos regulares em função das medidas dos lados amplia o repertório dos estudantes, estabelecendo conexões entre a Geometria e a Álgebra, desenvolvendo a competência específica 5, da área de Matemática e suas Tecnologias, habilidade EM13MAT506. O trabalho com os polígonos regulares que permitem o ladrilhamento do plano é abordado, e os estudantes são novamente convidados a investigar, debater, levantar as hipóteses, confrontá-las e validá-las coletivamente, como previsto na competência específica 5 da área de Matemática e suas Tecnologias, habilidade EM13MAT505.

A **Abertura** do Capítulo explora questões relacionadas à moradia no Brasil. Sugere-se conversar com os estudantes sobre os mutirões de construção de moradias populares, o apoio de organizações não governamentais (ONGs) e os programas do governo voltados para o auxílio na construção e/ou reforma de moradias. Nos mutirões, grupos de voluntários se reúnem em prol do bem comum. Explorar esse tipo de conteúdo e atitude pode favorecer o desenvolvimento de solidariedade e empatia, relacionadas às competências gerais 9 e 10.

A partir da leitura do texto e da discussão das questões propostas, os estudantes podem compartilhar ideias e experiências com o grupo, além de refletir sobre o tema, contribuindo para o desenvolvimento da competência específica 2 da área de Matemática e suas Tecnologias, habilidade EM13MAT201.

Na atividade **1**, o objetivo é que os estudantes conheçam o trabalho de diferentes ONGs, especialmente aquelas que incentivam comunidades carentes a construir suas moradias, muitas vezes por meio de mutirões.

A atividade **2** oferece muitas possibilidades de respostas, mas o foco da discussão pode estar no fato de que as especificações existem para garantir que todas as pessoas atendidas pelo programa recebam a mesma ajuda. Além disso, essa regulamentação e essa padronização das construções residenciais asseguram que os orçamentos sejam respeitados e que não sejam construídas moradias inadequadas, como muito pequenas ou inacessíveis. Outro ponto a ser destacado é a necessidade de a planta da moradia ser aprovada e assinada por engenheiros, além de outros trâmites de regulamentação. Por esses motivos, erigir construções com base em uma planta única pode otimizar esses projetos e essas ações sociais.

Na atividade **3**, é interessante discutir os benefícios do voluntariado tanto para quem oferece o serviço quanto para quem recebe a ajuda. Conversar com os estudantes sobre ações que podem ser desenvolvidas e incentivá-los a se envolver em causas como essas. Alguns exemplos que podem servir de inspiração incluem: ler histórias em creches municipais, visitar asilos para conversar ou jogar jogos com os idosos e organizar campanhas de arrecadação de agasalhos para doação a instituições. É importante destacar que o voluntariado é acessível a todos, pois há diversas maneiras de colaborar, não se limitando a doações financeiras. Essa abordagem contribui para o desenvolvimento do Tema Contemporâneo Transversal Vida Familiar e Social e da competência geral 9.

Na atividade **4**, espera-se que os estudantes concluam que, em ambos os casos, basta multiplicar a largura pelo comprimento de cada cômodo, podendo destacar que, no caso de um cômodo quadrado, essas medidas são iguais.

A finalidade do tópico **Introdução** é apresentar um método para calcular a área de uma superfície plana cujo formato não pode ser associado a uma figura poligonal, contribuindo para o desenvolvimento da competência específica 3 da área de Matemática e suas Tecnologias, habilidade EM13MAT307.

No tópico **Área de polígonos**, há uma ilustração de um grafite chamado **Triunfo**, da artista brasileira Gugie Cavalcanti. Ela é graduada em Artes Visuais pelo Centro de Artes da Udesc e suas diretrizes abordam os processos de criação de afetos. Para mais informações, consultar: https://gugiecavalcanti.com/ (acesso em: 8 out. 2024). O grafite é um tema

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

da cultura juvenil presente em todos os estados brasileiros. Por isso, recomenda-se promover um diálogo com os estudantes, explorando essa imagem ou outros grafites.

Contextualizar a aprendizagem utilizando temas da cultura juvenil, como interesses culturais, paixões, percepções e linguagens artísticas, contribui para construção de uma relação afetiva entre quem aprende e o que é aprendido, estabelecendo uma interação propícia à aprendizagem. Assim, torna-se necessária a inserção desses temas no currículo e no cotidiano escolar. Trabalhar com a cultura juvenil, entendida como um conjunto de significados e comportamentos construídos a partir dos diferentes contextos sociais e culturais dos quais fazem parte, enriquece o processo de construção do conhecimento.

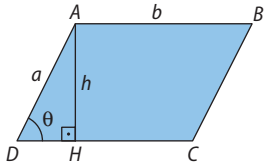
Para uma revisão sobre áreas, recomenda-se utilizar o simulador virtual **Área de Figuras Planas**, disponível em https://www.geogebra.org/m/J6A674XR (acesso em: 8 out. 2024). É possível utilizá-lo ao longo de todo este Capítulo, solicitando aos estudantes que façam as atividades em casa antes da aula, trabalhando com a proposta de sala de aula invertida, ou, ainda, em pequenos grupos, em estações de trabalho distintas. Ambas as abordagens fazem parte das metodologias ativas, que têm como proposta colocar o estudante no centro do processo de ensino-aprendizagem, permitindo que realize atividades e reflexões de forma autônoma.

O uso de um *software* de matemática dinâmica contribui para a investigação de padrões e para o desenvolvimento de conjecturas, colocando o estudante como protagonista de seu aprendizado. Embora o desenvolvimento das expressões de áreas no material do *site* citado possa não coincidir exatamente com o apresentado no Livro do estudante, os resultados obtidos são os mesmos. Explorar essa diferença permite aos estudantes perceberem que alguns resultados podem ser alcançados por mais de um modo. É interessante abrir uma discussão na sala de aula para verificar qual dos métodos os estudantes preferem e qual foi a forma mais eficaz de compreender o conteúdo, incentivando-os a refletir sobre suas aprendizagens.

Recomenda-se a leitura do artigo "A área via composição e decomposição de figuras planas: uma experiência com a argumentação em sala de aula", disponível em http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/6915_3324_ID.pdf (acesso em: 8 out. 2024). O artigo menciona a estratégia de composição e decomposição de figuras para o cálculo de áreas, além do uso da argumentação em Matemática.

No tópico **Área do paralelogramo**, espera-se a seguinte demonstração no boxe **Pense e responda**.

A área do paralelogramo a seguir é $S = b \cdot h$ (I).



Utilizando a relação trigonométrica seno no triângulo retângulo *ADH*, obtemos:

$\operatorname{sen}\theta = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a \cdot \operatorname{sen}\theta$

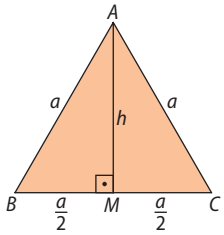
Substituindo o valor de *h* em (I), temos:

$S = b \cdot a \cdot \operatorname{sen}\theta$

No tópico **Área do triângulo equilátero**, espera-se a seguinte demonstração no boxe **Pense e responda**.

Considere o triângulo equilátero *ABC* com lado de medida *a* indicado na figura a seguir. O segmento $\overline{AM}$, de medida *h*, é a altura relativa ao lado $\overline{BC}$.

Usando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo *AMB*, temos:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

$a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow h^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Substituindo o valor de *h* na expressão da área, temos:

$S = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{a \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Portanto, a área *S* do triângulo equilátero de lado de medida *a* é dada por $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

O boxe **Fórum** abre espaço para que os estudantes reflitam e debatam temas relevantes para a vida em sociedade. O texto apresentado aborda a discussão sobre hortas comunitárias. Sugere-se uma leitura coletiva do texto, seguida de uma roda de conversa sobre a importância de hortas comunitárias. As questões propostas estão no âmbito pessoal e, dessa maneira, incentivam o posicionamento dos estudantes, além de promover a reflexão e a argumentação com base em dados confiáveis.

O Tema Contemporâneo Transversal Vida Familiar e Social pode ser desenvolvido por meio do trabalho proposto nesse boxe, uma vez que as hortas comunitárias representam uma alternativa para famílias de baixa renda. Além disso, é possível discutir questões relacionadas à alimentação saudável, aos produtos orgânicos e à ocupação produtiva de áreas abandonadas nas grandes cidades, o que abre espaço para o desenvolvimento das competências gerais 7, 9 e 10, além da competência específica 2 da área de Matemática e suas Tecnologias, habilidade EM13MAT201.

Para complementar a discussão, sugere-se assistir à reportagem realizada pela TV Unesp com um grupo de mulheres residentes na cidade de Bauru (SP). O vídeo está disponível em https://www.youtube.com/watch?v=TdeKbPF0OiA (acesso em: 8 out. 2024).

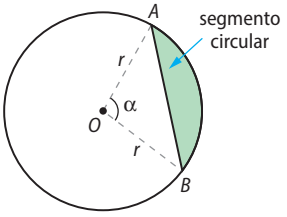
No tópico **Área do círculo**, os estudantes podem explorar seus conhecimentos sobre a área do paralelogramo para obter a expressão que determina a área do círculo, desenvolvendo, assim, a competência específica 3 da área de Matemática e suas Tecnologias, habilidade EM13MAT307. É importante verificar e explorar com eles que, quanto maior o número de setores em que o círculo for dividido, melhor será a aproximação sugerida. Se julgar conveniente, pode-se explorar a ideia de que, quando esse número tende ao infinito, a área do círculo coincide com a área do paralelogramo de base medindo πr e altura *r*. Para complementar o trabalho sobre a área do círculo, pode-se utilizar o conteúdo disponível em https://www.geogebra.org/m/J6A674XR (acesso em: 8 out. 2024), já sugerido para o cálculo de áreas de polígonos.

No tópico **Área da coroa circular**, no boxe **Pense e responda**, os estudantes são incentivados a pesquisar a definição de segmento circular e, a partir dela, precisam, em pequenos grupos, determinar como calcular a área de um segmento circular, desenvolvendo, assim, a competência específica 3 da área de Matemática e suas Tecnologias, habilidade EM13MAT307.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Para o primeiro item desse boxe, espera-se que os estudantes compreendam que o segmento circular é a região compreendida entre uma corda que passa por dois pontos *A* e *B* de uma circunferência e um arco da circunferência com extremidades nesses mesmos pontos, conforme indicado na figura a seguir.

EDITORIA DE ARTE



Para o segundo item, os estudantes podem perceber que a área *S* de um segmento circular é dada pela diferença entre a área do setor circular e a área do triângulo isósceles *AOB*. Assim: $S = S_a - S_{\triangle AOB}$.

No tópico **Elementos de um polígono regular inscrito em uma circunferência**, são apresentados e retomados conceitos fundamentais para o estudo da variação da área e do perímetro de polígonos regulares em função do comprimento de seus lados. Se considerar pertinente, explorar a relação da medida do ângulo interno em um polígono regular de *n* lados, traçando todas as diagonais que partem de um mesmo vértice, o que decompõe o polígono em $n - 2$ triângulos. A medida do ângulo central de um polígono regular também pode ser demonstrada com base na decomposição do polígono regular de *n* lados em *n* triângulos congruentes, sendo um dos vértices deles o centro da circunferência circunscrita e os outros dois vértices consecutivos do polígono.

No tópico **Relações métricas nos polígonos regulares**, são apresentadas e revisitadas relações essenciais para o aprofundamento do tema. No boxe **Pense e responda**, os estudantes precisam analisar a figura dada no texto e identificar as propriedades dos triângulos retângulos isósceles. Eles poderão perceber que o triângulo *ODA* é retângulo e isósceles. Assim, o segmento de reta $\overline{OM}$ é, ao mesmo tempo, altura relativa ao lado $\overline{AD}$ e bissetriz do ângulo reto. Logo, o ângulo $D\hat{O}M$ mede 45°, assim como o ângulo $O\hat{D}M$. Dessa forma, o triângulo *DOM* é isósceles, e, portanto, $\overline{DM}$ e $\overline{OM}$ são congruentes. De maneira análoga, é possível provar que $\overline{MA}$ é congruente a $\overline{OM}$. Decompondo qualquer outro polígono regular em triângulos cujos vértices são o centro da circunferência e dois vértices consecutivos do polígono regular (como realizado com o quadrado), percebe-se que tais triângulos serão isósceles e não retângulos. Portanto, essa propriedade é exclusiva dos quadrados.

No tópico **Variação no perímetro e na área de um polígono regular**, as representações gráficas propostas na obra aprofundam a análise das relações entre área, perímetro e medidas de lados de polígonos regulares, desenvolvendo a competência específica 5 da área de Matemática e suas Tecnologias, habilidade EM13MAT506. Sugere-se apresentar a atividade sobre áreas e perímetros de triângulos semelhantes disponível em https://www.geogebra.org/m/xvxust6e (acesso em: 8 out. 2024). Pode-se solicitar aos estudantes que realizem previamente a atividade indicada e tragam as dúvidas para a aula, incentivando a investigação, a autonomia e o protagonismo no processo de aprendizagem.

No tópico **Ladrilhamento do plano**, estudar esse tema e conjecturar sobre as condições que permitem tal ladrilhamento contribuem para o desenvolvimento da competência específica 5 da área de Matemática e suas Tecnologias, habilidade EM13MAT505. Para complementar o estudo realizado nesse tópico, sugere-se o experimento sobre polígonos regulares e ladrilhos desenvolvido pelo Laboratório de Matemática Multimídia da Unicamp e disponível em https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1026 (acesso em: 8 out. 2024).

O tema da seção **Conexões com...** é a relevância da manutenção e da ampliação das áreas verdes em centros urbanos como forma de diminuir os impactos socioambientais da ação humana e colaborar para a melhoria das condições de vida no âmbito local, atendendo à competência específica 1 da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Sugere-se a leitura coletiva do texto em sala de aula e a abertura de uma discussão sobre a importância das áreas verdes, dos parques e das praças nas cidades. Refletir sobre o impacto do baixo índice de áreas verdes (IAV) nos grandes centros urbanos também é importante ao responder à atividade **1**, contribuindo para o desenvolvimento da competência específica 1 da área de Matemática e suas Tecnologias, habilidade EM13MAT104.

Para complementar o desenvolvimento dessa seção com os estudantes, pode-se propor que investiguem o IAV do município em que residem e de outros da região para compará-los. Eles também podem comparar esse índice com o de capitais dos estados brasileiros, por exemplo. Essa atividade de ampliação do conteúdo pode contribuir para o desenvolvimento das competências gerais 4 e 7.

Se julgar apropriado, pode-se propor atividades relacionadas ao tema desta seção junto aos professores da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, visando desenvolver a competência específica 1 dessa área. Um exemplo de atividade é solicitar aos estudantes que elaborem ações ou projetos com o objetivo de minimizar os impactos socioambientais, melhorando as condições de vida no local em que residem. Isso também possibilita o desenvolvimento do Tema Contemporâneo Transversal Vida Familiar e Social.

As atividades propostas na seção **Explorando a tecnologia** contribuem para o desenvolvimento das competências específicas 3 e 5 da área de Matemática e suas Tecnologias. Sugere-se realizar os procedimentos indicados de forma coletiva, incentivando os estudantes a justificar ou explicar os resultados obtidos.

Na atividade **1**, espera-se que os estudantes reflitam sobre o parâmetro *n* dado no enunciado e concluam que a condição de existência de um polígono é $n \geqslant 3$. Como os polígonos são definidos para $n \geqslant 3$ (sendo *n* o número de lados do polígono), ao inserir $n = 1$ ou $n = 2$, o programa não fornece uma construção válida.

Na atividade **2**, a figura construída será um triângulo equilátero, e os valores encontrados dependerão das medidas da figura desenhada pelo estudante. No item **d**, espera-se que os estudantes concluam que o valor calculado é igual ou muito próximo do valor fornecido pelo GeoGebra. É importante discutir com os estudantes as possíveis razões para discrepâncias, levando-os a concluir que essas diferenças podem estar associadas a aproximações feitas nos cálculos, erros de medição e arredondamento utilizado no *software*.

Na atividade **3**, espera-se que os estudantes observem que, quanto maior o número de lados de um polígono regular inscrito em uma mesma circunferência, maior a sua área.

A atividade **4** pretende levar os estudantes a concluir que, quanto maior o número de lados de um polígono, mais a figura se aproxima de um círculo. Isso também ocorre com as áreas: a área do polígono se aproxima do valor da área do círculo. Assim, o polígono regular de 200 lados

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

obtido ficará muito parecido com um círculo, com um valor da área aproximadamente igual a 3,14, que é o valor da área do círculo de mesmo raio da circunferência construída.

A seção **História da Matemática** contribui para o desenvolvimento da competência geral 1, pois abordar a história da Matemática permite aos estudantes compreenderem como alguns conhecimentos matemáticos se constituíram ao longo do tempo e como, ainda hoje, podem estar em permanente construção.

Avaliação

A atividade **4** da **Abertura** do Capítulo permite uma avaliação diagnóstica da seguinte habilidade trabalhada no Ensino Fundamental – Anos Finais.

(**EF08MA19**) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.

A seguir, sugestões de atividades cuja análise das resoluções pode contribuir para avaliar a evolução de cada estudante e orientar seus estudos.

1ª avaliação formativa: atividades **1** e **10** (páginas 225 e 226, respectivamente).

2ª avaliação formativa: atividades **16** e **18** (página 229).

3ª avaliação formativa: atividades **25** e **36** (páginas 236 e 237, respectivamente).

4ª avaliação formativa: atividade **39** (página 242).

Capítulo 8 Geometria Espacial de Posição

Orientações

O Capítulo faz uma introdução à Geometria Axiomática, explicando o que são axiomas, postulados, definições e teoremas e como eles se relacionam e são utilizados na construção de uma demonstração matemática. Para o estudo do Capítulo, é recomendado o uso de materiais pedagógicos que sirvam de modelos dos entes geométricos estudados, com o intuito de auxiliar a compreensão da turma e de estimular a investigação e a formulação de hipóteses. Ao formular hipóteses, os estudantes devem buscar contraexemplos para refutá-las e, quando necessário, procurar argumentos para validá-las, aplicando o método lógico-dedutivo da Matemática. Esse processo cognitivo contribui para o desenvolvimento da competência específica 5 da área de Matemática e suas Tecnologias.

As questões da **Abertura** do Capítulo procuram contextualizar o tema que será abordado, ao mesmo tempo que verificam os conhecimentos prévios dos estudantes, valorizando a diversidade de saberes e estimulando, assim, a competência geral 6.

Na atividade **1**, pretende-se investigar os conhecimentos dos estudantes com relação ao vocabulário usado no texto. Espera-se que identifiquem que a palavra "tridimensional" significa ter três dimensões: altura, comprimento e profundidade. Já a palavra "bidimensional" significa ter apenas duas dessas dimensões.

Na atividade **2**, explorar as respostas dos estudantes. Talvez alguns deles não conheçam a Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT). Nesse caso, indica-se uma visita ao *site* http://www.abnt.org.br (acesso em: 17 out. 2024). Espera-se que os estudantes indiquem que o desenho artístico é uma representação livre e pode ter diversas interpretações. Já o desenho técnico representa a forma, a dimensão e a posição de objetos seguindo normas e convenções, sem margem para interpretações diferentes. A precisão e a correção das informações transmitidas pelo desenho técnico são importantes, pois nem sempre quem fez o projeto estará presente para explicá-lo àquele que precisará interpretá-lo e executá-lo. Destacar, por exemplo, uma situação de uma construção: nem sempre o engenheiro ou o arquiteto estará presente na obra, mas os pedreiros e os demais trabalhadores devem saber ler o projeto corretamente.

A atividade **3** propõe uma pesquisa a ser feita pelos estudantes; para isso, é importante reforçar o uso de fontes confiáveis. As perspectivas citadas são as representações dos objetos como os vemos no mundo real, com a representação das suas três dimensões. Os principais tipos de perspectiva são: isométrica, cavaleira e cônica. A projeção é a representação dos objetos tridimensionais em duas dimensões, por meio de projeções (vistas). Existem três elementos importantes no estudo das projeções, que são: o observador, o objeto observado e o plano de projeção. Os *sites* https://www.vivadecora.com.br/pro/estudante/desenho-tecnico e https://www.ifmg.edu.br/ceadop3/apostilas/desenho-tecnico (acessos em: 17 out. 2024) apresentam informações sobre perspectivas, projeções e demais aspectos do desenho técnico, além de exemplos desses conceitos.

Sugere-se um trabalho integrado com o professor de Arte, da área de Linguagens e suas Tecnologias, abordando o aspecto histórico da perspectiva, como ela surgiu nas Artes Plásticas e sua importância no período do Renascimento ou propondo a construção de um painel com desenhos em perspectiva a serem realizados pelos estudantes.

Outra possibilidade é a utilização de *softwares* para desenho técnico. Um deles é o **Tinkercad**, um aplicativo computacional que possibilita realizar modelagens 3D, desenvolvido para professores, estudantes e público em geral, com uma interface gráfica de fácil interação, disponível no *site* https://www.tinkercad.com (acesso em: 3 out. 2024).

Para mais informações sobre a Geometria Projetiva e Descritiva, sugerem-se as seguintes leituras.

- HEFEZ, Abramo. Uma introdução à história da geometria projetiva. **Revista de Matemática Universitária (RMU)**, Rio de Janeiro, n. 3, p. 35-50, jun. 1986. Disponível em: https://rmu.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/27/2018/03/n03_Artigo03.pdf. Acesso em: 17 out. 2024.
- PEREIRA, Ademar A. **Geometria descritiva**. Rio de Janeiro: Quartet Editora & Comunicação, 2001.
- CARVALHO, Paulo Cezar P. **Introdução à geometria espacial**. Rio de Janeiro: SBM, 2005. (Coleção do Professor de Matemática).

O tópico **Conceitos preliminares** apresenta algumas palavras que fazem parte do vocabulário utilizado em Matemática e em outras áreas de conhecimento, das quais os estudantes vão se apropriando ao longo da trajetória escolar. Uma delas é **demonstração**. Sugere-se consultar dicionários para verificar os diferentes significados dessa palavra, orientando os estudantes a identificar quando ela é empregada no contexto matemático.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

A apresentação de postulados (ou axiomas), definições, teoremas e demonstrações favorece o desenvolvimento do raciocínio, explicitando uma característica intrínseca da Matemática, associada ao seu rigor, e estimulando a curiosidade intelectual. Essa abordagem contribui de forma significativa para o desenvolvimento da competência geral 2 e da competência específica 5 da área de Matemática e suas Tecnologias. Além disso, permite aos estudantes compreenderem que a Matemática se constrói com método, discutindo, assim, o Tema Contemporâneo Transversal Ciência e Tecnologia.

Sobre definições, pode-se propor as questões: "Um trapézio é um quadrilátero que tem dois lados paralelos. Observe que a definição de trapézio depende da definição de outra figura geométrica plana. Qual?"; "Você se lembra de mais alguma definição? Qual?".

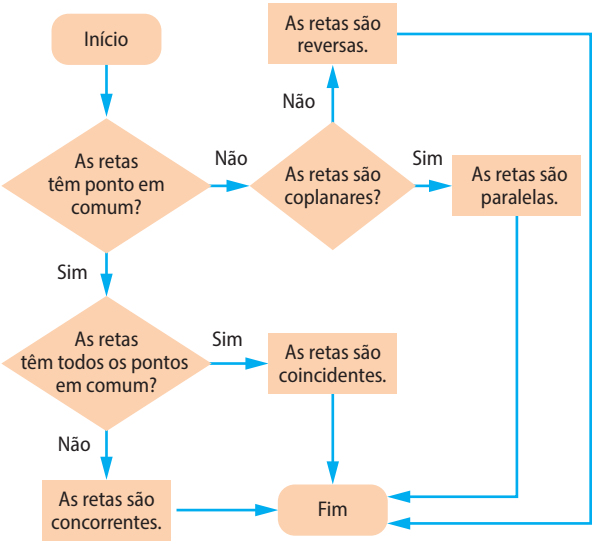
Para exemplificar o conceito de teorema, sugere-se questionar: "As diagonais de um losango são perpendiculares e se intersectam no ponto médio de ambas. Você se lembra de mais algum teorema? Qual?".

A relação entre demonstrações matemáticas e a Educação Básica é destacada na dissertação de mestrado disponível em https://repositorio.unifesp.br/server/api/core/bitstreams/098342cc-adff-43b3-bdc9-b01f6dbba44d/content (acesso em: 17 out. 2024), que pode contribuir para o planejamento do trabalho com este Capítulo. Outro exemplo é um artigo sobre a visão de estudantes e professores a respeito da argumentação e da demonstração em Matemática Básica, disponível em http://seer.uftm.edu.br/revistaeletronica/index.php/revistatriangulo/article/view/2583 (acesso em: 17 out. 2024).

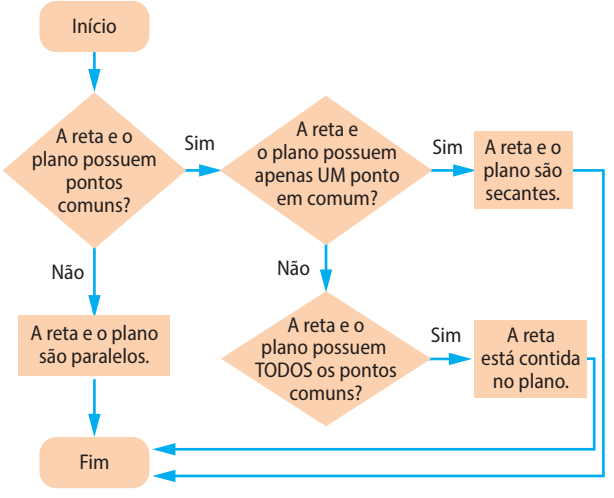
Como atividade complementar, sugere-se que os estudantes sejam organizados em cinco grupos. Cada grupo deverá pesquisar as características de uma das técnicas de demonstração citadas no Livro do estudante, no boxe **Saiba que...** da página 257 (demonstração direta, demonstração por absurdo, demonstração por contrapositiva, princípio da indução finita e demonstração por contraexemplo). Os *sites* indicados anteriormente podem auxiliar nessas pesquisas. Ao final da atividade, cada grupo poderá apresentar para os demais colegas o conteúdo pesquisado. Atividades como essa contribuem para que o estudante seja o centro do processo de ensino e seja protagonista de sua aprendizagem.

No tópico **Determinação do plano**, essa determinação é apresentada de quatro maneiras distintas, sendo um postulado e três teoremas. É possível que, no início, os estudantes sintam dificuldade em compreender o que é uma demonstração e em fazê-la. Assim, é importante verificar se eles identificam a tese e a hipótese em cada caso. Orientá-los a transcrever os teoremas no caderno, sublinhando, com cores distintas, a hipótese e a tese. Para compreender melhor a questão do desenvolvimento do raciocínio dedutivo dos estudantes, sugere-se a leitura do artigo "Prova e demonstração em matemática: problemática de seus processos de ensino e aprendizagem", disponível em https://anped.org.br/wp-content/uploads/2024/05/gt19-2957-int.pdf (acesso em: 17 out. 2024).

O segundo boxe **Pense e responda** do tópico **Posições relativas de duas retas** solicita a construção de um fluxograma. Destacam-se, nessa construção, as competências específicas 3 e 4 da área de Matemática e suas Tecnologias e a habilidade EM13MAT315, favorecendo o desenvolvimento do raciocínio lógico e do pensamento computacional. A seguir, apresenta-se uma sugestão do fluxograma solicitado.



O boxe **Pense e responda** do tópico **Posições relativas de uma reta e um plano no espaço** solicita a construção de um fluxograma relacionando as posições relativas entre uma reta e um plano no espaço. A seguir, apresenta-se um possível fluxograma.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

No tópico **Paralelismo no espaço**, é apresentado o teorema **6**, cuja demonstração é a seguinte.

Hipótese: $\alpha \cap \beta = \varnothing$; $r \subset \alpha$

Tese: $r \parallel \beta$

Demonstração:

Vamos supor que a negação da tese seja verdadeira, isto é, r não é paralela a β. Então r e β têm um ponto A em comum. Se isso fosse verdade, como $r \subset \alpha$, o ponto A, que pertence a β, também pertenceria ao plano α, o que contraria a hipótese $\alpha \cap \beta = \varnothing$.

Como chegamos a uma contradição da hipótese, concluímos que a afirmação inicial, de que a reta r não é paralela ao plano β, é falsa. Portanto, r é paralela ao plano β.

No tópico **Perpendicularismo no espaço**, sugere-se aplicar os seguintes problemas como atividades de aprofundamento.

1. Classifique as afirmações a seguir em verdadeiras ou falsas.

a) Um plano fica determinado por duas retas paralelas. Resposta: verdadeira.

b) Passando por um ponto do espaço, existe uma única reta paralela a uma reta dada. Resposta: verdadeira.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

c) Toda reta não contida em um plano e paralela a uma reta contida nesse plano é paralela ao plano. Resposta: verdadeira.

d) Considerando um ponto não pertencente a um plano, existe uma única reta paralela a esse plano. Resposta: falsa.

e) Se duas retas são paralelas, então todo plano secante a uma delas também é secante à outra. Resposta: verdadeira.

2. Indique a proposição falsa.

a) Se dois planos são paralelos e distintos, então toda reta de um deles é paralela ou reversa a qualquer reta do outro.

b) Se dois planos são secantes, então uma reta de um deles pode ser concorrente com uma reta do outro.

c) Se uma reta é paralela a dois planos, então esses planos são paralelos.

d) Se duas retas concorrentes de um plano são paralelas a outro plano, então os dois planos são paralelos.

e) Se dois planos são paralelos, então toda reta que é paralela a um deles é paralela ou está contida no outro.

Resposta: alternativa **c**.

3. Quais das proposições a seguir são corretas?

I. Se dois planos possuem três pontos não colineares em comum, são coincidentes.

II. Se duas retas, *r* e *s*, no espaço são ambas perpendiculares a uma reta *t*, então *r* e *s* são paralelas.

III. Se dois planos, α e β, são concorrentes, então α e β têm infinitos pontos comuns.

IV. Se duas retas, *r* e *s*, são paralelas a um plano α, então *r* e *s* são paralelas.

Resposta: **I** e **III**.

No tópico **Projeção ortogonal,** recomenda-se utilizar o GeoGebra para fazer figuras tridimensionais e obter as vistas ortogonais com os estudantes. Acompanhe a seguir algumas indicações que podem auxiliar e embasar essas atividades.

- SIBEMBERG, Lucas S.; NOTARE, Márcia R. Projeção ortogonal: uma abordagem com geometria dinâmica. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, Bento Gonçalves, v. 8, n. 1, p. 1-20, 30 jun. 2022. Disponível em: https://lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/249639/001149852.pdf?sequence=1. Acesso em: 17 out. 2024.
- SILVA, Paulo C. A. **Geometria espacial**: uso do aplicativo GeoGebra em *smartphones*. 2018. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia da Regional Catalão, Universidade Federal de Goiás, Catalão, 2018. p. 72. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=4091&id2=150300152. Acesso em: 17 out. 2024.
- PROJEÇÃO ortogonal: aula 03. [*S. l.*: *s. n.*], 2014. 1 vídeo (12 min). Publicado pelo canal: Portal da Matemática OBMEP. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=VaT2vPh5JuI&feature=emb_logo. Acesso em: 17 out. 2024. Contém uma aula explicativa e pode auxiliar os estudantes na compreensão desse assunto.

O boxe **Fórum** favorece o trabalho com as competências gerais 7 e 9, ao propor uma reflexão e uma discussão com argumentos baseados em fatos, dados e informações confiáveis. A ideia é formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos das pessoas com deficiência. Assim, é incentivada a adoção de um posicionamento ético em relação ao cuidado dos outros, bem como um exercício de empatia e de cooperação, promovendo, desse modo, o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e suas potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.

Algumas soluções de acessibilidade que os estudantes podem propor são:

- Implementação de rampas de acesso e corrimãos em todas as áreas públicas, incluindo entradas de prédios e áreas comuns das escolas.
- *Design* de espaços internos de forma a permitir a circulação de cadeiras de rodas e outros dispositivos de mobilidade, incluindo corredores amplos e portas largas.
- Disponibilização de banheiros adaptados em todos os locais públicos, com barras de apoio e equipamentos acessíveis.
- Treinamento regular de funcionários e educadores sobre como atender às necessidades específicas de pessoas com deficiência e como garantir um ambiente inclusivo.

No tópico **Distâncias**, recomenda-se que os estudantes desenhem as ilustrações que representam as distâncias entre os entes geométricos. O desenho é um tipo de registro importante e, sempre que possível, deve ser incentivado e trabalhado. Além disso, pode-se solicitar a descrição de situações cotidianas que sejam associadas a cada um desses casos, como a distância entre duas paredes paralelas, que pode ser associada à distância entre dois planos paralelos, ou a distância entre duas pessoas, que pode ser associada à distância entre dois pontos.

A profissão arquiteto-urbanista é apresentada na seção **Conexões com...** A observação e a valorização de conhecimentos envolvidos na Arquitetura contribuem para o desenvolvimento da competência geral 1. As atividades propõem diálogos e pesquisas sobre o mundo do trabalho e as opções de carreira, abordando a competência geral 6 e o Tema Contemporâneo Transversal Trabalho. Para complementar, sugere-se a leitura da reportagem da exposição realizada em São Paulo sobre o arquiteto Antoni Gaudí (1852-1926), disponível em https://novaescola.org.br/conteudo/3380/exposicao-gaudi-barcelona-1900 (acesso em: 3 out. 2024).

A seção **Explorando a tecnologia** trabalha a utilização de conceitos de programação por meio da construção de um algoritmo, contribuindo para o desenvolvimento da competência específica 4 da área de Matemática e suas Tecnologias, da habilidade EM13MAT405 e das competências gerais 4 e 5.

Para a construção dos programas solicitados nas atividades, os estudantes poderão se apoiar no programa já feito. Na atividade **1**, a estrutura do código é basicamente a mesma apresentada na seção, sendo preciso apenas substituir as perguntas anteriores pelas perguntas: "A reta e o plano têm um ponto em comum?" e "O ponto é único?".

Na atividade **2**, o código se assemelha ao da atividade anterior, com três possibilidades. Logo, basta substituir as perguntas anteriores por: "Os planos têm pontos em comum?" e "Existem três pontos não colineares na intersecção?".

Avaliação

A atividade **4** da **Abertura** do Capítulo possibilita uma avaliação diagnóstica da habilidade a seguir, trabalhada no Ensino Fundamental – Anos Finais.

(**EF09MA17**) Reconhecer vistas ortogonais de figuras espaciais e aplicar esse conhecimento para desenhar objetos em perspectiva.

A seguir, são apresentadas sugestões de atividades cuja análise das resoluções pode contribuir para avaliar a evolução de cada estudante e orientar seus estudos.

1ª avaliação formativa: atividades **4**, **5** e **11** (páginas 264 e 267, respectivamente).

2ª avaliação formativa: atividades **15** e **16** (página 274).

3ª avaliação formativa: atividades **22**, **23** e **27** (páginas 278 e 283, respectivamente).

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Acidificação e o futuro dos oceanos

[Som de ondas]

Você provavelmente já estudou ou vai estudar o conceito de logaritmos nas aulas de Matemática. Mas você sabia que esse conceito é aplicado em diversas áreas do conhecimento, como Matemática Financeira, Geografia e Ciências da Natureza?

Os logaritmos, historicamente, ajudaram a simplificar cálculos como potenciação, multiplicação e divisão de números. Atualmente, eles estão presentes em escalas, como as de magnitude de terremotos e intensidade do som, que apresentam grandes variações.

Neste *podcast*, vamos explorar a importância dos logaritmos nas Ciências da Natureza, focando na escala do pH. Mas, afinal, o que é pH? E qual é a relação dos logaritmos com o pH?

[Som de ondas]

O pH é uma escala que mede a acidez e a basicidade de uma solução, indicando a quantidade de íons de hidrogênio presentes nela. Quanto maior a concentração desses íons, maior a acidez da solução.

A escala de pH vai de 0 (indicando uma solução muito ácida) a 14 (indicando uma solução muito básica), sendo que um pH igual a 7 determina uma solução neutra.

Essa é uma escala logarítmica de base 10, pois uma mudança de 1 unidade de pH representa uma variação de 10 vezes na concentração de íons de hidrogênio. Por exemplo, ao passar de um pH de 7 para 6, a solução não é apenas 1 vez mais ácida, mas sim 10 vezes mais ácida. Da mesma forma, ao variar de 7 para 5, a acidez aumenta em 100 vezes, e, de 7 para 0, a solução se torna 10 milhões de vezes mais ácida.

Mas por que é importante analisar a variação de pH?

[Som de ondas]

A análise da mudança de pH é importante em várias situações. Na agricultura, por exemplo, cada planta cresce melhor em um intervalo específico de pH, por isso é essencial determinar o pH do solo.

Também é importante analisar a variação do pH da água para verificar se ela está adequada para o consumo, já que, segundo o Ministério da Saúde, o pH ideal da água deve ser mantido entre 6 e 9,5.

Nos últimos anos, entretanto, uma das maiores preocupações de cientistas e líderes globais tem sido a diminuição do pH dos oceanos, um fenômeno chamado de acidificação oceânica. Vamos entender melhor o que é esse fenômeno e por que ele é tão preocupante.

[Som de ondas]

A acidificação oceânica ocorre devido à diminuição do pH dos oceanos ao longo do tempo. Segundo uma reportagem da National Geographic, cientistas revelam que o pH do oceano caiu de 8,2 para 8,1, uma queda de 0,1 na escala de pH. Parece pouco, certo? Mas, de acordo com a mesma reportagem, Aleck Wang, professor de Química Marinha na Woods Hole Oceanographic Institution, acredita que, até o final desse século, o pH poderá atingir o valor de 7,7.

A queda do pH dos oceanos está relacionada ao aumento das emissões de gás carbônico devido às atividades humanas, pois eles absorvem esse gás da atmosfera e, com isso, tornam-se cada vez mais ácidos. Segundo a Agência Internacional de Energia Atômica (AIEA), os oceanos absorvem cerca de 25% das emissões de gás carbônico todos os anos.

Mas você sabe por que essa diminuição do pH dos oceanos preocupa tanto cientistas e líderes globais?

[Som de ondas]

A acidificação dos oceanos traz consequências ambientais e econômicas, representando uma séria ameaça ao ecossistema marinho. Segundo uma pesquisa publicada na revista americana Proceedings of the National Academy of Sciences (PNAS), até 2100, cerca de 17% das espécies marinhas podem desaparecer se as emissões de gás carbônico não forem reduzidas.

Além disso, a diminuição do pH dos oceanos compromete a capacidade destes de absorver gás carbônico da atmosfera, dificultando o combate ao aquecimento global. Essa acidificação também impacta a vida de mais de 3 bilhões de pessoas que dependem dos recursos marinhos e costeiros para sua subsistência.

[Som de ondas]

O combate à acidificação dos oceanos é uma preocupação global e integra as metas da Agenda 2030, um plano da Organização das Nações Unidas (ONU) para promover um mundo mais sustentável e resiliente até 2030. A meta faz parte do Objetivo de Desenvolvimento Sustentável 14 e busca "minimizar e enfrentar os impactos da acidificação dos oceanos, reforçando a cooperação científica em todos os níveis" até 2030.

E que tal pesquisar mais sobre esse tema? Busque informações sobre ações que governantes e a sociedade civil podem adotar para reverter essa situação e compartilhe com as pessoas do seu convívio. Assim, você também pode contribuir para a preservação do planeta.

[Som de ondas]

Créditos: todos os áudios inseridos neste conteúdo são da Freesound.

Ciclos naturais e Matemática

[Música de transição]

Você já observou como alguns fenômenos naturais seguem padrões, isto é, que eles se repetem de tempos em tempos, em ciclos? É o caso das fases da Lua, das marés e das estações do ano.

Os ciclos lunares referem-se às fases da Lua, que mudam o modo como a observamos no céu, dependendo da sua posição em relação ao Sol e à Terra. Um ciclo lunar completo tem duração média de 29 dias e meio.

[Música de transição]

E o ciclo das marés? O fenômeno se refere ao movimento de subida e descida da água do mar em relação ao litoral. Se você já foi à praia, é provável que tenha reparado nisso. Em certo período do dia, a maré avança sobre a costa e cobre uma parte maior da faixa de areia. Em outros momentos, ela se retrai e a água parece mais distante da praia. As marés são influenciadas pela força gravitacional exercida pela Lua sobre a Terra, que modifica o nível da água do mar.

[Música de transição]

Já os ciclos sazonais correspondem às estações do ano: verão, outono, inverno e primavera, cada uma com duração aproximada de três meses. Em cada região do planeta, as estações apresentam características climáticas específicas que costumam se repetir todos os anos. A meteorologia estuda esses fenômenos, compreendendo cada ciclo e fazendo previsões. Por exemplo, em regiões onde o frio do inverno é mais intenso, pode-se prever quando a temperatura será muito baixa e, assim, providenciar recursos com antecedência, como sistemas de aquecimento, equipamentos antineve, arrecadação de agasalhos, entre outras.

[Música de transição]

Entretanto, com as mudanças climáticas, prever as características das estações já não é tão simples assim, pois elas vêm sofrendo alterações nas últimas décadas e se tornaram menos definidas. Fenômenos climáticos que antes eram raros tornam-se cada vez mais comuns. Com isso, a previsão climática precisa incorporar novos elementos aos seus cálculos.

Como ficará o mundo se a temperatura média da superfície terrestre aumentar dois graus Celsius? As geleiras vão derreter, o mar vai subir e invadir áreas costeiras? Alguns modelos matemáticos buscam prever esse cenário. Ou seja, é a Matemática, aliada a outros ramos da Ciência, que ajuda a tomar decisões e providências ambientais para o futuro.

A seguir, o meteorologista Marcelo Schneider, do Instituto Nacional de Meteorologia, explica como é feita a previsão do tempo e a influência dos cálculos matemáticos nesse processo.

[Áudio extraído de vídeo]

"A previsão do tempo, ela começa, é… com os dados que são coletados pelos observadores nove da manhã, três da tarde e nove da noite. Nessas três observações, os dados são distribuídos para cada

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

um dos distritos. Esses distritos retransmitem os dados para Brasília que, depois, cerca de uma ou duas horas, realiza cálculos numéricos através de programas de computador. São cálculos que possibilitam a montagem de mapas de pressão, de temperatura, chuva, para que, aí sim, o meteorologista analise, interprete essas informações e faça, além do diagnóstico, que é aquela das observações, o prognóstico, que é a previsão do tempo para os próximos dias."

[Música de transição]

As mudanças climáticas são resultado de desequilíbrios ambientais, como os altos índices de emissão de poluentes e os desmatamentos, entre outras ações humanas que afetam o meio ambiente e, consequentemente, os ciclos naturais.

Recentemente, aqui no Brasil, tivemos dois exemplos de como as atividades humanas têm interferido nos ciclos periódicos naturais: a seca na Região Norte em 2023 e as enchentes no Rio Grande do Sul em 2024. Na Amazônia, a forte seca também foi resultado de ações do ser humano, como desmatamento, garimpo e queimadas. No caso da Região Sul do país, um estudo indicou que o estado gaúcho perdeu três milhões e meio de hectares de vegetação nativa em quatro décadas e, segundo especialistas, isso contribuiu para que cidades do Rio Grande do Sul, como Porto Alegre, enfrentassem uma enchente inesperada.

[Música de transição]

Já falamos sobre fases da Lua, marés, estações do ano e mudanças climáticas… Certo, mas o que todos esses ciclos têm em comum? A resposta é que eles podem ser analisados por meio de conceitos matemáticos que nos ajudam a entender e representar cada fenômeno, além de permitir fazer previsões sobre eles.

Foi a partir de observações e cálculos matemáticos que a humanidade passou a compreender os ciclos periódicos naturais. Mas e quando olhamos para o presente e o futuro, a Matemática ainda tem algo a nos dizer sobre esses assuntos? A resposta é sim: os conhecimentos matemáticos são fundamentais para analisar questões complexas, como os impactos das mudanças climáticas que discutimos.

Seja para compreendermos o caminho que o nosso planeta está seguindo, seja para que o poder público e os cientistas busquem soluções, a Matemática continuará sendo uma ferramenta essencial para auxiliar a humanidade a compreender situações e guiar a tomada de decisões.

[Música de transição]

Créditos: você pode ouvir na íntegra o vídeo Como é feita a previsão do tempo no canal da Nova Escola do YouTube. Os áudios deste *podcast* são da Freesound.

Hortas comunitárias e soberania alimentar

[Música de transição]

Você provavelmente sabe o que é uma horta comunitária ou até mesmo conhece alguma no seu município. Mas, e quanto à soberania alimentar, você sabe o que é? Neste *podcast*, vamos conversar sobre esses dois assuntos e entender como eles se conectam, contribuindo para a segurança alimentar e para uma agricultura sustentável.

As hortas comunitárias são espaços criados principalmente por membros da própria comunidade, com o intuito de suprir suas necessidades alimentares e, em alguns casos, complementar a renda familiar por meio da venda dos produtos excedentes.

[Música de transição]

No Brasil, as hortas comunitárias começaram a surgir por volta da década de 1970, mas ganharam destaque nas políticas públicas de combate à pobreza a partir do início do século XXI. Um exemplo disso é o Programa Nacional de Agricultura Urbana, lançado pelo governo federal em 2008.

A quantidade de hortas comunitárias tem crescido em vários municípios brasileiros. De acordo com dados da Secretaria do Verde e Meio Ambiente da Prefeitura de São Paulo, em 2021, havia 103 hortas comunitárias urbanas espalhadas pela cidade.

Em Teresina, capital do estado do Piauí, atualmente existem 46 hortas comunitárias, sendo a maior delas a Horta Comunitária do Dirceu, que existe desde 1987 e ocupa cerca de 27 hectares de área, garantindo renda para 418 famílias.

No município do Rio de Janeiro, o Programa Hortas Cariocas gerou mais de 77 toneladas de alimentos em 2023. As frutas, os legumes e as verduras foram cultivados em 56 hortas em comunidades e escolas; todas as hortas juntas ocupam uma área total de 25,3 hectares.

[Música de transição]

Mas o que as hortas comunitárias e a soberania alimentar têm em comum?

A soberania alimentar é o direito das comunidades de decidir como organizar, produzir e distribuir seus alimentos. Esse conceito foi formalizado em 1996 pela Via Campesina, um movimento internacional que reúne trabalhadores do campo em defesa de seus direitos.

A Via Campesina entende a fome como uma questão social, que pode ser combatida e superada por meio do desenvolvimento de estratégias voltadas para a democratização do acesso à terra, o que também pode ser chamado, em maior escala, de reforma agrária. Isso inclui a agroecologia, que promove modelos sustentáveis para a produção de alimentos, além de valorizar a agricultura familiar.

As hortas comunitárias representam uma estratégia importante para fortalecer a soberania alimentar, permitindo que as comunidades cultivem e comercializem seus próprios alimentos. Por meio dessas iniciativas, os moradores garantem não apenas uma fonte de alimentação saudável e sustentável, mas também promovem sua autonomia, ganhando mais controle sobre o que e como produzem.

[Música de transição]

No Brasil, é fundamental debater e desenvolver políticas públicas relacionadas à soberania alimentar, considerando o grande potencial agrícola do país e as desigualdades sociais e econômicas que comprometem o acesso à alimentação. Embora, segundo o Relatório das Nações Unidas sobre o Estado da Insegurança Alimentar Mundial de 2024, tenha havido uma redução significativa no número de pessoas em situação de insegurança alimentar, passando de 17,2 milhões em 2022 para 2,5 milhões em 2023, ainda há uma questão a ser enfrentada.

Para lidar com esse problema, o Estado brasileiro já implementou várias iniciativas. Entre as mais conhecidas está o PRONAF, o Programa Nacional de Fortalecimento da Agricultura Familiar.

[Música de transição]

Você consegue identificar como os conhecimentos matemáticos estão presentes nas construções das hortas comunitárias que discutimos? Vamos explorar isso um pouco mais.

Os agricultores utilizam conceitos matemáticos em todas as etapas do cultivo, começando pelo planejamento da horta comunitária. Eles costumam aplicar conhecimentos sobre área, perímetro, medidas e proporções, entre outros.

Antes de iniciar o plantio, por exemplo, os conceitos matemáticos são essenciais para medir e demarcar a área do terreno destinada à horta. Além disso, ao planejar a disposição das mudas, é importante calcular a distância entre as fileiras, garantindo espaço suficiente para o crescimento das plantas e facilitando a colheita.

Os agricultores também usam Matemática para calcular quantidades, seja em volume ou massa. Isso inclui, por exemplo, a quantidade de água necessária para a irrigação e a quantidade adequada de fertilizantes, evitando desperdícios e promovendo a qualidade dos produtos cultivados.

[Música de transição]

Neste *podcast*, você teve a oportunidade de conhecer mais sobre as hortas comunitárias e o conceito de soberania alimentar, além de perceber como os conhecimentos matemáticos são fundamentais para a criação dessas hortas e estão presentes nas práticas diárias dos agricultores.

E no município onde você vive, existem hortas comunitárias? Que tal descobrir mais sobre elas ou conversar com as pessoas do seu convívio sobre a possibilidade de criar uma horta comunitária no seu bairro ou na sua escola? Assim, você pode ajudar a promover uma alimentação mais saudável e contribuir para a soberania alimentar em sua comunidade.

[Música de transição]

Créditos: os áudios inseridos neste *podcast* são da Freesound.

Resoluções das atividades

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Capítulo 1 • Pesquisa estatística

Atividades

1. a) **População quilombola**

Região	Frequência absoluta	Frequência relativa
Norte	166 069	12,507%
Nordeste	905 415	68,189%
Centro-Oeste	44 957	3,386%
Sudeste	182 305	13,730%
Sul	29 056	2,188%
Total	**1 327 802**	**100%**

CAMPOS, Ana Cristina. Censo 2022: Brasil tem 1,32 milhão de quilombolas. **Agência Brasil**, Brasília, DF, 27 jul. 2023. Disponível em: https://agenciabrasil.ebc.com.br/economia/noticia/2023-07/censo-2022-brasil-tem-132-milhao-quilombolas. Acesso em: 31 ago. 2024.

b) Dos 5 568 municípios brasileiros, 1 696 tinham moradores quilombolas. Assim:

$\frac{1\,696}{5\,568} \cdot 100\% \simeq 30{,}46\%$

Logo, aproximadamente 30,46% dos municípios brasileiros têm moradores quilombolas.

c) Não, pois, de acordo com o texto, da população de 1 327 802 quilombolas no Brasil, 15 999 moram em Senhor do Bonfim (BA), cujo percentual do total de quilombolas corresponde a:

$\frac{15\,999}{1\,327\,802} \cdot 100\% \simeq 1{,}2\%$.

d) Os dois estados em que não há territórios quilombolas oficialmente demarcados são Acre e Roraima, localizados na Região Norte do Brasil.

e) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes respondam que sim, pois a pesquisa é censitária, isto é, todos os indivíduos da população-alvo foram entrevistados.

2. Resposta pessoal. Respostas possíveis: Pesquisa censitária: número de habitantes de uma cidade e perfil socioeconômico dos participantes de um concurso público; pesquisa amostral: pesquisa de opinião sobre a qualidade de um produto e pesquisa de intenção de voto em uma eleição. Há outras respostas possíveis.

3. O senador **2**. A amostra não representa a população do país, pois ela não foi selecionada de forma aleatória e apenas as pessoas que tinham conhecimento e interesse no novo projeto responderam à enquete.

4. Amostra sistemática. Há uma regra estabelecida (senhas com números múltiplos de 15), mas se mantém a aleatoriedade (não é possível saber o perfil das pessoas que foram ao banco).

5. O percentual do total de estudantes que participaram da pesquisa é:

$\frac{257}{1\,285} \cdot 100\% = 20\,\%$

Calculando esse percentual em relação a cada estrato, obtém-se:

- $0{,}2 \cdot 535 = 107$ (homens);
- $0{,}2 \cdot 750 = 150$ (mulheres).

Logo, participaram da pesquisa 107 homens e 150 mulheres.

Resposta: alternativa **a**.

6. a) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes respondam que sim, pois 13% das vítimas sofreram a primeira ocorrência de agressão até os 14 anos, 17% sofreram na faixa dos 15 aos 18 anos e 22% sofreram na faixa entre 19 e 24 anos.

b) É uma variável quantitativa, pois é indicada por um número.

7. a) A margem de erro da pesquisa é de 2%. Logo, o intervalo de confiança da intenção de votos do candidato **B** é [14,96%; 18,96%], pois:

$16{,}96\% - 2\% = 14{,}96\%$

$16{,}96\% + 2\% = 18{,}96\%$

b) Não. A pesquisa estima que a intenção real x de votos para o candidato **A** pertence ao intervalo [24,76%; 28,76%], enquanto a intenção real y de votos para o candidato **B** pertence ao intervalo [24,67%; 28,67%]. Desse modo, não é possível saber se x é maior do que, menor do que ou igual a y. Assim, não há certeza de que o candidato **A** vencerá as eleições.

c) $0{,}1696 \cdot 2\,040 = 345{,}984 \simeq 346$

Logo, o candidato **B** teve aproximadamente 346 votos.

d) $(0{,}0520 + 0{,}0480 + 0{,}0868) \cdot 2\,040 = 381{,}072 \simeq 381$

Portanto, aproximadamente 381 pessoas responderam votos nulos/brancos, estão indecisas ou não opinaram.

8. Ao analisar os gráficos **I** e **II**, observa-se que os pontos correspondentes destacados, referentes ao número de linhas telefônicas em determinados meses, coincidem em ambas as representações. A diferença entre elas é na escala adotada, onde o gráfico **I** tem, no eixo vertical, intervalos de 50 em 50 unidades de linhas telefônicas representados sem indicação de quebra de escala entre 0 (zero) e 2 000 em comparação com o gráfico **II**, no qual os intervalos de 50 em 50 unidades de linhas telefônicas estão representados a partir de 2 000. Além disso, no eixo horizontal, determinados meses estão representados com distância maior entre eles em comparação aos espaçamentos do gráfico **II**. Desse modo, para um leitor menos atento ou que não possua a habilidade de leitura de gráficos totalmente desenvolvida, no gráfico **I** é gerada a impressão de que o número de linhas telefônicas aumentou pouco ao longo dos meses em comparação ao gráfico **II**.

Resposta: alternativa **d**.

9. A soma indica o total de pessoas entrevistadas que responderam "sim", ou seja, que já fizeram uma cirurgia. A média indica a fração de pessoas entrevistadas que já fizeram alguma cirurgia.

10. a) As informações necessárias são: quem contratou a pesquisa, quem a pagou, a origem e o valor dos recursos, a metodologia utilizada, o plano amostral, o questionário completo, o nível de confiança, a margem de erro, o período da coleta dos dados e o nome do profissional estatístico responsável pela pesquisa.

b) Estratificada, pois o plano amostral apresenta a ponderação quanto a gênero, idade, grau de instrução e nível econômico dos entrevistados.

c) Enquetes e sondagens não têm plano amostral, isto é, sua amostra não é representativa da população-alvo, e não utilizam metodologia científica. Logo, seus resultados podem ser equivocados e tendenciosos, ou seja, ilustram um retrato parcial, e não completo, da realidade.

11. a) Amostral, pois foram entrevistadas 1000 pessoas, e não toda a população.

b) Por telefone.

c) 90%. Espera-se que os estudantes respondam que a notícia diz que nove em cada dez brasileiros apoiam a regulamentação das redes, portanto:

$\frac{9}{10} = 0{,}9 = 90\%$

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

12. Espera-se que os estudantes, após a realização da pesquisa, que pode ou não envolver temas relacionados à cultura juvenil, a depender da escolha de cada grupo, compartilhem com a comunidade escolar os resultados da pesquisa.

13. **a)** $I_{saúde} = \frac{45,5 - 20}{85 - 20} \simeq 0,392$

Logo, o índice de saúde em 1940 foi, aproximadamente, 0,392.

b) Seja x a expectativa de vida em um país.

$1 = \frac{x - 20}{85 - 20} \Rightarrow x = 85$

Logo, para que o índice de saúde de um país seja 1, a expectativa de vida nesse país deve ser 85 anos.

14. O IDHM é calculado pela raiz cúbica do produto dos índices de educação, longevidade e renda. Logo:

$IDHM = \sqrt[3]{0,757 \cdot 0,819 \cdot 0,724} \simeq 0,766$

Portanto, o IDHM do Brasil, em 2021, foi 0,766.

15. A região do Brasil com melhor distribuição de renda é aquela que apresenta o menor índice de Gini, sendo, neste caso, a Região Sul.

Resposta: alternativa **d**.

16. O PIB *per capita* (em R$) total da região, com população (em milhões) por estado, é calculado da seguinte maneira:

$1 \cdot 15\,000 + 8 \cdot 15\,000 + 3 \cdot 30\,000 + 15 \cdot 30\,000 = 675\,000$

Logo, o PIB *per capita* (em R$) dessa região é dado por:

$\frac{675\,000}{1 + 8 + 3 + 15} = 25\,000$

Resposta: alternativa **d**.

17. De acordo com o gráfico, a diferença nacional entre a expectativa de vida de mulheres e homens é, aproximadamente, 7 anos. Os dois estados que apresentam uma diferença maior do que 7 anos são Bahia (BA) e Alagoas (AL).

Resposta: alternativa **e**.

18. A expectativa de vida do brasileiro subiu 0,3 ano, pois:

$74,9 - 74,6 = 0,3$

Em um ano, há 12 meses, e cada mês foi fixado em 30 dias, logo o cálculo correto é:

$0,3 \times 12 \times 30 \Rightarrow 3,6 \times 30$

Resposta: alternativa **c**.

19. Substituindo na fórmula do CDRS os dados apresentados no gráfico e no enunciado, temos:

$CDRS = 1 - \left(\frac{1\,200\,000 \cdot 1410}{1\,000\,000 \cdot 2022}\right) \simeq 0,16$

Resposta: alternativa **b**.

20. As médias aritméticas do IDHM dos municípios são:

São Caetano do Sul (SP):

$\frac{0,77 + 0,77 + 0,92}{3} = 0,82$

Águas de São Pedro (SP):

$\frac{0,67 + 0,76 + 0,85}{3} = 0,76$

Florianópolis (SC):

$\frac{0,65 + 0,80 + 0,80}{3} = 0,75$

Balneário Camboriú (SC):

$\frac{0,79 + 0,79 + 0,79}{3} = 0,79$

Vitória (ES): $\frac{0,73 + 0,78 + 0,77}{3} = 0,76$

O município com a menor média foi Florianópolis, sendo este o escolhido pela ONG.

Resposta: alternativa **a**.

21. A média $\overline{x}$ é 32 anos, pois:

$\overline{x} = \frac{60}{100} \cdot 30 + \frac{40}{100} \cdot 35 = 32$

Portanto, a cidade receberá o recurso **III**.

Resposta: alternativa **c**.

22. Como nenhum país zerou ou atingiu o índice máximo, então X é maior do que 0 e menor do que 1. Sendo assim, nas potências de base X, quanto menor o expoente, maior o valor da potência. Desse modo, temos:

$X^{\frac{1}{3}} > X^{\frac{1}{2}} > X > X^2 > X^3$

Logo, o país com maior IDH é o terceiro.

Resposta: alternativa **c**.

23. Consideremos y o PIB e z a população do país X em 2021. Em 2022, o PIB *per capita* desse país foi:

$\frac{1,18 \cdot y}{1,10 \cdot z} \simeq 1,073 \cdot \frac{y}{z}$

Assim, o PIB *per capita* do país X cresceu, aproximadamente, 7%.

Resposta: alternativa **c**.

24. Atividade de pesquisa: oriente os estudantes a como fazer uma pesquisa. Para orientá-los, recomenda-se a leitura do seguinte artigo: MACHADO, Daniela. **Aprender a pesquisar e pesquisar para aprender**. São Paulo: Instituto Palavra Aberta, 7 nov. 2019. Disponível em: https://educamidia.org.br/aprender-a-pesquisar-e-pesquisar-para-aprender/. Acesso em: 4 out. 2024.

Respostas possíveis de ações: para contribuir com a melhoria do índice de educação, podem ser promovidas políticas públicas de ampliação do número de escolas e investimento em suas infraestruturas; para o aumento do índice de longevidade, podem ser feitas melhorias em saneamento básico, ampliação de setores hospitalares e criação de programas que incentivam a formação de novos profissionais da saúde na região; para a melhoria do índice de renda, podem ser promovidas ações de aumento e manutenção de empregos e programas de auxílio de distribuição de renda. Há outras ações possíveis.

Atividades complementares

1. A quantidade total de funcionários da empresa representa o conjunto dos indivíduos com o qual se deseja fazer o experimento, ou seja, a população dele. O consumo de litros de água por funcionário é o questionamento do experimento, que pode admitir valores não inteiros, sendo, assim, uma variável contínua da pesquisa. Os funcionários escolhidos arbitrariamente são uma parte da população, ou seja, uma amostra dela; como os funcionários foram escolhidos arbitrariamente, com uma mesma probabilidade de escolha dos demais, esse experimento consiste em uma amostragem aleatória simples.

Resposta: alternativa **d**.

2. Como a margem de erro da pesquisa é 3%, o percentual de votos dos candidatos X, Y e Z pertence, respectivamente, aos intervalos [33%; 39%], [30%; 36%] e [28%; 34%]. Caso o candidato Z tenha 34% e o candidato X, 33%, o candidato Z poderia vencer com uma diferença de, no máximo, 1% sobre X.

Resposta: alternativa **d**.

3. A razão entre as colunas B e A no gráfico **1** é $\frac{3}{7}$.

A razão entre as colunas B e A no gráfico **2** é $\frac{1}{5}$.

Efetuando a diferença entre as razões, temos:

$\frac{3}{7} - \frac{1}{5} = \frac{8}{35}$

Resposta: alternativa **e**.

4. Segundo o texto e os dados apresentados, o IDH do Brasil:

- de 1990 a 2000 teve aumento de 0,065;
- de 2000 a 2010 teve aumento de 0,050.

Assim, a variação desses aumentos, a cada dez anos, não foi proporcional e foi decrescente.

Resposta: alternativa **c**.

5. Nos municípios X e Z, ao longo da década de 1990, os índices do IDH que aumentaram estão relacionados à longevidade e à educação. Nesse mesmo período, no município Y, houve um aumento dos três tipos de índice do IDH (renda, longevidade e educação). Logo, as políticas bem implementadas nos três municípios foram II e III, apenas.

Resposta: alternativa **d**.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

6. A média de casos confirmados em todas as regiões é dada por:
$\frac{237 + 262 + 158 + 159 + 160 + 278 + 300 + 278}{8} = 229$
Em 5 regiões, o número de casos é maior do que a média de casos, enquanto nas outras 3, o número de casos é inferior à média. Assim, o número de funcionários que a prefeitura deverá contratar é 71, pois:
$5 \cdot 10 + 3 \cdot 7 = 71$
Resposta: alternativa **d**.

7. É possível observar no gráfico de radar, que o gênero "Infantil" vendeu 30 obras em 2020 e em 2021. O gênero Biografias também vendeu 30 obras em 2020 e em 2021.
Resposta: alternativa **d**.

8. Calculando a média de cada estudante, temos:
$\frac{0+3+4}{3} = \frac{7}{3}$ (André) $\quad \frac{3+3+2}{3} = \frac{8}{3}$ (Cecília)
$\frac{2+4+1}{3} = \frac{7}{3}$ (Beatriz) $\quad \frac{4+0+1}{3} = \frac{5}{3}$ (Daniel)
Logo, Cecília teve a maior média das notas nas três provas.
Resposta: alternativa **c**.

9. **a)** Atividade de pesquisa: oriente os estudantes acerca dos problemas relacionados a não indicar fontes consultadas e ao plágio. Para orientá-los, recomenda-se a leitura do seguinte material: BATISTA, Andreza Pereira *et al*. **Para o plágio eu digo não!**: guia de boas práticas. Fortaleza: UFC, 2021. Disponível em: https://repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/61304/1/2021_cart_apbatista_et_al.pdf. Acesso em: 4 out. 2024.
b) Resposta pessoal. Algumas instituições de ensino superior com vestibular específico para povos indígenas, conforme especificado em seus *sites*, em 2024, são: UFRR, UFPE, UnB-DF, Unicamp-SP e UFSM-RS.

Capítulo 2 • Progressões

Atividades

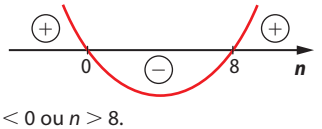
1. Para representar as sequências, vamos considerar os quatro primeiros termos, ou seja, aqueles cujos índices são 1, 2, 3 e 4.
a) $a_n = 3n - 1$
$a_1 = 3 \cdot 1 - 1 = 2$; $a_2 = 3 \cdot 2 - 1 = 5$;
$a_3 = 3 \cdot 3 - 1 = 8$; $a_4 = 3 \cdot 4 - 1 = 11$
$(2, 5, 8, 11, \ldots)$
b) $a_n = 2^{n-1}$
$a_1 = 2^{1-1} = 1$; $a_2 = 2^{2-1} = 2$;
$a_3 = 2^{3-1} = 4$; $a_4 = 2^{4-1} = 8$
$(1, 2, 4, 8, \ldots)$
c) $a_n = 1 + (-1)^n$
$a_1 = 1 + (-1)^1 = 0$; $a_2 = 1 + (-1)^2 = 2$;
$a_3 = 1 + (-1)^3 = 0$; $a_4 = 1 + (-1)^4 = 2$
$(0, 2, 0, 2, \ldots)$
d) $a_n = n^2 - 1$
$a_1 = 1^2 - 1 = 0$; $a_2 = 2^2 - 1 = 3$;
$a_3 = 3^2 - 1 = 8$; $a_4 = 4^2 - 1 = 15$
$(0, 3, 8, 15, \ldots)$

2. **a)** Calcular o quinto e o oitavo termos de uma sequência equivale considerar $n = 5$ e $n = 8$, respectivamente. Logo:
$a_5 = 3 \cdot 5 + 1 \Rightarrow a_5 = 16$
$a_8 = 3 \cdot 8 + 1 \Rightarrow a_8 = 25$
b) Para determinar a ordem (posição) de um termo, no caso, 49, deve-se considerar $a_n = 49$ e, em seguida, calcular o valor de n. Logo:
$49 = 3n + 1 \Rightarrow n = 16$
Portanto, o termo 49 ocupa a 16ª posição dessa sequência.
c) Considerando $a_n = 1001$, para que esse termo pertença a essa sequência, deve-se ter, necessariamente, um valor de n natural. Assim:
$1001 = 3n + 1 \Rightarrow n = \frac{1000}{3}$
Como $n \notin \mathbb{N}^*$, conclui-se que 1001 não é um termo dessa sequência.

3. **a)** Considerando $n = 100$, obtém-se: $f(100) = 2 \cdot 100 - 1 = 199$.
b) Considerando $a_n = 99$, obtém-se: $99 = 2n - 1 \Rightarrow n = 50$.
Portanto, o número 99 ocupa a 50ª posição dessa sequência.
c) Calculando cada termo da sequência, conforme o enunciado, obtêm-se:
$f(1) + f(7) = 2 \cdot 1 - 1 + 2 \cdot 7 - 1 = 1 + 13 = 14$
$f(2) + f(6) = 2 \cdot 2 - 1 + 2 \cdot 6 - 1 = 3 + 11 = 14$
$f(3) + f(5) = 2 \cdot 3 - 1 + 2 \cdot 5 - 1 = 5 + 9 = 14$
Portanto, conclui-se que a soma é sempre igual a 14.

4. **a)** Se $a_1 = 3$ e $a_n = 2a_{n-1} - 5$, então:
$a_2 = 2a_1 - 5 = 2 \cdot 3 - 5 = 1$
$a_3 = 2a_2 - 5 = 2 \cdot 1 - 5 = -3$
$a_4 = 2a_3 - 5 = 2 \cdot (-3) - 5 = -11$
$(3, 1, -3, -11, \ldots)$
b) Se $a_1 = 2$ e $a_n = (a_{n-1})^2$, então:
$a_2 = (a_1)^2 = (2)^2 = 4$
$a_3 = (a_2)^2 = (4)^2 = 16$
$a_4 = (a_3)^2 = (16)^2 = 256$
$(2, 4, 16, 256, \ldots)$
c) Se $a_1 = 2$ e $a_n = \frac{1}{a_{n-1}}$, então:
$a_2 = \frac{1}{a_1} = \frac{1}{2}$
$a_3 = \frac{1}{a_2} = 2$
$a_4 = \frac{1}{a_3} = \frac{1}{2}$
$\left(2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, \ldots\right)$
d) Se $a_1 = 0$ e $a_n = \sqrt{a_{n-1} + 1}$, então:
$a_2 = \sqrt{a_1 + 1} = 1$
$a_3 = \sqrt{a_2 + 1} = \sqrt{2}$
$a_4 = \sqrt{a_3 + 1} = \sqrt{\sqrt{2} + 1}$
$\left(0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{\sqrt{2} + 1}, \ldots\right)$
- Resposta possível:
No item **a**, o 1º termo é 3, e cada termo a partir do 2º é obtido pela diferença entre o dobro do termo anterior e 5.
No item **b**, o 1º termo é 2, e cada termo a partir do 2º é obtido pelo quadrado do termo anterior.
No item **c**, o 1º termo é 2, e cada termo a partir do 2º é obtido pelo inverso do termo anterior.
No item **d**, o 1º termo é 0, e cada termo a partir do 2º é obtido pela raiz quadrada da soma do termo anterior com 1.

5. **a)** Ao observar a sequência das macieiras, pode-se escrever $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 9$ e $a_4 = 16$. Portanto, o termo geral é $a_n = n^2$.
De forma análoga, ao analisar a sequência dos pinheiros, tem-se $a_1 = 8$, $a_2 = 16$, $a_3 = 24$ e $a_4 = 32$. Portanto, o termo geral é $a_n = 8n$.
b) O número de macieiras será maior do que o número de pinheiros quando:
$n^2 > 8n \Rightarrow n^2 - 8n > 0$
Resolvendo a equação $n^2 - 8 = 0$, obtém-se $n' = 0$ e $n'' = 8$.



EDITORIA DE ARTE

Portanto, $n < 0$ ou $n > 8$.
Como devemos considerar n um número natural, pois o valor de n indica a quantidade de macieiras, logo um valor positivo, tem-se $n > 8$.
Assim, o número de macieiras será maior do que o número de pinheiros a partir de $n = 9$.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

6. **a)** Considere 5 o termo central, portanto 25 e 1 serão os outros dois termos. Então $5 \neq \frac{25+1}{2}$ e, portanto, a sequência não é uma PA.

b) Como todos os termos são iguais, a sequência é uma PA constante de razão 0.

c) Em uma PA, a razão é constante e dada por:
$r = a_{n+1} - a_n$
Na sequência dada, observa-se que:
$30 - 36 = 24 - 30 = 18 - 24 = -6$
Portanto, a sequência é uma PA de razão -6.

d) Considere 16 o termo central, portanto 13 e 20 serão os outros dois termos. Então $16 \neq \frac{13+20}{2}$ e, portanto, a sequência não é uma PA.

e) Em uma PA, a razão é constante e dada por:
$r = a_{n+1} - a_n$
Na sequência dada, observa-se que:
$9 - 2 = 16 - 9 = 23 - 16 =$
$= 30 - 23 = 7$
Portanto, a sequência é uma PA de razão 7.

7. **a)** Como o primeiro termo é 10 e a razão é 3, então: (10, 13, 16, 19, 22).

b) Como o primeiro termo é -3 e a razão é 5, então: $(-3, 2, 7, 12, 17, 22)$.

c) Como o primeiro termo é $a + 2$ e a razão é a, então: $(a + 2, 2a + 2, 3a + 2, 4a + 2)$.

8. Uma sequência será uma PA quando a razão da progressão for constante.

a) $a_n = 3n - 1$
$r = a_{n+1} - a_n$
$r = 3(n + 1) - 1 - (3n - 1) =$
$= 3n + 3 - 1 - 3n + 1 = 3$
Portanto, é uma PA de razão 3.

b) $a_n = n^2$
$r = a_{n+1} - a_n$
$r = (n + 1)^2 - n^2 =$
$= n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$
Portanto, não é uma PA, pois a diferença entre os termos não é constante.

9. Sejam r a razão da PA e a seu primeiro termo. Como a é o termo anterior a 11 e sabendo que 20 é o quinto termo, utilizando o termo geral da PA, tem-se:
$20 = a + 4r \Rightarrow 20 = 11 - r + 4r \Rightarrow r = 3$
Assim, conclui-se que:
$a = 11 - 3 = 8$ e
$c = 20 - r = 20 - 3 = 17$
Pelo teorema de Pitágoras, sendo 17 cm a medida da hipotenusa e 8 cm a medida de um dos catetos, o outro terá a medida de 15 cm.
Resposta: alternativa **d**.

10. Para calcular o vigésimo termo de uma PA, é necessário ter o valor da razão e do primeiro termo. Pelo enunciado, sabe-se que $a_1 = -8$. Assim, para obter a razão, fazemos:
$r = -3 - (-8) = 5$
Utilizando o termo geral de uma PA, obtém-se:
$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow$
$\Rightarrow a_{20} = -8 + 19 \cdot 5 = 87$

11. Como o enunciado fornece os valores da razão da progressão e, também, do primeiro termo da PA, pode-se utilizar o termo geral para calcular a posição do termo igual a 44. Sendo assim:
$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow$
$\Rightarrow 44 = 4 + (n - 1) \cdot 5 \Rightarrow n = 9$
Portanto, o termo 44 ocupa a 9ª posição dessa PA.

12. Para determinar o termo geral de uma PA, é necessário conhecer o primeiro termo e a razão. Como o enunciado forneceu os dois primeiros termos da PA, tem-se que:
$r = 7 - 2 = 5$
Como $a_1 = 2$, obtém-se:
$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow$
$\Rightarrow a_n = 2 + (n - 1) \cdot 5 \Rightarrow a_n = 5n - 3$

13. Os números ímpares são (1, 3, 5, ...), portanto $a_1 = 1$ e $r = 2$, pois $r = 3 - 1 = 2$. Assim, o 60º número ímpar será o termo a_{60}. Logo:
$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow$
$\Rightarrow a_{60} = 1 + (60 - 1) \cdot 2 \Rightarrow a_{60} = 119$

14. Analisando a PA, é possível identificar que $a_1 = 5$ e $r = 5$, pois $r = 10 - 5 = 5$. Como $a_n = 785$, pode-se utilizar o termo geral da PA para calcular o valor de n, que, nesse caso, equivale à quantidade de termos da PA. Portanto:
$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow$
$\Rightarrow 785 = 5 + (n - 1) \cdot 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow 5n = 785 \Rightarrow n = 157$
Sendo assim, a PA tem 157 termos.

15. Para determinar um termo qualquer de uma PA, é necessário saber o primeiro termo dessa PA e a razão para, então, utilizar o termo geral. Sendo assim:

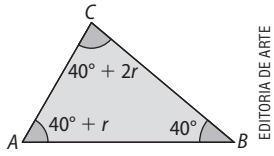
a) $a_1 = 6{,}5$
$r = 7{,}0 - 6{,}5 = 0{,}5$
$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow$
$\Rightarrow a_{15} = 6{,}5 + (15 - 1) \cdot 0{,}5 \Rightarrow$
$\Rightarrow a_{15} = 13{,}5$

b) $a_1 = 3 + \sqrt{5}$
$r = 4 - (3 + \sqrt{5}) = 1 - \sqrt{5}$
$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow$
$\Rightarrow a_{20} = 3 + \sqrt{5} + (20 - 1) \cdot (1 - \sqrt{5}) \Rightarrow$
$\Rightarrow a_{20} = 22 - 18\sqrt{5}$

c) $a_1 = 1 + \pi$ e
$r = -1 + 2\pi - (1 + \pi) = -2 + \pi$
$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow$
$\Rightarrow a_{10} = 1 + \pi + (10 - 1) \cdot (-2 + \pi) \Rightarrow$
$\Rightarrow a_{10} = -17 + 10\pi$

- Uma resposta possível seria utilizar, por exemplo, $a_1 = \frac{1}{3}$ e $a_2 = \frac{8}{9}$ e pedir o cálculo de a_5. Assim:
$a_1 = \frac{1}{3}$ e $r = \frac{8}{9} - \frac{1}{3} = \frac{5}{9}$
$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow$
$\Rightarrow a_5 = \frac{1}{3} + (5 - 1) \cdot \frac{5}{9} \Rightarrow a_5 = \frac{23}{9}$

16. Construindo um esboço que represente a situação do enunciado, tem-se:



EDITORIA DE ARTE

Portanto:
$40° + 40° + r + 40° + 2r = 180° \Rightarrow$
$\Rightarrow r = 20°$
Logo, os outros dois ângulos medem:
$\hat{A} = 40° + 20° = 60°$
$\hat{C} = 40° + 40° = 80°$

17. Considerando os dados fornecidos pelo enunciado, sabe-se que $a_8 = 16$ e $a_{10} = 20$. Sendo assim, utilizando o termo geral da PA, obtém-se o sistema:
$\begin{cases} 16 = a_1 + 7r \\ 20 = a_1 + 9r \end{cases}$
Subtraindo a segunda equação da primeira, obtém-se $r = 2$. Substituindo esse resultado em qualquer uma das equações, tem-se $a_1 = 2$.
Portanto, $a_1 = 2$ e $r = 2$.

18. De acordo com a figura, é possível observar que:
$\begin{cases} 1 \text{ triângulo: } 3 \text{ palitos} \\ 2 \text{ triângulos: } 5 \text{ palitos} \\ 3 \text{ triângulos: } 7 \text{ palitos} \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \\ 100 \text{ triângulos: } a_{100} \end{cases}$
Assim: $a_1 = 3$, $r = 2$ e $n = 100$.
Então: $a_{100} = 3 + 99 \cdot 2 \Rightarrow a_{100} = 201$.
Serão necessários 201 palitos para construir 100 triângulos.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

19. Considerando as informações do sistema, pode-se reescrevê-lo a partir da definição de PA.

$$\begin{cases} a_1 + 3a_2 = 5 \Rightarrow a_1 + 3 \cdot (a_1 + r) = 5 \\ 4a_3 - 2a_6 = -8 \Rightarrow 4 \cdot (a_1 + 2r) - 2(a_1 + 5r) = -8 \end{cases}$$

Logo:

$$\begin{cases} 4a_1 + 3r = 5 \\ 2a_1 - 2r = -8 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtêm-se $r = 3$ e $a_1 = -1$.
Portanto, a PA é dada por $(-1, 2, 5, \ldots)$.

20. A atividade trata de uma PA composta de 5 termos. Sendo assim, consideram-se os termos como $a_1 = x - 2r$, $a_2 = x - r$, $a_3 = x$, $a_4 = x + r$ e $a_5 = x + 2r$ para auxiliar os cálculos.
De acordo com as informações do enunciado, obtém-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a_1 \cdot a_5 = 28 \Rightarrow (x - 2r) \cdot (x + 2r) = 28 \\ a_2 + a_3 + a_4 = 24 \Rightarrow (x - r) + x + (x + r) = 24 \end{cases}$$

Logo:

$$\begin{cases} x^2 = 28 + 4r^2 \text{ (I)} \\ x = 8 \text{ (II)} \end{cases}$$

Substituindo (II) em (I):
$64 = 28 + 4r^2 \Rightarrow 4(r^2 - 9) = 0$
Resolvendo a equação do 2º grau, obtêm-se as raízes $r' = 3$ e $r'' = -3$. Como a razão é um número positivo, pois a PA é crescente, então deve-se desconsiderar a raiz negativa.
Calculando os termos da PA:
$a_1 = 8 - 2 \cdot 3 = 2$
$a_2 = 8 - 3 = 5$
$a_3 = 8$
$a_4 = 8 + 3 = 11$
$a_5 = 8 + 2 \cdot 3 = 14$
Logo, os números que formam a PA são (2, 5, 8, 11, 14).

21. **a)** Considerando a PA descrita no enunciado, pode-se afirmar que $a_1 = 4$ e $r = 3$, pois $r = 7 - 4$. Sendo assim, o termo geral dessa PA é $a_n = 4 + (n - 1) \cdot 3$ ou simplesmente $a_n = 3n + 1$.
Portanto, a PA pode ser associada à função cuja lei é $f(x) = 3x + 1$.

b) O domínio dessa função são os números naturais maiores do que zero ($\mathbb{N}^*$), e a imagem é a própria sequência da PA, ou seja, $\text{Im}(f) = \{4, 7, 10, 13, 16, \ldots\}$.

22. Pode-se organizar as informações do enunciado em um quadro, para ajudar a compreender a situação.

Frequência	87,9	88,1	…	107,9
Canal	200	201	…	x

Os números formam uma PA cujo primeiro termo é $a_1 = 87{,}9$ e o último, $a_n = 107{,}9$. Além disso, sabe-se que $r = 0{,}2$.

a) Considerando a fórmula do termo geral, obtém-se:
$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow 107{,}9 = 87{,}9 + (n - 1) \cdot 0{,}2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 20 = (n - 1) \cdot 0{,}2 \Rightarrow 100 = n - 1 \Rightarrow n = 101$
Portanto, podem funcionar 101 emissoras.
Para calcular o número do canal com maior frequência, deve-se considerar a PA cujo primeiro termo é $a_1 = 200$, $n = 101$ e $r = 1$.
$a_{101} = 200 + (101 - 1) \cdot 1 \Rightarrow a_{101} = 300$
Portanto, o número do canal com maior frequência é 300.

b) Deve-se calcular a_{86} na PA que representa a sequência de frequências, pois, como a_1 corresponde ao canal 200, então o canal 285 será a_{86}.
$a_{86} = 87{,}9 + (86 - 1) \cdot 0{,}2 \Rightarrow a_{86} = 87{,}9 + 85 \cdot 0{,}2 = 104{,}9$
Então, a frequência do canal 285 é 104,9 MHz.

23. A atividade trata de uma PA de razão 2 com cinco termos.
Considerando a_1 como o primeiro termo, os demais podem ser representados por:
$a_2 = a_1 + 2$ $\qquad$ $a_4 = a_1 + 6$
$a_3 = a_1 + 4$ $\qquad$ $a_5 = a_1 + 8$
Com base nas informações do enunciado, tem-se:
$a_1 + a_1 + 2 + a_1 + 4 + a_1 + 6 + a_1 + 8 = 110 \Rightarrow$
$\Rightarrow 5a_1 = 110 - 20 \Rightarrow a_1 = 18$
Logo, 18 cm é a altura do menor livro.
Resposta: alternativa **d**.

24. Analisando as duas primeiras parcelas, nota-se que a razão da PA é $r = 6$, pois $126 - 120 = 6$.
Sabendo o valor da primeira parcela e a razão da PA, encontram-se os valores, em reais, da 19ª parcela que Joana não pagou e da última parcela paga por ela:
$a_{19} = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow a_{19} = 120 + 18 \cdot 6 \Rightarrow a_{19} = 228$
$a_{24} = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow a_{24} = 120 + 23 \cdot 6 \Rightarrow a_{24} = 258$
Assim, o valor total pago por Joana, segundo o enunciado, será a soma das 24 parcelas, com exceção da 19ª:

$$S_{24} - a_{19} = \frac{(a_1 + a_{24}) \cdot 24}{2} - a_{19} = \frac{(120 + 158) \cdot 24}{2} - 228 = 4308$$

Portanto, R$ 4.308,00 foi o valor total pago por Joana.
Resposta: alternativa **d**.

25. Como a razão de uma PG é, a partir do segundo termo, o quociente entre cada termo e o respectivo antecessor, pode-se concluir que:

a) $q = \frac{12}{3} \Rightarrow q = 4$

b) $q = \frac{-15}{5} \Rightarrow q = -3$

c) $q = \frac{5}{\sqrt{5}} \Rightarrow q = \sqrt{5}$

d) $q = \frac{2^5}{2} \Rightarrow q = 2^4$

e) $q = \frac{\frac{5}{2}}{5} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$

f) $q = \frac{10}{10^{-1}} \Rightarrow q = 10^2$

26. Segundo os critérios de classificação de uma PG, pode-se afirmar que:

a) Constante, pois $q = 1$.

b) Decrescente, pois $a_1 = 1$ e $q = \frac{1}{2}$.

c) Decrescente, pois $a_1 = -2$ e $q = 4$.

d) Oscilante, pois $a_1 = 3$ e $q = -2$.

e) Crescente, pois $a_1 = 4$ e $q = \frac{3}{2}$.

f) Crescente, pois $a_1 = -7$ e $q = \frac{1}{4}$.

27. Para verificar se a sequência $a_n = 5 \cdot 4^{n-2}$ é uma PG, deve-se tentar identificar o termo a_1 e a razão q, sendo $a_1 \neq 0$ e q uma constante. Assim:
$a_n = 5 \cdot 4^{n-2} \Rightarrow a_1 = 5 \cdot \frac{4^1}{4^2} \Rightarrow a_1 = \frac{5}{4}$
$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5 \cdot 4^{n+1-2}}{5 \cdot 4^{n-2}} \Rightarrow q = 4^{n-1-n+2} = 4$
Portanto, a sequência é uma PG cujo primeiro termo é $a_1 = \frac{5}{4}$ e $q = 4$.

28. A sequência (a, b, c) é uma PA de razão $r = 5$. Então:

$$\begin{cases} b = a + 5 \quad \text{(I)} \\ c = a + 10 \text{ (II)} \end{cases}$$

A sequência $(a + 2, b, c - 1)$ é uma PG. Então:

$$\frac{b}{a + 2} = \frac{c - 1}{b} \text{ (III)}$$

Substituindo as expressões (I) e (II) na expressão (III), obtém-se:

$$\frac{a + 5}{a + 2} = \frac{a + 10 - 1}{a + 5} \Rightarrow a = 7$$

Substituindo o valor de a nas expressões (I) e (II), obtém-se:

$$\begin{cases} b = 7 + 5 = 12 \\ c = 7 + 10 = 17 \end{cases}$$

Logo, $a + b + c = 36$.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

29. Como a sequência $(3, a, b)$ é uma PA crescente, pode-se afirmar que $3 < a < b$.
Além disso:
$a - 3 = b - a \Rightarrow b = 2a - 3$ (I)
Como a sequência $(a, b, 8)$ é uma PG, pode-se afirmar que:
$\frac{b}{a} = \frac{8}{b} \Rightarrow b^2 = 8a$ (II)
Substituindo (I) em (II):
$(2a - 3)^2 = 8a \Rightarrow 4a^2 - 20a + 9 = 0$
Resolvendo a equação do 2º grau, obtêm-se as raízes $a' = \frac{9}{2}$ e $a'' = \frac{1}{2}$.
Como $a > 3$, deve-se descartar a segunda raiz.
Substituindo o valor de a em (I), obtém-se $b = 6$.
Portanto, $a = \frac{9}{2}$ e $b = 6$.

30. Pelo enunciado, é possível identificar que $a_1 = 512$ e $q = \frac{1}{2}$, pois $q = \frac{256}{512} = \frac{1}{2}$.
Então:
$a_6 = 512 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \Rightarrow a_6 = 16$

31. Pelo enunciado, é possível identificar que $a_6 = 2$ e $q = \frac{1}{4}$. Assim:
$a_6 = a_1 \cdot q^5 \Rightarrow 2 = a_1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 \Rightarrow a_1 = 2048$

32. Pelo enunciado, têm-se $a_1 = \frac{1}{4}$ e $a_7 = 16$.
Portanto:
$a_7 = a_1 \cdot q^6 \Rightarrow 16 = \frac{1}{4} \cdot q^6 \Rightarrow q = \pm 2$

33. Pelo enunciado, têm-se $a_5 = 32$ e $a_8 = 256$.
Dessa forma:
$\frac{a_8}{a_5} = \frac{a_1 \cdot q^7}{a_1 \cdot q^4} = \frac{256}{32} \Rightarrow q^3 = 8 \Rightarrow q = 2$
Com o valor de q, é possível calcular a_1.
Assim:
$a_5 = 32 \Rightarrow a_1 \cdot 2^4 = 32 \Rightarrow a_1 = 2$

34. Com as informações fornecidas pelo enunciado, é possível elaborar o seguinte sistema:
$\begin{cases} a_2 - a_1 = 9 \\ a_5 - a_4 = 576 \end{cases}$
Como a diferença entre a_2 e a_1 (ou entre a_5 e a_4) é diferente de zero, então q é diferente de 1.
Aplicando a definição de PG, obtêm-se:
$\begin{cases} a_1 \cdot q - a_1 = 9 \\ a_1 \cdot q^4 - a_1 \cdot q^3 = 576 \end{cases} \Rightarrow$
$\Rightarrow \begin{cases} a_1 \cdot (q - 1) = 9 \\ a_1 \cdot q^3 \cdot (q - 1) = 576 \end{cases}$
Ao dividir a segunda equação pela primeira, obtém-se:
$\frac{\cancel{a_1} \cdot q^3 \cdot \cancel{(q-1)}}{\cancel{a_1} \cdot \cancel{(q-1)}} = \frac{576}{9} \Rightarrow q^3 = 64 \Rightarrow$
$\Rightarrow q = 4$
Como $a_1(q - 1) = 9$, então:
$3a_1 = 9 \Rightarrow a_1 = 3$

35. Considerando $a_1 = 18$, então $a_4 = b$, pois foram inseridos dois termos entre eles. Como o enunciado afirma que a razão é 3, então:
$b = a_1 \cdot q^3 \Rightarrow b = 18 \cdot 3^3 \Rightarrow b = 486$

36. Pelo enunciado, sabe-se que $a_1 = 1$ e $a_2 = 9$. Logo:
$q = \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow q = \frac{9}{1} = 9$
Portanto:
$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow 6561 = 1 \cdot 9^{n-1} \Rightarrow$
$\Rightarrow 3^8 = 3^{2(n-1)} \Rightarrow 8 = 2n - 2 \Rightarrow n = 5$

37. Pelo enunciado, sabe-se que $a_1 = 5$ e $a_2 = 50$. Então:
$q = \frac{50}{5} = 10$
Assim:
$a_n = 500\,000 \Rightarrow a_n = 5 \cdot 10^5 \Rightarrow$
$\Rightarrow 5 \cdot 10^{n-1} = 5 \cdot 10^5 \Rightarrow$
$\Rightarrow n - 1 = 5 \Rightarrow n = 6$
Portanto, a soma de todos os termos será:
$S_6 = \frac{5 \cdot (10^6 - 1)}{10 - 1} \Rightarrow S_6 = 555\,555$

38. Pelo enunciado, sabe-se que $a_1 = 3$ e $a_2 = 6$. Dessa forma, $q = \frac{6}{3} = 2$.
Como a soma de todos os termos é $S_n = 765$, então:
$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow 765 = \frac{3 \cdot (2^n - 1)}{2 - 1} \Rightarrow$
$\Rightarrow n = 8$
Portanto, 8 termos.

39. Ao analisar a quantidade de tábuas em cada pilha, é possível observar que se forma a sequência (1, 2, 4, 8, ...), uma PG, em que $a_1 = 1$ e $q = 2$.

a) Ao final de 9 operações, tem-se:
$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_9 = 1 \cdot 2^8 \Rightarrow$
$\Rightarrow a_9 = 256$
Portanto, 256 tábuas.

b) Como cada tábua tem 0,5 cm de espessura, a altura da pilha, em centímetro, será:
$256 \cdot 0{,}5 = 128$
Portanto, a pilha terá 1,28 m de altura.

40. Pelo enunciado, sabe-se que $a_1 = 2$ e $q = 2$; então, ao final de 12 dias, a quantidade de água perdida é dada por:
$S_{12} = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{2(2^{12} - 1)}{2 - 1} = 2 \cdot 4095 =$
$= 8190 \Rightarrow S_{12} = 8190$
Portanto, até o 12º dia, serão perdidos 8190 litros de água.

41. Observando a sequência de cada item, é possível identificar o termo a_1 e calcular a razão q.

a) $a_1 = 5$; $q = \frac{1}{5}$
Portanto, o termo geral é:
$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_n = 5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$
Considerando que a função possui domínio $\mathbb{N}^*$, então:
$f(n) = 5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$
$f(n) = 5 \cdot \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^n}{\frac{1}{5}} = 25 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n$
A soma de todos os termos é:
$S = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{5}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{25}{4}$

b) $a_1 = 2^{-2} = \frac{1}{4}$; $q = \frac{2^{-4}}{2^{-2}} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$
Portanto, o termo geral é:
$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_n = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$
Considerando que a função possui domínio $\mathbb{N}^*$, então:
$f(n) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \Rightarrow f(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n$
A soma de todos os termos é:
$S = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{2^{-2}}{1 - 2^{-2}} = \frac{1}{3}$

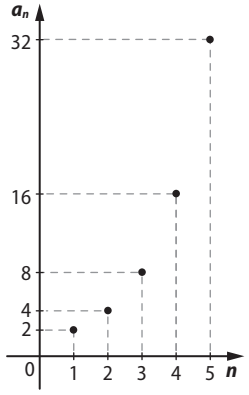
c) $a_1 = 9^{-1}$; $q = \frac{10^{-1}}{9^{-1}} = \frac{9}{10}$
Portanto, o termo geral é:
$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_n = \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$
Considerando que a função possui domínio $\mathbb{N}^*$, então:
$f(n) = \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} \Rightarrow$
$\Rightarrow f(n) = \frac{1}{9} \cdot \frac{\left(\frac{9}{10}\right)^n}{\frac{9}{10}} = \frac{10}{81} \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^n$
A soma de todos os termos é:
$S = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{9^{-1}}{1 - \frac{9}{10}} = \frac{10}{9}$

42. a)

n	$a_n = 2^n$
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

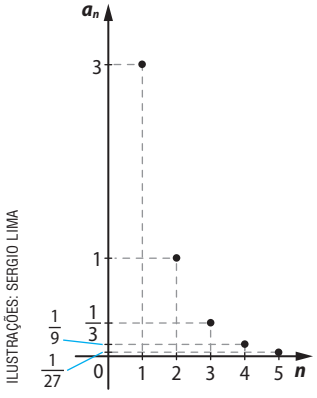
Ao plotar os pontos em um plano cartesiano, obtém-se o seguinte gráfico:



b)

n	$a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$
1	3
2	1
3	$\frac{1}{3}$
4	$\frac{1}{9}$
5	$\frac{1}{27}$

Ao plotar os pontos em um plano cartesiano, obtém-se o seguinte gráfico:



ILUSTRAÇÕES: SERGIO LIMA

43. Para calcular a soma dos termos de uma PG infinita, é necessário identificar o primeiro termo a_1 e a razão q. Assim:

a) $a_1 = 80x$; $q = \frac{40x}{80x} = \frac{1}{2}$

Pelo enunciado, sabe-se que a soma de todos os termos do primeiro membro da equação é 320, então:

$S = \frac{a_1}{1-q} \Rightarrow 320 = \frac{80x}{1-\frac{1}{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow 80x = 160 \Rightarrow x = 2$

$S = \{2\}$

b) $a_1 = 5^x$; $q = \frac{5^{x-1}}{5^x} = \frac{1}{5}$

Pelo enunciado, sabe-se que a soma de todos os termos do primeiro membro da equação é $\frac{625}{4}$, então:

$\frac{625}{4} = \frac{5^x}{1-\frac{1}{5}} \Rightarrow 125 = 5^x \Rightarrow x = 3$

$S = \{3\}$

44. Como a bola sobe e desce, deve-se calcular, separadamente, a distância percorrida somente na descida e, em seguida, calcular a distância percorrida somente na subida. A distância percorrida pela bola será a soma dessas duas distâncias. Portanto:

I. Soma das descidas

Primeiro deslocamento de descida:

$a_1 = 30$ e $r = \frac{1}{3}$.

Logo:

$d_1 = \frac{a_1}{1-q} \Rightarrow d_1 = \frac{30}{1-\frac{1}{3}} = 45$

II. Soma das subidas

Primeiro deslocamento de subida:

$a_1 = 10$ e $r = \frac{1}{3}$.

Logo:

$d_2 = \frac{a_1}{1-q} \Rightarrow d_2 = \frac{10}{1-\frac{1}{3}} = 15$

Distância total percorrida:

$d = d_1 + d_2 = 45 + 15 \Rightarrow d = 60$

A distância total percorrida pela bola será de 60 metros.

45. Perímetro é a medida do comprimento do contorno de uma figura e, no caso apresentado, o perímetro do quadrado corresponde a 4 vezes a medida do lado, já que a figura é um quadrado.

Para determinar a soma de todos os perímetros da sequência, é necessário o valor do primeiro termo e a razão da sequência. Sendo assim:

$a_1 = 4\ell$ e $a_2 = \frac{4\ell}{2} = 2\ell$

Então:

$q = \frac{2\ell}{4\ell} = \frac{1}{2}$

$S = \frac{a_1}{1-q} \Rightarrow S = \frac{4\ell}{1-\frac{1}{2}} = 8\ell$

46. **a)** Pelo enunciado, sabe-se que $a_1 = 5$ e $a_3 = 45$. Logo:

$a_3 = a_1 \cdot q^2 \Rightarrow 45 = 5 \cdot q^2 \Rightarrow q = \pm 3$

Como a razão é positiva, $q = 3$.

Sendo assim, a soma dos 6 primeiros termos será:

$S_6 = \frac{5 \cdot (3^6 - 1)}{3 - 1} \Rightarrow S_6 = \frac{3\,640}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_6 = 1\,820$

b) Como 112 é múltiplo de 4, não deve ser considerado. Assim, a soma dos primeiros 111 números inteiros é:

$S_{111} = \frac{(1 + 111) \cdot 111}{2} = 6\,216$

Agora, é necessário calcular a soma de todos os números múltiplos de 4 e menores do que 112. O maior número múltiplo de 4, dentro do intervalo, é 108, pois $112 - 4 = 108$, e o menor é o próprio 4. Sendo assim, tem-se a PA (4, 8, 12, 16, …, 108) de n termos. Desse modo:

$108 = 4 + (n - 1) \cdot 4 \Rightarrow n = 27$

Calculando a soma dos termos:

$S_{M(4)} = \frac{(4 + 108) \cdot 27}{2} = 1\,512$

Assim, a soma de todos os números inteiros positivos menores do que 112 e não divisíveis por 4 é:

$S = 6\,216 - 1\,512 = 4\,704$

c) O 20º termo dessa PA (a_{20}) pode ser calculado da seguinte maneira:

$a_{20} = S_{20} - S_{19}$

Portanto, utilizando a fórmula fornecida pelo enunciado, obtém-se:

$a_{20} = S_{20} - S_{19} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{20} = 20(2 \cdot 20 + 1) - 19(2 \cdot 19 + 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{20} = 79$

Atividades complementares

1. Analisando as vendas mensais dos produtos I e II, percebe-se que cada uma pode ser expressa por uma PA. A razão nas vendas do produto I é 10 e nas vendas do produto II é igual a −20.

Vendas produto I: (80, 90, 100, 110, 120, 130, …)

Vendas produto II: (190, 170, 150, 130, 110, 90, …)

Nota-se que, a partir do quinto termo dessas progressões, as vendas do produto I superam as vendas do produto II. Como o termo a_1 representa o mês de abril, então o termo a_5 representa o mês de agosto. Assim, o gerente cessará a produção do produto II em setembro.

Resposta: alternativa **d**.

2. Considerando as propriedades de uma PA, pode-se afirmar que $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$, logo:

$x + 14 = \frac{5x - 5 + 6x - 3}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x + 28 = 11x - 8 \Rightarrow x = 4$

Portanto, a soma dos 3 termos será:

$S = 5x - 5 + x + 14 + 6x - 3 =$

$= 12x + 6 = 12 \cdot 4 + 6 = 54$

Resposta: alternativa **b**.

3. Com base nas figuras, é possível notar que a quantidade de quadrados centrais aumenta de acordo com a regra n^2, em que n representa o número da etapa. Além disso, há uma quantidade fixa de 4 quadrados que não varia de etapa para etapa. Assim, pode-se concluir que a lei que rege a quantidade de quadrados pode ser escrita por $a_n = n^2 + 4$.

Portanto, o número de quadrados na etapa 10 será:

$a_{10} = 10^2 + 4 = 104$

Resposta: alternativa **c**.

4. Como a PA é formada a partir do segundo dia, pode-se entender que a sequência de peças montadas diariamente é (40, a_1, a_2, …, a_{10}). Como há 1 000 peças no total, conclui-se que a quantidade de peças relacionadas à PA é 960, pois $1\,000 - 40 = 960$.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Como o segundo dia (a_1) corresponde a 60% do número de peças montadas no sétimo dia (a_6), então:
$a_1 = 0{,}6(a_6) \Rightarrow a_1 = 0{,}6(a_1 + 5r) \Rightarrow$
$\Rightarrow 0{,}4a_1 = 3r \Rightarrow a_1 = 7{,}5r$
Pode-se também afirmar que:
$a_{10} = a_1 + 9r \Rightarrow a_{10} = 7{,}5r + 9r \Rightarrow$
$\Rightarrow a_{10} = 16{,}5r$
Como a soma de todos os termos é calculada por $S = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$, conclui-se que:
$960 = \frac{(7{,}5r + 16{,}5r) \cdot 10}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow 24r = 192 \Rightarrow r = 8$
Como o nono dia representa o termo a_8 da PA, tem-se:
$a_8 = a_1 + 7r \Rightarrow$
$\Rightarrow a_8 = 7{,}5r + 7r = 14{,}5 \cdot 8 = 116$
Portanto, no 9º dia foram montadas 116 peças.
Resposta: alternativa **c**.

5. Os andares trabalhados por João foram (1, 3, 5, 7, …), e os andares trabalhados por Pedro foram (1, 4, 7, 10, …); portanto, os andares que foram reparados pelos dois ao mesmo tempo foram (1, 7, 13, …, a_{20}).
Assim, essa sequência possui $a_1 = 1$ e $r = 6$. Logo, o termo geral será:
$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow a_n = 6n - 5$
Sendo assim, conclui-se que:
$a_{20} = 6 \cdot 20 - 5 = 115$
Logo, esse edifício possui 115 andares.
Resposta: alternativa **d**.

6. Como entre 1 e 100 há exatamente 50 números ímpares, segundo o enunciado, a soma de todos os números ímpares entre 1 e 100 será 50^2.
Resposta: alternativa **c**.

7. Conforme o enunciado, a produção de televisores dobrou a cada mês em comparação ao mês anterior. Ou seja, a produção mensal corresponde aos termos de uma PG de razão 2, cuja soma dos termos é igual ao número total de televisores produzidos no período.
Sendo assim, é possível concluir que $a_1 = x$, $q = 2$ e $S_{11} = 204\,700$, logo:
$S_{11} = \frac{a_1(q^{11} - 1)}{q - 1} \Rightarrow$
$\Rightarrow 204\,700 = \frac{x(2^{11} - 1)}{2 - 1} \Rightarrow x = 100$
Resposta: alternativa **a**.

8. Com base no enunciado, é possível construir um sistema:
$\begin{cases} a_1 + a_3 + a_5 = 5 \\ a_2 + a_4 + a_6 = 10 \end{cases}$
Aplicando a definição das progressões geométricas, obtém-se:
$\begin{cases} a_1 \cdot (1 + q^2 + q^4) = 5 \text{ (I)} \\ a_1 q(1 + q^2 + q^4) = 10 \text{ (II)} \end{cases}$
Dividindo a equação (II) pela equação (I), obtém-se:
$q = \frac{10}{5} = 2$
Resposta: alternativa **d**.

9. A partir do enunciado, pode-se afirmar que o primeiro termo da PG é $\frac{1}{125}$.
A razão pode ser calculada como:
$q = \frac{\frac{1}{25}}{\frac{1}{125}} = \frac{125}{25} = 5$
O último termo é 3 125; então, pode-se afirmar que:
$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow 3\,125 = 5^{-3} \cdot 5^{n-1} \Rightarrow$
$\Rightarrow 5^5 = 5^{n-4} \Rightarrow n = 9$
Resposta: alternativa **e**.

10. A partir do enunciado, pode-se afirmar que o primeiro termo da PG é -7. A razão pode ser calculada como:
$q = \frac{21}{-7} = -3$
Assim, o sexto termo é:
$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_6 = -7 \cdot (-3)^{6-1} \Rightarrow$
$\Rightarrow a_6 = 1701$
Resposta: alternativa **b**.

11. Segundo o enunciado, o *site* tem um número de acessos diários equivalente ao triplo dos acessos do dia anterior, podendo ser associado à PG (3, 9, 27, …, 2187), em que $a_1 = 3$ e $q = 3$. Assim, para encontrar o dia em que o *site* teve 2 187 acessos, utiliza-se o termo geral, ou seja:
$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow 2\,187 = 3 \cdot 3^{n-1} \Rightarrow$
$\Rightarrow 3^6 = 3^{n-1} \Rightarrow n = 7$
Portanto, no dia 7 ocorreram 2 187 acessos.
Resposta: alternativa **b**.

12. Segundo o enunciado, pode-se interpretar que o valor do perímetro de cada triângulo, organizado em uma sequência, representará uma PG em que $a_1 = 24$ e $q = \frac{1}{2}$.
Portanto, a soma será:
$S = \frac{a_1}{1 - q} \Rightarrow S = \frac{24}{1 - \frac{1}{2}} = 48$
Resposta: alternativa **c**.

13. Sabe-se que $a_5 = a_1 \cdot q^4$ e que $a_5 = 9 \cdot a_1$, então:
$a_1 \cdot q^4 = 9 \cdot a_1 \Rightarrow q^4 = 9 \Rightarrow q = \pm\sqrt{3}$
Porém, $q = \sqrt{3}$ não é conveniente, pois $a_1 > 0$ e $a_6 = -9\sqrt{3}$, e, assim, a razão precisa ser um valor menor do que zero.
Portanto, $q = -\sqrt{3}$. Como $a_6 = a_2 \cdot q^4$, tem-se:
$-9\sqrt{3} = a_2 \cdot (-\sqrt{3})^4 \Rightarrow$
$\Rightarrow -9\sqrt{3} = a_2 \cdot 9 \Rightarrow a_2 = -\sqrt{3}$
Portanto, o produto $a_2 \cdot a_7$ será:
$a_2 \cdot a_7 = a_2 \cdot a_6 \cdot q =$
$= (-\sqrt{3}) \cdot (-9\sqrt{3}) \cdot (-\sqrt{3}) = -27\sqrt{3}$
Resposta: alternativa **a**.

14. Elaborando uma sequência com os 10 termos, a partir das orientações do fluxograma, obtém-se:
$\left(-2, -\frac{1}{2}, -2, -\frac{1}{2}, -2, -\frac{1}{2}, -2, -\frac{1}{2}, -2 \text{ e } -\frac{1}{2}\right)$
Adicionando todos os valores da sequência, obtém-se $-12{,}5$.
Resposta: alternativa **e**.

15. Considerando $a_n = -250$, em relação à sequência da PA, tem-se $a_1 = -2$ e $r = -4$.
Assim, pode-se afirmar que:
$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow$
$\Rightarrow -250 = -2 + (n - 1) \cdot (-4) \Rightarrow$
$\Rightarrow n = 63$
Em relação à sequência da PG, tem-se $a_1 = 3$ e $q = 2$. Então:
$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_9 = \frac{3 \cdot (2^9 - 1)}{2 - 1} \Rightarrow$
$\Rightarrow S_9 = 1533 \Rightarrow s = 1533$
Portanto, $s - n = 1533 - 63 = 1470$.
Resposta: alternativa **02**.

16. Observando as figuras, nota-se que, em cada uma, a partir da segunda, a parte escura equivale a $\frac{3}{4}$ da parte escura da figura anterior.
Sendo assim, considerando $a_1 = 1$ (área inteira), tem-se:
$a_1 = 1$
$a_2 = \frac{3}{4} \cdot a_1 = \frac{3}{4} \cdot 1 = \frac{3}{4}$
$a_3 = \frac{3}{4} \cdot a_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$
$a_4 = \frac{3}{4} \cdot a_3 = \frac{3}{4} \cdot \frac{9}{16} = \frac{27}{64}$
$a_5 = \frac{3}{4} \cdot a_4 = \frac{3}{4} \cdot \frac{27}{64} = \frac{81}{256}$
Logo, a sequência é uma PG de razão $\frac{3}{4}$.
Resposta: alternativa **a**.

Capítulo 3 • Função definida por mais de uma sentença

Atividades

1. **a)** Como a porcentagem aplicada é relacionada à faixa de unidades vendidas e instaladas, a função é definida por mais de uma sentença.

b) Do enunciado, sabe-se que cada alarme custa R$ 120,00. Para calcular o valor utilizando a porcentagem de cada unidade, deve-se realizar o seguinte procedimento:
De 1 a 25: $120 \cdot \frac{3}{100} = 3{,}6$
De 26 a 50: $120 \cdot \frac{7}{100} = 8{,}4$
De 51 a 75: $120 \cdot \frac{12}{100} = 14{,}4$
De 76 a 100: $120 \cdot \frac{17}{100} = 20{,}4$
Mais de 100: $120 \cdot \frac{22}{100} = 26{,}4$

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Agora, com as informações do enunciado, é possível determinar a lei de formação da função, com base no valor fixo recebido acrescido da porcentagem por unidade, no intervalo indicado no quadro. Portanto:

$$f(x) = \begin{cases} 1200, \text{ se } x = 0 \\ 1200 + 3{,}6x, \text{ se } 0 < x \leqslant 25 \\ 1200 + 8{,}4x, \text{ se } 25 < x \leqslant 50 \\ 1200 + 14{,}4x, \text{ se } 50 < x \leqslant 75 \\ 1200 + 20{,}4x, \text{ se } 75 < x \leqslant 100 \\ 1200 + 26{,}4x, \text{ se } x > 100 \end{cases}$$

c) Neste caso, deve-se observar o intervalo em que se encaixa o valor dado (82 alarmes) e aplicar esse valor na função f correspondente:
$f(x) = 1200 + 20{,}4x \Rightarrow f(82) = 1200 + 20{,}4 \cdot 82 = 2\,872{,}8$.
Portanto, o salário foi R$ 2.872,80.

d) Considerando que o funcionário recebeu R$ 1.502,40 e supondo que ele vendeu até 25 alarmes, tem-se:
$1502{,}4 = 1200 + 3{,}6x \Rightarrow 3{,}6x = 302{,}40 \Rightarrow x = 84$.
Portanto, como $84 > 25$, sabe-se que o funcionário vendeu mais de 25 alarmes.
Supondo que ele vendeu de 26 a 50 alarmes, tem-se que:
$1502{,}4 = 1200 + 8{,}4x \Rightarrow 8{,}4x = 302{,}40 \Rightarrow x = 36$.
Como $25 < 36 \leqslant 50$, pode-se concluir que o funcionário vendeu 36 alarmes.

2. a) Como $3 \leqslant 3$, então utiliza-se:
$f(x) = 4x - 1 \Rightarrow f(3) = 4 \cdot 3 - 1 = 11$
Como $5 \geqslant 1$, então utiliza-se:
$g(x) = -x \Rightarrow g(5) = -5$
Portanto, $f(3) - g(5) = 11 - (-5) = 16$.

b) Como $0 < 1$, então utiliza-se:
$g(x) = x^2 + 4x + 3 \Rightarrow g(0) = 0^2 + 4 \cdot 0 + 3 = 3$
Como $-1 \leqslant 3$, então utiliza-se:
$f(x) = 4x - 1 \Rightarrow f(-1) = 4 \cdot (-1) - 1 = -5$
Portanto, $g(0) + 2 \cdot f(-1) = 3 + 2 \cdot (-5) = -7$.

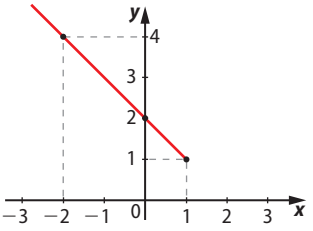
c) Como $4 > 3$, então utiliza-se:
$f(x) = x^2 + 2 \Rightarrow f(4) = 4^2 + 2 = 18$
Como $1 \geqslant 1$, então utiliza-se:
$g(x) = -x \Rightarrow g(1) = -1$
Portanto, $\frac{f(4)}{g(1)} = \frac{18}{-1} = -18$.

3. a) Como $f(x) = 0$, então:
Para $x < 0$: $3x + 4 = 0 \Rightarrow x = -\frac{4}{3}$
Para $x \geqslant 0$: $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$
Assim, para $f(x) = 0$, obtém-se:
$x = -\frac{4}{3}$ ou $x = 2$.

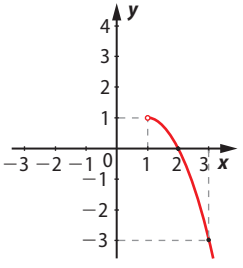
b) Como $f(x) = -2$, então:
Para $x < 0$: $3x + 4 = -2 \Rightarrow x = -2$
Para $x \geqslant 0$: $x - 2 = -2 \Rightarrow x = 0$
Assim, para $f(x) = -2$, obtém-se: $x = -2$ ou $x = 0$.

4. a) A função f é formada por partes de duas sentenças.
Para traçar o gráfico de $f_1(x) = -x + 2$, pode-se determinar dois pontos pertencentes ao gráfico, anteriores ao extremo $x = 1$. Como a função f_1 é válida para $x \leqslant 1$, a bolinha é fechada no ponto em que $x = 1$. Assim:

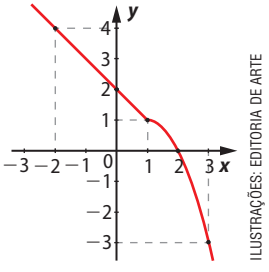
x	$f_1(x) = -x + 2$	(x, y)
-2	$f_1(-2) = -(-2) + 2 = 4$	$(-2, 4)$
0	$f_1(0) = -(0) + 2 = 2$	$(0, 2)$
1	$f_1(1) = -(1) + 2 = 1$	$(1, 1)$



Para traçar o gráfico da função $f_2(x) = -x^2 + 2x$, pode-se determinar o vértice da parábola, os zeros e outro ponto pertencente ao gráfico, além do extremo $x = 1$. Como a função f_2 é válida para $x > 1$, a bolinha é aberta no ponto em que $x = 1$.
Assim:
$f_2(x) = -x^2 + 2x$, se $x > 1$
$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \cdot (-1)} = \frac{-2}{-2} = 1$
$f_2(1) = -(1)^2 + 2 \cdot 1 = -1 + 2 = 1$
Para encontrar os zeros da função, considera-se $f_2(x) = 0$. Então:
$-x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(-x + 2) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 2$.
Como $x = 0$ não faz parte do domínio de f_2, então obtém-se o ponto $(2, 0)$.
Além disso, será necessário calcular mais um ponto para essa função. Considere $x = 3$:
$f_2(3) = -(3)^2 + 2 \cdot 3 = -9 + 6 = -3$



Portanto, reunindo os gráficos de f_1 e f_2 em um mesmo plano cartesiano, obtém-se o gráfico da função f:



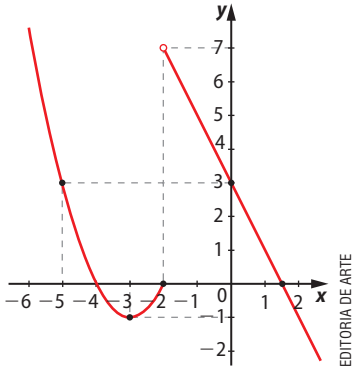
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Para determinar o intervalo de decrescimento e crescimento, analisaremos o gráfico construído. Note que, para quaisquer valores x_1 e x_2 distintos, em que $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) > f(x_2)$. Logo, essa função é decrescente em todo seu domínio.

b) Denotando a primeira sentença da função por g_1, tem-se:
$g_1(x) = x^2 + 6x + 8$, se $x \leqslant -2$.
Para encontrar o vértice da parábola descrita pela função quadrática limitada para $x \leqslant 2$, fazemos:
$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2 \cdot 1} = \frac{-6}{2} = -3$
$g_1(-3) = (-3)^2 + 6 \cdot (-3) + 8 = -1$
Então, o vértice da parábola descrita pela função limitada $g_1(x)$ é $V(-3, -1)$.
Para encontrar os zeros de g_1, deve-se resolver a equação $x^2 + 6x + 8 = 0$, cujas raízes são dadas por $x' = -4$ e $x'' = -2$.
Determinando mais um ponto do gráfico, considere $x = -5$:
$g_1(-5) = (-5)^2 + 6 \cdot (-5) + 8 = 3$.
Denotando a segunda sentença da função por g_2, tem-se:
$g_2(x) = -2x + 3$, se $x > -2$.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Para encontrar o zero da função, fazemos $g_2(x) = 0$. Então: $-2x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} = 1,5$.
Para identificar o ponto de intersecção com o eixo y, considere $x = 0$. Então: $g_2(0) = -2 \cdot 0 + 3 = 3$.
Também calcula-se o valor de g_2 para $x = -2$, que é o extremo do intervalo: $g_2(-2) = -2 \cdot (-2) + 3 = 7$.
Compondo os gráficos de g_1 e g_2 em um mesmo plano cartesiano, temos o gráfico de $g(x)$:



Para determinar o intervalo de decrescimento e crescimento, analisaremos o gráfico construído. Note que, para quaisquer $x_1, x_2 \in [-3, -2]$ tais que $x_1 < x_2$, tem-se $g(x_1) < g(x_2)$, ou seja, nesse intervalo, a função é crescente. Já para quaisquer $x_1, x_2 \in]-\infty, -3[$ tais que $x_1 < x_2$, tem-se $g(x_1) > g(x_2)$, ou seja, a função é decrescente nesse intervalo. De forma similar, para quaisquer $x_1, x_2 \in]-2, +\infty[$ tais que $x_1 < x_2$, tem-se $g(x_1) > g(x_2)$, ou seja, a função também é decrescente nesse intervalo.

5. Com base na análise do gráfico, percebe-se que se trata de uma função definida por três sentenças, em que a primeira delas (g_1) corresponde a um trecho de uma função afim decrescente, a segunda sentença (g_2) representa um trecho de uma função constante e a terceira sentença (g_3) representa um trecho de uma função afim crescente.
A lei geral de formação de uma função afim é $g(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$; então, com dois pontos para cada sentença, é possível determinar a lei da função.
Observe que os pontos $(-3, 0)$ e $(-1, -2)$ fazem parte do gráfico de $g_1(x) = ax + b$.
Substituindo e resolvendo o sistema, obtém-se:
$\begin{cases} -3a + b = 0 \\ -a + b = -2 \end{cases} \Rightarrow a = -1 \text{ e } b = -3$
Portanto, $g_1(x) = -x - 3$, para $x \leqslant -1$.
A segunda sentença do gráfico corresponde à função constante $g_2(x) = -2$, para $-1 < x \leqslant 1$.
Os pontos $(1, -2)$ e $(3, 0)$ fazem parte do gráfico de $g_3(x) = ax + b$.
Substituindo e resolvendo o sistema, obtém-se:
$\begin{cases} a + b = -2 \\ 3a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 1 \text{ e } b = -3$
Portanto, $g_3(x) = x - 3$, para $x > 1$.
Assim, a lei de formação da função g pode ser descrita por:

$$g(x) = \begin{cases} -x - 3, \text{ se } x \leqslant -1 \\ -2, \text{ se } -1 < x \leqslant 1 \\ x - 3, \text{ se } x > 1 \end{cases}$$

6. **a)** Resposta pessoal.
b) Resposta pessoal. Resposta possível: O Programa de Incentivo Social (PIS) e a Contribuição para Financiamento da Seguridade Social (Cofins) são dois tributos que incidem sobre a receita bruta das empresas. O Imposto sobre Operações relativas à Circulação de Mercadorias e sobre Prestações de Serviços de Transporte Interestadual e de Comunicação (ICMS) é um tributo considerado essencial para os estados, incidindo em quase todas as operações comerciais, como compra de alimentos, eletrodomésticos, roupas, combustível etc. A alíquota varia de estado para estado.
c) De acordo com a tabela, a respeito do custo com o valor variável, tem-se os seguintes gastos, em reais, dependendo do consumo:
1 m³ custa: 2,79
3 m³ custam: $2,79 + 2 \cdot 9,20 = 21,19$
7 m³ custam: $21,19 + 4 \cdot 4,80 = 40,39$
14 m³ custam: $40,39 + 7 \cdot 7,96 = 96,11$
Assim, se x representa o consumo, em metro cúbico, e $f(x)$ o valor correspondente a ser pago, em reais, tem-se que:
Para $0 < x \leqslant 1$: $f(x) = 9,68 + 2,79x$
Para $1 < x \leqslant 3$: $f(x) = 2,79 + 12,64 + 9,20(x - 1) =$
$= 15,43 + 9,20(x - 1)$
Para $3 < x \leqslant 7$: $f(x) = 21,19 + 12,64 + 4,80(x - 3) =$
$= 33,83 + 4,80(x - 3)$
Para $7 < x \leqslant 14$: $f(x) = 40,39 + 14,23 + 7,96(x - 7) =$
$= 54,62 + 7,96(x - 7)$
Para $14 < x \leqslant 34$: $f(x) = 96,11 + 15,81 + 9,46(x - 14) =$
$= 111,92 + 9,46(x - 14)$
Portanto, a função pode ser escrita como:

$$f(x) = \begin{cases} 9,68 + 2,79x, \text{ se } 0 < x \leqslant 1 \\ 15,43 + 9,20(x - 1), \text{ se } 1 < x \leqslant 3 \\ 33,83 + 4,80(x - 3), \text{ se } 3 < x \leqslant 7 \\ 54,62 + 7,96(x - 7), \text{ se } 7 < x \leqslant 14 \\ 111,92 + 9,46(x - 14), \text{ se } 14 < x \leqslant 34 \end{cases}$$

d) Resposta pessoal. Exemplo de situação: Considere que uma residência consumiu 3,25 m³ de gás natural. Qual será o valor pago por esse consumo?
Calculando o valor da função para $x = 3,25$, obtém-se:
$f(3,25) = 33,83 + 4,80 \cdot (3,25 - 3) = 35,03$.

7. **a)** $|3 - 5| = |-2| = 2$
b) $|-3 + 5| = |2| = 2$
c) $|-3 - 5| = |-8| = 8$
d) $|-1| + |-6| = 1 + 6 = 7$
e) $|-|-5|| = |-5| = 5$
f) $|-2| - |-10| = 2 - 10 = -8$

8. **a)** $d_{AB} = |-4 - (-1)| = |-3| = 3$
b) $d_{BC} = |-1 - 0| = |-1| = 1$
c) $d_{BD} = |-1 - 5| = |-6| = 6$
d) $d_{AD} = |-4 - 5| = |-9| = 9$

9. **a)** Para $x = -4$, temos:
$2x - |x| = 2 \cdot (-4) - |-4| = -8 - 4 = -12$
b) Para $x = -1$, temos:
$\left|\frac{4x + 1}{5 - 2x}\right| = \frac{|4 \cdot (-1) + 1|}{|5 - 2 \cdot (-1)|} = \frac{|-4 + 1|}{|5 + 2|} = \frac{|-3|}{|7|} = \frac{3}{7}$
c) Para $x = -2$, temos:
$|x^3 + x| - |x^2 - 3x + 1| =$
$= |(-2)^3 + (-2)| - |(-2)^2 - 3 \cdot (-2) + 1| =$
$= |-8 - 2| - |4 + 6 + 1| = |-10| - |11| = 10 - 11 = -1$

10. Do enunciado, tem-se que: $A = |x| + |x + 2|$. Então, para simplificar essa expressão, precisa-se utilizar a definição de módulo, tal que:

$$|x| = \begin{cases} -x, \text{ se } x < 0 \\ x, \text{ se } x \geqslant 0 \end{cases}$$

$$|x + 2| = \begin{cases} -(x + 2), \text{ se } x + 2 < 0 \Rightarrow x < -2 \\ x + 2, \text{ se } x + 2 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant -2 \end{cases}$$

a) Para $x < -2$, obtém-se $A = -x - (x + 2) = -2x - 2$.
b) Para o intervalo $-2 \leqslant x < 0$, obtém-se:
$A = -x + (x + 2) = 2$.
c) Para $x \geqslant 0$, obtém-se: $A = x + (x + 2) = 2x + 2$.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

11. Pela definição de módulo, tem-se:

$$|x+3| = \begin{cases} -(x+3), \text{ se } x+3<0 \Rightarrow x<-3 \\ x+3, \text{ se } x+3 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant -3 \end{cases}$$

$$|2x-1| = \begin{cases} -(2x-1), \text{ se } 2x-1<0 \Rightarrow x<\frac{1}{2} \\ 2x-1, \text{ se } 2x-1 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant \frac{1}{2} \end{cases}$$

Então, para $x > 3$, tem-se:

$|x+3| + |2x-1| = x+3+2x-1 = 3x+2$

12. a) Para calcular o conjunto de valores da expressão $\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}$, com a, b e c positivos, utilizando a definição de módulo, basta fazer: $\frac{a}{a}+\frac{b}{b}+\frac{c}{c} = 1+1+1 = 3$.

b) Para calcular o conjunto de valores da expressão $\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}$, com a, b e c negativos, utilizando a definição de módulo, basta fazer:

$\frac{a}{-a}+\frac{b}{-b}+\frac{c}{-c} =$

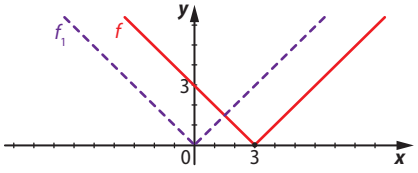
$= -1+(-1)+(-1) = -3$

13. a) Do enunciado, tem-se que $f(x) = \frac{2}{|x-3|}$. Para identificarmos o ponto em que a função não está definida, precisa-se analisar seu domínio. Sabendo que, para $x = 3$, o denominador se anula, conclui-se que a função não está definida para esse valor.

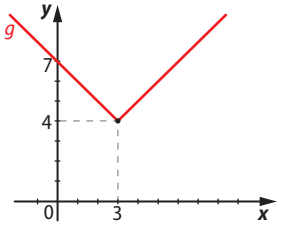
b) Tem-se que $f(x) = \frac{2}{|x-3|}$, então:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\left|\frac{1}{2}-3\right|} = \frac{2}{\left|-\frac{5}{2}\right|} = \frac{2}{\frac{5}{2}} = \frac{4}{5}$$

14. a) Para obter o gráfico de $f(x) = |x-3|$, pode-se considerar o gráfico da função $f_1(x) = |x|$ transladado horizontalmente 3 unidades para a direita.



b) Para obter o gráfico de $g(x) = |x-3|+4$, pode-se considerar o gráfico da função $f(x) = |x-3|$ do item **a** transladado verticalmente 4 unidades para cima.



c) Pela definição de módulo, tem-se:

$h(x) = |-2x+1| =$

$$= \begin{cases} -(-2x+1) = 2x-1, \text{ se } -2x+1<0 \Rightarrow x>\frac{1}{2} \\ -2x+1, \text{ se } -2x+1 \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant \frac{1}{2} \end{cases}$$

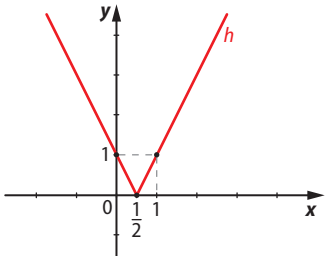
Calculando alguns pontos de $h(x)$, em que x é menor, igual e maior do que $\frac{1}{2}$, obtém-se:

$x = 0 \Rightarrow -2 \cdot 0 + 1 = 1 \Rightarrow (0, 1)$

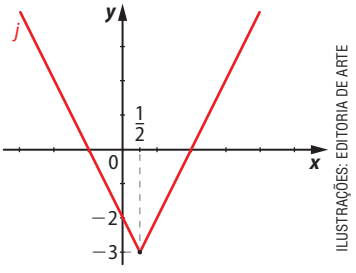
$x = \frac{1}{2} \Rightarrow -2 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, 0\right)$

$x = 1 \Rightarrow 2 \cdot 1 - 1 = 1 \Rightarrow (1, 1)$

Logo, o gráfico de $h(x)$ é dado por:



d) Para determinar o gráfico de $j(x) = |-2x+1|-3$, pode-se considerar o gráfico de $h(x) = |-2x+1|$ do item **c** e realizar uma translação vertical de 3 unidades para baixo.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

e) O gráfico da função $m(x) = |x^2-4|-5$ pode ser obtido pela translação vertical do gráfico de $m_1(x) = |x^2-4|$ cinco unidades para baixo.

Pela definição de módulo, tem-se:

$m_1(x) = |x^2-4| =$

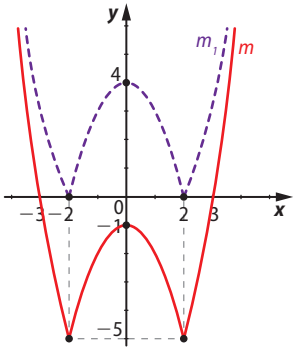
$$= \begin{cases} -(x^2-4) = -x^2+4, \text{ se } x^2-4<0 \Rightarrow -2<x<2 \\ x^2-4, \text{ se } x^2-4 \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant 2 \end{cases}$$

Os zeros das funções $y_1 = -x^2+4$ e $y_2 = x^2-4$ são $x' = -2$ e $x'' = 2$, e os vértices de suas respectivas parábolas são:

$x_{V_1} = -\frac{0}{2 \cdot (-1)} = 0 \Rightarrow y_1(0) = -(0)^2+4 = 4 \Rightarrow V_1 = (0, 4)$

$x_{V_2} = -\frac{0}{2 \cdot 1} = 0 \Rightarrow y_2(0) = 0^2-4 = -4 \Rightarrow V_2 = (0, -4)$

Assim, podem ser esboçados os gráficos de y_1 e y_2. A junção desses dois gráficos, considerando os respectivos domínios: $D(y_1) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2\}$ e $D(y_2) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant 2\}$, determina a função $m_1(x)$ que, ao ser transladada conforme já comentado, resulta no gráfico de $m(x)$:



15. Analisando o gráfico, percebe-se que ele representa uma função modular $f(x)$ obtida pela translação horizontal do gráfico da função $g(x) = |x|$ em 1 unidade para a esquerda e uma translação vertical de 2 unidades para cima.

Assim, essa função pode ser descrita por $f(x) = |x+a|+b$, com $a = 1$ e $b = 2$, ou seja, $f(x) = |x+1|+2$.

Como, para qualquer valor real de x, a função está bem definida, segue que $D(f) = \mathbb{R}$. Além disso, como $|x+1| \geqslant 0$, segue que $f(x) = |x+1|+2 \geqslant 2$, para qualquer valor de x em seu domínio. Dessa forma, $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 2\}$.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

16. Para encontrar o valor de n para que $P(n)$ seja mínimo, considera-se:
$P(n) = 8 - |6 - n|$, com $n \in \{1, 2, 3, \ldots, 11, 12\}$
Pela definição de módulo, tem-se que:
$|6 - n| = 6 - n$, para $6 - n \geqslant 0 \Rightarrow n \leqslant 6$
$|6 - n| = -6 + n$, para $6 - n < 0 \Rightarrow n > 6$
Então, para $n \leqslant 6$ tem-se:
$P(n) = 8 - 6 + n = 2 + n$ (função crescente)
$P(n)$ tem valor mínimo para $n = 1$, em que $P(1) = 3$.
Para $n > 6$, tem-se:
$P(n) = 8 - (-6 + n) = 14 - n$ (função decrescente)
$P(n)$ tem valor mínimo para $n = 12$, em que $P(12) = 2$.
Logo, o valor mínimo absoluto de $P(n)$ acontece para $n = 12$.

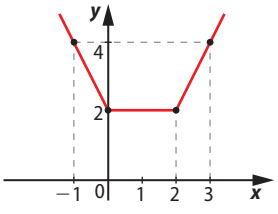
17. **a)** Pela definição de módulo, tem-se:

$$|x| = \begin{cases} -x, \text{ se } x < 0 \\ x, \text{ se } x \geqslant 0 \end{cases}$$

$$|x - 2| = \begin{cases} -(x - 2) = -x + 2, \text{ se } x - 2 < 0 \Rightarrow x < 2 \\ x - 2, \text{ se } x - 2 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 2 \end{cases}$$

Portanto, f será dada por: $f(x) = \begin{cases} -2x + 2, \text{ se } x < 0 \\ 2, \text{ se } 0 \leqslant x < 2 \\ 2x - 2, \text{ se } x \geqslant 2 \end{cases}$

Considerando a primeira sentença, f é decrescente, e o gráfico passa pelo ponto: $x = -1 \Rightarrow -2 \cdot (-1) + 2 = 4 \Rightarrow (-1, 4)$.
Com bolinha aberta em: $x = 0 \Rightarrow -2 \cdot 0 + 2 = 2 \Rightarrow (0, 2)$.
Considerando a segunda sentença, f é constante, e o gráfico é um segmento de reta paralelo ao eixo x e limitado pelos pontos extremos (0, 2) e (2, 2).
Para a terceira sentença, f é crescente, e o gráfico passa pelos pontos:
$x = 2 \Rightarrow 2 \cdot 2 - 2 = 2 \Rightarrow (2, 2)$
$x = 3 \Rightarrow 2 \cdot 3 - 2 = 4 \Rightarrow (3, 4)$



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Portanto, o domínio da função é $D(f) = \mathbb{R}$, e a imagem é $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 2\}$.

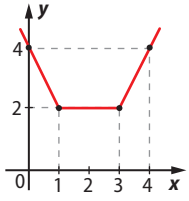
b) Pela definição de módulo, tem-se:

$$|x - 1| = \begin{cases} -(x - 1) = -x + 1, \text{ se } x - 1 < 0 \Rightarrow x < 1 \\ x - 1, \text{ se } x - 1 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 1 \end{cases}$$

$$|x - 3| = \begin{cases} -(x - 3) = -x + 3, \text{ se } x - 3 < 0 \Rightarrow x < 3 \\ x - 3, \text{ se } x - 3 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 3 \end{cases}$$

Portanto, g será dada por: $g(x) = \begin{cases} -2x + 4, \text{ se } x < 1 \\ 2, \text{ se } 1 \leqslant x < 3 \\ 2x - 4, \text{ se } x \geqslant 3 \end{cases}$

Considerando a primeira sentença, g é decrescente, e o gráfico passa pelo ponto: $x = 0 \Rightarrow -2 \cdot 0 + 4 = 4 \Rightarrow (0, 4)$
Com bolinha aberta em: $x = 1 \Rightarrow -2 \cdot 1 + 4 = 2 \Rightarrow (1, 2)$
Considerando a segunda sentença, g é constante, e o gráfico é um segmento de reta paralelo ao eixo x e limitado pelos pontos extremos (1, 2) e (3, 2).
Para a terceira sentença, g é crescente, e o gráfico passa pelos pontos:
$x = 3 \Rightarrow 2 \cdot 3 - 4 = 2 \Rightarrow (3, 2)$
$x = 4 \Rightarrow 2 \cdot 4 - 4 = 4 \Rightarrow (4, 4)$



Portanto, o domínio da função é $D(g) = \mathbb{R}$, e a imagem é $Im(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 2\}$.

18. **a)** Para $x < 0$: $-(3x + 1) = 6 \Rightarrow x = -\frac{7}{3}$
Para $x \geqslant 0$: $3x + 1 = 6 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$
Logo, $S = \left\{-\frac{7}{3}, \frac{5}{3}\right\}$.

b) Para $x < 0$: $\frac{-(x - 2)}{3} = 1 \Rightarrow x = -1$
Para $x \geqslant 0$: $\frac{x - 2}{3} = 1 \Rightarrow x = 5$
Logo, $S = \{-1, 5\}$.

c) Para $x < 0$: $-(x^2 + 4x) = 12 \Rightarrow x^2 + 4x + 12 = 0$
Resolvendo a equação do 2º grau, não se obtêm raízes reais, pois $\Delta = 16 - 48 = -32$.
Para $x \geqslant 0$: $x^2 + 4x = 12 \Rightarrow x^2 + 4x - 12 = 0$
Resolvendo a equação do 2º grau, obtêm-se as raízes $x' = -6$ e $x'' = 2$.
Logo, $S = \{-6, 2\}$.

19. Dada a equação $x^2 - 5x + 6 = |x - 3|$, obtém-se:
Para $x < 0$: $x^2 - 5x + 6 = -x + 3 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x = 3$
Para $x \geqslant 0$: $x^2 - 5x + 6 = x - 3 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow x = 3$
Vamos verificar se as soluções encontradas são válidas. Substituindo os valores na equação, tem-se:
Para $x = 3 \Rightarrow (3)^2 - 5 \cdot (3) + 6 = |3 - 3| \Rightarrow 0 = 0$ (verdadeiro)
Para $x = 1 \Rightarrow (1)^2 - 5 \cdot (1) + 6 = |1 - 3| \Rightarrow 2 = 2$ (verdadeiro)
Então, a soma das raízes distintas é: $3 + 1 = 4$.
Resposta: alternativa **e**.

20. Considerando $x \geqslant 0$, obtém-se: $x = x - 6 \Rightarrow 0 = 6$ (absurdo).
Ao considerar $x < 0$, obtém-se:
$-x = x - 6 \Rightarrow x = 3$; porém, x não pode ser igual a esse valor, pois consideramos $x < 0$. Portanto, a equação não tem solução.
Resposta: alternativa **d**.

21. Para calcular a intersecção do conjunto $S_1 \cap S_2$, precisa-se calcular primeiro a condição de existência de (i), então:
$1 - 2x \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant \frac{1}{2}$
Em seguida, calcula-se o valor de x, da equação modular:
$|x - 5| = 1 - 2x$
Para $x \geqslant 0$: $x - 5 = 1 - 2x \Rightarrow x = 2$ (não convém, pois não satisfaz a condição de existência)
Para $x < 0$: $-(x - 5) = 1 - 2x \Rightarrow x = -4$
$S_1 = \{-4\}$
Agora, precisa-se calcular a condição de existência de (ii), então:
$6 - 2x \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant 3$
Em seguida, calcula-se o valor de x da equação modular:
$|2x - 6| = 6 - 2x$
Para $x \geqslant 0$: $2x - 6 = 6 - 2x \Rightarrow x = 3$
Para $x < 0$: $-(2x - 6) = 6 - 2x \Rightarrow 0x = 0 \Rightarrow 0 = 0$
$S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 3\}$
Portanto, $S_1 \cap S_2 = \{-4\}$.
Resposta: alternativa **d**.

22. **a)** Para determinar o kilometro da rodovia em que está localizado o posto, deve-se calcular $d(x) = 0$, pois é o ponto em que a distância até o posto é nula. Assim:
$d(x) = 0 \Rightarrow |x - 200| = 0 \Rightarrow x - 200 = 0 \Rightarrow x = 200$
Portanto, o posto está localizado no kilometro 200 da rodovia.

b) Do enunciado, $d(x) = 135$, então:

$$|x - 200| = 135 \Rightarrow \begin{cases} -(x - 200) = 135 \Rightarrow x = 65 \text{ ou} \\ x - 200 = 135 \Rightarrow x = 335 \end{cases}$$

Logo, a pessoa pode estar no kilometro 65 ou no 335 da rodovia.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

23. Dada a equação $|x^2 - 3x + 2| = |2x - 3|$, temos que:

$x^2 - 3x + 2 = 2x - 3$ (I)

$x^2 - 3x + 2 = -(2x - 3)$ (II)

De (I), obtém-se a equação $x^2 - 5x + 5 = 0$, cujas raízes são $x' = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$ e $x'' = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$.

De (II), obtém-se a equação $x^2 - x - 1 = 0$, cujas raízes são $x' = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $x'' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Fazendo o produto entre as raízes:

$\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = -5$.

Resposta: alternativa **a**.

24. Dada a equação: $|x^2 - 8| - 4 = 0$, tem-se:

$|x^2 - 8| - 4 = 0 \Rightarrow |x^2 - 8| = 4$

Para $x \geqslant 0$:

$x^2 - 8 = 4 \Rightarrow x^2 = 12 \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{3}$

Para $x < 0$:

$-(x^2 - 8) = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

Portanto, o produto das raízes é:

$2\sqrt{3} \cdot (-2\sqrt{3}) \cdot 2 \cdot (-2) = 48$.

Resposta: alternativa **e**.

25. Do enunciado, obtém-se:

$|f(x) - 6| = 8 \Rightarrow \left|\frac{1}{2}x^2 - 2 - 6\right| = 8 \Rightarrow \left|\frac{1}{2}x^2 - 8\right| = 8$

Das definições de módulo, obtém-se:

$\frac{1}{2}x^2 - 8 = -8 \Rightarrow x = 0$

$\frac{1}{2}x^2 - 8 = 8 \Rightarrow x = 4\sqrt{2}$ ou $x = -4\sqrt{2}$

Portanto, as raízes irracionais são $4\sqrt{2}$ e $-4\sqrt{2}$.

Resposta: alternativa **c**.

26. Para calcular o valor de $|f(x)| = 1$, pode-se considerar que $f(x) = 1$ ou $f(x) = -1$.

Observando o gráfico $f(x)$, verifica-se que $f(x) = 1$ em 3 pontos e $f(x) = -1$ em 2 pontos.

Portanto, a equação $|f(x)| = 1$ tem 5 elementos em seu conjunto solução.

Resposta: alternativa **b**.

27. Do enunciado tem-se $f(x) = \frac{x + |x|}{2}$ e $g(x) = -|x| + 1$. Desse modo:

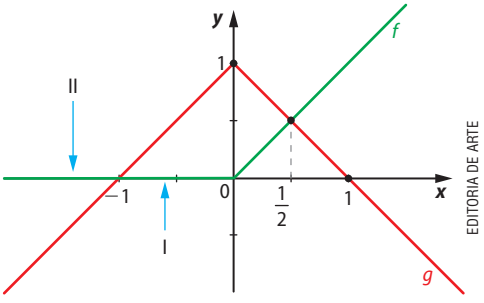
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-x}{2} = 0, \text{ se } x < 0 \\ \frac{x+x}{2} = x, \text{ se } x \geqslant 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} -(-x) + 1 = x + 1, \text{ se } x < 0 \\ -x + 1, \text{ se } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Determinando x tal que $f(x) = g(x)$, tem-se:

Para $x < 0$: $0 = x + 1 \Rightarrow x = -1$

Para $x \geqslant 0$: $x = -x + 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$



Analisando cada afirmativa, tem-se:

I. Falsa, pois, para $-1 < x < 0$, $g(x) > f(x)$.

II. Falsa, pois, para $x \leqslant -1$, $f(x) \geqslant g(x)$.

III. Falsa, pois as raízes da equação $f(x) = g(x)$ são $x' = -1$ e $x'' = \frac{1}{2}$, cuja soma é $-\frac{1}{2}$.

Dessa forma, todas as afirmativas são falsas.

Resposta: alternativa **a**.

28. **a)** Da definição, sabe-se que f é sobrejetora quando todo elemento do contradomínio é imagem de pelo menos um elemento do domínio da função. Portanto é **apenas sobrejetora**, pois não sobram elementos no conjunto imagem $\text{Im}(f) = B$. Não é injetora, pois o elemento do conjunto B é imagem de todos os elementos de A simultaneamente. Como a função é sobrejetora, mas não é injetora, não pode ser bijetora.

b) **Nem sobrejetora nem injetora**, visto que sobram elementos em B (não sobrejetora) e existe pelo menos um elemento em B que é imagem de mais de um elemento de A simultaneamente (não injetora). Por exemplo, o elemento 4 em B é imagem de -2 e 2.

c) Da definição, sabe-se que uma função é bijetora quando ela é sobrejetora e injetora, simultaneamente. Portanto, é **bijetora**, porque não sobram elementos em B (sobrejetora), e cada elemento em A corresponde a um único elemento em B (injetora).

d) Da definição, sabe-se que f é injetora quando os elementos distintos de um conjunto são associados por f a elementos distintos de outro conjunto. Portanto, é **apenas injetora**, porque cada elemento em B corresponde a um único elemento em A. Não é sobrejetora, pois sobram elementos em B. Portanto, não é bijetora.

29. No item **a**, a função é apenas sobrejetora, uma vez que não sobram elementos no contradomínio. Não é injetora, pois existem elementos do contradomínio que são a imagem de mais de um elemento do domínio simultaneamente. Como a função é sobrejetora, mas não é injetora, não pode ser bijetora.

No item **b**, a função é injetora, mas não é sobrejetora, visto que o contradomínio da função é estritamente positivo. Como a função é injetora, mas não é sobrejetora, não pode ser bijetora.

No item **c**, o gráfico não representa uma função, pois é possível traçar uma reta paralela ao eixo y, a qual intersecta o gráfico em mais de um ponto.

No item **d**, a função é bijetora, pois, para cada elemento do contradomínio, existe um elemento correspondente no domínio (sobrejetora) e não há elementos distintos do domínio que possuem a mesma imagem simultaneamente no contradomínio (injetora).

Resposta: alternativa **d**.

30. Analisando cada afirmação, obtêm-se:

- **Falso**, pois existem elementos do contradomínio que são a imagem de mais de um elemento do domínio simultaneamente, por exemplo, $f(2) = f(3) = 2$.
- **Falso**, pois esse intervalo corresponde ao contradomínio.
- **Falso**, pois $f(4) = 3$.
- **Verdadeiro**.

Resposta: alternativa **a**.

31. Do enunciado, tem-se que $f(x) = x^2 + 2x$ e $g(x) = 1 - 3x$; então, para determinar $f(g(x))$, em cada item, aplica-se a definição de função composta, ou seja:

a) $f(g(x)) = (1 - 3x)^2 + 2 \cdot (1 - 3x)$

$f(g(x)) = 9x^2 - 12x + 3$

b) $g(f(x)) = 1 - 3 \cdot (x^2 + 2x)$

$g(f(x)) = -3x^2 - 6x + 1$

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

c) $(f \circ f)(x) = (x^2 + 2x)^2 + 2 \cdot (x^2 + 2x)$

$(f \circ f)(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x$

d) $(g \circ g)(x) = 1 - 3 \cdot (1 - 3x)$

$(g \circ g)(x) = 9x - 2$

32. Como $f(x) = 3x + 5$ e $g(x) = 2x - 3$, tem-se:

a) $f(g(x)) = 0 \Rightarrow 3 \cdot (2x - 3) + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

b) $g(f(x)) = 0 \Rightarrow 2 \cdot (3x + 5) - 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{7}{6}$

33. Como $f(x) = \frac{1}{x - 1}$, segue que:

$f(f(x)) = 1 \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{x-1} - 1} = 1 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

34. Sejam $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 - 2x - 3$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = 4x + m$. Sabe-se que $f(g(-1)) = 12$. Para encontrar o valor de m, precisa-se calcular:

$f(g(x)) = (4x + m)^2 - 2 \cdot (4x + m) - 3$

$f(g(x)) = 16x^2 + 8xm + m^2 - 8x - 2m - 3$

Para $f(g(-1)) = 12$, tem-se:

$16 \cdot (-1)^2 + 8 \cdot (-1) \cdot m + m^2 - 8 \cdot (-1) - 2m - 3 = 12 \Rightarrow$

$\Rightarrow m^2 - 10m + 21 = 12 \Rightarrow m^2 - 10m + 9 = 0$

Resolvendo a última equação, obtêm-se as raízes $m' = 1$ e $m'' = 9$. Portanto, $m = 1$ ou $m = 9$.

35. Do enunciado, tem-se que $f(x) = \frac{1}{x - 1}$, $x \neq 1$, e

$g(x) = 2x - 4$; portanto, para calcular $f(g(2)) + g\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$, fazemos:

$f(g(x)) = \frac{1}{2x - 4 - 1} = \frac{1}{2x - 5}$

$f(g(2)) = \frac{1}{2 \cdot 2 - 5} = -1$

$g(f(x)) = 2 \cdot \left(\frac{1}{x - 1}\right) - 4 = \frac{2}{x - 1} - 4$

$g\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \left(\frac{2}{\frac{1}{2} - 1}\right) - 4 = -8$

Logo:

$-1 - 8 = -9$

Resposta: alternativa **c**.

36. Como $g(x) = 2x + 1$ e $g(f(x)) = 2x^2 + 2x + 1$, então:

$g(f(x)) = 2 \cdot f(x) + 1$

Dessa forma, podemos escrever:

$2 \cdot f(x) + 1 = 2x^2 + 2x + 1 \Rightarrow f(x) = x^2 + x$

Sendo assim:

$f(7) = 7^2 + 7 = 56$

37. **a)** A função f é bijetora, portanto possui inversa. Sabe-se que:

$f(x) = x - 3 \Rightarrow f(x) = y \Rightarrow y = x - 3$

Trocando x por y e y por x, obtém-se $f^{-1}(x)$, então:

$x = y - 3 \Rightarrow y = x + 3$

Portanto, $f^{-1}(x) = x + 3$.

b) A função g é bijetora, portanto possui inversa. Sabe-se que:

$g(x) = \frac{x + 2}{4} \Rightarrow g(x) = y \Rightarrow y = \frac{x + 2}{4}$

Trocando x por y e y por x, obtém-se $g^{-1}(x)$, então:

$x = \frac{y + 2}{4} \Rightarrow y = 4x - 2$

Portanto, $g^{-1}(x) = 4x - 2$.

38. Sejam $f(x) = ax - 2$ e g sua função inversa. Sabendo que $f(-2) = 10$, tem-se:

$f(-2) = a \cdot (-2) - 2 = 10 \Rightarrow a = -6$

Dessa forma, $f(x) = -6x - 2$. Tomando $y = -6x - 2$ e trocando x por y e y por x, obtém-se $f^{-1}(x) = g(x)$, então:

$x = -6y - 2 \Rightarrow y = \frac{-x - 2}{6}$

Portanto, $g(x) = \frac{-x - 2}{6}$.

39. **a)** Considerando $y = f(x)$, obtém-se:

$y = f(x) = \frac{2x - 1}{x - 3} \Rightarrow y = \frac{2x - 1}{x - 3}$

Para obter $f^{-1}(x)$, deve-se trocar x por y e y por x, ou seja:

$x = \frac{2y - 1}{y - 3} \Rightarrow y = \frac{3x - 1}{x - 2}$

Portanto, $f^{-1}(x) = \frac{3x - 1}{x - 2}$.

b) O domínio de f^{-1} é o conjunto de números reais tais que seu denominador seja diferente de zero. Desse modo:

$x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$

Portanto, $D(f^{-1}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$.

c) Sabendo que $f^{-1}(x) = \frac{3x - 1}{x - 2}$, tem-se: $f^{-1}(-3) = \frac{3 \cdot (-3) - 1}{-3 - 2} = 2$.

40. Para resolver os itens, considere que duas funções são inversas entre si se a reta $y = x$ for o eixo de simetria entre seus gráficos.

a) O eixo de simetria das funções é $y = -x$. Portanto, elas não são inversas uma da outra.

b) O eixo de simetria das funções é $y = x$. Portanto, elas são inversas uma da outra.

c) O eixo de simetria das funções é o eixo x. Portanto, elas não são inversas uma da outra.

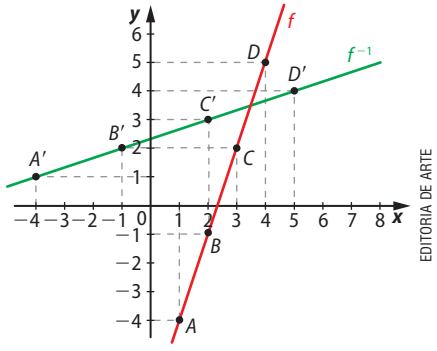
41. Para construir o gráfico da função inversa, pode-se marcar as coordenadas dos pares ordenados:

$A(1, -4)$; $B(2, -1)$; $C(3, 2)$; $D(4, 5)$

Como o par ordenado é da forma (x, y) e, na função inversa, invertem-se as variáveis x e y, podem-se encontrar os novos pares ordenados que darão origem à reta da função inversa invertendo-se os valores de x e y:

$A'(-4, 1)$; $B'(-1, 2)$; $C'(2, 3)$; $D'(5, 4)$

Com esses novos pontos, constrói-se o gráfico da função inversa f^{-1}.



Atividades complementares

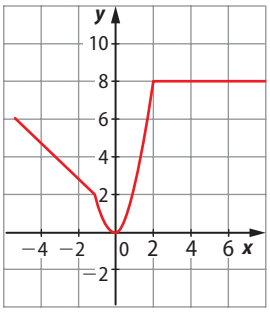
1. Do enunciado, tem-se a função $f(x) = \begin{cases} -x + 1, \text{ se } x \leq -1 \\ 2x^2, \text{ se } -1 < x \leq 2 \\ 8, \text{ se } x > 2 \end{cases}$

Então, sabe-se que:

- se $x \leq -1$, então $f(x)$ é uma reta decrescente e $f(-1) = 2$.
- se $-1 < x \leq 2$, então $f(x)$ é uma parábola de concavidade para cima que passa pela origem e $f(2) = 8$.
- se $x > 2$, então $f(x)$ é uma reta constante de valor 8.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Dessa forma, o gráfico que se encaixa nessas condições é:



Resposta: alternativa **a**.

2. Note que, para:

- $x = 0$, temos $f(0) = -0^2 + 4 = 4$
- $x = 1$, temos $f(1) = -1^2 + 4 = 3$

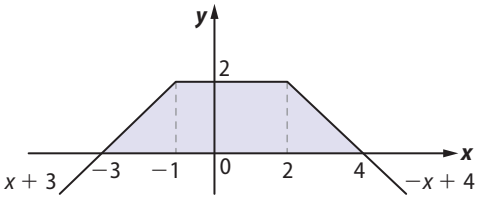
No intervalo $]1; 3]$, temos $f(x) = x^2 - 4x + 6$; então, para:

- $x = 2$, temos $f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 6 = 2$
- $x = 3$, temos $f(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 6 = 3$

O gráfico da alternativa **b** é o único que satisfaz as condições acima e representa as leis de correspondência da função f.
Resposta: alternativa **b**.

3. De acordo com a função a'_n, temos:
$a'_1 = 0$; $a'_2 = 1$; $a'_3 = 0$; $a'_4 = 0$; $a'_5 = 0$.
Resposta: alternativa **b**.

4. Esboçando o gráfico dessa função, obtemos:



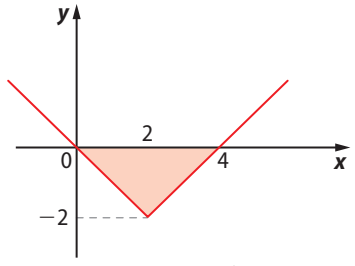
Logo, a área A da região requerida é $A = \frac{(7+3)\cdot 2}{2} = 10$.
Resposta: alternativa **b**.

5. Do enunciado, tem-se $f(x) = |x - 200| \cdot 50$, em que x representa cada dia do ano. Se o lucro pretendido é R$ 5.750,00, então:

$$|x - 200| \cdot 50 = 5750 \Rightarrow \begin{cases} -(x - 200) \cdot 50 = 5750 \Rightarrow x = 85 \text{ ou} \\ (x - 200) \cdot 50 = 5750 \Rightarrow x = 315 \end{cases}$$

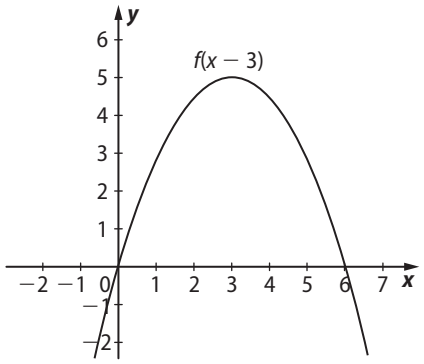
Dessa forma, como cada mês tem cerca de 30 dias, então $x = 85$ ocorre durante o mês de março e $x = 315$ ocorre durante o mês de novembro.
Portanto, o lucro desejado será possível nos meses de março e novembro.
Resposta: alternativa **c**.

6. Esboçando o gráfico da função f, temos:

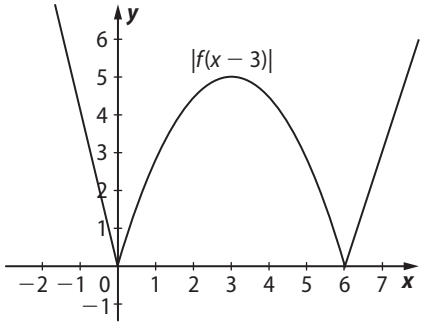


Portanto, a área S desejada é $S = \frac{4 \cdot 2}{2} = 4$.
Resposta: alternativa **d**.

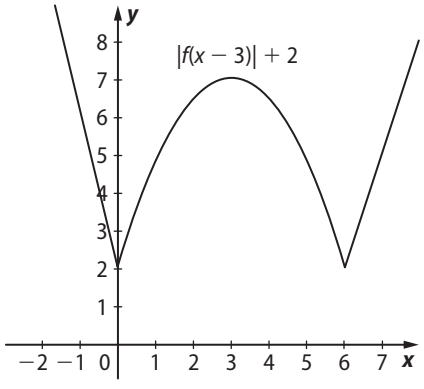
7. Observe as etapas para a representação do gráfico desejado.
Etapa 1. Gráfico da função $f(x - 3)$ é dado por:



Etapa 2. Gráfico da função $|f(x - 3)|$ é representado por:



Etapa 3. Gráfico da função $|f(x - 3)| + 2$ é dado por:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Resposta: alternativa **b**.

8. Ao analisar o gráfico, podem-se definir as funções:
$f(x) = |x - 1| - 2$ e $g(x) = \frac{x}{2} + 2$.
Depois, é preciso analisar cada uma das sentenças:

- Primeira sentença
  $f(-1) = |-1 - 1| - 2 = |-2| - 2 = 0$
  $g(-2) = \frac{-2}{2} + 2 = -1 + 2 = 1$
  $g(f(-1)) - f(g(-2) + 2) = g(0) - f(1 + 2) =$
  $= \left(\frac{0}{2} + 2\right) - (|3 - 1| - 2) = 2 - 0 = 2$ (verdadeira)
- Segunda sentença
  $g(-4) = \frac{-4}{2} + 2 = 0$
  $f(g(-4) + 1) + 3 = f(0 + 1) + 3 = f(1) + 3 =$
  $= |1 - 1| - 2 + 3 = 1$ (verdadeira)
- Terceira sentença
  Ao observar o gráfico, pode-se concluir que $f(x) = |x - 1| - 2$ (verdadeira).
  Logo, as 3 afirmações são verdadeiras.
  Resposta: alternativa **b**.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

9. Pela definição de módulo, tem-se que $f: [-5, 3] \to A \subset \mathbb{R}$ é dada por:

$f(x) = |x + 2| - 3 =$

$= \begin{cases} -(x+2) - 3 = -x - 5, \text{ se } x + 2 < 0 \Rightarrow x < -2 \\ x + 2 - 3 = x - 1, \text{ se } x + 2 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant -2 \end{cases}$

Assim, para $-5 \leqslant x < -2$, f é parte de uma função afim decrescente, que assume seu maior valor para $x = -5$, e decresce até um valor (que não pertence à função) de $x = -2$:

$f(-5) = -(-5) - 5 = 0$

$f(-2) = -(-2) - 5 = -3$

Para $-2 \leqslant x \leqslant 3$, f é parte de uma função afim crescente, cujo menor valor ocorre para $x = -2$ e o maior valor ocorre para $x = 3$:

$f(-2) = -2 - 1 = -3$

$f(3) = 3 - 1 = 2$

Como f é sobrejetora, segue que $A = \text{Im}(f) =]-3, 0] \cup [-3, 2]$.

Logo, $A = [-3, 2]$.

Resposta: alternativa **d**.

10. Do enunciado, obtém-se: $f(2x + 1) = 2x + 4$ e $g(x + 1) = 2x - 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Para calcular $f \circ g(x)$, precisa-se, primeiro, determinar $f(x)$; logo:

$f(2x + 1) = 2x + 4$

$f(2x + 1) = (2x + 1) + 3$

Logo, pode-se observar que $f(x) = x + 3$.

De forma análoga, determina-se a função $g(x)$:

$g(x + 1) = 2x - 1$

$g(x + 1) = 2x + 2 - 3$

$g(x + 1) = 2(x + 1) - 3$

Logo, pode-se observar que $g(x) = 2x - 3$.

Ao fazer a função composta $f(g(x))$, obtém-se:

$f(g(x)) = (2x - 3) + 3 = 2x$

Portanto, a função $f \circ g(x) = 2x$.

Resposta: alternativa **d**.

11. Do enunciado, tem-se que $f: [0, +\infty[\to [4, +\infty[$, definida por $f(x) = (x + 2)^2$ e $f^{-1}: [4, +\infty[\to [0, +\infty[$. Para calcular a função inversa, consideramos $f(x) = y$, então:

$y = (x + 2)^2$

Realizando-se a troca de x por y e de y por x, obtém-se:

$x = (y + 2)^2$

Isolando a variável y e sabendo que $y \geqslant 0$:

$\sqrt{x} = (y + 2) \Rightarrow y = \sqrt{x} - 2$. Logo, $f^{-1}(x) = \sqrt{x} - 2$

Resposta: alternativa **d**.

12. Do enunciado, obtém-se: $f(x) = \dfrac{3x + 2}{x - 1}$, $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$.

Considerando $y = f(x)$, obtém-se:

$y = f(x) = \dfrac{3x + 2}{x - 1} \Rightarrow y = \dfrac{3x + 2}{x - 1}$

Para obter $f^{-1}(x)$, deve-se trocar x por y e y por x, ou seja:

$x = \dfrac{3y + 2}{y - 1} \Rightarrow y = \dfrac{2 + x}{x - 3}$

Portanto, $f^{-1}(x) = \dfrac{2 + x}{x - 3}$.

O domínio de f^{-1} é o conjunto de números reais tais que seu denominador seja diferente de zero. Desse modo:

$x - 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$

Portanto, $D(f^{-1}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3\}$ ou $D(f^{-1}) = \mathbb{R} - \{3\}$.

Resposta: alternativa **b**.

Capítulo 4 • Função logarítmica

Atividades

1. Pela definição de logaritmos e suas consequências, obtêm-se:

a) $\log_9 1 = x \Leftrightarrow 9^x = 1 \Rightarrow 9^x = 9^0 \Rightarrow x = 0$ (definição)

b) $\log_8 8 = x \Leftrightarrow 8^x = 8^1 \Rightarrow x = 1$ (definição)

c) $\log_{\frac{1}{10}} \left(\frac{1}{10}\right)^3 = x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{10}\right)^x = \left(\frac{1}{10}\right)^3 \Rightarrow x = 3$ (definição)

d) $5^{\log_5 7} = x \Rightarrow x = 7$ (4ª consequência)

e) $\log_{\sqrt{10}} \sqrt{10} = x \Leftrightarrow (\sqrt{10})^x = (\sqrt{10})^1 \Rightarrow x = 1$ (definição)

f) $\log_{\frac{1}{3}} 3^5 = x \Leftrightarrow (3)^{-1x} = 3^5 \Rightarrow x = -5$ (definição)

2. Aplicando a definição dos logaritmos, obtêm-se:

a) $\log_{\sqrt{8}} 4 = x \Leftrightarrow (\sqrt{8})^x = 4 \Rightarrow 2^{\frac{3x}{2}} = 2^2 \Rightarrow x = \dfrac{4}{3}$

b) $\log_5 0{,}000064 = x \Leftrightarrow 5^x = 0{,}000064 \Rightarrow 5^x = \dfrac{2^6}{10^6} \Rightarrow$

$\Rightarrow 5^x = 5^{-6} \Rightarrow x = -6$

c) $\log_{49} \sqrt[3]{7} = x \Leftrightarrow 7^{2x} = 7^{\frac{1}{3}} \Rightarrow x = \dfrac{1}{6}$

d) $\log_2 \dfrac{1}{16} = x \Leftrightarrow 2^x = 2^{-4} \Rightarrow x = -4$

e) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{32} = x \Leftrightarrow 2^{-x} = 2^{\frac{5}{3}} \Rightarrow x = -\dfrac{5}{3}$

f) $\log_{\frac{1}{4}} 1024 = x \Leftrightarrow 2^{-2x} = 2^{10} \Rightarrow x = -5$

3. **a)** Considere $\log_5 \dfrac{1}{25} = x$ e $\log_{\frac{2}{3}} \dfrac{9}{4} = y$. Pela definição, obtêm-se:

$\log_5 \dfrac{1}{25} = x \Leftrightarrow 5^x = 5^{-2} \Rightarrow x = -2$

$\log_{\frac{2}{3}} \dfrac{9}{4} = y \Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^y = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2} \Rightarrow y = -2$

$\log_5 \dfrac{1}{25} + \log_{\frac{2}{3}} \dfrac{9}{4} = x + y = -2 + (-2) = -4$

b) Considere $\log_{\frac{1}{3}} 27 = x$, $\log_{10} 0{,}001 = y$ e $\log_{0{,}1} 10\sqrt{10} = z$.

Pela definição, obtêm-se:

$\log_{\frac{1}{3}} 27 = x \Leftrightarrow 3^{-x} = 3^3 \Rightarrow x = -3$

$\log_{10} 0{,}001 = y \Leftrightarrow 10^y = 10^{-3} \Rightarrow y = -3$

$\log_{0{,}1} 10\sqrt{10} = z \Leftrightarrow 10^{-z} = 10^{\frac{3}{2}} \Rightarrow z = -\dfrac{3}{2}$

$\log_{\frac{1}{3}} 27 + \log_{10} 0{,}001 - \log_{0{,}1} 10\sqrt{10} =$

$= x + y - z = -3 + (-3) - \left(-\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{9}{2}$

4. Aplicando propriedades da potenciação e a 4ª consequência dos logaritmos, obtém-se:

$m = 2^{5 + \log_2 3} + 3^{\log_3 7 + \log_3 2}$

$m = 2^5 \cdot 2^{\log_2 3} + 3^{\log_3 7} \cdot 3^{\log_3 2}$

$m = 32 \cdot 3 + 7 \cdot 2 = 110$

5. **a)** Aplicando a 2ª e a 3ª consequências, obtém-se: $1 - (-7) = 8$.

b) Aplicando a 4ª consequência em cada termo, obtém-se:

$27 : \left(\dfrac{1}{2}\right) = 54$.

c) Aplicando a 1ª e a 3ª consequências, tem-se: $0^5 = 0$.

d) Aplicando a 1ª consequência e a definição, tem-se:

$\dfrac{0 + (-2)}{(-6) \cdot \left(\frac{3}{4}\right)} = \dfrac{-2}{\frac{-9}{2}} = \dfrac{4}{9}$.

6. Considerando as informações do enunciado e aplicando a definição dos logaritmos, têm-se:

$a = \log_{10} 0{,}001 = -3$; $b = \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{64} = 6$; $c = 3 \cdot \log_2 8 = 9$

Portanto, a equação será:

$-3x^2 + 6x + 9 = 0$

Ao resolver a equação, obtêm-se as raízes $x' = -1$ e $x'' = 3$.

$S = \{-1, 3\}$

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

7. Seja x o número a ser calculado. Tem-se:

$\log_p x = 4 \Leftrightarrow p^4 = x \qquad \log_{\frac{p}{3}} x = 8 \Leftrightarrow \left(\frac{p}{3}\right)^8 = x$

Portanto: $p^4 = \left(\frac{p}{3}\right)^8 \Rightarrow p^4 = \frac{p^8}{6\,561} \Rightarrow x = \frac{x^2}{6\,561} \Rightarrow x^2 - 6\,561x = 0$.

Resolvendo a equação do 2º grau, obtêm-se as raízes $x' = 0$ (não satisfaz a condição de existência) e $x'' = 6\,561$.

O número é 6 561.

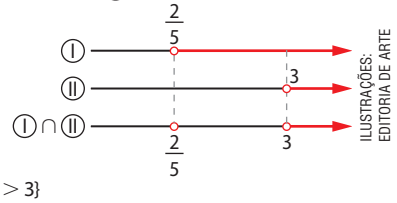
8. Considerando a condição de existência dos logaritmos, conclui-se que:

a) $1 - x > 0 \Rightarrow x < 1$

$\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$

b) $5x - 2 > 0$ e $x - 3 > 0$

$\begin{cases} 5x > 2 \Rightarrow x > \frac{2}{5} & \text{(I)} \\ x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3 & \text{(II)} \end{cases}$

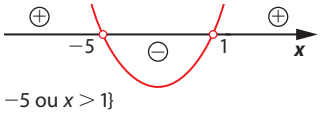


ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

c) $x^2 + 4x - 5 > 0$

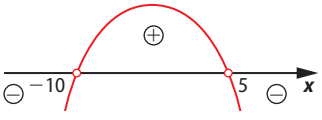
Resolvendo a equação $x^2 + 4x - 5 = 0$, associada à inequação, obtêm-se as raízes $x' = -5$ e $x'' = 1$. Como o coeficiente $a = 1$ é maior do que zero, a parábola descrita por $x^2 + 4x - 5$ possui concavidade voltada para cima:



$\{x \in \mathbb{R} \mid x < -5 \text{ ou } x > 1\}$

d) $50 - 5x - x^2 > 0$

Resolvendo a equação $-x^2 - 5x + 50 = 0$, associada à inequação, obtêm-se as raízes $x' = -10$ e $x'' = 5$. Como o coeficiente $a = -1$ é menor do que zero, a parábola descrita por $-x^2 - 5x + 50$ possui concavidade voltada para baixo.



$\{x \in \mathbb{R} \mid -10 < x < 5\}$

9. Considerando $\log 11 = 1{,}041$ e as propriedades dos logaritmos, obtêm-se:

a) $\log 110 = \log (11 \cdot 10) = \log 11 + \log 10 = 1{,}041 + 1 = 2{,}041$

b) $\log 121 = \log (11 \cdot 11) = \log 11 + \log 11 = 1{,}041 + 1{,}041 = 2{,}082$

c) $\log \frac{1}{11} = \log 1 - \log 11 = 0 - 1{,}041 = -1{,}041$

d) $\log \sqrt{1\,331} = \log (11)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \cdot \log 11 = \frac{3}{2} \cdot 1{,}041 = 1{,}5615$

e) $\log 1{,}21 = \log \frac{121}{100} = \log 121 - \log 100 = 2{,}082 - 2 = 0{,}082$

f) $\log 0{,}121 = \log \frac{121}{1000} = \log 121 - \log 1000 = 2{,}082 - 3 = -0{,}918$

10. Aplicando as propriedades dos logaritmos, obtêm-se:

a) $\log 5 + \log 200 = \log (5 \cdot 200) = \log 1\,000 = 3$

b) $\log 100 + \log 50 + \log 10 + \log 2 = \log (100 \cdot 50 \cdot 10 \cdot 2) =$
$= \log 100\,000 = 5$

c) $\log_2 24 - \log_2 3 = \log_2 \frac{24}{3} = \log_2 2^3 = 3$

d) $\log_5 8 + \log_5 12{,}5 - \log_5 4 = \log_5 \frac{8 \cdot 12{,}5}{4} = \log_5 5^2 = 2$

11. Aplicando as propriedades da potenciação e dos logaritmos, em cada item, obtêm-se:

a) $\log_c \sqrt{abc} \Rightarrow \frac{\log_x \sqrt{abc}}{\log_x c} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (\log_x a + \log_x b + \log_x c)}{\log_x c} =$
$= \frac{\frac{1}{2} \cdot (6 + 4 + 2)}{2} = 3$

b) $\log_c (a^3 \cdot b^2) = \frac{\log_x (a^3 \cdot b^2)}{\log_x c} = \frac{3 \cdot \log_x a + 2 \cdot \log_x b}{\log_x c} =$
$= \frac{3 \cdot 6 + 2 \cdot 4}{2} = 13$

12. Aplicando a propriedade dos logaritmos (mudança de base), obtém-se:

$\log_2 3 \cdot \log_3 2 = \log_2 3 \cdot \frac{\log_2 2}{\log_2 3} = \cancel{k} \cdot \frac{\log_2 2}{\cancel{k}} = 1$

13. Aplicando a propriedade dos logaritmos (mudança de base), para deixar todos os termos na base 3, obtém-se:

$\cancel{\log_3 2} \cdot \frac{\cancel{\log_3 5}}{\cancel{\log_3 2}} \cdot \frac{\log_3 3}{\cancel{\log_3 5}} = \log_3 3 = 1$

14. Aplicando a propriedade dos logaritmos (mudança de base), para deixar todos os termos na base 5, obtém-se:

$\frac{\log_5 5}{\log_5 3} \cdot \frac{\log_5 27}{\log_5 4} \cdot \frac{\log_5 2^{\frac{1}{3}}}{\log_5 25} \Rightarrow \frac{1}{\cancel{\log_5 3}} \cdot \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{\log_5 3}}{2 \cdot \cancel{\log_5 2}} \cdot \frac{\frac{1}{\cancel{3}} \cdot \cancel{\log_5 2}}{2} = \frac{1}{4}$

15. Antes de resolver o sistema, deve-se considerar a condição de existência dos logaritmos na segunda equação, ou seja, $a > 0$ e $b > 0$.

Da primeira equação, obtém-se: $a + b = 20 \Rightarrow a = 20 - b$ (I)

Aplicando a propriedade do produto e a definição dos logaritmos na segunda equação, obtém-se:

$\log (a \cdot b) = 2 \Rightarrow a \cdot b = 10^2 \Rightarrow a \cdot b = 100$ (II)

Substituindo (I) em (II): $(20 - b) \cdot b = 100 \Rightarrow b^2 - 20b + 100 = 0$.

Resolvendo a equação do 2º grau, obtêm-se as raízes $b' = b'' = 10$.

Substituindo em (I), temos: $b = 10 \Rightarrow a = 20 - 10 \Rightarrow a = 10$.

Como esses valores satisfazem à condição de existência, conclui-se que $a = 10$ e $b = 10$.

$S = \{(10, 10)\}$

16. Aplicando as propriedades dos logaritmos (produto e quociente) no log 375, obtém-se:

$\log 375 = \log (3 \cdot 5^3) = \log 3 + 3 \cdot \log 5 = \; y + 3 \cdot \log \left(\frac{10}{2}\right) =$
$= y + 3 \cdot (\log 10 - \log 2) = y + 3 \cdot (1 - x) = y + 3 - 3x$

17. Para processar 64 *bits*, tem-se:

$\log 64 = \log 2^6 = 6 \cdot \log 2 = 6 \cdot \log \left(\frac{10}{5}\right) =$
$= 6 \cdot (\log 10 - \log 5) = 6 \cdot (1 - 0{,}699) = 1{,}806$

Será necessário 1,806 milisegundo.

18. Utilizando uma calculadora, obtêm-se:

a) $\log 0{,}7 \simeq -0{,}15490$

b) $\log 0{,}12 \simeq -0{,}92082$

c) $\log 834 \simeq 2{,}92117$

d) $\log 0{,}00001 = -5$

e) $\ln 25 \simeq 3{,}21888$

f) $\ln 0{,}92 \simeq -0{,}08338$

19. Utilizando uma calculadora, obtêm-se:

a) $b = 10^{1{,}88081} \simeq 76$

b) $b = 10^{1{,}75587} \simeq 57$

c) $b = e^{6{,}20051} \simeq 493$

d) $b = e^{1{,}05082} \simeq 2{,}86$

20. Utilizando uma calculadora, obtêm-se:

a) $x = 10^{-0{,}5} \simeq 0{,}3162$

b) $x = 10^{-0{,}15} \simeq 0{,}7079$

c) $x = \log 0{,}5 \simeq -0{,}3010$

d) $x = \log 2 \simeq 0{,}3010$

e) $x = \ln 10 \simeq 2{,}3026$

f) $x = \ln 0{,}5 \simeq -0{,}6931$

g) $x = \ln 0{,}15 \simeq -1{,}8971$

h) $x = \ln 0{,}005 \simeq -5{,}2983$

21. Utilizando uma calculadora, podem-se obter os valores a seguir:

Número (N)	Potência de 10	$\log N$
75	$10^{1{,}875061}$	1,875061
643	$10^{2{,}808211}$	2,808211
1320	$10^{3{,}120574}$	3,120574
1 000 000	10^6	6
0,00001	10^{-5}	−5
0,7	$10^{-0{,}154902}$	−0,154902
0,834	$10^{-0{,}078834}$	−0,078834

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

22. Utilizando uma calculadora, obtêm-se:

a) $e^{1,098612289} \simeq b \Rightarrow b \simeq 3$

b) $e^{1,945910149} \simeq b \Rightarrow b \simeq 7$

c) $e^{-0,69314718} \simeq b \Rightarrow b \simeq 0,5$

d) $e^{-1} = b \Rightarrow b \simeq 0,367879$

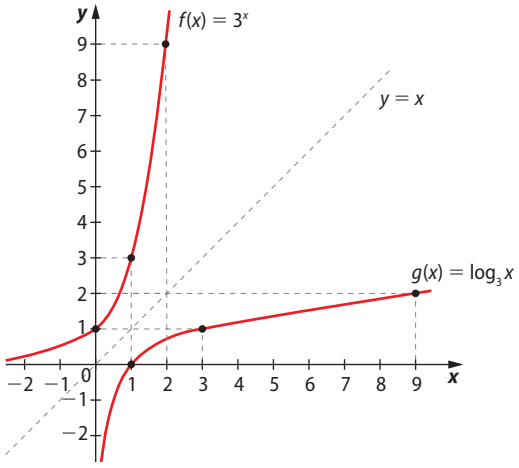
e) $e^{0} = b \Rightarrow b = 1$

23. Usando a calculadora para calcular $\ln x \simeq 3,48124$, tem-se $x \simeq e^{3,48124} \Rightarrow x \simeq 32,5$.

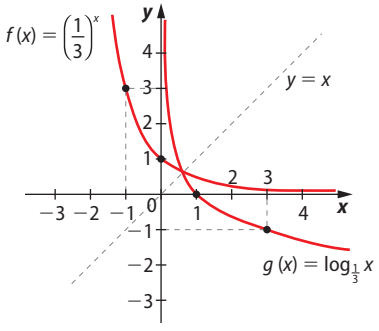
24. Aplicando a propriedade dos logaritmos (mudança de base), obtém-se:

$\log_4 e = \frac{\ln e}{\ln 4} = \frac{1}{\ln 4} \simeq 0,7213$

25. **a)**



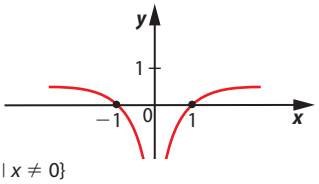
b)



26. $y = \log |x|$

Como $|x|$ é sempre um valor positivo, o valor de x pode ser um número real qualquer, desde que $x \neq 0$.

Portanto, a função $\log x$, para $x > 0$, é simétrica à função $\log(-x)$, para $x < 0$, em relação ao eixo das ordenadas.

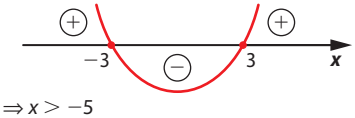


$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$

$\text{Im}(f) = \mathbb{R}$

27. Para encontrar o domínio de f, deve-se analisar a função em três partes. Veja a seguir.

(I) Analisando a inequação $x^2 - 9 \geqslant 0$, obtêm-se os intervalos $x \leqslant -3$ ou $x \geqslant 3$, que satisfazem à condição.

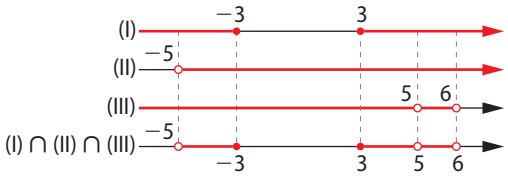


(II) $x + 5 > 0 \Rightarrow x > -5$

(III) $6 - x > 0$ e $6 - x \neq 1$

$x < 6$ e $x \neq 5$

Fazendo a intersecção entre as análises, obtêm-se:

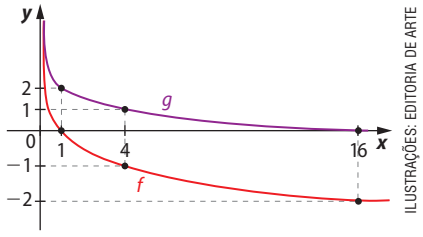


Portanto, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x \leqslant -3 \text{ ou } 3 \leqslant x < 6 \text{ e } x \neq 5\}$.

28. Utilizando a definição dos logaritmos, obtêm-se:

x	$f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$	$g(x) = 2 + \log_{\frac{1}{4}} x$
$\frac{1}{16}$	2	4
$\frac{1}{4}$	1	3
1	0	2
4	−1	1
16	−2	0

a)



b) Para quaisquer abscissas x_1 e x_2 em que $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) > f(x_2)$ e $g(x_1) > g(x_2)$. Portanto, as funções são decrescentes.

c) O domínio de ambas as funções é o conjunto dos números reais estritamente positivos. A imagem de ambas as funções é o conjunto dos números reais, ou seja:

$D(f) = \mathbb{R}_+^*$ e $D(g) = \mathbb{R}_+^*$, $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(g) = \mathbb{R}$

d) Espera-se que os estudantes respondam que a função $g(x)$ pode ser expressa como $f(x) + 2$ e que, ao adicionarmos duas unidades à função $f(x)$, há um deslocamento do gráfico em duas unidades na vertical para cima. Por exemplo, nesse caso, $f(1) = 0$ e $g(1) = 2$.

e) Espera-se que os estudantes respondam que, ao subtrairmos duas unidades na função $f(x)$, há um deslocamento do gráfico em duas unidades na vertical para baixo.

f) Resposta pessoal. Resposta possível: Observe que $q(x)$ é a função $f(x)$ com 2 adicionado à variável x. Desse modo, para obter o gráfico de $q(x)$, basta considerar o gráfico de $f(x)$ deslocado horizontalmente 2 unidades para a esquerda.

29. De acordo com a expressão fornecida pelo enunciado, ao considerar $t = 8$, obtém-se:

$P(8) = 10^5 \cdot \log_3 (8 + 1) = 10^5 \cdot \log_3 9 = 10^5 \cdot 2 \Rightarrow P(8) = 200\,000$

Logo, em 8 anos, estima-se a produção de 200 000 carros.

Resposta: alternativa **a**.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

30. Antes de calcular a área do triângulo, deve-se, primeiro, determinar o valor das ordenadas dos pontos C e B. Assim:

$y_C = \log_3 3 = 1$

$y_B = \log_3 27 = \log_3 3^3 = 3$

Portanto, a área do triângulo ABC, em u.a., é dada por:

$S = \frac{(27 - 3) \cdot (3 - 1)}{2} = 24$

Resposta: alternativa **b**.

31. a) Considerando a fórmula fornecida pelo enunciado e a aproximação para log 2, obtém-se:

$pH = -\log [H^+] \Rightarrow pH = -\log [6{,}4 \cdot 10^{-7}] \Rightarrow$

$\Rightarrow pH = -\log [64 \cdot 10^{-8}] \Rightarrow$

$\Rightarrow pH = -(\log 64 + \log 10^{-8}) \Rightarrow$

$\Rightarrow pH = -(6 \cdot \log 2 - 8 \cdot \log 10) \Rightarrow$

$\Rightarrow pH \simeq -(6 \cdot 0{,}3 - 8) \Rightarrow pH \simeq 6{,}2$

b) Como o pH é aproximadamente 6,2, conclui-se que a solução é ácida.

32. a) Para encontrar o valor numérico em cada caso, deve-se substituir o valor da abscissa em cada função. Logo:

$f\left(\frac{3}{2}\right) = 2\log_2\left(\frac{3}{2} - 1\right) = 2\log_2 \frac{1}{2} = -2$

$f(2) = 2\log_2(2 - 1) = 2\log_2 1 = 0$

$f(3) = 2\log_2(3 - 1) = 2\log_2 2 = 2$

$g(-4) = \log_2\left(1 - \frac{-4}{4}\right) = \log_2 2 = 1$

$g(0) = \log_2\left(1 - \frac{0}{4}\right) = \log_2 1 = 0$

$g(2) = \log_2\left(1 - \frac{2}{4}\right) = \log_2 \frac{1}{2} = -1$

b) Para $f(x) = g(x)$, tem-se:

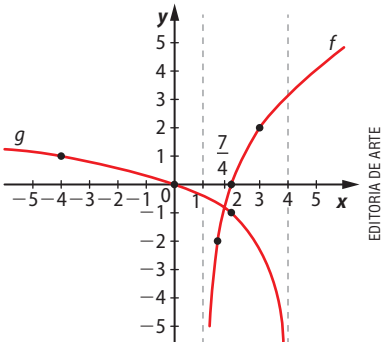
$2\log_2(x - 1) = \log_2\left(1 - \frac{x}{4}\right) \Rightarrow \log_2(x - 1)^2 = \log_2\left(1 - \frac{x}{4}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x - 1)^2 = \left(1 - \frac{x}{4}\right) \Rightarrow x \cdot (4x - 7) = 0$

Resolvendo a equação produto, obtêm-se as raízes $x' = 0$ e $x' = \frac{7}{4}$.

Como a resposta deve pertencer ao intervalo $1 < x < 4$, então $x = \frac{7}{4}$.

c)



33. a) Aplicando as propriedades da potenciação, obtém-se:

$f(x) = 10^{1+x} + 10^{1-x} \Rightarrow f(x) = 10 \cdot 10x + \frac{10}{10^x}$

Substituindo x por $\log_{10}(2 + \sqrt{3})$, tem-se:

$f\left(\log_{10}(2 + \sqrt{3})\right) = 10 \cdot 10^{\log_{10}(2+\sqrt{3})} + \frac{10}{10^{\log_{10}(2+\sqrt{3})}} \Rightarrow$

$\Rightarrow f\left(\log_{10}(2 + \sqrt{3})\right) = 10 \cdot (2 + \sqrt{3}) + \frac{10}{2 + \sqrt{3}}$

Racionalizando a segunda parcela da função, temos:

$\frac{10}{2 + \sqrt{3}} \cdot \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = 10 \cdot (2 - \sqrt{3})$

Dessa forma, conclui-se que:

$f\left(\log_{10}(2 + \sqrt{3})\right) = 10 \cdot (2 + \sqrt{3}) + 10 \cdot (2 - \sqrt{3}) = 40.$

b) Considere $f(x) = 52$, ou seja, $10 \cdot 10^x + \frac{10}{10^x} = 52$.

Substituindo 10^x por y, temos:

$10 \cdot y + \frac{10}{y} = 52 \Rightarrow 10y^2 - 52y + 10 = 0$

Resolvendo a equação, obtêm-se as raízes $y' = 5$ e $y'' = \frac{1}{5}$.

Para $y' = 5$, tem-se:

$10^x = 5 \Rightarrow x = \log 5 \Rightarrow x = \log\left(\frac{10}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \log 10 - \log 2 \simeq 0{,}7$

Para $y'' = \frac{1}{5}$, tem-se:

$10^x = \frac{1}{5} \Rightarrow x = \log \frac{1}{5} \Rightarrow x = \log\left(\frac{2}{10}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \log 2 - \log 10 \simeq -0{,}7$

$S = \{-0{,}7; 0{,}7\}$

34. Aplicando o $\log_7$ em ambos os membros da equação exponencial, obtém-se:

$7^x = 4{,}2 \Rightarrow x = \log_7 4{,}2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{\log \frac{42}{10}}{\log 7} = \frac{(\log 6 + \log 7) - \log 10}{\log 7} = \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{0{,}7781 + 0{,}8451 - 1}{0{,}8451} \simeq 0{,}7374 \simeq 0{,}74$

Portanto, $x \simeq 0{,}74$.

35. a) A condição de existência da equação é: $x > 0$.

Passando $\log_8 x$ para base 2, tem-se:

$\log_8 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 8} = \frac{\log_2 x}{3}$

Assim, $(\log_2 x)^2 - 9 \log_8 x = 4 \Rightarrow (\log_2 x)^2 - 3 \log_2 x - 4 = 0$.

Fazendo $\log_2 x = y$:

$y^2 - 3y - 4 = 0$

Resolvendo a equação, obtêm-se as raízes $y' = 4$ e $y'' = -1$.

Substituindo os valores encontrados, tem-se:

$y = 4 \Rightarrow \log_2 x = 4 \Rightarrow x = 16$

$y = -1 \Rightarrow \log_2 x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

Logo, $S = \left\{\frac{1}{2}, 16\right\}$.

b) A condição de existência da equação é: $x > 0$.

$(\log_2 x)^2 + 4 \cdot \log_2 x - 32 = 0$

Fazendo $\log_2 x = y$:

$y^2 + 4y - 32 = 0$

Resolvendo a equação, obtêm-se as raízes $y' = 4$ e $y'' = -8$.

Substituindo os valores encontrados, tem-se:

$y = 4 \Rightarrow \log_2 x = 4 \Rightarrow x = 16$

$y = -8 \Rightarrow \log_2 x = -8 \Rightarrow x = \frac{1}{256}$

$S = \left\{\frac{1}{256}, 16\right\}$

36. Considerando os dados fornecidos e aplicando o logaritmo em ambos os lados da equação, obtém-se:

$36^x = 24 \Rightarrow \log 36^x = \log 24 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x \cdot \log 6 = 3 \cdot \log 2 + \log 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x \cdot (\log 2 + \log 3) = 3 \cdot \log 2 + \log 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x \cdot (0{,}78) = 1{,}38 \Rightarrow x = \frac{1{,}38}{1{,}56} = \frac{23}{26}$

37. Considerando os dados fornecidos no enunciado, tem-se:

$v_{máx} = 3400 \cdot \log_2 (x + 1) \Rightarrow 27200 = 3400 \cdot \log_2 (x + 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2 (x + 1) = 8 \Rightarrow x + 1 = 2^8 \Rightarrow x = 255$

38. $N = 3N_0 \Rightarrow 3N_0 = N_0 \cdot e^{0{,}05t} \Rightarrow e^{0{,}05t} = 3 \Rightarrow \ln e^{0{,}05t} = \ln 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0{,}05t \simeq 1{,}099 \Rightarrow t \simeq 21{,}98$

O tempo será de aproximadamente 22 minutos.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

39. Resposta pessoal. Exemplo de situação-problema: Determinado bem deprecia 10% ao ano. Considerando essa informação, depois de quanto tempo o valor atualizado desse bem será a metade do valor de compra?

Considerando $2V = V_0$, tem-se:

$V = V_0 \cdot (1 - i)^t \Rightarrow V_0 = 2V_0 \cdot (1 - 0{,}1)^t \Rightarrow 1 = 2(0{,}9)^t \Rightarrow$

$\Rightarrow \log 1 = \log 2(0{,}9)^t \Rightarrow 0 = \log 2 + \log(0{,}9)^t \Rightarrow$

$\Rightarrow -\log 2 = \log (0{,}9)^t \Rightarrow t = \dfrac{-\log 2}{\log 0{,}9} \simeq 6{,}6$

Aproximadamente 6,6 anos.

40. Resposta pessoal. Exemplo de situação-problema: Em 2020, o estado de Oaxaca, no México, foi atingido por um terremoto de 7,5 na escala Richter. Qual foi a energia liberada por esse terremoto? Sabendo-se que $E_0 = 7 \cdot 10^{-3}$ kW/h e que o terremoto atingiu aproximadamente 7,5 na escala, para obter a energia liberada E, pode-se utilizar a fórmula:

$I = \dfrac{2}{3} \cdot \log\left(\dfrac{E}{E_0}\right) \Rightarrow 7{,}5 = \dfrac{2}{3} \cdot \log\left(\dfrac{E}{7 \cdot 10^{-3}}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow 11{,}25 = \log\left(\dfrac{E}{7 \cdot 10^{-3}}\right) \Rightarrow 10^{11{,}25} = \dfrac{E}{7 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow E = 7 \cdot 10^{11{,}25 - 3} \simeq 10^9$

Portanto, a energia liberada pelo terremoto de 7,5 na escala Richter foi de, aproximadamente, 10^9 kW/h.

41. Sabendo que a meia-vida do césio-137 é 30 anos, pode-se utilizar a expressão fornecida pelo enunciado para determinar uma aproximação para a constante k:

$M(t) = A \cdot (2{,}7)^{kt} \Rightarrow \dfrac{1}{2}A = A \cdot (2{,}7)^{30k} \Rightarrow 1 = 2 \cdot (2{,}7)^{30k} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log 1 = \log\left(2 \cdot (2{,}7)^{30k}\right) \Rightarrow 0 = \log 2 + 30k \cdot \log 2{,}7 \Rightarrow$

$\Rightarrow k \simeq \dfrac{-0{,}3}{30 \cdot \log 2{,}7}$

Para determinar o tempo em que a quantidade de massa se torna 10% de seu valor inicial, calcula-se:

$0{,}1A \simeq A \cdot (2{,}7)^{\frac{-0{,}3}{30 \cdot \log 2{,}7} \cdot t} \Rightarrow \log 1 \simeq \log\left(10 \cdot (2{,}7)^{\frac{-0{,}3}{30 \cdot \log 2{,}7} \cdot t}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 \simeq \log 10 - \dfrac{0{,}3t}{30 \cdot \log 2{,}7} \cdot \log 2{,}7 \Rightarrow t \simeq 100$

Logo, são necessários, aproximadamente, 100 anos.

Resposta: alternativa **e**.

42. **a)** (I) A condição de existência é $a^2 - 2a + 1 > 0$.

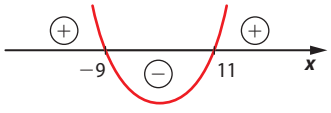
Considerando $a^2 - 2a + 1 = 0$, obtém-se as raízes $a' = a'' = 1$.

Portanto, $\{a \in \mathbb{R} \mid a \neq 1\}$.

(II) Aplicando a definição dos logaritmos:

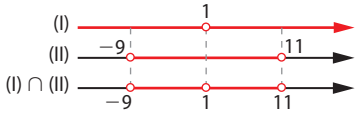
$\log_{10} a^2 - 2a + 1 < 2 \Rightarrow a^2 - 2a + 1 < 10^2 \Rightarrow a^2 - 2a - 99 < 0$.

Considerando $a^2 - 2a - 99 = 0$, obtêm-se as raízes $a' = -9$ e $a'' = 11$.



Portanto, temos $a^2 - 2a - 99 < 0$ para $-9 < a < 11$.

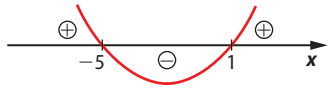
Calculando a intersecção entre (I) e (II), obtém-se:



$S = \{a \in \mathbb{R} \mid -9 < a < 11 \text{ e } a \neq 1\}$

b) (I) A condição de existência é $x^2 + 4x - 5 > 0$.

Considerando $x^2 + 4x - 5 = 0$, obtêm-se as raízes $x' = 1$ e $x'' = -5$.



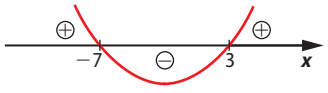
Portanto, $x < -5$ ou $x > 1$.

(II) Aplicando a definição dos logaritmos e considerando sua base menor do que 1:

$\log_{\frac{1}{2}} x^2 + 4x - 5 \geqslant -4 \Rightarrow x^2 + 4x - 5 \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-4} \Rightarrow$

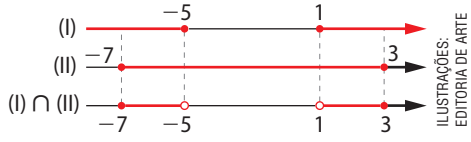
$\Rightarrow x^2 + 4x - 21 \leqslant 0$

Considerando $x^2 + 4x - 21 = 0$, obtêm-se $x' = 3$ e $x'' = -7$.



Portanto, $-7 \leqslant x \leqslant 3$.

Calculando a intersecção entre (I) e (II), obtém-se:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -7 \leqslant x < -5 \text{ ou } 1 < x \leqslant 3\}$

43. Considerando as informações do enunciado, tem-se:

$\dfrac{Q_0}{4} < Q_0(0{,}64)^t < \dfrac{Q_0}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{4} < (0{,}64)^t < \dfrac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log\left(\dfrac{1}{4}\right) < \log(0{,}64)^t < \log\left(\dfrac{1}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow -2 \cdot \log 2 < t \cdot \log\left(\dfrac{64}{100}\right) < -\log 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow -2 \cdot \log 2 < t \cdot (6 \cdot \log 2 - 2) < -\log 2$

Considerando as aproximações obtidas em uma calculadora científica:

$-2 \cdot \log 2 < t \cdot (6 \cdot \log 2 - 2) < -\log 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow -0{,}602 < -0{,}194t < -0{,}301 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0{,}301 < 0{,}194t < 0{,}602 \Rightarrow 1{,}55 < t < 3{,}1$

Atividades complementares

1. Para determinar a profundidade em que a intensidade da luz é 32% da intensidade na superfície, calcula-se:

$I = I_0 \cdot (0{,}8)^{\frac{h}{40}} \Rightarrow 0{,}32I_0 = I_0 \cdot (0{,}8)^{\frac{h}{40}} \Rightarrow 0{,}32 = (0\,8)^{\frac{h}{40}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log 0{,}32 = \log (0{,}8)^{\frac{h}{40}} \Rightarrow \log \dfrac{32}{100} = \dfrac{h}{40} \cdot \log \dfrac{8}{10} \Rightarrow$

$\Rightarrow 5 \cdot \log 2 - 2 \cdot \log 10 = \dfrac{h}{40} \cdot (3 \cdot \log 2 - \log 10) \Rightarrow$

$\Rightarrow 5 \cdot 0{,}3 - 2 \cdot 1 = \dfrac{h}{40} \cdot (3 \cdot 0{,}3 - 1) \Rightarrow h = 200$

Logo, a profundidade será de 200 cm ou 2 m.

Resposta: alternativa **c**.

2. Aplicando as propriedades dos logaritmos, obtém-se:

$2 \log_9 x + \log_3 6 - 6 \log_9 \sqrt{y} =$

$= \log_9 x^2 + \log_9 36 - \log_9 y^3 = \log_9 \dfrac{36x^2}{y^3}$

Resposta: alternativa **a**.

3. Aplicando as propriedades dos logaritmos, obtém-se:

$\log_5 18 = \dfrac{\log 18}{\log 5} = \dfrac{\log 2 + \log 9}{\log 10 - \log 2} = \dfrac{\log 2 + 2 \cdot \log 3}{1 - \log 2} = \dfrac{x + 2y}{1 - x}$

Resposta: alternativa **a**.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

4. Sabe-se que $pH = -\log[H^+]$ e $[H^+] = 5{,}4 \cdot 10^{-8}$ mol/L. Então, aplicando as propriedades dos logaritmos, tem-se que:
$pH = -\log[5{,}4 \cdot 10^{-8}] = -\log(5{,}4) - \log(10^{-8}) =$
$= -\log(54) + \log 10 + 8 = -\log(3^3 \cdot 2) + 1 + 8 \Rightarrow$
$\Rightarrow pH = -3\log 3 - \log 2 + 9$
Substituindo as aproximações de log 2 e log 3, obtém-se:
$pH = -3\log 3 - \log 2 + 9 \simeq -3 \cdot (0{,}48) - 0{,}3 + 9 \Rightarrow$
$\Rightarrow pH \simeq 7{,}26$
Resposta: alternativa **a**.

5. Determinando a condição de existência da função $f(x) = \log_{x-1}(x^2 + 1)$, obtém-se:
$x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$
$x - 1 \neq 1 \Rightarrow x \neq 2$
Como $x^2 + 1 > 0$ para qualquer valor real de x, conclui-se que as condições de existência, ou domínio, de f são $x > 1$ e $x \neq 2$.
Resposta: alternativa **e**.

6. Pelas informações, tem-se que $h(2) = 10$. Substituindo esses valores na função h, obtém-se a equação $10 = 50 \cdot (1 - 10^{-2k})$.
Resolvendo essa equação exponencial, encontra-se:
$k = -\frac{1}{2} \cdot \log\left(\frac{4}{5}\right)$.
Os eucaliptos serão cortados quando estiverem com 8 anos. Logo, devemos calcular $h(8)$:
$h(8) = 50 \cdot \left[1 - 10^{-8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \log\left(\frac{4}{5}\right)}\right] =$
$= 50 \cdot \left[1 - 10^{\log\left(\frac{4}{5}\right)^4}\right] = 50 \cdot \left(1 - \frac{256}{625}\right) = 29{,}52$
Portanto, 29,52 metros de altura.

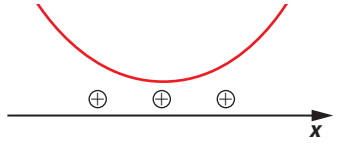
7. Como se trata de uma equação produto com três fatores, então, para encontrar as raízes, basta igualar cada um desses fatores a zero. Logo:
$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$
$2^{x^2 - 9} = 0 \Rightarrow \nexists\, x \in \mathbb{R}$
Aplicando a definição em $\log|x^2 + x - 1| = 0$, obtém-se:
$|x^2 + x - 1| = 10^0 \Rightarrow |x^2 + x - 1| = 1$
Para $x^2 + x - 1 < 0$, tem-se:
$x^2 + x - 1 = -1 \Rightarrow x^2 + x = 0$
Resolvendo a equação do 2º grau, obtêm-se as raízes $x' = 0$ e $x'' = -1$.
Para $x^2 + x - 1 \geqslant 0$, tem-se:
$x^2 + x - 1 = 1 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$
Resolvendo a equação do 2º grau, obtêm-se as raízes $x' = 1$ e $x'' = -2$.
Logo, as raízes são: -3, -2, -1, 0 e 1, ou seja, cinco raízes reais distintas.
Resposta: alternativa **e**.

8. Para calcular o tempo necessário para que 2 500 pessoas sejam atingidas por uma epidemia, deve-se considerar que $N(t) = 2\,500$. Logo:
$N(t) = \frac{10\,000}{1 + 8 \cdot 4^{-2t}} \Rightarrow 2\,500 = \frac{10\,000}{1 + 8 \cdot 4^{-2t}} \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 + 8 \cdot 4^{-2t} = 4 \Rightarrow 2^{3 - 4t} = 3 \Rightarrow \log 2^{3 - 4t} = \log 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3 - 4t = \frac{\log 3}{\log 2} \Rightarrow -4t = -1{,}4 \Rightarrow t = 0{,}35$
Considerando que o mês tem 30 dias, $t = 0{,}35$ equivale a $0{,}35 \cdot 30 = 10{,}5$, isto é, aproximadamente 10 dias.
Resposta: alternativa **a**.

9. Considerando a definição de módulo, conclui-se que:
$|\log_3(3x)| \leqslant 1 \Rightarrow -1 \leqslant \log_3(3x) \leqslant 1$
Aplicando a definição dos logaritmos, obtém-se:
$-1 \leqslant \log_3(3x) \leqslant 1 \Rightarrow \frac{1}{3} \leqslant 3x \leqslant 3 \Rightarrow \frac{1}{9} \leqslant x \leqslant 1$
Logo, $S = \left[\frac{1}{9}, 1\right]$.
Resposta: alternativa **c**.

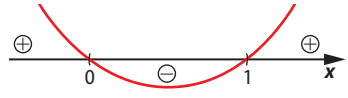
10. As condições de existência do logaritmo são $x > 0$, $x \neq 1$ e $x + 6 > 0$. Assim, pode-se considerar que x deve ser um valor positivo, porém diferente de 1.
Aplicando a definição de logaritmos, obtém-se:
$\log_x(x + 6) = 2 \Rightarrow x + 6 = x^2 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$
Resolvendo a equação do 2º grau, obtêm-se as raízes $x' = 3$ e $x'' = -2$.
Como, pela condição de existência, $x > 0$, deve-se desconsiderar a solução -2. Portanto, a solução é $x = 3$, ou seja, um número primo.
Resposta: alternativa **a**.

11. Para que a função $f(x) = \log_{10}\left(\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - x + 1)\right)$ seja definida, deve-se considerar:
$x^2 - x + 1 > 0$ (I)
$\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - x + 1) > 0$ (II)
(I) $x^2 - x + 1 > 0$
Considerando a função $y = x^2 - x + 1$, tem-se $\Delta = 1 - 4 = -3$; logo, a função não possui raízes reais e sempre assumirá um valor positivo, pois $a > 0$.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

(II) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - x + 1) > 0$
Aplicando a definição dos logaritmos, obtém-se:
$\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - x + 1) > \log_{\frac{1}{3}} 1 \Rightarrow x^2 - x + 1 < 1 \Rightarrow x^2 - x < 0$
Considerando $x^2 - x = 0$, obtêm-se as raízes $x' = 0$ e $x'' = 1$.



Portanto, $0 < x < 1$.
De (I) $\cap$ (II), obtém-se $0 < x < 1$.
Assim, $D(f) = \{x \in \mathbb{R};\ 0 < x < 1\}$.
Resposta: alternativa **a**.

12. Considerando o enunciado, é necessário que $P < 0{,}75V$. Logo:
$V = P \cdot (1 + i)^n \Rightarrow P < 0{,}75P \cdot (1 + i)^n \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 < 0{,}75 \cdot (1 + 0{,}0132)^n \Rightarrow \frac{4}{3} < 1{,}0132^n$
Como a aproximação fornecida está na base e, deve-se aplicar o ln em ambos os membros da inequação, assim:
$\ln\left(\frac{4}{3}\right) < \ln(1{,}0132^n) \Rightarrow n \cdot 0{,}0131 > 0{,}2877 \Rightarrow n > 21{,}96$
Como n é um número natural, pois representa uma parcela, pode-se considerar $n = 22$.
Assim, a parcela a ser paga com a 30ª parcela será a de número $30 + 22 = 52$, ou seja, a 52ª parcela.
Resposta: alternativa **c**.

13. Para calcular o número de parcelas cujo valor não comprometa o orçamento da pessoa, deve-se considerar $P \leqslant 400$. Logo:
$P = \frac{5\,000 \cdot 1{,}013^n \cdot 0{,}013}{(1{,}013^n - 1)} \Rightarrow \frac{65 \cdot 1{,}013^n}{(1{,}013^n - 1)} \leqslant 400 \Rightarrow$
$\Rightarrow 65 \cdot 1{,}013^n \leqslant 400 \cdot (1{,}013^n - 1) \Rightarrow$
$\Rightarrow 65 \cdot 1{,}013^n \leqslant 400 \cdot 1{,}013^n - 400 \Rightarrow$
$\Rightarrow 335 \cdot 1{,}013^n \geqslant 400 \Rightarrow 1{,}013^n \geqslant \frac{400}{335}$
Aplicando o log em ambos os membros da inequação, obtém-se:
$\log(1{,}013^n) \geqslant \log\left(\frac{400}{335}\right) \Rightarrow$
$\Rightarrow n \cdot \log 1{,}013 \geqslant \log 400 - \log 335 \Rightarrow$
$\Rightarrow 0{,}005n \geqslant 2{,}602 - 2{,}525 \Rightarrow n \geqslant \frac{0{,}077}{0{,}005} \Rightarrow n \geqslant 15{,}4$
Assim, o menor número de parcelas será 16.
Resposta: alternativa **d**.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

14. Considerando a intensidade do ronco mais alto, tem-se: $93 = 120 + 10 \cdot \log I \Rightarrow$
$\Rightarrow -2{,}7 = \log I \Rightarrow I = 10^{-2{,}7}$.
Considerando a intensidade do ronco moderado, tem-se: $50 = 120 + 10 \cdot \log I \Rightarrow$
$\Rightarrow -7 = \log I \Rightarrow I = 10^{-7}$.
Assim, a razão entre as duas intensidades é: $\frac{10^{-2{,}7}}{10^{-7}} = 10^{-2{,}7-(-7)} = 10^{4{,}3}$.
Ou seja, um número entre 10 000 e 100 000.
Resposta: alternativa **d**.

Capítulo 5 • Razões trigonométricas na circunferência

Atividades

1. Em cada um dos itens, aplica-se a regra de três simples para calcular o que é solicitado.

a) $180° \text{ ——— } \pi \text{ rad}$
$60° \text{ ——— } x$
$\frac{180°}{60°} = \frac{\pi \text{ rad}}{x} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$

b) $180° \text{ ——— } \pi \text{ rad}$
$210° \text{ ——— } x$
$\frac{180°}{210°} = \frac{\pi \text{ rad}}{x} \Rightarrow x = \frac{7\pi}{6} \text{ rad}$

c) $180° \text{ ——— } \pi \text{ rad}$
$x \text{ ——— } \frac{10\pi}{9} \text{ rad}$
$\frac{180°}{x} = \frac{\pi \text{ rad}}{\frac{10\pi}{9} \text{ rad}} \Rightarrow x = 200°$

d) $180° \text{ ——— } \pi \text{ rad}$
$x \text{ ——— } \frac{\pi}{20} \text{ rad}$
$\frac{180°}{x} = \frac{\pi \text{ rad}}{\frac{\pi}{20} \text{ rad}} \Rightarrow x = 9°$

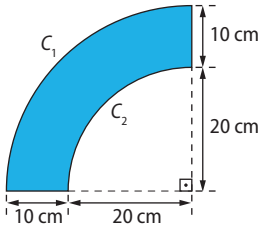
2. Considerando os dados fornecidos pelo enunciado, obtêm-se:
$\text{raio} = \frac{\text{diâmetro}}{2} = \frac{32 \text{ cm}}{2} = 16 \text{ cm}$
$C = 2\pi r = 2\pi \cdot 16 \text{ cm} = 32\pi \text{ cm}$
Como o arco $\overset{\frown}{AB}$ mede 8 cm, então:
$2\pi \text{ rad} \text{ ——— } 32\pi \text{ cm}$
$x \text{ ——— } 8 \text{ cm}$
$\frac{2\pi \text{ rad}}{x} = \frac{32\pi \text{ cm}}{8 \text{ cm}} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ rad}$
Logo, o arco $\overset{\frown}{AB}$ de 8 cm equivale a $\frac{1}{2}$ rad ou 0,5 rad.

3. Como o relógio analógico está dividido em 12 partes iguais, cada parte mede 30°, pois $360 : 12 = 30$, ou seja, a cada 5 minutos, o ponteiro percorre um arco de 30°. Então, em 25 minutos, o ponteiro percorre um arco de 150°, pois $30 \cdot 5 = 150$.
Convertendo em radiano, obtém-se:
$180° \text{ ——— } \pi \text{ rad}$
$150° \text{ ——— } x$
$\frac{180°}{150°} = \frac{\pi \text{ rad}}{x} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6} \text{ rad}$

- Resposta pessoal. Uma possibilidade é observar uma volta completa no relógio. Uma volta completa equivale a 360° e corresponde a 60 minutos.
Então, cada minuto equivale a 6°, pois $360 : 60 = 6$.
Logo, 25 minutos equivalem a 150°, pois $25 \cdot 6 = 150$.

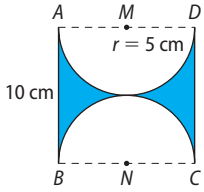
4. Observe que é possível dividir o caminho em 3 partes.
Na primeira, de P a C, tem-se uma semicircunferência de diâmetro igual a 4 m e, portanto, raio igual a 2 m.
Desse modo, seu comprimento será:
$C = \frac{2\pi r}{4} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 2 \text{ m}}{4} = 2\pi \text{ m}$
Na segunda parte, de C a T, obtém-se novamente uma semicircunferência de raio igual a 2 m. Seu comprimento será igual ao calculado anteriormente, $C = 2\pi$ m.
Na terceira parte, de T a Q, obtém-se um quarto de circunferência de raio igual a 4 m. Seu comprimento será:
$C = \frac{2\pi r}{4} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 4 \text{ m}}{4} = 2\pi \text{ m}$
Adicionando os resultados obtidos, tem-se 6π metros, que devem ser percorridos para ir de P a Q, seguindo as flechas.

5. **a)**



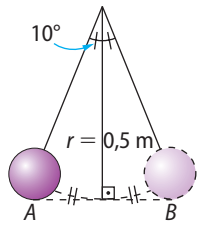
Observe que a figura representa a quarta parte de duas circunferências concêntricas cuja diferença entre seus raios é 10 cm, pois o raio r da circunferência menor é 20 cm e o raio R da circunferência maior é 30 cm. Assim, o comprimento de cada contorno curvo da imagem, em cm, é dado por:
$C_1 = \frac{2\pi R}{4} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 30}{4} = 47{,}1$
$C_2 = \frac{2\pi r}{4} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 20}{4} = 31{,}4$
Logo, o comprimento de todo o contorno da figura, em cm, é:
$47{,}1 + 31{,}4 + 10 + 10 = 98{,}5$

b)



Observe que a figura representa uma região quadrada da qual foram retiradas duas semicircunferências de mesmo raio. Desse modo, o contorno curvo da figura, em cm, é dado pelo comprimento de uma circunferência de raio 5 cm:
$C = 2\pi r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5 = 31{,}4$
Logo, o comprimento de todo o contorno da figura, em cm, é:
$31{,}4 + 10 + 10 = 51{,}4$

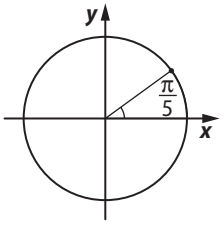
6. Observe que a figura representa o comprimento de um arco de 20°.



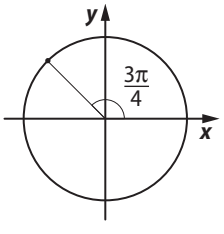
Convertendo 20° em radiano, obtém-se:
$\frac{180°}{20°} = \frac{\pi \text{ rad}}{x} \Rightarrow x = \frac{\pi}{9} \text{ rad}$
Portanto, o comprimento do arco $\overset{\frown}{AB}$, em m, é:
$\ell = \alpha \cdot r = \frac{\pi}{9} \cdot 0{,}5 = \frac{\pi}{18}$.

7. A distância total percorrida pela primeira formiga é metade do comprimento de uma circunferência de raio R:
$\frac{C}{2} = \frac{2\pi R}{2} = \pi R$
A distância total percorrida pela segunda formiga é metade do comprimento de uma circunferência de raio r mais a distância do segmento $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, ou seja, 1 cm para cada segmento. Logo:
$\frac{C}{2} + 2 = \pi r + 2$
A diferença entre as distâncias percorridas pelas formigas é:
$(\pi R) - (\pi r + 2) \Rightarrow \pi R - \pi r - 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \pi(R - r) - 2$
Como a diferença $(R - r)$ é 1 cm, então conclui-se que a diferença entre os caminhos das formigas, em cm, é $\pi - 2$.
Resposta: alternativa **d**.

8. **a)** $\frac{\pi}{5}$ equivale a:
$\frac{\pi}{5} = \frac{180°}{5} = 36°$
Logo, ao representar 36° na circunferência trigonométrica, no sentido anti-horário, obtém-se:



b) $\frac{3\pi}{4}$ equivale a:
$\frac{3\pi}{4} = \frac{3 \cdot 180°}{4} = 135°$
Logo, ao representar 135° na circunferência trigonométrica, no sentido anti-horário, obtém-se:



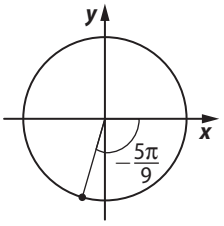
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

c) $-\frac{5\pi}{9}$ equivale a:

$-\frac{5\pi}{9} = -\frac{5 \cdot 180°}{9} = -100°$

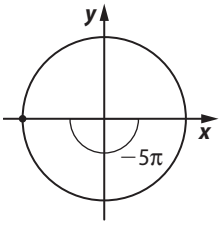
Logo, ao representar $-100°$ na circunferência trigonométrica, no sentido horário, obtém-se:



d) -5π equivale a:

$-5\pi = -5 \cdot 180° = -900°$

Como $-900°$ corresponde a duas voltas inteiras na circunferência ($2 \cdot 360° = 720°$) e mais meia-volta ($180°$) no sentido horário, ao representar $-180°$ na circunferência trigonométrica, obtém-se:



9. a) Analisando o arco $\overset{\frown}{AP}$, percebe-se que a primeira determinação positiva é 63°. Logo, os arcos côngruos a ele são dados por:

$\alpha = 63° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$

b) Analisando o arco $\overset{\frown}{AP}$, percebe-se que a primeira determinação positiva é $\frac{3\pi}{4}$. Logo, os arcos côngruos a ele são dados por:

$\alpha = \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

10. Sabe-se que $-\frac{5\pi}{6}$ equivale a $210°$ e $\frac{7\pi}{6}$ equivale a $210°$.

Logo, eles são pontos coincidentes na circunferência.

- Resposta pessoal. Uma possibilidade seria adicionar uma volta completa no sentido anti-horário ao ponto de extremidade $-\frac{5\pi}{6}$, ou seja, tomar $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi$ e observar que esta operação resulta em $\frac{7\pi}{6}$, concluindo que estes pontos coincidem na circunferência.

11. a) Com relação ao ângulo $1490°$, pode-se escrever que:

$1490° = 50° + (4 \cdot 360°)$

Com relação ao ângulo $-1030°$, pode-se escrever que:

$-1030° = 50° - (3 \cdot 360°)$

Como a primeira determinação positiva dos arcos é 50°, então eles são côngruos.

b) Com relação ao ângulo $\frac{14\pi}{3}$ rad, pode-se escrever que:

$\frac{14\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2 \cdot 2\pi$

Com relação ao ângulo $\frac{19\pi}{3}$ rad, pode-se escrever que:

$\frac{19\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 3 \cdot 2\pi$

Como $\frac{\pi}{3}$ rad e $\frac{2\pi}{3}$ rad não são arcos côngruos na primeira determinação positiva, então os ângulos $\frac{14\pi}{3}$ rad e $\frac{19\pi}{3}$ rad também não são côngruos.

12. a) Ao dividir $-1640°$ por $360°$, obtém-se -4 e resto $-200°$.

Como $360° - 200° = 160°$, pode-se afirmar que $-1640°$ e $160°$ são côngruos e estão no segundo quadrante.

b) Ao dividir $\frac{2487\pi}{4}$ por 2π, obtém-se 310 e resto $\frac{7\pi}{4}$.

Portanto, $\frac{2487\pi}{4}$ e $\frac{7\pi}{4}$ são côngruos e estão no quarto quadrante.

13. a) Com relação ao ângulo $1810°$, pode-se escrever:

$1810° = 10° + (5 \cdot 360°)$

Então, o móvel dá 5 voltas completas e para no primeiro quadrante.

b) Com relação ao ângulo $\frac{25\pi}{4}$, pode-se escrever:

$\frac{25\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 3 \cdot 2\pi$

Então, o móvel dá 3 voltas completas e para no primeiro quadrante.

c) Com relação ao ângulo $-1200°$, pode-se escrever:

$-1200° = -120° - 3 \cdot 360°$

Como $360° - 120° = 240°$, pode-se afirmar que $-1200°$ e $240°$ são côngruos. Então, o móvel dá 3 voltas completas em sentido horário e para em $240°$, ou seja, no terceiro quadrante.

d) Com relação ao ângulo $900°$, pode-se escrever:

$900° = 180° + 2 \cdot 360°$

Então, o móvel dá 2 voltas completas e para em $180°$, ou seja, sobre o eixo x no ponto $(-1, 0)$.

e) Com relação ao ângulo $\frac{31\pi}{6}$, pode-se escrever que:

$\frac{31\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} + 2 \cdot 2\pi$

Então, o móvel dá 2 voltas completas e para no terceiro quadrante.

f) Com relação ao ângulo $\frac{9\pi}{2}$, pode-se escrever que:

$\frac{9\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2 \cdot 2\pi$

Então, o móvel dá 2 voltas completas e para em $\frac{\pi}{2}$, ou seja, sobre o eixo y no ponto $(0, 1)$.

14. Primeiro, deve-se verificar quantas voltas completas o corpo descreve:

$600° = 240° + 360°$

Portanto, descreve uma volta completa e um arco de 240°.

Uma volta completa equivale a:

$C = 2\pi r \Rightarrow C \simeq 2 \cdot 3{,}14 \cdot 10 = 62{,}8$

Com relação ao arco, conclui-se que:

ângulo (em grau)		**comprimento**
360	———	$2\pi r$
240	———	x

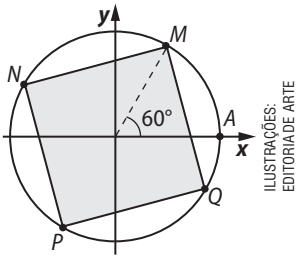
$x = \frac{240 \cancel{360} \pi r}{\cancel{360}} = \frac{4}{3}\pi r$

$x \simeq \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 10 \simeq 41{,}87$

Portanto, a distância percorrida será, aproximadamente:

41,87 cm + 62,80 cm = 104,67 cm.

15.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Inicialmente, determina-se a medida do arco $\overset{\frown}{AM}$:

$180° \text{ ——— } \pi \text{ rad}$

$60° \text{ ——— } x$

$\frac{180°}{60°} = \frac{\pi \text{ rad}}{x} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$

Desse modo, segue que:

$\text{med}(\overset{\frown}{AM}) = 60° = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$

$\text{med}(\overset{\frown}{AN}) = 60° + 90° = 150° = \frac{5\pi}{6} \text{ rad}$

$\text{med}(\overset{\frown}{AP}) = 150° + 90° = 240° = \frac{4\pi}{3} \text{ rad}$

$\text{med}(\overset{\frown}{AQ}) = 240° + 90° = 330° = \frac{11\pi}{6} \text{ rad}$

16. **I.** Sentença falsa. Se esta afirmação fosse verdadeira, o arco de 120° seria côngruo ao arco de 60°, o que não é verdade.

II. Sentença falsa. Como $1140° = 60° + 3 \cdot 360°$, segue que o primeiro arco não negativo côngruo a 1140° é o arco de 60°.

III. Sentença verdadeira.

Como $180° = \pi$ rad, segue que:

$60° = \frac{180°}{3} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$

IV. Sentença verdadeira.

Como π rad $= 180°$, segue que:

$\frac{7\pi}{4} \text{ rad} = \frac{7 \cdot 180°}{4} = 315°$

V. Sentença verdadeira. Como 45° é a primeira determinação positiva do arco, segue que os arcos congruentes a ele serão da forma:

$\alpha = 45° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$

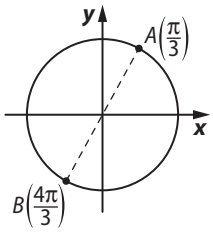
Resposta: alternativa **d**.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

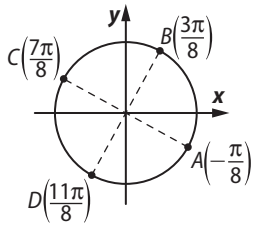
17. Calculando as medidas das extremidades dos arcos, encontram-se as seguintes representações:

a) Para $k = 0$ e $k = 1$:

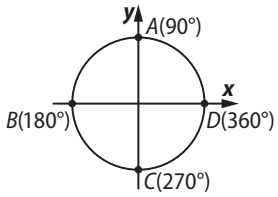
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE



b) Para $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$ e $k = 3$:



c) Para $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$ e $k = 3$:



18. Fazendo a redução ao primeiro quadrante de cada item, obtêm-se:

a) $\operatorname{sen} 150° = \operatorname{sen}(180° - 30°) = \operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}$

b) $\cos 150° = \cos(180° - 30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\operatorname{sen} 240° = \operatorname{sen}(180° + 60°) = -\operatorname{sen} 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\cos 240° = \cos(180° + 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$

e) $\operatorname{sen} 315° + \cos 315° = \operatorname{sen}(360° - 45°) + \cos(360° - 45°) = -\operatorname{sen} 45° + \cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

19. a) 135° é um arco do 2º quadrante pois $90° < 135° < 180°$. Logo:

$\operatorname{sen} 135° = \operatorname{sen}(180° - 45°) = \operatorname{sen} 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 135° = \cos(180° - 45°) = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\frac{5\pi}{6}$ é um arco do 2º quadrante, pois $\frac{\pi}{2} < \frac{5\pi}{6} < \pi$. Logo:

$\operatorname{sen} \frac{5\pi}{6} = \operatorname{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$\cos \frac{5\pi}{6} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{19\pi}{4}$ possui sua 1ª determinação positiva em $\frac{3\pi}{4}$, cujo arco pertence ao 2º quadrante, pois $\frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{4} < \pi$.

Logo: $\operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} = \operatorname{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos \frac{3\pi}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) −240° possui sua 1ª determinação positiva em 120°, cujo arco pertence ao 2º quadrante, pois $90° < 120° < 180°$.

Logo: $\operatorname{sen}(-240°) = \operatorname{sen} 120° = \operatorname{sen}(180° - 60°) = \operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos(-240°) = \cos 120° = \cos(180° - 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$

20. Para determinar as coordenadas de P, é necessário calcular o seno e o cosseno de 120°, uma vez que $P(\cos 120°, \operatorname{sen} 120°)$. Assim:

$\operatorname{sen} 120° = \operatorname{sen}(180° - 60°) = \operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 120° = \cos(180° - 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$

Portanto, as coordenadas de P são dadas por $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Resposta: alternativa **a**.

21. a) Considerando a expressão $\operatorname{sen} 360° + \operatorname{sen} 540° - 4 \operatorname{sen} 1710°$, tem-se:

$\operatorname{sen} 360° = 0$

$\operatorname{sen} 540° = \operatorname{sen} 180° = 0$

$\operatorname{sen} 1710° = \operatorname{sen} 270° = -1$

Ao substituir na expressão, obtém-se: $0 + 0 - 4 \cdot (-1) = 4$

b) Considerando a expressão $\cos 810° + 4 \cos 3780° - \frac{1}{2} \cos 1350°$, tem-se:

$\cos 810° = \cos 90° = 0$

$\cos 3780° = \cos 180° = -1$

$\cos 1350° = \cos 270° = 0$

Ao substituir na expressão, obtém-se: $0 + 4 \cdot (-1) - \frac{1}{2} \cdot (0) = -4$.

22. Para julgar cada item a seguir, pode-se converter o ângulo que está em radiano em grau e, a partir daí, verificar em qual quadrante ele está.

a) Verdadeiro.

$\left.\begin{array}{l}\pi \text{ rad} \text{ —— } 180° \\ 8 \text{ rad} \text{ —— } x\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{3{,}14}{8} = \frac{180°}{x} \Rightarrow x \simeq 458{,}6°$

$x \simeq 458{,}6° - 360° = 98{,}6°$

Como x está localizado no 2º quadrante, conclui-se que $\operatorname{sen} x > 0$.

b) Verdadeiro.

$\left.\begin{array}{l}\pi \text{ rad} \text{ —— } 180° \\ 10 \text{ rad} \text{ —— } x\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{3{,}14}{10} = \frac{180°}{x} \Rightarrow x \simeq 573{,}2°$

$x \simeq 573{,}2° - 360° = 213{,}2°$

Como x está localizado no 3º quadrante, conclui-se que $\cos x < 0$.

c) Falso.

$\left.\begin{array}{l}\pi \text{ rad} \text{ —— } 180° \\ 5 \text{ rad} \text{ —— } x\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{3{,}14}{5} = \frac{180°}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \simeq 286{,}6°$

Como x está localizado no 4º quadrante, conclui-se que $\operatorname{sen} x < 0$.

- Resposta pessoal. Uma possibilidade seria o estudante analisar o sinal do seno e o do cosseno com base na informação de que uma volta completa na circunferência corresponde a um arco de 2π rad. Desse modo, por exemplo, $\frac{3\pi}{2}$ rad < 5 rad $< 2\pi$ rad, segue que sen 5 tem extremidade sobre o 4º quadrante e, portanto, $\operatorname{sen} 5 < 0$.

23. a) Pelos arcos côngruos, sabe-se que:

$9\pi = \pi + 4 \cdot 2\pi \Rightarrow \operatorname{sen}(9\pi - \alpha) = \operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha$

$5\pi = \pi + 2 \cdot 2\pi \Rightarrow \operatorname{sen}(5\pi - \alpha) = \operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha$

Desse modo, tem-se:

$\operatorname{sen}(9\pi - \alpha) + \operatorname{sen}(5\pi - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \alpha = 2\operatorname{sen} \alpha$

b) Pelos arcos côngruos, sabe-se que:

$-900° = 180° - 3 \cdot 360° \Rightarrow \operatorname{sen}(\alpha - 900°) = \operatorname{sen}(180° + \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha$

$-540° = 180° - 2 \cdot 360° \Rightarrow \cos(\alpha - 540°) = \cos(180° + \alpha) = -\cos \alpha$

Desse modo, tem-se:

$\operatorname{sen}(\alpha - 900°) + \cos(\alpha - 540°) = -\operatorname{sen} \alpha + (-\cos \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha$

c) Pelos arcos côngruos, sabe-se que:

$4\pi = 2 \cdot 2\pi \Rightarrow \operatorname{sen}(4\pi - \alpha) = \operatorname{sen}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha$

$8\pi = 4 \cdot 2\pi \Rightarrow \cos(8\pi - \alpha) = \cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha$

$720° = 2 \cdot 360° \Rightarrow \operatorname{sen}(720° - \alpha) = (360° - \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha$

Desse modo, tem-se: $\operatorname{sen}(4\pi - \alpha) + \cos(8\pi - \alpha) - \operatorname{sen}(720° - \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha - (-\operatorname{sen} \alpha) = \cos \alpha$

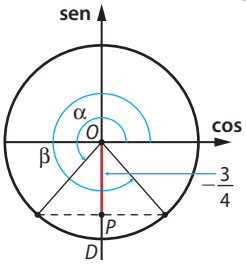
24. a) Sabe-se que o valor do cosseno de um ângulo é positivo no 1º e no 4º quadrantes e que o valor do seno de um ângulo é positivo no 1º e no 2º quadrantes. Logo, α está no 1º quadrante.

b) Sabe-se que o valor do cosseno de um ângulo é negativo no 2º e no 3º quadrantes e que o valor do seno de um ângulo é positivo no 1º e no 2º quadrantes. Logo, α está no 2º quadrante.

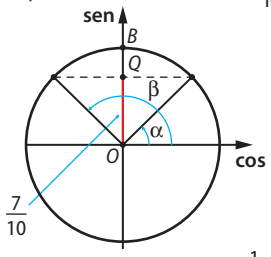
25. Para representar o seno de um ângulo na circunferência quando se conhece seu valor, primeiro localiza-se esse valor no eixo y e, em seguida, verificam-se os pontos na circunferência cuja projeção é o valor do seno. Para finalizar, encontram-se os ângulos responsáveis por esses pontos.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

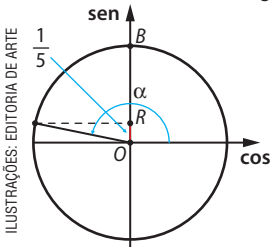
a) Dividir $\overline{OD}$ em 4 partes e considerar $OP = \frac{3}{4} \cdot OD$



b) Dividir $\overline{OB}$ em 10 partes e considerar $OQ = \frac{7}{10} \cdot OB$



c) Dividir $\overline{OB}$ em 5 partes e considerar $OR = \frac{1}{5} \cdot OB$.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

26. Como $\alpha = \frac{\pi}{2}$, segue que:

$A = \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} - 3\operatorname{sen} 2\alpha + \frac{\operatorname{sen} 3\alpha}{4}$

$A = \operatorname{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{2}\right) - 3\operatorname{sen}\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\operatorname{sen} 3 \cdot \frac{\pi}{2}}{4}$

$A = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} - 3\operatorname{sen}\pi + \frac{1}{4} \cdot \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 - \frac{1}{4}$

$A = \frac{2\sqrt{2} - 1}{4}$

27. Como $\operatorname{sen}\pi = 0$, então:

$2\operatorname{sen}\pi \cdot \operatorname{sen}(\pi - \alpha) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = 0.$

28. Considerando a expressão $\operatorname{sen} 8\pi + \operatorname{sen}\frac{11\pi}{2} - \operatorname{sen}\frac{13\pi}{6}$ e como 8π e 2π são côngruos, pode-se concluir que: $\operatorname{sen} 8\pi = \operatorname{sen} 2\pi = 0$.

$\frac{11\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + 2 \cdot 2\pi \Rightarrow \operatorname{sen}\frac{11\pi}{2} = \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} = -1$

$\frac{13\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2\pi \Rightarrow \operatorname{sen}\frac{13\pi}{6} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

Logo: $\operatorname{sen} 8\pi + \operatorname{sen}\frac{11\pi}{2} - \operatorname{sen}\frac{13\pi}{6} = 0 + (-1) - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$.

29. Calculando a razão trigonométrica de cada item, obtêm-se:

a) $\operatorname{sen} 120° = \operatorname{sen}(180° - 60°) = \operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (I)

b) $\operatorname{sen} 150° = \operatorname{sen}(180° - 30°) = \operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}$ (II)

c) $\cos 120° = \cos(180° - 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$ (IV)

d) $\cos 150° = \cos(180° - 30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (III)

e) $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$ (IV)

f) $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6} = \operatorname{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ (II)

g) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (I)

h) $\cos\frac{5\pi}{6} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (III)

Portanto, conclui-se que:

a-I; b-II; c-IV; d-III; e-IV; f-II; g-I; h-III.

30. Sabendo que $\cos x = \frac{1}{m}$ e $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{m+1}}{m}$, segue que $m \neq 0$ e $m \geqslant -1$.

Pela relação fundamental da Trigonometria, tem-se:

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{m+1}}{m}\right)^2 + \left(\frac{1}{m}\right)^2 = 1 \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0$

Resolvendo a última equação, obtém-se as soluções $m' = 2$ e $m'' = -1$.

Portanto, $m = 2$ ou $m = -1$.

31. **a)** Ao dividir 830° por 360°, obtém-se resto igual a 110° e, ao dividir 1195° por 360°, obtém-se resto igual a 115°.

Pelo ciclo trigonométrico, $\operatorname{sen} 115° < \operatorname{sen} 110°$, porque ambos pertencem ao 2º quadrante. Portanto, $\operatorname{sen} 830° > \operatorname{sen} 1195°$.

b) Ao dividir −535° por 360°, obtém-se resto igual a −175°.

Pelo ciclo trigonométrico, $\cos(-175°) = \cos 185° < \cos 190°$, porque ambos pertencem ao 3º quadrante. Portanto, $\cos 190° > \cos -535°$.

32. Analisando a primeira determinação positiva dos arcos, tem-se:

$\frac{7\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + 2\pi$

$31\pi = \pi + 15 \cdot 2\pi$

Desse modo:

$\operatorname{sen}\frac{7\pi}{2} = \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} = -1$

$\cos 31\pi = \cos\pi = -1$

Ao substituir esses valores na expressão dada, obtém-se:

$\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{2}\right) \cdot \cos(31\pi) = -1 \cdot (-1) = 1$

33. De acordo com as informações do enunciado, deve-se calcular a expressão a seguir:

$\cos\left(0 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(1 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{2}\right) =$

$= 1 + 0 + (-1) + 0 = 0$

34. Sabendo que $\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{a-2}$ e $\cos\alpha = a - 1$, segue que $a \geqslant 2$.

Pela relação fundamental da Trigonometria, tem-se:

$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow (\sqrt{a-2})^2 + (a-1)^2 = 1 \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0$

Resolvendo a última equação, obtém-se as soluções $a' = 2$ e $a'' = -1$.

Como $a \geqslant 2$, segue que $a = 2$.

35. Pela relação fundamental da Trigonometria, tem-se:

$\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow 4a^2 - 1 = 0$

Ao resolver a última equação, obtêm-se as raízes:

$a' = -\frac{1}{2}$ e $a'' = \frac{1}{2}$

Logo: $a = \pm\frac{1}{2}$.

36. **a)** $\operatorname{sen} 205° = \operatorname{sen}(180° + 25°) = -\operatorname{sen} 25° = -0{,}42$

$\cos 205° = \cos(180° + 25°) = -\cos 25° = -0{,}91$

b) $\operatorname{sen}(-25°) = \operatorname{sen}(360° - 25°) = -\operatorname{sen} 25° = -0{,}42$

$\cos(-25°) = \cos(360° - 25°) = \cos 25° = 0{,}91$

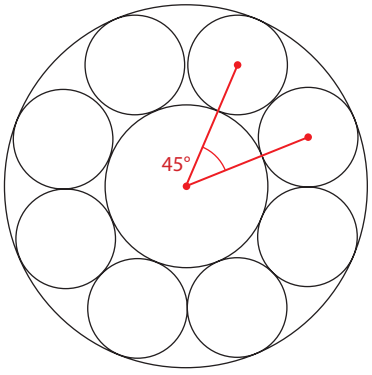
c) $\operatorname{sen} 335° = \operatorname{sen}(360° - 25°) = -\operatorname{sen} 25° = -0{,}42$

$\cos 335° = \cos(360° - 25°) = \cos 25° = 0{,}91$

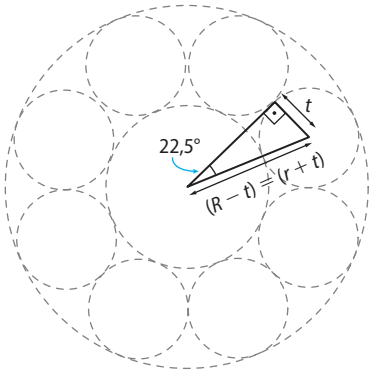
37. **a)** Pesquisa dos estudantes. Uma sugestão seria trabalhar conceitos de etnomatemática como forma de explorar uma abordagem diferenciada com os estudantes. Também pode ser interessante explorar o momento histórico e cultural vivido pelo Japão durante a criação dessas gravuras em madeira.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

b) Considerando a ilustração do enunciado, pode-se afirmar que o ângulo formado entre os centros de quaisquer dois círculos pequenos tangentes entre si e do círculo maior é 45°:



Agora, considere o triângulo isósceles cujos vértices são os centros das circunferências. A base mede $2t$, e os lados congruentes medem $r + t$, no caso da circunferência concêntrica menor, ou $R - t$ no caso da circunferência concêntrica maior. Ao, destacar, no triângulo retângulo formado pela altura do triângulo isósceles, a metade da base e um dos seus lados congruentes, podem-se obter as seguintes conclusões:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Logo, pode-se concluir que:

$\text{sen}\,(22{,}5°) = \frac{t}{R - t} \Rightarrow 0{,}38(R - t) \simeq t \Rightarrow R \simeq 3{,}63t$

$\text{sen}\,(22{,}5°) = \frac{t}{r + t} \Rightarrow 0{,}38(r + t) \simeq t \Rightarrow r \simeq 1{,}63t$

c) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes criem modelos geométricos similares ao apresentado na atividade, de modo a utilizar um conjunto de circunferências tangentes entre si e tangentes a uma circunferência maior. Espera-se também que desenvolvam atividades que exijam a determinação da medida de segmentos criados a partir dessa ilustração e que possam ser encontrados por meio de relações trigonométricas.

38. a) O arco de 150° pertence ao 2º quadrante, pois $90° < 150° < 180°$.
Logo: $\text{tg}\,150° = \text{tg}\,(180° - 30°) = -\text{tg}\,30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

b) O arco de $-945°$ possui 1ª determinação negativa em $-225°$.
Logo, sua 1ª determinação positiva é $360° - 225° = 135°$, cujo arco pertence ao 2º quadrante, pois $90° < 135° < 180°$.
Logo: $\text{tg}\,135° = \text{tg}\,(180° - 45°) = -\text{tg}\,45° = -1$.

c) O arco $\frac{5\pi}{3}$ é um arco do 4º quadrante, pois $\frac{3\pi}{2} < \frac{5\pi}{3} < 2\pi$.
Logo: $\text{tg}\,\frac{5\pi}{3} = \text{tg}\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\text{tg}\,\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$.

d) O arco 7π possui 1ª determinação positiva em π. Desse modo, $\text{tg}\,7\pi = \text{tg}\,\pi = 0$.

39. Sabendo que $\text{sen}\,\alpha = \frac{4}{5}$ e $\cos\alpha > 0$, tomando o resultado positivo para $\cos\alpha$ dado pela relação fundamental da Trigonometria, tem-se:
$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{3}{5}$
Desse modo, sabendo os valores de $\text{sen}\,\alpha$ e $\cos\alpha$, pode-se calcular a tangente desse arco: $\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$.

40. $A = \text{sen}\,3\alpha + \cos 4\alpha - \text{tg}\,2\alpha =$
$= \text{sen}\left(3 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(4 \cdot \frac{\pi}{2}\right) - \text{tg}\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = -1 + 1 - 0 = 0$
Logo, o valor da expressão é 0.

41. O arco de 510° possui 1ª determinação positiva igual a 150°.
Desse modo:
$\cos 510° = \cos 150° = \cos(180° - 30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\text{tg}\,\frac{3\pi}{4} = \text{tg}\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\text{tg}\,\frac{\pi}{4} = -1$
Assim: $\cos 510° + \text{tg}\,\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \frac{-2 - \sqrt{3}}{2}$

42. Para verificar se tg 1 é maior ou menor do que tg 7, pode-se converter 1 rad e 7 rad em grau e compará-los. Logo:
$\left.\begin{array}{l}\pi \text{ rad} \text{ —— } 180° \\ 1 \text{ rad} \text{ —— } x\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\pi}{1} = \frac{180°}{x} \Rightarrow x \simeq 57°$

$\left.\begin{array}{l}\pi \text{ rad} \text{ —— } 180° \\ 7 \text{ rad} \text{ —— } x\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\pi}{7} = \frac{180°}{x} \Rightarrow x \simeq 401°$ (cuja primeira determinação é 41°)
Como no primeiro quadrante a tangente é positiva e seus valores aumentam de acordo com o aumento do ângulo, então:
$\text{tg}\,57° > \text{tg}\,41°$
Portanto: $\text{tg}\,1 > \text{tg}\,7$

- Resposta pessoal. Uma possibilidade seria observar que uma volta completa na circunferência equivale a aproximadamente 6,28 rad. Assim, tg 7 é equivalente a aproximadamente $\text{tg}\,(7 - 6{,}28) = \text{tg}\,0{,}72$ na primeira determinação positiva. Logo, sendo a tangente positiva no primeiro quadrante e sabendo que seus valores aumentam de acordo com o aumento do ângulo nesse quadrante, segue que:
$\text{tg}\,1 > \text{tg}\,0{,}72 = \text{tg}\,7$.

43. a) Considerando $\alpha = \frac{\pi}{4}$, calcula-se o valor da expressão:
$\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,3\alpha + \text{tg}\,5\alpha = \text{tg}\,\frac{\pi}{4} + \text{tg}\,\frac{3\pi}{4} + \text{tg}\,\frac{5\pi}{4} =$
$= \text{tg}\,\frac{\pi}{4} - \text{tg}\,\frac{\pi}{4} + \text{tg}\,\frac{\pi}{4} = 1$

b) Considerando $\alpha = -60°$, calcula-se o valor da expressão:
$\text{tg}\alpha + \text{tg}2\alpha + \text{tg}4\alpha = \text{tg}(-60°) + \text{tg}(-120°) + \text{tg}(-240°) =$
$= -\text{tg}\,(60°) + \text{tg}\,(60°) - \text{tg}\,(60°) = -\sqrt{3}$

44. Para que $\frac{\pi}{3}$ seja raiz da equação, deve-se substituir α por $\frac{\pi}{3}$ e resolvê-la para determinar m:
$\left(\text{tg}\,\frac{\pi}{3}\right)^2 - m\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)^2 + \left(\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)^2 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (\sqrt{3})^2 - m\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow m = 15$

45. a) Pela relação fundamental da Trigonometria, obtém-se:
$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \left(-\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{4}{5}$
Como o arco é do segundo quadrante, conclui-se que $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$.

b) $\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = \frac{3}{4}$

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

46. Pela relação fundamental da Trigonometria, obtém-se:

$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow (\text{sen}\,\alpha)^2 + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \pm\frac{4}{5}$

Como α é um arco do terceiro quadrante, segue que:

$\text{sen}\,\alpha = -\frac{4}{5}$

Desse modo, sabendo o valor de sen α e o de cos α, pode-se calcular a tangente desse arco:

$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$

Por fim, calculando a expressão dada, obtém-se:

$3\text{sen}\,\alpha + 4\text{tg}\,\alpha = 3 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) + 4 \cdot \frac{4}{3} = \frac{44}{15}$

Resposta: alternativa **b**.

47. Ao simplificar a expressão $\frac{2 - \text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \text{tg}^2\,\alpha$, conclui-se que:

$\frac{2 - \text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{2 - \text{sen}^2\alpha - \text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{2(1 - \text{sen}^2\alpha)}{\cos^2\alpha}$

Aplicando a relação fundamental da Trigonometria, obtém-se:

$\frac{2(1 - \text{sen}^2\alpha)}{\cos^2\alpha} = \frac{2\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = 2$

48. $\text{tg}\,x = \frac{\text{sen}\,x}{\cos x} \Rightarrow \frac{\text{sen}\,x}{\cos x} = \frac{3}{4} \Rightarrow \text{sen}\,x = \frac{3\cos x}{4}$

Pela relação fundamental da Trigonometria, obtém-se:

$\left(\frac{3\cos x}{4}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos x = \pm\frac{4}{5}$

Como o arco se encontra no terceiro quadrante, conclui-se que $\cos x = -\frac{4}{5}$. Logo:

$\text{sen}\,x = \frac{3\cos x}{4} = \left(\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{3}{5}$

Por fim:

$y = \cos x - \text{sen}\,x = \left(-\frac{4}{5}\right) - \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{1}{5}$

49. Como 28° é um arco do primeiro quadrante, a tangente será positiva.

Como 230° é um arco do terceiro quadrante, a tangente será positiva.

Como 307° é um arco do quarto quadrante, a tangente será negativa.

Desse modo, pela regra de sinais, há uma multiplicação entre dois números positivos e um negativo, portanto o sinal do produto será negativo.

50. Verdadeiro.

Convertendo $\frac{5\pi}{12}$ em grau, obtém-se 75°.

Portanto, será necessário verificar se tg 75° > sen 75°.

Sabe-se que o valor máximo para o seno de qualquer ângulo é 1; porém, tg 60° já é maior do que 1, pois tg 60° = $\sqrt{3}$. Como tg 75° > tg 60° > 1, pode-se concluir que tg 75° é maior do que sen 75°, que é menor do que 1.

51. Como $\cos\theta < 0$ e $\text{tg}\,\theta < 0$, conclui-se que θ está localizado no segundo quadrante e, por isso, o valor de sen θ é positivo.

Pela relação fundamental da Trigonometria, obtém-se:

$\text{sen}^2\,\theta + \left(-\frac{3}{7}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}\,\theta = \frac{2\sqrt{10}}{7}$

Portanto, a tg θ será:

$\text{tg}\,\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{2\sqrt{10}}{7}}{-\frac{3}{7}} = \frac{-2\sqrt{10}}{3}$

Resolvendo a expressão proposta no enunciado, obtém-se:

$x = \frac{2\,\text{tg}\,\theta}{1 - \text{tg}^2\,\theta} \Rightarrow x = \frac{2\left(\frac{-2\sqrt{10}}{3}\right)}{1 - \left(\frac{-2\sqrt{10}}{3}\right)^2} \Rightarrow x = \frac{12\sqrt{10}}{31}$

52. Aplicando a lei dos cossenos, tem-se:

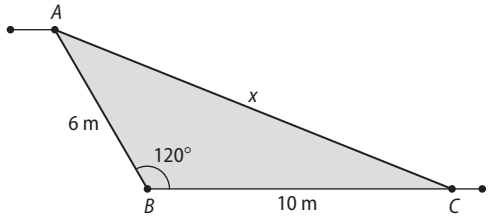
$(AB)^2 = 80^2 + 100^2 - 2 \cdot 80 \cdot 100 \cdot \cos 60° \Rightarrow$

$\Rightarrow (AB)^2 = 6\,400 + 10\,000 - 16\,000 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow AB = \pm\sqrt{8\,400} \simeq \pm 91{,}65$

Como o enunciado questiona a medida, 91,65 m é, aproximadamente, a medida de $\overline{AB}$.

53. Com base nas informações do enunciado, pode-se considerar a seguinte representação:



Aplicando a lei dos cossenos no triângulo ABC, tem-se:

$x^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \cos 120° \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 36 + 100 + 60 \Rightarrow x = 14$

Logo, 14 m deve ser o comprimento da rampa.

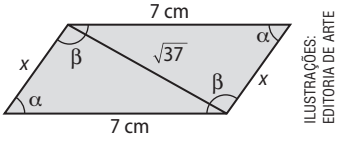
Resposta: alternativa **e**.

54. Aplicando a lei dos cossenos, tem-se:

$(AB)^2 = 32^2 + 13^2 - 2 \cdot 32 \cdot 13 \cdot \cos 120° \Rightarrow (AB)^2 = 1609 \Rightarrow AB \simeq 40{,}1$

Portanto, 40 m é, aproximadamente, a distância entre os pontos A e B.

55. Utilizando o esquema a seguir, aplica-se a lei dos cossenos para determinar o ângulo α:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

$37 = x^2 + 49 - 2 \cdot x \cdot 7 \cdot \cos\alpha$

$x^2 - 14x \cdot \cos\alpha = -12$

Como a medida x do lado do paralelogramo não é conhecida, é impossível determinar uma medida para o ângulo α. Isso também ocorrerá ao tentar determinar a medida do ângulo β.

56. Com base nas informações contidas no enunciado, sabe-se $AC = 2$ cm e que B é o ponto médio de $\overline{AC}$, logo $AB = 1$ cm. Além disso, o $\triangle AEB$ é equilátero, então $AE = EB = AB = 1$ cm e o ângulo $A\hat{B}E = 60°$. Do $\triangle BCD$ é possível determinar que $C\hat{B}D = 60°$ e que $EB = BC = 1$ cm.

Portanto, pode-se calcular a medida BD por meio da seguinte relação:

$\text{sen}\,30° = \frac{BC}{BD} \Rightarrow BD = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

Sendo assim, aplicando a lei dos cossenos, determina-se que a medida de $\overline{DE}$, em centímetro, é:

$(DE)^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cos 60° \Rightarrow (DE)^2 = 3 \Rightarrow DE = \sqrt{3}$

Resposta: alternativa **e**.

57. Sabendo que uma volta completa no relógio equivale a 360°, determina-se que cada hora equivale a um arco de $\frac{360°}{12} = 30°$.

Logo, o ângulo entre os ponteiros é 60°, já que o relógio marca duas horas.

Sendo assim, aplica-se a lei dos cossenos para determinar a distância x entre as extremidades do relógio:

$x^2 = 80^2 + 50^2 - 2 \cdot 80 \cdot 50 \cdot \cos 60° \Rightarrow x^2 = 4\,900 \Rightarrow x = 70$

A distância entre as extremidades dos ponteiros é 70 cm.

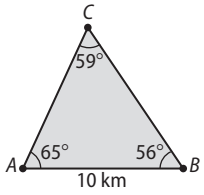
MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

58. Aplicando a lei dos cossenos para um triângulo, pode-se calcular a medida BC, em centímetro:

$(BC)^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos 60° \Rightarrow (BC)^2 = 31 \Rightarrow BC \simeq 5{,}57$

Logo, para cada triângulo é necessário 5 cm + 6 cm + 5,57 cm = = 16,57 cm de fio. Como são 4 triângulos no total, Joana vai precisar de, aproximadamente, $(4 \cdot 16{,}57)$ cm = 66,28 cm de fio.

59. Com base nas informações do enunciado, pode-se considerar a seguinte imagem:



Na calculadora, pode-se obter as aproximações:

sen 56° = 0,82904 sen 65° = 0,90631 sen 59° = 0,85717

Aplicando a lei dos senos no triângulo ABC, tem-se:

$$\frac{10}{\text{sen } 59°} = \frac{AC}{\text{sen } 56°} \Rightarrow AC \simeq 9{,}67$$

$$\frac{10}{\text{sen } 59°} = \frac{BC}{\text{sen } 65°} \Rightarrow BC \simeq 10{,}57$$

Portanto, a distância aproximada da torre A até o foco do incêndio é 9,67 km e a distância aproximada da torre B até o foco do incêndio é 10,57 km.

60. Aplicando a lei dos senos, tem-se que:

$$\frac{AC}{\text{sen } 60°} = \frac{BC}{\text{sen } \alpha} \Rightarrow \frac{4}{\text{sen } 60°} = \frac{3}{\text{sen } \alpha} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

61. **a)** Considerando o ângulo $A\hat{D}B = \alpha$, conclui-se que:

$61° + 93° + \alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 26°$

Aplicando a lei dos senos no triângulo ABD, obtém-se:

$$\frac{AB}{\text{sen } 26°} = \frac{AD}{\text{sen } 61°} \Rightarrow \frac{25}{0{,}44} \simeq \frac{AD}{0{,}87} \Rightarrow AD \simeq 49{,}43$$

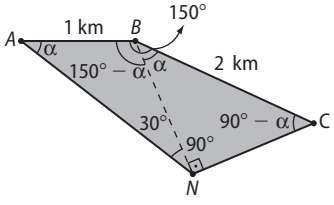
A distância é de, aproximadamente, 49,43 m.

b) Considerando o triângulo ACD, obtém-se:

$$\text{sen } 56° = \frac{h}{AD} \Rightarrow 0{,}83 \cdot 49{,}43 \simeq h \Rightarrow h \simeq 41$$

O balão está a, aproximadamente, 41 m do solo.

62. Seja α a medida do ângulo $N\hat{B}C$:



a) Pela lei dos senos, no triângulo ABN, tem-se:

$$\frac{AB}{\text{sen } 30°} = 2R \Rightarrow 2R = 2 \cdot AB \Rightarrow R = 1$$

O raio da circunferência mede 1 km.

b) Ainda no triângulo ABN, pela lei dos senos, tem-se:

$$\frac{NB}{\text{sen } \alpha} = 2 \cdot R \Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{NB}{2} \quad \text{(I)}$$

No triângulo retângulo BCN, por definição, tem-se:

$$\cos \alpha = \frac{BN}{2} \quad \text{(II)}$$

De (I) e (II), pode-se concluir que sen α = cos α. Como $0 < \alpha < 90°$, segue que $\alpha = 45°$. Desse modo:

$$NB = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

Portanto, a medida de $\overline{NB}$ é $\sqrt{2}$ km.

63. Com base no triângulo ABC, considera-se que $A\hat{C}B = \gamma$, logo:

$\alpha + \beta + \gamma = 180° \Rightarrow 75° + 60° + \gamma = 180° \Rightarrow \gamma = 45°$

Aplicando a lei dos senos no triângulo ABC, pode-se concluir que a medida de $\overline{AC}$, em metro, é:

$$\frac{AB}{\text{sen } 45°} = \frac{AC}{\text{sen } 60°} \Rightarrow AC = 30 \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 15\sqrt{6}$$

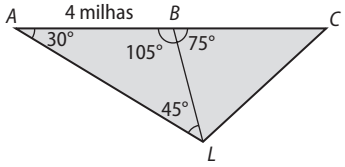
Considerando o $\triangle ACD$, pode-se concluir que a medida de $\overline{CD}$, em metro, é:

$$\text{tg } 30° = \frac{CD}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{CD}{15\sqrt{6}} \Rightarrow CD = 15\sqrt{2}$$

Ao dividir CD por $\sqrt{2}$, obtém-se, em metro:

$$\frac{CD}{\sqrt{2}} = \frac{15\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 15$$

64. Considerando as informações do enunciado, pode-se obter o esquema a seguir.

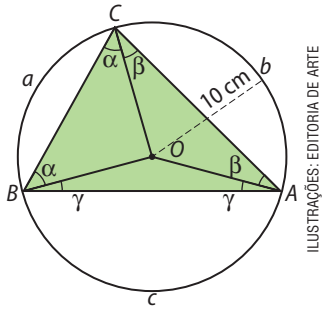


Aplicando a lei dos senos, obtém-se:

$$\frac{AB}{\text{sen } 45°} = \frac{BL}{\text{sen } 30°} \Rightarrow \frac{4}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{BL}{\frac{1}{2}} \Rightarrow BL = 2\sqrt{2}$$

A distância entre o farol e o ponto B é $2\sqrt{2}$ milhas.

65. **a)** Utilizando a informações contidas no enunciado, obtém-se:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Como os arcos são proporcionais a 3, 4 e 5, então:

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} = \frac{a+b+c}{12} = \frac{360°}{12} = 30°$$

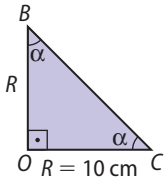
Logo:

$\text{med}(B\hat{O}C) \Rightarrow a = 3 \cdot 30° = 90° \Rightarrow \text{med}(B\hat{A}C) = 45°$

$\text{med}(C\hat{O}A) \Rightarrow b = 4 \cdot 30° = 120° \Rightarrow \text{med}(C\hat{B}A) = 60°$

$\text{med}(B\hat{O}A) \Rightarrow c = 5 \cdot 30° = 150° \Rightarrow \text{med}(B\hat{C}A) = 75°$

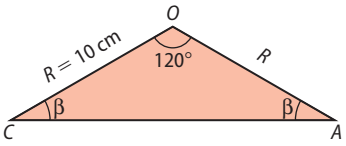
b) Considerando o $\triangle COB$, a medida de $\overline{BC}$, em centímetro, é:



$(BC)^2 = R^2 + R^2 = 10^2 + 10^2 \Rightarrow BC = 10\sqrt{2}$

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

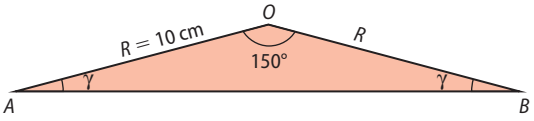
Considerando o $\triangle COA$, a medida de $\overline{CA}$, em centimetro, é:



$(CA)^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \cos 120° \Rightarrow$

$\Rightarrow CA^2 = 2R^2 - 2R^2\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow CA = 10\sqrt{3}$

Considerando o $\triangle BOA$, a medida de $\overline{AB}$, em centimetro, é:



$(AB)^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \cos 150°$

$(AB)^2 = 2R^2 - 2R^2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

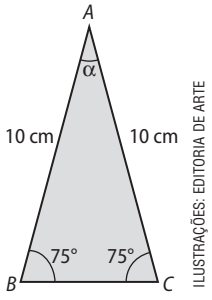
$AB = 10\sqrt{2 + \sqrt{3}}$

66. Utilizando o teorema da área de um triângulo qualquer, tem-se que a área, em metro quadrado, é:

$S = \frac{60 \cdot 30 \cdot \text{sen } 150°}{2} = \frac{60 \cdot 30 \cdot \text{sen } 30°}{2} = 450$

Resposta: alternativa **e**.

67. Considerando a representação a seguir e o teorema da área de um triângulo qualquer, pode-se resolver a atividade.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Nesse triângulo, o ângulo α é dado por:

$\alpha + 150° = 180° \Rightarrow \alpha = 30°$

Logo, a área S do triângulo, em centimetro quadrado, é dada por:

$S = \frac{10 \cdot 10 \cdot \text{sen } 30°}{2} = \frac{100 \cdot 0{,}5}{2} = 25$

68. Seja F a projeção do ponto D sobre o segmento $\overline{AC}$. Da figura apresentada no enunciado, sabe-se que a área total é dada por:

$S_{ABCDE} = S_{ABC} + S_{AEDF} + S_{FDC}$

Considerando o $\triangle ABC$, determina-se a medida AC e, depois, FC:

$(AC)^2 = 40^2 + 38^2 - 2 \cdot 40 \cdot 38 \cdot \cos 60° \Rightarrow$

$\Rightarrow (AC)^2 = 1600 + 1444 - 2 \cdot 1520 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow AC \simeq 39$

$FC \simeq 39 - 25 = 14$

Assim, a área aproximada de $ABCDE$, em metro quadrado, é:

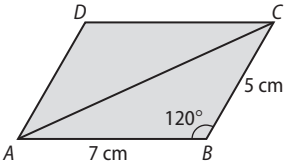
$S_{ABCDE} \simeq \frac{40 \cdot 38 \cdot \text{sen } 60°}{2} + 30 \cdot 25 + \frac{14 \cdot 30}{2}$

$S_{ABCDE} \simeq 760 \cdot 0{,}86 + 750 + 210 = 1613{,}60$

Preço: $35{,}00 \cdot 1613{,}60 = 56\,476$

Portanto, o valor do terreno é, aproximadamente, R$ 56.476,00.

69. A figura a seguir foi construída com base nos dados do enunciado.



Nota-se que a área do paralelogramo corresponde ao dobro da área do triângulo ABC, cuja área, em centimetro quadrado, é dada por:

$S_{\triangle ABC} = \frac{7 \cdot 5 \cdot \text{sen } 120°}{2} = \frac{35\sqrt{3}}{4}$

Desse modo, a área do paralelogramo, em centimetro quadrado, é igual a:

$S_{ABCD} = 2 \cdot \frac{35\sqrt{3}}{4}\ \text{cm}^2 = \frac{35\sqrt{3}}{2}$

70. Sabendo que $\text{med}(A\hat{C}B) = 120°$, tem-se que $\text{med}(B\hat{A}C) = 30°$, logo o $\triangle ABC$ é isósceles e $BC = AC$. Portanto, com base no teorema da área de um triângulo qualquer, obtém-se a medida AC que, em centimetro, é:

$S_{ABC} = \frac{BC \cdot AC \cdot \text{sen } 120°}{2} \Rightarrow 25\sqrt{3} = \frac{AC \cdot AC \cdot \text{sen } 120°}{2} \Rightarrow AC = 10$

Aplicando a lei dos cossenos, determina-se, em cm, a medida AB:

$(AB)^2 = 10^2 + 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \cos 120° \Rightarrow (AB) = 10\sqrt{3} \simeq 17$

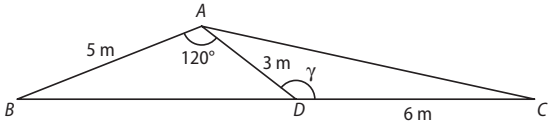
Portanto, o perímetro do triângulo é aproximadamente:

$10\text{ cm} + 10\text{ cm} + 17\text{ cm} = 37\text{ cm}$

71. A área total do hexágono é igual a seis vezes a área de um triângulo equilátero de lado x. Logo, utilizando o teorema da área de um triângulo qualquer, tem-se que a área do hexágono, em centimetro quadrado, é:

$S_{hex} = 6 \cdot \frac{x \cdot x \cdot \text{sen } 60°}{2} = \frac{3x^2\sqrt{3}}{2}$

72. Resposta pessoal. Exemplo de problema: Um terreno ABC será dividido em dois terrenos triangulares menores ABD e ADC, conforme a figura a seguir.



Qual é o perímetro do terreno ABD e qual é a área aproximada do terreno ADC? (Utilize $\text{sen } \gamma \simeq 0{,}62$.)

Para calcular o perímetro de ABD, pode-se determinar a medida de $\overline{BD}$.

Pela lei dos cossenos, tem-se a medida de $\overline{BD}$, em metro:

$(BD)^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 120° = 49 \Rightarrow BD = 7$

Assim, o perímetro de ABD é igual a:

$5\text{ m} + 3\text{ m} + 7\text{ m} = 15\text{ m}$

Já a área do triângulo ADC, em metro quadrado, é aproximadamente:

$S_{ADC} = \frac{3 \cdot 6 \cdot \text{sen } \gamma}{2} \simeq \frac{3 \cdot 6 \cdot 0{,}62}{2} = 5{,}58$

Atividades complementares

1. Como a roleta foi dividida em 12 partes iguais, segue que cada arco corresponde a um ângulo central de $360° : 12 = 30°$. Já um giro de 780° corresponde a:

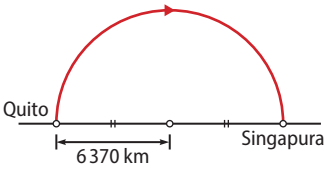
$780° = 60° + 2 \cdot 360°$

Desse modo, pode-se concluir que a roleta deu duas voltas completas e mais 60° no sentido horário. Então, o número sorteado está a dois arcos no sentido anti-horário do 1, ou seja, o número sorteado é o 11.

Resposta: alternativa **c**.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

2.



A distância (d) percorrida pelo avião será: $d = \frac{2\pi \cdot 6370}{2} = 6370\pi$.
$d \simeq 3{,}14 \cdot 6370 \simeq 20000$
Portanto, 20 000 km é, aproximadamente, a distância percorrida.

tempo (em h)		**distância (em km)**
1	———	800
x	———	20 000

$x = \frac{20000}{800} \Rightarrow x = 25$
Desse modo, chega-se em Singapura em 25 horas.
Resposta: alternativa **c**.

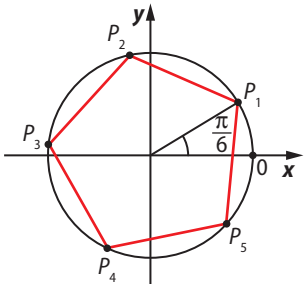
3. Convertendo 3 rad em grau, tem-se:
$180° \text{ ——— } \pi \text{ rad}$
$x \text{ ——— } 3 \text{ rad}$
$\frac{180°}{x} = \frac{\pi \text{ rad}}{3 \text{ rad}} \Rightarrow x \simeq 172°$
Desse modo, sen 3 rad $\simeq$ sen 172°, cuja extremidade encontra-se sobre o segundo quadrante. Nesse quadrante, os valores de seno variam entre 0 e 1 e, à medida que o ângulo aumenta, o valor do seno diminui. Logo:
$\text{sen } 180° < \text{sen } 172° < \text{sen } 150° \Rightarrow 0 < \text{sen } 172° < \frac{1}{2}$
Portanto, sendo $y = \text{sen } 3$, segue que: $0 < y < \frac{1}{2}$.
Resposta: alternativa **c**.

4. Na circunferência trigonométrica, observa-se que todos os possíveis valores de cosseno estão entre -1 e 1. Portanto:
$-1 \leqslant \cos\theta \leqslant 1 \Rightarrow -1 \leqslant \frac{2p-1}{5} \leqslant 1 \Rightarrow -2 \leqslant p \leqslant 3$
Resposta: alternativa **c**.

5. Na circunferência trigonométrica, observa-se que todos os possíveis valores de seno estão entre -1 e 1. Portanto:
$-1 \leqslant \text{sen } x \leqslant 1 \Rightarrow -1 \leqslant m - 4 \leqslant 1 \Rightarrow 3 \leqslant m \leqslant 5$
Resposta: alternativa **b**.

6. Na circunferência trigonométrica, tem-se que:
$-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$
Assim: $-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1 \Rightarrow -1 \leqslant \frac{2x^2-3}{5} \leqslant 1 \Rightarrow -1 \leqslant x^2 \leqslant 4$.
Logo, $-1 \leqslant x^2$ ou $x^2 \leqslant 4$. Para que o arco x exista, este deve ser um número real e, portanto, desconsidera-se $-1 \leqslant x^2$. Então, para $x^2 \leqslant 4$, tem-se: $x' \leqslant 2$ ou $x'' \geqslant -2$.
Então: $-2 \leqslant x \leqslant 2$.
Resposta: alternativa **b**.

7. O ângulo central de um pentágono regular mede:
$\alpha = \frac{360°}{5} = 72°$ ou $\frac{2\pi}{5}$ rad
Partindo do ponto P_1, pode-se afirmar que:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

$P_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{5} = \frac{17\pi}{30}$
$P_3 = \frac{17\pi}{30} + \frac{2\pi}{5} = \frac{29\pi}{30}$
$P_4 = \frac{29\pi}{30} + \frac{2\pi}{5} = \frac{41\pi}{30}$
Resposta: alternativa **d**.

8. Elevando ambos os membros da primeira relação ao quadrado, obtêm-se:
$(\text{sen}\,\alpha + \cos\alpha)^2 = (\sqrt{m})^2 \Rightarrow \text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha + 2\text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha = m$
Porém, pela relação fundamental da Trigonometria, obtém-se:
$1 + 2\text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha = m$
Como $\text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{n}{4}$, então: $1 + 2 \cdot \frac{n}{4} = m \Rightarrow 2m - n = 2$.
Resposta: alternativa **a**.

9. Sabendo que $0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$, pela redução do seno ao primeiro quadrante, tem-se:
$\text{sen}\,(2\pi - \alpha) = -\text{sen}\,\alpha$
Já pela relação fundamental da Trigonometria:
$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow (\text{sen}\,\alpha)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \pm\frac{3}{5}$
Como α é um arco do primeiro quadrante, $\text{sen}\,\alpha = \frac{3}{5}$ e, portanto, $-\text{sen}\,\alpha = -\frac{3}{5}$.
Resposta: alternativa **c**.

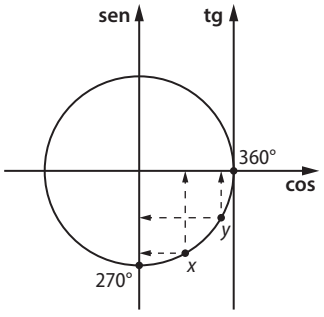
10. Como $\text{sen}\,\alpha = \frac{3}{5}$ e α está no segundo quadrante, conclui-se que o cosseno e a tangente de α são negativos.
Pela relação fundamental da Trigonometria, obtém-se:
$\cos^2\alpha = 1 - \text{sen}^2\,\alpha \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{4}{5}$
Como a $\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$, então:
$\text{tg}\,\alpha = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$
Resposta: alternativa **c**.

11. Sendo x um arco do segundo quadrante, segue que $\cos x < 0$.
Assim, pela relação fundamental da Trigonometria:
$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2 + (\cos x)^2 = 1 \Rightarrow \cos x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$
Desse modo, tem-se:
$A = \sqrt{2}\,\text{tg}\,x = \sqrt{2} \cdot \frac{\text{sen}\,x}{\cos x} = \sqrt{2} \cdot \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{1}{2}$
Ao analisar os arcos da primeira determinação positiva em que $\text{sen}\,\alpha = -\frac{1}{2}$, tem-se $\alpha = \frac{7\pi}{6}$ ou $\alpha = \frac{11\pi}{6}$. Já os arcos em que $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$, ocorrem quando $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ ou $\alpha = \frac{4\pi}{3}$. Logo, $A = \cos\frac{2\pi}{3}$.
Resposta: alternativa **b**.

12. Sabe-se que:
$\cos 200° = -\cos 20°$
$\text{sen}\,200° = -\text{sen}\,20°$
$\text{tg}\,200° = \frac{\text{sen}\,20°}{\cos 20°}$
Como $\cos 0° = \text{sen}\,90° = 1$, $\cos 90° = \text{sen}\,0° = 0$ e $\cos 45° = \text{sen}\,45°$, sabe-se que, para arcos do primeiro quadrante, enquanto o ângulo for maior do que 45°, o seno desse ângulo é maior do que o cosseno; enquanto for menor, o cosseno é maior do que o seno.
Portanto: $\cos 20° > \text{sen}\,20°$ e $-\cos 20° < -\text{sen}\,20°$. Logo, pode-se afirmar que $\cos 200° < \text{sen}\,200°$.
Agora, como sen 200° e cos 200° são negativos, a tg 200° é positiva, sendo maior do que o cosseno e do que o seno. Portanto: $\cos 200° < \text{sen}\,200° < \text{tg}\,200°$.
Resposta: alternativa **b**.

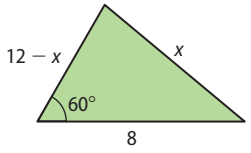
MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

13. Sendo $270° < x < y < 360°$, pode-se observar que x e y pertencem ao 4º quadrante e que $x < y$. Então:



Como no quarto quadrante o valor do cosseno é positivo, se $x < y$, conclui-se que $\cos y > \cos x$ e, por ser o seno negativo, $\operatorname{sen} y > \operatorname{sen} x$.
Como $\operatorname{sen} x < 0$ e $\cos y > 0$, então $\operatorname{sen} x \cdot \cos y < 0$.
Como x e y pertencem ao quarto quadrante, o sinal da tangente nesses quadrantes é negativo, logo $\operatorname{tg} x < \operatorname{tg} y$.
Sabe-se que $\cos y > \operatorname{sen} x$; dessa forma, $\cos y - \operatorname{sen} x > 0$.
Resposta: alternativa **d**.

14. Considerando as informações contidas no enunciado, pode-se afirmar que um lado mede 8 m e o perímetro do terreno é 20 m. Então os outros dois lados podem ser definidos como x e $12 - x$.



Aplicando a lei dos cossenos:
$x^2 = (12 - x)^2 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot (12 - x) \cdot \cos 60°$
$x^2 = 144 - 24x + x^2 + 64 - 96 + 8x \Rightarrow x = 7$
Portanto, os lados medem 7 m e 5 m.
Resposta: alternativa **b**.

15. Do triângulo do enunciado, tem-se que $\text{med}(\hat{ACB}) = 45°$. Logo, ao aplicar a lei dos senos, obtém-se a medida de $\overline{AB}$, em centímetro:

$$\frac{AB}{\operatorname{sen} 45°} = \frac{12}{\operatorname{sen} 30°} \Rightarrow AB = 12\sqrt{2} \simeq 16{,}97$$

Conforme a atividade menciona, convertendo para a escala real, tem-se:

$$AB = 16{,}97 \text{ cm} \cdot \frac{10\,000 \text{ km}}{1 \text{ cm}} \simeq 1{,}7 \text{ km}$$

Resposta: alternativa **e**.

16. Aplicando a lei dos cossenos, tem-se a medida de BC, em centímetro: $(BC)^2 = 10^2 + 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \cos 120° \Rightarrow BC = 10\sqrt{3} \simeq 17$.
Como o raio mede aproximadamente 17 cm, então o material será do tipo IV.
Resposta: alternativa **d**.

17. Sejam b e ℓ as medidas dos lados opostos do triângulo, respectivamente, aos ângulos β e de 30°, pela lei dos senos proposta na atividade, tem-se:

$$b = 2R \cdot \operatorname{sen} \beta = 2 \cdot 4 \text{ cm} \cdot \frac{15}{16} = 7{,}5 \text{ cm}$$

$$\ell = 2R \cdot \operatorname{sen} 30° = 2 \cdot 4 \text{ cm} \cdot \frac{1}{2} = 4 \text{ cm}$$

Logo, o perímetro do triângulo é igual a:
4 cm + 7,5 cm + 7,9 cm = 19,4 cm
Resposta: alternativa **b**.

18. Aplicando o teorema de Pitágoras aos $\triangle ABC$ e $\triangle ABD$, determinam-se as medidas de $\overline{AC}$ e $\overline{AD}$, respectivamente:
$(AC)^2 = 2^2 + 1^2 \Rightarrow AC = \sqrt{5}$
$(AD)^2 = 2^2 + 6^2 \Rightarrow AC = 2\sqrt{10}$
Sendo assim, por meio da lei dos cossenos, determina-se o ângulo θ:

$$5^2 = \sqrt{5}^2 + (2\sqrt{10})^2 - 2 \cdot \sqrt{5} \cdot 2\sqrt{10} \cdot \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Logo, $\theta = 45°$.
Resposta: alternativa **c**.

19. Considerando as informações contidas no enunciado, tem-se que $\text{med}(\hat{CDB}) = 120°$, logo $\text{med}(\hat{CBD}) = 30°$. Sendo assim, o $\triangle BCD$ é isósceles e $CD = BD$. Portanto, tem-se:

$$\cos 60° = \frac{3}{BD} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{3}{BD} \Rightarrow BD = 6$$

$$S_{ABD} = q = \frac{3 \cdot 6 \cdot \operatorname{sen} 60°}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{BCD} = p = \frac{6 \cdot 6 \cdot \operatorname{sen} 120°}{2} = \frac{18\sqrt{3}}{2}$$

Logo, pela relação obtida, tem-se $p = 2q$.
Resposta: alternativa **b**.

20. Segundo as informações do enunciado, é possível determinar que $DC = 3$ e que $CE = 5$. Além disso, $\text{med}(\hat{DCE}) = 90° + 60° = 150°$.
Desse modo, pela lei dos cossenos, tem-se:

$$(DE)^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 150° = 34 - 30 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow DE = \sqrt{34 + 15\sqrt{3}}$$

Resposta: alternativa **e**.

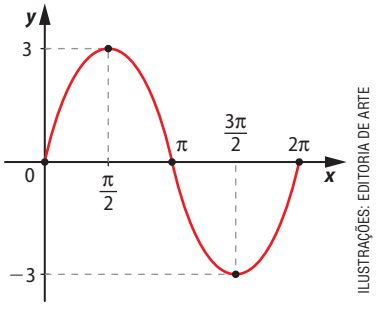
Capítulo 6 • Funções trigonométricas

Atividades

1. Como a função seno é periódica, em cada item dessa atividade, considera-se a função y dada e determinam-se alguns pontos (x, y) para o esboço do gráfico dessa função. Esses pontos são indicados nos quadros. Para o esboço indicado em cada item, considerou-se apenas um período, mas os gráficos podem ser representados em todo o eixo x.

a) Seja $y = 3 \cdot \operatorname{sen} x$, então:

x	$\operatorname{sen} x$	$3 \cdot \operatorname{sen} x$	y
0	0	$3 \cdot 0$	0
$\frac{\pi}{2}$	1	$3 \cdot 1$	3
π	0	$3 \cdot 0$	0
$\frac{3\pi}{2}$	−1	$3 \cdot (-1)$	−3
2π	0	$3 \cdot 0$	0



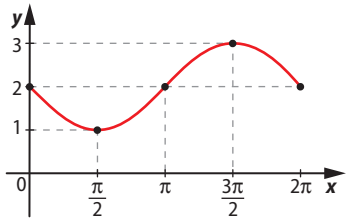
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

D = ℝ; Im = [−3, 3]; $p = 2\pi$

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

b) $y = 2 - \operatorname{sen} x$

x	$\operatorname{sen} x$	$2 - \operatorname{sen} x$	y
0	0	$2 - 0$	2
$\frac{\pi}{2}$	1	$2 - 1$	1
π	0	$2 - 0$	2
$\frac{3\pi}{2}$	-1	$2 - (-1)$	3
2π	0	$2 - 0$	2

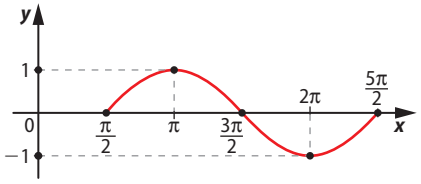


$D = \mathbb{R}$; $\text{Im} = [1, 3]$; $p = 2\pi$

c) Como $y = \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, pode-se fazer a substituição:

$t = x - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = t + \frac{\pi}{2}$

t	x	$\operatorname{sen} t$	y
0	$\frac{\pi}{2}$	$\operatorname{sen} 0$	0
$\frac{\pi}{2}$	π	$\operatorname{sen} \frac{\pi}{2}$	1
π	$\frac{3\pi}{2}$	$\operatorname{sen} \pi$	0
$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\operatorname{sen} \frac{3\pi}{2}$	-1
2π	$\frac{5\pi}{2}$	$\operatorname{sen} 2\pi$	0

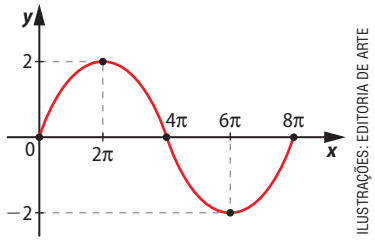


$D = \mathbb{R}$; $\text{Im} = [-1, 1]$; $p = 2\pi$

d) Como $y = 2 \operatorname{sen} \frac{x}{4}$, pode-se fazer a substituição:

$t = \frac{x}{4} \Rightarrow x = 4 \cdot t$

t	x	$\operatorname{sen} t$	$2 \cdot \operatorname{sen} t$	y
0	0	0	$2 \cdot 0$	0
$\frac{\pi}{2}$	2π	1	$2 \cdot 1$	2
π	4π	0	$2 \cdot 0$	0
$\frac{3\pi}{2}$	6π	-1	$2 \cdot (-1)$	-2
2π	8π	0	$2 \cdot 0$	0



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

$D = \mathbb{R}$; $\text{Im} = [-2, 2]$; $p = 8\pi$

2. Seja $p = \frac{2\pi}{|c|}$ o período da função $y = \operatorname{sen}(cx + d)$.

a) Para $y = \operatorname{sen} 8x$: $p = \frac{2\pi}{|8|} = \frac{\pi}{4}$.

b) Para $y = 5 \cdot \operatorname{sen} 10x$: $p = \frac{2\pi}{|10|} = \frac{\pi}{5}$.

3. Sabendo que a função seno tem valor mínimo -1 e máximo 1, tem-se:
$7 \cdot (-1) \leqslant 7 \cdot \operatorname{sen}(3x) \leqslant 7 \cdot 1 \Rightarrow -7 \leqslant 7 \cdot \operatorname{sen}(3x) \leqslant 7$
Portanto, $\text{Im} = [-7, 7]$.

4. Como $f(x) = \operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$, o período de f é dado por $p = \frac{2\pi}{|c|}$, sendo $c = 2$. Assim: $p = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$.

Resposta: alternativa **b**.

5. **a)** Considerando $4 \cdot \operatorname{sen} \alpha$ e sabendo que $-1 \leqslant \operatorname{sen} \alpha \leqslant 1$:
$4 \cdot (-1) \leqslant 4 \cdot \operatorname{sen} \alpha \leqslant 4 \cdot 1 \Rightarrow -4 \leqslant 4 \operatorname{sen} \alpha \leqslant 4$
Logo, o valor máximo é 4 e o valor mínimo é -4.

b) Considerando $5 - 2 \cdot \operatorname{sen} x$, tem-se:
$-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow 5 + (-2) \cdot (-1) \geqslant 5 - 2 \cdot \operatorname{sen} x \geqslant 5 + (-2) \cdot 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow 7 \geqslant 5 - 2 \operatorname{sen} x \geqslant 3$
Logo, o valor máximo é 7 e o valor mínimo é 3.

c) A expressão $\frac{1}{3 + \operatorname{sen} y}$ terá valor máximo quando o denominador for mínimo.
Como o valor mínimo para $\operatorname{sen} y$ é -1, para $\operatorname{sen} y = -1$ o valor de $\frac{1}{3 + \operatorname{sen} y}$ é máximo, ou seja, $\frac{1}{3 - 1} = \frac{1}{2}$.
Analogamente, a expressão terá valor mínimo quando o denominador for máximo. Isso ocorre quando $\operatorname{sen} y = 1$.
Logo, $\frac{1}{3 + \operatorname{sen} y}$ é mínimo para: $\frac{1}{3 + 1} = \frac{1}{4}$
Assim, o valor máximo de $\frac{1}{3 + \operatorname{sen} y}$ é $\frac{1}{2}$ e o valor mínimo é $\frac{1}{4}$.

6. Considerando que $\operatorname{sen} x = 2m - 1$ e como $-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1$, então:
$-1 \leqslant 2m - 1 \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant m \leqslant 1$
$S = \{m \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant m \leqslant 1\}$

7. Para verificar qual é a afirmativa correta, deve-se analisar o mínimo, o máximo, o período e os zeros de cada função.

- Para $f(x) = 2 \cdot \operatorname{sen}(x)$, tem-se:
  $-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1 \Rightarrow -2 \leqslant 2 \cdot \operatorname{sen}(x) \leqslant 2$
  $p = \frac{2\pi}{|1|} = 2\pi$
  Os zeros da função $2 \cdot \operatorname{sen}(x)$ ocorrem quando $\operatorname{sen}(x) = 0$, ou seja, quando $x = k \cdot \pi$, para $k \in \mathbb{Z}$.
- Para $g(x) = \operatorname{sen}(2x)$, tem-se:
  $-1 \leqslant \operatorname{sen}(2x) \leqslant 1$
  $p = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$
  Os zeros da função $\operatorname{sen}(2x)$ ocorrem quando $\operatorname{sen}(2x) = 0$, ou seja, quando $x = k \cdot \frac{\pi}{2}$, para $k \in \mathbb{Z}$.

Dessa forma, observa-se que o período da função f é o dobro do período da g.
Resposta: alternativa **a**.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

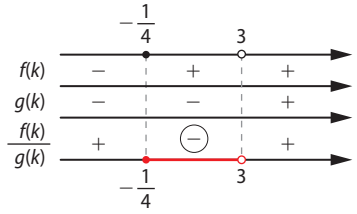
8. Assumindo que $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$ é possível afirmar que:

$-1 \leq \frac{5k-2}{k-3} \leq 1$

Em relação a $\frac{5k-2}{k-3} \leq 1$, tem-se que:

$\frac{5k-2}{k-3} \leq 1 \Rightarrow \frac{5k-2}{k-3} - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{4k+1}{k-3} \leq 0$

Considerando $f(k) = 4k + 1$ e $g(k) = k - 3$, pode-se realizar o estudo do sinal de $\frac{f(k)}{g(k)} = \frac{4k+1}{k-3}$.

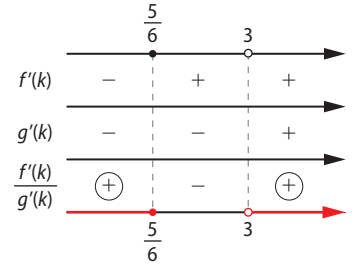


Portanto, segue que: $\left\{k \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{4} \leq k < 3\right\}$ (I)

Em relação a $\frac{5k-2}{k-3} \geq -1$, tem-se que: $\frac{5k-2}{k-3} \geq -1 \Rightarrow$

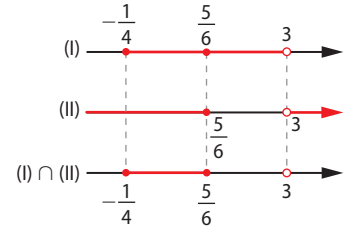
$\Rightarrow \frac{5k-2}{k-3} + 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{6k-5}{k-3} \geq 0.$

Considerando $f'(k) = 6k - 5$ e $g'(k) = k - 3$, pode-se realizar o estudo do sinal de $\frac{f'(k)}{g'(k)} = \frac{6k-5}{k-3}$.



Portanto, segue que: $\left\{k \in \mathbb{R} \mid k \leq \frac{5}{6} \text{ ou } k > 3\right\}$ (II)

Fazendo (I) ∩ (II), temos:



Logo, $S = \left\{k \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{4} \leq k \leq \frac{5}{6}\right\}$.

9. O valor de seno de um ângulo qualquer deve estar compreendido entre -1 e 1. Logo:

$-1 \leq \operatorname{sen} \theta \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \frac{2x-1}{3} \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 2$

Resposta: alternativa **d**.

10. Considere $f(x) = 900 - 800 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{x \cdot \pi}{12}\right)$.

Como $-1 \leq \operatorname{sen}\left(\frac{x \cdot \pi}{12}\right) \leq 1$, conclui-se que:

Para $\operatorname{sen}\left(\frac{x \cdot \pi}{12}\right) = 1$: $f(x) = 900 - 800 \cdot 1 = 100$.

Para $\operatorname{sen}\left(\frac{x \cdot \pi}{12}\right) = -1$: $f(x) = 900 - 800 \cdot (-1) = 1700$.

Logo, o número máximo de clientes é 1700 e o mínimo é 100, sendo sua diferença igual a 1600.

Resposta: alternativa **e**.

11. Seja $V(t) = y + z \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}t\right)$, com y, z e $t \in \mathbb{R}$, $z > 0$.

Considerando $V_{\text{mínimo}} = 2$ e $V_{\text{máximo}} = 4$ o menor e o maior valor de $V(t)$, respectivamente, e sabendo que o valor mínimo de $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}t\right)$ é -1, e o valor máximo de $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}t\right)$ é 1, tem-se:

$V_{\text{mínimo}} = y + z \cdot (-1) \Rightarrow 2 = y - z$ (I)

$V_{\text{máximo}} = y + z \cdot 1 \Rightarrow 4 = y + z$ (II)

Resolvendo o sistema formado pelas equações (I) e (II), obtém-se $y = 3$ e $z = 1$. Dessa forma:

$V(t) = 3 + 1 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}t\right) \Rightarrow V(t) = 3 + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}t\right)$

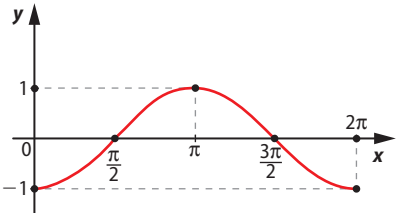
Resposta: alternativa **e**.

12. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes criem situações-problema a partir de fenômenos periódicos que possam ser descritos ou aproximados pela função seno dada. Dessa maneira, eles podem elaborar enunciados que tratem do máximo ou do mínimo da função, de seu período, seus zeros e sua imagem.

13. Como a função cosseno é periódica, em cada item dessa atividade, considera-se a função y dada e determinam-se alguns pontos (x, y) para o esboço do gráfico dessa função. Esses pontos são indicados nos quadros. Para o esboço indicado em cada item, considerou-se apenas um período, mas os gráficos podem ser representados em todo o eixo x.

a) $y = -\cos x$

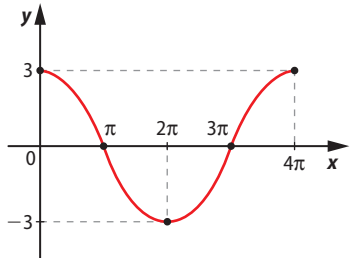
x	$\cos x$	$y = -\cos x$
0	1	-1
$\frac{\pi}{2}$	0	0
π	-1	1
$\frac{3\pi}{2}$	0	0
2π	1	-1



b) Como $y = 3 \cos \frac{x}{2}$, pode-se fazer a substituição:

$t = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2t$

t	x	$\cos t$	$y = 3 \cos t$
0	0	1	3
$\frac{\pi}{2}$	π	0	0
π	2π	-1	-3
$\frac{3\pi}{2}$	3π	0	0
2π	4π	1	3

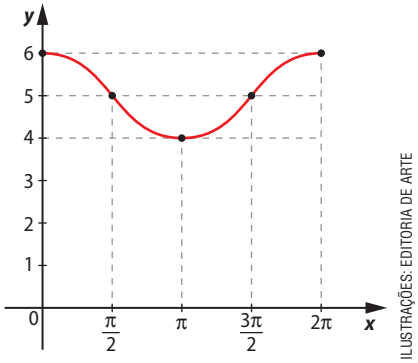


ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

c) $y = 5 + \cos x$

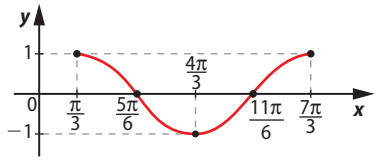
x	$\cos x$	$y = 5 + \cos x$
0	1	6
$\frac{\pi}{2}$	0	5
π	-1	4
$\frac{3\pi}{2}$	0	5
2π	1	6



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

d) Como $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$, pode-se fazer a substituição:
$t = x - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = t + \frac{\pi}{3}$

t	x	$y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$
0	$\frac{\pi}{3}$	1
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	0
π	$\frac{4\pi}{3}$	-1
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	0
2π	$\frac{7\pi}{3}$	1



14. Seja $p = \frac{2\pi}{|c|}$ o período da função $y = b \cdot \cos(cx + d)$.

a) Para $y = \cos 8x$: $p = \frac{2\pi}{|8|} = \frac{\pi}{4}$.

b) Para $y = 5\cos 10x$: $p = \frac{2\pi}{|10|} = \frac{\pi}{5}$.

c) Para $y = \cos\frac{4x}{7}$: $p = \frac{2\pi}{\left|\frac{4}{7}\right|} = \frac{7\pi}{2}$.

d) Para $y = 6\cos\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{2}\right)$: $p = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{4}\right|} = 8\pi$.

15. Seja p o período da função. Então: $p = \frac{2\pi}{|c|} \Rightarrow \frac{\pi}{8} = \frac{2\pi}{|4m|} \Rightarrow m = 4$.

16. A expressão $\frac{10}{3 + \cos x}$ terá valor máximo quando o valor do denominador for mínimo, ou seja, quando cos x assume valor mínimo. Assim, para $\cos x = -1$:
$\frac{10}{3 - 1} = 5$

17. Considere $\text{sen}\, x_0 = \cos x_0$. Pela relação fundamental da Trigonometria, tem-se:
$\text{sen}^2 x_0 + \cos^2 x_0 = 1 \Rightarrow \cos^2 x_0 + \cos^2 x_0 = 1 \Rightarrow \cos x_0 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$
Dessa forma, a função $f(x) = 110(\text{sen}\, x + \cos x)$ assumirá valor máximo para $\text{sen}\, x_0 = \cos x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e mínimo para $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Assim, o valor máximo da função é dada por:
$f(x_0) = 110(\text{sen}\, x_0 + \cos x_0) = 110 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 110\sqrt{2}$.
Resposta: alternativa **a**.

18. Se o ponto (0, 2) pertence à função $f(x) = a + \cos x$, então:
$2 = f(0) = a + \cos 0 \Rightarrow 2 = a + 1 \Rightarrow a = 1$
Dessa forma, $f(x) = 1 + \cos x$ e, portanto, tem-se:
$f(2\pi) = 1 + \cos 2\pi = 1 + 1 = 2$
Resposta: alternativa **c**.

19. Se os pontos $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ e $(0, -1)$ pertencem à função $f(x) = a - b\cos x$, então:
$1 = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = a - b \cdot \cos\frac{\pi}{2} \Rightarrow 1 = a - b \cdot 0 \Rightarrow a = 1$
$-1 = f(0) = a - b \cdot \cos 0 \Rightarrow -1 = 1 - b \cdot 1 \Rightarrow b = 2$
Dessa forma, $f(x) = 1 - 2\cos x$ e, portanto, tem-se:
$f(\pi) = 1 - 2 \cdot \cos\pi = 1 - 2 \cdot (-1) = 3$
Resposta: alternativa **a**.

20. Dada $f(x) = 3 \cdot \cos x + 2$ e sabendo que $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, conclui-se que:
$3 \cdot (-1) + 2 \leqslant 3 \cdot \cos x + 2 \leqslant 3 \cdot 1 + 2 \Rightarrow -1 \leqslant 3 \cdot \cos x + 2 \leqslant 5$
Portanto, o conjunto imagem da função f é $[-1, 5]$.

21. Seja $f(x) = b \cdot \cos(cx)$ a forma geral da função descrita pelo gráfico. Por meio dele, é possível observar que a função contém o ponto (0, 2). Dessa forma:
$2 = f(0) = b \cdot \cos(c \cdot 0) \Rightarrow 2 = b \cdot 1 \Rightarrow b = 2$
Além disso, pelo gráfico, o período p da função é $\frac{\pi}{2}$. Logo:
$p = \frac{2\pi}{|c|} \Rightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{|c|} \Rightarrow c = \pm 4$
Portanto, $f(x) = 2\cos(-4x)$ ou $f(x) = 2\cos(4x)$.
Resposta: alternativa **d**.

22. **a)** $f(x) = 2^{\cos x}$
$g(x) = 2^{\text{sen}\, x}$
$f(\pi) \cdot g(\pi) = 2^{\cos\pi} \cdot 2^{\text{sen}\,\pi} = 2^{-1} \cdot 2^0 = \frac{1}{2}$

b) $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2^{\cos\frac{\pi}{6}} = 2^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$
$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2^{\text{sen}\frac{\pi}{4}} = 2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$
Como $2^{\frac{\sqrt{3}}{2}} > 2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$, conclui-se que $f\left(\frac{\pi}{6}\right) > g\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

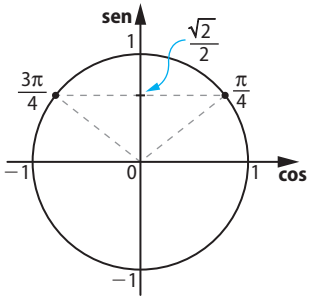
23. **a)** Considere que a altura da maré é dada por:
$A(t) = \cos(t - a) + b$.
Além disso, sabe-se que, às 4:00 ($t = 4$), a altura registrada foi máxima (3 m). Logo: $A(4) = \cos(4 - a) + b = 3$.
O valor $A(4)$ é máximo quando $\cos(4 - a)$ é 1, então:
$4 - a = 0 \Rightarrow a = 4$
Logo: $A(t) = \cos(t - 4) + b$.
Disso vem que $b = 2$, pois:
$A(4) = \cos(4 - 4) + b = 3 \Rightarrow 1 + b = 3 \Rightarrow b = 2$
Portanto, $A(t) = \cos(t - 4) + 2$, ou seja, $a = 4$ e $b = 2$.

b) Resposta pessoal. Exemplo de atividade: De acordo com as informações contidas no quadro, determine:
a) Qual é o período da maré?
b) Durante o dia, quais são os melhores horários para frequentar a praia com segurança?
Respostas:
a) Olhando os momentos de pico, a maré atinge a maior altura às 4:00, às 10:17 e às 16:34. Logo, o período é de 6 horas e 14 minutos.
b) Os melhores horários para frequentar a praia em segurança são nos momentos em que a maré está mais baixa, ou seja, por volta das 7:08 da manhã e por volta das 13:25.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

24. **a)** Sabe-se que sen $\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e que sen $\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (ângulos notáveis).

sen $x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{3\pi}{4}$

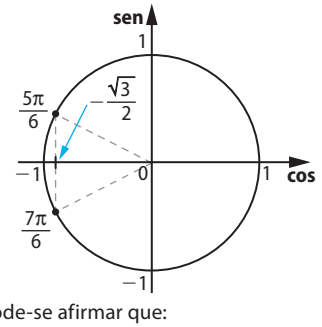


$S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$

b) Sabendo que cos $\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, pela redução ao primeiro quadrante da função cosseno, tem-se:

cos $\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

cos $\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

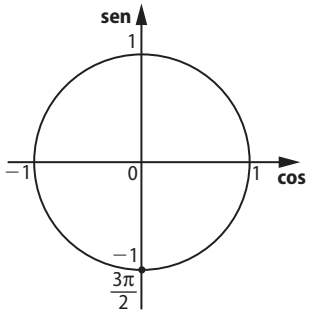


Assim, pode-se afirmar que:

cos $x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6}$ ou $x = \frac{7\pi}{6}$.

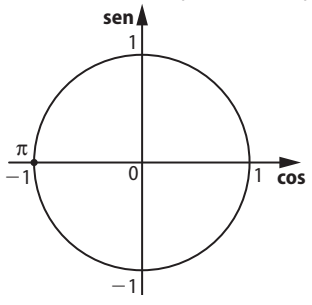
Portanto: $S = \left\{\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$.

c) Como sen $x = -1$, então $x = \frac{3\pi}{2}$, pois, dos valores notáveis do seno, sabe-se que sen $\frac{3\pi}{2} = -1$.



$S = \left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$

d) Como cos $x = -1$, então $x = \pi$, pois sabe-se que cos $\pi = -1$.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

$S = \{\pi\}$

25. **a)** Isolando o seno na equação, obtém-se:

$2 \text{ sen } x + 1 = 0 \Rightarrow \text{sen } x = -\frac{1}{2}$

Sabendo que sen $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, pela redução ao primeiro quadrante da função seno, tem-se:

sen $\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \text{sen}\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\text{sen}\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

sen $\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \text{sen}\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\text{sen}\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) Isolando o seno na equação, obtém-se:

$2 \text{ sen } 2x = 1 \Rightarrow \text{sen } 2x = \frac{1}{2}$.

Sabendo que sen $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, pela redução ao primeiro quadrante da função seno, tem-se:

sen $\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \text{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \text{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

Logo:

$2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\pi$; ou

$2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{12} + k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

26. Resolvendo a equação trigonométrica, obtém-se:

$\text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}\frac{\pi}{3}$

Logo:

$2x - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow 2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$

$2x - \frac{\pi}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow 2x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{7\pi}{12} + k\pi$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

27. Resolvendo a equação trigonométrica, obtêm-se:

$\text{sen } 4x = 1 \Rightarrow \text{sen } 4x = \text{sen}\frac{\pi}{2}$

Logo:

$4x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \cdot k\pi$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{8} + \frac{k}{2}\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Resposta: alternativa **d**.

28. Considerando as informações do enunciado, conclui-se que:

$I(t) = 40 \text{ sen } (120\pi t) \Rightarrow 20 = 40 \text{ sen } (120\pi t) \Rightarrow \frac{1}{2} = \text{sen } (120\pi t) \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}\frac{\pi}{6} = \text{sen } (120\pi t) \Rightarrow 120\pi t = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{1}{720} \simeq 0{,}0014$

Logo, o tempo mínimo para o gerador produzir uma corrente de 20 amperes é de aproximadamente 0,0014 segundos.

29. **a)** Ao considerar a equação $2\text{sen}^2 x - 6\text{sen } x - 8 = 0$, deve-se substituir sen $x = y$, então:

$2\text{sen}^2 x - 6\text{sen } x - 8 = 0 \Rightarrow 2y^2 - 6y - 8 = 0$

Ao resolver a última equação do 2º grau, obtêm-se as raízes $y' = 4$ e $y'' = -1$.

Como $4 > 1$, não se deve considerar a solução positiva, pois sen $x \leqslant 1$.

Sendo assim, como sen $x = y$, tem-se:

$\text{sen } x = -1 \Rightarrow \text{sen}\frac{3\pi}{2} = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) Ao considerar a equação $\cos^2 x + \cos x = 0$, deve-se substituir cos $x = y$, então:

$\cos^2 x + \cos x = 0 \Rightarrow y^2 + y = 0$

Ao resolver a última equação do 2º grau, obtêm-se as raízes $y' = 0$ e $y'' = -1$.

Como cos $x = y$, tem-se:

- Para cos $x = 0$:

$\cos\frac{\pi}{2} = 0$ ou $\cos\frac{3\pi}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou

$x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

• Para $\cos x = -1$:
$\cos \pi = -1 \Rightarrow x = \pi + 2k\pi$
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

30. Considerando $\text{sen}^2 x = y$, tem-se $\text{sen}^4 x = y^2$. Ao substituir na equação, obtém-se:
$2\,\text{sen}^4 x - 3\,\text{sen}^2 x + 1 = 0 \Rightarrow 2y^2 - 3y + 1 = 0$
Ao resolver a equação do 2º grau, obtêm-se as raízes $y' = 1$ e $y'' = \frac{1}{2}$.
Como $\text{sen}^2 x = y$, então:
$\text{sen}^2 x = 1$ e $\text{sen}^2 x = \frac{1}{2}$
• Considerando $\text{sen}^2 x = 1$, tem-se $\text{sen}\, x = \pm 1$. Então:
Para $\text{sen}\, x = 1$: $\text{sen}\, x = \text{sen}\, \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$
Para $\text{sen}\, x = -1$: $\text{sen}\, x = \text{sen}\, \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$
Portanto, $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.
• Considerando $\text{sen}^2 x = \frac{1}{2}$, tem-se $\text{sen}\, x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Então:
Para $\text{sen}\, x = \frac{\sqrt{2}}{2}$: $\text{sen}\, x = \text{sen}\, \frac{\pi}{4} = \text{sen}\, \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$
Para $\text{sen}\, x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$: $\text{sen}\, x = \text{sen}\, \frac{5\pi}{4} = \text{sen}\, \frac{7\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$
Portanto, $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ou $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$.
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

31. Ao substituir $\text{sen}\, x = a$ na equação dada, obtém-se:
$4^{-\text{sen}\, x} = \frac{1}{2} \Rightarrow 4^{-a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$
Logo, $\text{sen}\, x = \frac{1}{2}$. Sabendo que $\text{sen}\, \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, pela redução ao primeiro quadrante da função seno, tem-se:
$\text{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \text{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \text{sen}\, \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$
Portanto, $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$.
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

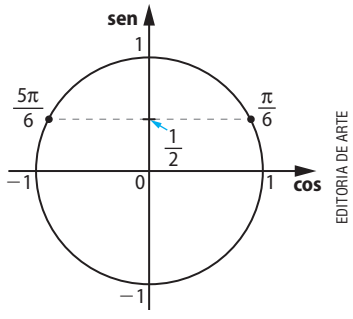
32. Para resolver a equação $|\cos(\pi - x)| = \frac{1}{2}$, deve-se considerar que $\cos(\pi - x)$ pode assumir um valor positivo e um negativo, pois está em módulo. Portanto:
$\cos(\pi - x) = \pm\frac{1}{2}$
Sabendo que $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, pela redução ao primeiro quadrante da função cosseno, tem-se:
$\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$
$\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$
$\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$
Portanto:
$\pi - x = \frac{\pi}{3} + k'\pi \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$ ou
$\pi - x = \frac{2\pi}{3} + k'\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi$.
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

33. Seja $y = \text{sen}\, x$. Dessa forma, pela relação fundamental da Trigonometria, tem-se:
$2\cos^2 x + 3\,\text{sen}\, x - 3 = 0 \Rightarrow 2 \cdot (1 - \text{sen}^2 x) + 3\,\text{sen}\, x - 3 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow -2y^2 + 3y - 1 = 0$
Resolvendo esta última equação, obtém-se $y' = 1$ e $y'' = \frac{1}{2}$.
Portanto, $\text{sen}\, x = 1$ ou $\text{sen}\, x = \frac{1}{2}$.
Para $x \in [0, 2\pi]$, tem-se que $\text{sen}\, x = 1$ se $x = \frac{\pi}{2}$ e $\text{sen}\, x = \frac{1}{2}$ se $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$.
Dessa forma, nesse intervalo, a equação tem três soluções.
Resposta: alternativa **d**.

34. Sendo P e Q os pontos de intersecção dos gráficos das funções $y_1 = \text{sen}\,(x + 1)$ e $y_2 = -\frac{1}{2}$ e percebendo que ambos pertencem a um mesmo período da função y_1, pode-se determinar seus valores tomando $\text{sen}\,(x + 1) = -\frac{1}{2}$ para os valores de x em uma mesma volta na circunferência trigonométrica.
Sabendo que $\text{sen}\, \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, pela redução ao primeiro quadrante da função seno, tem-se:
$\text{sen}\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \text{sen}\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\text{sen}\, \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$
$\text{sen}\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \text{sen}\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\text{sen}\, \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$
Logo, tem-se que:
$x + 1 = \frac{7\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{7\pi - 6}{6}$ ou
$x + 1 = \frac{11\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{11\pi - 6}{6}$
Portanto, conclui-se que
$PQ = \frac{11\pi - 6}{6} - \left(\frac{7\pi - 6}{6}\right) = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$
Resposta: alternativa **b**.

35. O mês de produção máxima ocorre quando o preço é mínimo.
O preço será mínimo quando $\cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right)$ for mínimo. Assim:
$\cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right) = -1 \Rightarrow \frac{\pi x - \pi}{6} = \pi \Rightarrow x = 7$
Portanto, a produção máxima ocorre em julho.
Resposta: alternativa **d**.

36. Segundo o enunciado, o pistão precisa alcançar a altura de 6 cm por três vezes em menos de 4 segundos. Então, deve-se calcular os possíveis instantes de tempo em que a altura alcançará 6 cm, ou seja, $h(t) = 6$:
$h(t) = 4 + 4\,\text{sen}\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow 6 = 4 + 4\,\text{sen}\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$
$\Rightarrow \text{sen}\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$
Portanto, isso ocorrerá quando $\text{sen}\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$.
Observe agora a circunferência trigonométrica:



EDITORIA DE ARTE

Na primeira volta, para que $h(t) = 6$, deve-se considerar os arcos: $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6}$.
O terceiro arco ocorre na segunda volta, ou seja, para: $\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6}$.
Assim, como $\beta \neq 0$, o instante de tempo t em que ocorrerá essa terceira ocorrência será:
$\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{13\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{16\pi}{3\beta}$

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Como esta ocorrência deve ocorrer antes de $t = 4$ e, tomando $\pi = 3$, tem-se:

$\frac{16\pi}{3\beta} < 4 \Rightarrow \beta > \frac{16 \cdot 3}{4 \cdot 3} \Rightarrow \beta > 4$

Portanto, o menor valor inteiro para β é 5.
Resposta: alternativa **d**.

Atividades complementares

1. Substituindo $x = \frac{\pi}{3}$ na função $f(x) = 4 \cdot \text{sen}\,(2x)$, tem-se:

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4 \cdot \text{sen}\left(2 \cdot \frac{\pi}{3}\right) = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

Resposta: alternativa **c**.

2. Sejam $f(x) = \text{sen}\left(1 + \frac{x}{2}\right)\pi$ e $g(x) = \text{sen}\left(1 - \frac{x}{2}\right)\pi$. Daí, tem-se:

$K = f(9) \cdot g(9) = \left[\text{sen}\left(1 + \frac{9}{2}\right)\pi\right] \cdot \left[\text{sen}\left(1 - \frac{9}{2}\right)\pi\right] =$

$= \text{sen}\,\frac{11\pi}{2} \cdot \text{sen} - \frac{7\pi}{2}$

Como a função seno é periódica e simétrica em relação à origem, então:

$\text{sen}\,\frac{11\pi}{2} = \text{sen}\,\frac{3\pi}{2} + 2 \cdot 2\pi = \text{sen}\,\frac{3\pi}{2} = -1$;

$\text{sen} - \frac{7\pi}{2} = -\text{sen}\,\frac{3\pi}{2} + 2\pi = -\text{sen}\,\frac{3\pi}{2} = 1$.

Portanto, segue que $K = -1 \cdot 1 = -1$.
Resposta: alternativa **b**.

3. Sejam $P(5)$ e $P(8)$ os pesos em maio e agosto, respectivamente, dados em kg:

$P(5) = 65 - 5\cos\left(\left(\frac{5+3}{6}\right)\pi\right) = 65 - 5\cos\frac{4\pi}{3} =$

$= 65 + 5\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 65 + \frac{5}{2} = 67{,}5$

$P(8) = 65 - 5\cos\left(\left(\frac{8+3}{6}\right)\pi\right) = 65 - 5\cos\frac{11\pi}{6} =$

$= 65 - 5\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 65 - \frac{5\sqrt{3}}{2} = 65 - 4{,}25 = 60{,}75$

Fazendo $P(8) - P(5)$:
$60{,}75 - 67{,}5 = -6{,}75$
Portanto, o peso da pessoa diminuiu 6,75 kg.
Resposta: alternativa **03**.

4. A altura máxima de $H(t) = 5 + 3\,\text{sen}\,(2t)$, em metro, ocorrerá quando o valor do seno for máximo, isto é, quando $\text{sen}\,(2t) = 1$:
$H_{\text{máxima}} = 5 + 3 \cdot \text{sen}\,(2t) = 5 + 3 \cdot 1 = 8$
Resposta: alternativa **e**.

5. Seja $f(x)\cos\left(\frac{x}{2} + \pi\right) + 3 = f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)(x - \pi \cdot \text{sen}\,(x))$.

Substituindo $x = \frac{\pi}{2}$ nesta expressão, obtém-se:

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{2} + \pi\right) + 3 = f\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2} - \pi \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) + 3 = f(0)\left(\frac{\pi}{2} - \pi\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow -f\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 3 = f(0)\left(-\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) + 3 = f(0)\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

Calculando $f(0)$ na expressão dada, obtém-se:

$f(0)\cos\left(\frac{0}{2} + \pi\right) + 3 = f\left(0 - \frac{\pi}{2}\right)(0 - \pi \cdot \text{sen}\,(0)) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(0)\cos(\pi) + 3 = f\left(-\frac{\pi}{2}\right)(0) \Rightarrow$

$\Rightarrow -f(0) + 3 = 0 \Rightarrow f(0) = 3$

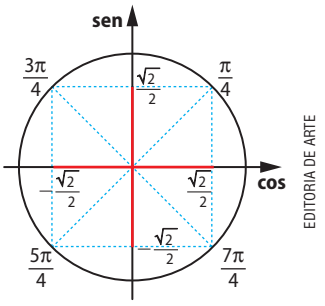
Portanto, segue que:

$-\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) + 3 = 3 \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{(3\pi + 6)\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}(\pi + 2)}{2}$

Resposta: alternativa **e**.

6. Os gráficos se interceptam quando $1 + \text{sen}\,x = 1 - \cos x$, com $0 \leq x \leq 2\pi$, ou seja, quando $\text{sen}\,x = -\cos x$.
Na circunferência trigonométrica a seguir, são apresentados os arcos em que sen x e cos x possuem os mesmos valores absolutos:



Os valores de seno e cosseno têm sinais opostos no segundo e no quarto quadrantes, ou seja, quando $x = \frac{3\pi}{4}$ e $x = \frac{7\pi}{4}$.
Resposta: alternativa **e**.

7. A interseção dos gráficos de $f(x) = \text{sen}\,(x)$ e $g(x) = \cos(x)$ ocorrerá quando $\text{sen}\,(x) = \cos(x)$. Considerando essa igualdade, pela relação fundamental da Trigonometria, tem-se:

$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

Logo, os pontos $P(x_k, y_k)$ da interseção de f e g possuem valores para y_k iguais a $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Resposta: alternativa **a**.

8. Como $p(t) = 100 - 20\,\text{sen}\,(t)$, para $t \geqslant 0$, conclui-se que $80 \leqslant p(t) \leqslant 120$, uma vez que $-1 \leqslant \text{sen}\,t \leqslant 1$. Disso, obtém-se que a diferença entre o valor máximo e o mínimo da função $p(t)$ é igual a $120 - 80 = 40$. Como essa diferença corresponde ao diâmetro da circunferência, então o diâmetro mede 40.
Resposta: alternativa **b**.

9. A função $f(x) = 3 - 5\,\text{sen}\,(2x + 4)$ terá valor máximo e mínimo, respectivamente, quando $\text{sen}\,(2x + 4)$ assumir valor mínimo de -1 e máximo de 1. Assim:

- quando $\text{sen}\,(2x + 4) = -1$, $f(x) = 3 - 5(-1) = 8$ (valor máximo)
- quando $\text{sen}\,(2x + 4) = 1$, $f(x) = 3 - 5 \cdot 1 = -2$ (valor mínimo)

O período p é dado por: $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$.
Resposta: alternativa **b**.

10. Considerando $f(x) = 3\text{sen}^2 x + 7\cos^2 x$ e pela relação fundamental da Trigonometria, tem-se:
$f(x) = 3\text{sen}^2 x + 7\cos^2 x = 3 \cdot (1 - \cos^2 x) + 7\cos^2 x = 3 + 4\cos^2 x$
Como $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, segue que $0 \leqslant \cos^2 x \leqslant 1$. Logo:
Para $\cos^2 x = 0$: $f(x) = 3 + 4 \cdot 0 = 3$
Para $\cos^2 x = 1$: $f(x) = 3 + 4 \cdot 1 = 7$
Logo, $M = 7$ e $m = 3$ e, dessa forma, $M \cdot m = 21$.
Resposta: alternativa **c**.

11. Dada $f(x) = 2 - 3\cos x$ e sabendo que $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, segue que:
Para $\cos x = -1$: $f(x) = 2 - 3 \cdot (-1) = 5$
Para $\cos x = 1$: $f(x) = 2 - 3 \cdot 1 = -1$
Dessa forma, $\text{Im}(f) = [-1, 5]$.
Resposta: alternativa **e**.

12. Seja $f(x) = 5 - 3\cos\left(\frac{x-2}{\pi}\right)$. Seu período é igual a:

$p = \frac{2\pi}{\frac{1}{\pi}} = 2\pi \cdot \pi = 2\pi^2$

Como $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, segue que:
Para $\cos x = -1$: $f(x) = 5 - 3 \cdot (-1) = 8$
Para $\cos x = 1$: $f(x) = 5 - 3 \cdot 1 = 2$
Dessa forma, $\text{Im}(f) = [2, 8]$.
Resposta: alternativa **c**.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

13. Pelo gráfico de $f(x) = a + b \cdot \operatorname{sen} x$, o ponto (0, 1) pertence a essa função. Logo:
$f(0) = a + b \cdot \operatorname{sen} 0 \Rightarrow a + b \cdot 0 = 1 \Rightarrow a = 1$
Sabe-se que, para $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, a função $g(x) = \operatorname{sen} x$ é crescente.
Mas, no gráfico da $f(x) = 1 + b \cdot \operatorname{sen} x$, para valores de x a partir de zero, a função inicialmente decresce. Logo, $b < 0$.
Ainda pelo gráfico, sabe-se que 3 é ponto máximo da função f. Como $b < 0$, esse valor de máximo ocorre quando o seno é mínimo. Desse modo, para $\operatorname{sen} x = -1$:
$3 = 1 + b \cdot (\operatorname{sen} x) \Rightarrow 2 = b \cdot (-1) \Rightarrow b = -2$
Resposta: alternativa **d**.

14. Ao considerar as informações contidas no enunciado, sabe-se que a função $P(t) = A + B\cos(kt)$, em que $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$, possui imagem $78 \leqslant P(t) \leqslant 120$. Portanto, como B é positivo, tem-se:
$\begin{cases} A + B = 120 \\ A - B = 78 \end{cases} \Rightarrow A = 99 \text{ e } B = 21$
Como são 90 batimentos por minuto e o intervalo entre cada batimento representa o período p, tem-se:
$p = \frac{90}{60} = \frac{2}{3}$
Além disso, sabe-se que $p = \frac{2\pi}{|k|}$. Portanto, como k é positivo, segue que:
$p = \frac{2\pi}{|k|} = \frac{2}{3} \Rightarrow k = 3\pi$
Logo, $P(t) = 99 + 21 \cdot \cos(3\pi t)$.
Resposta: alternativa **a**.

15. O período de $g(x) = \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta x$ é 4π, uma vez que ele equivale ao dobro do período da função $f(x) = \operatorname{sen} x$, cujo período é 2π. Então:
$4\pi = \frac{2\pi}{\beta} \Rightarrow \beta = \frac{1}{2}$
Logo, $0 < \beta < 1$.
Como a amplitude de $g(x)$ é menor do que a de $f(x)$, pode-se afirmar que $0 < \alpha < 1$.
Resposta: alternativa **a**.

16. Analisando o gráfico da função, percebe-se que ela possui um deslocamento vertical e uma mudança de amplitude em relação à função $g(t) = \operatorname{sen} t$. Dessa forma, considere que a função é dada por $f(t) = A \cdot \operatorname{sen} t + B$.
Para determinar A e B, deve-se analisar alguns pontos pertencentes à função:
Para $t = 0$: $f(0) = 88 \Rightarrow 88 = A \cdot \operatorname{sen} 0 + B \Rightarrow B = 88$ (I)
Para $t = \frac{\pi}{2}$: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 168 \Rightarrow 168 = A \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} + B \Rightarrow A + B = 168$ (II)
Substituindo (I) em (II), conclui-se que $A = 80$ e, portanto, $f(t) = 80 \cdot \operatorname{sen} t + 88$.
Resposta: alternativa **a**.

17. Como $-1 \leqslant \cos(2\pi t) \leqslant 1$, o valor máximo e o valor mínimo de $P(t)$ ocorrem, respectivamente, quando $\cos(2\pi t) = 1$ e quando $\cos(2\pi t) = -1$.

I. Verdadeira. $P(t) = 96 + 18 \cdot 1 = 96 + 18 = 114$

II. Verdadeira. $P(t) = 96 + 18 \cdot (-1) = 96 - 18 = 78$

III. Verdadeira. O período da função é $\frac{2\pi}{2\pi} = 1$

IV. Falsa. $P\left(\frac{1}{3}\right) = 96 - 18 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 96 + 18 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 96 - 9 = 87$

V. Falsa. Sendo $P(0) = 114$, o gráfico apresentado não é o de $P(t)$.
Resposta: I: V; II: V; III: V; IV: F; V: F.

18. Seja $D(t) = M + N \operatorname{sen}(\alpha t)$ a distância do assento 1 até o solo a cada t segundos.
Pelo enunciado, o período da função é 30 segundos. Logo, como $\alpha > 0$:
$p = \frac{2\pi}{|\alpha|} \Rightarrow 30 = \frac{2\pi}{|\alpha|} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{15}$.
Sabe-se também que, para $t = 0$, $D(t)$ é equivalente ao raio da roda-gigante mais a altura do ponto mais baixo da roda em relação ao solo. Logo:
$D(0) = M + N \operatorname{sen}\left(\frac{\pi \cdot 0}{15}\right) \Rightarrow 10{,}5 = M + N \cdot \operatorname{sen}(0) \Rightarrow M = 10{,}5$
Além disso, o ponto mais alto na roda-gigante corresponde a uma altura em relação ao solo de 20,5 m, que ocorre quando $t = 30 : 4 = 7{,}5$. Logo:
$D(7{,}5) = M + N \operatorname{sen}\left(\frac{\pi \cdot 7{,}5}{15}\right) \Rightarrow$
$\Rightarrow 20{,}5 = 10{,}5 + N \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow N = 10$
Portanto: $M - N = 10{,}5 - 10 = 0{,}5 = \frac{1}{2}$.
Sabe-se que $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. Logo, para $\alpha = \frac{\pi}{15}$, tem-se:
$\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} = \cos\left(\frac{5\pi}{15}\right) = \cos(5\alpha)$
Resposta: alternativa **a**.

19. Como n é par, tem-se:
$\operatorname{sen}(x + \pi) + \operatorname{sen}(x + 2\pi) = 0$
$\operatorname{sen}(x + 3\pi) + \operatorname{sen}(x + 4\pi) = 0$.
…
$\operatorname{sen}(x + (n - 1)\pi) + \operatorname{sen}(x + n\pi) = 0$
Portanto:
$\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(x + \pi) + \operatorname{sen}(x + 2\pi) + \operatorname{sen}(x + 3\pi) + \ldots + \operatorname{sen}(x + n\pi) = \operatorname{sen}(x)$
Resposta: alternativa **a**.

20. Resolvendo a equação trigonométrica para $x \in [0, 2\pi]$, obtém-se:
$\operatorname{sen} 2x = 1 \Rightarrow \operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$
Logo:
$2x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$
Resposta: alternativa **c**.

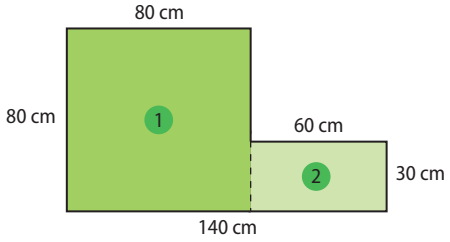
21. Como a embarcação precisa de uma profundidade mínima de 2 m, ou seja, $h(t) = 2$, deve-se encontrar os momentos do dia em que isso ocorre. Logo:
$h(t) = 3 - 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{12}\right) \Rightarrow 2 = 3 - 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{12}\right) \Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{12}\right) = \frac{1}{2}$
Sabe-se que o valor de seno é $\frac{1}{2}$ para $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6}$. Então:
$\frac{\pi t}{12} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = 2$ ou $\frac{\pi t}{12} = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow t = 10$
Como a medição começou a ocorrer às 6 h da manhã, então, nesse momento, $t = 0$.
As soluções encontradas são $t = 2$, que corresponde a 8 h, e $t = 10$, que corresponde a 16 h.
Como o navio estava encalhado às 11 h, ele precisará esperar até as 16 h, ou seja, esperar mais 5 horas.
Resposta: alternativa **b**.

22. A função $r(t) = \frac{5\,865}{1 + 0{,}15 \times \cos(0{,}06t)}$ terá valor máximo quando o denominador for mínimo, ou seja, quando $\cos(0{,}06t) = -1$, e terá valor mínimo quando o denominador for máximo, isto é, quando $\cos(0{,}06t) = 1$.
$r_{\text{máximo}} = \frac{5\,865}{1 + 0{,}15 \times (-1)} = 6\,900$
$r_{\text{mínimo}} = \frac{5\,865}{1 + 0{,}15 \times 1} = 5\,100$
Dessa forma, $S = 6\,900 \text{ km} + 5\,100 \text{ km} = 12\,000 \text{ km}$.
Resposta: alternativa **b**.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Atividades

1. **a)** Ao decompor a figura em dois retângulos, obtém-se:



$S = S_1 + S_2 \Rightarrow S = 80^2 + 60 \cdot 30 \Rightarrow S = 8\,200$
Portanto: $S = 8\,200\ cm^2$.

b) A área S, em cm^2, é:

$S = \frac{9 \cdot 4}{2} = 18$

c) O semiperímetro p, em cm, do triângulo é:

$p = \frac{7 + 8 + 9}{2} \Rightarrow p = 12$

Assim, a área S, em cm^2, é:

$S = \sqrt{12 \cdot (12 - 7) \cdot (12 - 8) \cdot (12 - 9)} \Rightarrow S = 12\sqrt{5}$

d) Seja S_1 a área do triângulo retângulo em m^2:

$S_1 = \frac{30 \cdot 40}{2} \Rightarrow S_1 = 600$

A base maior do trapézio retângulo é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem 30 m e 40 m. Assim, pelo teorema de Pitágoras, essa base tem medida de 50 m.
Seja S_2 a área do trapézio retângulo em m^2:

$S_2 = \frac{(50 + 40) \cdot 30}{2} \Rightarrow S_2 = 1350$

Então, a área da figura, em m^2, é:
$S = S_1 + S_2 \Rightarrow S = 1950$

2. De acordo com as informações apresentadas, as dimensões do mural são 21 m de altura por 8 m de largura e a superfície da parede lateral do edifício em que ele foi pintado é retangular. Assim, a área S, em m^2, desse mural é:
$S = 8 \cdot 21 = 168$

3. **a)** Há 100 quadradinhos de 1 cm^2 contidos inteiramente na região delimitada pela figura. Logo: $S_{falta} = 100\ cm^2$.

b) Há 148 quadradinhos de 1 cm^2 contidos inteiramente ou parcialmente na região delimitada pela figura. Logo:
$S_{excesso} = 148\ cm^2$

c) $S = \frac{S_{falta} + S_{excesso}}{2} = \frac{100\ cm^2 + 148\ cm^2}{2} = 124\ cm^2$

d) $\frac{124 - 119,6}{119,6} \simeq 0,0368 = 3,68\%$

4. Considerando as informações contidas no enunciado, pode-se afirmar que, se a área do quadrado de lado ℓ é dada por $S = \ell^2$, então, depois de aumentar seu lado em 4 cm, a área final será $S_f = (\ell + 4)^2$. Como, ao aumentar o lado, a área aumenta 56 cm^2, então:
$S_f = S + 56 \Rightarrow (\ell + 4)^2 = \ell^2 + 56 \Rightarrow$
$\Rightarrow \ell^2 + 8\ell + 16 = \ell^2 + 56 \Rightarrow \ell = 5$
Assim, como $d = \ell\sqrt{2}$, tem-se a medida d, em cm: $d = 5\sqrt{2}$

5. Ao aumentar o lado de um quadrado em 20%, obtém-se:
$S = (\ell + 0,2\ell)^2 = (1,2\ell)^2 = 1,44\ell^2$
Como a área do quadrado é definida por $S_Q = \ell^2$, então, $S = 1,44 \cdot S_Q$.
Portanto, a área do quadrado aumenta 44%.

6. **a)** As áreas da parede, S_p, e de cada azulejo, S_a, em cm^2, são, respectivamente:
$S_p = 500 \cdot 350 = 175\,000$
$S_a = 20^2 = 400$
Assim, o número de azulejos necessários é dado por:

$\frac{175\,000}{400} = 437,5$

São necessários 437,5 azulejos.

b) Para não haver a necessidade de corte, o valor procurado deve ser o maior possível entre os divisores de 350 e de 500. Assim, o valor x inteiro e positivo deve ser $x = \text{mdc}(350, 500)$.
Como $350 = 2 \cdot 5^2 \cdot 7$ e $500 = 2^2 \cdot 5^3$, tem-se:
$x = 2 \cdot 5^2 = 50$
A maior dimensão de cada peça de azulejo deve ser 50 cm.

7. Inicialmente, a largura e o comprimento do terreno podiam ser divididos, respectivamente, na seguinte quantidade de partes:

$\frac{50\ m}{10\ cm} = \frac{5\,000\ cm}{10\ cm} = 500$; $\frac{240\ m}{20\ cm} = \frac{24\,000\ cm}{20\ cm} = 1200$

Assim, o agricultor podia plantar, no máximo, 600 000 mudas, pois:
$500 \cdot 1200 = 600\,000$
Depois da ampliação, a largura e o comprimento do terreno podem ser divididos, respectivamente, na seguinte quantidade de partes:

$\frac{200\ m}{10\ cm} = \frac{20\,000\ cm}{10\ cm} = 2000$; $\frac{100\ m}{20\ cm} = \frac{10\,000\ cm}{20\ cm} = 500$

Assim, o agricultor poderá plantar, no máximo, 1 000 000 mudas, pois:
$2000 \cdot 500 = 1\,000\,000$
Isso indica que a quantidade máxima de mudas que poderão ser plantadas a mais é 400 000.
Resposta: alternativa **b**.

8. A área S dos retângulos azuis é dada por:
$S = x \cdot (21 - x) + (27 - x) \cdot x \Rightarrow S = -2x^2 + 48x$
Como a área deve ser máxima, deve-se encontrar x_V, dado em cm.
Assim:

$x_V = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_V = \frac{-48}{-4} \Rightarrow x_V = 12$

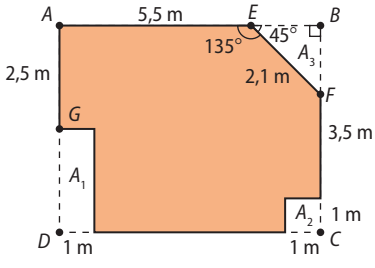
Logo, a soma das áreas será a maior possível quando $x = 12$ cm.

9. A área da região clara pode ser calculada por meio do quádruplo da área do triângulo APB, visto que os triângulos APB, APD, CQD e CQB são congruentes e possuem as mesmas áreas. Logo, a área de cada um desses triângulos, em m^2, é:

$S_{APB} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{16}$

Portanto, a área clara, em m^2, é: $S_{clara} = 4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4} = 0,25$.
A área sombreada, em m^2, é dada por:
$S_{sombreada} = 1 - 0,25 = 0,75$
Calcula-se o preço P do vitral por meio do produto da área de cada região pelo preço do m^2 correspondente:
$P = 0,25 \cdot 50 + 0,75 \cdot 30 = 35$
Portanto, o custo será de R$ 35,00.
Resposta: alternativa **b**.

10. Pode-se representar a situação com a seguinte figura:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Considerando a representação, pode-se concluir que a área do apartamento é equivalente à área do retângulo *ABCD* subtraídas as áreas A_1, A_2 e A_3.
O triângulo *EBF* é retângulo e isósceles. Dessa forma, $BF = EB$, e sua medida x, em metro, pelo teorema de Pitágoras é:

$$(2,1)^2 = x^2 + x^2 \Rightarrow x = \frac{2,1}{\sqrt{2}} \simeq 1,5$$

Considerando como aproximada a área do apartamento, seja $BF = 1,5$ m. Desse modo, $BC = AD = 6$ m e, portanto, $GD = 3,5$ m.
Assim, as seguintes áreas, em m², são iguais a:
$A_1 = 1 \cdot 3,5 = 3,5$
$A_2 = 1 \cdot 1 = 1$

$$A_3 = \frac{EB \cdot BF}{2} = 1,125$$

$A_{ABCD} = DC \cdot BC = 7 \cdot 6 = 42$
Assim, a área do apartamento, em m², será aproximadamente igual a $A = A_{ABCD} - (A_1 + A_2 + A_3) = 36,375$.
Considerando a observação do mestre de obras, a quantidade de piso a ser comprada, em m², será igual a $1,1 \cdot 36,375 = 40,0125 \simeq 40$.
Resposta: alternativa **c**.

11. Como *ABCD* é um retângulo, cada ângulo destacado em *C* mede $90° : 3 = 30°$.
Sendo h a medida da altura do retângulo, podemos calcular a medida *AC* usando a relação trigonométrica cosseno no triângulo retângulo *ABC*:

$$\cos 60° = \frac{h}{AC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{AC} \Rightarrow AC = 2h$$

Além disso, podemos calcular a medida *CE* usando a relação trigonométrica cosseno no triângulo retângulo *BCE*:

$$\cos 30° = \frac{h}{CE} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{CE} \Rightarrow CE = \frac{2\sqrt{3}\,h}{3}$$

Utilizando a fórmula trigonométrica para o cálculo da área de triângulos, obtemos a área *S* do triângulo sombreado *AEC*:

$$S = \frac{AC \cdot CE \cdot \operatorname{sen} 30°}{2} = \frac{2h \cdot \frac{2\sqrt{3}\,h}{3} \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}h^2}{3}$$

A área *S'* do retângulo *ABCD* é o dobro da área do triângulo *ABC*. Desse modo, temos:

$$S' = 2 \cdot \frac{AC \cdot BC \cdot \operatorname{sen} 60°}{2} = 2h \cdot h \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\,h^2$$

Assim, a razão entre as áreas *S* e *S'* é:

$$\frac{S}{S'} = \frac{\frac{\sqrt{3}\,h^2}{3}}{\sqrt{3}\,h^2} = \frac{1}{3}$$

Logo, a área do triângulo sombreado *AEC* é igual a $\frac{1}{3}$ da área total do retângulo.
Resposta: alternativa **b**.

12. Atividade de construção de horta. Ainda que não seja viável a implementação das propostas dos estudantes, a atividade possibilita que eles reflitam sobre o meio em que vivem e percebam como os conceitos de área e de perímetro são úteis em propostas práticas.

13. O raio *r*, em dm, é dado por:
$S = \pi r^2 \Rightarrow 100\pi = \pi \cdot (r)^2 \Rightarrow r = \pm 10$
Como *r* é o raio da circunferência, desconsidera-se $r = -10$ e, além disso, como o diâmetro é o dobro do raio, $d = 20$ dm.

14. De acordo com as informações contidas no enunciado, pode-se afirmar que:
$S_{quadrado} = \ell^2$ e $S_{círculo} = \frac{\pi \ell^2}{16}$

$$S_{restante} = \ell^2 - \frac{\pi \ell^2}{16} = \frac{16\ell^2 - \pi\ell^2}{16} = \left(\frac{16 - \pi}{16}\right)\ell^2 \simeq 0,80\ell^2$$

Logo, a área restante equivale a aproximadamente 80% da área do quadrado.
Resposta: alternativa **d**.

15. Como 1300 m = 13 hm, a área em hm² irrigada por esse pivô é:
$S = \pi r^2 \Rightarrow S \simeq 3,14(13)^2 = 530,66$.
Como 1 hm² = 1 ha, então o pivô consegue irrigar uma área aproximada de 530,660 ha.

16. A área da região azul é igual à área da região branca, ou seja, é a metade da circunferência:

$$S = \frac{\pi \cdot (2r)^2}{2} = 2\pi r^2$$

Como $r = 10$ cm, tem-se que *S*, em cm², é:
$S \simeq 2 \cdot 3,14 \cdot 10^2 \Rightarrow S \simeq 628$
Logo, a área azul mede aproximadamente 628 cm².

17. O raio de uma *pizza* de 8 pedaços mede 16 cm. Precisa-se determinar o diâmetro da nova *pizza* de 12 pedaços, de modo que a área de cada pedaço seja igual à área de um pedaço da *pizza* antiga, ou seja:

$$\frac{\pi 16^2}{8} = \frac{\pi r^2}{12} \Rightarrow r = \pm\sqrt{384} \simeq \pm 20$$

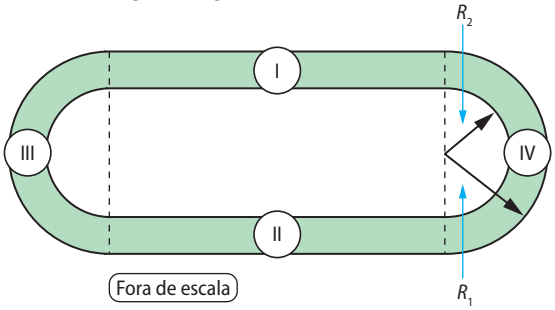
Como *r* é o raio do círculo, desconsidera-se $r = -20$. Logo, o diâmetro da *pizza* nova é aproximadamente 40 cm.
Resposta: alternativa **b**.

18. A área *S* da coroa circular, em m², é:
$S = \pi(R_2^2 - R_1^2) \Rightarrow S = \pi(5^2 - 3^2) \Rightarrow S = 16\pi$

19. Sabe-se que $30° = \frac{360°}{12}$. Assim, a área *S*, em cm², destacada em verde na figura é:

$$S = \frac{S_{coroa\ circular}}{12} \Rightarrow S = \frac{1}{12} \cdot \pi\,(50^2 - 40^2) \Rightarrow S = 75\pi$$

20. De acordo com as informações contidas no enunciado, pode-se considerar a figura a seguir:



EDITORIA DE ARTE

(I) e (II) são retângulos cujas dimensões são 100 m e 3 m.
(III) e (IV) representam uma coroa circular de raios: $R_1 = 23$ m e $R_2 = 20$ m
A área *S*, em m², da calçada é a soma da área das regiões I, II, III e IV.
$S = 2 \cdot 100 \cdot 3 + \pi(23^2 - 20^2)$
$S = 600 + 129\pi \Rightarrow S \simeq 1005,06$
O custo, em reais, é dado por $50 \cdot S$. Logo, o custo total da obra será de aproximadamente R$ 50.253,00.

21. Do enunciado, tem-se $R + r = 1$, pois os círculos com centro em vértices consecutivos do quadrado são tangentes e, portanto, $R + r$ corresponde à medida do lado desse quadrado. É possível aferir que $R + R$ corresponde à diagonal do quadrado, portanto:

$$2R = \sqrt{2} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Portanto:

$$r = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$$

Assim, a área sombreada *S* é dada por:

$$S = 1 - \frac{\pi(R^2 + r^2)}{2} = 1 - \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2} + 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = 1 + \pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)$$

Resposta: alternativa **e**.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

22. De acordo com as informações contidas no enunciado, pode-se afirmar que a medida do raio e a do apótema, em cm, são dadas por:

a) $\ell = r\sqrt{3} \Rightarrow 6 = r\sqrt{3} \Rightarrow r = 2\sqrt{3}$

b) $m = \frac{r}{2} \Rightarrow m = \sqrt{3}$

23. A medida do lado do hexágono regular é igual ao raio da circunferência circunscrita, isto é, $\ell = r$. Por isso, o hexágono regular pode ser decomposto em seis triângulos equiláteros congruentes cujos lados medem 2 cm.

A área de cada um desses triângulos, em cm², é dada por:

$$S = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow S = \sqrt{3}$$

Logo, a área S_H do hexágono, em cm², será:

$S_H = 6\sqrt{3} \Rightarrow S_H \simeq 6 \cdot 1{,}73 = 10{,}38 \Rightarrow S \simeq 10{,}38$.

24. De acordo com as informações contidas no enunciado, pode-se afirmar que as áreas das figuras, em cm², são:

a) $S = 5 \cdot \frac{10 \cdot 8}{2} \Rightarrow S = 200$

b) $S = 6 \cdot \frac{20^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow S = 600\sqrt{3}$

25. A área S_q de cada quadrado e a área S_h do hexágono, em cm², são iguais a:

$S_q = \ell^2 = 10^2 = 100$

$S_h = 6 \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = 150\sqrt{3} \simeq 259{,}5$

Logo, a área total S da figura, em cm², é de aproximadamente: $S = 6S_q + S_h = 859{,}5$.

26. Considerando m, ℓ e p as respectivas medidas do apótema, do lado e do semiperímetro do triângulo, dadas, em cm, e S sua área, dada, em cm², tem-se:

$m = \frac{r}{2} \Rightarrow 3 = \frac{r}{2} \Rightarrow r = 6$

$\ell = r\sqrt{3} \Rightarrow \ell = 6\sqrt{3}$

$p = \frac{3}{2} \cdot \ell \Rightarrow p = \frac{3}{2} \cdot 6\sqrt{3} \Rightarrow p = 9\sqrt{3}$

$S = p \cdot m = 9\sqrt{3} \cdot 3 = 27\sqrt{3}$

27. **a)** Sejam L a medida do lado do quadrado circunscrito à circunferência e ℓ medida do lado do quadrado inscrito a ela. Então, $L = 2r$ e $\ell = r\sqrt{2}$.

$\frac{4\ell}{4L} = \frac{r\sqrt{2}}{2r} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $S_i = (r\sqrt{2})^2 = 2r^2$ e $S_c = (2r)^2 = 4r^2$

$\frac{S_i}{S_c} = \frac{2r^2}{4r^2} = \frac{1}{2}$

28. Sabe-se que $m = 6\sqrt{3}$ cm.

a) Como $\ell = r$, a medida de ℓ em cm será:

$m = \frac{r\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 6\sqrt{3} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \ell = 12$

b) A área S_h do hexágono de lado ℓ corresponde a seis vezes a área $S_\triangle$ de um triângulo equilátero de mesmo lado. Assim, a medida dessa área, em cm², é de:

$S_h = 6 \cdot S_\triangle = 6 \cdot \frac{12^2\sqrt{3}}{4} = 216\sqrt{3}$

29. Para calcular a área sombreada, deve-se subtrair a área do quadrado de lado a u.c. da área da circunferência circunscrita a esse quadrado. A diagonal desse quadrado será $a\sqrt{2}$ u.c. e, portanto, o raio da circunferência mede $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ u.c. Assim, a área S_c da circunferência, em u.a., será:

$S_c = \pi \cdot \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{2}$

A área do quadrado é a^2 u.a.; assim, a área sombreada, S_s, em u.a., será:

$S_s = \frac{\pi a^2}{2} - a^2 = a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$

30. Como o perímetro do polígono regular considerado é dado pelo produto entre a medida do lado e 10, o polígono possui 10 lados. Portanto, é um decágono regular.

31. Resposta pessoal. Exemplo de problema: Qual é a área de um hexágono regular cujo perímetro mede 50 cm?

Como o perímetro é 50 cm, o semiperímetro é 25 cm e a medida do lado é $\frac{50}{6}$ cm. Portanto, a área S, em cm², é:

$S = 25 \cdot \frac{50}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1250\sqrt{3}}{12} \Rightarrow S = \left(104 + \frac{1}{6}\right)\sqrt{3}$

32. **a)** A medida m do apótema, em cm, é dada por:

$m = \frac{r\sqrt{3}}{2} \Rightarrow m = \frac{4\sqrt{3}}{2} \Rightarrow m = 2\sqrt{3}$

b) Sejam $S_{hex.}$ a área do hexágono $ABCDEF$ e S_{setor} a área de cada setor circular. Então, a área verde S, em cm², é dada por:

$S = S_{hex.} - 2 \cdot S_{setor}$

$S_{hex.} = 6 \cdot \frac{4 \cdot 2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S_{hex.} = 24\sqrt{3}$

$S_{setor} = \frac{120 \cdot \pi \cdot 4^2}{360} \Rightarrow S_{setor} = \frac{16\pi}{3}$

$S = 24\sqrt{3} - 2 \cdot \frac{16\pi}{3} \Rightarrow S = \frac{72\sqrt{3} - 32\pi}{3}$

33. A área S_h do hexágono regular é igual a seis vezes a área $S_\triangle$ do triângulo equilátero de mesmo lado. Logo a área S_h, em cm², é igual a:

$S_h = 6 \cdot S_\triangle = 6 \cdot \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 54\sqrt{3}$

34. **a)** Como AO equivale à medida do raio da circunferência em que o triângulo equilátero ABC está inscrito, então a medida ℓ do lado, em cm, é:

$\ell = \sqrt{48} \cdot \sqrt{3} = 12$

b) A área limitada pela circunferência de centro O, em cm², é:

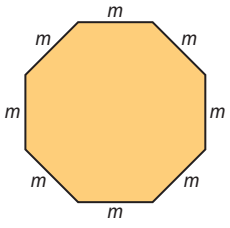
$S_c = 48\pi$

O triângulo ABC tem altura equivalente a $6\sqrt{3}$ cm. Portanto, sua área é $36\sqrt{3}$ cm². Assim, a área cinza, em cm², será:

$S = 48\pi - 36\sqrt{3} \simeq 88$

35. De acordo com as informações contidas no enunciado, pode-se afirmar que:

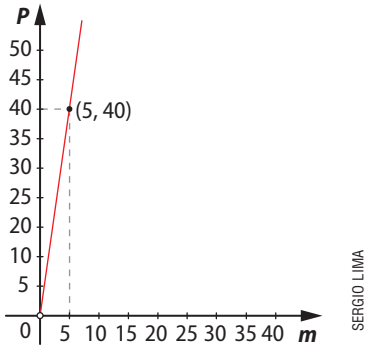
a)



EDITORIA DE ARTE

b) Como o octógono regular possui 8 lados congruentes, o perímetro P é dado por: $P(m) = 8m$.

c)

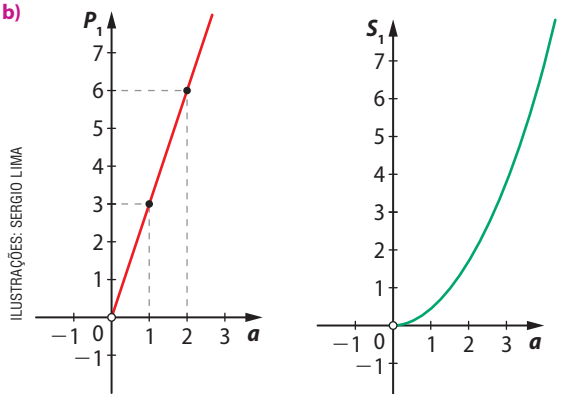


SERGIO LIMA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

36. **a)** A Figura **1** é o polígono regular de 3 lados (triângulo equilátero), cujo perímetro é 3 vezes a medida de seu lado. Logo, $P_1(a) = 3a$. Conforme estudado, a área de um triângulo equilátero de lado a é $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; logo, $S_1(a) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Em ambas as funções, devemos considerar para o domínio os valores de a reais positivos (pois a indica a medida do lado).

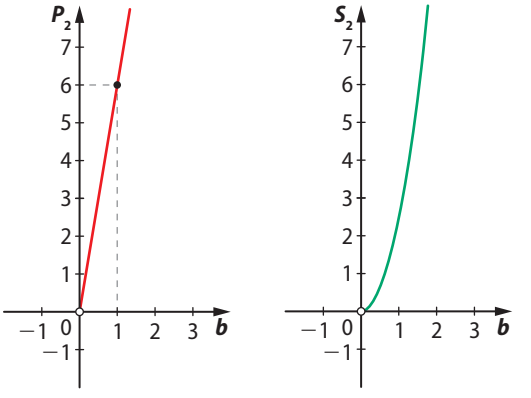
b)



ILUSTRAÇÕES: SERGIO LIMA

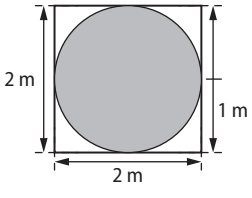
c) A Figura **2** é o polígono regular de 6 lados (hexágono regular), cujo perímetro é 6 vezes a medida de seu lado. Logo, $P_2(b) = 6b$. Conforme estudado, a área de um hexágono regular de lado b é $\frac{3b^2\sqrt{3}}{2}$; logo, $S_2(b) = \frac{3b^2\sqrt{3}}{2}$. Em ambas as funções, devemos considerar para o domínio os valores de b reais positivos (pois b é medida de lado).

d)



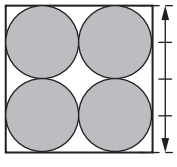
37. Calcula-se a área do material utilizada em cada caso. Considerando as áreas em m² e a medida do raio em m, tem-se:

- tampa grande



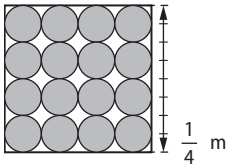
raio do círculo: 1 m
área utilizada, em m²: $\pi \cdot r^2 = \pi$
sobra, em m²: $2^2 - \pi = (4 - \pi)$

- tampa média



raio do círculo: $\frac{1}{2}$ m
área utilizada, em m²:
$4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \pi$
sobra, em m²: $2^2 - \pi = (4 - \pi)$

- tampa pequena

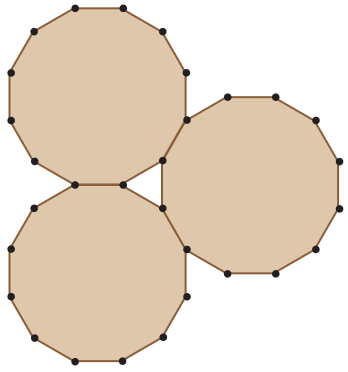


raio do círculo: $\frac{1}{4}$ m
área utilizada, em m²: $16 \cdot \pi \cdot r^2 = 16 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \pi$
sobra, em m²: $2^2 - \pi = (4 - \pi)$

Portanto, as três entidades recebem a mesma quantidade de material.
Resposta: alternativa **e**.

38. Sim, pois cada ângulo interno do hexágono regular mede 120° e, do triângulo equilátero, mede 60°. Dessa maneira, $2 \cdot 120° + 2 \cdot 60° = 240° + 120° = 360°$, que é a soma necessária para obter o ladrilhamento.

39. **a)** Ao unir dois dodecágonos regulares e congruentes a fim de obter um ladrilhamento, obtém-se um ângulo de 300°, pois cada ângulo interno do dodecágono regular mede 150°. Portanto, a região não preenchida entre esses dois dodecágonos forma um ângulo de 60°, que não comporta outro dodecágono.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

b) Para obter o ladrilhamento, pode-se inserir um triângulo equilátero com lado congruente ao do dodecágono regular, pois o triângulo equilátero tem ângulos internos de 60°. Logo: $150° + 150° + 60° = 360°$.

40. A única opção cujas medidas dos ângulos internos são divisores de 360° é o hexágono regular, cujo ângulo interno mede 120°.
Resposta: alternativa **e**.

41. Tomando um vértice qualquer do ladrilhamento, há quatro polígonos que o contêm: um triângulo equilátero, dois quadrados e um hexágono regular. Começando pelo triângulo equilátero e seguindo no sentido anti-horário, temos a seguinte ordem: triângulo equilátero, quadrado, hexágono regular e quadrado, que se traduz na notação (3.4.6.4).
Resposta: alternativa **e**.

42. Para obter ladrilhamento, os ângulos internos dos polígonos com vértice em comum devem somar 360°.
Pode-se utilizar a expressão $n \cdot 135° + m \cdot x = 360°$, em que n é o número de octógonos utilizados, com $n = 1$ ou $n = 2$.
Se $n = 1$, então o outro tipo de polígono a ser utilizado deve ter ângulos internos que possam somar exatamente 225° (não é possível).
Se $n = 2$, o outro tipo de polígono utilizado deve ter ângulos internos que possam somar 90° (o quadrado).
Portanto, é possível ladrilhar com octógonos e quadrados.
Resposta: alternativa **b**.

43. Observando a figura **2**, tem-se:
$2 \cdot 120° + 108° + x = 360° \Rightarrow x = 12°$
Resposta: alternativa **b**.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Atividades complementares

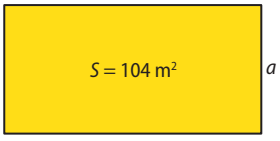
1. Como a área do quadrado e do triângulo devem ser iguais, tem-se:
$x^2 = \frac{x(10 - x)}{2} \Rightarrow 3x^2 - 10x = 0 \Rightarrow x(3x - 10) = 0$

Resolvendo as equações, obtém-se $x' = 0$ ou $x'' = \frac{10}{3}$.
Como x é a medida de um segmento, $x = 0$ não é uma solução.
Portanto: $x = \frac{10}{3}$.
Resposta: alternativa **c**.

2. No triângulo ABN, como $AM = MB$ e a altura relativa a esses lados em relação ao vértice N é a mesma, então:
$S_{AMN} = S_{MBN} = t$
No triângulo ABC, como $AN = NC$ e a altura relativa a esses lados em relação ao vértice B é a mesma, então: $S_{ABN} = S_{NBC}$.
Desse modo, a área do triângulo ABC é igual a:
$S_{ABC} = S_{ABN} + S_{NBC} = 2 \cdot S_{ABN} = 2 \cdot (S_{AMN} + S_{MBN}) = 4t$
Resposta: alternativa **c**.

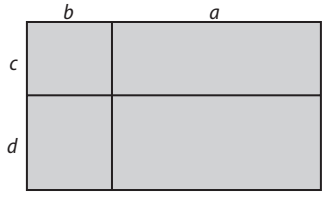
3. Seja x a medida do lado do quadrado menor e y, a do maior. Então:
$0{,}48x^2 = 0{,}27y^2 \Rightarrow 48x^2 = 27y^2 \Rightarrow \frac{x^2}{y^2} = \frac{27}{48} = \frac{9}{16} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}$
Resposta: alternativa **a**.

4. Considerando as informações do enunciado, obtém-se o retângulo a seguir:



$S = (2a - 3)a \Rightarrow 104 = 2a^2 - 3a \Rightarrow 2a^2 - 3a - 104 = 0$
Resolvendo a equação do 2º grau, obtêm-se as raízes
$a' = -6{,}5$ e $a'' = 8$.
Como a representa o lado de um polígono, então deve-se desconsiderar a solução negativa.
$2a - 3 = 2 \cdot 8 - 3 = 13$
A medida do comprimento é 13 m e, portanto: $12\text{ m} < 13\text{ m} < 14\text{ m}$
Resposta: alternativa **b**.

5. Pode-se representar a situação por meio da seguinte figura:



Sabe-se que: $ac = 9$; $bc = 3$; $bd = 8$.
Assim, obtém-se: $a = 3b$ e $d = \frac{8}{b}$.
A área S da sala será dada pelo produto entre a e d.
$S = 3b \cdot \frac{8}{b} = 24$

Portanto, a área total é 44 m², pois $24 + 9 + 8 + 3 = 44$.
Resposta: alternativa **c**.

6. Considerando os dados do enunciado, pode-se concluir que R e H, em km², são dados por:
$R = 1{,}5 \cdot 3 = 4{,}5 \Rightarrow R = 4{,}5$
$\frac{R}{H} = \frac{9}{5} \Rightarrow \frac{4{,}5}{H} = \frac{9}{5} \Rightarrow H = \frac{4{,}5 \cdot 5}{9} = 2{,}5$
Soma das áreas, em km², é: $R + H = 4{,}5 + 2{,}5 = 7$.
Como 1 km² equivale a 10^6 m², então 7 km² equivale a $7 \cdot 10^6$ m².
Portanto:
$\left.\begin{array}{l} 1\text{ hectare} \text{ ——— } 10^4\text{ m}^2 \\ y \text{ ——— } 7 \cdot 10^6\text{ m}^2 \end{array}\right\} \Rightarrow y = \frac{7 \cdot 10^6}{10^4} = 7 \cdot 10^2 = 700$
Como com 1 hectare de cana é possível produzir 8 000 litros de etanol, então com 700 hectares será possível produzir 5 600 000 litros ($700 \cdot 8000$), ou seja, $5{,}6 \cdot 10^6$ litros de etanol.
Resposta: alternativa **d**.

7. A área do quadrado $FGLM$ é igual à área do paralelogramo $HILM$, pois ambos compartilham a base $\overline{LM}$ e a altura $\overline{FM}$. Como o triângulo MKL é comum ao quadrado e ao paralelogramo, então a área da região 1 equivale à da região 2. Dessa maneira, Miguel usaria $\frac{6}{7}$ de sua tinta para pintar as duas regiões e sobraria $\frac{1}{7}$.
Resposta: alternativa **d**.

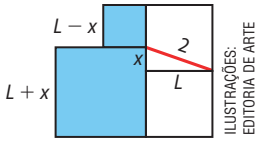
8. A área S da região vermelha, em cm², é:
$S = \left(\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 3^2 + \frac{3}{4} \cdot \pi \cdot (4^2 - 3^2)\right) = \frac{30\pi}{4}$
O raio r procurado, em cm, é igual a: $\pi r^2 = \frac{30\pi}{4} \cdot r = \frac{\sqrt{30}}{2}$.
Resposta: alternativa **a**.

9. Como o máximo que o dono da loja pagará por cartão é R$ 0,80, a maior área possível para cada cartão é 80 cm². Considere as seguintes áreas, em cm²:
$S_{\text{triângulo}} = \frac{12^2\sqrt{3}}{4} \simeq 61{,}2$
$S_{\text{quadrado}} = 8^2 = 64$
$S_{\text{retângulo}} = (11 \cdot 8) = 88$
$S_{\text{hexágono}} = \frac{3 \cdot 6^2\sqrt{3}}{2} \simeq 91{,}8$
$S_{\text{círculo}} = \pi \cdot \left(\frac{10}{2}\right)^2 \simeq 75$
Logo, a maior área útil de cartão disponível pelo custo de até R$ 0,80 é o modelo cuja face útil para impressão corresponde ao formato de um círculo de diâmetro 10 cm.
Resposta: alternativa **e**.

10. Considerando ℓ como a medida do lado do hexágono $ABCDEF$, a medida do apótema m será: $m = \ell \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Portanto, a medida x do lado do hexágono $GHIJKL$ será:
$x = \ell \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$
Assim: $\frac{S_2}{S_1} = \frac{9\ell^2\sqrt{3}}{32} \cdot \frac{2}{3\ell^2\sqrt{3}} = \frac{3}{16}$.
Resposta: alternativa **e**.

11. Para calcular a medida EF, podemos considerar os triângulos semelhantes APF e ABC. Assim, temos:
$\frac{AP}{AB} = \frac{PF}{BC} \Rightarrow \frac{AP}{AB} = \frac{8 - EF}{BC} \Rightarrow \frac{x}{12} = \frac{8 - EF}{8} \Rightarrow EF = \frac{24 - 2x}{3}$
A área $A(x)$ de $ADEF$ é:
$A(x) = \frac{(DA + EF) \cdot AP}{2} = \frac{\left(8 + \frac{24 - 2x}{3}\right) \cdot x}{2} = 8x - \frac{x^2}{3}$
Assim, $A(x) = 8x - \frac{x^2}{3}$, para $0 \leqslant x \leqslant 12$.
Resposta: alternativa **d**.

12. Considere x e L os catetos do triângulo retângulo de hipotenusa 2, conforme mostra a figura.

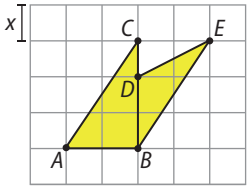


ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Pelo teorema de Pitágoras, temos:
$x^2 + L^2 = 2^2 \Rightarrow x^2 + L^2 = 4$
A soma S das áreas dos quadrados azuis é dada por:
$S = (L + x)^2 + (L - x)^2 = 2(L^2 + x^2) = 2 \cdot 4 = 8$
Resposta: alternativa **d**.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

13. Seja x a medida do lado de cada quadradinho da malha, a área do polígono amarelo é dada pela soma das áreas dos triângulos ABC e BDE.



Logo:

$$\frac{2x \cdot 3x}{2} + \frac{2x \cdot 2x}{2} = 30 \Rightarrow x^2 = 6$$

Resposta: alternativa **e**.

14. Considere x e y as dimensões reais do parque. Então:
$x = 2 \cdot 5\,000 = 100$
$y = 8 \cdot 5\,000 = 400$
A área real, em m², é: $100 \cdot 400 = 40\,000$.
Resposta: alternativa **a**.

15. $(12 - x) \cdot 1{,}5 \geqslant 72 \Rightarrow x \leqslant -36$
Resposta: alternativa **d**.

16. **a)** Note que $x > 0$, pois é o comprimento da base $\overline{AB}$, e $x \leqslant 24$ por estar sobre a base do retângulo R. Além disso, para $0 < x \leqslant 24$, a altura do triângulo é menor ou igual a altura do retângulo. Logo, a construção pode ser realizada para $0 < x \leqslant 24$.

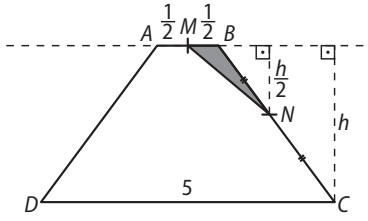
b) Como $BC = \frac{x}{2}$, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$AC^2 = x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow AC = \frac{x\sqrt{5}}{2}$$

c) A área do triângulo ABC é igual a 64, quando:

$$\frac{x \cdot \left(\frac{x}{2}\right)}{2} = 64 \Rightarrow x = 16$$

17. Como N é ponto médio de $\overline{BC}$, a distância de N até a reta suporte do lado $\overline{AB}$ é $\frac{h}{2}$, metade da altura h do trapézio, como mostra a figura. Além disso, $\frac{h}{2}$ é também a altura do triângulo BMN relativa à base $\overline{BM}$. Assim, pela área do triângulo BMN, temos:



$$\frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2}}{2} = 1 \Rightarrow h = 8$$

Portanto, a área S do trapézio é:

$$S = \frac{(5 + 1) \cdot 8}{2} = 24$$

Portanto, a área do trapézio é 24 u.a.
Resposta: alternativa **d**.

18. A diferença entre as áreas das duas *pizzas* é, em cm²:
$40^2 - 3{,}14 \cdot 20^2 = 344$
Resposta: alternativa **c**.

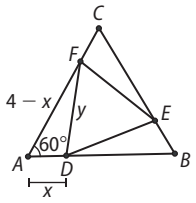
19. A área B da região em branco, em cm², é: $B = 12 \cdot 10 - 58 = 62$.
A área H da região hachurada, em cm², é: $H = 13 \cdot 11 - 62 = 81$.
Resposta: alternativa **e**.

20. Seja x o número máximo de alunos que satisfaz as condições do enunciado: $x = \frac{8 \cdot 6}{1{,}5} = 32$.
Resposta: alternativa **c**.

21. Pela lei dos cossenos, temos:
$y^2 = x^2 + (4 - x)^2 - 2 \cdot x \cdot (4 - x) \cdot \cos 60°$
$y^2 = 3x^2 - 12x + 16$
A área $A(x)$ do triângulo DEF é:

$$A(x) = \frac{y^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}(3x^2 - 12x + 16)$$

Resposta: alternativa **e**.



Capítulo 8 • Geometria Espacial de Posição

Atividades

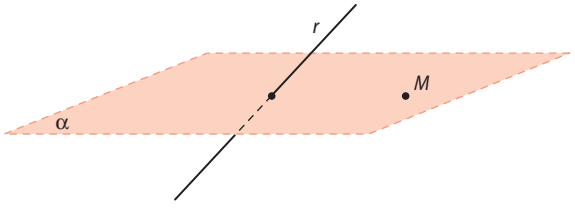
1. Completando as lacunas, obtém-se:
I. Dois pontos distintos determinam uma única reta. (Pelo postulado $\mathbf{R}_2$.)
II. Em um plano, estão contidas infinitas retas. (Pelo postulado $\mathbf{P}_1$.)
III. Uma reta em um plano divide-o em duas regiões, denominadas semiplanos. (Pelo postulado $\mathbf{P}_4$.)
IV. Por uma reta passam infinitos planos. (Pelo postulado $\mathbf{P}_6$.)
V. Pode-se determinar um plano de quatro maneiras. (Pelo postulado $\mathbf{P}_3$ e pelos teoremas **1**, **2** e **3** apresentados.)
Ordem das palavras que preenchem as lacunas:
dois – infinitas – semiplanos – infinitos – quatro
Resposta: alternativa **c**.

2. Três retas distintas, duas a duas paralelas entre si, determinam um plano caso as retas sejam coplanares, ou três planos, se as retas não forem coplanares.

3. Sejam A, B, C e D os pontos. Tem-se três casos: Se A, B, C, D são colineares, eles não determinam um plano. Se A, B, C, D são coplanares, eles determinam um único plano. Se ABC, ABD, ACD e BCD são quatro planos (três pontos não colineares sempre determinam um plano), então tem-se quatro planos.

4. Considerando as definições, têm-se as possíveis respostas:
a) Uma resposta possível: $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{EI}$.
b) Uma resposta possível: $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$.
c) Uma resposta possível: $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BA}$, $\overleftrightarrow{FH}$ e $\overleftrightarrow{HI}$.
d) Uma resposta possível: $\overleftrightarrow{CE}$ e $\overleftrightarrow{HI}$, $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{DE}$.

5. **a)** Segundo o enunciado, tem-se:



EDITORIA DE ARTE

b) Falsa. Segundo o postulado $\mathbf{R}_2$, pelo ponto de intersecção da reta r com o plano e o ponto M passa apenas uma reta, definida por esses pontos.

6. Considerando a ilustração do enunciado, conclui-se:
a) $\overleftrightarrow{BF}$ é secante ao plano ABC, sendo o ponto B a intersecção entre eles.
b) $\overleftrightarrow{FG}$ está contida no plano FGH.
• Resposta pessoal. Exemplo de pergunta: Qual é a posição relativa da reta $\overleftrightarrow{BF}$ em relação aos planos ABE e CGF?
A reta $\overleftrightarrow{BF}$ é a intersecção entre os dois planos, ou seja, está contida nos planos ABE e CGF.

ILUSTRAÇÕES: SERGIO LIMA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

7. Considerando a ilustração do enunciado, conclui-se:
- **a)** Os planos *VAB* e *VBC* são secantes, sendo a reta $\overleftrightarrow{VB}$ a intersecção entre eles.
- **b)** A reta $\overleftrightarrow{BC}$ é a intersecção entre os planos *ABC* e *VBC*.
- **c)** Não há planos paralelos na figura.

8. **01)** Incorreta. No espaço, duas retas podem ser paralelas (distintas ou coincidentes), concorrentes (perpendiculares ou oblíquas) ou reversas.
02) Incorreta. Para que um ponto e uma reta determinem um único plano, é necessário que o ponto não pertença à reta.
04) Correta. Há infinitos planos concorrentes cuja intersecção é uma reta dada.
08) Correta. Se uma reta tem um único ponto em comum com dois planos distintos, então esses dois planos não são paralelos, sendo, portanto, secantes.
16) Incorreta. Para que três pontos distintos determinem um plano, eles não podem ser colineares.
Logo, são corretas as alternativas **04** e **08**.

9. Cada aresta lateral da pirâmide é reversa a exatamente 4 arestas da base (aquelas que não compartilham extremidade com a aresta lateral) e não é reversa a nenhuma outra aresta lateral (pois têm o vértice da pirâmide como intersecção). Como há 6 arestas laterais, a quantidade de pares de arestas reversas na pirâmide é igual a: $6 \cdot 4 = 24$.
Resposta: alternativa **b**.

10. **a)** Incorreta. A reta *s* pode estar contida no plano α ou ser paralela a ele.
b) Incorreta. Segundo o enunciado, a reta *t* é secante ao plano β, logo a interseção entre *t* e β não é vazia.
c) Incorreta. Como o ponto *P* pertence à reta *r* e a reta *r* está contida no plano α, temos que *P* pertence a α.
d) Correta. Como o ponto *P* pertence à reta *r* e, também, à reta *t*, temos que a intersecção entre essas retas não é vazia ($r \cap t = \{P\}$).
Resposta: alternativa **d**.

11. Considerando as informações do enunciado, conclui-se:
- **a)** Uma resposta possível: $\overleftrightarrow{ST}$.
- **b)** Resposta esperada: Sim, o teorema **6** garante que a reta $\overleftrightarrow{BC}$ é paralela ao plano que contém o hexágono *PQRSTU*.
- **c)** Resposta esperada: O teorema **7** garante que os planos *BCRQ* e *EFUT* são paralelos.

12. **a)** Verdadeira. Essa afirmação decorre dos teoremas **5** e **7**.
b) Falsa. Podem-se conduzir infinitos planos, sendo apenas um deles paralelo ao plano dado.
c) Falsa. As retas, sendo reversas, estão contidas em planos distintos.
d) Falsa. Existem retas paralelas a dois planos concorrentes.
e) Falsa. Dois planos podem ser secantes, paralelos ou coincidentes.
Resposta: alternativa **a**.

13. **a)** Incorreta. As retas $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{CG}$ são perpendiculares entre si, pois elas se cruzam, formando um ângulo reto.
b) Correta. A reta $\overleftrightarrow{CF}$ não intersecta o plano (*ADH*); logo, a reta $\overleftrightarrow{CF}$ é paralela ao plano (*ADH*).
c) Incorreta. As retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{HF}$ são reversas.
d) Incorreta. A reta $\overleftrightarrow{AB}$ é paralela ao plano (*EFG*).
e) Incorreta. As retas $\overleftrightarrow{BF}$ e $\overleftrightarrow{DH}$ são paralelas entre si.
Resposta: alternativa **b**.

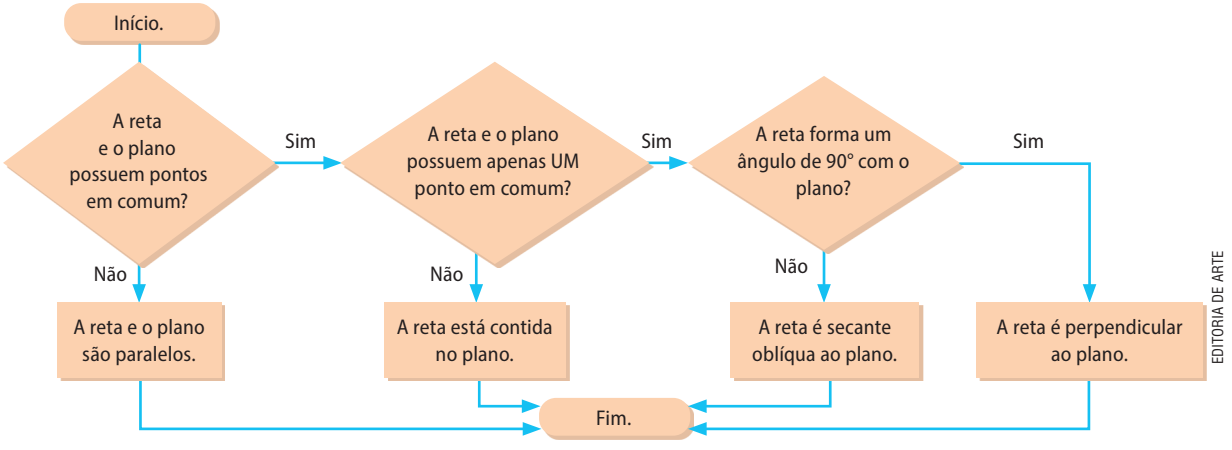
14. Analisando cada alternativa, conclui-se:
I. Falsa. Qualquer reta contida em um dos planos, distinta da intersecção e paralela a ela, não estará contida no outro plano.
II. Falsa. As retas podem ser paralelas a dois planos secantes.
III. Verdadeira.
IV. Verdadeira.
V. Falsa. Pode ser reversa.
As sentenças falsas são **I**, **II** e **V**.
Resposta: alternativa **b**.

15. Considerando a figura do enunciado, conclui-se que:
- **a)** *r* é paralela a *s*; *s* é perpendicular a *t*; *x* é reversa a *r*; *y* é reversa a *t*.
- **b)** A reta *t* é paralela ao plano α e a reta *r* é secante ao plano β.

16. De acordo com a figura do enunciado, a posição em cada item é:
- **a)** Perpendiculares, pois são lados adjacentes da mesma face do cubo.
- **b)** Reversas ortogonais, pois $\overleftrightarrow{BC}$ é paralela a $\overleftrightarrow{FG}$, que é perpendicular a $\overleftrightarrow{EF}$. Além disso, as retas $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ não possuem pontos em comum e estão contidas em planos distintos.

17. **I.** Falsa. As retas podem ser paralelas distintas.
II. Falsa. Se as retas *r* e *s* forem reversas, os triângulos não serão coplanares.
III. Verdadeira.
Resposta: alternativa **c**.

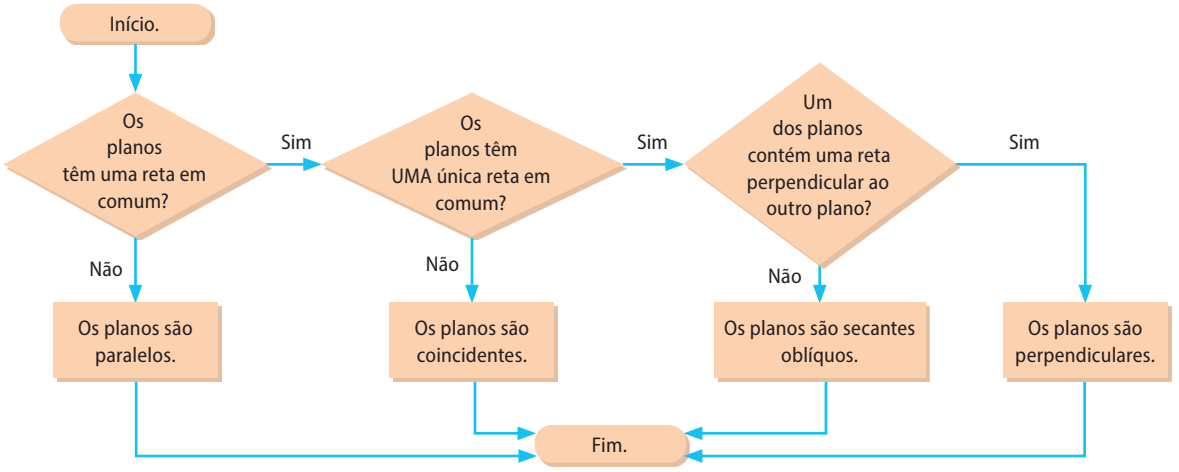
18.



EDITORIA DE ARTE

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

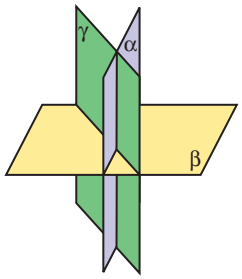
19.



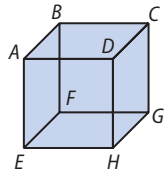
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

20. **I.** Verdadeira.
II. Falsa, pois as retas r e s podem ser reversas.
III. Falsa, pois a reta pode ser ortogonal a uma reta do plano.
Resposta: alternativa **e**.

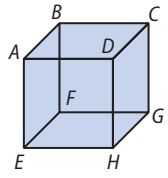
21. **a)** Falsa. Observe a ilustração a seguir.



Temos $\gamma \perp \beta$, mas γ e β são secantes a α.
b) Falsa. A reta pode ser paralela aos dois planos.
c) Falsa. Elas podem ser concorrentes ou também podem ser reversas, se pertencerem a planos distintos.
d) Falsa. Considerando o cubo representado a seguir.



$\overline{AB}$ é ortogonal a $\overline{DH}$, e $\overline{FG}$ é ortogonal a $\overline{AB}$, mas $\overline{FG}$ não é paralela a $\overline{DH}$.
e) Verdadeira. Considerando o cubo representado a seguir.



Retas paralelas a $\overleftrightarrow{AB}$: $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{EF}$, $\overleftrightarrow{GH}$ (são perpendiculares ou ortogonais a $\overleftrightarrow{DH}$).
Resposta: alternativa **e**.

22. Como o plano β é perpendicular ao plano α, a projeção de um conjunto de pontos de β em α será representada por um único ponto ou um segmento de reta. No caso da projeção de um polígono em β, que é formado por segmentos de reta não colineares, sua projeção será um segmento de reta.

23. **a)** A projeção ortogonal do ponto G sobre o plano ABC é o ponto C.
b) A projeção ortogonal do ponto A sobre o plano BCF é o ponto B.
c) A projeção ortogonal do ponto V_1 sobre o plano ABC é o ponto V_2.

24. A projeção do segmento $\overline{AB}$ no solo é o segmento $\overline{CE}$, pois o ponto C e o ponto E são as projeções ortogonais no plano do solo referentes ao ponto A e ao ponto B, respectivamente.
Resposta: alternativa **d**.

25. Ao projetar no plano α as trajetórias presentes na linha do equador, essas projeções serão curvas, enquanto ao projetar as trajetórias realizadas nos meridianos 1 e 2, essas projeções serão linhas retas.
Resposta: alternativa **e**.

26. **a)** Na projeção do elemento suspenso sobre o piso, apenas a largura e o comprimento são relevantes.
b) A projeção do elemento suspenso sobre o piso é um retângulo de dimensões 0,55 m e 0,25 m. Sua área é, em metro quadrado: $(0{,}55\text{ m}) \cdot (0{,}25\text{ m}) = 0{,}1375$.
c) O retângulo exterior ao piso tátil tem comprimento, em metro: $(0{,}60 + 0{,}55 + 0{,}60) = 1{,}75$.
O retângulo exterior ao piso tátil tem largura, em metro: $(0{,}60 + 0{,}25 + 0{,}60) = 1{,}45$.
O retângulo exterior ao piso tátil tem perímetro, em metro: $2 \cdot (1{,}75 + 1{,}45)\text{ m} = 6{,}4$.

27. **a)** Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo CDH, obtemos: $CH^2 = CD^2 + DH^2 \Rightarrow CH^2 = 12^2 + 5^2 \Rightarrow CH = \pm 13$
Como CH é a medida de uma distância, desconsidera-se o valor negativo e, assim, a distância entre os pontos C e H é igual a 13 cm.
b) A distância, em cm, entre o ponto D e a reta $\overleftrightarrow{AB}$ é $d = DA = 4$.
c) A distância, em cm, entre o ponto F e o plano ADH é $d = FE = 12$.
d) A distância, em cm, entre as retas reversas $\overleftrightarrow{GH}$ e $\overleftrightarrow{BF}$ é $d = FG = 4$.
e) A distância, em cm, entre as retas paralelas $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{EH}$ é $d = CH = 13$.
f) A distância, em cm, entre a reta $\overleftrightarrow{BE}$ e o plano CDG é $d = BC = 4$.
g) A distância, em cm, entre os planos paralelos ABC e EFG é $d = AE = 5$.

28. Tanto a distância de Q ao plano β quanto a distância dos pontos de r ao plano β coincidem com a distância entre os planos α e β, sendo, portanto, essas distâncias iguais.
Resposta: alternativa **c**.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

29. Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo PQP', obtemos: $(PQ)^2 = (PP')^2 + (QP')^2 \Rightarrow (\sqrt{89})^2 = 8^2 + (QP')^2 \Rightarrow QP' = \pm 5$.
Como QP' é a medida de uma distância, desconsidera-se o valor negativo e, assim, a distância entre os pontos P' e Q é 5 cm.
Resposta: alternativa **b**.

30. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABC, obtemos: $AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AC^2 = 6^2 + 24^2 = 612$.
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ACD, obtemos: $CD^2 = AD^2 + AC^2 \Rightarrow CD^2 = 8^2 + 612 \Rightarrow CD = 26$
Portanto: $CD = 26$ cm.
Resposta: alternativa **a**.

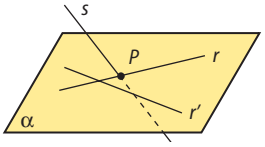
31. Como a área do quadrado $ABCD$ é 10 cm², a medida do lado desse quadrado é $\ell = \sqrt{10}$ cm.
A medida da diagonal do quadrado $ABCD$ é $\ell\sqrt{2}$. Logo:
$AC = (\sqrt{10}\text{ cm}) \cdot \sqrt{2} \Rightarrow AC = \sqrt{20}$ cm.
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ACP, obtemos: $AP^2 = AC^2 + CP^2 \Rightarrow AP^2 = (\sqrt{20})^2 + 4^2 \Rightarrow AP = \pm 6$.
Como AP é a medida de uma distância, desconsidera-se o valor negativo e, assim, a distância entre P e A é igual a 6 cm.
Resposta: alternativa **a**.

Atividades complementares

1. **a)** Verdadeira, pois três pontos distintos em uma circunferência são não colineares.
b) Verdadeira, pois os três pontos são colineares.
c) Verdadeira, pois estão contidos em duas retas concorrentes.
d) Falsa, um plano pode conter apenas uma reta secante à circunferência.
e) Verdadeira, pelo postulado de Euclides ou postulado das paralelas.
Resposta: alternativa **d**.

2. **a)** Falsa, pois $\overleftrightarrow{EH} \parallel \overleftrightarrow{AD}$.
b) Falsa, pois $\overleftrightarrow{EA} \parallel \overleftrightarrow{BF}$.
c) Falsa, pois $\overleftrightarrow{AH}$ é concorrente com $\overleftrightarrow{FH}$, que por sua vez também é concorrente com $\overleftrightarrow{CF}$.
d) Falsa, pois $\overleftrightarrow{AE} \parallel \overleftrightarrow{DH}$.
e) Verdadeira.
Resposta: alternativa **e**.

3. A partir do enunciado, obtém-se:

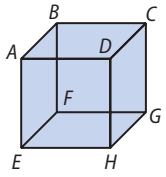


ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Qualquer reta de α é concorrente ou reversa a s.
Resposta: alternativa **e**.

4. **a)** Falsa, pois podem ser determinados infinitos planos cuja intersecção é uma única reta dada.
b) Falsa. Se as retas forem coincidentes podem-se determinar infinitos planos.
c) Falsa, pois, se os três pontos forem colineares, determina-se uma reta e, assim, infinitos planos que a contêm.
d) Verdadeira.
e) Falso, pois, como o ponto pertence à reta, tem-se como referência apenas a reta, portanto determinam-se infinitos planos que a contêm.
Resposta: alternativa **d**.

5. Pode-se considerar o cubo representado a seguir.
Considerando a aresta $\overline{AB}$ contida na reta suporte r e a aresta $\overline{EH}$ contida na reta suporte s, pode-se considerar que o lado $\overline{AE}$ estará contido na reta suporte t, ou seja, a reta que é uma perpendicular comum a r e a s.
Portanto, t é a reta suporte de uma aresta do cubo.
Resposta: alternativa **c**.



6. Como a escada é circular, então o corrimão também será circular. Os cinco pontos A, B, C, D e E sobre o corrimão estão igualmente espaçados. Além disso, A, P e E pertencem a uma mesma reta.
Como na escada a pessoa caminha deslizando a mão sobre o corrimão do ponto A até o ponto D, aproximadamente, $\frac{3}{4}$ da circunferência, a alternativa **c** é a que melhor representa a projeção ortogonal sobre o piso da casa (plano) do caminho percorrido pela mão dessa pessoa.
Resposta: alternativa **c**.

7. **a)** Incorreta. Caso os pontos sejam colineares, os planos podem ser secantes.
b) Incorreta. Os planos α e β podem ser secantes.
c) Incorreta. Se dois planos distintos são perpendiculares a uma mesma reta, então eles são paralelos e não possuem nenhum ponto em comum.
d) Correta. De fato, se duas retas são perpendiculares a um plano, então elas são paralelas entre si.
e) Incorreta. Toda reta paralela a um plano é necessariamente paralela ou reversa às retas desse plano.
Resposta: alternativa **d**.

8. **a)** Incorreta. A reta r pode estar contida em β.
b) Incorreta. Se a projeção ortogonal da reta r no plano β não tiver um ponto em comum à reta s, então r e s são reversas.
c) Correta. As retas r e s podem ser concorrentes ou reversas.
d) Incorreta. A reta s pode também estar contida em um plano paralelo ao plano α.
e) Incorreta. A reta r pode estar contida em β e ser perpendicular à reta s.
Resposta: alternativa **c**.

9. A projeção de A até B será um arco da circunferência e a projeção de B até C será um segmento de reta.
Resposta: alternativa **e**.

10. As projeções ortogonais das letras serão retangulares de mesma largura, com espaçamento idênticos entre elas. A de maior comprimento é correspondente à letra **N**. As com os comprimentos praticamente de mesmas medidas são correspondentes às letras **P** e **E**. A de menor comprimento será o da letra **I**.
Resposta: alternativa **e**.

11. Pela vista superior, sabemos que a torre tem o formato circular, pois são ilustrados três círculos concêntricos. Pelas vistas frontal e de perfil, sabemos que o círculo maior da torre é a sua base, o círculo do meio é a sua parte superior e o menor círculo indica que a torre possui um furo interno na forma de um cilindro.
Resposta: alternativa **e**.

12. A projeção do caminho de A até B é um segmento de reta; a projeção do arco circular BCD é um arco congruente ao arco BCD; a projeção do caminho de D até E é um segmento de reta de modo que os pontos A, B, D e E sejam colineares.
Resposta: alternativa **c**.

13. As alternativas **a** e **b** possuem projeções ortogonais não alinhadas na malha quadriculada. A projeção ortogonal da vista frontal na alternativa **c** está errada, e a projeção ortogonal no plano do chão da alternativa **d** está errada.
Resposta: alternativa **e**.

14. O telhado da casa da figura **2** possui quedas para as laterais e uma queda para a frente da casa, e a sua projeção ortogonal no plano do chão será um retângulo.
Resposta: alternativa **b**.