ÁREA DO CONHECIMENTO:
MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

BONJORNO
GIOVANNI JR
FELIPE FUGITA

MANUAL DO PROFESSOR

MATEMÁTICA POR TODA PARTE

3º ANO
ENSINO MÉDIO

CÓDIGO DA COLEÇÃO
0039P26010102814
PNLD EM 2026-2029 • CATEGORIA 1
Material de divulgação
Versão em processo de avaliação

FTD

MANUAL DO PROFESSOR

MATEMÁTICA POR TODA PARTE

JOSÉ ROBERTO BONJORNO

Licenciado em Pedagogia pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras "Professor Carlos Pasquale".

Bacharel e licenciado em Física pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP).

Professor de Matemática e Física em escolas do Ensino Fundamental e Médio desde 1973.

JOSÉ RUY GIOVANNI JÚNIOR

Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP).

Professor e assessor de Matemática em escolas do Ensino Fundamental e Médio desde 1985.

FELIPE FUGITA

Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP).

Mestre em Matemática pela Universidade Federal do ABC (UFABC).

Coordenador e professor de Matemática do Ensino Fundamental e Médio.

Autor de obras didáticas de Matemática do Ensino Fundamental e Médio.

3º ANO
ENSINO MÉDIO

ÁREA DO CONHECIMENTO: MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

FTD

1ª edição
São Paulo – 2024

Matemática Por toda parte – Matemática – 3º ano (Ensino Médio)

Direção-geral Ricardo Tavares de Oliveira
Direção de conteúdo e negócios Cayube Galas
Direção editorial adjunta Luiz Tonolli
Gerência editorial Roberto Henrique Lopes da Silva e Nubia de Cassia de M. Andrade e Silva
Edição Cibeli de Oliveira Chibante Bueno (coord.)
Alessandra Maria Rodrigues da Silva, Bianca Cristina Fratelli, Emike Luzia Pereira Correia, Janaina Bezerra Pereira, Juliana Montagner, Marceli Megumi Hamazi Iwai, Rizia Sales Carneiro, Wagner Jose Razvickas Filho
Preparação e revisão Maria Clara Paes (coord.)
Ana Carolina Rollemberg, Cintia R. M. Salles, Denise Morgado, Desirée Araújo, Eloise Melero, Kátia Cardoso, Márcia Pessoa, Maura Loria, Veridiana Maenaka, Yara Affonso
Produção de conteúdo digital João Paulo Bortoluci
Gerência de produção e arte Ricardo Borges
Design Andréa Dellamagna (coord.)
Sergio Cândido (criação), Ana Carolina Orsolin, Andréa Lasserre
Projeto de capa Sergio Cândido
Imagem de capa NIKADA/GETTY IMAGES
Arte e produção Isabel Cristina Corandin Marques (coord.)
André Gomes Vitale, Débora Jóia, Jorge Katsumata, Kleber B. Cavalcante, Rodrigo Bastos Marchini, Maria Paula Santo Siqueira (Assist.)
Diagramação WYM Design
Coordenação de imagens e textos Elaine Bueno Koga
Licenciamento de textos Erica Brambilla
Iconografia Karine Ribeiro de Oliveira
Leticia dos Santos Domingos (trat. imagens)
Ilustrações Alexandre Argozino Neto, ALLMAPS, Bentinho, Editoria de arte, Selma Caparroz, Sergio Lima, Sonia Vaz

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Fugita, Felipe
Por toda parte matemática : 3º ano : ensino médio : volume III / Felipe Fugita, José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Júnior. – 1. ed. – São Paulo : FTD, 2024.

Componente curricular: Matemática.
Área do conhecimento : Matemática e suas tecnologias.
ISBN 978-85-96-04642-8 (livro do estudante)
ISBN 978-85-96-04643-5 (manual do professor)
ISBN 978-85-96-04648-0 (livro do estudante HTML 5)
ISBN 978-85-96-04649-7 (manual do professor HTML 5)

1. Matemática (Ensino médio) I. Bonjorno, José Roberto. II. Giovanni Júnior, José Ruy. III. Título.

24-227850 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino médio 510.7

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

EDITORA FTD.
Rua Rui Barbosa, 156 – Bela Vista – São Paulo – SP
CEP 01326-010 – Tel. 0800 772 2300
Caixa Postal 65149 – CEP da Caixa Postal 01390-970
www.ftd.com.br
central.relacionamento@ftd.com.br

Em respeito ao meio ambiente, as folhas deste livro foram produzidas com fibras obtidas de árvores de florestas plantadas, com origem certificada.

Impresso no Parque Gráfico da Editora FTD
CNPJ 61.186.490/0016-33
Avenida Antonio Bardella, 300
Guarulhos-SP – CEP 07220-020
Tel. (11) 3545-8600 e Fax (11) 2412-5375

APRESENTAÇÃO

Caro estudante,

Este livro tem como objetivo estimular você a compreender a Matemática para utilizá-la no seu dia a dia e na continuação dos seus estudos. Além disso, busca favorecer o desenvolvimento de competências e habilidades que o auxiliem a ser um cidadão crítico, criativo, autônomo e responsável. Na sociedade contemporânea, é muito importante que você seja capaz de ler a realidade, enfrentar novos desafios e tomar decisões éticas e fundamentadas.

Além dos conteúdos matemáticos específicos, o livro ainda traz possibilidades de explorar o uso de recursos tecnológicos, como *softwares* de Geometria dinâmica e planilhas eletrônicas, e de refletir sobre as relações entre a Matemática e outras áreas do conhecimento.

Desejamos que essa obra contribua para que você reflita e interfira na sociedade em que está inserido com base em conhecimentos cientificamente fundamentados.

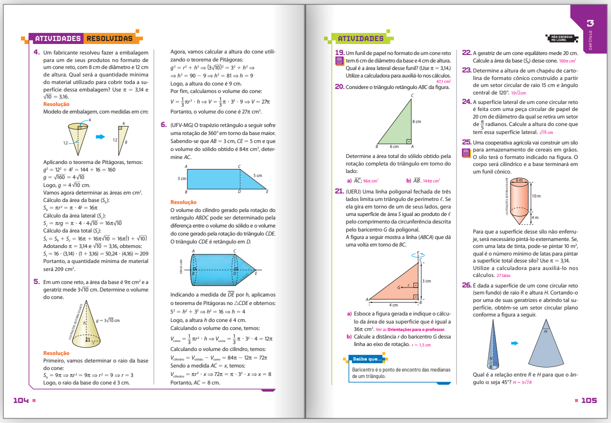
Bons estudos!

Os Autores

CONHEÇA SEU LIVRO

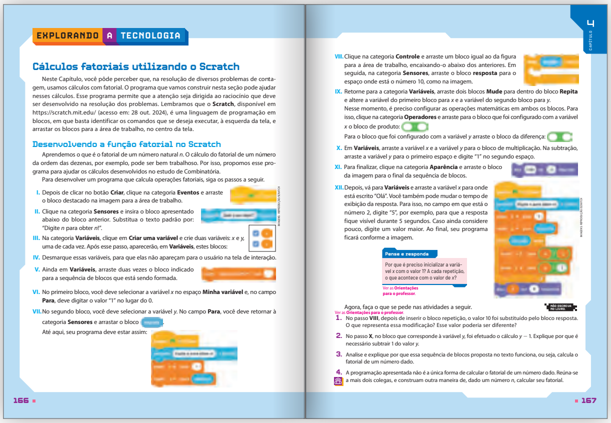
Abertura de capítulo

Nas páginas de abertura, você é convidado a observar textos e/ou imagens relacionados ao conteúdo do capítulo e a responder a questões cujo objetivo é proporcionar um momento de reflexão sobre o contexto apresentado e os conteúdos já estudados.



Atividades resolvidas e Atividades

As **atividades resolvidas** apresentam uma forma organizada de resolução e devem ser um momento de reflexão e de busca por outras formas de resolução. Já as **atividades** são variadas e visam à prática do conteúdo em estudo. Há também oportunidades de elaboração, análise de atividades e compartilhamento com seus colegas e o professor.

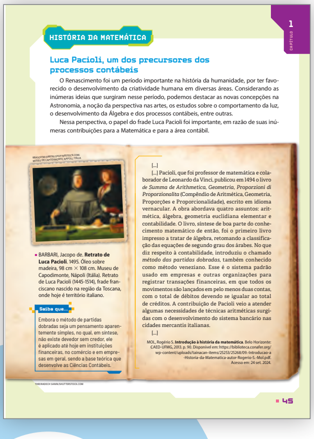


Explorando a tecnologia

Nesta seção, você vai ter a oportunidade de aprofundar seus conhecimentos matemáticos e desenvolver o pensamento computacional, com ou sem o auxílio de tecnologias digitais.

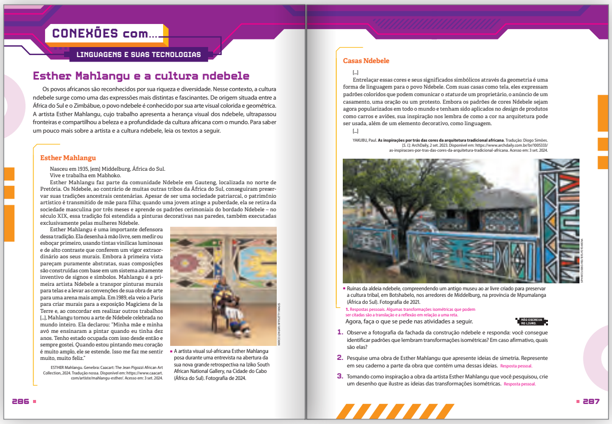
Fórum

É uma oportunidade para trocar e compartilhar ideias com seus colegas e o professor, a partir de temas contemporâneos.



História da Matemática

Nesta seção, você vai ter a oportunidade de ler textos sobre a história da Matemática relacionados aos conteúdos que estão sendo estudados no capítulo.



Conexões com...

Nesta seção, você vai explorar temas diversos e interdisciplinares relacionados ao conteúdo em estudo, com o objetivo de desenvolver a competência leitora, a cidadania e o senso crítico, por meio de atividades investigativas, pesquisas e discussão com os colegas.

Boxes

Glossário

Explicação de termos matemáticos ou da língua portuguesa.

Pense e responda

Momentos que valorizam, por meio de questões, sua participação na construção do conhecimento, incentivando você a interagir, investigar e refletir sobre o conteúdo em estudo.

Para assistir

Para ler

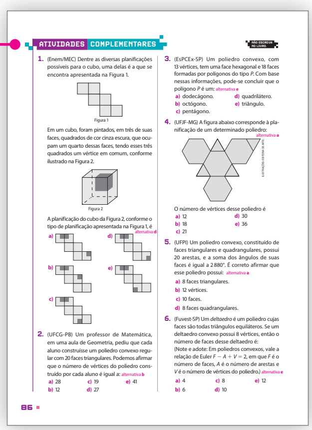
Para acessar

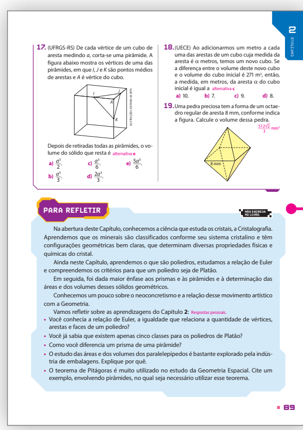
Para ouvir

Sugestões de livros, *links*, filmes, *podcasts* etc. a fim de complementar o conteúdo do livro.

Saiba que...

Apresentação de uma dica interessante ou informação relevante a respeito do conteúdo.





Atividades complementares

Nesta seção, você vai encontrar questões de exames oficiais relacionadas aos conteúdos estudados. É uma oportunidade para verificar seu conhecimento em relação ao que foi abordado no capítulo.

Para refletir

Neste momento, você vai ter a oportunidade de refletir sobre o que estudou em cada um dos capítulos e fazer uma autoavaliação de seu desempenho.

OBJETOS EDUCACIONAIS DIGITAIS

Os ícones a seguir identificam os diferentes tipos de objetos educacionais digitais presentes neste volume. Esses materiais digitais apresentam assuntos complementares ao conteúdo trabalhado na obra, ampliando a aprendizagem.

VÍDEO

PODCAST

CARROSSEL DE IMAGENS

INFOGRÁFICO CLICÁVEL

MAPA CLICÁVEL

ÍCONES

Atividades a serem realizadas com o auxílio de uma calculadora.

Atividades em duplas.

Atividades em grupos.

Os *sites* indicados nesta obra podem apresentar imagens e eventuais textos publicitários junto ao conteúdo de referência, os quais não condizem com o objetivo didático da coleção. Não há controle sobre esses conteúdos, pois eles estão estritamente relacionados ao histórico de pesquisa de cada usuário e à dinâmica dos meios digitais.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 3

Corpos redondos 90

CAPÍTULO 4

Análise combinatória 136

CAPÍTULO 5 Probabilidade

CAPÍTULO 6 Matrizes e sistemas lineares

Objetos Educacionais Digitais

CAPÍTULO 1

MATEMÁTICA FINANCEIRA

"Corre, que agora o preço baixou!", "30%, 40% e 50% de desconto em toda a loja!", "Aproveite a *Black Friday*!".

É bem provável que você já tenha se deparado com frases como essas em propagandas de televisão, na internet ou até mesmo em vitrines de lojas, pois o comércio tenta, constantemente, atrair consumidores por meio de promoções, ofertas e diferentes formas de pagamento.

Atualmente, uma data que se destaca pelos seus descontos é a da *Black Friday*, um evento mundial que ocorre, geralmente, na última sexta-feira de novembro, em que os preços de diversos produtos diminuem, sobretudo eletrônicos e eletrodomésticos. Os valores oferecidos na *Black Friday* têm como base os preços dos produtos durante todo o ano, considerando taxas e impostos.

Os consumidores, porém, devem ficar atentos às supostas promoções, pois algumas lojas podem agir de forma desonesta e, às vezes, ilícita. Além disso, eles precisam acompanhar, ao longo do ano, o histórico de preços dos produtos que pretendem comprar na temporada da *Black Friday*, pois assim garantem a aquisição da mercadoria por um valor realmente menor. Alguns estabelecimentos praticam a manobra de aumentar os preços de seus produtos alguns dias ou semanas antes desse evento e aplicam descontos atrativos, quando, na verdade, estão vendendo pelo preço original.

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Agora reúna-se a um colega, e façam o que se pede em cada questão.
Ver as **Orientações para o professor**.

1. De acordo com o texto, como os descontos são comumente divulgados? Por que vocês acham que se utiliza essa maneira de indicá-los?
2. Uma prática cada vez mais frequente no *e-commerce* (comércio eletrônico) é o anúncio de um produto cuja compra pode ser efetuada de duas formas: parcelada sem juro ou à vista com desconto. Uma venda que siga esse modelo é realmente isenta de juro? Justifiquem.
3. O texto destaca um tipo de cuidado que o consumidor deve ter no momento de realizar as compras durante a *Black Friday*. Que outros cuidados devemos ter ao comprar em eventos como esse?
4. Em uma *Black Friday*, um produto teve um desconto inicial de 10% e, em seguida, mais um desconto de 20%. Qual foi o desconto percentual total que esse produto sofreu? 28%

CESAR CONVENTI/FOTOARENA

▪ Vitrine com cartazes sobre promoções da *Black Friday*, São Paulo (SP). O uso de propagandas grandes e vistosas nas vitrines das lojas é umas das maneiras de chamar a atenção dos consumidores. Fotografia de 2022.

Introdução

Muitas situações do nosso cotidiano envolvem Matemática financeira: compras de produtos à vista ou a prazo, aplicações financeiras, assim como negociações diversas que envolvam financiamentos, pagamento de dívidas, preço de aluguel, reajuste de salário, entre outras. Conhecer os conceitos relacionados a situações como essas nos ajuda a analisar se determinada proposta é vantajosa ou não.

Porcentagem

No Ensino Fundamental, você estudou porcentagem. Vamos retomar esse assunto para aplicá-lo, com outros conceitos, em situações que acompanharemos mais adiante.

Porcentagem é uma razão entre um número real x e 100, que é indicada por $x\%$. Para efetuar operações, utilizamos representações fracionárias ou decimais.

Exemplos:

a) $60\% = \frac{60}{100} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 0{,}6$

Lê-se: sessenta por cento.

b) $28\% = \frac{28}{100} = \frac{7}{25} = 0{,}28$

c) $0{,}12 = \frac{12}{100} = \frac{3}{25} = 12\%$

d) $1{,}25 = \frac{125}{100} = \frac{5}{4} = 125\%$

A expressão "por cento" vem do latim *per centum*, que significa "dividido por cem". Quando utilizamos o sufixo *agem*, indicamos que se trata de um substantivo.

O termo $x\%$, em que x é um número real qualquer, representa a razão $\frac{x}{100}$ e é chamado de **porcentagem**, **taxa percentual** ou, simplesmente, **percentual**.

Observe que $\frac{x}{100}$ também quer dizer que, em cada grupo de 100 objetos, estamos considerando x desses objetos.

Agora, vamos considerar a situação a seguir.

A agricultura familiar é uma forma de produção agrícola em que a gestão e o trabalho são realizados predominantemente por membros de uma mesma família. De acordo com o Censo Agropecuário 2017, realizado pelo IBGE, 77% dos estabelecimentos agropecuários do país eram classificados como agricultura familiar, o que correspondia a cerca de 3,9 milhões de estabelecimentos. Com base nessas informações, qual era aproximadamente o total de estabelecimentos agropecuários no Brasil em 2017?

LUCIANA WHITAKER/PULSAR IMAGENS

- No Brasil, a Lei nº 11.326 instituiu, em 2006, a Política Nacional de Agricultura Familiar e Empreendimentos Familiares Rurais. Na imagem, produção de hortaliças, em Porto Seguro (BA). Fotografia de 2024.

Para responder à pergunta, vamos chamar o total de estabelecimentos agropecuários de n. Assim, temos:

77% de n é igual a 3,9 milhões $\rightarrow \frac{77}{100} \cdot n = 3{,}9$ milhões $\Rightarrow 0{,}77 \cdot n = 3{,}9$ milhões $\Rightarrow$

$\Rightarrow n = \frac{3{,}9}{0{,}77}$ milhões $\Rightarrow n \simeq 5{,}1$ milhões

Portanto, havia aproximadamente 5,1 milhões de estabelecimentos agropecuários no Brasil em 2017.

» Aumentos e descontos

Um *smartphone* custa R$ 1.000,00 em determinada loja. Se o cliente optar pelo pagamento à vista, a loja concede um **desconto** de 5% sobre esse valor.

Para calcular o preço do *smartphone* à vista, precisamos determinar 5% de R$ 1.000,00 e **subtrair de** R$ 1.000,00 o valor, em reais, do desconto calculado.

5% de R$ 1.000,00 $\rightarrow 0{,}05 \cdot 1\,000 = 50$, ou seja, R$ 50,00

R$ 1.000,00 − R$ 50,00 = R$ 950,00

Portanto, o preço do *smartphone* à vista com o desconto é R$ 950,00.

Também podemos calcular diretamente o valor, da seguinte maneira:

$$1000 - 0{,}05 \cdot 1000 = 1000 \cdot (1 - 0{,}05) = 1000 \cdot 0{,}95 = 950$$

OLEKSIY MARK/SHUTTERSTOCK.COM

▪ Na compra de um *smartphone*, além do preço e das condições de pagamento, devemos ficar atentos a especificações técnicas.

Para calcular o valor de algo após um **desconto de *p*%**, podemos multiplicar o valor original por $\left(1 - \frac{p}{100}\right)$.

Agora, considere que essa mesma loja, na semana seguinte, aplicou um **aumento** de 3% em todos os produtos. Para determinarmos o valor do *smartphone* após esse reajuste, precisamos calcular 3% de R$ 1.000,00 e **adicionar a** R$ 1.000,00 o valor, em reais, do aumento calculado.

3% de R$ 1.000,00 $\rightarrow 0{,}03 \cdot 1000 = 30$, ou seja, R$ 30,00

R$ 1.000,00 + R$ 30,00 = R$ 1.030,00

Portanto, o preço do celular após o aumento é R$ 1.030,00.

Também podemos calcular diretamente o valor, da seguinte maneira:

$$1000 + 0{,}03 \cdot 1000 = 1000 \cdot (1 + 0{,}03) = 1000 \cdot 1{,}03 = 1030$$

Para calcular o valor de algo após um **aumento de *p***%, podemos multiplicar o valor original por $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$.

Aumentos e descontos sucessivos

Considere, agora, a situação a seguir.

O preço de um produto sofreu um aumento de 8% em março e, em abril, foi reajustado em 12%. Podemos dizer que aplicar esses dois aumentos sucessivos equivale a aplicar um único aumento de 20% sobre o preço inicial?

Para responder à pergunta, vamos calcular um único aumento de 20% sobre o preço de um produto e calcular aumentos sucessivos de 8% e 12% sobre esse preço, em seguida, vamos comparar os resultados obtidos. Suponhamos que o preço inicial do produto seja R$ 500,00.

I. Aplicando um único aumento de 20% sobre o preço do produto, temos:

$$(1 + 0{,}2) \cdot 500 = 1{,}2 \cdot 500 = 600$$

Considerando um único aumento de 20%, obtemos R$ 600,00.

II. Aplicando os aumentos sucessivos, temos:

- Preço do produto após o primeiro aumento (reajuste em março):
  $(1 + 0{,}08) \cdot 500 = 1{,}08 \cdot 500 = 540$, ou seja, R$ 540,00
- Preço do produto após o segundo aumento (reajuste em abril):
  $(1 + 0{,}12) \cdot 540 = 1{,}12 \cdot 540 = 604{,}80$

Portanto, o preço do produto após os dois aumentos será R$ 604,80.

Observe que os valores obtidos nas verificações **I** e **II** não são iguais. Isso nos permite exemplificar que aumentos percentuais sucessivos **não equivalem** a um único aumento representado pela soma das porcentagens correspondentes. Analogamente, podemos verificar o mesmo para descontos, ou seja, descontos percentuais sucessivos **não equivalem** a um único desconto percentual representado pela soma das porcentagens correspondentes.

Vamos avançar nessa análise. De acordo com os cálculos anteriores, sabemos que $540 = 1{,}08 \cdot 500$, então:

$$1{,}12 \cdot 540 = 1{,}12 \cdot \underbrace{1{,}08 \cdot 500}_{540} = 604{,}80$$

Assim, para calcular o preço do produto após os dois aumentos sucessivos, podemos calcular:

$$(1 + 0{,}12) \cdot (1 + 0{,}08) \cdot 500 = 1{,}12 \cdot 1{,}08 \cdot 500 = 1{,}2096 \cdot 500 = 604{,}80$$

O produto destacado anteriormente indica um aumento correspondente a um percentual acumulado de 20,96%. Assim, aplicar um aumento de 8% sucedido por um aumento de 12% é o mesmo que aplicar um aumento único de 20,96%.

Saiba que...

Para facilitar alguns cálculos, podemos utilizar a calculadora. Observe uma maneira de realizar o cálculo referente à taxa acumulada de aumento apresentada anteriormente:

1 . 2 0 9 6 × 5 0 0 = 604.8

» Lucro e prejuízo

Nas transações comerciais e financeiras, é comum o uso de termos como **custo**, que corresponde aos gastos envolvidos na produção de um produto e a outras despesas, e **receita** ou **preço**, que é o valor arrecadado com a venda de um produto.

Quando calculamos a diferença entre a receita e o custo de um produto, temos duas situações:

- se o valor obtido for um número positivo, dizemos que a transação gerou **lucro**;
- se o valor obtido for um número negativo, dizemos que a transação gerou **prejuízo**.

É usual o uso das expressões "preço de custo" (C) para nos referirmos aos custos e "preço de venda" (V) para nos referirmos às receitas. Assim, podemos escrever a seguinte relação para expressar o lucro (L):

$$L = V - C$$

O lucro também pode ser expresso como um percentual em relação ao preço de custo ou ao preço de venda. Por exemplo: uma mercadoria cujo preço de custo é R$ 280,00 foi vendida por R$ 320,00, gerando um lucro de R$ 40,00. Assim:

- o percentual de lucro sobre o preço de custo é: $\frac{L}{C} = \frac{40}{280} = \frac{1}{7} \simeq 0{,}143 \simeq 14{,}3\%$
- o percentual de lucro sobre o preço de venda é: $\frac{L}{V} = \frac{40}{320} = \frac{1}{8} = 0{,}125 = 12{,}5\%$

Para acessar

- BANCO CENTRAL DO BRASIL. **Museu de Valores**. Brasília, DF: BCB, [2024]. *Tour* virtual. Disponível em: https://www.bcb.gov.br/acessoinformacao/museu/tourvirtual/. Acesso em: 25 set. 2024.

  Por meio do *link*, você pode fazer uma visita virtual ao Museu de Valores do Banco Central, explorando a história econômica do Brasil e descobrindo curiosidades sobre o dinheiro.

Se julgar conveniente, pode-se propor aos estudantes que pesquisem se há algum museu como esse ou algum tipo de exposição sobre o tema na região em que moram e, se possível, que visitem presencialmente esse museu ou exposição e compartilhem a experiência com a turma.

ATIVIDADES RESOLVIDAS

1. Um vestido que custa R$ 540,00 tem desconto de 20% se comprado à vista. Qual é o preço à vista do vestido?

Resolução

Para determinar o preço do vestido à vista, podemos multiplicar o valor inicial por $\left(1 - \frac{p}{100}\right)$:

$$540 \cdot (1 - 0{,}2) = 540 \cdot 0{,}8 = 432$$

Portanto, o preço do vestido à vista é R$ 432,00.

2. Edgar teve um aumento salarial de 10% e passou a receber R$ 1.650,00. Qual era o salário de Edgar antes do reajuste?

Resolução

Para determinar o salário antes do reajuste, podemos dividir o novo salário por $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$:

$$\frac{1650}{(1 + 0{,}1)} = \frac{1650}{1{,}1} = 1500$$

Logo, o salário de Edgar antes do reajuste era R$ 1.500,00.

- Estudar Matemática financeira favorece o desenvolvimento da Educação Financeira, pois auxilia a tomar decisões monetárias mais inteligentes e conscientes.

FEE/SHUTTERSTOCK.COM/ CASA DA MOEDA DO BRASIL/ MINISTÉRIO DA FAZENDA

3. A população atual de uma cidade é aproximadamente 50 000 habitantes. Sabendo que essa população cresce 10% ao ano, qual será a população dessa cidade daqui a três anos?

Resolução

Considerando 50 000 habitantes a população inicial, vamos aplicar três aumentos sucessivos de 10%:

$$(1 + 0{,}10) \cdot (1 + 0{,}10) \cdot (1 + 0{,}10) \cdot 50\,000 =$$
$$= 1{,}331 \cdot 50\,000 = 66\,550$$

Portanto, em três anos, a população dessa cidade será, aproximadamente, 66 550 habitantes.

4. Sobre o valor de uma mercadoria foram aplicados dois descontos sucessivos, um de 10% e outro de 12%. Calcule o percentual acumulado de descontos correspondente a esses dois descontos sucessivos.

Resolução

Representando o preço inicial da mercadoria por x e aplicando os dois descontos sucessivos, temos:

$$(1 - 0{,}1) \cdot (1 - 0{,}12) \cdot x = 0{,}9 \cdot 0{,}88 \cdot x =$$
$$= 0{,}792x \text{ ou } 79{,}2\% \text{ de } x$$

Como o valor inicial representa 100%, podemos concluir que o desconto equivalente é: 100% − 79,2% = 20,8%

5. Um produto cujo preço de custo é R$ 420,00 é vendido com um lucro de 30% sobre o preço de venda. Qual é o preço de venda desse produto?

Resolução

Considerando C o preço de custo, L o lucro e V o preço de venda, temos:

$L = V - C.$ (I)

Do enunciado, temos:

$$\frac{L}{V} = 30\% \Rightarrow \frac{L}{V} = 0{,}30 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow L = 0{,}30V \quad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I), obtemos:

$$0{,}30V = V - C \Rightarrow$$
$$\Rightarrow C = V - 0{,}30V \Rightarrow$$
$$\Rightarrow C = 0{,}70V$$

Substituindo $C = 420$, determinamos V:

$$420 = 0{,}70V \Rightarrow$$
$$\Rightarrow V = 600$$

Portanto, o preço de venda é R$ 600,00.

6. Um produto cujo preço de custo era R$ 800,00 foi vendido por R$ 980,00. Qual foi o percentual de lucro sobre o preço de custo?

Resolução

Sendo L o lucro, C o preço de custo e V o preço de venda, temos:

$$L = V - C \Rightarrow$$
$$\Rightarrow L = 980 - 800 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow L = 180$$

Logo, o lucro foi R$ 180,00.
Assim, temos:

$$\frac{L}{C} = \frac{180}{800} = 0{,}225 = 22{,}5\%$$

Portanto, o percentual de lucro sobre o preço de custo foi 22,5%.

7. Um comerciante, para promover as vendas de brinquedos de sua loja, divulgou a seguinte propaganda:

EDITORIA DE ARTE

Esse comerciante sabe que, após o desconto, certo brinquedo deve ser vendido por R$ 54,00 para não ter prejuízo. Determine qual deve ser o preço mínimo do anúncio desse produto nessa promoção.

Resolução

Seja x o preço mínimo do anúncio desse brinquedo, após um desconto de 10%, o seu valor de venda deve resultar em R$ 54,00, então:

$$x \cdot (1 - 0{,}1) = 54 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x \cdot 0{,}9 = 54 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = \frac{54}{0{,}9} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = 60$$

Portanto, o preço mínimo do anúncio do brinquedo deve ser R$ 60,00.

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. Copie o quadro a seguir no caderno e complete-o com os valores que estão faltando.

Fração	Representação decimal	Porcentagem
$\frac{9}{10}$	0,9	90%
$\frac{1}{4}$	0,25	25%
$\frac{13}{200}$	0,065	6,5%
$\frac{47}{100}$	0,47	47%
$\frac{2}{25}$	0,08	8%

2. Calcule.

a) 14% de 3 000 420

b) 9% de 250 22,5

c) 0,6% de 300 1,8

d) 24% de 1 000 240

3. a) aproximadamente 92 250 habitantes

3. A população de uma cidade, com cerca de 90 000 habitantes, cresce anualmente 2,5%. Quantos habitantes essa cidade terá:

a) ao fim de 1 ano?

b) ao fim de 2 anos?

3. b) aproximadamente 94 556 habitantes

4. (ESPM-SP) Deseja-se obter cópia reduzida de um documento. A fotocopiadora opera reduzindo proporcionalmente as dimensões do documento original. Sabendo-se que, para cópias comuns, o equipamento indica em seu visor: "Dimensão = 100%", qual deverá ser o valor digitado no painel de comandos, para que a área do documento reduzido seja igual a um quarto de área do documento original? 50%

5. (UFPE) Em um exame de vestibular, 30% dos candidatos eram da área de Ciências Sociais. Dentre estes candidatos, 20% optaram pelo curso de Administração. Indique a percentagem, relativa ao total de candidatos, dos que optaram por Administração. 6%

6. Uma mercadoria tem seu preço reajustado anualmente com um acréscimo de 5%. Supondo que o preço atual seja R$ 200,00, qual será o preço dessa mercadoria daqui a 3 anos? aproximadamente R$ 231,52

7. (UFV-MG) A viação *No Leito do Asfalto* faz a linha entre duas cidades que distam 800 km uma da outra. Por questão de segurança, foram determinadas duas paradas obrigatórias para o revezamento dos motoristas. O primeiro trecho da viagem corresponde a 40% de todo o trajeto e o segundo trecho, a 55% do restante. Calcule:

a) A distância que é percorrida no primeiro trecho da viagem. 320 km

b) A distância que é percorrida no segundo trecho da viagem. 264 km

c) O tempo de percurso do terceiro trecho, caso o motorista mantenha uma velocidade média de 90 km/h. 2,4h ou 2h24min

8. (Enem/MEC) Em janeiro do ano passado, a direção de uma fábrica abriu uma creche para os filhos de seus funcionários, com 10 salas, cada uma com capacidade para atender 10 crianças a cada ano. As vagas são sorteadas entre os filhos dos funcionários inscritos, enquanto os não contemplados pelo sorteio formam uma lista de espera. No ano passado, a lista de espera teve 400 nomes e, neste ano, esse número cresceu 10%.

A direção da fábrica realizou uma pesquisa e constatou que a lista de espera para o próximo ano terá a mesma quantidade de nomes da lista de espera deste ano. Decidiu, então, construir, ao longo desse ano, novas salas para a creche, também com capacidade de atendimento para 10 crianças cada, de modo que o número de nomes na lista de espera no próximo ano seja 25% menor que o deste ano. O número mínimo de salas que deverão ser construídas é alternativa **b**

a) 10. **b)** 11. **c)** 13. **d)** 30. **e)** 33.

9. Em uma loja, um aparelho de ar-condicionado custa R$ 8.000,00 à vista.

Vendido a prazo, o valor desse aparelho sofre um acréscimo de 8%, e o total é dividido em duas prestações iguais. Qual é o valor de cada prestação? R$ 4.320,00

10. (UFPel-RS) Uma raquete custa na loja **A** R$ 15,00 mais caro que na loja **B**. O proprietário da loja **A**, percebendo a diferença, lança uma promoção oferecendo desconto de 10% para que o preço de sua mercadoria se torne o mesmo preço da loja **B**. Quanto custa a raquete na loja **B**? R$ 135,00

11. (FGV-SP) Uma mercadoria, cujo preço de tabela é R$ 8.000,00, é vendida à vista com desconto de x%, ou em duas parcelas iguais de R$ 4.000,00, sendo a primeira no ato da compra e a segunda um mês após a compra. Suponha que o comprador dispõe do dinheiro necessário para pagar à vista e que ele sabe que a diferença entre o preço à vista e a primeira parcela pode ser aplicada no mercado financeiro a uma taxa de 25% ao mês. Nessas condições:

a) se $x = 15$, será vantajosa para ele a compra a prazo? Explique. não

b) Qual é o valor de x que torna indiferente comprar à vista ou a prazo? Explique. $x = 10$

12. (UFPR) Numa loja de automóveis usados, a comissão paga a cada um dos vendedores consiste num percentual sobre o total de vendas do vendedor mais um bônus por meta atingida, conforme a tabela abaixo:

Total de vendas no mês	Percentual sobre o total de vendas	Bônus por meta atingida
Até R$ 80.000,00	0,8%	R$ 0,00
Entre R$ 80.000,00 e R$ 200.000,00	1,0%	R$ 600,00
Acima de R$ 200.000,00	1,2%	R$ 900,00

a) Qual é a comissão paga a um vendedor que consegue vender R$ 120.000,00 em um mês? R$ 1.800,00

b) Quanto um vendedor precisará vender em um mês para receber uma comissão de R$ 3.900,00? R$ 250.000,00

c) Um dos vendedores apresentou uma reclamação ao gerente da loja porque havia recebido R$ 1.000,00 de comissão. Explique por que esse valor está errado.

13. Uma mercadoria teve seu preço reajustado em 18%. A pedido de um cliente, foi dado um desconto de 5% sobre o novo preço, passando a mercadoria a custar R$ 302,50 a mais que seu preço inicial. Qual era o preço inicial dessa mercadoria? R$ 2.500,00

14. Amélia fixou em 18% o lucro sobre o preço de custo de uma mercadoria que comprou para revender. Sabendo que o custo dessa mercadoria foi R$ 250,00, por quanto deverá ser revendida? R$ 295,00

15. Certa mercadoria foi comprada por R$ 860,00. Por quanto deve ser revendida para que o lucro seja de 20% sobre o preço de custo? R$ 1.032,00

16. Um comerciante comprou dez sacas de batatas por R$ 210,00. Por quanto ele deve revender cada saca para obter um lucro de 20% sobre o preço de venda? R$ 26,25

17. (PUCCamp-SP) O preço pedido pelos 18 volumes da enciclopédia **Tesouro da Juventude** em um *sebo* é uma verdadeira "pechincha". Com os 17% de desconto já embutidos no preço, a enciclopédia toda pode ser comprada por R$ 478,08. Supondo que cada volume tenha o mesmo preço, conclui-se que o preço que o *sebo* anunciou, por volume, antes do desconto, era de alternativa **e**

a) R$ 28,00.
b) R$ 26,00.
c) R$ 38,00.
d) R$ 36,00.
e) R$ 32,00.

18. O preço de um produto em uma loja é R$ 39,00. O dono da loja, mesmo pagando um imposto de 20% sobre o preço de venda, obtém lucro de 30% sobre o preço de custo. Qual é o preço de custo desse produto? R$ 24,00

19. Qual é o preço de custo de um produto vendido por R$ 240,00 em cuja transação o comerciante teve um lucro de 20% sobre a venda? R$ 192,00

20. (Vunesp-SP) A diferença entre o preço de venda anunciado de uma mercadoria e o preço de custo é igual a R$ 2.000,00. Se essa mercadoria for vendida com um desconto de 10% sobre o preço anunciado, dará ainda um lucro de 20% ao comerciante. Determine seu preço de custo. R$ 6.000,00

12. c) Uma resposta possível: Porque o valor máximo de comissão correspondente à primeira faixa do total de vendas é R$ 640,00, e o valor mínimo de comissão correspondente à segunda faixa é R$ 1.400,00.

Juros

No Brasil, existem duas modalidades de compra: com pagamento à vista e com pagamento a prazo. Resumindo, a compra à vista significa que o valor total da mercadoria ou do serviço é pago no momento da compra; já a compra a prazo significa que o valor total não é pago no ato da compra, é parcelado em prestações ou pago integralmente após um tempo.

A compra a prazo pode vir acompanhada de juro, de modo que o valor a ser pago ao final pode ser maior do que o valor à vista.

Acompanhe a situação a seguir.

O preço à vista de uma geladeira é R$ 1.450,00. Bruno comprou essa geladeira e pagará todo o valor daqui a 30 dias, ou seja, um mês após a compra. Nessas condições, a loja cobrou juros de 8% sobre o preço à vista.

FOCAL POINT/SHUTTERSTOCK.COM /REPRODUÇÃO/PROCEL/INMETRO

Na compra de eletroeletrônicos, podemos verificar os mais eficientes e os que consomem menos energia observando o Selo Procel de Economia de Energia.

Ao fazer essa compra, Bruno assumiu o compromisso de pagar um valor adicional chamado de **juro**, que corresponde a uma porcentagem do preço à vista e depende do prazo para pagamento.

Juro (*J*) é uma compensação financeira que se paga pela utilização de uma quantia por determinado período.

Observe, por exemplo, uma maneira de calcular o valor adicional que Bruno vai pagar na compra da geladeira. Podemos usar uma calculadora para fazer esse cálculo.

1 4 5 0 × 8 % = 116

Ou seja, a loja cobrou R$ 116,00 de juros na venda dessa geladeira a prazo.

Além da palavra **juro**, os termos apresentados a seguir são muito frequentes no estudo de Matemática financeira.

- **Capital (*C*)**: quantia monetária investida ou disponível para investimento também denominada valor presente ou principal.
- **Taxa de juros (*i*)**: taxa percentual que se paga ou se recebe pela compensação da aplicação de um capital. Essa taxa deve vir acompanhada da unidade de tempo a que se refere. Exemplo: 5% ao dia, que pode ser escrita como 5% a.d.; 2% ao mês ou 2% a.m.; 8% ao ano ou 8% a.a.
- **Tempo (*t*)**: período que decorre desde o início até o fim de uma operação financeira.
- **Montante (*M*)**: investimento rentabilizado, ou seja, é o capital acrescido dos juros acumulados em determinado período (capital + juros). Também é denominado valor futuro.

Assim, o juro (J) é o valor obtido ao se aplicar uma taxa percentual (i) sobre um capital (C) em determinado período de tempo (t).

É importante observar que, se a taxa i for mensal, o tempo t deverá ser expresso em meses. Se i for uma taxa anual, t deverá ser expresso em anos.

Saiba que...

Nas operações financeiras, o tempo pode ser classificado em:

- exato: usa o ano civil de 365 ou 366 (ano bissexto) dias, em que os dias dos meses são contados pelo calendário (28, 29, 30 ou 31 dias).
- comercial: usa o ano comercial, no qual o mês tem sempre 30 dias, e o ano, 360 dias.

Neste Capítulo, caso não esteja indicado, vamos considerar o tempo comercial.

Juro simples

Nos tempos atuais, raramente é adotado o regime de juro simples em transações. Quando utilizado, ele é praticado em operações de curtíssimos prazos, como cálculos de multas por atraso de pagamento, por exemplo, de faturas.

Denominamos **juro simples** aquele calculado sempre sobre o capital inicial.

Suponha, por exemplo, que uma quantia de R$ 2.000,00 tenha sido aplicada a juro simples, segundo uma taxa de 4,5% ao mês, durante 3 meses. Para obter o valor correspondente aos juros nesse período, calculamos:

$$\text{juros} = \underbrace{4{,}5\% \text{ de } 2\,000}_{\text{juros do 1º mês}} + \underbrace{4{,}5\% \text{ de } 2\,000}_{\text{juros do 2º mês}} + \underbrace{4{,}5\% \text{ de } 2\,000}_{\text{juros do 3º mês}}$$

$$\text{juros} = 0{,}045 \cdot 2\,000 + 0{,}045 \cdot 2\,000 + 0{,}045 \cdot 2\,000$$

$$\text{juros} = (2\,000 \cdot 0{,}045) \cdot 3 = 270$$

Portanto, nesse período, o capital de R$ 2.000,00 gerou R$ 270,00 de juros.

Como o juro simples (J) é diretamente proporcional ao capital (C), à taxa de juros (i) e ao tempo (t), podemos usar a seguinte relação:

$$J = C \cdot i \cdot t$$

Para determinar o **montante**, ou valor total obtido pela aplicação, adicionamos o juro ao capital, ou seja, utilizamos a relação:

$$M = C + J \quad \text{ou} \quad M = C + C \cdot i \cdot t \quad \text{ou} \quad M = C \cdot (1 + i \cdot t)$$

Aplicando essas relações à situação anterior, temos:

$$J = C \cdot i \cdot t$$

$$J = 2\,000 \cdot 0{,}045 \cdot 3 = 270$$

Logo, $M = C + J$, ou seja, $M = 2\,000 + 270 = 2\,270$.

Portanto, ao final da aplicação, o montante será R$ 2.270,00.

ATIVIDADES RESOLVIDAS

8. Uma pessoa aplicou R$ 3.000,00 à taxa de 2% a.m. durante 5 meses no regime de juro simples.

a) Quanto receberá de juros ao final desse período?

b) Que montante terá ao final dessa aplicação?

Resolução

a) Sendo $C = 3000$, $i = 2\% = 0{,}02$ e $t = 5$, temos:

$J = 3000 \cdot 0{,}02 \cdot 5 \Rightarrow J = 300$

Portanto, a pessoa receberá R$ 300,00 de juros.

b) O montante é a soma do capital com os juros:

$M = 3000 + 300 \Rightarrow M = 3300$

Logo, o montante será R$ 3.300,00.

9. (Unimontes-MG) A que taxa mensal de juros simples um capital de R$ 500,00, aplicado durante 10 meses, produz R$ 150,00 de juros?

Resolução

Seja i a taxa mensal de juro simples dessa aplicação. Pelo enunciado, temos:

- juro J obtido na aplicação: R$ 150,00;
- capital C aplicado: R$ 500,00;
- tempo t de aplicação: 10 meses.

Substituindo esses valores em $J = C \cdot i \cdot t$, obtemos:

$$150 = 500 \cdot i \cdot 10 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 150 = 5000 \cdot i \Rightarrow$$
$$\Rightarrow i = \frac{150}{5000} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow i = 0{,}03 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow i = 3\%$$

Portanto, a taxa i mensal de juros simples deve ser 3%.

ATIVIDADES

23. a) R$ 700,00
b) R$ 2.520,00
c) R$ 945,00

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

21. (UEA-AM) Ronaldo fez um empréstimo de R$ 1.000,00. Ao final do primeiro mês, foram aplicados juros de 10% sobre o valor da dívida, e ele fez um pagamento de R$ 300,00. Ao final do segundo mês, foram aplicados juros de 10% sobre o saldo da dívida, e ele fez um pagamento de R$ 500,00. Ao final do terceiro mês, foram aplicados juros de 10% sobre o saldo da dívida, e ele fez um pagamento para quitá-la. O valor do último pagamento feito por Ronaldo foi de

a) R$ 418,00.
b) R$ 309,00.
c) R$ 500,00.
d) R$ 531,00.
e) R$ 200,00.

alternativa **a**

22. (ITA-SP) Uma loja oferece um computador e uma impressora por R$ 3.000,00 à vista ou por 20% do valor à vista como entrada e mais um pagamento de R$ 2.760,00 após 5 meses. Qual é a taxa de juro simples cobrada? 3% a.m.

23. Qual é o juro simples que um capital de R$ 7.000,00 rende quando aplicado:

a) durante 4 meses, a uma taxa de 2,5% a.m.?
b) durante 1 ano, a uma taxa de 3% a.m.?
c) durante 3 meses, a uma taxa de 0,15% a.d.?

24. (Ufop-MG) José deposita mensalmente em um fundo, a partir de 1º de janeiro, a quantia de 200 reais, a juros simples de 1,5% ao mês. Calcule o seu montante no fim de um ano, para um total de 12 depósitos. R$ 2.634,00

25. Calcule o juro simples que um capital de R$ 1.800,00 rende à taxa de 2,7% a.m., quando aplicado durante 2 meses. R$ 97,20

26. Calcule o capital que se deve empregar à taxa de 6% a.m., a juro simples, para obter R$ 6.000,00 de juros em 4 meses. R$ 25.000,00

27. Determine o montante obtido na aplicação de um capital de R$ 12.000,00, à taxa de 1,5% ao mês, a juro simples, pelo prazo de 9 meses. R$ 13.620,00

28. Um capital de R$ 8.000,00, aplicado durante 6 meses, resulta em um montante de R$ 9.200,00. Determine a taxa mensal de juro simples dessa aplicação. 2,5% a.m.

Juro composto

A maioria das operações financeiras, como compras a médio e a longo prazo, compras com cartão de crédito, aplicações financeiras, empréstimos bancários, entre outras, utiliza o regime de juro composto, também conhecido como juro sobre juro.

PRECIOUSJ/SHUTTERSTOCK.COM

Ao contratar um empréstimo é importante analisar juros, prazos e taxas extras.

> Denominamos **juro composto** o valor de juro gerado em um período e incorporado ao capital, passando a participar da composição de juro no período seguinte.

Acompanhe a situação a seguir.

> Mariana investiu R$ 800,00 à taxa de 0,8% ao mês, durante 4 meses, no regime de juro composto. Quanto Mariana terá ao final dessa aplicação?

No regime de juro composto, devemos considerar o juro calculado em cada período e adicioná-lo ao capital anterior para constituir um novo capital, sobre o qual será calculado o juro do período posterior. Nesse exemplo, temos o seguinte:

- Cálculo do juro obtido no 1º mês:

$$0{,}8\% \text{ de } 800 = 0{,}008 \cdot 800 = 6{,}40$$
$$800 + 6{,}40 = 806{,}40 \text{ (montante do 1º mês)}$$

Ao final do 1º mês, Mariana terá R$ 806,40.

- Cálculo do juro obtido no 2º mês:

$$0{,}8\% \text{ de } 806{,}40 = 0{,}008 \cdot 806{,}40 \simeq 6{,}45$$
$$806{,}40 + 6{,}45 = 812{,}85 \text{ (montante do 2º mês)}$$

Ao final do 2º mês, Mariana terá R$ 812,85.

- Cálculo do juro obtido no 3º mês:

$$0{,}8\% \text{ de } 812{,}85 = 0{,}008 \cdot 812{,}85 \simeq 6{,}50$$
$$812{,}85 + 6{,}50 = 819{,}35 \text{ (montante do 3º mês)}$$

Ao final do 3º mês, Mariana terá R$ 819,35.

- Cálculo do juro obtido no 4º mês:

$$0{,}8\% \text{ de } 819{,}35 = 0{,}008 \cdot 819{,}35 \simeq 6{,}55$$
$$819{,}35 + 6{,}55 = 825{,}90 \text{ (montante do 4º mês)}$$

Assim, ao final do 4º mês, Mariana terá R$ 825,90.

Pense e responda

Observe o cálculo do montante de Mariana no 2º mês. Veja que o juro obtido é um valor aproximado e, mesmo assim, afirmamos que Mariana terá uma quantia exata com duas casas decimais. Pense na situação real e explique por que isso acontece.

Ver as **Orientações para o professor**.

Pense e responda

Suponha essa mesma quantia aplicada em regime de juro simples, considerando uma taxa de 0,8% ao mês, durante 4 meses. Use uma calculadora para determinar o montante obtido nessa situação e o compare com o valor obtido na aplicação feita por Mariana. O que você observa?

R$ 825,60. É um valor menor quando comparado ao montante obtido considerando a mesma taxa e o mesmo período em regime de juro composto.

Observe que a maneira apresentada para resolver esse problema é trabalhosa e necessita de muitos passos para que seja obtida a resposta. Imagine realizar esse cálculo se Mariana deixar essa quantia aplicada por um período de 36 meses.

Vamos, agora, obter uma fórmula que deixará a resolução mais prática.

Considere M o montante de um capital C aplicado em um regime de juro composto a uma taxa i.

Como $M = C + J = C + C \cdot i$, temos:

- Montante obtido no 1º período:

$$M_1 = C + C \cdot i = C(1 + i) \Rightarrow M_1 = C(1 + i)$$

- Montante obtido no 2º período:

$$M_2 = M_1 + M_1 \cdot i = M_1(1 + i) = C(1 + i)(1 + i) = C(1 + i)^2 \Rightarrow M_2 = C(1 + i)^2$$

- Montante obtido no 3º período:

$$M_3 = M_2 + M_2 \cdot i = M_2(1 + i) = C(1 + i)^2(1 + i) = C(1 + i)^3 \Rightarrow M_3 = C(1 + i)^3$$

- Montante obtido no 4º período:

$$M_4 = M_3 + M_3 \cdot i = M_3(1 + i) = C(1 + i)^3(1 + i) = C(1 + i)^4 \Rightarrow M_4 = C(1 + i)^4$$

Considerando uma quantidade de períodos t, o montante obtido nesse período pode ser calculado pela expressão:

$$M = C(1 + i)^t$$

Utilizando a fórmula apresentada para calcular o montante obtido na aplicação feita por Mariana, temos:

$M = 800 \cdot (1 + 0{,}008)^4 \Rightarrow M = 800 \cdot (1{,}008)^4$

Podemos realizar esse cálculo utilizando uma calculadora científica, como indicado a seguir.

8 0 0 × 1 . 0 0 8 y^x 4 = 825.9088417

Logo, o montante obtido por Mariana ao final dessa aplicação será aproximadamente R$ 825,91.

Lembre-se de que, quando fazemos aproximações, podemos obter diferentes resultados para um mesmo problema. Compare, por exemplo, o resultado obtido por meio da expressão com os cálculos anteriores.

Muitas vezes temos o capital e o montante e desejamos saber o juro obtido na aplicação. Se necessário, podemos calcular o valor do juro utilizando a fórmula $M = C + J$, pela qual temos:

$$J = M - C$$

Saiba que...

Utilizar uma calculadora científica em situações envolvendo juro composto torna os cálculos mais práticos. Em alguns modelos de calculadora científica, é necessário realizar primeiro o cálculo envolvendo a potenciação e, posteriormente, multiplicar o resultado pelo capital.

Juros e funções

Existe uma inter-relação entre o juro simples e a função afim e entre o juro composto e a função exponencial, como veremos a seguir.

Um capital de R$ 1.000,00 foi aplicado a uma taxa de 12% ao ano. Vamos calcular o montante obtido, ano a ano, para os regimes de juro simples e de juro composto e analisar os resultados.

Para calcular o montante, ano a ano, da aplicação em regime de **juro simples**, vamos utilizar a relação $M = C + C \cdot i \cdot t$, na qual, ao substituirmos os valores $C = 1\,000$ e $i = 0{,}12$, obtemos:

$$M = 1\,000 + 1\,000 \cdot 0{,}12 \cdot t\text{, ou seja, } M = 1\,000 + 120t$$

Observamos que a expressão obtida é a lei de uma função afim, com variável dependente M e variável independente t. Atribuindo a t os valores 1, 2, 3, 4, 5, ..., obtemos os valores correspondentes de M:

***t* (em ano)**	1	2	3	4	5	...
***M* (em reais)**	1120	1240	1360	1480	1600	...

Nesse caso, os valores do montante obtidos, ano a ano, são termos da progressão aritmética (1 120, 1 240, 1 360, 1 480, 1 600, ...), de razão $r = 120$, com termo geral $a_n = 1\,000 + 120n$, correspondente à lei de uma função afim, com n restrito ao conjunto dos números naturais não nulos.

Assim, dados o capital e a taxa de juros, o montante obtido pelo regime de juro simples relaciona-se com a ideia de função afim, na qual o montante varia em função do tempo. Como isso ocorre para todos os casos em que há regime de juro simples, podemos associar o cálculo do montante à lei da função afim dada por: $M = C + C \cdot i \cdot t$

Considerando a situação enunciada, na qual o capital de R$ 1.000,00 é aplicado à taxa de 12% ao ano, o montante, a **juro composto**, pode ser obtido pela relação:

$$M = 1\,000(1 + 0{,}12)^t\text{, ou seja, } M = 1\,000 \cdot 1{,}12^t$$

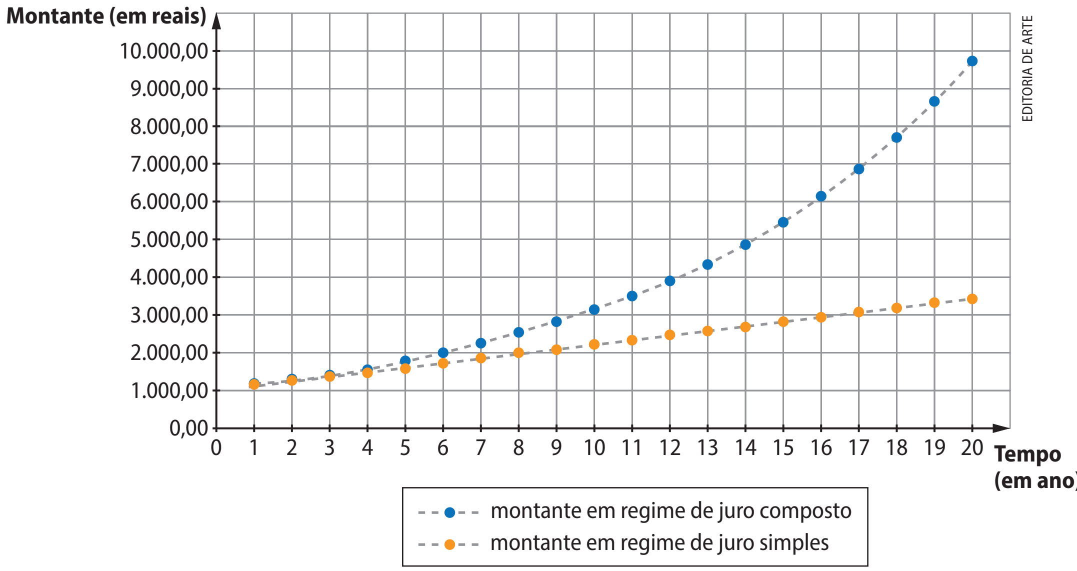
Observamos que a expressão obtida é a lei de uma função exponencial, com variável dependente M e variável independente t. Atribuindo a t os valores 1, 2, 3, 4, 5, ..., obtemos os valores correspondentes de M:

***t* (em ano)**	1	2	3	4	5	...
***M* (em reais)**	1120	1254,40	1404,93	1573,52	1762,34	...

Nesse caso, os valores do montante obtido, ano a ano, são termos da progressão geométrica (1 120; 1 254,40; 1 404,93; 1 573,52; 1 762,34; ...), de razão $q = 1{,}12$, com termo geral $a_n = 1\,000 \cdot (1{,}12)^n$, correspondente à lei de uma função exponencial, com n restrito ao conjunto dos números naturais não nulos.

Assim, dados o capital e a taxa de juros, o montante obtido pelo regime de juro composto relaciona-se à ideia de função exponencial, na qual o montante varia em função do tempo. Como isso ocorre para todos os casos em que há regime de juro composto, podemos associar o cálculo do montante à lei da função exponencial dada por $M = C(1 + i)^t$.

Vamos, agora, analisar o gráfico das duas funções em um mesmo plano cartesiano e analisar os valores obtidos.



No gráfico estão indicados alguns pontos pertencentes aos gráficos das funções. Note que não traçamos a reta nem a curva da função exponencial com linhas contínuas, pois o domínio de ambas as funções é $\mathbb{N}^*$. O tracejado apenas indica a tendência da curva e auxilia na visualização dos resultados.

Observando os gráficos, percebemos que, para $t = 1$, o montante obtido é o mesmo para os dois regimes de juro. A partir daí, quanto maior o tempo de aplicação, maior a diferença entre os montantes obtidos no regime de juro composto e no de juro simples.

Assim, para o caso de um investimento, a rentabilidade em regime de juro composto será maior do que a rentabilidade em regime de juro simples a partir do segundo período de investimento. Se a situação for de empréstimo, a dívida aumenta mais a cada período, a partir do segundo, no regime de juro composto em relação ao mesmo empréstimo em regime de juro simples.

Para acessar

- VENTURA, Dalia. O que são juros compostos, a "bola de neve" matemática da qual os super-ricos tiram proveito. **BBC News Brasil**, [*s. l.*], 26 fev. 2023. Disponível em: https://www.bbc.com/portuguese/articles/cy051k19y74o. Acesso em: 26 set. 2024.

  A reportagem explora o conceito de juro composto, destacando seu crescimento exponencial por meio de exemplos.

ATIVIDADES RESOLVIDAS

10. Um investidor aplicou R$ 500.000,00 a juros compostos de 2% ao mês. Quantos reais ele terá após 5 meses de aplicação? Qual será o valor dos juros obtidos?

Resolução

Utilizando a expressão apresentada, determinamos o montante obtido pelo investidor após 5 meses de aplicação.

$$M = C(1+i)^t \Rightarrow M = 500\,000 \cdot (1+0{,}02)^5 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow M \simeq 552\,040{,}40$$

Para calcular o juro obtido, utilizamos a expressão $J = M - C$.

$$J = 552\,040{,}40 - 500\,000{,}00$$
$$J = 52\,040{,}40$$

Assim, após 5 meses, o investidor terá R$ 552.040,40, e os juros obtidos serão de R$ 52.040,40.

11. (Vunesp-SP) Um capital de R$ 1.000,00 é aplicado durante 4 meses.

a) Encontre o rendimento de aplicação, no período, considerando a taxa de juro simples de 10% ao mês.

b) Determine o rendimento da aplicação, no período, considerando a taxa de juro composto de 10% ao mês.

Resolução

Do enunciado, temos $C = 1000$, $t = 4$ meses, e a taxa, em ambos os casos, é $i = 10\%$.

a) Para o cálculo do rendimento no regime de juro simples, temos:

$$J = C \cdot i \cdot t \Rightarrow J = 1000 \cdot 0{,}1 \cdot 4 = 400$$

O rendimento da aplicação ao final de 4 meses no regime de juro simples será R$ 400,00.

b) Para o cálculo do montante no regime de juro composto, temos:

$$M = C(1+i)^t \Rightarrow M = 1000 \cdot (1+0{,}1)^4 =$$
$$= 1000 \cdot 1{,}1^4 = 1464{,}1$$

Porém, como devemos encontrar o rendimento, temos:

$$J = M - C \Rightarrow J = 1464{,}1 - 1000 = 464{,}1$$

O rendimento da aplicação, ao final de 4 meses, no regime de juro composto, será R$ 464,10.

12. Calcule o valor dos juros compostos que o banco cobra em um empréstimo de R$ 25.000,00 a 26% ao ano durante 24 meses.

Resolução

Inicialmente, vamos calcular o montante desse empréstimo. Do enunciado, temos:

$C = 25\,000$; $i = 26\%$ a.a. $= 0{,}26$ a.a.;

$t = 24$ meses $= 2$ anos

Usando a fórmula do montante, obtemos o valor de M:

$M = C(1+i)^t \Rightarrow$

$\Rightarrow M = 25\,000 \cdot (1+0{,}26)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow M = 25\,000 \cdot (1{,}26)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow M = 39\,690$

Como $M = C + J$, temos:

$J = M - C \Rightarrow J = 39\,690 - 25\,000 = 14\,690$

Portanto, o banco cobra R$ 14.690,00 de juros.

13. Por quanto tempo Jorge deve deixar aplicada a quantia de R$ 6.000,00 para que ela gere um montante de R$ 9.348,00, quando aplicada à taxa de 3% ao mês no regime de juro composto?

Resolução

Os dados do problema são: $C = 6\,000$, $M = 9\,348$ e $i = 3\%$ a.m.

Usando a fórmula do montante, temos:

$M = C(1+i)^t$

Logo: $9\,348 = 6\,000 \cdot (1+0{,}03)^t$

Assim: $(1{,}03)^t = \dfrac{9\,348}{6\,000} \Rightarrow (1{,}03)^t = 1{,}558 \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \log_{1{,}03} 1{,}558$

Aplicando a propriedade de mudança de base, temos:

$$t = \frac{\log 1{,}558}{\log 1{,}03}$$

Utilizando uma calculadora científica, obtemos os valores dos logaritmos:

$\log 1{,}588 \simeq 0{,}19257$ e $\log 1{,}03 \simeq 0{,}01284$

Assim:

$$t \simeq \frac{0{,}19257}{0{,}01284} \simeq 15$$

Portanto, Jorge deve aplicar seu capital por 15 meses.

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

29. Um investidor aplicou a quantia de R$ 200.000,00 à taxa de juro composto de 0,7% ao mês. Que montante esse capital vai gerar após 6 meses? aproximadamente R$ 208.548,38

30. Um capital de R$ 20.000,00 foi aplicado a juro composto durante oito meses à taxa mensal de 0,6% ao mês. Que montante será obtido ao final dessa aplicação? (Use: $1{,}006^8 \simeq 1{,}0490$.) aproximadamente R$ 20.980,00

31. Valter fez um empréstimo no banco no valor de R$ 30.000,00 pelo prazo de 24 meses. Sabendo que a taxa de juros compostos cobrada pelo banco é 0,95% a.m., qual é o montante que ele pagará ao final do empréstimo? aproximadamente R$ 37.642,03

32. Qual é o valor a ser aplicado hoje, a uma taxa de juro composto de 2% a.m., para que uma pessoa receba R$ 8.000,00 ao final de 6 meses? aproximadamente R$ 7.103,77

33. João deseja comprar um carro cujo preço à vista, com todos os descontos possíveis, é R$ 21.000,00, valor que não será reajustado nos próximos meses. Ele tem R$ 20.000,00, que podem ser aplicados a uma taxa de juro composto de 2% ao mês, e escolhe deixar todo o seu dinheiro aplicado até que o montante atinja o valor do carro. alternativa **c**

Para ter o carro, João deverá esperar:

a) dois meses e terá a quantia exata.

b) três meses e terá a quantia exata.

c) três meses e ainda sobrarão, aproximadamente, R$ 225,00.

d) quatro meses e terá a quantia exata.

e) quatro meses e ainda sobrarão, aproximadamente, R$ 430,00.

34. Luís vai aplicar certa quantia em um fundo imobiliário a uma taxa de juro composto de 5% a.a., ele deseja que, após 6 anos, essa quantia gere um montante de R$ 25.000,00. Qual valor aproximadamente Luís deve aplicar?

a) R$ 18.000,00.

b) R$ 18.655,38.

c) R$ 18.910,15.

d) R$ 19.328,45.

e) R$ 19.230,77.

alternativa **b**

35. Celina aplicou R$ 40.000,00 em um banco, a juros compostos de 16% a.a., capitalizados anualmente. Qual é o valor dos juros obtido ao final de 2 anos? aproximadamente R$ 13.824,00

36. Qual é o montante que um capital de R$ 4.000,00 produz quando aplicado:

a) durante 3 meses, a uma taxa de 4% a.m. de juro composto? aproximadamente R$ 4.499,46

b) durante 10 anos, a uma taxa de 2% a.m. de juro composto? aproximadamente R$ 43.060,65

c) durante 15 meses, a uma taxa de 0,02% a.d. de juro composto? aproximadamente R$ 4.376,66

37. Cláudio aplicou R$ 5.000,00 à taxa de 3% ao mês durante 5 meses. Que montante esse capital vai gerar, se o regime for de juro composto? Quantos reais de juro ele obterá nessa operação? aproximadamente R$ 5.796,37; aproximadamente R$ 796,37

38. (Saresp-SP) Um negociante pediu emprestados R$ 2.000,00 por três meses, sendo R$ 1.000,00 de um amigo e R$ 1.000,00 de uma casa bancária. O amigo lhe propôs cobrar juros simples, à taxa de 10% ao mês. A casa bancária impôs a cobrança de juros compostos à taxa de 10% ao mês.
Veja, na tabela abaixo, a evolução mensal da dívida, com valores em reais. alternativa **d**

	Capital	Dívida após 1 mês	Dívida após 2 meses	Dívida após 3 meses
Amigo	1000	1100	1200	1300
Banco	1000	1100	1210	1331

É correto afirmar que esses valores formam uma progressão:

a) aritmética de razão R$ 100,00 na casa bancária e geométrica de razão R$ 100,00 com seu amigo.

b) geométrica de razão 10 na casa bancária e aritmética de razão 10 com seu amigo.

c) geométrica de razão 10 com seu amigo e aritmética de razão 10 na casa bancária.

d) aritmética de razão R$ 100,00 com seu amigo e geométrica de razão 1,1 na casa bancária.

39. João aplicou seu capital durante 3 anos, à taxa de 12% a.a., no regime de juro simples. Caso houvesse aplicado a juro composto, à mesma taxa, teria recebido R$ 2.633,36 a mais. Quantos reais João recebeu de juros? aproximadamente R$ 1.544,49

40. (Vunesp-SP) Cássia aplicou o capital de R$ 15.000,00 a juros compostos, pelo período de 10 meses e à taxa de 2% a.m. (ao mês). Considerando a aproximação $(1{,}02)^5 = 1{,}1$, Cássia computou o valor aproximado do montante a ser recebido ao final da aplicação. Esse valor é: alternativa **b**

a) R$ 18.750,00
b) R$ 18.150,00
c) R$ 17.250,00
d) R$ 17.150,00
e) R$ 16.500,00

41. (FGV-SP) César aplicou R$ 10.000,00 num fundo de investimentos que rende juros compostos a uma certa taxa de juro anual positiva *i*. Após um ano, ele saca desse fundo R$ 7.000,00 e deixa o restante aplicado por mais um ano, quando verifica que o saldo é R$ 6.000,00. O valor de $(4i - 1)^2$ é: alternativa **d**

a) 0,01
b) 0,02
c) 0,03
d) 0,04
e) 0,05

42. (IFCE) Um capital foi aplicado a uma taxa anual de juros compostos e rende um montante de R$ 2.012,85 em 2 anos e um montante de R$ 2.314,77 em 3 anos. Indique o valor aproximado do capital investido. alternativa **c**

a) R$ 1.102,00
b) R$ 1.237,00
c) R$ 1.522,00
d) R$ 1.933,00
e) R$ 1.252,00

43. Uma pessoa aplicou R$ 18.000,00 à taxa de juro composto de 2,81% ao mês e obteve um rendimento de R$ 6.390,00. Qual é o prazo dessa aplicação? aproximadamente 11 meses

44. Qual é a taxa mensal de juro composto que, aplicada ao capital de R$ 24.000,00, o transforma em um montante de R$ 36.087,00 em 7 meses? 6% ao mês

45. (UFS-SE) Para analisar a veracidade das afirmações abaixo, considere que para estimar o crescimento populacional dos municípios de certo Estado é usada a expressão $P(t) = P(0) \cdot (1 + i)^t$, em que $P(0)$ é a população considerada em certo ano, $P(t)$ a população observada *t* anos depois e *i* a taxa anual de crescimento da população.

F **I.** Se em 2004 um município desse Estado tinha 50 000 habitantes e, a partir desse ano, a população aumentou anualmente à taxa de 2%, então em 2007 tal município deverá ter 50 604 habitantes.

F **II.** Sabe-se que, anualmente, a população de um município **X** cresce à taxa de 2%, enquanto que a de um município **Y** cresce à taxa de 5%. Se hoje **X** e **Y** têm, respectivamente, 19 600 e 28 900 habitantes, daqui a dois anos a razão entre seus respectivos números de habitantes será $\frac{2}{5}$.

V **III.** Atualmente, os municípios **X** e **Y** têm 129 600 e 122 500 habitantes, respectivamente. Supondo que a população de **X** cresça a uma taxa anual de 5% e a de **Y** cresça a uma taxa anual de 8%, então daqui a dois anos **X** e **Y** terão o mesmo número de habitantes.

F **IV.** A taxa anual de crescimento da população de um município pode ser calculada pela expressão

$$i = \frac{\log P(t) - \log P(0)}{t} - 1.$$

V **V.** Se atualmente um município tem 44 100 habitantes e nos últimos cinco anos sua população cresceu à taxa anual de 5%, então há dois anos o seu número de habitantes era menor que 42 000.

46. Um investidor aplicou R$ 80.000,00 a juros compostos de 2,2% ao mês.

a) Daqui a quantos meses terá um montante de R$ 85.400,00? aproximadamente 3 meses

b) Após quantos anos terá um montante de R$ 134.868,80? aproximadamente 2 anos

47. (UFPel-RS) Um dos motivos que leva as pessoas a enfrentarem o problema do desemprego é a busca, por parte das empresas, de mão de obra qualificada, dispensando funcionários não habilitados e pagando a indenização a que têm direito. Um funcionário que vivenciou tal problema recebeu uma indenização de R$ 57.000,00 em três parcelas, em que a razão da primeira para a segunda é de $\frac{4}{5}$ e a razão da segunda para a terceira, de $\frac{6}{12}$.

(Dados: log 1,06 = 0,0253; log 1,01 = 0,0043.)
Com base no texto e em seus conhecimentos, determine:

a) o valor de cada parcela; R$ 12.000,00; R$ 15.000,00; R$ 30.000,00

b) o tempo necessário para que o funcionário aplique o valor da primeira parcela, a juro composto, a uma taxa de 1% ao mês, para acumular um montante de R$ 12.738,00; aproximadamente 6 meses

c) a taxa mensal que deve ser aplicada, a juro simples, à segunda parcela, para que o funcionário, no final de 2 anos, obtenha o montante de R$ 25.800,00. 3% a.m.

48. Observe, no quadro a seguir, os juros do cartão de crédito e do cheque especial vigentes em março de 2024. Resposta pessoal.

Modalidade	Taxa (em % ao ano)
Cartão de crédito	421,3
Cheque especial	127,6

Fonte dos dados: MARTELLO, Alexandro. Cartão de crédito: juro volta a subir em março, mesmo com medida que limita dívida no rotativo. **G1**, Brasília, DF, 3 maio 2024. Disponível em: https://g1.globo.com/economia/noticia/2024/05/03/cartao-de-credito-juro-volta-a-subir-em-marco-mesmo-com-medida-que-limita-saldo-devedor-no-rotativo.ghtml Acesso em: 23 out. 2024.

De acordo com o conteúdo estudado, elabore um problema utilizando os dados desse quadro. Depois, troque-o com um colega, para que ele resolva seu problema, enquanto você resolve o problema elaborado por ele. Compare as taxas apresentadas e converse com familiares, colegas e o professor sobre o cuidado que devemos ter ao usar essas modalidades de crédito.

49. (UECE) Um investidor aplicou, no sistema de juros compostos, certa quantia em uma instituição financeira que remunera as aplicações à taxa de 1% mensal. Assim, é correto afirmar que o número de meses, a partir da aplicação, em que o capital inicial será dobrado é igual a alternativa **d**

a) 74.
b) 68.
c) 72.
d) 70.

Use os valores aproximados: log(1,01) = 0,0043 e log(2) = 0,30103.

50. (UERJ) Os clientes de um banco podem realizar apenas duas operações financeiras:

- fazer investimentos que rendem juros compostos a uma taxa mensal de 1%; ou
- pegar empréstimos com juros compostos a uma taxa mensal de 5%.

O banco usa o dinheiro dos investimentos para conceder os empréstimos, obtendo lucro nessas transações.
Considere que um cliente **X** investiu R$ 1.000,00 e que o banco emprestou esse valor a um cliente **Y**. Após 12 meses, o cliente **X** recebeu o montante pela aplicação nesse período e **Y** quitou o empréstimo.
Admitindo $(1{,}01)^{12} = 1{,}13$ e $(1{,}05)^{12} = 1{,}80$, o lucro, em reais, obtido pelo banco com essas duas operações financeiras é igual a: alternativa **c**

a) 470 **c)** 670
b) 520 **d)** 820

51. (UECE) Ana Sofia foi às compras dispondo de R$ 300,00. Ao entrar em uma loja magazine, gostou de uma blusa no valor de R$ 180,00 e de uma sandália que custava R$ 130,00. O custo das duas peças excedia o dinheiro de que Ana Sofia dispunha. O vendedor informou que uma promoção da loja garantia que, se ela comprasse as duas peças, teria um desconto de 15% na peça de maior valor e 20% na peça de menor valor. Tendo aceitado a promoção, após o pagamento, Ana Sofia recebeu um troco correspondente a x% do que dispunha ao entrar na loja. O valor de x está entre:

a) 14 e 15. **c)** 15 e 16. alternativa **a**
b) 12 e 13. **d)** 13 e 14.

Conhecendo a planilha eletrônica

A planilha eletrônica é uma ferramenta muito útil em diversas situações do dia a dia e na resolução de problemas matemáticos. Com ela, cálculos recorrentes, por exemplo, podem ser feitos rapidamente com a criação de uma fórmula adequada ou utilizando uma fórmula disponível no banco de dados do *software*.

Existem planilhas eletrônicas de diversos fabricantes, mas todas elas funcionam de maneira muito semelhante. Aqui, vamos utilizar a planilha eletrônica do **LibreOffice**, que pode ser baixada gratuitamente no *site* oficial https://pt-br.libreoffice.org/ (acesso em: 26 set. 2024).

Cálculo de juros

Leia o problema a seguir.

> Sandro aplicou um capital (C) de R$ 10.000,00 em dezembro de 2023 a uma taxa de juros (i) de 3% a.m. Ao final de dezembro de 2024, Sandro verificou seu extrato. Considerando os montantes obtidos do regime de juro composto e do regime de juro simples, qual foi a diferença, em reais, entre esses montantes?

Agora, siga os passos que podem ser realizados para resolver esse problema usando uma planilha eletrônica.

I. Abra uma planilha no LibreOffice e organize as colunas da planilha, digitando "Mês", "Tempo (t)", "Montante (M) a juro simples" e "Montante (M) a juro composto", como indicado a seguir.

	A	B	C	D
1	Mês	Tempo(t)	Montante (M) a juro simples	Montante (M) a juro composto
2				
3				

II. Digite o nome dos meses do ano e o número correspondente a cada mês.

Conforme estudamos, o montante (M) em regime de juro simples pode ser obtido por meio da relação $M = C \cdot (1 + i \cdot t)$ e, em regime de juro composto, pode ser obtido por $M = C \cdot (1 + i)^t$.

	A	B	C	D
1	Mês	Tempo(t)	Montante (M) a juro simples	Montante (M) a juro composto
2	Janeiro	1		
3	Fevereiro	2		
4	Março	3		
5	Abril	4		
6	Maio	5		
7	Junho	6		
8	Julho	7		
9	Agosto	8		
10	Setembro	9		
11	Outubro	10		
12	Novembro	11		
13	Dezembro	12		

IMAGENS: REPRODUÇÃO/LIBREOFFICE

Vamos utilizar essas fórmulas para realizar os cálculos, lembrando que *C* é o capital, que, nesse caso, é R$ 10.000,00, a taxa de juros (*i*) é 3% ou 0,03, e o tempo (*t*) será representado pelo número correspondente ao mês.

III. Para calcular o montante (*M*) em janeiro, em regime de juro simples, na célula C2, digite: "=10000*(1+0,03*B2)" e pressione ***Enter***.

=10000*(1+0,03*B2)

	A	B	C	D
1	**Mês**	**Tempo(*t*)**	**Montante (*M*) a juro simples**	**Montante (*M*) a juro composto**
2	Janeiro	1	=10000*(1+0,03*B2)	

IV. Para calcular o montante (*M*) em janeiro, em regime de juro composto, na célula D2, digite: "=10000*(1+0,03)^B2" e pressione ***Enter***.

=10000*(1+0,03)^B2

	A	B	C	D
1	**Mês**	**Tempo(*t*)**	**Montante (*M*) a juro simples**	**Montante (*M*) a juro composto**
2	Janeiro	1	10300	=10000*(1+0,03)^B2

V. Para obter o montante (*M*) gerado nos demais meses, selecione as células C2 e D2 e, em seguida, clique no quadradinho destacado em vermelho, 10300 10300, arrastando a seleção até a linha de dezembro. Ainda com as células dos valores de montante selecionadas, para deixar os valores em formato monetário, clique na ferramenta **Formatar como moeda**:

C2:D13 =10000*(1+0,03*B2)

	A	B	C	D
1	**Mês**	**Tempo(*t*)**	**Montante (*M*) a juro simples**	**Montante (*M*) a juro composto**
2	Janeiro	1	R$ 10.300,00	R$ 10.300,00
3	Fevereiro	2	R$ 10.600,00	R$ 10.609,00
4	Março	3	R$ 10.900,00	R$ 10.927,27
5	Abril	4	R$ 11.200,00	R$ 11.255,09
6	Maio	5	R$ 11.500,00	R$ 11.592,74
7	Junho	6	R$ 11.800,00	R$ 11.940,52
8	Julho	7	R$ 12.100,00	R$ 12.298,74
9	Agosto	8	R$ 12.400,00	R$ 12.667,70
10	Setembro	9	R$ 12.700,00	R$ 13.047,73
11	Outubro	10	R$ 13.000,00	R$ 13.439,16
12	Novembro	11	R$ 13.300,00	R$ 13.842,34
13	Dezembro	12	R$ 13.600,00	R$ 14.257,61

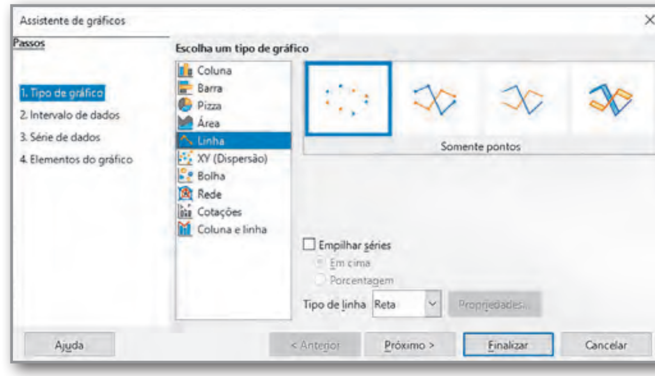
IMAGENS: REPRODUÇÃO/LIBREOFFICE

VI. Observe a planilha com os valores obtidos nesse passo a passo. Repare que, pelo regime de juro composto, o montante obtido é maior do que o obtido considerando o regime de juro simples, ainda que o período e a taxa sejam iguais em ambos os casos.

Construindo gráficos

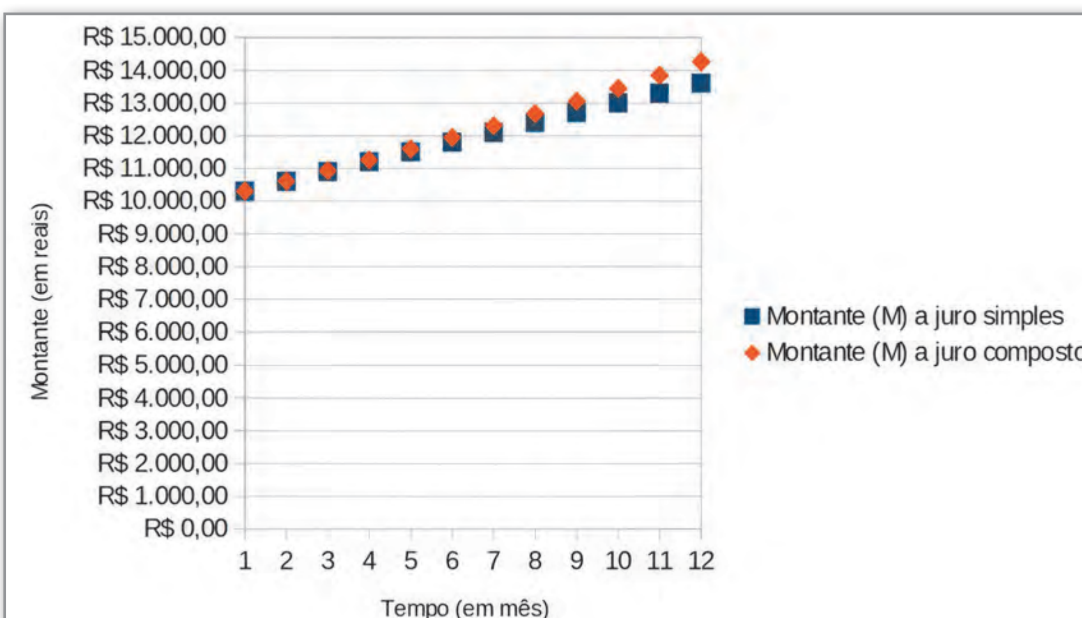
I. Primeiro, selecione as colunas referentes aos montantes. Para fazer isso, clique na célula C1, depois pressione e segure a tecla ***Shift*** e clique na célula D13.

II. Clique no *menu* **Inserir** e, em seguida, clique em **Gráfico...**. Uma janela de assistente de gráficos será aberta, como esta da imagem.
No assistente, você pode escolher o tipo de gráfico que desejar. Vamos escolher gráfico de **Linha** e a opção **Somente pontos**. Em seguida clique em **Finalizar**.



IMAGENS: REPRODUÇÃO/LIBREOFFICE

III. Depois de inserir o gráfico, você pode personalizá-lo conforme necessário. Para isso você pode clicar com o botão direito sobre o elemento que deseja personalizar. Por exemplo, podemos mudar a escala do eixo vertical e acrescentar nomes aos eixos. Dessa maneira, podemos obter um gráfico como o seguinte.



Agora, faça o que se pede nas atividades a seguir. NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. Na situação apresentada, qual é a diferença, em reais, entre o montante obtido em dezembro em regime de juro composto e o obtido nesse mesmo mês em regime de juro simples? R$ 657,61

2. No mês de janeiro, os valores do montante gerado em regime de juro simples e em regime de juro composto são iguais. Explique o motivo. Resposta possível: Como o mês de janeiro corresponde a $t = 1$, ao substituirmos t por 1 na fórmula, em ambos os casos, obtemos $M = C \cdot (1 + i)$.

3. Construa uma planilha eletrônica para determinar o montante considerando um capital de R$ 20.000,00 aplicado a uma taxa de 2% a.m. Calcule o montante obtido ao final de um ano, considerando os dois sistemas: juro simples e juro composto. juro simples: R$ 24.800,00; juro composto: aproximadamente R$ 25.364,84

» Valor presente e valor futuro

O mundo financeiro pode parecer complexo, mas entender alguns conceitos pode ajudar a compreendê-lo melhor. Dois desses conceitos são o valor presente e o valor futuro. Eles são fundamentais para entender como o dinheiro muda de valor ao longo do tempo.

O **valor presente** é o valor de um capital em determinado momento, enquanto o **valor futuro** é o valor desse capital após certo período de tempo, ou seja, o montante. É importante lembrar que todo valor futuro inclui juros.

Vamos considerar uma situação prática. Imagine que você esteja indeciso e não sabe se paga sua compra de R$ 200,00 hoje ou se paga R$ 220,00 daqui a um mês, pois pode utilizar essa quantia em outra despesa. Como saber qual seria a melhor opção? Para responder a essa pergunta, precisamos analisar o valor da quantia R$ 200,00 ao longo do tempo.

Suponha que o banco no qual você tem uma conta lhe ofereceu um investimento que faz seu dinheiro render 7% ao mês. E agora, o que fazer? Paga sua compra de R$ 200,00 hoje ou investe esse valor a essa taxa e paga R$ 220,00 daqui a um mês?

Sabemos que, no regime de juro composto, um capital C, aplicado por t período de tempo a uma taxa i, resulta em um montante $M = C \cdot (1 + i)^t$. Assim:

- o valor futuro (VF) de um capital é dado por:

$$VF = VP \cdot (1 + i)^t$$

- o valor presente (VP) de um capital é dado por:

$$VP = \frac{VF}{(1 + i)^t}$$

Retomando a situação, aplicando a relação do valor futuro (VF), temos:

$$VF = 200 \cdot (1 + 0{,}07)^1 = 200 \cdot 1{,}07 = 214$$

Logo, obtemos um valor futuro igual a R$ 214,00. Portanto, em vez de investir a quantia, seria mais vantajoso pagar R$ 200,00 hoje do que R$ 220,00 daqui a um mês, pois o valor de R$ 200,00 aplicado a 7% ao mês será menor do que R$ 220,00 após um mês.

Agora, considere outra situação. Lorena está planejando comprar uma moto que custa R$ 30.000,00. No entanto, ela não tem esse valor disponível no momento. Assim, ela planeja economizar para comprar a moto daqui a 12 meses. Ela encontrou um investimento que oferece uma taxa de juro composto de 5% ao mês. Quantos reais aproximadamente Lorena precisaria investir hoje para ter exatamente R$ 30.000,00 daqui a 12 meses?

Para responder a essa pergunta, podemos usar a relação do valor presente (VP):

$$VP = \frac{30\,000}{(1 + 0{,}05)^{12}} = \frac{30\,000}{1{,}05^{12}} \simeq 16\,705{,}12$$

Portanto, Lorena precisaria investir aproximadamente R$ 16.705,12 hoje em um investimento que renda 5% ao mês para ter R$ 30.000,00 daqui a 12 meses.

ATIVIDADES RESOLVIDAS

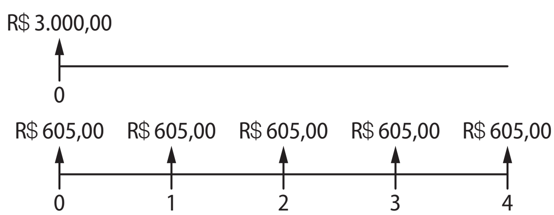
14. Ao planejar a compra de um novo computador, uma pessoa tem as seguintes opções de pagamento:

- Opção 1: à vista, por R$ 3.000,00.
- Opção 2: em cinco prestações mensais de R$ 605,00 cada, com a primeira parcela paga no ato da compra.

Sabendo que o dinheiro dessa pessoa rende 2% ao mês, qual seria a melhor opção para ela?

Resolução

Para saber a melhor opção, vamos construir esquemas de pagamento.



Em seguida, determinamos o valor presente dos conjuntos de pagamentos, considerando o período 0, e por fim comparamos as opções.

- Opção 1: 3 000
- Opção 2: $605 + \dfrac{605}{(1 + 0{,}02)^1} + \dfrac{605}{(1 + 0{,}02)^2} + \dfrac{605}{(1 + 0{,}02)^3} + \dfrac{605}{(1 + 0{,}02)^4} \simeq 2\,908{,}68$

Portanto, optar pelo pagamento em cinco prestações é mais vantajoso, pois R$ 2.908,68, rendendo 2% ao mês, é suficiente para pagar as cinco prestações.

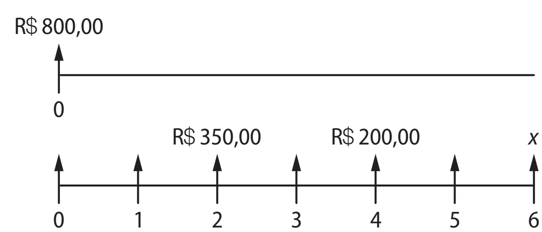
15. Humberto pegou emprestados R$ 800,00 a uma taxa de juro composto de 5% ao mês. Para quitar essa dívida, ele combinou que:

- após 2 meses do empréstimo, pagaria R$ 350,00;
- após 2 meses do 1º pagamento, pagaria R$ 200,00;
- após 2 meses do 2º pagamento, quitaria a dívida.

Qual será aproximadamente o valor do último pagamento de Humberto?

Resolução

Para determinarmos o valor x do último pagamento, vamos construir esquemas de pagamento:



ILUSTRAÇÕES: SERGIO LIMA

Agora, trazemos todas as prestações para o valor presente e igualamos a soma desses valores ao valor da dívida:

$$800 = \frac{350}{(1 + 0{,}05)^2} + \frac{200}{(1 + 0{,}05)^4} + \frac{x}{(1 + 0{,}05)^6} \Rightarrow x \simeq 426{,}15$$

Portanto, o último pagamento de Humberto será aproximadamente R$ 426,15.

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

52. Uma pessoa quer quitar uma dívida três meses antes do vencimento. O valor futuro dessa dívida é de R$ 20.000,00, e a taxa de juro composto fixada pelo banco é de 3% ao mês. Determine qual é aproximadamente o valor presente da dívida, isto é, o valor que a pessoa deve pagar para quitá-la. aproximadamente R$ 18.302,83

53. Lúcia fez um empréstimo de R$ 4.000,00 a uma taxa de juro composto de 8% ao mês. Ela quitou esse empréstimo da seguinte maneira: dois meses após o empréstimo, ela pagou R$ 1.500,00; três meses após o primeiro pagamento, ela quitou a dívida. Qual foi o valor do último pagamento de Lúcia? aproximadamente R$ 3.987,74

54. Fabiano vai comprar uma TV de 75 polegadas que custa R$ 5.400,00. A loja em que ele vai comprar oferece três opções de pagamento.

- Opção 1: à vista, com 5% de desconto.
- Opção 2: em três parcelas de R$ 1.800,00 por mês, sendo a primeira parcela um mês após a compra.
- Opção 3: em oito parcelas de R$ 675,00 por mês, sendo a primeira parcela paga no ato da compra.

Se o dinheiro de Fabiano rende 1,5% ao mês, qual é a opção de pagamento mais vantajosa para ele? opção 3

Orçamento familiar

Pense sobre a seguinte questão: como as pessoas ou grupos familiares sabem quando são capazes de arcar financeiramente com a parcela de um financiamento ou com a prestação de uma compra parcelada?

Uma maneira seria visualizar todos os ganhos e gastos da família e fazer um **orçamento**, reunindo as informações referentes à quantia recebida e à quantia gasta em determinado período.

O **orçamento familiar** bem organizado possibilita que as pessoas de uma família tenham o conhecimento e o controle de suas finanças, para que possam avaliar se a compra de um bem ou serviço pode ser realizada.

Para a elaboração do orçamento familiar, é importante entender seus elementos-chave e envolver todos os membros da família que são capazes de tomar decisões relacionadas ao uso do dinheiro naquele grupo. A seguir apresentamos alguns desses elementos.

- **Receita**: rendimento que a família ganha durante um período específico. A receita pode vir de várias fontes, como salários, aposentadorias, rendimentos de investimentos e auxílios ou doações, ou seja, é qualquer valor ganho que se agrega ao saldo da família.
- **Despesa**: qualquer valor que a família gasta durante um período específico. As despesas podem incluir alimentação, serviços e taxas (como, por exemplo, água, luz, telefone e internet), vestuário, assistência médica, entre outros.
- **Saldo**: valor que resta depois de serem subtraídas as despesas do total de receitas. É uma medida importante da saúde financeira da família.

Quando elaboramos um orçamento familiar, consideramos algumas despesas que são fixas e outras que são variáveis.

As **despesas fixas**, como aluguel, prestação do imóvel, mensalidade escolar, entre outras, são aquelas cujo valor não depende da quantidade consumida.

As **despesas variáveis**, como a conta de água e a de energia elétrica, a alimentação, o transporte, entre outras, são aquelas cujo valor depende da quantidade consumida.

Pense e responda

Se fosse necessário fazer algum ajuste no orçamento familiar por conta de um imprevisto financeiro, o que você faria?

Resposta pessoal.

PRESSMASTER/SHUTTERSTOCK.COM

O planejamento financeiro deve estar organizado de forma clara e ser de fácil compreensão.

Acompanhe a situação a seguir.

Alice mora com o filho, Sérgio, e a neta, Bruna. Essa família paga suas despesas juntando a aposentadoria de Alice, no valor líquido de R$ 2.258,00, e o salário de Sérgio, no valor líquido de R$ 1.725,00.

Conversando com a avó, Bruna propôs que fizessem juntas uma planilha para reunir as informações sobre os gastos mensais da família, de modo a fazer um orçamento e planejar uma viagem. Elas construíram uma planilha como a mostrada a seguir.

Para saber o total de despesas da família, Bruna digitou "=SOMA(C4:C13)" na célula C14 e pressionou ***Enter***.

Para saber o total de receitas da família, Bruna digitou "=B2+B3" na célula B14 e pressionou ***Enter***.

	A	B	C
1	Descrição	Receitas	Despesas
2	Aposentadoria	R$ 2.258,00	
3	Salário	R$ 1.725,00	
4	Conta de água		R$ 78,00
5	Conta de luz		R$ 145,60
6	Telefone		R$ 289,90
7	Conta de gás		R$ 91,50
8	Faculdade		R$ 1.098,00
9	Transporte		R$ 480,00
10	Supermercado		R$ 965,00
11	Outros gastos		R$ 430,00
12			
13			
14	Total	R$ 3.983,00	R$ 3.578,00
15	Saldo		R$ 405,00

Para obter o saldo do mês, Bruna digitou "=B14−C14" na célula C15 e pressionou ***Enter***.

Pense e responda

O saldo pode ser um valor negativo? Em que situação isso acontece?

Sim. Quando o total de despesas é maior do que o total de receitas.

Utilizando esses dados, a família de Alice pode antecipar seus gastos para o próximo mês. Eles podem fazer isso por meio de um orçamento que detalha os valores previstos e, depois, registrar os valores reais para verificar se conseguiram cumprir as metas financeiras que estabeleceram. Isso pode ser feito mês a mês, a fim de analisar quais despesas podem ser reduzidas e, com isso, gerar maior economia de dinheiro. Eles podem definir, inclusive, uma quantia a ser poupada e fixar isso como se fosse uma "despesa" incluída na planilha.

Pense e responda

Com base nas informações sobre a família de Alice, é possível fazer uma previsão de gastos para o mês seguinte. Em sua opinião, qual(is) despesa(s) pode(m) ser reduzida(s)?

Resposta pessoal.

FÓRUM

Consumo sustentável

Atualmente, somos constantemente incentivados a consumir e muitas vezes compramos algo de que não precisamos. Mas será que o simples fato de um produto estar com um preço mais baixo do que o habitual é suficiente para justificar a compra? Ou deveríamos ir além e considerar também o impacto ambiental dessa compra?

Leia o texto a seguir e reflita sobre a informação apresentada.

> [...]
>
> O Consumo Sustentável envolve a escolha de produtos que utilizaram menos recursos naturais em sua produção, que garantiram o emprego decente aos que os produziram, e que serão facilmente reaproveitados ou reciclados. Significa comprar aquilo que é realmente necessário, estendendo a vida útil dos produtos tanto quanto possível. Consumimos de maneira sustentável quando nossas escolhas de compra são conscientes, responsáveis, com a compreensão de que terão consequências ambientais e sociais – positivas ou negativas.
>
> [...]
>
> Consumo consciente, consumo verde, consumo responsável são nuances do Consumo Sustentável, cada um focando uma dimensão do consumo. O consumo consciente é o conceito mais amplo e simples de aplicar no dia a dia: basta estar atento à forma como consumimos – diminuindo o desperdício de água e energia, por exemplo – e às nossas escolhas de compra – privilegiando produtos e empresas responsáveis. A partir do consumo consciente, a sociedade envia um recado ao setor produtivo de que quer que lhe sejam ofertados produtos e serviços que tragam impactos positivos ou reduzam significativamente os impactos negativos [...]
>
> [...]
>
> BRASIL. Ministério do Meio Ambiente. **Consumo sustentável**: o que é consumo sustentável. Brasília, DF: MMA, [2011]. Disponível em: https://antigo.mma.gov.br/responsabilidade-socioambiental/producao-e-consumo-sustentavel/conceitos/consumo-sustentavel.html. Acesso em: 26 set. 2024.

SEWCREAMSTUDIO/SHUTTERSTOCK.COM

■ Cada escolha consciente é importante para um planeta mais sustentável.

Converse com os colegas e o professor sobre a questão a seguir.

- Como o impacto ambiental de um produto pode influenciar nossas decisões de compra? Como a sua turma ou a escola poderiam se organizar e pensar em um projeto que valorize e divulgue práticas de consumo sustentável? Ver as **Orientações para o professor**.

Sistemas de amortização

Quando adquirimos um bem de maior valor, como um automóvel ou um imóvel, é comum fazermos um empréstimo ou financiamento por meio de uma instituição financeira. Nesse tipo de transação, o valor acordado, conhecido como capital, é devolvido à instituição com um acréscimo, o juro.

Uma vez contratado o financiamento, o processo para saldar a dívida se dá por meio de pagamentos periódicos, conhecidos como **parcelas** ou **prestações**, que são pagas em intervalos de tempo constantes, normalmente mensais. Alguns financiamentos também incluem o pagamento de quantias preestabelecidas, que são pagas em datas combinadas previamente.

Em um empréstimo ou financiamento, o valor de cada prestação é composto de uma parte do capital adquirido e do juro calculado sobre o saldo devedor. Essa parte do capital adquirido é também chamada de **amortização** ou **valor amortizado**.

Assim, considerando P o valor da prestação, A o valor amortizado e J o juro sobre o saldo devedor, podemos escrever:

$$P = A + J$$

As diferentes maneiras de se realizar esse cálculo caracterizam o que chamamos de **sistema de amortização**. Alguns dos sistemas mais utilizados são: Sistema Price ou Francês, Sistema de Amortização Constante (SAC), Sistema de Amortização Misto (SAM), entre outros.

Vamos estudar o Sistema Price e o Sistema de Amortização Constante, que costumam ser os mais praticados no mercado consumidor.

Sistema Price

O Sistema Price, ou Sistema de Amortização Francês, é aquele que prevê o pagamento em **prestações iguais**, de valor fixo, durante todo o período de quitação do valor emprestado ou financiado. Normalmente é mais utilizado em contratos de curto prazo, como a compra de automóveis.

Acompanhe a situação a seguir.

Aline vai comprar um carro no valor de R$ 39.500,00 e pretende pagar R$ 7.500,00 como valor de entrada e financiar o restante da dívida em 36 prestações.

Ela conseguiu uma proposta de financiamento em um banco, a uma taxa de 2,5% ao mês, considerando o Sistema Price de amortização. O gerente enviou a ela uma planilha com algumas informações sobre as prestações. Observe as primeiras linhas dessa planilha.

Esclarecer aos estudantes que o mês 0 indica a ocasião em que o contrato foi celebrado.

Mês	Prestação	Amortização	Juros	Saldo devedor
0				R$ 32.000,00
1	R$ 1.358,45	R$ 558,45	R$ 800,00	R$ 31.441,55
2	R$ 1.358,45	R$ 572,41	R$ 786,04	R$ 30.869,14
3	R$ 1.358,45	R$ 586,72	R$ 771,73	R$ 30.282,42

Saiba que...

No Sistema Price, ao observar os valores que compõem a prestação, verifica-se que o valor correspondente à amortização aumenta e o juro diminui com o passar do tempo.

Pense e responda

Sabendo que os juros são calculados sobre o saldo devedor, quantos reais Aline vai pagar de juros na quarta prestação? Utilize uma calculadora para obter o resultado.

R$ 757,06

Acompanhe uma situação em que deduzimos o valor da prestação P no sistema Price considerando um valor V, financiado a uma taxa de juro i, que será pago em 3 prestações.

Ao fim do primeiro mês, deve-se à instituição financiadora: $V \cdot (1 + i)$ e paga-se P. Assim, o saldo devedor é:

$$V(1 + i) - P$$

Ao fim do segundo mês, deve-se à instituição financiadora $[V(1 + i) - P] \cdot (1 + i)$ e paga-se P. Assim, o saldo devedor é:

$$[V(1 + i) - P] \cdot (1 + i) - P = V(1 + i)^2 - (1 + i)P - P$$

Ao fim do terceiro mês, deve-se à instituição $[V(1 + i)^2 - (1 + i)P - P] \cdot (1 + i)$ e paga-se P. Assim, o saldo devedor é:

$$[V(1 + i)^2 - (1 + i)P - P] \cdot (1 + i) - P =$$
$$= V(1 + i)^3 - (1 + i)^2P - (1 + i)P - P$$

Como a terceira prestação é a última, o saldo devedor ao fim do terceiro mês é igual a zero. Logo:

$$V(1 + i)^3 - (1 + i)^2P - (1 + i)P - P = 0$$

Isolando o valor de P, obtemos:

$$P = \frac{V(1 + i)^3}{(1 + i)^2 + (1 + i) + 1}$$

Substituindo $(1 + i)^2 + (1 + i) + 1$ por $\frac{(1 + i)^3 - 1}{(1 + i) - 1}$, temos:

$$P = \frac{V(1 + i)^3}{\frac{(1 + i)^3 - 1}{(1 + i) - 1}} = \frac{V(1 + i)^3 \cdot i}{(1 + i)^3 - 1}$$

Generalizando esse resultado, apresentamos a seguir uma forma de calcular o valor da prestação nesse sistema de amortização.

Saiba que...

Dados os números a e b, podemos escrever a diferença de a e b elevados ao cubo como:

$$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$$

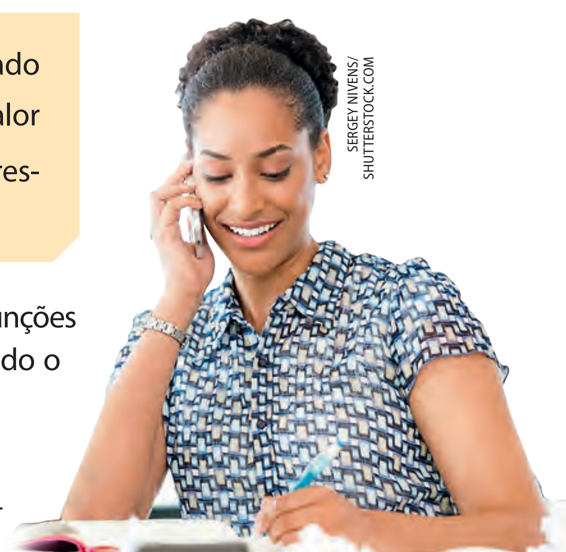
Isolando o segundo fator do segundo membro da igualdade, temos:

$$a^2 + ab + b^2 = \frac{a^3 - b^3}{a - b}$$

Repare que, na dedução da fórmula do valor da prestação no Sistema Price, temos $a = (1 + i)$ e $b = 1$.

O valor P da prestação no Sistema Price pode ser calculado utilizando-se a expressão $P = V \cdot \frac{(1 + i)^n \cdot i}{(1 + i)^n - 1}$, em que V é o valor financiado, i é a taxa de juro ao mês e n é a quantidade de prestações a serem quitadas.

Atualmente, os *softwares* de planilhas eletrônicas apresentam funções que permitem criar uma tabela com os valores envolvidos em todo o financiamento, que é também conhecida como **Tabela Price**.



SERGEY NIVENS/
SHUTTERSTOCK.COM

- Conhecer o valor a ser pago todo mês e a vantagem de a primeira parcela não ser tão alta quando comparada a outros sistemas de amortização são fatores que atraem as pessoas a optar pelo Sistema Price.

» Sistema de Amortização Constante (SAC)

Assim como o nome sugere, o Sistema de Amortização Constante (SAC) é aquele no qual a amortização A é constante, caracterizando um sistema mais acelerado de amortização, quando comparado ao Price. Com isso, as parcelas iniciais costumam ser mais altas.

Nesse sistema, a amortização de uma dívida é calculada pela razão entre o capital C contratado e a quantidade n de parcelas, indicada por:

$$A = \frac{C}{n}$$

Geralmente, esse sistema é mais utilizado em contratos de longo prazo, envolvendo quantias muito grandes, como a compra de imóveis.

Acompanhe a situação a seguir.

Pedro e Amanda são sócios em uma loja de móveis e aproveitaram uma oportunidade para investir no imóvel onde a loja funciona atualmente, que é um local alugado. Para isso, precisaram fazer um empréstimo de R$ 70.000,00, a juro de 0,65% ao mês, pelo SAC.

Quando analisaram as possibilidades e a proposta da instituição financeira, optaram por um período de 10 anos de financiamento.

Como a amortização é um valor fixo que compõe parte do valor de cada prestação, o saldo devedor diminuirá a cada mês, de acordo com o pagamento das parcelas. Consequentemente, o valor do juro que será calculado sobre o saldo devedor também diminuirá, fazendo o valor da próxima parcela ser inferior ao valor da parcela anterior.

Nesse caso, o valor amortizado em cada prestação é R$ 583,33:

$$\text{R\$ } 70.000{,}00 : 120 = \text{R\$ } 583{,}33$$

O valor de juro pago na primeira parcela é calculado sobre o saldo devedor, que corresponde a todo o valor emprestado. Nesse caso, a taxa é de 0,65% ao mês. Assim temos:

$$J = 0{,}0065 \cdot \text{R\$ } 70.000{,}00 = \text{R\$ } 455{,}00$$

A primeira prestação é obtida pela adição do valor da amortização e o do juro correspondentes:

$$P_1 = \text{R\$ } 583{,}33 + \text{R\$ } 455{,}00 = \text{R\$ } 1.038{,}33$$

A segunda prestação é obtida pela adição do valor da amortização (R$ 583,33) e o do juro correspondente, que é calculado sobre o saldo devedor (R$ 69.416,67):

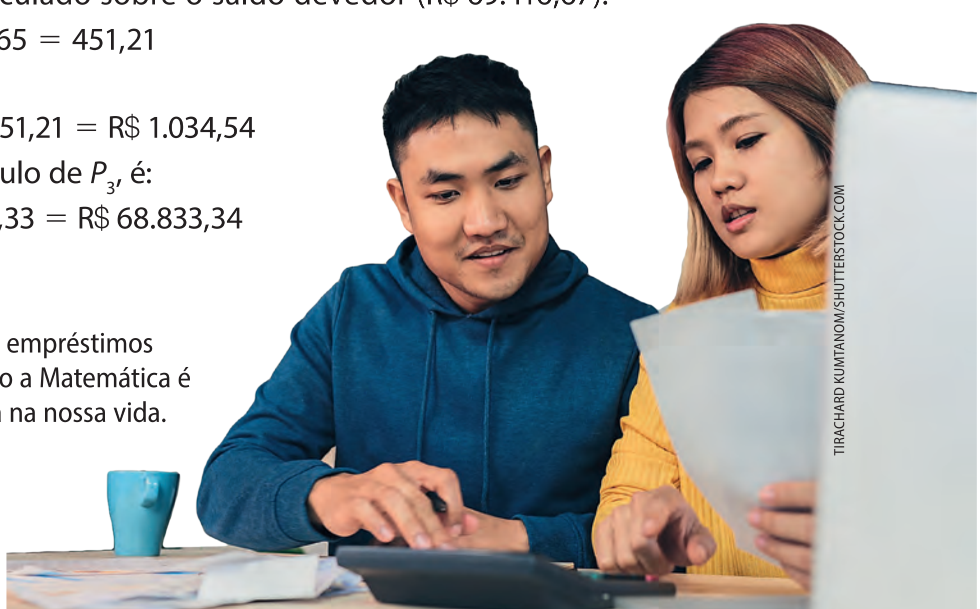
$$69\,416{,}67 \cdot 0{,}0065 = 451{,}21$$

Assim:

$$P_2 = \text{R\$ } 583{,}33 + \text{R\$ } 451{,}21 = \text{R\$ } 1.034{,}54$$

O saldo devedor, para o cálculo de P_3, é:

$$\text{R\$ } 69.416{,}67 - \text{R\$ } 583{,}33 = \text{R\$ } 68.833{,}34$$



TIRACHARD KUMTANOM/SHUTTERSTOCK.COM

▪ Situações envolvendo empréstimos são exemplos de como a Matemática é empregada na prática na nossa vida.

Observe como podemos organizar esses valores em uma planilha e calcular os valores das cinco primeiras prestações.

Mês	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	R$ 70.000,00			
1	R$ 69.416,67	R$ 583,33	R$ 455,00	R$ 1.038,33
2	R$ 68.833,34	R$ 583,33	R$ 451,21	R$ 1.034,54
3	R$ 68.250,01	R$ 583,33	R$ 447,42	R$ 1.030,75
4	R$ 67.666,68	R$ 583,33	R$ 443,62	R$ 1.026,95
5	R$ 67.083,35	R$ 583,33	R$ 439,83	R$ 1.023,16

Saiba que...

No SAC, o saldo devedor sofre redução **mais acelerada** em comparação com o Sistema Price. Como o juro é calculado sobre esse valor, o montante de juro gerado por um capital financiado no SAC será menor do que o montante de juro gerado pelo mesmo capital ao fim de um mesmo financiamento no Sistema Price, ao ser considerado o mesmo período.

ATIVIDADES RESOLVIDAS

16. Marília vai fazer um empréstimo de R$ 50.000,00 para uma reforma em seu estúdio de fotografia e está analisando qual sistema de amortização vai utilizar, de acordo com as propostas de uma agência financiadora, que trabalha com uma taxa de 0,95% ao mês. Ela pretende saldar a dívida em 6 anos.

a) Qual será o valor amortizado em cada parcela se Marília decidir pelo SAC? De quanto será a 1ª prestação nesse caso?

b) Se decidir pelo Sistema Price, qual será o valor de cada prestação? Qual será o valor amortizado na primeira prestação?

Resolução

a) Como no SAC o valor amortizado é constante em todo o período de quitação, dividimos o capital pela quantidade de prestações. Assim, temos:

$$A = \frac{50\,000}{72} \simeq 694{,}44$$

Portanto, o valor amortizado em cada parcela será R$ 694,44.

O juro pago na primeira prestação é calculado considerando todo o capital emprestado, pois ainda não houve amortização. Nesse caso, temos:

$$J = 0{,}0095 \cdot \text{R\$ } 50.000{,}00 = \text{R\$ } 475{,}00$$

Logo: $P_1 = \text{R\$ } 694{,}44 + \text{R\$ } 475{,}00 = \text{R\$ } 1.169{,}44$

Então, no SAC, a primeira prestação será R$ 1.169,44.

b) No Sistema Price, o valor da prestação é constante em todo o período de quitação e pode ser obtido por meio da expressão:

$$P = V \cdot \frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1}$$

Substituindo V por 50 000, i por 0,0095 e n por 72 e utilizando uma calculadora científica, obtemos o valor de P:

$$P = 50\,000 \cdot \frac{(1+0{,}0095)^{72} \cdot 0{,}0095}{(1+0{,}0095)^{72} - 1} \simeq 961{,}98$$

Desse modo, o valor de cada prestação será R$ 961,98 no sistema Price.

Assim como no SAC, o juro pago na primeira prestação é calculado sobre todo o valor tomado como empréstimo. Recuperando o valor calculado no item **a**, temos:

$$J = \text{R\$ } 475{,}00$$

Logo:

$A = \text{R\$ } 961{,}98 - \text{R\$ } 475{,}00 = \text{R\$ } 486{,}98$

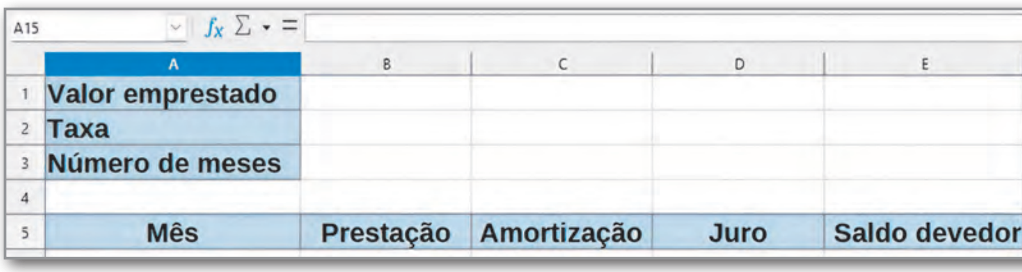
Portanto, o valor amortizado na primeira prestação é R$ 486,98.

17. Construa uma planilha eletrônica simulando os valores das prestações de amortização e dos juros cobrados pela agência financiadora da atividade anterior para auxiliar Marília a analisar a situação proposta.

Resolução

Inicialmente, vamos construir uma tabela considerando o Sistema Price, utilizando o passo a passo a seguir.

I. Abrimos uma planilha no **LibreOffice**, e nas células A1, A2 e A3, digitamos "Valor emprestado", "Taxa" e "Número de meses", respectivamente. Em seguida, organizamos as colunas da planilha digitando "Mês", "Prestação", "Amortização", "Juro" e "Saldo devedor". Com a ferramenta **Cor do plano de fundo**, , formatamos as células preenchidas anteriormente com a cor desejada, como na imagem.



	A	B	C	D	E
1	Valor emprestado				
2	Taxa				
3	Número de meses				
4					
5	Mês	Prestação	Amortização	Juro	Saldo devedor

IMAGENS: REPRODUÇÃO/LIBREOFFICE

II. Com a ferramenta **Formatar como moeda**, , formatamos as células B1, B6, C6, D6 e E6. Também formatamos a célula B2, clicando em **Formatar como porcentagem**, %. Depois, digitamos "50000", "0,95" e "72" nas células B1, B2 e B3, respectivamente.

III. Nas células A6, B6, C6 e D6, digitamos "0" (zero). Na célula E6 digitamos "=\$B\$1" e pressionamos ***Enter*** (o \$ serve para deixar fixa a célula indicada). Essa linha corresponde ao início do contrato.

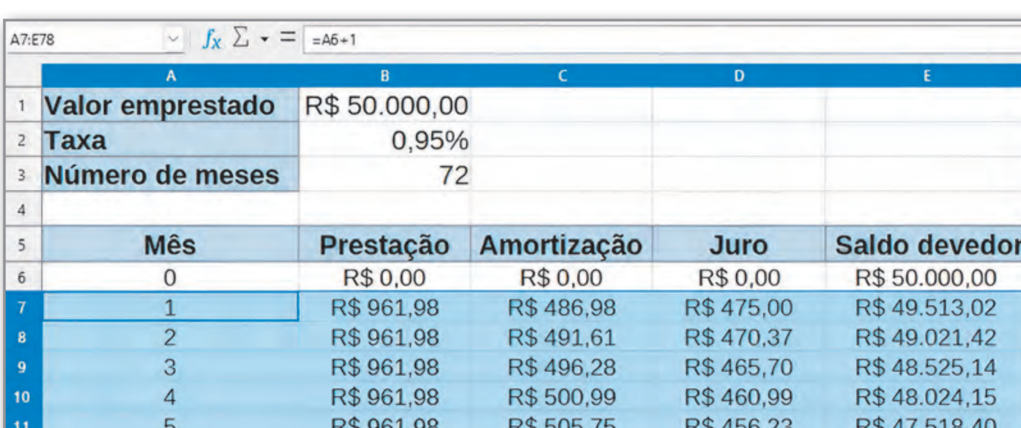
IV. Na célula A7, digitamos "=A6+1" e pressionamos ***Enter*** para indicar o mês 1, ou seja, a primeira prestação.

V. Em B7, vamos usar a função **PGTO**. Essa função calcula o valor de cada prestação no Sistema Price dados a taxa, o número de prestações e o valor total da dívida. Para isso, digitamos "=PGTO(\$B\$2;\$B\$3;−\$B\$1)" e pressionamos ***Enter***. Atenção: é necessário digitar o sinal de menos antes de "\$B\$1".

VI. Para calcular o juro, vamos digitar, em D7, "=\$B\$2*E6" e pressionar ***Enter***. Na célula C7, digitamos "=B7−D7" e ***Enter***.

VII. Por fim, na célula E7, digitamos "=E6−C7" e pressionamos ***Enter***. Para obter as próximas linhas, selecionamos as células A7 a E7, posicionamos o cursor do *mouse* no quadradinho no canto inferior direito da última célula, clicamos e arrastamos a seleção para baixo até obtermos a linha correspondente ao mês 72.

Na imagem, são mostradas as primeiras linhas da planilha construída dessa maneira.



	A	B	C	D	E
1	Valor emprestado	R\$ 50.000,00			
2	Taxa	0,95%			
3	Número de meses	72			
4					
5	Mês	Prestação	Amortização	Juro	Saldo devedor
6	0	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 50.000,00
7	1	R\$ 961,98	R\$ 486,98	R\$ 475,00	R\$ 49.513,02
8	2	R\$ 961,98	R\$ 491,61	R\$ 470,37	R\$ 49.021,42
9	3	R\$ 961,98	R\$ 496,28	R\$ 465,70	R\$ 48.525,14
10	4	R\$ 961,98	R\$ 500,99	R\$ 460,99	R\$ 48.024,15
11	5	R\$ 961,98	R\$ 505,75	R\$ 456,23	R\$ 47.518,40

Vamos construir agora uma tabela considerando o SAC, utilizando o passo a passo a seguir.

I. Vamos construir essa tabela à direita da tabela construída anteriormente, utilizando as colunas G a K. Selecionamos as células A1 a B3, pressionamos as teclas **Ctrl** + **C** para copiá-las e as colamos nas células G1 a H3 pressionando as teclas **Ctrl** + **V**. Trocamos a cor das células para diferenciá-las da tabela anterior. Digitamos, nas células G5 a K5, o título de cada coluna: "Mês", "Saldo devedor", "Amortização", "Juro" e "Prestação", como indicado na imagem.

E7

	G	H	I	J	K
1	Valor emprestado	R$ 50.000,00			
2	Taxa	0,95%			
3	Número de meses	72			
4					
5	Mês	Saldo devedor	Amortização	Juro	Prestação

IMAGENS: REPRODUÇÃO/ LIBREOFFICE

Observe que invertemos a ordem das colunas, o que foi feito apenas por uma questão de organização.

II. Formatamos as células H6, I6, J6 e K6, clicando na ferramenta .

III. Nas células G6, I6, J6 e K6, digitamos "0" (zero). Na célula H6, digitamos "=$H$1" e pressionamos ***Enter***. Essa linha corresponde ao início do contrato.

IV. Na célula G7, digitamos "=G6+1" e pressionamos ***Enter*** para indicar o mês 1, ou seja, a primeira prestação.

V. Em I7, vamos calcular a amortização, que é constante nesse sistema, digitando "=$H$1/$H$3" e pressionando ***Enter***. Na célula H7, digitamos "=H6−I7", pressionando ***Enter*** na sequência, para obter o saldo devedor depois de realizado o pagamento da primeira prestação.

VI. Para calcular o juro, digitamos, na célula J7, "=$H$2*H6" e pressionamos ***Enter***.

VII. Por fim, na célula K7, digitamos "=I7+J7" e pressionamos ***Enter*** para o obter o valor da primeira parcela. Para obter as próximas linhas, selecionamos as células G7 a K7, posicionamos o cursor do *mouse* no quadradinho no canto inferior direito da última célula, clicamos e arrastamos a seleção para baixo até obter a linha correspondente ao mês 72.

Na imagem, são mostradas as primeiras linhas da planilha construída dessa maneira.

G7:K78 =G6+1

	G	H	I	J	K
1	Valor emprestado	R$ 50.000,00			
2	Taxa	0,95%			
3	Número de meses	72			
4					
5	Mês	Saldo devedor	Amortização	Juro	Prestação
6	0	R$ 50.000,00	R$ 0,00	R$ 0,00	R$ 0,00
7	1	R$ 49.305,56	R$ 694,44	R$ 475,00	R$ 1.169,44
8	2	R$ 48.611,11	R$ 694,44	R$ 468,40	R$ 1.162,85
9	3	R$ 47.916,67	R$ 694,44	R$ 461,81	R$ 1.156,25
10	4	R$ 47.222,22	R$ 694,44	R$ 455,21	R$ 1.149,65
11	5	R$ 46.527,78	R$ 694,44	R$ 448,61	R$ 1.143,06

ATIVIDADES

56. b) Resposta possível: Nas primeiras prestações, o valor amortizado no SAC é maior do que no Sistema Price. Sim.

55. Retome a situação apresentada na página **36** sobre a família formada por Alice, Sérgio e Bruna. Reproduza a planilha de receitas e despesas dessa família e amplie essa planilha conforme as orientações. Ver as **Orientações para o professor**.

a) Na quarta coluna, coloque o título "Despesas previstas – próximo mês" e estime os valores imaginando que Bruna quisesse que o saldo previsto fosse de R$ 560,00.

b) Na quinta coluna, inclua o título "Despesas realizadas – próximo mês" e estime os valores imaginando quanto a família gastou, de modo que o saldo tenha sido de R$ 510,00. Em seguida, compartilhe sua resolução com os colegas.

56. Responda às questões a seguir com base em alguns resultados das atividades resolvidas na seção anterior.

a) Em qual dos sistemas de amortização a primeira prestação é mais alta? Em sua opinião isso pode influenciar a decisão de Marília? A primeira prestação é mais alta no SAC. Resposta pessoal.

b) Comparando os valores amortizados nas primeiras prestações, o que você percebe? Esse fato interfere no montante de juro pago em todo o período de quitação da dívida?

57. Em cada situação a seguir, considerando o SAC, calcule o valor amortizado a cada prestação.

a) Em um empréstimo de R$ 25.000,00 que deve ser pago em 8 prestações. R$ 3.125,00

b) Em um financiamento de R$ 40.000,00 que deve ser pago em 10 prestações, porém considerando uma entrada de R$ 12.000,00. R$ 2.800,00

58. Um veículo no valor de R$ 75.000,00 está à venda de acordo com as condições do cartaz.

Entrada de 25% do valor;
o restante pago em 48 prestações
com juros de 2% a.m.

De acordo com essas informações, responda.

a) Qual é o valor a ser financiado? R$ 56.250,00

b) Se o financiamento for feito pelo Sistema Price de amortização, qual será o valor da prestação? aproximadamente R$ 1.833,85

c) Caso a opção seja pelo financiamento segundo o SAC, qual será o valor amortizado em cada prestação? aproximadamente R$ 1.171,88

d) Utilizando uma planilha eletrônica para simular os valores do financiamento no Sistema Price e no SAC, qual será o montante de juro pago em todo o período? Sistema Price: R$ 31.774,96; SAC: R$ 27.562,50

59. Sandro vai comprar um *notebook* e se interessou pelo modelo a seguir.

WR7/SHUTTERSTOCK.COM

- Antes de comprar um produto a prazo, é importante negociar as condições de pagamento, de modo a não pagar juros ou reduzir tanto quanto possível essa taxa.

Sabendo que a loja trabalha com o Sistema Price de amortização, se Sandro comprar esse *notebook* a prazo, deverá pagar 10 prestações de: alternativa **c**

a) R$ 176,80.

b) R$ 206,80.

c) R$ 209,59.

d) R$ 229,59.

e) R$ 249,49.

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Luca Pacioli, um dos precursores dos processos contábeis

O Renascimento foi um período importante na história da humanidade, por ter favorecido o desenvolvimento da criatividade humana em diversas áreas. Considerando as inúmeras ideias que surgiram nesse período, podemos destacar as novas concepções na Astronomia, a noção da perspectiva nas artes, os estudos sobre o comportamento da luz, o desenvolvimento da Álgebra e dos processos contábeis, entre outras.

Nessa perspectiva, o papel do frade Luca Pacioli foi importante, em razão de suas inúmeras contribuições para a Matemática e para a área contábil.

KRASOVSKI DMITRI/SHUTTERSTOCK.COM; MUSEU DE CAPODIMONTE, NAPOLI, ITÁLIA

- BARBARI, Jacopo de. **Retrato de Luca Pacioli**. 1495. Óleo sobre madeira, 98 cm × 108 cm. Museu de Capodimonte, Nápoli (Itália). Retrato de Luca Pacioli (1445-1514), frade franciscano nascido na região da Toscana, onde hoje é território italiano.

Saiba que...

Embora o método de partidas dobradas seja um pensamento aparentemente simples, no qual, em síntese, não existe devedor sem credor, ele é aplicado até hoje em instituições financeiras, no comércio e em empresas em geral, sendo a base teórica que desenvolve as Ciências Contábeis.

[...]

[...] Pacioli, que foi professor de matemática e colaborador de Leonardo da Vinci, publicou em 1494 o livro *de Summa de Arithmetica, Geometria, Proporzioni di Proporzionalita* (Compêndio de Aritmética, Geometria, Proporções e Proporcionalidade), escrito em idioma vernacular. A obra abordava quatro assuntos: aritmética, álgebra, geometria euclidiana elementar e contabilidade. O livro, síntese de boa parte do conhecimento matemático de então, foi o primeiro livro impresso a tratar de álgebra, retomando a classificação das equações de segundo grau dos árabes. No que diz respeito à contabilidade, introduziu o chamado *método das partidas dobradas*, também conhecido como método veneziano. Esse é o sistema padrão usado em empresas e outras organizações para registrar transações financeiras, em que todos os movimentos são lançados em pelo menos duas contas, com o total de débitos devendo se igualar ao total de créditos. A contribuição de Pacioli veio a atender algumas necessidades de técnicas aritméticas surgidas com o desenvolvimento do sistema bancário nas cidades mercantis italianas.

[...]

MOL, Rogério S. **Introdução à história da matemática**. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013. p. 90. Disponível em: https://biblioteca.conafer.org/wp-content/uploads/tainacan-items/25253/25268/09.-Introducao-a-Historia-da-Matematica-autor-Rogerio-S.-Mol.pdf. Acesso em: 24 set. 2024.

THEERADECH SANIN/SHUTTERSTOCK.COM

CONEXÕES com...

CIÊNCIAS HUMANAS E SOCIAIS APLICADAS

Inflação e seus impactos na vida da população

Ir ao mesmo supermercado e comprar os mesmos produtos com a mesma quantia com que se comprava há alguns meses é uma tarefa pouco provável. Isso acontece porque os preços dos produtos, em geral, aumentam ao longo do tempo, e a inflação é uma das responsáveis por isso.

Mas você sabe o que é inflação e como ela é calculada? Leia o texto a seguir, que trata desse assunto.


THE-FANCY-DESIGN-STOCK/SHUTTERSTOCK.COM

■ A alimentação envolve o consumo de itens cujos preços são modificados pela inflação.

Inflação

O que é inflação

Inflação é o nome dado ao aumento dos preços de produtos e serviços. Ela é calculada pelos índices de preços, comumente chamados de índices de inflação.

O IBGE produz dois dos mais importantes índices de preços: o IPCA, considerado o oficial pelo governo federal, e o INPC.

Para que servem o IPCA e o INPC?

O propósito de ambos é o mesmo: medir a variação de preços de uma cesta de produtos e serviços consumida pela população. O resultado mostra se os preços aumentaram ou diminuíram de um mês para o outro.

A cesta é definida pela Pesquisa de Orçamentos Familiares – POF, do IBGE, que, entre outras questões, verifica o que a população consome e quanto do rendimento familiar é gasto em cada produto: arroz, feijão, passagem de ônibus, material escolar, médico, cinema, entre outros.

Os índices, portanto, levam em conta não apenas a variação de preço de cada item, mas também o peso que ele tem no orçamento das famílias.

[...]

Qual é a diferença entre eles?

A sigla INPC corresponde ao Índice Nacional de Preços ao Consumidor. A sigla IPCA corresponde ao Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo.

A diferença entre eles está no uso do termo "amplo".

O IPCA engloba uma parcela maior da população. Ele aponta a variação do custo de vida médio de famílias com renda mensal de 1 a 40 salários mínimos.

O INPC verifica a variação do custo de vida médio apenas de famílias com renda mensal de 1 a 5 salários mínimos. Esses grupos são mais sensíveis às variações de preços, pois tendem a gastar todo o seu rendimento em itens básicos, como alimentação, medicamentos, transporte etc.

[...]

Por que se fala tanto em IPCA?

O governo federal usa o IPCA como o índice oficial de inflação do Brasil. Portanto, ele serve de referência para as metas de inflação e para as alterações na taxa de juros.

Como ele é calculado?

O IBGE faz um levantamento mensal, em 13 áreas urbanas do País, de, aproximadamente, 430 mil preços em 30 mil locais. Todos esses preços são comparados com os preços do mês anterior, resultando num único valor que reflete a variação geral de preços ao consumidor no período.

Índice pessoal de inflação

Sua cesta de compras, ou seja, os produtos e serviços que você consome regularmente, pode ser bem diferente da cesta média da população brasileira. Com isso, o seu índice pessoal de inflação pode ser maior ou menor do que o IPCA.

Por exemplo, uma família que não consome carne vermelha e não tem filhos em idade escolar terá, com certeza, um índice de inflação pessoal diferente do oficial, cujo cálculo coloca peso considerável na variação do preço da carne e da mensalidade escolar.

Poder de compra

Se a variação do seu salário, de um ano para o outro, for menor do que o IPCA, você perde seu poder de compra, pois os preços sobem mais do que a sua renda. Se a inflação e o seu salário têm a mesma variação, seu poder de compra se mantém. Se você, porém, receber um aumento acima do IPCA, seu poder de compra aumentará.

Curiosidades do IPCA

O IBGE produz e divulga o IPCA, sistematicamente, desde 1980. Entre 1980 e 1994, ano de implantação do Plano Real, o índice acumulado foi de 13 342 346 717 671,70%!

A maior variação mensal do IPCA foi em março de 1990 (82,39%), enquanto a menor variação, em julho de 2022 (−0,68%).

[...]

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Inflação**. Rio de Janeiro: IBGE, 2024. Disponível em: https://www.ibge.gov.br/explica/inflacao.php. Acesso em: 23 out. 2024.

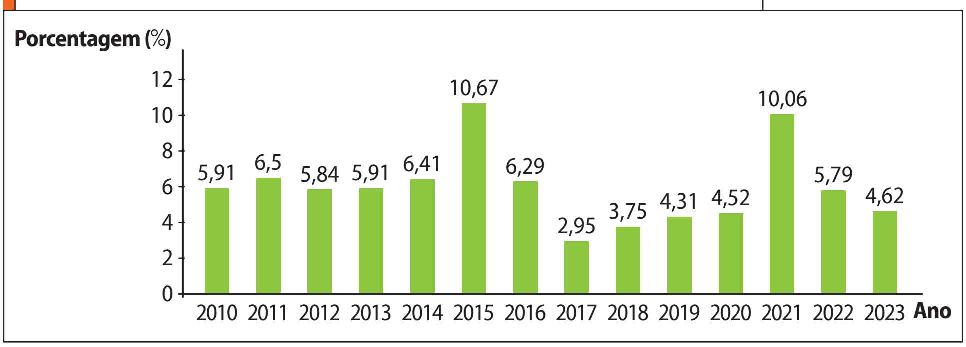
ARQUIVO/ESTADÃO CONTEÚDO/AE

- No final da década de 1980 e no início da década de 1990, o Brasil viveu um período de hiperinflação, com o IPCA acumulado ao ano chegando a 1 972%, em 1989, e a 2 477%, em 1993. Isso levou as pessoas a estocar produtos em casa, pois os preços eram alterados a todo momento. Na imagem, etiquetas de preço são aplicadas em produtos de um estabelecimento, São Paulo (SP). Fotografia de 1988.

O gráfico a seguir apresenta o IPCA acumulado nos últimos 12 meses em dezembro de cada ano, de 2010 a 2023.

SERGIO LIMA

IPCA acumulado no ano, dezembro 2010-dezembro 2023



Fonte de dados: INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **IPCA**: Índice Nacional de Preços ao consumidor amplo. Rio de Janeiro: IBGE, [2024]. Disponível em: https://www.ibge.gov.br/estatisticas/todos-os-produtos-estatisticas/9256-indice-nacional-de-precos-ao-consumidor-amplo.html?=&t=series-historicas. Acesso em: 27 set. 2024.

Para determinar a atualização de um valor de um ano para outro, é preciso calcular o índice acumulado no período. Por exemplo, a atualização de R$ 100,00 em janeiro de 2010 para dezembro de 2011 deve ser calculada com aumentos sucessivos de 5,91% e 6,5%:

$$100 \cdot 1{,}0591 \cdot 1{,}065 = 112{,}74415$$

Portanto, em dezembro de 2011, o valor atualizado era R$ 112,74.

Agora, faça o que se pede nas atividades a seguir. NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. Explique como a inflação impacta a vida do consumidor. Ver as **Orientações para o professor**.

2. De acordo com o IPCA de dezembro de 2022, qual seria o preço, no final de dezembro de 2022, de uma cesta básica de produtos que, no início do mês, custava R$ 672,07? R$ 667,50

3. De acordo com o gráfico apresentado, faça o que se pede.

a) Atualize o valor de R$ 500,00 em janeiro de 2020 para dezembro de 2023. R$ 636,59

b) Responda: qual foi o aumento, em porcentagem, do IPCA de janeiro de 2010 a dezembro de 2023? Arredonde o índice para um valor inteiro. 124%

4. Além dos índices apresentados no texto, pesquise outros índices que são referência para o cálculo do índice de inflação e investigue a particularidade de cada um. Compartilhe sua resposta com os colegas. Ver as **Orientações para o professor**.

5. Em duplas, realizem uma entrevista com uma pessoa que era adulta no final da década de 1980 e no início de 1990. Previamente, preparem um roteiro com questões que estejam relacionadas à hiperinflação da época. Gravem um vídeo ou um áudio da entrevista e apresentem os resultados para a turma. Não se esqueçam de pedir ao entrevistado autorização para uso da imagem e da entrevista cedida por ele. Resposta pessoal. Ver as **Orientações para o professor**.

Para assistir

- O QUE é inflação: IBGE explica IPCA e INPC. [*S. l.*: *s. n.*], 2015. 1 vídeo (5 min). Publicado pelo canal IBGE. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=JVcDZOIlMBk. Acesso em: 27 set. 2024.

  O vídeo apresenta informações sobre como são calculados o INPC e o IPCA, além de explicar para que servem esses índices e suas diferenças.

ATIVIDADES COMPLEMENTARES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. (IFSC) O Produto Interno Bruto (PIB) é uma representação da soma dos valores monetários de todos os bens e serviços produzidos em uma determinada região em um determinado espaço de tempo. O Balinsky (país fictício) tinha em 2016 um PIB que em comparação com o PIB de 2015 cresceu 2%. Já em 2017 o PIB de Balinsky diminui 5% em relação a 2016. A previsão para 2018 é de um crescimento de 3% em relação a 2017. Dessa forma, se a previsão para 2018 se confirmar, podemos afirmar que a variação do PIB de Balinsky do período de 2015 a 2018 foi: Assinale a alternativa **CORRETA**. alternativa **a**

a) Um decrescimento de aproximadamente 0,2%.
b) Não cresceu nem diminuiu.
c) Um aumento de aproximadamente 1,8%.
d) Um decrescimento de mais de 2%.
e) Um acréscimo de menos de 1%.

2. (UEA-AM) Ricardo comprou uma bicicleta e conseguiu revendê-la por um preço 20% maior do que pagou, o que correspondeu a um lucro de R$ 150,00. O valor que Ricardo recebeu pela venda dessa bicicleta foi

a) R$ 700,00.
b) R$ 750,00.
c) R$ 800,00.
d) R$ 850,00.
e) R$ 900,00.

alternativa **e**

3. (Epcar-MG) À taxa anual de 15%, em que tempo, aproximadamente, o capital R$ 8.000,00 produz R$ 3.600,00 de juros simples? alternativa **b**

a) 2 anos
b) 3 anos
c) 4 anos
d) 5 anos
e) 6 anos

4. (UFPE) Uma loja de eletrônicos oferece duas opções de pagamento:

- à vista, com 10% de desconto no preço anunciado;
- em duas prestações mensais iguais, sem desconto sobre o preço anunciado, sendo a primeira prestação paga no momento da compra.

Qual a taxa de juros mensais embutida nas vendas a prazo? alternativa **a**

a) 25%
b) 30%
c) 10%
d) 15%
e) 20%

5. (ESPM-SP) O sr. Paulo aplicou um certo capital à taxa de juros simples de 4% ao mês durante 3 meses. O montante dessa aplicação, ele reaplicou à taxa de juros simples de 3% ao mês durante 9 meses. Se ele tivesse feito uma única aplicação desse capital a juros simples durante 1 ano, para obter o mesmo rendimento final, a taxa mensal deveria ser de: alternativa **d**

a) 3,28%
b) 3,36%
c) 3,43%
d) 3,52%
e) 3,64%

6. (Ufersa-RN) Qual foi o capital aplicado a 6% ao mês, juros simples, que deu origem ao montante de R$ 1.960,00 de 1 ano e 4 meses? alternativa **a**

a) R$ 1.000,00
b) R$ 1.400,00
c) R$ 1.200,00
d) R$ 1.900,00

7. (UEPA) Um carro *flex* de R$ 30.000,00 foi vendido por uma concessionária da seguinte forma: 60% de entrada e o restante em 5 prestações mensais iguais com juro simples de 2% ao mês. O valor de cada prestação será de: alternativa **c**

a) R$ 2.400,00
b) R$ 2.500,00
c) R$ 2.640,00
d) R$ 2.860,00
e) R$ 3.960,00

8. (UERN) Uma pessoa possui uma quantia aplicada a juros compostos de 1% ao mês, da qual, em meses alternados, ela retira R$ 100,00 e doa a uma instituição de caridade. Sabendo-se que, no início de certo mês, a quantia aplicada era de R$ 10.000 e, no final daquele mês, ela fez a doação, pode-se concluir que a quantia aplicada após 3 meses era igual a alternativa **b**

a) R$ 10.100,00
b) R$ 10.101,00
c) R$ 10.110,00
d) R$ 10.200,00
e) R$ 10.201,00

9. (EsPCEx-SP) O valor de revenda de um carro é dado por $V(t) = V_0(0,8)^t$, em que V_0 é o valor inicial e $V(t)$ é o valor após t anos de uso. A alternativa que mais se aproxima do percentual de desvalorização desse carro, em relação ao valor inicial, após 3 anos exatos de uso, é:

a) 24%
b) 47%
c) 49%
d) 50%
e) 51%

alternativa **c**

10. (Enem/MEC) Um investidor deseja aplicar R$ 10.000,00 durante um mês em um dos fundos de investimento de um banco. O agente de investimentos desse banco apresentou dois tipos de aplicações financeiras: a aplicação Básica e a aplicação Pessoal, cujas informações de rendimentos e descontos de taxas administrativas mensais são apresentadas no quadro. alternativa **a**

Aplicação	Taxa de rendimento mensal	Taxa administrativa mensal
Básica	0,542%	R$ 0,30
Pessoal	0,560%	3,8% sobre o rendimento mensal

Consideradas as taxas de rendimento e administrativa, qual aplicação fornecerá maior valor de rendimento líquido a esse investidor e qual será esse valor?

a) Básica, com rendimento líquido de R$ 53,90.
b) Básica, com rendimento líquido de R$ 54,50.
c) Pessoal, com rendimento líquido de R$ 56,00.
d) Pessoal, com rendimento líquido de R$ 58,12.
e) Pessoal, com rendimento líquido de R$ 59,80.

11. (Enem/MEC) Uma loja vende seus produtos de duas formas: à vista ou financiado em três parcelas mensais iguais. Para definir o valor dessas parcelas nas vendas financiadas, a loja aumenta em 20% o valor do produto à vista e divide esse novo valor por 3. A primeira parcela deve ser paga no ato da compra, e as duas últimas, em 30 e 60 dias após a compra. Um cliente da loja decidiu comprar, de forma financiada, um produto cujo valor à vista é R$ 1.500,00.
Utilize 5,29 como aproximação para $\sqrt{28}$.
A taxa mensal de juros compostos praticada nesse financiamento é de alternativa **d**

a) 6,7%
b) 10%
c) 20%
d) 21,5%
e) 23,3%

12. (Uesc-BA) Em uma aplicação financeira a uma taxa de juros compostos de 2% ao mês, em que foram efetuados três depósitos mensais de R$ 2.300,00 cada, o valor acumulado na data do último depósito é igual a: alternativa **c**

a) R$ 6.900,00.
b) R$ 7.038,00.
c) R$ 7.038,92.
d) R$ 7.178,76.
e) R$ 7.178,80.

13. (Unifor-CE) A expressão $M = A \cdot (1 + i)^n$ permite o cálculo do montante produzido por um capital *A*, aplicado a juros compostos e à taxa unitária *i*, ao final de *n* períodos. Assim, se o capital de R$ 1.370,00 for aplicado à taxa anual de 25%, ao final de quantos anos ele produzirá o montante de R$ 5.480,00? (Use: $\log 2 = 0,30$) alternativa **a**

a) 6
b) 5
c) 4
d) 3
e) 2

14. (FGV-SP) Um empréstimo será quitado em 5 anos com pagamentos consecutivos anuais postecipados de R$ 6.720,00, segundo o Sistema Francês de Amortização (Tabela Price). Se a taxa de juros efetiva a ser utilizada é de 16% a.a., então a amortização no saldo devedor decorrente do pagamento da primeira prestação será de (Considere $1,16^5 = 2,1$)

a) R$ 3.000,00.
b) R$ 3.050,00.
c) R$ 3.100,00.
d) R$ 3.150,00.
e) R$ 3.200,00.

alternativa **e**

15. (UFAL) Um dos maiores problemas enfrentados pelos governos é a inflação. Felizmente, para a Economia Brasileira, a inflação está controlada; porém, não deixa de dar sinais de sua persistência. Pode-se definir *inflação* como:

a) o aumento contínuo e generalizado de todos os preços da economia. alternativa **a**
b) o aumento rápido e incontrolável das variáveis de demanda, como o consumo.
c) o excesso de gastos, principalmente, os de investimento, em relação ao produto de uma economia.
d) o aumento contínuo da massa salarial da economia, provocando elevação da demanda e, consequentemente, dos preços.
e) o aumento do crédito na economia, provocando elevação da demanda agregada.

16. (Enem/MEC) O ganho real de um salário, r, é a taxa de crescimento do poder de compra desse salário. Ele é calculado a partir do percentual de aumento dos salários e da taxa de inflação, referidos a um mesmo período. Algebricamente, pode-se calcular o ganho real pela fórmula

$$1 + r = \frac{1 + i}{1 + f},$$

em que i é o percentual de aumento no valor dos salários e f é a taxa de inflação, ambos referidos a um mesmo período.

Considere que uma categoria de trabalhadores recebeu uma proposta de aumento salarial de 10%, e que a taxa de inflação do período correspondente tenha sido 5%. Para avaliar a proposta, os trabalhadores criaram uma classificação em função dos ganhos reais conforme o quadro.

Ganho real	Classificação
Igual ou superior a 5%	Boa
Maior ou igual a 1,5% e menor do que 5%	Regular
Maior do que 0% e menor do que 1,5%	Ruim
Igual ou menor do que 0%	Inaceitável (ganho real negativo significa perda do poder de compra dos salários)

Eles classificaram a proposta de aumento e justificaram essa classificação apresentando o valor do ganho real que obteriam.

A classificação, com sua respectiva justificativa, foi alternativa **c**

a) inaceitável, porque o ganho real seria mais próximo de −5%.

b) ruim, porque o ganho real seria mais próximo de 1,05%.

c) regular, porque o ganho real seria mais próximo de 4,7%.

d) boa, porque o ganho real seria mais próximo de 9,5%.

e) boa, porque o ganho real seria mais próximo de 5%.

PARA REFLETIR

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Nas páginas de abertura, apresentamos a *Black Friday*, com o intuito de mostrar como a Matemática financeira contribui para o consumo consciente. Você conseguiu reconhecer essa relação?

Fizemos, neste Capítulo, um retrospecto do assunto porcentagem, que você já deve ter estudado no Ensino Fundamental. Estudamos também juro simples e juro composto e como eles se relacionam com as funções afim e exponencial, respectivamente.

Além disso, estudamos como fazer um orçamento familiar e conhecemos o Sistema Price e o Sistema de Amortização Constante.

Vamos refletir sobre as aprendizagens do Capítulo **1**: Respostas pessoais.

- Você já conhecia algum dos conteúdos apresentados? Qual(is)?
- Imagine que você tivesse X reais para fazer uma aplicação e pudesse escolher entre duas opções com a mesma taxa: uma sob o regime de juro simples, e a outra, sob o regime de juro composto. Qual das aplicações você escolheria? Justifique.
- Dê exemplos de outras situações do dia a dia que envolvem sistemas de amortização e orçamento familiar.
- Como você pode utilizar os conceitos estudados para analisar situações antes de tomar decisões e de resolver problemas do dia a dia?

CAPÍTULO 2

Poliedros

A beleza dos cristais é impressionante, não é mesmo? Os cristais, na sua forma mais pura, lembram poliedros, assunto deste Capítulo.

A ciência que estuda os cristais é chamada Cristalografia, cujos estudos são importantes para o avanço tecnológico de diversas áreas, entre elas, a Engenharia dos Materiais.

Para classificar esses minerais, os cristalógrafos avaliam o sistema de acordo com as células unitárias que formam sua estrutura. Uma célula unitária consiste em um agrupamento de átomos que formam um padrão repetitivo. Então, com base no sistema cristalino ao qual pertence, um mineral pode ser classificado em: cúbico, tetragonal, hexagonal, trigonal, ortorrômbico, monoclínico ou triclínico.

O arranjo desses átomos garante algumas propriedades ao cristal, como a dureza e o formato. O tipo de arranjo atômico, por exemplo, é o que diferencia um frágil carbono de um diamante inquebrável.

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Ver as **Orientações para o professor**.

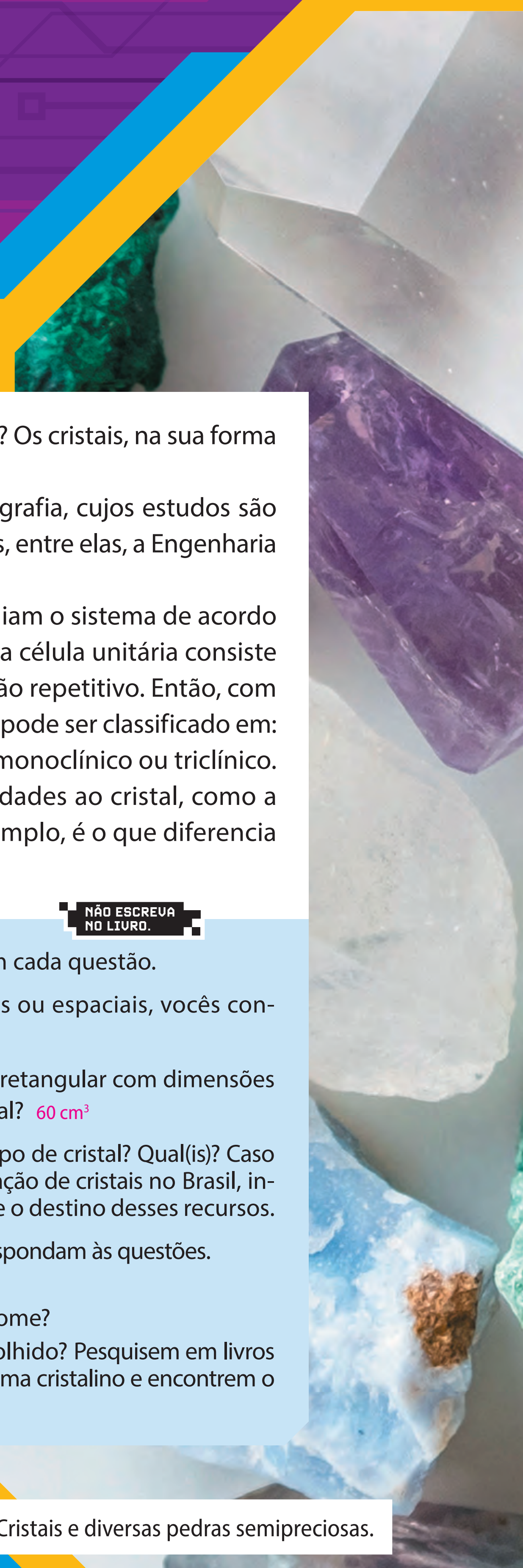
Agora, reúna-se a um colega, e façam o que se pede em cada questão.

1. Observem a imagem. Que formas geométricas, planas ou espaciais, vocês conseguem identificar?

2. O formato de um determinado cristal lembra um bloco retangular com dimensões 3 cm, 4 cm e 5 cm. Qual é o volume, em cm^3, desse cristal? 60 cm^3

3. Na região onde vocês moram, há mineração de algum tipo de cristal? Qual(is)? Caso não haja, façam uma breve pesquisa a respeito da mineração de cristais no Brasil, indicando locais onde ocorre, principais cristais extraídos e o destino desses recursos.

4. Escolham um dos sistemas cristalinos citados no texto e respondam às questões.
- Qual foi o sistema escolhido?
- Por que vocês acham que esse sistema recebe esse nome?
- Qual é o formato das células unitárias do sistema escolhido? Pesquisem em livros ou na internet a respeito do formato das células do sistema cristalino e encontrem o nome de um cristal que pertença a ele.



Cristais e diversas pedras semipreciosas.

DEMETRIO MEDIA/SHUTTERSTOCK.COM

Para assistir

- VOCÊ disse cristalografia? Campinas: Matemática Multimídia, 2012. 1 vídeo (12 min). Publicado pelo canal M3 Matemática Multimídia. (Série Matemática na escola). Disponível em: https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1188. Acesso em: 17 set. 2024.

  O vídeo fala sobre Cristalografia, um estudo que descreve as formas geométricas e as simetrias dos cristais.

Poliedros

É comum encontrarmos no dia a dia objetos cujos formatos lembram sólidos geométricos. Basta observarmos ao nosso redor, pois eles estão presentes na Arquitetura, na Engenharia, nas Artes Plásticas, entre outras áreas do nosso cotidiano. Neste Capítulo, vamos estudar os sólidos geométricos conhecidos como poliedros.

Frequentemente, na Arquitetura e na Engenharia, os projetos e as construções utilizam formatos que lembram poliedros para, por exemplo, obter o melhor aproveitamento da área ou mesmo para criar ambientes mais agradáveis à vista. Observe a seguir o prédio da Biblioteca Nacional de Belarus, país do Leste Europeu. Obra dos arquitetos Viktor Kramarenko (1945-) e Mikhail Vinogradov (1944-2020), o prédio é conhecido como "diamante bielorrusso" e tem formato de um poliedro.

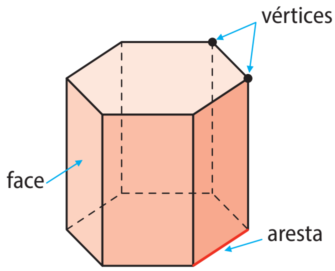
Os **poliedros** são sólidos formados por um número finito de polígonos e pela região do espaço limitada por eles, em que:

- cada lado de um desses polígonos é comum a dois, e somente dois, polígonos;
- a intersecção de dois desses polígonos é um lado comum ou um vértice comum ou é vazia.

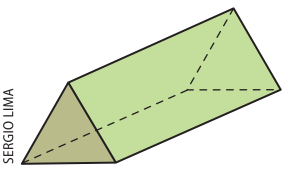
NEXUSBY/SHUTTERSTOCK.COM

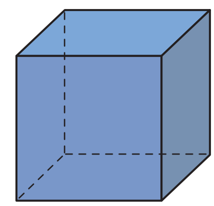
Prédio da Biblioteca Nacional de Belarus. Fotografia de 2024.

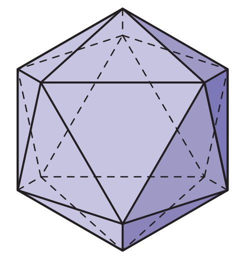
Observe alguns exemplos de poliedros:



SERGIO LIMA







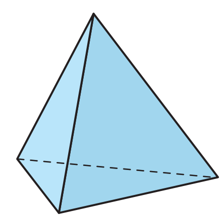
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Em um poliedro, destacamos os seguintes elementos:

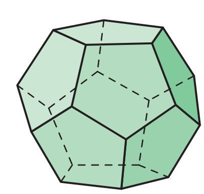
- **Faces**: são os polígonos que formam a superfície do poliedro;
- **Arestas**: são os lados comuns a duas faces do poliedro;
- **Vértices**: são os pontos de intersecção de três ou mais arestas.

Assim como os polígonos são nomeados com base em seu número de lados, os poliedros são nomeados com base em seu número de faces. Observe a seguir o nome e o respectivo número de faces de alguns poliedros.

Nome do poliedro	Número de faces
tetraedro	4
pentaedro	5
hexaedro	6
heptaedro	7
octaedro	8
eneaedro	9
decaedro	10
undecaedro	11
dodecaedro	12
icosaedro	20



▪ Tetraedro: 4 faces.



▪ Dodecaedro: 12 faces.

Saiba que...

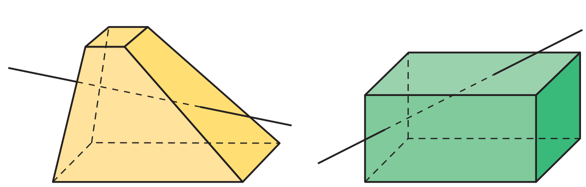
A palavra "poliedro" é formada por **poli**, do grego *polys* (muitos ou vários), e **edro**, do grego *hedra* (face), ou seja, um poliedro seria um sólido de **muitas faces**.

» Poliedros convexos e poliedros não convexos

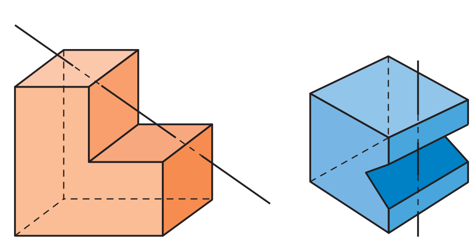
Em um poliedro, se qualquer reta não paralela a nenhuma das faces intersecta suas faces em, no máximo, dois pontos, dizemos que ele é **convexo**; caso contrário, é **não convexo**.

Observe os exemplos.

Poliedros convexos



Poliedros não convexos



Neste Capítulo, concentraremos nossos estudos nos poliedros convexos.

Relação de Euler

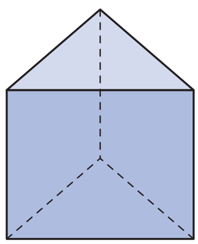
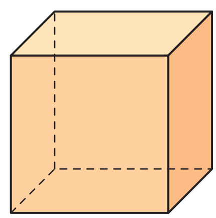
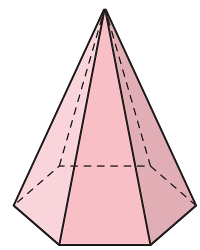
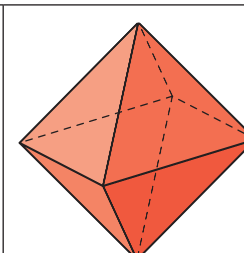
Existe uma relação importante que envolve o número de faces (F), o número de arestas (A) e o número de vértices (V) de um poliedro convexo. Essa relação é válida para todo poliedro convexo e recebe o nome de **relação de Euler**, em homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783).

$$V - A + F = 2$$

ROOK76/SHUTTERSTOCK.COM

[LEONHARD Euler]. 2007. 1 selo. Selo postal da Suíça em homenagem a Leonhard Euler.

Observe alguns exemplos.

Poliedro				
F	5	6	7	8
A	9	12	12	12
V	6	8	7	6
V* − *A* + *F	$6 - 9 + 5 = 2$	$8 - 12 + 6 = 2$	$7 - 12 + 7 = 2$	$6 - 12 + 8 = 2$

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

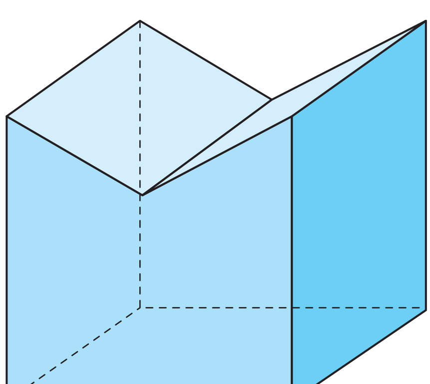
A relação de Euler pode ser empregada para determinar o número de um dos elementos (faces, arestas ou vértices) de um poliedro convexo, desde que os outros dois sejam conhecidos.

Um poliedro em que é válida a relação de Euler é conhecido como **poliedro euleriano**.

Os poliedros convexos são todos eulerianos.

Observação:

Há poliedros não convexos para os quais vale a relação de Euler. Na figura, temos um exemplo.



Poliedro não convexo em que a relação de Euler é válida.

$A = 15$
$V = 10$
$F = 7$
$V - A + F = 10 - 15 + 7 = 2$

Ver as **Orientações para o professor**.

» Poliedro regular

Um poliedro convexo é **regular** quando suas faces são polígonos regulares e congruentes entre si e quando, em todos os vértices, concorre o mesmo número de arestas.

É possível provar que existem somente cinco poliedros regulares: tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

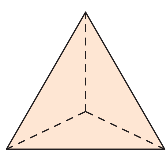
Observe a seguir representações dos cinco poliedros regulares e as respectivas planificações de suas superfícies.

PHOTOREDHEART/SHUTTERSTOCK.COM

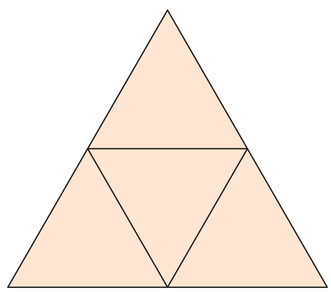
▪ Dado de *RPG* (*Rolling Playing Game* [Jogo de interpretação de papéis]) com 20 faces que lembra um icosaedro regular.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

- 4 faces triangulares
- 4 vértices
- 6 arestas

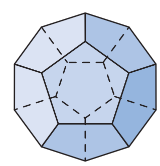


▪ Tetraedro regular.

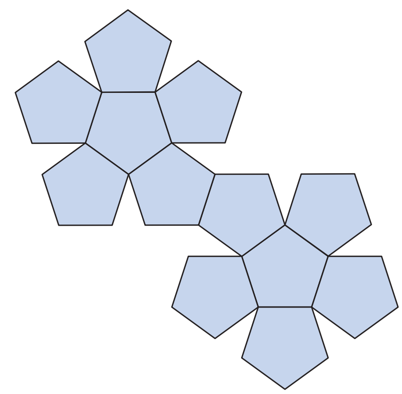


▪ Planificação da superfície.

- 12 faces pentagonais
- 20 vértices
- 30 arestas

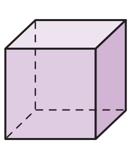


▪ Dodecaedro regular.

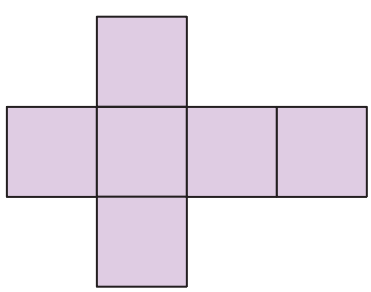


▪ Planificação da superfície.

- 6 faces quadrangulares
- 8 vértices
- 12 arestas

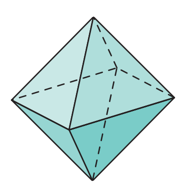


▪ Hexaedro regular.

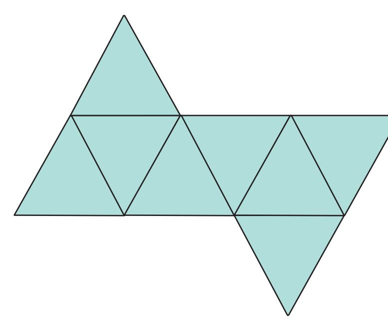


▪ Planificação da superfície.

- 8 faces triangulares
- 6 vértices
- 12 arestas

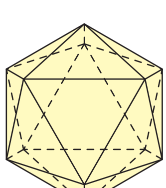


▪ Octaedro regular.

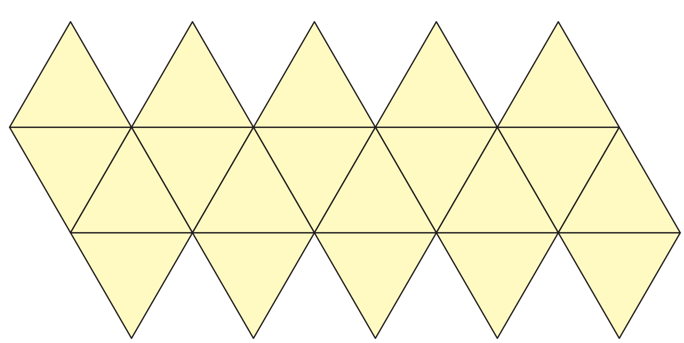


▪ Planificação da superfície.

- 20 faces triangulares
- 12 vértices
- 30 arestas



▪ Icosaedro regular.



▪ Planificação da superfície.

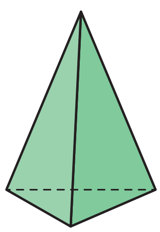
» Poliedros de Platão

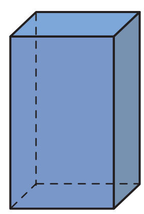
Os poliedros de Platão levam o nome do filósofo grego Platão (c. 427 a.C.-347 a.C.), que os utilizava para explicar alguns fenômenos naturais.

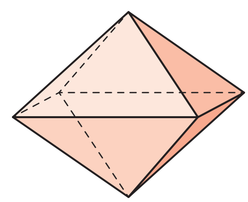
Para que um poliedro seja considerado um **poliedro de Platão**, é necessário que as faces desse poliedro tenham o mesmo número de arestas, que, em todos os vértices, concorra o mesmo número de arestas e que seja válida a relação de Euler. Assim, os poliedros de Platão englobam todos os poliedros regulares convexos. Existem somente cinco classes de poliedros de Platão: tetraedros, hexaedros, octaedros, dodecaedros e icosaedros.

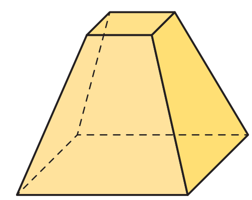
Nos poliedros de Platão, as faces não precisam ser polígonos regulares; logo, nem todo poliedro de Platão é regular.

Observe alguns exemplos de poliedros de Platão que não são regulares.


▪ Tetraedro não regular.


▪ Hexaedro não regular.


▪ Octaedro não regular.


▪ Hexaedro não regular.

ILUSTRAÇÕES: SERGIO LIMA

ATIVIDADES RESOLVIDAS

1. Em um poliedro convexo, o número de faces é 11 e o número de vértices é 18. Calcule o número de arestas desse poliedro.

Resolução

Pela relação de Euler, $V - A + F = 2$, válida para qualquer poliedro convexo, temos:

$F = 11$ e $V = 18$. Logo:

$V - A + F = 2 \Rightarrow 18 - A + 11 = 2 \Rightarrow A = 27$

Portanto, o poliedro tem 27 arestas.

2. Um poliedro convexo tem seis faces quadrangulares e duas hexagonais. Calcule o número de vértices desse poliedro.

Resolução

Pelo enunciado, o poliedro tem oito faces, sendo seis quadrangulares e duas hexagonais. Vamos determinar o número de arestas:

Seis faces quadrangulares: $6 \cdot 4 = 24$ arestas.

Duas faces hexagonais: $2 \cdot 6 = 12$ arestas.

Como cada aresta foi contada duas vezes, temos:

$2A = 24 + 12 \Rightarrow 2A = 36 \Rightarrow A = 18$

Aplicando a relação de Euler, temos:

$V - A + F = 2 \Rightarrow V - 18 + 8 = 2 \Rightarrow V = 12$

Assim, o número de vértices é 12.

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. Em um poliedro convexo, o número de arestas é 16 e o número de faces é 9. Determine o número de vértices. 9 vértices

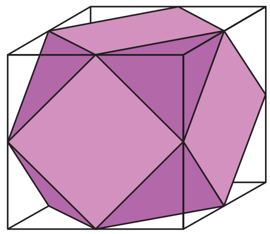
2. Um poliedro convexo tem cinco faces quadrangulares e duas faces pentagonais. Determine o número de arestas e o número de vértices. 15 arestas e 10 vértices

3. (Fatec-SP) Um poliedro convexo tem 3 faces com 4 lados, 2 faces com 3 lados e 4 faces com 5 lados. Calcule o número de vértices desse poliedro. 12 vértices

4. (Mack-SP) Determine o número de vértices de um poliedro que tem três faces triangulares, uma face quadrangular, uma pentagonal e duas hexagonais. 10 vértices

5. (Unifesp-SP) Considere o poliedro cujos vértices são os pontos médios das arestas de um cubo.

EDITORIA DE ARTE



O número de faces triangulares e o número de faces quadradas desse poliedro são, respectivamente: alternativa **b**

a) 8 e 8.
b) 8 e 6.
c) 6 e 8.
d) 8 e 4.
e) 6 e 6.

6. (UEL-PR) Leia o texto a seguir.

> Originalmente os dados eram feitos de osso, marfim ou argila. Há evidências da existência deles no Paquistão, Afeganistão e noroeste da Índia, datando de 3500 a.C. Os dados cúbicos de argila continham de 1 a 6 pontos, dispostos de tal maneira que a soma dos pontos de cada par de faces opostas é sete.
>
> (Adaptado de: Museu Arqueológico do Red Fort. Delhi, Índia.)

Atualmente, além dos dados em forma de cubo (hexaedro), encontram-se dados em vários formatos, inclusive esféricos, como mostram as figuras a seguir.

UEL, 2015

Apesar do formato esférico, ao ser lançado, o dado mostra pontos de um a seis, como se fosse um dado cúbico. Isso acontece porque no interior da esfera existe uma cavidade em forma de octaedro, na qual existe um peso (um chumbinho) que se aloja em um dos vértices do octaedro.

UEL, 2015

Assinale a alternativa que apresenta, corretamente, a propriedade dos poliedros regulares que justifica o fato de a cavidade no interior da esfera ser octaédrica. alternativa **a**

a) O número de vértices do octaedro é igual ao número de faces do hexaedro.

b) O número de vértices do octaedro é diferente do número de faces do hexaedro.

c) O número de arestas do octaedro é igual ao número de arestas do hexaedro.

d) O número de faces do octaedro é igual ao número de vértices do hexaedro.

e) O número de faces do octaedro é diferente do número de vértices do hexaedro.

7. Indique qual das afirmações a seguir é **falsa**. alternativa **b**

a) A relação de Euler é válida para todos os poliedros de Platão.

b) Todo poliedro de Platão é um poliedro regular convexo.

c) Todas as faces de um poliedro de Platão têm o mesmo número de arestas.

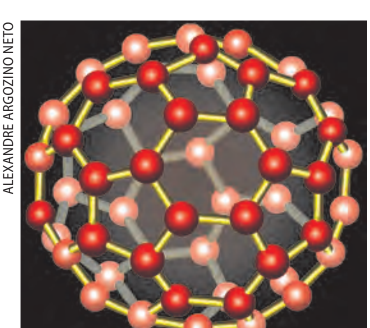
d) As faces de um poliedro regular são polígonos regulares e congruentes entre si.

8. Em 1985, foi divulgada a descoberta de uma molécula tridimensional de carbono, na qual os átomos ocupam os vértices de um poliedro convexo cujas faces são 12 pentágonos e 20 hexágonos regulares. Em homenagem ao arquiteto estadunidense Buckminster Fuller, a molécula foi denominada buckminsterfulereno. Algum tempo depois, passou-se a denominá-la simplesmente fulereno. 60 átomos e 90 ligações

Fonte dos dados: SINDICATO DOS FARMACÊUTICOS DO ESTADO DA PARAÍBA. [**Fulerenos**]. João Pessoa: Sifep, c2016. Disponível em: https://www.sifep.org.br/news1/pesquisas-area-farmaceutica/270-fulerenos. Acesso em: 17 set. 2024.

Determine o número de átomos de carbono nessa molécula e o número de ligações representadas pelas arestas do poliedro.

ALEXANDRE ARGOZINO NETO

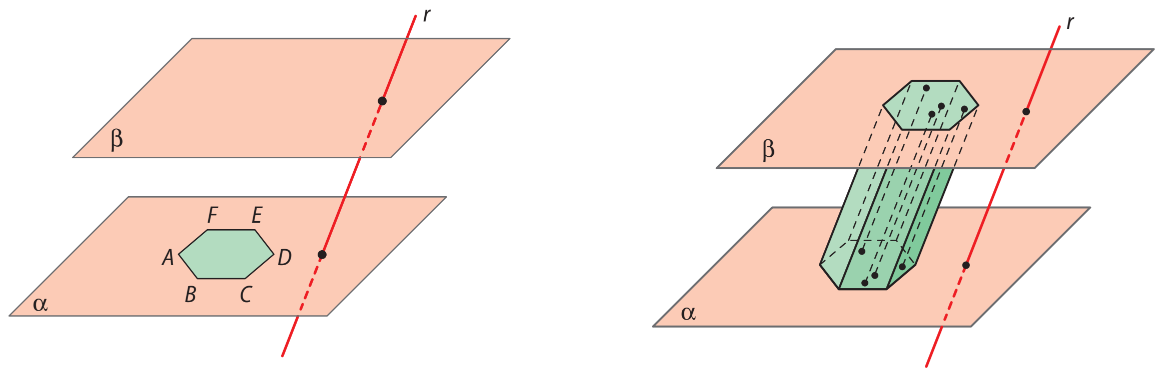


Representação de molécula de fulereno (imagem sem escala; cores fantasia).

Prismas

Agora, vamos estudar os prismas, suas características, seus elementos e as maneiras de calcular a área da superfície e o volume de um prisma.

Vamos considerar dois planos paralelos α e β, um polígono convexo, contido em α, e uma reta *r* secante a esses planos que não intersecta o polígono.

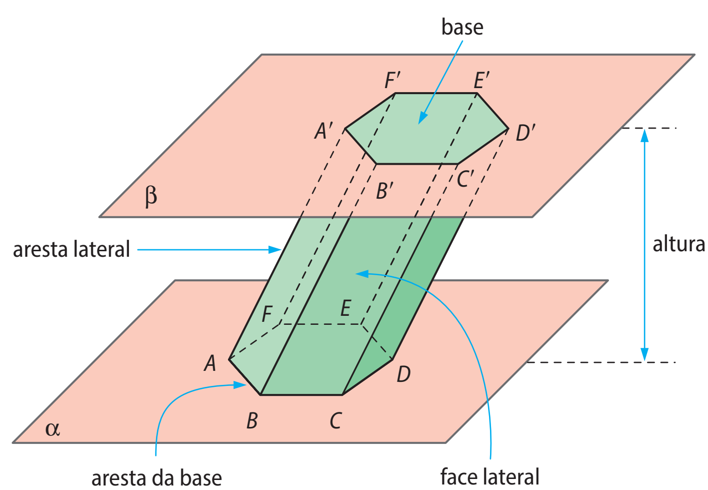


ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

A figura geométrica formada pela reunião de todos os segmentos de reta paralelos à reta *r*, com uma extremidade em um ponto do polígono convexo e a outra no plano β, é denominada **prisma**.

Considerando o prisma representado na figura a seguir, destacamos os seguintes elementos:

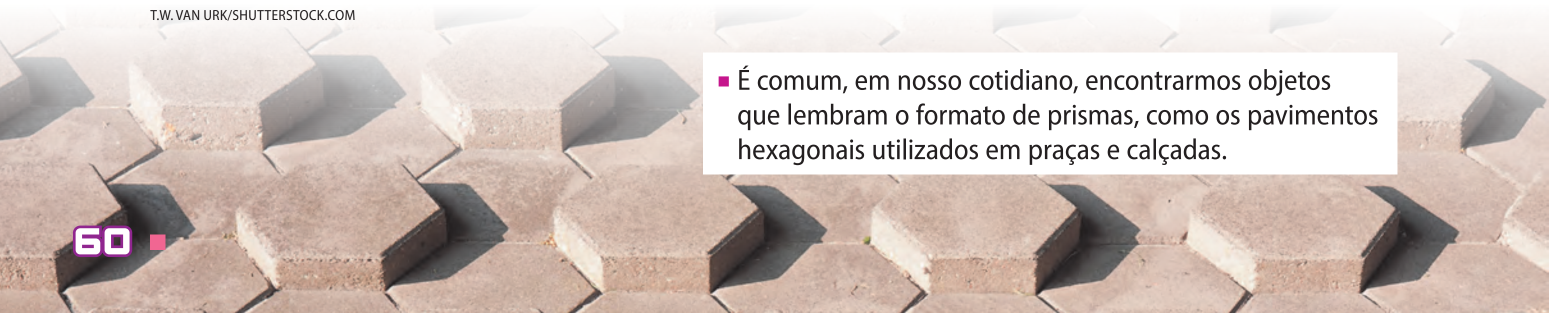
- **Bases**: são os polígonos convexos congruentes *ABCDEF* e *A'B'C'D'E'F'* situados nos planos paralelos α e β (planos das bases);
- **Faces laterais**: são os paralelogramos *ABB'A'*, *BCC'B'*, *CDD'C'*, *DEE'D'*, *EFF'E'* e *AFF'A'*;
- **Vértices**: são os vértices das faces do prisma, *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *A'*, *B'*, *C'*, *D'*, *E'* e *F'*;
- **Arestas das bases**: são os lados dos polígonos das bases $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FA}$, $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{C'D'}$, $\overline{D'E'}$, $\overline{E'F'}$ e $\overline{F'A'}$;
- **Arestas laterais**: são os segmentos de reta $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$, $\overline{EE'}$ e $\overline{FF'}$;



- **Diagonais**: são os segmentos de reta que ligam dois vértices não pertencentes à mesma face do prisma, ou seja, $\overline{AC'}$, $\overline{AD'}$, $\overline{AE'}$, $\overline{BD'}$, $\overline{BE'}$, $\overline{BF'}$, $\overline{CE'}$, $\overline{CF'}$, $\overline{CA'}$, $\overline{DF'}$, $\overline{DA'}$, $\overline{DB'}$, $\overline{EA'}$, $\overline{EB'}$, $\overline{EC'}$, $\overline{FB'}$, $\overline{FC'}$ e $\overline{FD'}$;
- **Altura**: é a distância entre os planos das bases.

Podemos classificar os prismas de acordo com o número de lados dos polígonos das bases. Por exemplo, os prismas podem ser triangulares, quando as bases são triângulos; quadrangulares, quando as bases são quadriláteros; pentagonais, quando as bases são pentágonos; e assim por diante.

T.W. VAN URK/SHUTTERSTOCK.COM



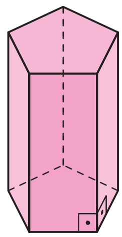
■ É comum, em nosso cotidiano, encontrarmos objetos que lembram o formato de prismas, como os pavimentos hexagonais utilizados em praças e calçadas.

De acordo com a inclinação das arestas laterais em relação aos planos das bases, os prismas podem ser **retos** ou **oblíquos**.

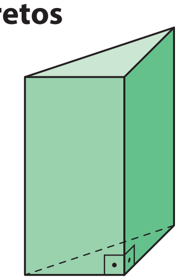
Em um prisma reto, as arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases, e, em um prisma oblíquo, as arestas laterais são oblíquas aos planos das bases.

Observe os exemplos a seguir.

Prismas retos

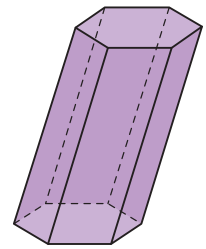


■ Prisma pentagonal.

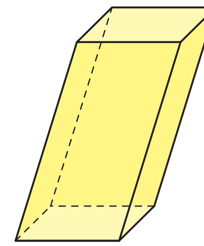


■ Prisma triangular.

Prismas oblíquos



■ Prisma hexagonal.

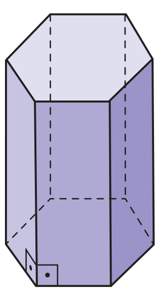


■ Prisma quadrangular.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

» Prisma regular

Se o prisma for reto e as bases forem polígonos regulares, o prisma é dito **regular**. Um exemplo é a figura a seguir, que representa um prisma hexagonal regular.



Pense e responda

Sabendo que a figura apresenta um prisma hexagonal regular, que figuras geométricas compõem suas bases e suas faces laterais?

As bases de um prisma hexagonal regular são hexágonos regulares; suas faces laterais são retângulos congruentes.

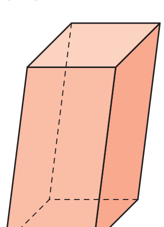
» Paralelepípedos

Os prismas cujas bases são paralelogramos recebem nomes especiais.

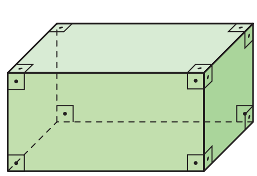
- **Paralelepípedo**: é um prisma cujas bases são paralelogramos.
- **Paralelepípedo reto-retângulo** ou **bloco retangular**: é um prisma reto cujas bases e faces laterais são retângulos. O paralelepípedo reto-retângulo é um caso particular do paralelepípedo.
- **Cubo** ou **hexaedro regular**: é um prisma reto cujas faces são todas quadradas. O cubo é um caso particular do paralelepípedo reto-retângulo.

ALEKSANDR PETRUNOVSKYI/SHUTTERSTOCK.COM

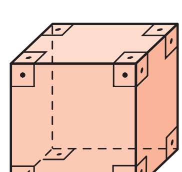
■ Contêiner com formato que lembra um bloco retangular (ou paralelepípedo reto-retângulo). Os contêineres são utilizados para transportar diversos produtos e podem ter dimensões variadas de acordo com o uso.



■ Paralelepípedo.



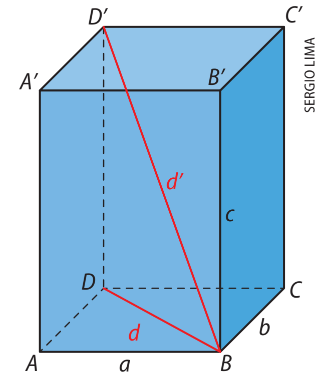
■ Paralelepípedo reto-retângulo.



■ Cubo.

Diagonal de um paralelepípedo reto-retângulo

Considere o paralelepípedo reto-retângulo a seguir, em que estão indicadas algumas medidas.



Conhecendo as dimensões a, b e c, podemos calcular as medidas d da diagonal da base e d' da diagonal do paralelepípedo pelo teorema de Pitágoras.

Considerando o triângulo retângulo ABD, temos:

$$a^2 + b^2 = d^2 \Rightarrow d = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Do triângulo retângulo BDD', temos:

$$c^2 + d^2 = d'^2 \Rightarrow d' = \sqrt{c^2 + d^2} \Rightarrow d' = \sqrt{c^2 + (a^2 + b^2)}$$

Portanto, a medida da diagonal de um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões a, b e c é:

$$d' = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Pense e responda

Como podemos expressar a medida d da diagonal de um cubo em função da medida a de sua aresta? $d = a\sqrt{3}$

» Área da superfície de um prisma

Em um prisma, definimos:

- **área da base** (S_b) como a área de um dos dois polígonos que formam as bases;
- **área lateral** (S_ℓ) como a soma das áreas de todas as faces laterais;
- **área total** (S_t) como a soma da área lateral e das áreas das bases.

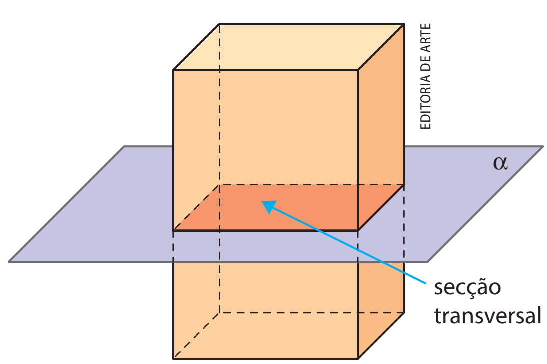
Assim, podemos escrever:

$$S_t = S_\ell + 2S_b$$

» Secção transversal de um prisma

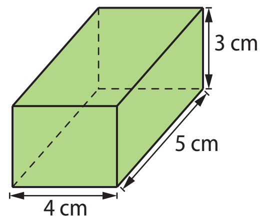
A intersecção de um prisma com um plano paralelo às suas bases é denominada **secção transversal do prisma**.

Observe na figura que a secção transversal de um prisma é um polígono congruente aos polígonos das bases.

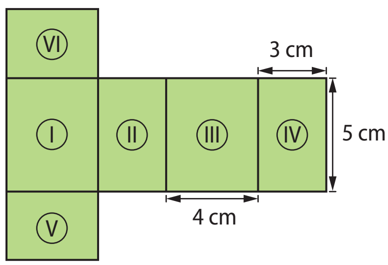


ATIVIDADES RESOLVIDAS

3. Determine a área total da superfície de um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões 5 cm, 4 cm e 3 cm.



Resolução



A superfície do paralelepípedo é formada por seis faces retangulares, indicadas na planificação anterior. Note que I ≅ III, II ≅ IV e V ≅ VI.

Calculando cada área, temos:

$S_{I} = 4\text{ cm} \cdot 5\text{ cm} = 20\text{ cm}^2$

$S_{II} = 3\text{ cm} \cdot 5\text{ cm} = 15\text{ cm}^2$

$S_{V} = 4\text{ cm} \cdot 3\text{ cm} = 12\text{ cm}^2$

Então:

$S_t = 2S_{I} + 2S_{II} + 2S_{V}$

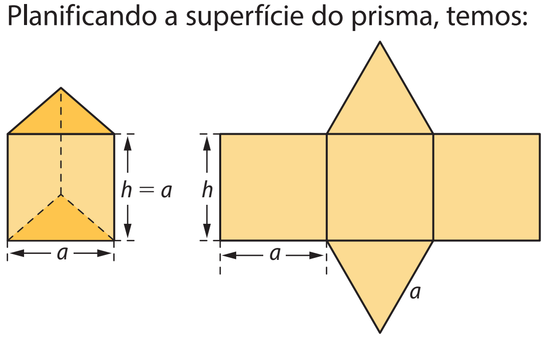
$S_t = 2 \cdot (20 + 15 + 12) = 2 \cdot 47 = 94$

Portanto, a área total da superfície é de 94 cm².

4. Em um prisma triangular regular, a medida *a* da aresta da base é igual à medida *h* da altura do prisma. Sabendo que a área lateral é 10 m², calcule a área total do prisma.

Resolução

Planificando a superfície do prisma, temos:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

A face lateral é um retângulo de dimensões *a* e *h*.

$S_\ell = 3 \cdot (a \cdot h) \Rightarrow S_\ell = 3 \cdot (a \cdot a) \Rightarrow S_\ell = 3a^2$

Como $S_\ell = 10\text{ m}^2$, temos:

$3a^2 = 10 \Rightarrow a^2 = \dfrac{10}{3}$

A base é um triângulo equilátero cujo lado mede *a*. Assim:

$$S_b = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\frac{10}{3}\sqrt{3}}{4} \Rightarrow S_b = \frac{10\sqrt{3}}{12}$$

Cálculo da área total:

$$S_t = S_\ell + 2 \cdot S_b = 10 + 2 \cdot \frac{10\sqrt{3}}{12} = 10\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$$

Portanto, $S_t = 10\left(1 + \dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)\text{ m}^2$.

5. Felipe está construindo uma piscina no quintal da casa dele no formato de um bloco retangular que tem, internamente, 8 metros de comprimento, 4 metros de largura e 1,5 metro de profundidade. O revestimento escolhido por Felipe para cobrir a área interna da piscina é formado por quadrados de cerâmica com 25 cm de lado vendidos por R$ 1,50 a unidade. Considerando que não haverá espaço entre os quadrados, calcule o valor que Felipe deve gastar para comprar a quantidade exata de revestimento necessário para cobrir a área interna da piscina.

Resolução

A área total de um paralelepípedo reto-retângulo é dada por $S_t = S_\ell + 2 \cdot S_b$.

Por se tratar de uma piscina, o revestimento não será colocado em uma das faces do paralelepípedo. Assim, a área total, em metro quadrado, é:

$S_t = 8 \cdot 4 + 2 \cdot (4 \cdot 1{,}5) + 2 \cdot (8 \cdot 1{,}5) = 68$

A área de cada revestimento, em metro quadrado, é:

$A_R = 0{,}25 \cdot 0{,}25 = 0{,}0625$

O total de unidades necessárias para o revestimento é de $\dfrac{68}{0{,}0625} = 1088$.

Felipe precisará comprar 1 088 unidades. Como cada unidade custa R$ 1,50, então o custo total do revestimento é dado por:

$1088 \cdot 1{,}5 = 1632$

Assim, o custo do revestimento será de R$ 1.632,00.

9. Calcule a área total de um cubo cuja aresta mede 8 cm. 384 cm²

10. A diagonal de um paralelepípedo reto-retângulo mede 13 dm, e a diagonal da base, 5 dm. Determine as três dimensões do paralelepípedo, sendo a soma das medidas de todas as arestas igual a 76 dm. 3 dm, 4 dm e 12 dm

11. Um prisma pentagonal regular tem 20 cm de altura. A aresta da base do prisma mede 4 cm. Determine a área lateral desse prisma. 400 cm²

12. (UFRGS-RS) Considere o cubo *ABCDEFGH*, representado na figura abaixo, cuja aresta mede 4 e *M* é o ponto médio da aresta $\overline{AB}$. A área do triângulo *MHG* é alternativa **c**

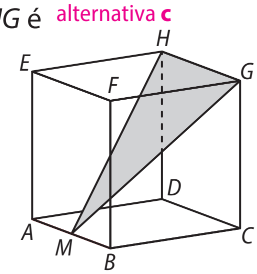
a) $2\sqrt{2}$.

b) $4\sqrt{2}$.

c) $8\sqrt{2}$.

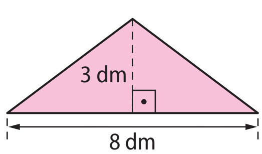
d) $16\sqrt{2}$.

e) $32\sqrt{2}$.



SERGIO LIMA

13. Um prisma reto tem por base um triângulo isósceles com as medidas indicadas na figura. $S_t = 132$ dm²

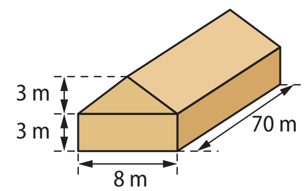


Sabendo que a altura do prisma é igual a $\frac{1}{3}$ do perímetro da base, calcule a área total da superfície do prisma.

14. Em um paralelepípedo reto-retângulo, o comprimento é o dobro da largura, e a altura é 15 cm. Sabendo que a área total é 424 cm², calcule as dimensões desconhecidas desse paralelepípedo. 8 cm; 4 cm

15. As dimensões de um paralelepípedo reto-retângulo são números consecutivos. Sabendo que a soma das medidas de todas as arestas é 84 cm, calcule a área total da superfície desse paralelepípedo. 292 cm²

16. (UFRN) Atualmente, uma das técnicas muito utilizadas no cultivo de hortaliças é a produção em estufas (plasticultura), pois, entre outros fatores, possibilita a proteção contra chuvas, frio, insetos e um aumento da produtividade, que pode atingir até 200%, como no exemplo da abóbora italiana. 1 192 m²

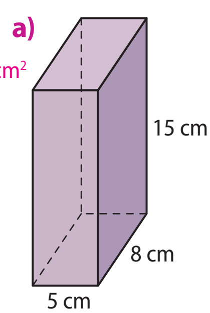


Considerando uma estufa como a representada acima, em que o triângulo da fachada é isósceles, calcule a área de plástico utilizado para revesti-la totalmente (exceto o piso).

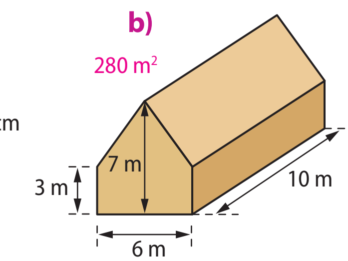
17. (UnB-DF) Em um prisma triangular regular, a área lateral é o quádruplo da área da base. Sabendo que o triângulo da base pode ser inscrito em uma circunferência de raio 2 dm, calcule a área total do prisma em decimetros quadrados e multiplique o resultado por $\sqrt{3}$. 54 dm²

18. Calcule a área total dos prismas retos ilustrados.

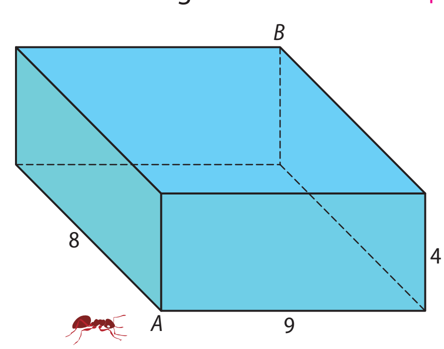
a) 470 cm²



b) 280 m²



19. (UFPE) Uma formiga (ignore seu tamanho) encontra-se no vértice *A* do paralelepípedo reto ilustrado a seguir. 15 unidades de comprimento



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

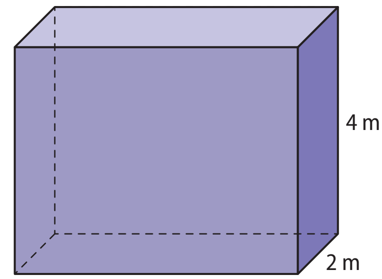
Qual a menor distância que ela precisa percorrer para chegar ao vértice *B* (caminhando sobre a superfície do paralelepípedo)?

» Volume de um paralelepípedo reto-retângulo

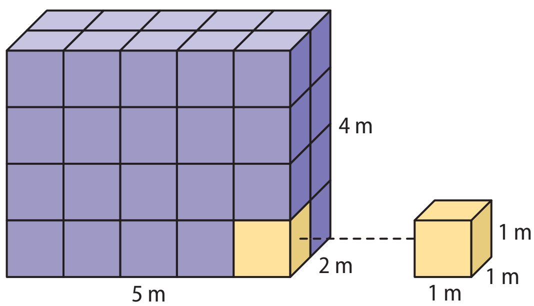
Para medir o volume do espaço ocupado por um sólido S, precisamos comparar esse sólido com uma unidade de medida de volume.

Vamos considerar, por exemplo, um paralelepípedo reto-retângulo com dimensões 5 m, 2 m e 4 m.

Note que, ao dividir esse bloco retangular em cubos com arestas medindo 1 m, podemos determinar a quantidade de cubos que o compõem da seguinte maneira:



SERGIO LIMA



SERGIO LIMA

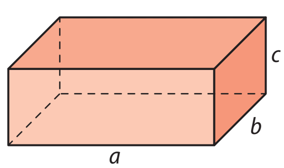
$$\underbrace{5 \cdot 2}_{\text{número de cubos em cada camada}} \cdot \underbrace{4}_{\text{número de camadas}} = 40$$

Portanto, esse paralelepípedo é composto de 40 cubos com 1 m³ de volume cada. Assim, o volume total é igual a 40 m³.

Note que o volume V do paralelepípedo, nesse caso, poderia ser obtido multiplicando-se suas três dimensões: **comprimento**, **largura** e **altura**. Observe:

$$V = 5\text{ m} \cdot 2\text{ m} \cdot 4\text{ m} = 40\text{ m}^3$$

No caso geral de um paralelepípedo reto-retângulo qualquer, prova-se que o volume V desse paralelepípedo de dimensões com medidas a, b e c é dado por:



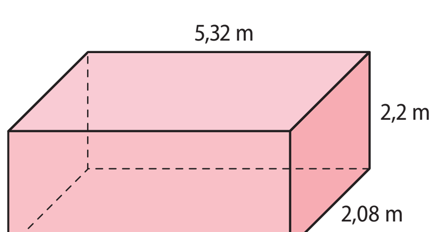
$$V = a \cdot b \cdot c$$

Como o produto $a \cdot b$ equivale à área da base A_b e c é a medida h da altura, podemos dizer que o volume do paralelepípedo é igual ao produto da área da base pela medida da altura:

$$V = S_b \cdot h$$

> **Saiba que...**
>
> A grandeza volume se relaciona com a grandeza capacidade; desse modo, podemos também relacionar suas unidades de medida. Observe um exemplo: 1 m³ = 1000 L

Observe como calcular o volume de um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões 5,32 m, 2,08 m e 2,2 m.



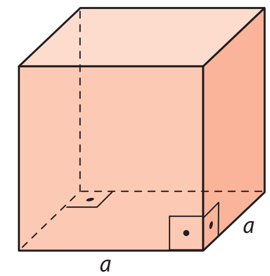
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

$$V = 5{,}32\text{ m} \cdot 2{,}08\text{ m} \cdot 2{,}2\text{ m} \simeq 24{,}34\text{ m}^3$$

» Volume de um cubo

Em um cubo, as três dimensões têm a mesma medida e, indicando cada uma delas por *a*, seu volume é dado por:

$$V = a \cdot a \cdot a \Rightarrow V = a^3$$



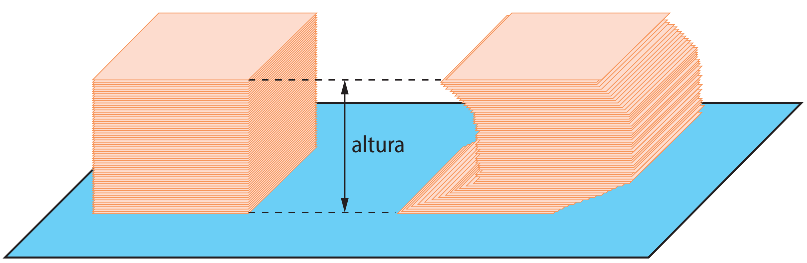
» Princípio de Cavalieri

Apresentamos o cálculo que determina o volume do paralelepípedo reto-retângulo e do cubo. No entanto, a fórmula para o cálculo do volume de outros sólidos pode não ser tão simples e, para estabelecê-la, precisamos de um resultado matemático, conhecido como princípio de Cavalieri.

Saiba que...

O princípio de Cavalieri foi desenvolvido pelo matemático italiano Francesco Bonaventura Cavalieri (1598-1647).

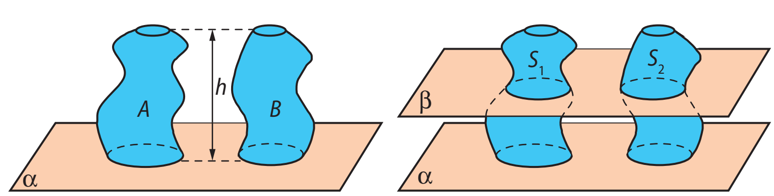
Vamos considerar duas pilhas de papel sulfite idênticas, com a mesma quantidade de folhas em cada uma, colocadas sobre uma mesa.



Observando as duas pilhas, podemos destacar algumas características: a altura é a mesma, pois cada uma tem a mesma quantidade de folhas; as folhas de cada pilha que ficam à mesma distância da mesa têm a mesma área; e as duas pilhas têm o mesmo volume, uma vez que são formadas pela mesma quantidade de folhas.

Essa ideia ilustra o princípio de Cavalieri, apresentado a seguir.

Considere dois sólidos *A* e *B* de mesma altura com as bases contidas em um mesmo plano horizontal α. Traçando um plano β, paralelo a α e secante aos sólidos, determinamos duas secções transversais, cujas áreas são S_1 e S_2.



O **princípio de Cavalieri** afirma que, se, para todo plano β, nas condições anteriores, tivermos $S_1 = S_2$, então os sólidos *A* e *B* terão o mesmo volume.

O princípio de Cavalieri pode ser demonstrado; no entanto, não o faremos aqui, por esse cálculo envolver conceitos matemáticos que não são estudados no Ensino Médio. Vamos considerá-lo verdadeiro e aplicá-lo para a determinação do volume de alguns sólidos.

» Volume de um prisma

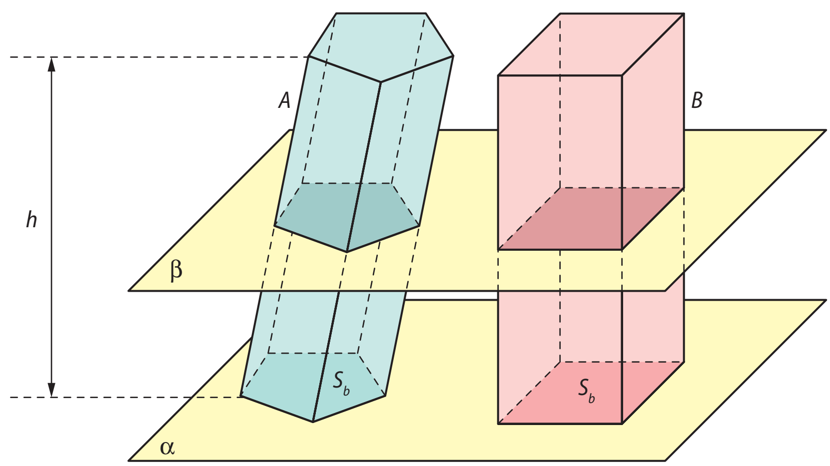
Certo fabricante de itens alimentícios tem, em seu catálogo, um produto cuja embalagem lembra um prisma de base hexagonal, como podemos observar na imagem.

SELMA CAPARROZ

Para propósitos de armazenamento, o fabricante precisa saber qual é o volume ocupado por cada embalagem. Como ele pode determinar isso?

Para responder a essa pergunta, vamos usar o princípio de Cavalieri e determinar uma fórmula para calcular o volume de um prisma.

Seja *A* um sólido de altura *h* e área da base S_b. Considere, ainda, um paralelepípedo reto-retângulo *B* de mesma altura *h* e área da base também S_b. Ambos estão apoiados no plano α.



EDITORIA DE ARTE

Qualquer plano β, paralelo ao plano α, que intersecte os sólidos *A* e *B* determina secções transversais congruentes às respectivas bases. Como as áreas das bases de *A* e *B* são iguais e valem S_b, então as secções transversais também têm área igual a S_b. Portanto, pelo princípio de Cavalieri, concluímos que o volume do prisma *A* é igual ao volume do paralelepípedo reto-retângulo *B*.

Como o volume do paralelepípedo reto-retângulo é dado pelo produto da área da base S_b pela medida da altura *h*, então o volume do prisma V_{prisma} também será calculado da mesma maneira. Assim, podemos escrever:

$$V_{prisma} = S_b \cdot h$$

Pense e responda

Qual é o volume ocupado pela embalagem, sabendo que a área de sua base é igual a 6 cm^2 e que cada embalagem tem 10 cm de altura? 60 cm^3

FÓRUM

O impacto das embalagens e o desafio dos resíduos sólidos

As embalagens desempenham papel essencial na sociedade moderna, facilitando o transporte, a proteção e a preservação de produtos, bem como trazem importantes informações para o consumidor. No entanto, o uso excessivo e inadequado de embalagens tem gerado uma série de problemas ambientais e sociais, principalmente relacionados à produção de resíduos sólidos.

Esses resíduos, muitas vezes feitos de plástico, podem levar centenas de anos para se decompor, prejudicando ecossistemas terrestres e aquáticos e representando uma ameaça à vida selvagem. Além disso, visando ao aperfeiçoamento das técnicas de conservação de produtos, novos materiais têm sido incorporados às embalagens para torná-las mais eficientes. Entretanto, essas misturas frequentemente dificultam tanto a sua degradação natural como a sua reciclagem.

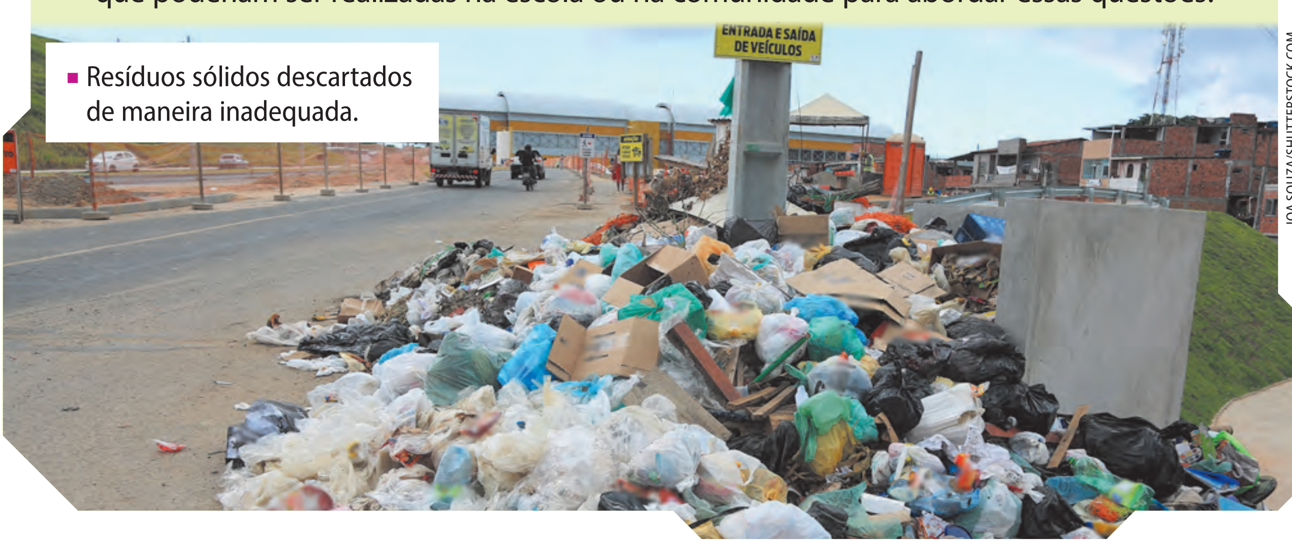
Muitos desses resíduos acabam sendo descartados de maneira incorreta, poluindo rios, oceanos e áreas naturais e contribuindo para a formação de lixões e aterros sanitários sobrecarregados. Esse cenário não apenas compromete a qualidade do ar, da água e do solo, mas também representa um desafio para as comunidades locais e os governos, que enfrentam dificuldades na coleta, no tratamento e na disposição adequada desses resíduos.

O excesso de embalagens também tem consequências econômicas e sociais. O aumento dos custos relacionados à gestão de resíduos representa um ônus para empresas, governos e consumidores, enquanto a poluição resultante afeta negativamente o turismo, a pesca e outras atividades econômicas dependentes de ecossistemas saudáveis.

Diante desses desafios, é fundamental adotar medidas eficazes para mitigar os problemas causados pelas embalagens e pelos resíduos sólidos gerados por elas. Isso inclui a promoção de práticas de *design* e produção sustentáveis, a implementação de políticas de redução, reutilização e reciclagem de embalagens, o investimento em infraestrutura de gestão de resíduos e a conscientização pública sobre o impacto ambiental do consumo excessivo e do desperdício.

Após ler o texto, converse com seus colegas sobre as questões a seguir. Ver as **Orientações para o professor**.

- Como vocês costumam descartar as embalagens após o uso do conteúdo? Já pensaram em como suas escolhas de consumo afetam o meio ambiente? Que tipo de ações vocês acham que poderiam ser realizadas na escola ou na comunidade para abordar essas questões?

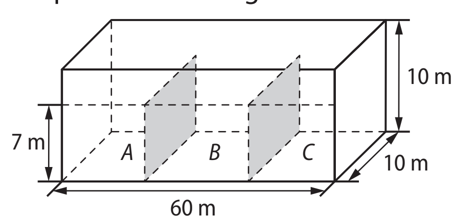


Resíduos sólidos descartados de maneira inadequada.

JOA SOUZA/SHUTTERSTOCK.COM

ATIVIDADE RESOLVIDA

6. (Enem/MEC) Um petroleiro possui reservatório em formato de um paralelepípedo retangular com as dimensões dadas por 60 m $\times$ 10 m de base e 10 m de altura. Com o objetivo de minimizar o impacto ambiental de um eventual vazamento, esse reservatório é subdividido em três compartimentos, *A*, *B* e *C*, de mesmo volume, por duas placas de aço retangulares com dimensões de 7 m de altura e 10 m de base, de modo que os compartimentos são interligados, conforme a figura. Assim, caso haja rompimento no casco do reservatório, apenas uma parte de sua carga vazará.



EDITORIA DE ARTE

Suponha que ocorra um desastre quando o petroleiro se encontra com sua carga máxima: ele sofre um acidente que ocasiona um furo no fundo do compartimento *C*. Para fins de cálculo, considere desprezíveis as espessuras das placas divisórias. Após o fim do vazamento, o volume do petróleo derramado terá sido de

a) $1{,}4 \times 10^3$ m³
b) $1{,}8 \times 10^3$ m³
c) $2{,}0 \times 10^3$ m³
d) $3{,}2 \times 10^3$ m³
e) $6{,}0 \times 10^3$ m³

Resolução

Vamos calcular o volume da região acima das placas e do compartimento *C*, onde está o furo que provocará o vazamento.

Assim, temos:

$V = 60 \cdot 10 \cdot (10 - 7) + (60 : 3) \cdot 10 \cdot 7$

$V = 1\,800 + 1\,400$

$V = 3\,200$

Dessa maneira, o volume de petróleo derramado é igual a $3{,}2 \cdot 10^3$ m³.

Outro modo de resolver a questão é calcular o volume total do reservatório e subtrair o volume dos compartimentos *A* e *B*.

$V = 60 \cdot 10 \cdot 10 - 2 \cdot (60 : 3) \cdot 10 \cdot 7$

$V = 6\,000 - 2\,800$

$V = 3\,200$

A resposta correta é a alternativa **d**.

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

20. Qual é o volume, em metro cúbico, de argila necessário para produzir 5 000 tijolos, tendo cada tijolo a forma de um paralelepípedo reto-retângulo com dimensões 18 cm, 9 cm e 6 cm?
4,86 m³

ALIS PHOTO/SHUTTERSTOCK.COM

▪ Tijolo de argila.

21. As medidas das arestas de um paralelepípedo reto-retângulo formam uma progressão geométrica. Se a menor das arestas mede $\frac{1}{2}$ cm e o volume de tal paralelepípedo é 64 cm³, calcule as medidas das outras arestas.
4 cm e 32 cm

22. (UEPB) Um reservatório em forma de cubo, cuja diagonal mede $2\sqrt{3}$ m, tem capacidade igual a: alternativa **c**

a) 4 000 litros
b) 6 000 litros
c) 8 000 litros
d) 2 000 litros
e) 1000 litros

23. Uma empresa alimentícia vai começar a produzir bombons de chocolate em formatos de cubo de aresta 4 cm e de paralelepípedo reto-retângulo com comprimento de 6 cm, largura de 5 cm e altura de 2 cm. Serão produzidos três tipos: chocolate ao leite, meio amargo e branco. A seguir, temos as dimensões dos bombons e os custos de produção dos chocolates. Resposta pessoal.

Tipo	1	2
Dimensões (cm)	$4 \times 4 \times 4$	$6 \times 5 \times 2$

Tipos	Ao leite	Meio amargo	Branco
Custo (R$/cm³)	0,03	0,05	0,04

Elabore um problema que associe as dimensões dos bombons ao custo por cm³.

24. (UEPG-PR) As medidas internas de uma caixa-d'água em forma de paralelepípedo retângulo são: 1,2 m, 1 m e 0,7 m. Sua capacidade é de:

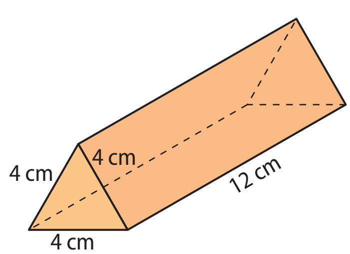
a) 8 400 L
b) 84 L
c) 840 L
d) 8,4 L
e) n.d.a.

alternativa **c**

25. (UFRN) Quando se diz que, numa região, caiu uma chuva com precipitação de 10 mm de água, isso significa que cada metro quadrado dessa região recebeu 10 litros de água da chuva. Uma caixa-d'água de 1,5 m de altura, 0,8 m de largura e 1,4 m de comprimento, com uma abertura na face superior, na forma de um quadrado com 40 cm de lado, recebeu água diretamente de uma chuva de 70 mm.
Admitindo-se que a caixa só tenha recebido água da chuva, pode-se afirmar que o nível da água nessa caixa aumentou: alternativa **b**

a) 0,8 cm **b)** 1 cm **c)** 1,2 cm **d)** 2 cm

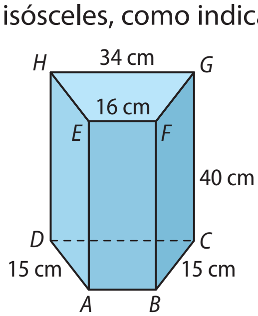
26. Uma barra de chocolate tem o formato da figura a seguir. Calcule o volume de chocolate contido nessa barra. (Use $\sqrt{3} = 1{,}73$.) $83{,}04\ \text{cm}^3$



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

27. Uma pizzaria projetou uma caixa para colocar suas *pizzas* no formato de um prisma regular reto com base octogonal com lado de medida x e com altura de medida y. Reservou-se um espaço para armazenamento das caixas e verificou-se que era possível montar 10 pilhas de 40 caixas cada. Determine uma fórmula para o volume que as caixas ocuparão.
O volume que as caixas ocuparão é $800x^2y(1 + \sqrt{2})$.

28. Um prisma reto de ferro, de densidade aproximada 7,5 g/cm³, tem por base um trapézio isósceles, como indica a figura.



Saiba que...

A densidade de um corpo é a razão entre a massa e o volume desse corpo.

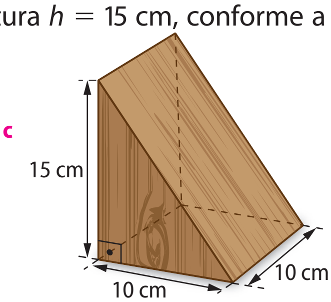
Determine:

a) o volume desse sólido; $12\,000\ \text{cm}^3$
b) a massa desse sólido. 90 kg

29. Um arquiteto fez o projeto de construção de uma coluna de concreto que vai sustentar uma ponte. A coluna tem a forma de um prisma hexagonal regular de aresta de base 2 m e altura 8 m. Calcule:

a) a área lateral da estrutura de madeira que deve ser utilizada para a construção da coluna; $96\ \text{m}^2$
b) o volume de concreto necessário para preencher a forma da coluna. $48\sqrt{3}\ \text{m}^3$

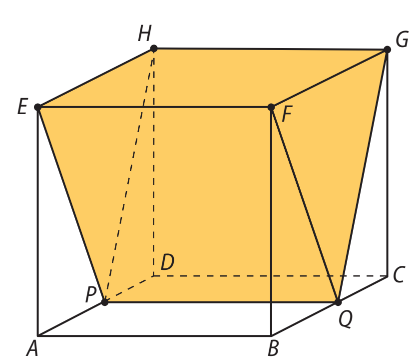
30. (Ufersa-RN) De uma viga de madeira de seção quadrada de lado $\ell = 10$ cm, extrai-se uma cunha de altura $h = 15$ cm, conforme a figura.



O volume da cunha é: alternativa **c**

a) 250 cm³
b) 500 cm³
c) 750 cm³
d) 1000 cm³

31. (UFRGS-RS) Um sólido geométrico foi construído dentro de um cubo de aresta 8, de maneira que dois de seus vértices, P e Q, sejam os pontos médios respectivamente das arestas AD e BC, e os vértices da face superior desse sólido coincidam com os vértices da face superior do cubo, como indicado na figura a seguir.



O volume desse sólido é: alternativa **c**

a) 64
b) 128
c) 256
d) 512
e) 1024

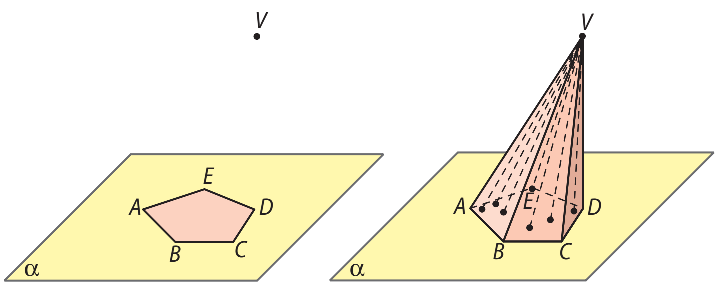
Pirâmides

Além dos prismas, há outro grupo de poliedros cujo formato pode ser associado a objetos do cotidiano.

Esse tipo de poliedro é denominado pirâmide.

Considere um plano α, um polígono convexo contido em α e um ponto V que não pertence a α.

Pirâmide é a figura geométrica formada pela reunião de todos os segmentos de reta que têm uma extremidade no ponto V e a outra em um ponto do polígono.

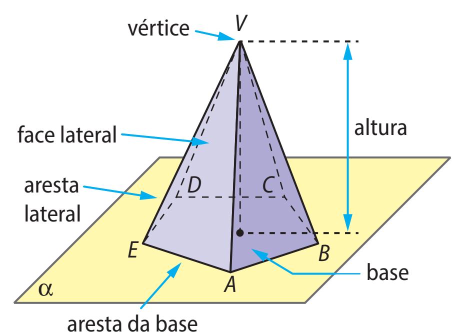


AYODALEY IDRIS/ISTOCK EDITORIAL/GETTY IMAGES

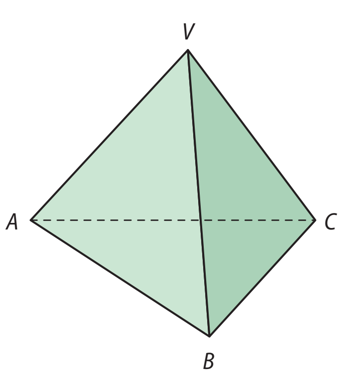
Entrada do Museu do Louvre em Paris (França). A pirâmide é feita de vidro e aço e foi inaugurada em 1989. Fotografia de 2024.

Considerando a pirâmide representada na figura a seguir, destacamos os seguintes elementos:

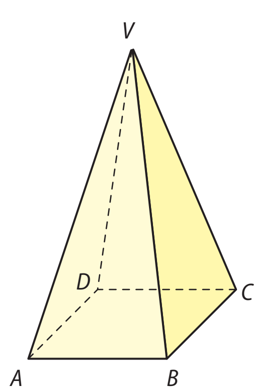
- **Base**: é o polígono convexo *ABCDE* contido no plano α;
- **Vértice da pirâmide**: é o ponto V;
- **Vértices da base**: são os pontos A, B, C, D, E;
- **Faces laterais**: são os triângulos *VAB*, *VBC*, *VCD*, *VDE* e *VEA*;
- **Arestas da base**: são os lados do polígono da base $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ e $\overline{EA}$;
- **Arestas laterais**: são os segmentos de reta $\overline{VA}$, $\overline{VB}$, $\overline{VC}$, $\overline{VD}$ e $\overline{VE}$;
- **Altura**: é a distância entre o ponto V e o plano da base, α.



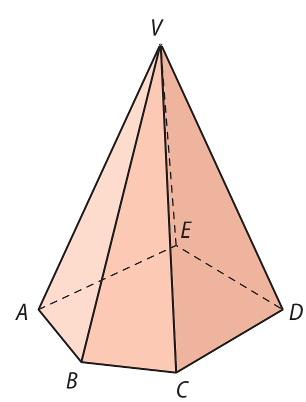
Podemos classificar as pirâmides de acordo com o número de lados do polígono da base. Por exemplo, as pirâmides podem ser triangulares, quando a base é um triângulo; quadrangulares, quando a base é um quadrilátero; pentagonais, quando a base é um pentágono; e assim por diante.



Pirâmide triangular.



Pirâmide quadrangular.

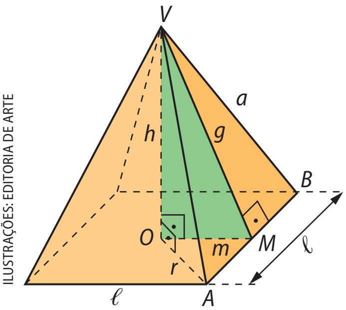


Pirâmide pentagonal.

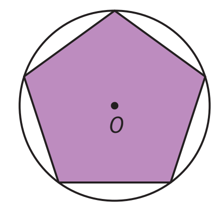
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

» Pirâmide regular

Uma pirâmide é **regular** se sua base é um polígono regular e a projeção ortogonal de seu vértice coincide com o centro *O* desse polígono.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

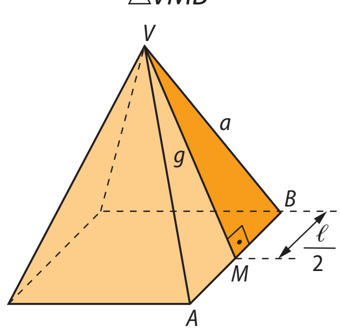
> **Saiba que...**
>
> O centro de um polígono regular é o centro da circunferência circunscrita ao polígono, ou seja, é o ponto que equidista dos vértices desse polígono.
>
> 
>

Considerando a pirâmide regular de base quadrada representada destacamos os seguintes elementos:

- **Raio da base**: é o raio da circunferência de centro *O* circunscrita ao polígono regular da base; sua medida é indicada por *r*;
- **Altura da pirâmide**: é a medida do segmento de reta $\overline{VO}$, que liga o vértice *V* ao centro da base, indicada por *h*;
- **Faces laterais**: são triângulos isósceles congruentes;
- **Arestas laterais**: são congruentes e sua medida é indicada por *a*;
- **Arestas da base**: são congruentes, pois correspondem aos lados do polígono regular da base, e sua medida é indicada por ℓ;
- **Apótema da base**: é o apótema do polígono regular da base, ou seja, o segmento $\overline{OM}$, em que *M* é o ponto médio de um dos lados, e sua medida é indicada por *m*;
- **Apótema da pirâmide**: é a altura de cada face lateral (correspondente à altura $\overline{VM}$ relativa à base de um triângulo isósceles), cuja medida é indicada por *g*.

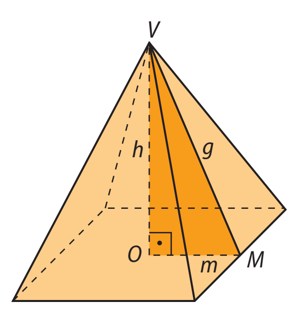
Nas pirâmides regulares, podemos determinar algumas de suas medidas conhecendo outras e aplicando o teorema de Pitágoras em alguns triângulos. Considere a pirâmide anterior e os seguintes triângulos retângulos:

$\triangle VMB$



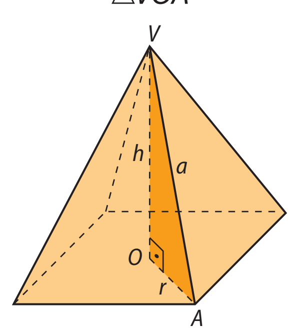
$$a^2 = g^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$$

$\triangle VOM$



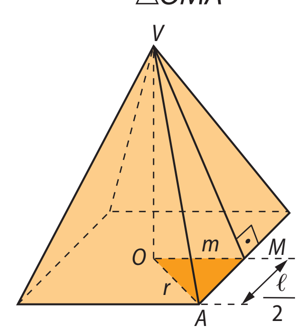
$$g^2 = h^2 + m^2$$

$\triangle VOA$



$$a^2 = h^2 + r^2$$

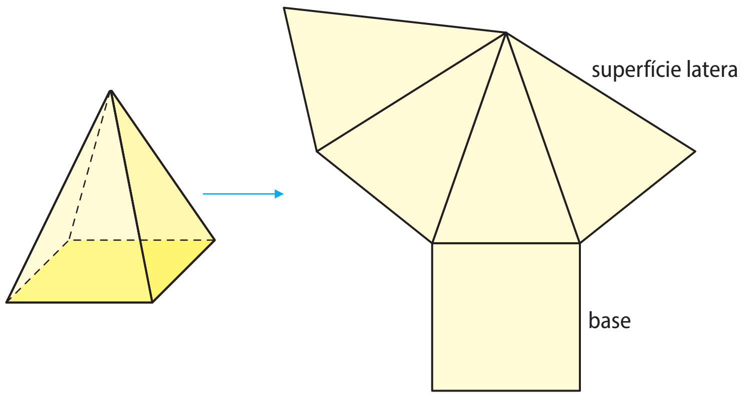
$\triangle OMA$



$$r^2 = m^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$$

Área da superfície de uma pirâmide

A figura a seguir representa a planificação da superfície de uma pirâmide quadrangular regular.



Em uma pirâmide, definimos:

- **área da base** (S_b) como a área do polígono da base da pirâmide;
- **área lateral** (S_ℓ) como a soma das áreas de todas as faces laterais;
- **área total** (S_t) como a soma da área lateral e da área da base.

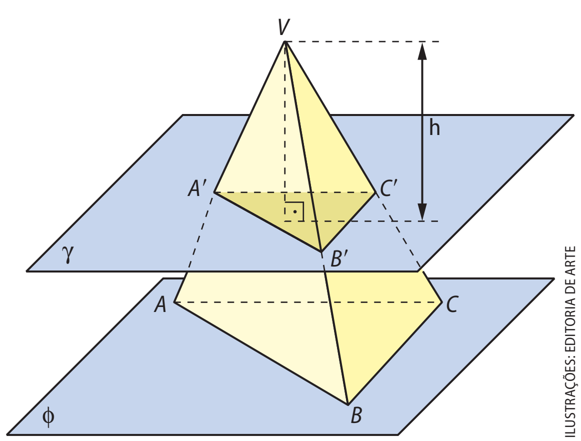
Então, podemos escrever:

$$S_t = S_\ell + S_b$$

Secção transversal de uma pirâmide

Denomina-se **secção transversal** da pirâmide a intersecção da pirâmide com um plano secante a ela, paralelo à base e a uma distância *d* do vértice *V*.

É possível provar que a secção transversal de uma pirâmide é um polígono semelhante ao polígono da base.

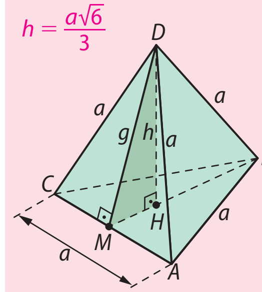


ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Pense e responda

A pirâmide que tem quatro faces idênticas, sendo todas elas triângulos equiláteros, é chamada de **tetraedro regular**.
Como todas as faces são triângulos equiláteros, todas as arestas (da base e da lateral) são congruentes.
Utilizando a imagem a seguir, que representa um tetraedro regular e alguns de seus elementos, determine a altura (*h*) da pirâmide em função de sua aresta de medida *a*.
(Lembre-se de que a medida do apótema de um triângulo equilátero em função do lado *a* é dada por $a\frac{\sqrt{3}}{6}$.)

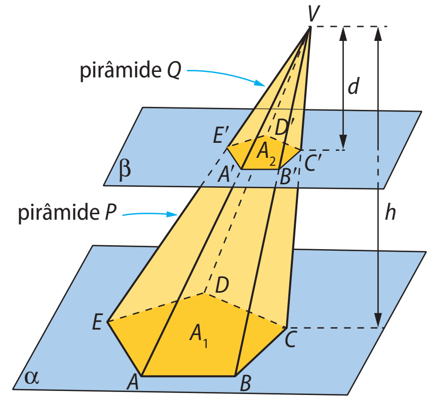
$h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$



Caso os estudantes não se lembrem das relações métricas de polígonos regulares, para determinar os apótemas dos polígonos regulares das bases das pirâmides, relembre-os dessas relações, que foram estudadas no Capítulo **7** do Volume **2** desta Coleção.

» Volume de uma pirâmide

Considere a pirâmide *P*, de altura *h* e base *ABCDE* de área A_1, contida em um plano horizontal α, e um plano β, paralelo a α e secante à pirâmide. O plano β determina uma secção transversal *A'B'C'D'E'* de área A_2, que é base da pirâmide *Q* de altura *d* (pirâmide menor) e semelhante à base *ABCDE*.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

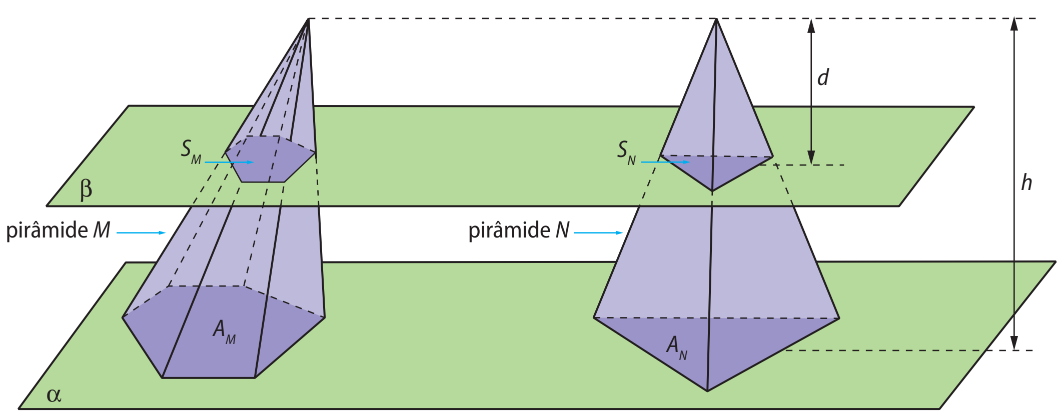
No Volume **2** desta Coleção, aprendemos que, se *AB* e *A'B'* são os comprimentos dos lados correspondentes de dois polígonos semelhantes de áreas *F* e *F'*, então:

$$\frac{F}{F'} = \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2$$

Note, na figura anterior, que as respectivas faces laterais das pirâmides *Q* e *P* são triângulos semelhantes.

Usando semelhança de triângulos, pode-se demonstrar que as bases de áreas A_1 e A_2 são polígonos semelhantes com razão de semelhança $\frac{h}{d}$; então, $\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{h}{d}\right)^2$.

Agora, considere duas pirâmides *M* e *N* de mesma altura *h*, com bases de mesma área A_M e A_N contidas em um plano horizontal α. Qualquer plano β, paralelo a α e secante às pirâmides, determina duas secções transversais de áreas S_M e S_N, respectivamente.



Estudamos anteriormente que a razão entre a área da base e a da secção transversal de cada pirâmide vale $\frac{A_M}{S_M} = \left(\frac{h}{d}\right)^2$ e $\frac{A_N}{S_N} = \left(\frac{h}{d}\right)^2$.

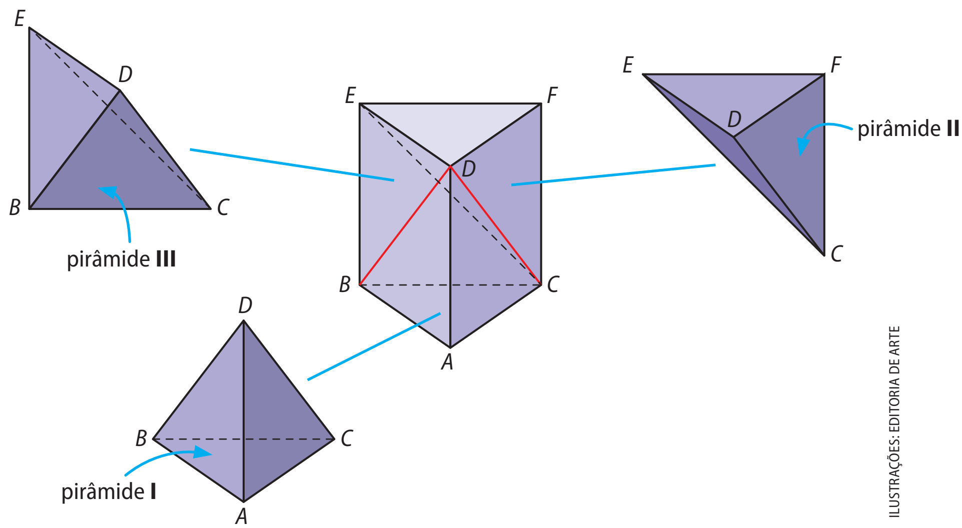
Logo, $\frac{A_M}{S_M} = \frac{A_N}{S_N}$.

Como $A_M = A_N$, concluímos que $S_M = S_N$ para qualquer plano β paralelo a α e secante às pirâmides.

Com isso, pelo princípio de Cavalieri, as pirâmides *M* e *N* têm o mesmo volume.

Provamos, assim, que duas pirâmides com bases de mesma área e com mesma altura têm volumes iguais. Esse fato será utilizado a seguir para determinar o volume de uma pirâmide.

Para calcular o volume de uma pirâmide qualquer, primeiro vamos considerar um prisma reto de base triangular decomposto em três pirâmides triangulares, como mostram as figuras a seguir.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Observe que:

- as pirâmides **I** e **II** têm a mesma altura (altura do prisma) e têm bases congruentes ($\triangle ABC \cong \triangle DEF$, pois cada triângulo é uma base do prisma), portanto, conforme o resultado da página anterior, as pirâmides **I** e **II** têm o mesmo volume;
- considerando as pirâmides **II** e **III** com suas respectivas bases *CEF* e *BCE*, a altura (distância do ponto *D* ao retângulo *BCFE*) dessas pirâmides é a mesma e elas têm bases congruentes ($\triangle CEF \cong \triangle BCE$, pois cada um desses triângulos é a metade do retângulo *BCFE*), portanto, novamente conforme o resultado da página anterior, as pirâmides **II** e **III** têm o mesmo volume.

Logo, as pirâmides **I**, **II** e **III** têm o mesmo volume, ou seja, $V_1 = V_2 = V_3$.

Seja $V_{\text{prisma}} = V_1 + V_2 + V_3$ (soma dos volumes das três pirâmides) e considerando $V_1 = V_2 = V_3 = V$, temos:

$$V_{\text{prisma}} = V + V + V \Rightarrow V_{\text{prisma}} = 3V \Rightarrow V = \frac{V_{\text{prisma}}}{3}$$

Assim, o volume de cada pirâmide é igual a $\frac{1}{3}$ do volume do prisma triangular dado. Como o volume do prisma é $V_{\text{prisma}} = S_b \cdot h$, podemos escrever:

$$V = \frac{V_{\text{prisma}}}{3} \Rightarrow V = \frac{S_b \cdot h}{3}$$

Apesar de a obtenção da fórmula ter sido feita para uma pirâmide de base triangular, essa relação vale para o cálculo do volume de uma pirâmide de base qualquer, pois, como aprendemos na página anterior, pelo princípio de Cavalieri, duas pirâmides com bases de mesma área e mesma altura têm volumes iguais. Assim, o volume de uma pirâmide de base qualquer é igual ao volume de uma pirâmide com base triangular com mesma área da base e mesma altura.

Então, o volume de uma pirâmide qualquer de altura medindo *h* e área da base S_b é igual a:

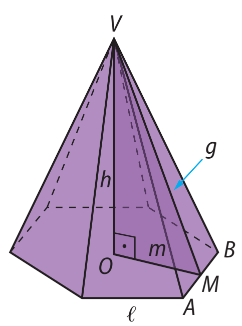
$$\boxed{V = \frac{1}{3} S_b \cdot h}$$

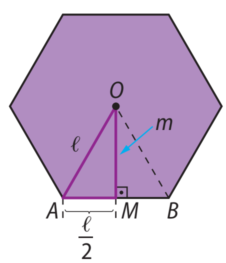
ATIVIDADES RESOLVIDAS

7. Em uma feira de artesanato, foi construída uma tenda com tecido no formato de uma pirâmide hexagonal regular com 8 m de altura e aresta da base medindo $4\sqrt{3}$ m. Considerando que quem armou a tenda deixou uma das faces laterais como porta (sem fechamento do tecido), calcule a quantidade de tecido necessária para a cobertura da tenda.

Resolução

Primeiro vamos representar a tenda e sua base:





Saiba que...

Em um triângulo equilátero, a medida da altura h, em relação a qualquer um dos lados, em função de seu lado ℓ, pode ser obtida pelo teorema de Pitágoras da seguinte maneira:

$$h^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \ell^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h^2 = \frac{3}{4}\ell^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \frac{\ell\sqrt{3}}{3}, \text{ pois } h > 0$$

No triângulo AOB, OM é a altura e o apótema da base da pirâmide; logo, a medida m é:

$$m = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = \frac{4\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2} = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = 6$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo VOM, temos:

$$g^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g^2 = 36 + 64 = 100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g = 10, \text{ pois } g > 0$$

Calculando área S_f de uma face da pirâmide, temos:

$$S_f = \frac{\ell\cdot g}{2} \Rightarrow S_f = \frac{4\sqrt{3}\cdot 10}{2} = 20\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_f = 20\sqrt{3}$$

Como uma das faces laterais (porta) não usará tecido, a área lateral será dada por:

$$5\cdot 20\sqrt{3}\ \text{m}^2 = 100\sqrt{3}\ \text{m}^2$$

Portanto, serão necessários $100\sqrt{3}$ m² de tecido.

8. Calcule o volume de uma pirâmide cuja base é um quadrado de 3 cm de lado e a altura é 10 cm.

Resolução

Como $V = \frac{1}{3}\cdot S_b\cdot h$, precisamos determinar a área da base (S_b).

A base é um quadrado, logo:

$$S_b = \ell^2 \Rightarrow S_b = 3^2 = 9 \Rightarrow S_b = 9$$

Calculando o volume (V), temos:

$$V = \frac{1}{3}\cdot S_b\cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3}\cdot 9\cdot 10 = 30 \Rightarrow$$

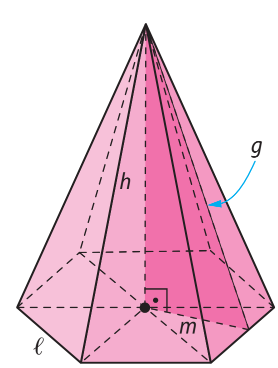
$$\Rightarrow V = 30$$

Portanto, o volume da pirâmide é 30 cm³.

9. Em uma pirâmide hexagonal regular, a aresta da base mede $\ell = 2$ cm. Sabendo que a área lateral da pirâmide é 30 cm², calcule o volume da pirâmide.

Resolução

Considere a pirâmide a seguir, com apótema da base m.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Como a base é um hexágono regular, temos:

$$m = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = \sqrt{3}$$

Como a base da pirâmide é hexagonal, sua área lateral é 30 cm² e ela tem seis faces laterais. A área de cada face lateral é dada por:

$$S_f = \frac{S_\ell}{6} \Rightarrow S_f = \frac{30}{6} = 5 \Rightarrow S_f = 5$$

Logo, o apótema da pirâmide (g) é:

$$S_f = \frac{\ell \cdot g}{2} \Rightarrow 5 = \frac{2g}{2} \Rightarrow g = 5$$

Pelo teorema de Pitágoras, a altura da pirâmide (h) é:

$g^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow 5^2 = h^2 + (\sqrt{3})^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow h = \sqrt{22}$, pois $h > 0$

Para determinar o volume da pirâmide, precisamos calcular a área da base.

Como a base é um hexágono regular, sua área é igual a seis vezes a área do triângulo equilátero de aresta $\ell = 2$ cm.

$S_b = 6 \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow S_b = 6 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_b = 6\sqrt{3}$

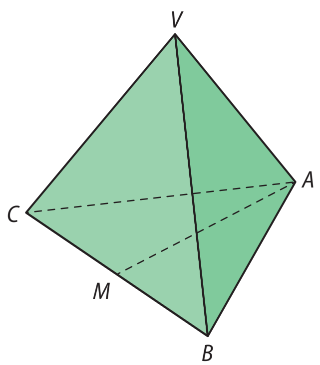
Calculando o volume da pirâmide (V), temos:

$V = \frac{1}{3} S_b \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{3} \cdot \sqrt{22} = 2\sqrt{66} \Rightarrow$

$\Rightarrow V = 2\sqrt{66}$

Portanto, o volume da pirâmide é $2\sqrt{66}$ cm³.

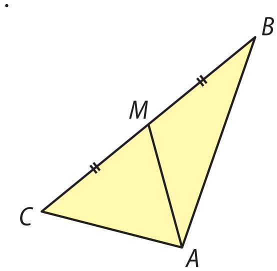
10. Considere o tetraedro regular $ABCV$ a seguir, de aresta de medida $a = 4$ cm, em que $\overline{AM}$ é uma mediana do triângulo equilátero ABC, base do tetraedro.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Saiba que...

A mediana de um triângulo é um segmento de reta que tem uma de suas extremidades em um dos vértices do triângulo e a outra no ponto médio do lado oposto a esse vértice.
No triângulo a seguir, $\overline{AM}$ é a mediana relativa ao lado $\overline{BC}$.



A partir dessas informações, determine:

a) a medida da mediana $\overline{AM}$;
b) a altura do tetraedro;
c) a área total da superfície do tetraedro.

Resolução

a) Em um triângulo equilátero, a mediana coincide com a altura. Assim, a medida da mediana $\overline{AM}$ é igual à medida da altura relativa ao lado $\overline{BC}$ do triângulo equilátero ABC, que tem lado de medida a, ou seja:

$$AM = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

Portanto, a medida da mediana $\overline{AM}$ é $2\sqrt{3}$ cm.

b) A altura h de um tetraedro regular em função de sua aresta a é dada por $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Então: $h = \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$

Portanto, a altura do tetraedro é $\frac{4\sqrt{6}}{3}$ cm.

c) A área total S_t da superfície de um tetraedro regular é igual a 4 vezes a área de uma face (triângulo equilátero):

$S_t = 4 \cdot S_f = 4 \cdot \frac{a \cdot AM}{2} =$

$= 4 \cdot \frac{4 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3}$

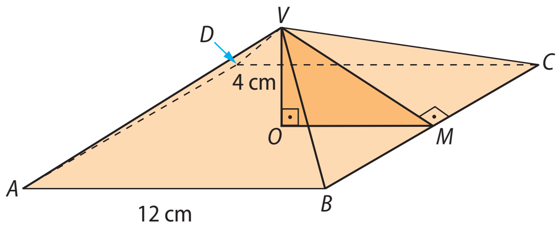
Portanto, a área total da superfície do tetraedro é $16\sqrt{3}$ cm².

A altura h de um tetraedro regular em função de sua aresta a foi obtida no boxe **Pense e responda** da página **73**. Se achar necessário, mostrar aos estudantes como chegar a essa medida.

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

32. Considere a pirâmide quadrangular regular indicada na figura e determine o que se pede.



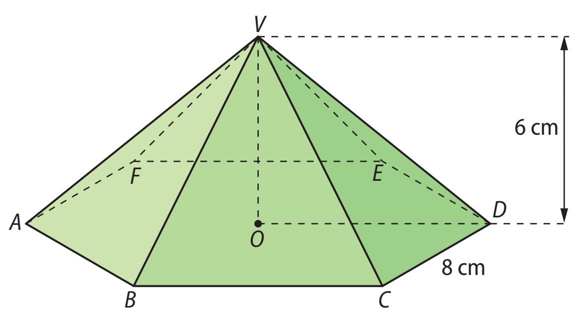
a) A medida do apótema da base. 6 cm

b) A medida do apótema da pirâmide. $2\sqrt{13}$ cm

c) A medida da aresta lateral. $2\sqrt{22}$ cm

d) A área total da superfície da pirâmide. $48(3+\sqrt{13})$ cm²

33. Considere a pirâmide hexagonal regular indicada na figura e determine o que se pede.



a) A medida do apótema da base. $4\sqrt{3}$ cm

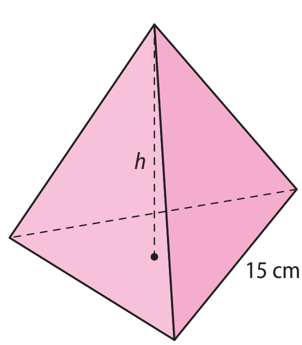
b) A medida do apótema da pirâmide. $2\sqrt{21}$ cm

c) A medida da aresta lateral. 10 cm

d) A área total da superfície da pirâmide. $48\sqrt{3}\,(2+\sqrt{7})$ cm²

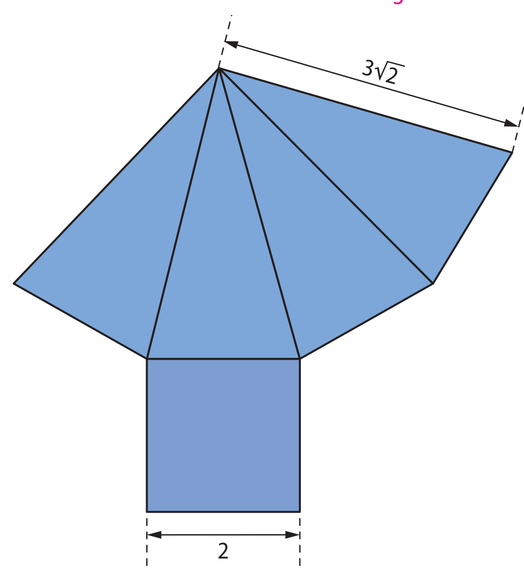
34. Calcule a área lateral da superfície de uma pirâmide triangular regular cuja aresta lateral mede 13 cm e o apótema da pirâmide mede 12 cm. 180 cm²

35. A figura a seguir mostra uma pirâmide de base triangular em que todas as arestas têm medida igual a 15 cm. Determine a área total da superfície dessa pirâmide. $225\sqrt{3}$ cm²



36. Em uma pirâmide regular de base quadrada, o perímetro da base é 40 cm. Sabendo que a altura da pirâmide é 12 cm, calcule a área lateral da superfície dessa pirâmide. 260 cm²

37. (FUCMT) Determine o volume de uma pirâmide cuja planificação é: $V = \frac{16}{3}$ u.v.



38. (UFPA) Uma pirâmide triangular regular tem 9 cm³ de volume e $4\sqrt{3}$ cm de altura. Qual a medida de aresta da base? alternativa **b**

a) $\sqrt{2}$ cm

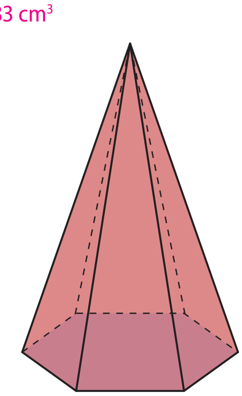
b) 3 cm

c) $2\sqrt{2}$ cm

d) $\sqrt{3}$ cm

e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm

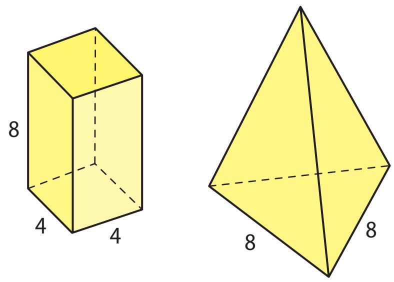
39. (UFPE) Uma pirâmide hexagonal regular tem a medida da área da base igual à metade da área lateral. Se a altura da pirâmide mede 6 cm, assinale o inteiro mais próximo do volume da pirâmide, em cm³. Dado: use a aproximação: $\sqrt{3} \simeq 1{,}73$. $\simeq 83$ cm³



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

40. a) volume do bloco retangular: 128 u.v.; área da base da pirâmide: $16\sqrt{3}$ u.a.

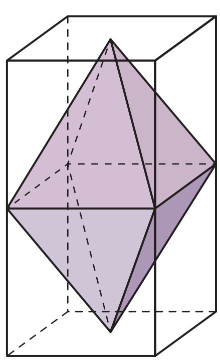
40. (UFPR) As figuras a seguir apresentam um bloco retangular de base quadrada, uma pirâmide cuja base é um triângulo equilátero, e algumas de suas medidas.



a) Calcule o volume do bloco retangular e a área da base da pirâmide.

b) Qual deve ser a altura da pirâmide para que seu volume seja igual ao do bloco retangular? $8\sqrt{3}$ u.c.

41. (UFMA) A figura a seguir representa um paralelepípedo retângulo, no qual está inscrito um octaedro cujas 8 faces são triângulos equiláteros com 1 cm de lado. (Obs.: octaedro é o sólido resultante da reunião de duas pirâmides quadrangulares de bases congruentes.)



Nessas condições, é correto afirmar que o volume do paralelepípedo, em centimetros cúbicos, é: alternativa **c**

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm

c) $\sqrt{2}$

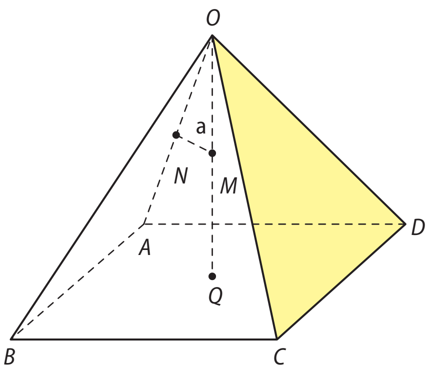
d) $\sqrt{3}$

e) $2\sqrt{2}$

42. (Unicamp-SP) Uma pirâmide regular, de base quadrada, tem altura igual a 20 cm. Sobre a base dessa pirâmide constrói-se um cubo de modo que a face oposta à base do cubo corte a pirâmide em um quadrado de lado igual a 5 cm. Faça uma figura representativa dessa situação e calcule o volume do cubo.

Ver as **Orientações para o professor**.

43. (Vunesp-SP) A ilustração mostra uma pirâmide regular de base quadrada cuja altura tem a mesma medida que as arestas da base. Pelo ponto médio M da altura $\overline{OQ}$ traça-se o segmento $\overline{MN}$ perpendicular à aresta $\overline{OA}$. Se 'a' expressa a medida de $\overline{MN}$, determine o volume da pirâmide em função de 'a'. $V = 8a^3\sqrt{3}$



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

44. Um artista projetou uma pirâmide regular de base quadrada para ser exposta na entrada de uma universidade. A pirâmide tem 4 metros de altura e o quadrado da base da pirâmide tem lado de 6 metros. As faces laterais da pirâmide devem ser pintadas, mas há uma restrição: a pirâmide não deve ser monocromática, ou seja, é necessário usar mais de uma cor na pintura. Acompanhe o rendimento de cada uma das cores de tinta disponíveis. Resposta pessoal.

Cor	Rendimento (m²/L)
Amarelo	28
Azul	24
Laranja	25
Rosa	27
Roxo	22
Verde	24
Vermelho	22

Elabore um problema envolvendo: custo, quantidade de cores e quantidade de demãos. Em seguida, troque-o com um colega para que um resolva o problema do outro.

Arte e Geometria

No período que antecede a década de 1950, a arte moderna no Brasil foi marcada por obras com referências nacionalistas, com temáticas indígenas, regionais e elementos típicos brasileiros. Em 1951, na 1ª Bienal de São Paulo, a participação do artista sueco Max Bill (1908-1994) foi um dos marcos que rompeu com essa visão modernista, dando espaço à arte concreta, ou concretismo, no contexto brasileiro.

A ideia central desse movimento artístico era a de que a arte fosse universal, compreendida e sentida sem depender de um contexto histórico-cultural. Assim, a base das criações são figuras geométricas, pois se trata de signos universais, e as obras são mais objetivas e racionais e se resumem a si próprias.

Dois grupos, Ruptura (em São Paulo) e Frente (no Rio de Janeiro), foram os principais precursores do concretismo no Brasil e deram origem a outros grupos. Contudo, os artistas do Grupo Frente, a fim de superar o objetivismo e a racionalidade da arte concreta, deram início ao neoconcretismo, com obras que permitiam dialogar mais com o espectador, possibilitando, inclusive, sua participação e interação. O texto a seguir nos conta um pouco sobre esse momento histórico.

O neoconcretismo e a ruptura com a arte tradicional

[...]

O ano de 1951 é um dos grandes marcos na história da arte brasileira e também um dos responsáveis por consolidar São Paulo como capital moderna do país e centro artístico mundial. Inspirada pelos moldes europeus da Bienal de Veneza, nasceu a 1ª Bienal de São Paulo. Entre Pablos Picassos, Anitas Malfattis, Renés Magrittes, estava ele: Max Bill [...]. Também estava o jovem Ivan Serpa, que iniciava sua "busca construtiva pela abstração geométrica e pela organização matemática de suas telas" [...]

É a partir de Max Bill, fundador da Escola Superior da Forma de Ulm, que o que entendemos como arte concreta surge: uma arte que é ligada a questões matemáticas, que foge da representação da natureza e que é uma "concreção de uma ideia". Uma arte que pode ser observada, controlada e verificada; uma busca pela excelência da forma para definir o que é belo. E isso inspira artistas paulistas a criar o **Grupo Ruptura**, cujas obras dispensam significados líricos ou simbólicos, ou seja, o quadro não tem significado além dele próprio e seus elementos plásticos (planos e cores). O grupo rompe com o naturalismo da arte do século 20.

ISABELLA MATHEUS/ACERVO DA PINACOTECA DO ESTADO DE SÃO PAULO

CASTRO, Willys de. **Objeto ativo**. 1962. Óleo sobre tela colada sobre madeira, 25,2 cm × 25,5 cm × 25 cm. Acervo da Pinacoteca de São Paulo.

Mas esse excesso de racionalidade gera uma inquietação em um outro grupo de artistas, estes do Rio de Janeiro: o **Grupo Frente**.

"*Esse negócio de Neoconcreto surgiu por causa de Max Bill, que fez uma conferência e os paulistas aceitaram sem discutir o problema concreto. No Rio de Janeiro nós protestamos, pois acreditamos que arte é fundamentalmente emoção.* [...]"

Depoimento de Amilcar de Castro

2. Porque acreditavam que a emoção também era fundamental na Arte. Nesse grupo, predominava uma busca intuitiva, superando a ideia puramente objetiva e racional, porém sem romper com o rigor construtivo.

[...]

Segundo Ferreira Gullar, poeta e um dos grandes nomes do movimento neoconcreto, a principal diferença entre os grupos é que no grupo carioca predominava uma busca intuitiva, "sem romper com o rigor construtivo" da arte concreta. [...]

A partir daí, as investigações dos neoconcretos se desprenderam cada vez mais dos suportes tradicionais e suas obras começaram a explorar o espaço expositivo de novas maneiras, por vezes saindo do museu e/ou convidando o espectador a participar ativamente do trabalho, não mais como um mero observador e sim como **co-autor/ativador** da obra de arte.

[...]

SALVÁ, Camila; DIEDRICH, Andressa. **O neoconcretismo e a ruptura com a arte tradicional**. Porto Alegre: Instituto Ling, 14 dez. 2020. Disponível em: https://institutoling.org.br/explore/o-neoconcretismo-e-a-ruptura-com-a-arte-tradicional. Acesso em: 1 set. 2024.

1. Espera-se que os estudantes digam que foi um movimento de arte que rompeu com o modernismo, dando espaço para obras com significado universal, sem que necessitassem de um contexto histórico-cultural. As obras apresentam figuras geométricas e são mais objetivas e racionais, resumindo-se a si próprias.

Agora, faça o que se pede nas atividades a seguir.

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. Defina, com suas palavras, o que foi o concretismo.

2. Por que os artistas do Grupo Frente sentiram a necessidade de criar o neoconcretismo?

3. Observe a seguir uma escultura de Amilcar de Castro e responda aos itens.

a) É possível perceber que a escultura é formada por dois poliedros "encaixados". Esses poliedros são prismas ou são pirâmides? Os poliedros são prismas.

b) Suponha que seja necessário transportar essa peça para uma exposição em uma escola da cidade. Para isso, a transportadora separou uma caixa no formato de um cubo. Com um colega, estimem as dimensões mínimas que essa caixa deve ter para o transporte da peça. O cubo deve ter, no mínimo, 210 cm de aresta.

JOSÉ FRANCISCO ALVES/IMAGEM LICENCIADA PELO INSTITUTO AMILCAR DE CASTRO

CASTRO, Amilcar de. [**Sem título**]. 2001. Mármore, 210 cm × 210 cm × 70 cm. Acervo da Prefeitura Municipal de Brusque (SC). Fotografia de 2005.

4. Junte-se a três colegas, e pesquisem sobre a vida e a obra de um artista do movimento concretista ou neoconcretista. Preparem uma exposição de fotografias do artista e de suas obras e, no dia combinado com o professor, apresentem as informações para os espectadores.

Resposta pessoal. Alguns artistas que podem ser pesquisados pelos estudantes, entre outros, são: Abraham Palatnik, Amilcar de Castro, Franz Weissmann, Hélio Oiticica, Max Bill, Ivan Serpa, Lygia Clark, Lygia Pape, Sérvulo Esmeraldo e Willys de Castro.

Para acessar

- LYGIA Clark: projeto para um planeta. São Paulo: Pinacoteca de São Paulo, c2024. Localizável em: Conteúdos digitais: Tour virtual. Disponível em: https://pinacoteca.org.br/conteudos-digitais/tour-virtual/lygia-clark-projeto-para-um-planeta/. Acesso em: 19 set. 2024.

Por meio do *link*, é possível fazer uma visita virtual à exposição Projeto para um planeta, de Lygia Clark. A artista do neoconcretismo criou peças feitas de metal e articuladas, o que possibilita movimento às esculturas.

Se julgar conveniente, pode-se propor aos estudantes que pesquisem se há alguma exposição como essa na região em que moram e que, se possível, visitem um desses museus e compartilhem a experiência com a turma.

Orientar os estudantes a navegar pelo *site* do **GeoGebra**, pois nele há uma comunidade de discussão e muitas informações disponíveis, inclusive alguns tutoriais e materiais produzidos por professores.

Conhecendo o GeoGebra

O **GeoGebra** é um *software* de Matemática dinâmica que pode ser utilizado em todos os níveis de ensino. Trata-se de uma multiplataforma, pois tem portabilidade em todos os sistemas operacionais e pode ser instalada em computadores, *tablets* e *smartphones*.

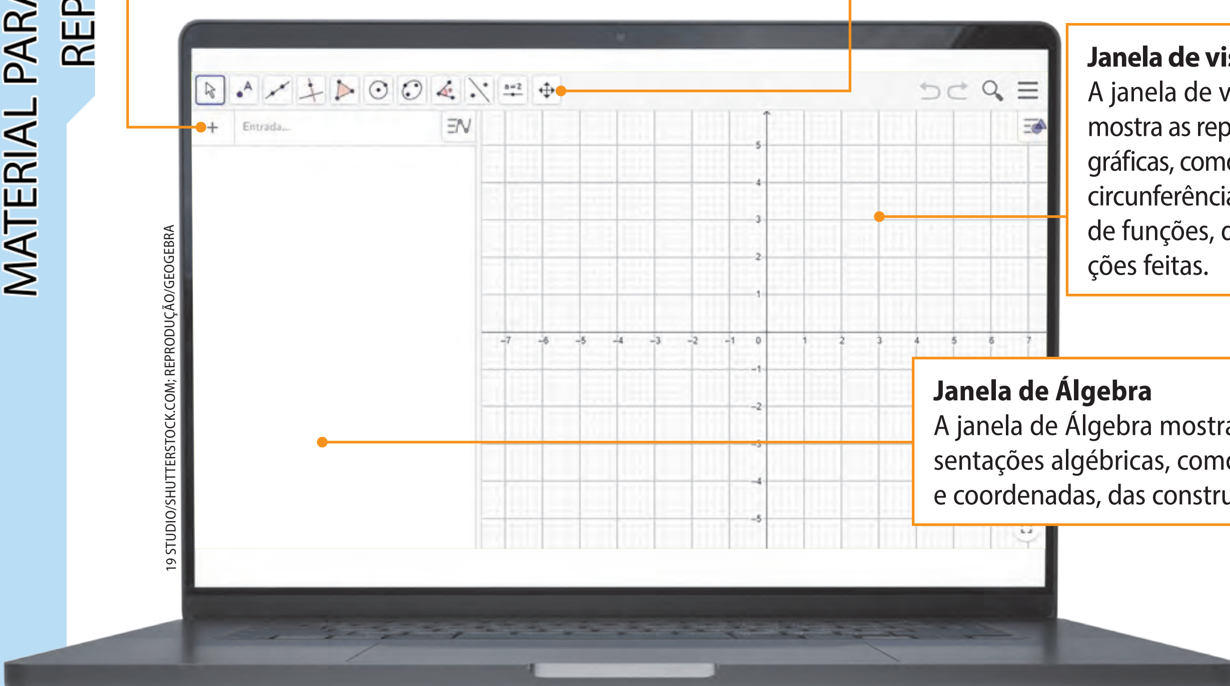
Sua instalação deve ser feita por meio do *site* oficial www.geogebra.org/download (acesso em: 1 set. 2024), baixando-se o *software* GeoGebra Clássico 6 e seguindo-se as orientações de instalação.

O GeoGebra também pode ser usado em sua versão *on-line*, sem a necessidade de instalação, pelo *site* https://www.geogebra.org/classic (acesso em: 1 set. 2024).

Ao abrir o *software* instalado ou a versão *on-line*, aparece uma tela inicial composta de várias janelas, com ferramentas e exibições específicas de acordo com a utilização. A seguir, apresentamos a tela inicial com algumas de suas funções.

Campo de entrada
No campo de entrada, é possível inserir coordenadas, equações, comandos ou funções. Ao pressionar a tecla ***Enter***, a representação algébrica do objeto é apresentada na janela de Álgebra, enquanto a representação gráfica é mostrada na janela de visualização.

Barra de ferramentas
A barra de ferramentas é composta de 11 caixas contendo ferramentas diversas, relacionadas dentro de seu subgrupo. Para acessá-las, basta clicar em cada caixa de ferramenta.



19 STUDIO/SHUTTERSTOCK.COM; REPRODUÇÃO/GEOGEBRA

Janela de visualização
A janela de visualização mostra as representações gráficas, como polígonos, circunferências e gráficos de funções, das construções feitas.

Janela de Álgebra
A janela de Álgebra mostra as representações algébricas, como equações e coordenadas, das construções feitas.

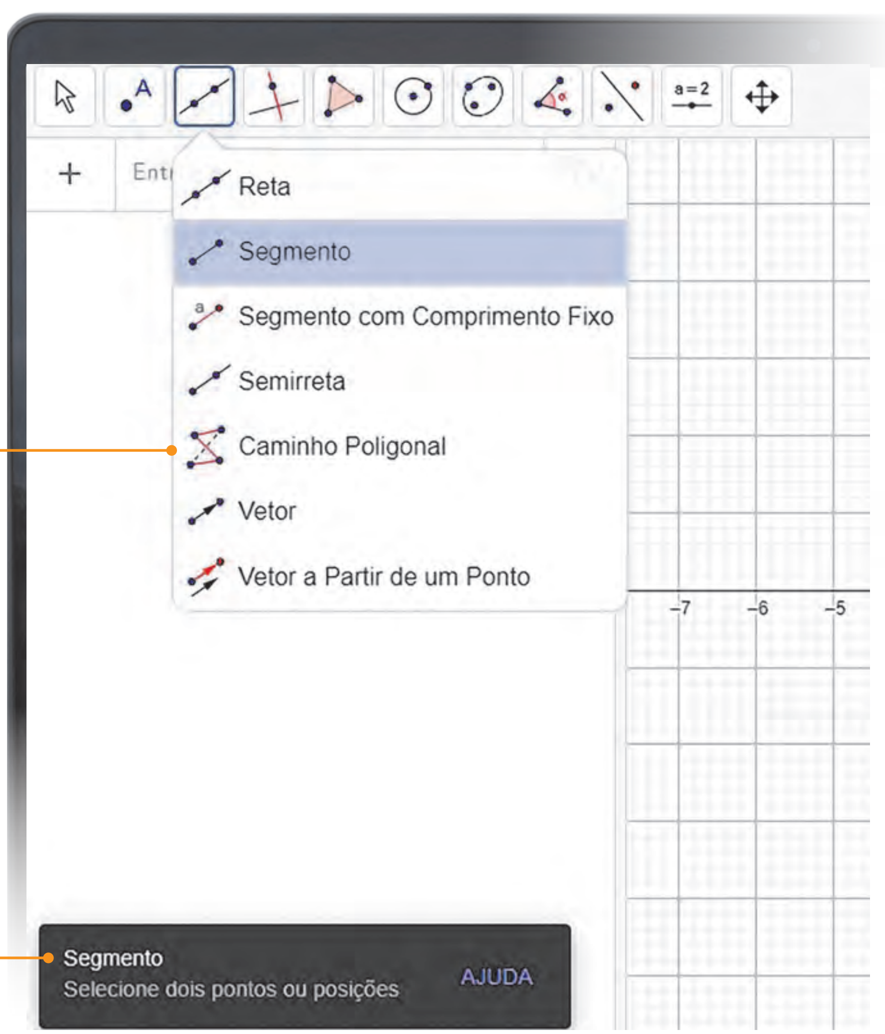
Além da janela de Álgebra e da janela de visualização, que são mostradas na tela inicial padrão, o GeoGebra tem outras janelas que, dependendo da construção que se deseja realizar, podem ser acionadas no *menu* **Exibir**. Quando necessário, essas outras janelas serão exibidas durante a realização das construções.

Todas as janelas do GeoGebra estão relacionadas dinamicamente, ou seja, ao se realizar uma alteração em algum objeto em uma delas, todas as representações desse mesmo objeto nas demais janelas serão alteradas automaticamente.

O GeoGebra utiliza linguagem e notação próprias, que podem diferir um pouco das utilizadas nesta Coleção. Por exemplo, para a separação da parte decimal de um número, o *software* usa o ponto no lugar da vírgula; para indicar as coordenadas de um ponto A qualquer, a notação é $A = (0,0)$, em vez de $A(0, 0)$. Ao longo da Coleção, conforme necessário, apresentaremos outras particularidades do GeoGebra.

Na barra de ferramentas, ao clicar na terceira caixa de ferramentas, estas opções ficam disponíveis.

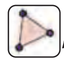
Ao sobrepor o cursor do *mouse* sobre uma ferramenta ou selecioná-la, surge um boxe com orientações a respeito de como usá-la.



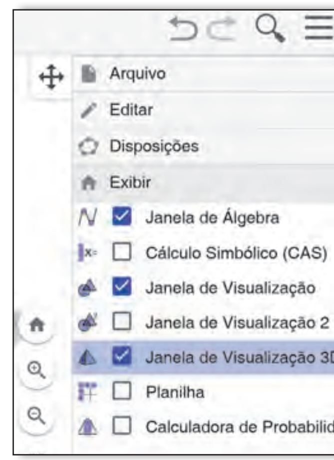
REPRODUÇÃO/GEOGEBRA

Construção de modelos de sólidos geométricos

Vamos utilizar o GeoGebra para construir um modelo de sólido geométrico e, em seguida, observar sua planificação. Para isso, acompanhe os passos a seguir.

I. Clique sobre o botão , selecione a ferramenta **Polígono regular**, , marque os pontos *A*(0,0) e *B*(0,2) no plano cartesiano, digite "3" na caixa de diálogo que será aberta para informar o número de lados e pressione **OK**. Na janela de visualização, será criado um triângulo equilátero de lado de medida 2 unidades.

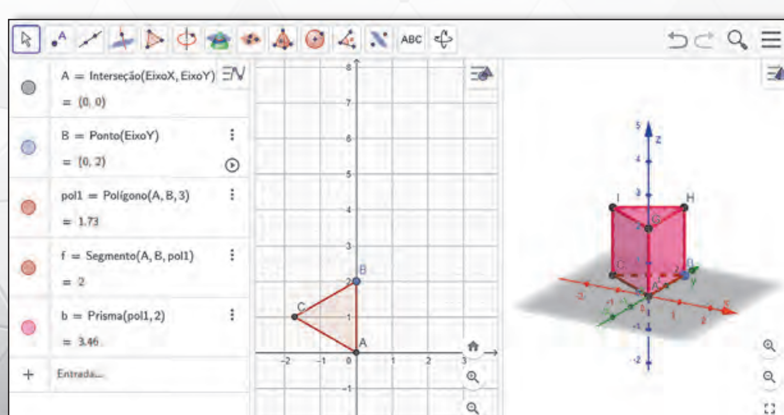
II. No *menu* , marque a opção janela de visualização 3D. Ao lado da janela de visualização, aparecerá uma outra janela, mostrando um sistema cartesiano tridimensional que está interligado com o sistema cartesiano da janela de visualização. O plano cinza na janela de visualização 3D representa o plano da janela de visualização em que construímos o triângulo equilátero.



IMAGENS: REPRODUÇÃO/GEOGEBRA

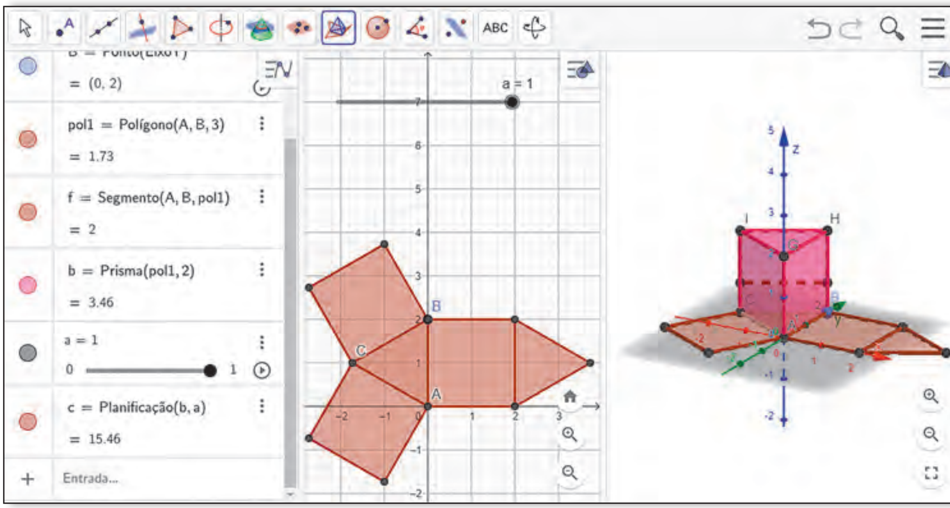
III. Ao clicar na janela de visualização 3D, uma nova barra de ferramentas substituirá a anterior, com instrumentos para a construção de elementos no campo tridimensional, como planos e sólidos geométricos. Observe a imagem a seguir. Ver as **Orientações para o professor**.

IV. Clique sobre o ícone , escolha a ferramenta **Extrusão para prisma**,  e, em seguida, clique no triângulo na janela de visualização 3D. Na sequência, digite "2" na caixa de diálogo aberta para informar a altura do prisma e pressione **OK**. Desse modo, será construído um prisma regular de base triangular com altura medindo 2 unidades. A tela do *software* ficará semelhante à imagem a seguir.

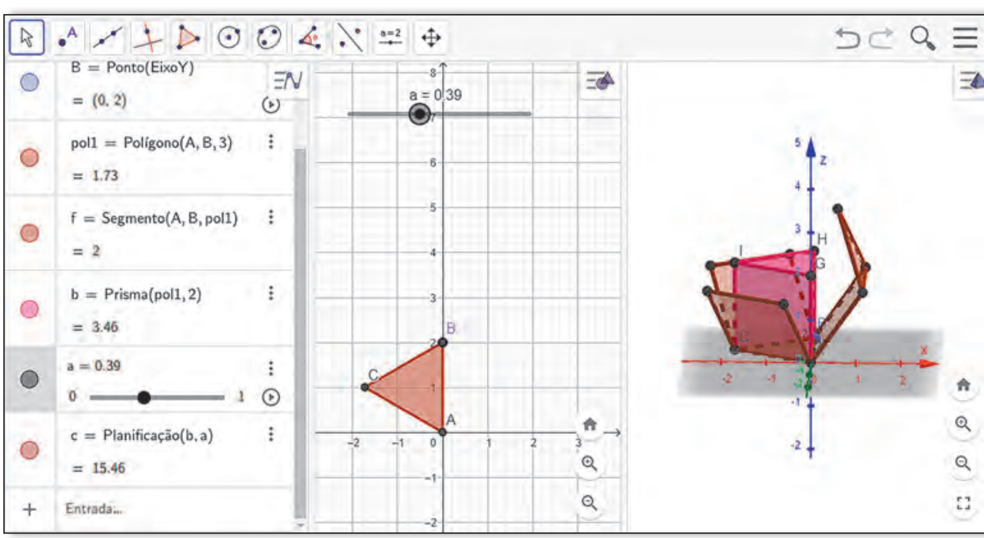


DMIT/SHUTTERSTOCK.COM

V. Para planificar o prisma, no mesmo ícone do item anterior, escolha a ferramenta **Planificação** e, na janela de visualização 3D, clique no prisma construído. Na janela de visualização e na janela de visualização 3D, a planificação do prisma aparecerá, ficando semelhante à imagem a seguir.



VI. Você perceberá que um **Controle deslizante** foi criado. Ao alterar o valor desse **Controle deslizante**, é possível visualizar o processo de planificação do prisma na janela de visualização 3D, como apresentado na imagem a seguir.



IMAGENS: REPRODUÇÃO/GEOGEBRA

1. a) A construção deve ser de um prisma regular com base pentagonal de lado medindo 3 unidades e altura 5 unidades e deve ser feita sua planificação.

Agora, faça o que se pede na atividade a seguir.

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. Construa os seguintes sólidos geométricos no GeoGebra e represente suas planificações, conforme as orientações apresentadas na seção.

a) Prisma regular de base pentagonal com lado medindo 3 unidades e altura 5 unidades.

b) Pirâmide regular de base quadrada com lado medindo 2 unidades e altura 4 unidades. Nesse caso, a ferramenta utilizada no passo **IV** das orientações deve ser **Fazer extrusão para pirâmide**, .

A construção deve ser de uma pirâmide regular de base quadrada com lado medindo 2 unidades e altura 4 unidades e deve ser feita sua planificação.

Além do *software* apresentado, há outros que possibilitam visualizar a planificação de sólidos geométricos. Um desses *softwares* é o **Poly**, que pode ser baixado em http://www.peda.com/download (acesso em: 19 set. 2024). Se achar conveniente, apresentá-lo aos estudantes.

1. (Enem/MEC) Dentre as diversas planificações possíveis para o cubo, uma delas é a que se encontra apresentada na Figura 1.

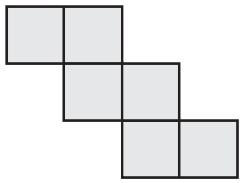


Figura 1

Em um cubo, foram pintados, em três de suas faces, quadrados de cor cinza escura, que ocupam um quarto dessas faces, tendo esses três quadrados um vértice em comum, conforme ilustrado na Figura 2.

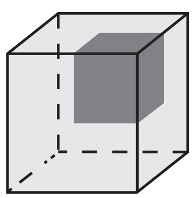
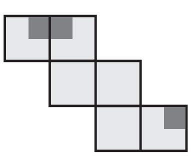
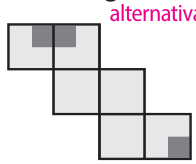
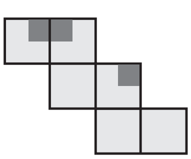


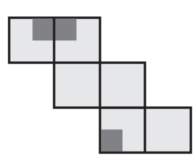
Figura 2

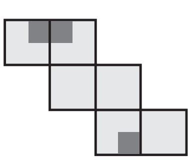
A planificação do cubo da Figura 2, conforme o tipo de planificação apresentada na Figura 1, é alternativa **d**

a)


d)


b)


e)


c)


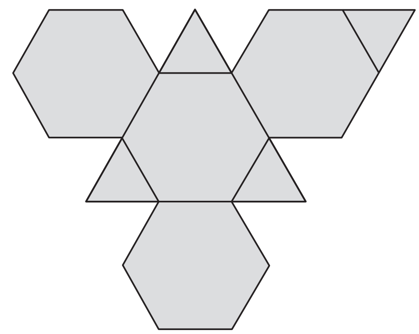
2. (UFCG-PB) Um professor de Matemática, em uma aula de Geometria, pediu que cada aluno construísse um poliedro convexo regular com 20 faces triangulares. Podemos afirmar que o número de vértices do poliedro construído por cada aluno é igual a: alternativa **b**

a) 28 **c)** 19 **e)** 41
b) 12 **d)** 27

3. (EsPCEx-SP) Um poliedro convexo, com 13 vértices, tem uma face hexagonal e 18 faces formadas por polígonos do tipo *P*. Com base nessas informações, pode-se concluir que o polígono *P* é um: alternativa **e**

a) dodecágono. **d)** quadrilátero.
b) octógono. **e)** triângulo.
c) pentágono.

4. (UFJF-MG) A figura abaixo corresponde à planificação de um determinado poliedro: alternativa **a**



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

O número de vértices desse poliedro é

a) 12 **d)** 30
b) 18 **e)** 36
c) 21

5. (UFPI) Um poliedro convexo, constituído de faces triangulares e quadrangulares, possui 20 arestas, e a soma dos ângulos de suas faces é igual a 2 880°. É correto afirmar que esse poliedro possui: alternativa **a**

a) 8 faces triangulares.
b) 12 vértices.
c) 10 faces.
d) 8 faces quadrangulares.

6. (Fuvest-SP) Um *deltaedro* é um poliedro cujas faces são todas triângulos equiláteros. Se um deltaedro convexo possui 8 vértices, então o número de faces desse deltaedro é:
(Note e adote: Em poliedros convexos, vale a relação de Euler $F - A + V = 2$, em que F é o número de faces, A é o número de arestas e V é o número de vértices do poliedro.) alternativa **e**

a) 4 **c)** 8 **e)** 12
b) 6 **d)** 10

7. (Enem/MEC) Um casal planeja construir em sua chácara uma piscina com o formato de um paralelepípedo reto-retângulo com capacidade para 90 000 L de água. O casal contratou uma empresa de construções que apresentou cinco projetos com diferentes combinações nas dimensões internas de profundidade, largura e comprimento. A piscina a ser construída terá revestimento interno em suas paredes e fundo com uma mesma cerâmica, e o casal irá escolher o projeto que exija a menor área de revestimento.

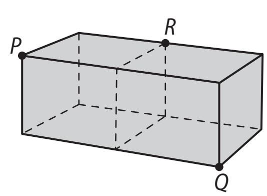
As dimensões internas de profundidade, largura e comprimento, respectivamente, para cada um dos projetos, são:

- projeto I: 1,8 m, 2,0 m e 25,0 m;
- projeto II: 2,0 m, 5,0 m e 9,0 m;
- projeto III: 1,0 m, 6,0 m e 15,0 m;
- projeto IV: 1,5 m, 15,0 m e 4,0 m;
- projeto V: 2,5 m, 3,0 m e 12,0 m.

O projeto que o casal deverá escolher será o alternativa **b**

a) I. **c)** III. **e)** V.
b) II. **d)** IV.

8. (Famerp-SP) Dois cubos idênticos, de aresta igual a 1 dm, foram unidos com sobreposição perfeita de duas das suas faces. *P* é vértice de um dos cubos, *Q* é vértice do outro cubo e *R* é vértice compartilhado por ambos os cubos, conforme indica a figura.



A área do triângulo de vértices *P*, *Q* e *R* é igual a

a) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ dm² alternativa **a** **d)** $\frac{\sqrt{6}}{6}$ dm²
b) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ dm² **e)** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ dm²
c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ dm²

9. (Enem/MEC) O projeto de um contêiner, em forma de paralelepípedo reto retangular, previa a pintura dos dois lados (interno e externo) de cada uma das quatro paredes com tinta acrílica e a pintura do piso interno com tinta epóxi. O construtor havia pedido, a cinco fornecedores diferentes, orçamentos das tintas necessárias, mas, antes de iniciar a obra, resolveu mudar o projeto original, alterando o comprimento e a largura para o dobro do originalmente previsto, mantendo inalterada a altura. Ao pedir novos orçamentos aos fornecedores, para as novas dimensões, cada um deu uma resposta diferente sobre as novas quantidades de tinta necessárias.

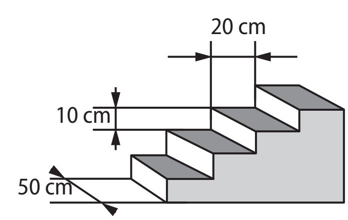
Em relação ao previsto para o projeto original, as novas quantidades de tinta necessárias informadas pelos fornecedores foram as seguintes:

- Fornecedor I: “O dobro, tanto para as paredes quanto para o piso.”
- Fornecedor II: “O dobro para as paredes e quatro vezes para o piso.”
- Fornecedor III: “Quatro vezes, tanto para as paredes quanto para o piso.”
- Fornecedor IV: “Quatro vezes para as paredes e o dobro para o piso.”
- Fornecedor V: “Oito vezes para as paredes e quatro vezes para o piso.”

Analisando as informações dos fornecedores, o construtor providenciará a quantidade adequada de material. Considere a porta de acesso do contêiner como parte de uma das paredes. Qual dos fornecedores prestou as informações adequadas, devendo ser o escolhido pelo construtor para a aquisição do material? alternativa **b**

a) I. **b)** II. **c)** III. **d)** IV. **e)** V.

10. (Fuvest-SP) A figura mostra uma escada maciça de quatro degraus, todos eles com formato de um paralelepípedo reto-retângulo.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

A base de cada degrau é um retângulo de dimensões 20 cm por 50 cm, e a diferença de altura entre o piso e o primeiro degrau e entre os degraus consecutivos é de 10 cm. Se essa escada for prolongada para ter 20 degraus, mantendo o mesmo padrão, seu volume será igual a alternativa **a**

a) 2,1 m³ **c)** 3,0 m³ **e)** 6,0 m³
b) 2,3 m³ **d)** 4,2 m³

11. (Unicamp-SP) Um paralelepípedo retângulo tem faces de áreas 2 cm², 3 cm² e 4 cm². O volume desse paralelepípedo é igual a alternativa **b**

a) $2\sqrt{3}$ cm³ **c)** 24 cm³
b) $2\sqrt{6}$ cm³ **d)** 12 cm³

12. (Unicamp-SP) Se um tetraedro e um cubo têm áreas de superfície iguais, a razão entre o comprimento das arestas do tetraedro e o comprimento das arestas do cubo é igual a

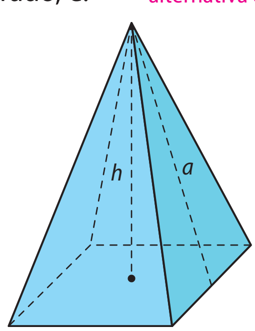
a) $\sqrt{2}\sqrt{3}$ **b)** $\sqrt[4]{2}\sqrt{3}$ **c)** $\sqrt{2}\sqrt[4]{3}$ **d)** $\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{3}$

alternativa **c**

13. (UEG-GO) Em um curso de dobraduras, a instrutora orientou que fosse construída uma pirâmide de base quadrada, de lado igual a 3 cm e altura igual a 10 cm. O volume dessa pirâmide é igual a alternativa **b**

a) 25 cm³ **c)** 13 cm³ **e)** 12 cm³
b) 30 cm³ **d)** 9 cm³

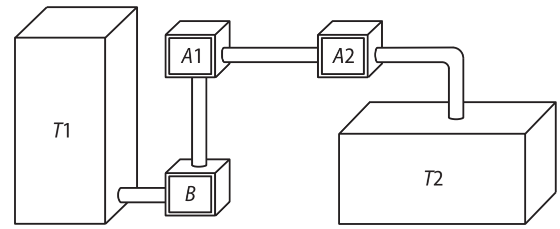
14. (UFRJ) A grande pirâmide de Quéops, antiga construção localizada no Egito, é uma pirâmide regular de base quadrada, com 137 m de altura. Cada face dessa pirâmide é um triângulo isósceles cuja altura relativa à base mede 179 m. A área da base dessa pirâmide, em metro quadrado, é: alternativa **d**



EDITORIA DE ARTE

a) 13 272 **c)** 39 816 **e)** 79 432
b) 26 544 **d)** 53 088

15. (Enem/MEC) Um processo de aeração, que consiste na introdução de ar num líquido, acontece do seguinte modo: uma bomba *B* retira o líquido de um tanque *T*1 e o faz passar pelo aerador *A*1, que aumenta o volume do líquido em 15%, e em seguida pelo aerador *A*2, ganhando novo aumento de volume de 10%. Ao final, ele fica armazenado num tanque *T*2, de acordo com a figura.



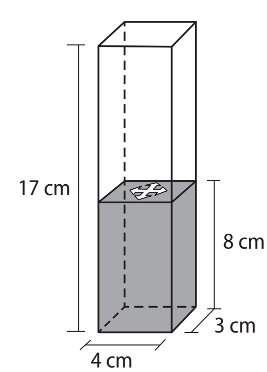
Os tanques *T*1 e *T*2 são prismas retos de bases retangulares, sendo que a base de *T*1 tem comprimento *c* e largura *L*, e a base de *T*2 tem comprimento $\frac{c}{2}$ e largura 2*L*.
Para finalizar o processo de aeração sem derramamento do líquido em *T*2, o responsável deve saber a relação entre a altura da coluna de líquido que já saiu de *T*1, denotada por *x*, e a altura da coluna de líquido que chegou a *T*2, denotada por *y*.

Disponível em: www.dec.ufcg.edu.br. Acesso em: 21 abr. 2015.

A equação que relaciona as medidas das alturas *y* e *x* é dada por alternativa **a**

a) $y = 1{,}265x$
b) $y = 1{,}250x$
c) $y = 1{,}150x$
d) $y = 1{,}125x$
e) $y = x$

16. (Enem/MEC) Num recipiente com a forma de paralelepípedo reto-retângulo, colocou-se água até a altura de 8 cm e um objeto, que ficou flutuando na superfície da água.
Para retirar o objeto de dentro do recipiente, a altura da coluna de água deve ser de, pelo menos, 15 cm. Para a coluna de água chegar até essa altura, é necessário colocar dentro do recipiente bolinhas de volume igual a 6 cm³ cada, que ficarão totalmente submersas.

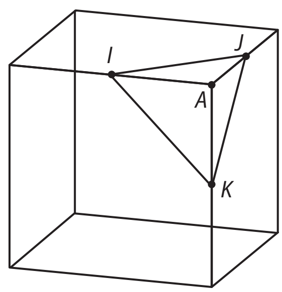


ILUSTRAÇÕES: SERGIO LIMA

O número mínimo de bolinhas necessárias para que se possa retirar o objeto que flutua na água, seguindo as instruções dadas, é de alternativa **a**

a) 14. **d)** 30.
b) 16. **e)** 34.
c) 18.

17. (UFRGS-RS) De cada vértice de um cubo de aresta medindo a, corta-se uma pirâmide. A figura abaixo mostra os vértices de uma das pirâmides, em que I, J e K são pontos médios de arestas e A é vértice do cubo.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Depois de retiradas todas as pirâmides, o volume do sólido que resta é alternativa **e**

a) $\frac{a^3}{2}$.

b) $\frac{a^3}{3}$.

c) $\frac{a^3}{6}$.

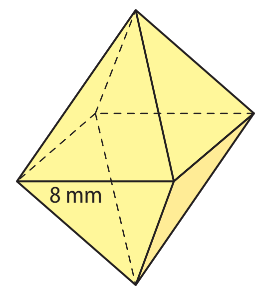
d) $\frac{2a^3}{3}$.

e) $\frac{5a^3}{6}$.

18. (UECE) Ao adicionarmos um metro a cada uma das arestas de um cubo cuja medida da aresta é α metros, temos um novo cubo. Se a diferença entre o volume deste novo cubo e o volume do cubo inicial é 271 m^3, então, a medida, em metros, da aresta α do cubo inicial é igual a alternativa **c**

a) 10. **b)** 7. **c)** 9. **d)** 8.

19. Uma pedra preciosa tem a forma de um octaedro regular de aresta 8 mm, conforme indica a figura. Calcule o volume dessa pedra. $\frac{512\sqrt{2}}{3}$ mm^3



PARA REFLETIR

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Na abertura deste Capítulo, conhecemos a ciência que estuda os cristais, a Cristalografia. Aprendemos que os minerais são classificados conforme seu sistema cristalino e têm configurações geométricas bem claras, que determinam diversas propriedades físicas e químicas do cristal.

Ainda neste Capítulo, aprendemos o que são poliedros, estudamos a relação de Euler e compreendemos os critérios para que um poliedro seja de Platão.

Em seguida, foi dada maior ênfase aos prismas e às pirâmides e à determinação das áreas e dos volumes desses sólidos geométricos.

Conhecemos um pouco sobre o neoconcretismo e a relação desse movimento artístico com a Geometria.

Vamos refletir sobre as aprendizagens do Capítulo **2**: Respostas pessoais.

- Você conhecia a relação de Euler, a igualdade que relaciona a quantidade de vértices, arestas e faces de um poliedro?
- Você já sabia que existem apenas cinco classes para os poliedros de Platão?
- Como você diferencia um prisma de uma pirâmide?
- O estudo das áreas e dos volumes dos paralelepípedos é bastante explorado pela indústria de embalagens. Explique por quê.
- O teorema de Pitágoras é muito utilizado no estudo da Geometria Espacial. Cite um exemplo, envolvendo pirâmides, no qual seja necessário utilizar esse teorema.

CAPÍTULO

3 CORPOS REDONDOS

Os silos são estruturas fundamentais na armazenagem de grãos e produtos agrícolas, em razão de sua eficiência e praticidade. Sua forma é escolhida por diversos motivos técnicos e práticos: ela oferece uma distribuição uniforme da pressão, prevenindo a compactação e a deterioração dos grãos; torna os silos mais resistentes a forças externas, como ventos e tempestades, proporcionando estabilidade; e garante eficiência espacial e simplificação da manutenção.

Em termos de eficiência espacial, o formato cilíndrico dos silos maximiza a capacidade de armazenamento quando comparado a silos de outros formatos com mesma área de superfície. Além disso, sua estrutura simplifica a manutenção, por facilitar a limpeza e por reduzir os custos operacionais, especialmente durante o escoamento de grãos, uma vez que é comum que os silos não possuam canos para captação ou retirada dos produtos armazenados e que o escoamento ocorra devido à ação da gravidade.

Muitos silos não são unicamente cilíndricos, e seu formato se apresenta como uma junção de formas arredondadas; esse é o caso dos silos da imagem, que lembram cones acoplados a cilindros. Esses são dois dos corpos redondos que estudaremos neste Capítulo.

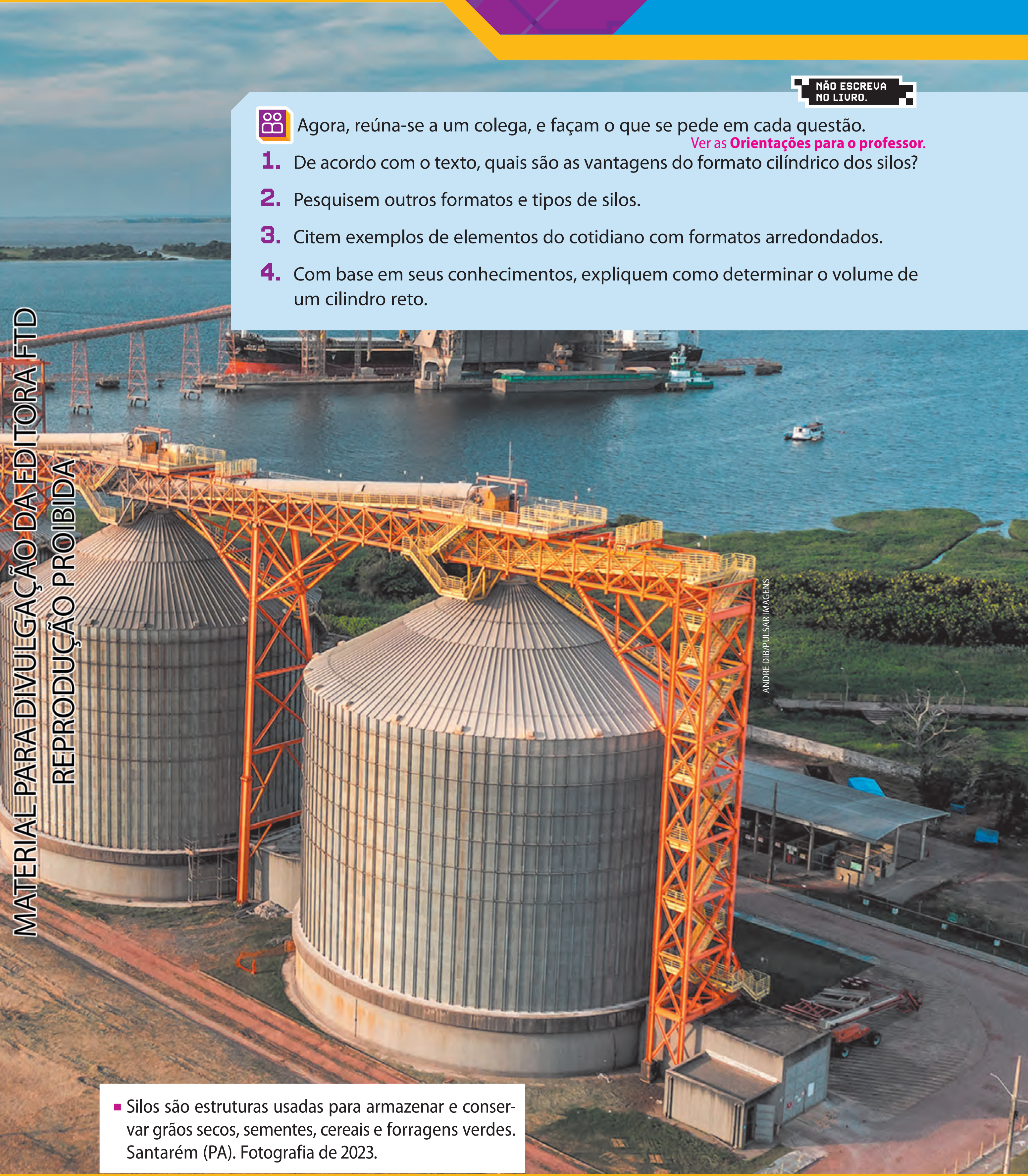
Fonte dos dados: SONEGO, Giseli V. **As contribuições da etnomodelagem matemática no estudo da geometria espacial**. 2009. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática) – Centro Universitário Franciscano de Santa Maria, Santa Maria, 2009. Disponível em: http://www.tede.universidadefranciscana.edu.br:8080/handle/UFN-BDTD/439. Acesso em: 3 nov. 2024.

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Agora, reúna-se a um colega, e façam o que se pede em cada questão.

Ver as **Orientações para o professor**.

1. De acordo com o texto, quais são as vantagens do formato cilíndrico dos silos?
2. Pesquisem outros formatos e tipos de silos.
3. Citem exemplos de elementos do cotidiano com formatos arredondados.
4. Com base em seus conhecimentos, expliquem como determinar o volume de um cilindro reto.



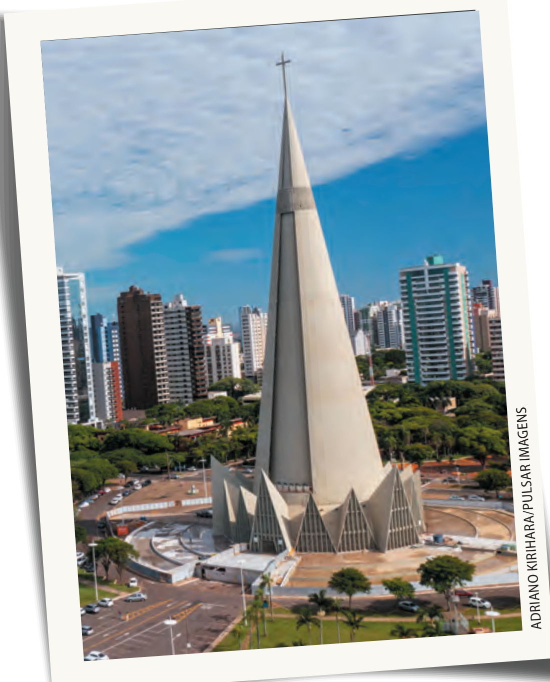
ANDRE DIB/PULSAR IMAGENS

- Silos são estruturas usadas para armazenar e conservar grãos secos, sementes, cereais e forragens verdes. Santarém (PA). Fotografia de 2023.

Introdução

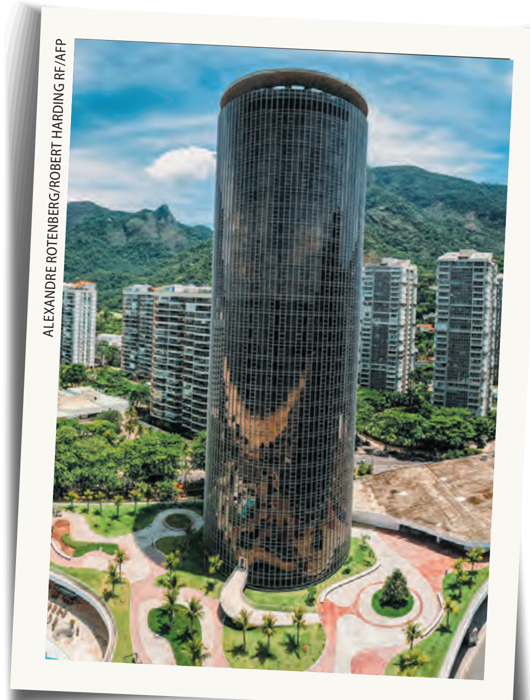
No Capítulo anterior, estudamos os sólidos geométricos chamados de poliedros. Neste Capítulo, iremos estudar alguns dos sólidos geométricos que têm pelo menos uma parte de sua superfície curva e são denominados **corpos redondos**: cilindro, cone e esfera.

Diversos objetos que utilizamos no dia a dia apresentam formas arredondadas, como copos, panelas, entre outros. Na arquitetura, também observamos formas arredondadas, presentes em diversas construções. Na indústria, os tanques de gás natural têm o formato esférico, modelo mais recomendado para esse tipo de produto.



ADRIANO KIRIHARA/PULSAR IMAGENS

A Catedral Basílica Menor Nossa Senhora da Glória, também conhecida como Catedral de Maringá, localizada em Maringá (PR), lembra o formato de um cone. Fotografia de 2022.



ALEXANDRE ROTENBERG/ROBERT HARDING RF/AFP

Hotel projetado pelo arquiteto brasileiro Oscar Niemeyer cujo formato lembra um cilindro, localizado no Rio de Janeiro (RJ). Fotografia de 2023.

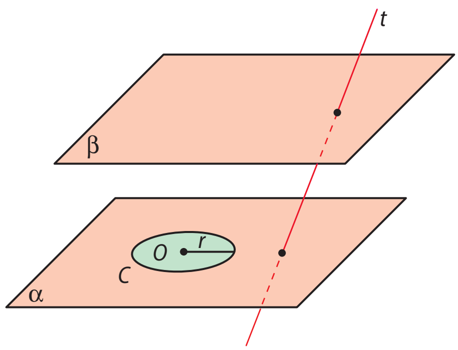
R.AUGUSTUS/SHUTTERSTOCK.COM

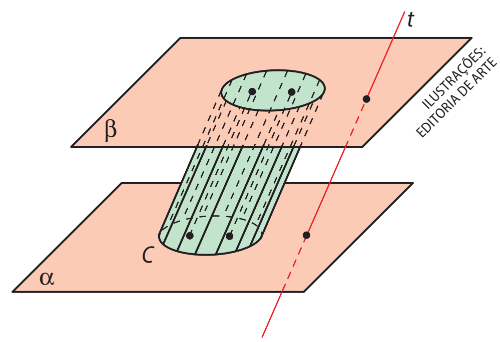
Tanques de petróleo e gás em Cubatão (SP). Fotografia de 2022. (As imagens da página estão fora de proporção.)

Cilindro

Vamos considerar dois planos paralelos α e β, um círculo *C* de centro *O* e raio *r* contido em α e uma reta *t* secante aos planos α e β.

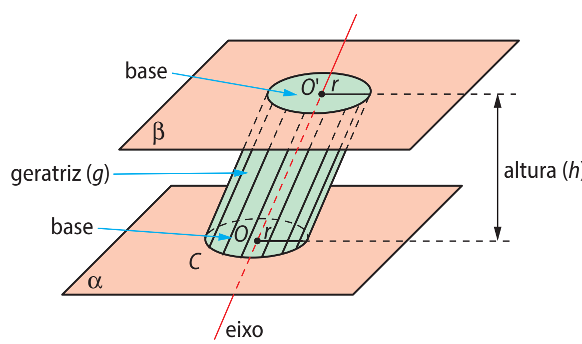
A figura geométrica formada pela reunião de todos os segmentos de reta paralelos à reta *t* com uma extremidade em um ponto do círculo *C* e a outra no plano β é denominada **cilindro circular** ou simplesmente **cilindro**.



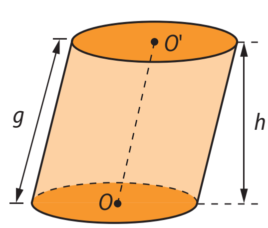


Considerando o cilindro representado na figura a seguir, destacamos os seguintes elementos:

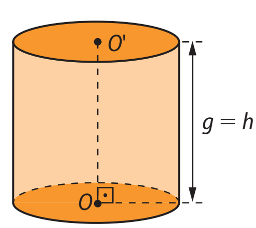
- **Bases**: são os círculos de raio *r* e centros *O* e *O'*, situados nos planos paralelos α e β, respectivamente;
- **Altura**: é a distância entre os planos paralelos α e β, cuja medida indicaremos por *h*;
- **Eixo**: é a reta $\overleftrightarrow{OO'}$, que contém os centros das bases;
- **Geratrizes**: são os segmentos de reta paralelos ao eixo e cujas extremidades são pontos das circunferências das bases; indicaremos suas medidas por *g*.



De acordo com a inclinação do eixo em relação aos planos das bases, os cilindros podem ser **oblíquos** ou **retos**.



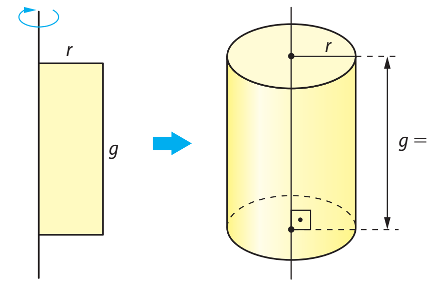
Cilindro oblíquo.



Cilindro reto.

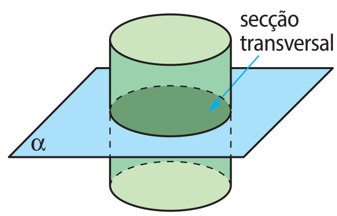
Um cilindro é oblíquo quando o eixo é oblíquo aos planos das bases e é reto quando o eixo é perpendicular aos planos das bases.

Um cilindro reto também pode ser obtido pela rotação completa de um retângulo em torno da reta suporte de um de seus lados. Assim, o cilindro reto também é denominado **cilindro de revolução**.



» Secções de um cilindro

A secção obtida pela intersecção de um cilindro com um plano paralelo às suas bases é denominada **secção transversal do cilindro**.



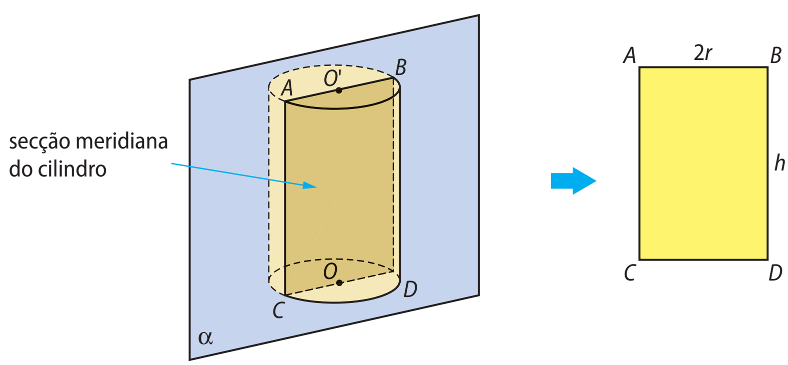
Pense e responda

Observe a imagem e responda: qual figura geométrica plana é determinada pela secção transversal do cilindro?

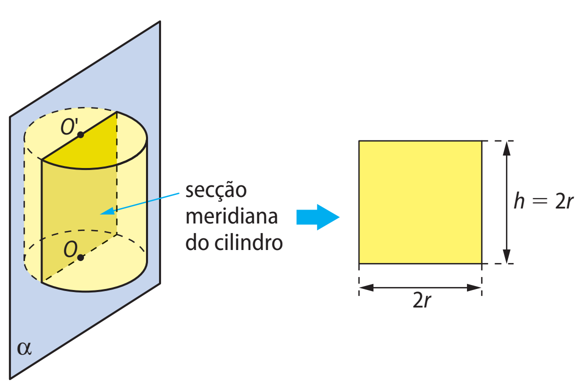
A secção transversal é um círculo congruente às bases do cilindro.

A secção obtida pela intersecção de um cilindro com um plano que contém seu eixo é denominada **secção meridiana do cilindro**.

A secção meridiana de um cilindro reto é um retângulo de dimensões $2r$ (medida do diâmetro das bases do cilindro) e h (altura do cilindro).



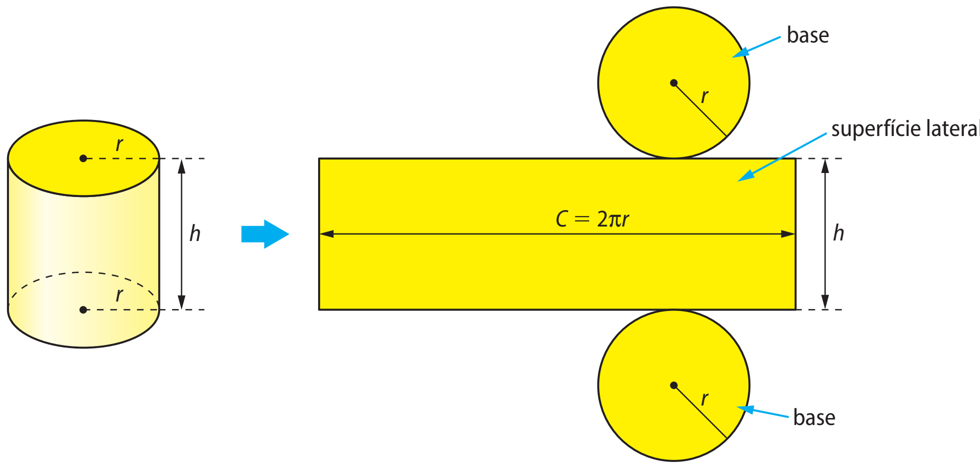
Se a altura do cilindro reto for igual à medida do diâmetro da base, ou seja, $h = 2r$, então a secção meridiana é um quadrado, e o cilindro é chamado de **cilindro equilátero**.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

» Área da superfície de um cilindro reto

Vamos planificar a superfície de um cilindro reto de altura h e raio da base r para determinar a área da sua superfície.



EDITORIA DE ARTE

A superfície total de um cilindro reto é formada pela superfície lateral e pela superfície das duas bases circulares. Como podemos observar pela planificação, a área dessa superfície é a área do retângulo de dimensões $2\pi r$ e h mais as áreas das bases, cada uma delas equivalente à área de um círculo de raio r.

Assim, temos:

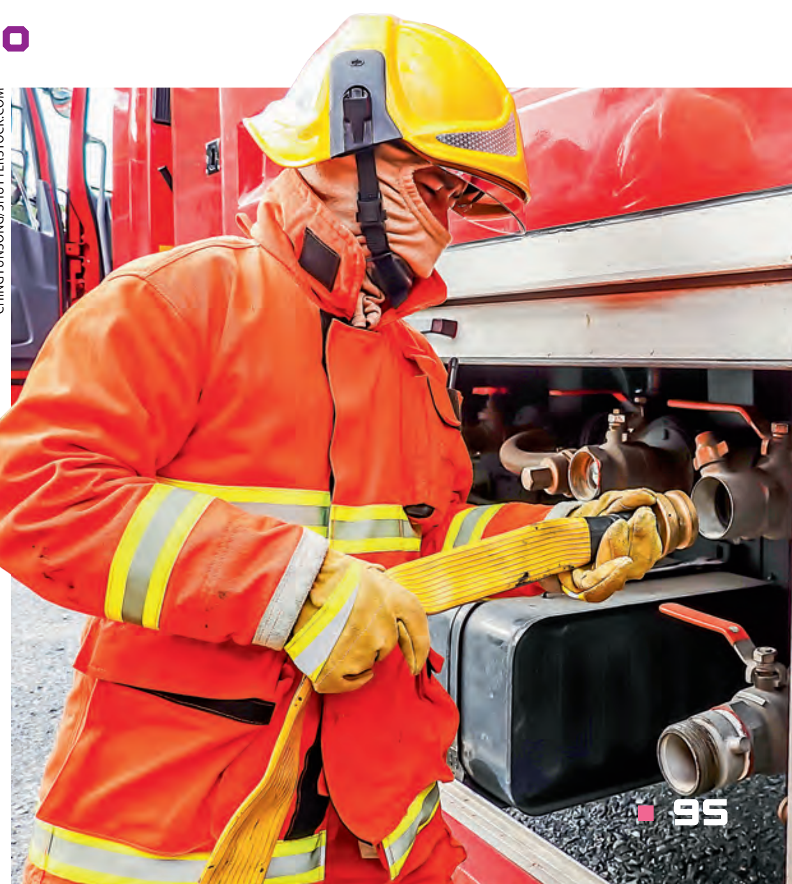
- **área lateral (S_ℓ):** $S_\ell = 2\pi rh$
- **área da base (S_b):** $S_b = \pi r^2$
- **área total (S_t):** $S_t = S_\ell + 2S_b$

» Volume de um cilindro

Considere a situação a seguir.

Em um treinamento do Corpo de Bombeiros, uma mangueira acoplada a um caminhão foi esticada e completamente preenchida com água para testes, formando um cilindro reto. Para o planejamento de futuras ações, deseja-se saber o volume de água necessário para preencher o interior dessa mangueira.

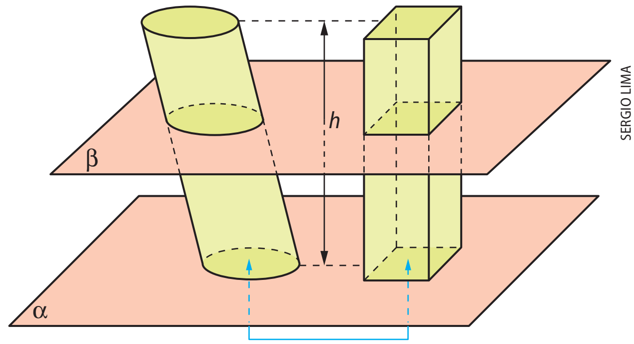
Para responder a questões como essa, é necessário calcular o volume do cilindro, o que estudaremos a seguir.



CHINGYUNSONG/SHUTTERSTOCK.COM

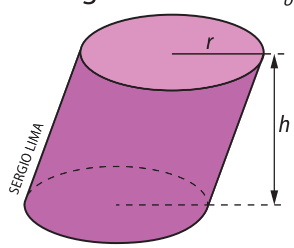
■ Bombeiro conecta ao caminhão uma mangueira que, quando cheia, se torna cilíndrica.

Considere um cilindro e um prisma com mesma altura h e bases de áreas iguais a S_b contidas em um plano α.



As bases têm mesma área S_b.

Qualquer plano β paralelo ao plano α que intersecte os dois sólidos determina neles secções transversais congruentes às respectivas bases. Como as áreas das bases do cilindro e do prisma são iguais e valem S_b, então as secções transversais também têm área igual a S_b.



Portanto, pelo princípio de Cavalieri, concluímos que o volume do cilindro é igual ao volume do prisma.

Como o volume do prisma é dado pelo produto da área da base pela altura, então o volume do cilindro também será calculado da mesma maneira. Assim, podemos escrever:

$$\text{volume do cilindro} = (\text{área da base}) \cdot (\text{altura})$$

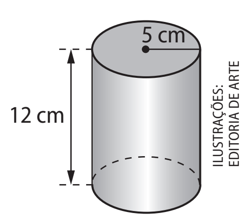
Em um cilindro cuja base tem raio r, a área da base é dada por $S_b = \pi r^2$. Portanto, se a altura do cilindro é h, seu volume é dado por:

$$V = \pi r^2 h$$

Note que esse resultado é válido tanto para cilindros oblíquos quanto retos.

ATIVIDADES RESOLVIDAS

1. Uma lata cilíndrica e reta tem as medidas indicadas na figura.



Nessas condições, e adotando $\pi = 3{,}14$, responda:

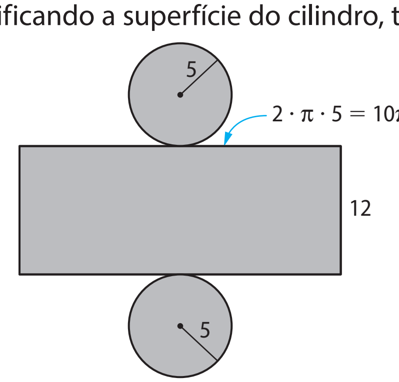
a) Qual é a quantidade mínima de papel, em cm², necessária para cobrir a superfície lateral dessa lata?

b) Qual é a área total da superfície dessa lata?

c) Quantos mililitros (mL) de líquido cabem nessa lata?

Resolução

Planificando a superfície do cilindro, temos:



a) Área lateral (S_ℓ), em cm²:

$S_\ell = 10\pi \cdot 12 = 120\pi \Rightarrow S_\ell = 120\pi$

Considerando $\pi = 3{,}14$, temos:

$S_\ell = 120 \cdot 3{,}14 = 376{,}8$

Assim, a quantidade mínima de papel é 376,8 cm².

b) Área total (S_t), em cm²:

$S_t = S_\ell + 2 \cdot S_b = 376{,}8 + 2 \cdot (\pi \cdot 5^2) =$

$= 376{,}8 + 50\pi = 376{,}8 + 50 \cdot 3{,}14 = 533{,}8$

Portanto, a área total da superfície da lata é 533,8 cm².

c) O volume V de líquido que cabe na lata, em cm³, é dado por:

$V = \pi \cdot 5^2 \cdot 12 \Rightarrow C = 300\pi = 300 \cdot 3{,}14 = 942$

Como 1 dm³ equivale a 1 L, ou 1 cm³ equivale a 1 mL, temos que:

942 cm³ = 942 mL

Portanto, cabem 942 mL de líquido na lata.

2. Um líquido que ocupa uma altura de 10 cm em determinado recipiente cilíndrico será transferido para outro recipiente, também cilíndrico, com diâmetro duas vezes maior do que o primeiro. Qual será a altura ocupada pelo líquido nesse segundo recipiente?

Resolução

Vamos indicar o volume de líquido no primeiro recipiente por V_1 e, no segundo, por V_2.

$V_1 = \pi r^2 h$ e $V_2 = \pi R^2 H$

Do enunciado, temos: $R = 2r$ e $h = 10$ cm

Como o volume de líquido é o mesmo, temos:

$V_1 = V_2 \Rightarrow \pi r^2 h = \pi(2r)^2 H$

$r^2 h = 4r^2 H \Rightarrow H = \dfrac{h}{4} = \dfrac{10}{4} = 2{,}5$

Portanto, a altura ocupada pelo líquido no segundo recipiente será de 2,5 cm.

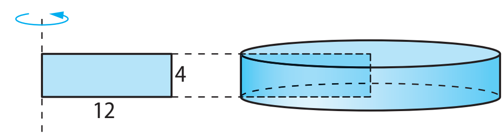
3. Calcule a área total do sólido obtido pela rotação completa de um retângulo de dimensões 4 cm e 12 cm em torno do lado:

a) menor;

b) maior.

Resolução

a) O sólido obtido nesse caso é um cilindro reto de raio da base 12 cm e altura 4 cm.



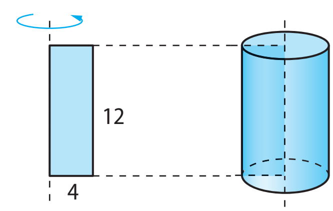
$S_t = S_\ell + 2 \cdot S_b \Rightarrow S_t = 2\pi r \cdot h + 2 \cdot \pi r^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow S_t = 2 \cdot \pi \cdot 12 \cdot 4 + 2 \cdot \pi \cdot 12^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow S_t = 384\pi$

Portanto, $S_t = 384\pi$ cm².

b) O sólido obtido nesse caso é um cilindro reto de raio da base 4 cm e altura 12 cm. Assim:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

$S_t = 2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 12 + 2 \cdot \pi \cdot 4^2 \Rightarrow S_t = 128\pi$

Portanto, $S_t = 128\pi$ cm².

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. Um cilindro reto tem altura igual a 5 cm e raio da base medindo 6 cm. Determine:

a) a área da base; 36π cm²

b) a área lateral; 60π cm²

c) a área total. 132π cm²

2. Determine a área lateral de um cilindro cujo perímetro da base é 62,8 cm e cuja altura é a metade do raio da base. Adote $\pi = 3{,}14$. 314 cm²

3. A área lateral de um cilindro é 20π cm². Se o raio da base mede 5 cm, calcule a altura h desse cilindro. 2 cm

4. Da rotação completa de um retângulo de dimensões 5 cm e 9 cm obtém-se um cilindro reto cuja área da base é 25π cm². Calcule a área total desse cilindro. 140π cm²

5. Quantos centímetros quadrados de uma chapa de metal são necessários para construir uma lata de óleo, com tampa, no formato de um cilindro reto com 8 cm de diâmetro de base e 18 cm de altura? 176π cm²

6. Em um cilindro equilátero, a área da secção meridiana vale 400 cm². Calcule:

a) a altura do cilindro; 20 cm

b) a área total da superfície do cilindro. 600π cm²

7. (Enem/MEC) Um povoado com 100 habitantes está passando por uma situação de seca prolongada e os responsáveis pela administração pública local decidem contratar a construção de um reservatório. Ele deverá ter a forma de um cilindro circular reto, cuja base tenha 5 metros de diâmetro interno, e atender à demanda de água da população por um período de exatamente sete dias consecutivos. No oitavo dia, o reservatório vazio é completamente reabastecido por carros-pipa.

Considere que o consumo médio diário por habitante é de 120 litros de água. Use 3 como aproximação para π.

Nas condições apresentadas, o reservatório deverá ser construído com uma altura interna mínima, em metro, igual a alternativa **d**

a) 1,12. **c)** 4,35. **e)** 5,60.

b) 3,10. **d)** 4,48.

8. (UEMG) Uma empresa de produtos de limpeza deseja fabricar uma embalagem com tampa para seu produto. Foram apresentados dois tipos de embalagens com volumes iguais. A primeira é um cilindro de raio da base igual a 2 cm e altura igual a 10 cm; e a segunda, um paralelepípedo de dimensões iguais a 4 cm, 5 cm e 6 cm. O metro quadrado do material utilizado na fabricação das embalagens custa R$ 25,00.

Considerando-se $\pi = 3$, o valor da embalagem que terá o menor custo será: alternativa **a**

a) R$ 0,36 **c)** R$ 0,54

b) R$ 0,27 **d)** R$ 0,41

9. (Enem/MEC) Um artesão possui potes cilíndricos de tinta cujas medidas externas são 4 cm de diâmetro e 6 cm de altura. Ele pretende adquirir caixas organizadoras para armazenar seus potes de tinta, empilhados verticalmente com tampas voltadas para cima, de forma que as caixas possam ser fechadas.

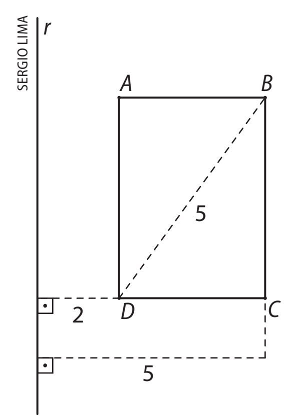
No mercado, existem cinco opções de caixas organizadoras, com tampa, em formato de paralelepípedo reto-retângulo, vendidas pelo mesmo preço, possuindo as seguintes dimensões internas: alternativa **d**

Modelo	Comprimento (cm)	Largura (cm)	Altura (cm)
I	8	8	40
II	8	20	14
III	18	5	35
IV	20	12	12
V	24	8	14

Qual desses modelos o artesão deve adquirir para conseguir armazenar o maior número de potes por caixa?

a) I **b)** II **c)** III **d)** IV **e)** V

10. (UFRGS-RS) Considere o sólido obtido pela revolução do retângulo *ABCD* em torno da reta *r*, conforme indicado na figura a seguir.



O volume do sólido obtido é alternativa **d**

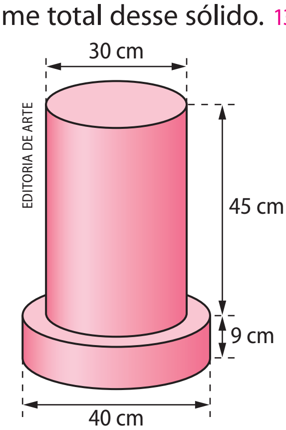
a) 16π. **b)** 84. **c)** 100. **d)** 84π. **e)** 100π.

11. Considere um sólido composto de dois cilindros retos, conforme indica a figura. Calcule:

a) a área total da superfície desse sólido.

b) o volume total desse sólido. $13\,725\pi$ cm³

11. a) $2\,510\pi$ cm²



12. (Enem/MEC) Para resolver o problema de abastecimento de água foi decidida, numa reunião do condomínio, a construção de uma nova cisterna. A cisterna atual tem formato cilíndrico, com 3 m de altura e 2 m de diâmetro, e estimou-se que a nova cisterna deverá comportar 81 m^3 de água, mantendo o formato cilíndrico e a altura da atual. Após a inauguração da nova cisterna a antiga será desativada.
Utilize 3,0 como aproximação para π.
Qual deve ser o aumento, em metros, no raio da cisterna para atingir o volume desejado?

a) 0,5 **c)** 2,0 **e)** 8,0
b) 1,0 **d)** 3,5

alternativa **c**

13. Um cilindro reto tem área lateral de 30π cm^2 e área total de 80π cm^2. Determine seu volume. 75π cm^3

14. (UEG-GO) Em uma festa, um garçom, para servir refrigerante, utilizou uma jarra no formato de um cilindro circular reto. Durante o seu trabalho, percebeu que com a jarra completamente cheia conseguia encher oito copos de 300 mL cada. Considerando-se que a altura da jarra é de 30 cm, então a área interna da base dessa jarra, em cm^2, é: alternativa **d**

a) 10 **b)** 30 **c)** 60 **d)** 80

15. Certo produto de limpeza é vendido em dois recipientes cilíndricos:
(1) lata de raio da base igual a 3,1 cm e altura 11,6 cm; **15. a)** $V_1 \simeq 350$ cm^3; $V_2 \simeq 500$ cm^3
(2) lata de raio da base igual a 3,1 cm e altura 16,6 cm.
Os preços desse produto são R$ 0,70 e R$ 1,10, respectivamente, para as latas (1) e (2).
Adotando $\pi = 3,14$, faça o que se pede.

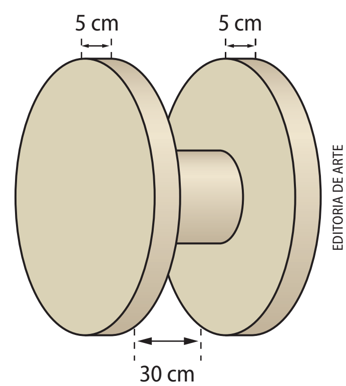
a) Calcule o volume em cada recipiente.

b) Qual das duas embalagens apresenta melhor preço para o consumidor?
A lata (1) apresenta melhor preço para o consumidor.

16. (Ulbra-RS) A Gestão Ambiental visa ao uso de práticas que garantem a conservação e a preservação da biodiversidade, a reciclagem das matérias-primas e a redução do impacto ambiental das atividades humanas sobre os recursos naturais. Consciente da importância de reaproveitar sobras de madeira, uma serraria que trabalha apenas com madeira de reflorestamento resolveu calcular a sobra de madeira na confecção de peças cilíndricas. Para confeccionar uma peça cilíndrica, a serraria faz os cortes adequados em um prisma quadrangular de arestas da base 5 cm e altura 0,8 m e obtém um cilindro de 5 cm de diâmetro e 0,8 m de altura. A sobra de madeira na fabricação de mil destas peças é, em cm^3 (utilize $\pi = 3,14$), a seguinte: alternativa **c**

a) $4,3 \cdot 10^{-5}$ **d)** 1570
b) 430 **e)** 2000
c) $4,3 \cdot 10^5$

17. O sólido de madeira indicado na figura é utilizado para enrolar cabos telefônicos.



Os cilindros das extremidades e o cilindro interno têm bases com diâmetros de 80 cm e 20 cm, respectivamente. Determine o volume de madeira gasto para construir esse sólido. $19\,000\pi$ cm^3

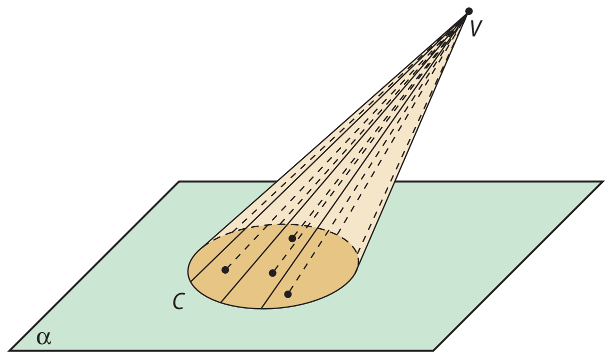
18. É possível construir caixas-d'água cilíndricas usando duas chapas de aço retangulares para revestimento lateral e duas chapas de aço quadradas para as bases. As chapas retangulares são encurvadas e soldadas, e as chapas quadradas são cortadas em círculos inscritos e soldadas. Essas chapas são vendidas por 200 reais o metro quadrado.
Elabore um problema no qual seja necessário determinar o preço aproximado do gasto com chapas de aço para construir uma caixa-d'água de volume acima de 20 mil litros a partir da altura da caixa-d'água. Resposta pessoal.
Utilize a calculadora para auxiliá-lo nos cálculos.

Cone

Alguns objetos do cotidiano, como funis, casquinhas de sorvete e cones de trânsito, podem ser associados a um tipo de corpo redondo denominado **cone**.

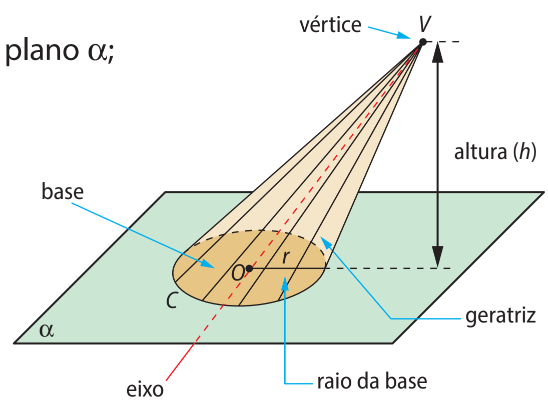
Considere um plano α, um círculo *C* contido em α e um ponto *V* que não pertence a α.

A figura geométrica formada pela reunião de todos os segmentos de reta que têm uma extremidade no ponto *V* e a outra em um ponto do círculo *C* é denominada **cone circular** ou, simplesmente, **cone**.



Considerando o cone representado na figura a seguir, destacamos os seguintes elementos:

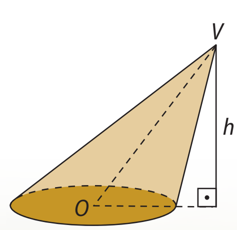
- **Base**: é o círculo *C* de raio *r* e centro *O* situado no plano α;
- **Vértice**: é o ponto *V*;
- **Eixo**: é a reta $\overleftrightarrow{OV}$;
- **Altura**: é a distância do ponto *V* ao plano da base, cuja medida indicaremos por *h*;
- **Geratriz**: é qualquer segmento de reta cujos extremos são o vértice *V* e um ponto qualquer da circunferência da base.



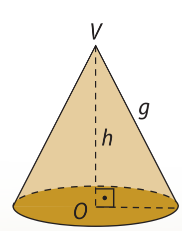
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

De acordo com a inclinação de seu eixo em relação ao plano da base, um cone pode ser oblíquo ou reto. Um cone é **oblíquo** quando seu eixo é oblíquo ao plano da base e é **reto** quando seu eixo é perpendicular ao plano da base.

No caso do cone reto, todas as geratrizes têm a mesma medida, usualmente indicada por *g*.

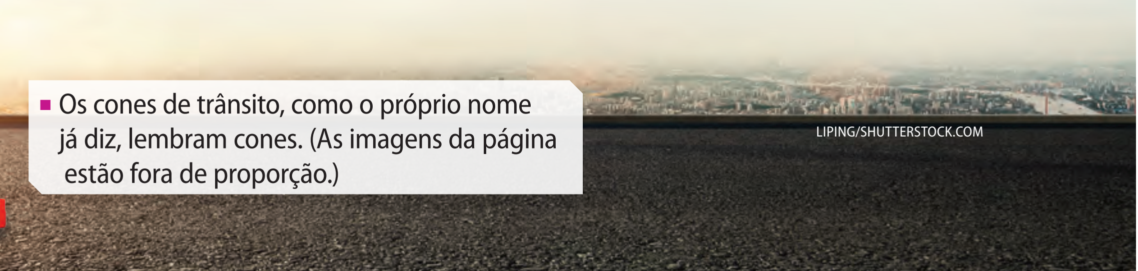


▪ Cone oblíquo.



▪ Cone reto.

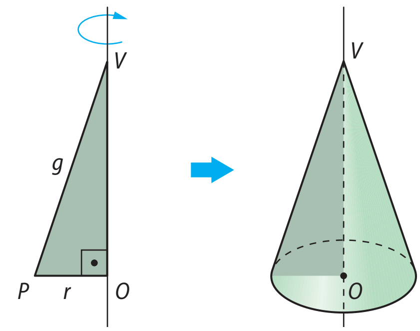
CHANCHAI HOWHARN/SHUTTERSTOCK.COM



LIPING/SHUTTERSTOCK.COM

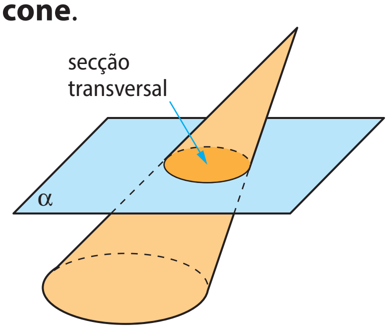
▪ Os cones de trânsito, como o próprio nome já diz, lembram cones. (As imagens da página estão fora de proporção.)

Um cone circular reto também pode ser obtido pela rotação completa de um triângulo retângulo em torno da reta que contém um dos catetos. Assim, o cone reto também é denominado **cone de revolução**.



» Secções de um cone

A secção obtida pela intersecção de um cone com um plano paralelo à sua base é denominada **secção transversal do cone**.



Pense e responda

Qual é a forma geométrica plana determinada por uma secção transversal do cone que não contém seu vértice?

A secção transversal é um círculo.

A secção obtida pela intersecção de um cone com um plano que contém seu eixo é denominada **secção meridiana do cone**.

No cone circular reto, a secção meridiana é um **triângulo isósceles** de base $2r$ e lados congruentes medindo g (figura 1).

Se a secção meridiana for um triângulo equilátero, ou seja, se $g = 2r$, o cone é chamado de **cone equilátero** (figura 2).

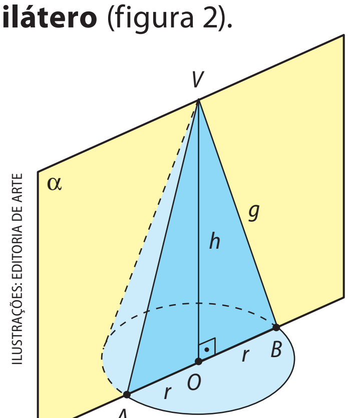


Figura 1.

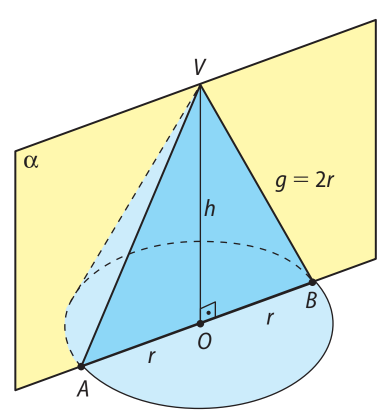


Figura 2.

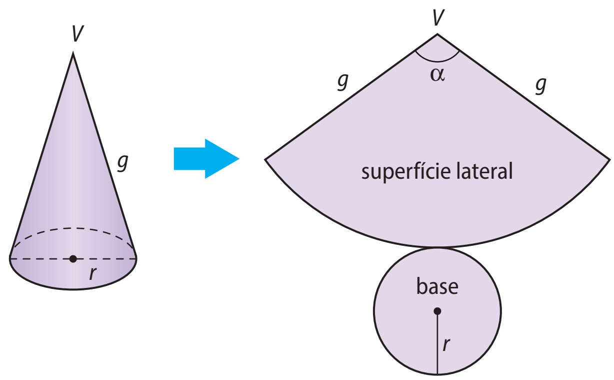
Pense e responda

Observando os cones retos das figuras 1 e 2, utilize o teorema de Pitágoras no triângulo *VOB* para determinar uma relação entre as medidas da geratriz *g*, da altura *h* e do raio *r* da base de um cone circular reto.

$g^2 = h^2 + r^2$

» Área da superfície de um cone reto

Vamos planificar a superfície de um cone reto de raio da base r e geratriz g para determinar sua área.

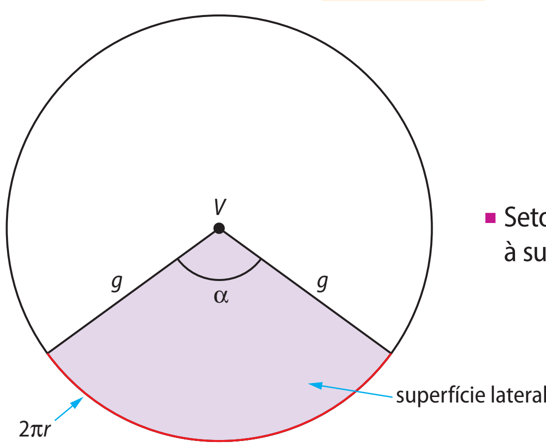


ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

A superfície total do cone é formada pela superfície da base (círculo) mais a superfície lateral (um setor circular). Assim, temos:

- **Área lateral (S_ℓ)**: a área da superfície lateral de um cone corresponde à área de um setor circular de raio g (geratriz do cone) e arco de comprimento $2\pi r$, que é o comprimento da circunferência da base do cone.
- **Área da base (S_b)**: é a área do círculo de raio r.

$$\boxed{S_b = \pi r^2}$$



▪ Setor circular correspondente à superfície lateral do cone.

Como a área do setor circular é proporcional ao comprimento do arco correspondente, é possível determinar a área da superfície lateral (S_ℓ) pela regra de três a seguir:

$$\begin{array}{ccc} \text{Comprimento do arco do setor} & & \text{Área do setor} \\ 2\pi g & \text{———} & \pi g^2 \\ 2\pi r & \text{———} & S_\ell \end{array}$$

$$2\pi r \cdot \pi g^2 = 2\pi g \cdot S_\ell \Rightarrow S_\ell = \frac{\cancel{2\pi} r \cdot \pi g^{\cancel{2}}}{\cancel{2\pi g}} \Rightarrow \boxed{S_\ell = \pi r g}$$

- **Área total (S_t)**: é a soma da área lateral e a da área da base.

$$\boxed{S_t = S_\ell + S_b}$$

» Volume de um cone

Considere a situação a seguir.

Um doce muito famoso e tradicional no Brasil é o canudinho de doce de leite. Ele consiste em uma massa fina frita em formato que lembra um cone que é recheado com doce de leite cremoso. Exatamente por ser muito famoso, o dono de uma confeitaria decidiu produzir e vender esse doce.

Para determinar quanto doce de leite será necessário fazer, é preciso responder a duas perguntas: quantas unidades de canudinhos ele pretende produzir por dia e qual é a quantidade de doce de leite necessária para preencher cada canudo?

ROYAM/SHUTTERSTOCK.COM

■ O doce conhecido como canudinho de doce de leite tem formato de cone.

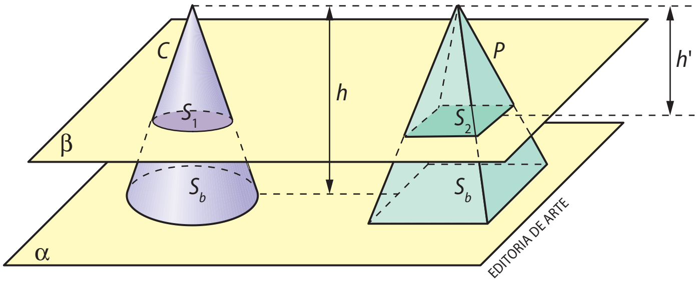
Mas como calcular essa quantidade?

Podemos aplicar o princípio de Cavalieri para determinar o volume de um cone a partir do volume de uma pirâmide.

Considere um cone *C* e uma pirâmide *P* de mesma altura *h* e bases de mesma área S_b, contidas em um plano horizontal α. Qualquer plano β, paralelo ao plano α, distante *h*′ do vértice e secante aos sólidos *C* e *P* determina duas secções transversais de áreas S_1 e S_2, respectivamente.

Sabemos que, para pirâmides, vale a igualdade $\frac{S_2}{S_b} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2$. Pode-se provar que a relação análoga vale também para cones, ou seja, $\frac{S_1}{S_b} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2$.

Logo, $\frac{S_1}{S_b} = \frac{S_2}{S_b}$, portanto $S_1 = S_2$.



Assim, pelo princípio de Cavalieri, podemos concluir que o volume da pirâmide *P* é igual ao volume do cone *C* e podemos escrever:

$$V_{\text{pirâmide}} = V_{\text{cone}} = \frac{\text{área da base} \cdot \text{altura}}{3}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_b \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h$$

Pense e responda

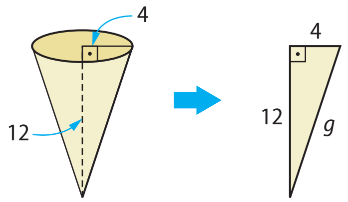
Voltando ao problema do recheio de doce de leite, se o dono da confeitaria fez 800 mL de doce de leite, aproximadamente quantos canudos com 3 cm de diâmetro interno por 8 cm de altura ele poderá preencher? Saiba que 1 cm^3 = 1 mL.

aproximadamente 42 canudos

4. Um fabricante resolveu fazer a embalagem para um de seus produtos no formato de um cone reto, com 8 cm de diâmetro e 12 cm de altura. Qual será a quantidade mínima do material utilizado para cobrir toda a superfície dessa embalagem? Use $\pi = 3{,}14$ e $\sqrt{10} = 3{,}16$.

Resolução

Modelo de embalagem, com medidas em cm:



Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$g^2 = 12^2 + 4^2 = 144 + 16 = 160$

$g = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$

Logo, $g = 4\sqrt{10}$ cm.

Vamos agora determinar as áreas em cm².

Cálculo da área da base (S_b):

$S_b = \pi r^2 = \pi \cdot 4^2 = 16\pi$

Cálculo da área lateral (S_ℓ):

$S_\ell = \pi rg = \pi \cdot 4 \cdot 4\sqrt{10} = 16\pi\sqrt{10}$

Cálculo da área total (S_t):

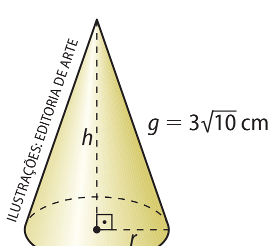
$S_t = S_b + S_\ell = 16\pi + 16\pi\sqrt{10} = 16\pi(1 + \sqrt{10})$

Adotando $\pi = 3{,}14$ e $\sqrt{10} = 3{,}16$, obtemos:

$S_t = 16 \cdot (3{,}14) \cdot (1 + 3{,}16) = 50{,}24 \cdot (4{,}16) \simeq 209$

Portanto, a quantidade mínima de material será 209 cm².

5. Em um cone reto, a área da base é 9π cm² e a geratriz mede $3\sqrt{10}$ cm. Determine o volume do cone.



Resolução

Primeiro, vamos determinar o raio da base do cone:

$S_b = 9\pi \Rightarrow \pi r^2 = 9\pi \Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow r = 3$

Logo, o raio da base do cone é 3 cm.

Agora, vamos calcular a altura do cone utilizando o teorema de Pitágoras:

$g^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow (3\sqrt{10})^2 = 3^2 + h^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow h^2 = 90 - 9 \Rightarrow h^2 = 81 \Rightarrow h = 9$

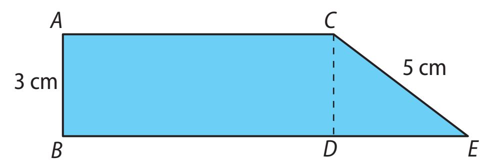
Logo, a altura do cone é 9 cm.

Por fim, calculamos o volume do cone:

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 9 \Rightarrow V = 27\pi$

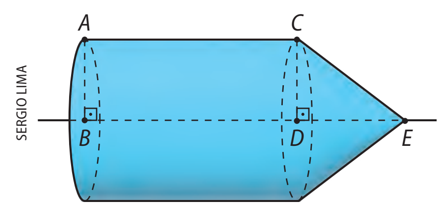
Portanto, o volume do cone é 27π cm³.

6. (UFV-MG) O trapézio retângulo a seguir sofre uma rotação de 360° em torno da base maior. Sabendo-se que $AB = 3$ cm, $CE = 5$ cm e que o volume do sólido obtido é 84π cm³, determine AC.



Resolução

O volume do cilindro gerado pela rotação do retângulo $ABDC$ pode ser determinado pela diferença entre o volume do sólido e o volume do cone gerado pela rotação do triângulo CDE. O triângulo CDE é retângulo em D.



Indicando a medida de $\overline{DE}$ por h, aplicamos o teorema de Pitágoras no $\triangle CDE$ e obtemos:

$5^2 = h^2 + 3^2 \Rightarrow h^2 = 16 \Rightarrow h = 4$

Logo, a altura h do cone é 4 cm.

Calculando o volume do cone, temos:

$V_{cone} = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h \Rightarrow V_{cone} = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 12\pi$

Calculando o volume do cilindro, temos:

$V_{cilindro} = V_{sólido} - V_{cone} = 84\pi - 12\pi = 72\pi$

Sendo a medida $AC = x$, temos:

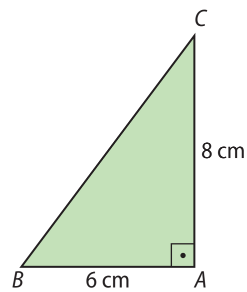
$V_{cilindro} = \pi r^2 \cdot x \Rightarrow 72\pi = \pi \cdot 3^2 \cdot x \Rightarrow x = 8$

Portanto, $AC = 8$ cm.

ATIVIDADES

19. Um funil de papel no formato de um cone reto tem 6 cm de diâmetro da base e 4 cm de altura. Qual é a área lateral desse funil? (Use $\pi = 3{,}14$.) Utilize a calculadora para auxiliá-lo nos cálculos. $47{,}1\ \text{cm}^2$

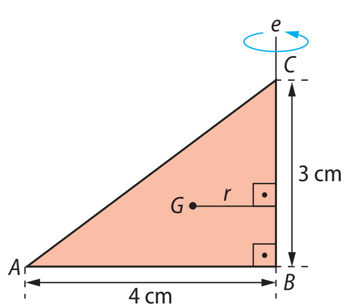
20. Considere o triângulo retângulo *ABC* da figura.



Determine a área total do sólido obtido pela rotação completa do triângulo em torno do lado:

a) $\overline{AC}$; $96\pi\ \text{cm}^2$ **b)** $\overline{AB}$. $144\pi\ \text{cm}^2$

21. (UERJ) Uma linha poligonal fechada de três lados limita um triângulo de perímetro ℓ. Se ela gira em torno de um de seus lados, gera uma superfície de área *S* igual ao produto de ℓ pelo comprimento da circunferência descrita pelo baricentro *G* da poligonal.
A figura a seguir mostra a linha (*ABCA*) que dá uma volta em torno de *BC*.



a) Esboce a figura gerada e indique o cálculo da área de sua superfície que é igual a $36\pi\ \text{cm}^2$. Ver as **Orientações para o professor**.

b) Calcule a distância *r* do baricentro *G* dessa linha ao eixo de rotação. $r = 1{,}5\ \text{cm}$

Saiba que...

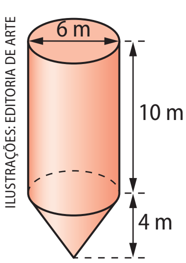
Baricentro é o ponto de encontro das medianas de um triângulo.

22. A geratriz de um cone equilátero mede 20 cm. Calcule a área da base (S_b) desse cone. $100\pi\ \text{cm}^2$

23. Determine a altura de um chapéu de cartolina de formato cônico construído a partir de um setor circular de raio 15 cm e ângulo central de 120°. $10\sqrt{2}\ \text{cm}$

24. A superfície lateral de um cone circular reto é feita com uma peça circular de papel de 20 cm de diâmetro da qual se retira um setor de $\frac{\pi}{5}$ radianos. Calcule a altura do cone que tem essa superfície lateral. $\sqrt{19}\ \text{cm}$

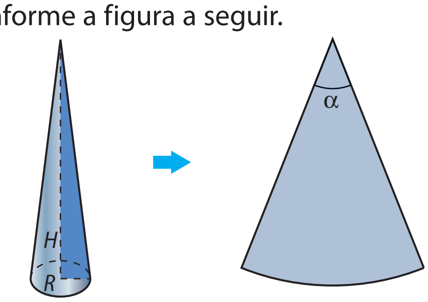
25. Uma cooperativa agrícola vai construir um silo para armazenamento de cereais em grãos. O silo terá o formato indicado na figura. O corpo será cilíndrico e a base terminará em um funil cônico.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Para que a superfície desse silo não enferruje, será necessário pintá-lo externamente. Se, com uma lata de tinta, pode-se pintar $10\ \text{m}^2$, qual é o número mínimo de latas para pintar a superfície total desse silo? Use $\pi = 3{,}14$. Utilize a calculadora para auxiliá-lo nos cálculos. 27 latas

26. É dada a superfície de um cone circular reto (sem fundo) de raio *R* e altura *H*. Cortando-o por uma de suas geratrizes e abrindo tal superfície, obtém-se um setor circular plano conforme a figura a seguir.



Qual é a relação entre *R* e *H* para que o ângulo α seja 45°? $H = 3\sqrt{7}R$

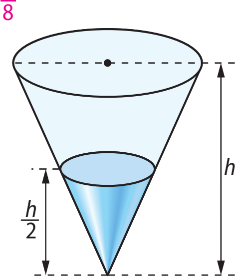
27. (ITA-SP) As medidas, em metros, do raio da base, da altura e da geratriz de um cone circular reto formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de razão 2 metros. Calcule a área total deste cone em m². 96π m²

28. Um cone circular reto tem 3 cm de raio da base e 15π cm² de área lateral. Calcule seu volume. 12π cm³

29. Considere um triângulo retângulo isósceles cuja hipotenusa mede 2 cm. Determine o volume do sólido obtido pela rotação completa desse triângulo em torno da hipotenusa. $\frac{2\pi}{3}$ cm³

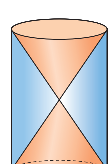
30. O raio da base de um cone de revolução mede 3 cm, e o perímetro de sua secção meridiana mede 16 cm. Determine seu volume. 12π cm³

31. Na figura a seguir, tem-se um recipiente no formato de um cone circular reto, com um líquido que atinge metade de sua altura. Se V é a capacidade do cone, qual é o volume do líquido? $\frac{V}{8}$



EDITORIA DE ARTE

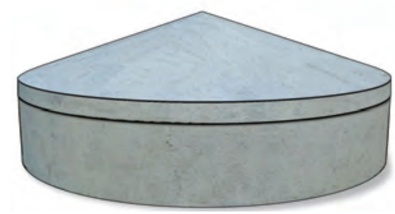
32. Pode-se considerar que uma ampulheta é formada por dois cones retos idênticos, unidos pelo vértice, inscritos em um cilindro reto. Determine a razão entre o volume de um dos cones e o volume do cilindro. $\frac{1}{6}$



SERGIO LIMA

33. A medida dos lados de um triângulo equilátero ABC é 5 dm. O triângulo gira em torno de uma reta r do plano do triângulo, paralela ao lado $\overline{BC}$ e passando pelo vértice A. Calcule o volume do sólido gerado pela rotação desse triângulo. $\frac{125\pi}{2}$ dm³

34. Cisternas são depósitos que captam e armazenam água da chuva. São muito utilizadas em regiões em que há escassez de água e passaram a ser adotadas também em grandes centros urbanos, por causa do racionamento gerado pelos baixos níveis de água das represas. Um modelo de reservatório muito utilizado é formado por um cilindro sobreposto por um cone de mesma base, como é possível ver na figura.



SELMA CAPARROZ

Uma escola pretende construir uma cisterna cujo reservatório terá o mesmo formato do modelo da imagem. Entre as especificações do projeto, a escola decidiu que a cisterna deve ter altura máxima de 4 metros e capacidade para armazenar no mínimo 12 mil litros e no máximo 24 mil litros de água.
Elabore um problema envolvendo a construção de uma cisterna que atenda às necessidades e condições dessa escola. Resposta pessoal.

35. Ver as **Orientações para o professor**.

35. Imagine que, para arrecadar dinheiro para a execução de uma ação social na sua comunidade, fosse proposta a venda de canudinhos de doce de leite com formato cônico. Para isso, seria necessária a compra dos canudinhos (cones vazios) e de doce de leite para o recheio. Sobre essa situação, responda:

a) Para calcular a capacidade de cada canudinho, seria necessário medir quais dimensões dos cones vazios? Como isso poderia ser feito?

b) Se o doce de leite foi adquirido em potes cilíndricos cuja altura é igual à altura dos canudinhos e o raio da base é o quádruplo do raio interno da base dos canudinhos, quantos canudinhos de doce de leite é possível montar com um pote de doce de leite?

c) Se o raio da base interna dos canudinhos for igual a 1 cm e sua altura for igual a 6 cm, qual será a massa, em grama, de doce de leite usada em cada canudinho, sabendo que a densidade do recheio é 1,32 g/mL? Use $\pi = 3{,}14$.

d) Você consegue propor uma ação social que seria benéfica para a sua comunidade? Compartilhe-a com os colegas e o professor.

FÓRUM

Captação de água da chuva

A crise hídrica é uma realidade cada vez mais presente em diversas regiões do mundo, o que exige a implementação de medidas criativas e sustentáveis para garantir o acesso contínuo das populações à água potável. Nesse contexto, a captação de água da chuva surge como uma solução promissora e eficaz.

A água da chuva, muitas vezes subestimada e desperdiçada, pode ser uma fonte valiosa de recursos hídricos. Por meio de sistemas de captação adequados, é possível coletar, armazenar e utilizar essa água para diferentes finalidades, desde a irrigação de jardins até a descarga de vasos sanitários.

Um dos principais benefícios da captação de água da chuva é a redução da pressão sobre os recursos hídricos tradicionais, como rios e aquíferos. Ao aproveitar a água pluvial, diminuímos a dependência de outras fontes hídricas e contribuímos para a conservação dos ecossistemas aquáticos. Além disso, ao incorporar práticas de reaproveitamento da água em nossas rotinas, estamos adotando uma abordagem responsável em relação ao uso dos recursos naturais.

É importante ressaltar que, dependendo do uso que se fará da água captada, são necessários investimento e tratamento adequados. No entanto, para atividades como regar um jardim ou lavar um quintal, por exemplo, pode-se coletar a água de maneira simples, sem a necessidade de equipamentos sofisticados ou grandes investimentos.

- Junte-se a seus colegas e comentem se vocês já observaram a prática da reutilização de água da chuva em lugares que frequentam, como suas casas, a escola ou outros ambientes. Discutam em que atividades rotineiras, além das citadas no texto, a água captada da chuva poderia ser empregada. Ver as **Orientações para o professor**.

GERSON GERLOFF/PULSAR IMAGENS

Protótipo de casa com cisterna simples para captação de água da chuva desenvolvido em parceria com a Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria (RS). Fotografia de 2024.

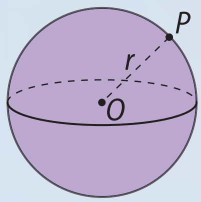
Esfera

Saiba que...

Por definição, **geoide** é o nome dado ao modelo que representa o formato real do planeta Terra.

Muitos objetos e construções do nosso cotidiano têm formatos que lembram esferas ou partes de uma esfera. Uma bola de futebol é um exemplo de objeto com formato muito próximo ao de uma esfera, ainda que não seja rigorosamente uma esfera. O próprio planeta Terra, como sabemos, é muito parecido com uma esfera quando observado à distância, mas, por vários motivos, como o fato de ser achatado nos polos, não possui o formato exato de uma esfera.

Vamos considerar um ponto *O* e um número real *r* positivo, como indicado na figura.



EDITORIA DE ARTE

O conjunto de todos os pontos *P* do espaço cuja distância ao ponto *O* é igual a *r* é denominado **superfície esférica** de centro *O* e raio *r*.

O sólido limitado por uma superfície esférica chama-se **esfera**. Dessa maneira, a esfera de centro *O* e raio *r* é o conjunto dos pontos do espaço cuja distância ao ponto *O* é menor ou igual a *r*.

De modo bastante simples, podemos dizer que a superfície esférica é a "casca", enquanto a esfera é a reunião da "casca" com o "miolo".

As denominações **centro** e **raio** são aplicadas indiferentemente a uma superfície esférica ou à esfera por ela limitada.

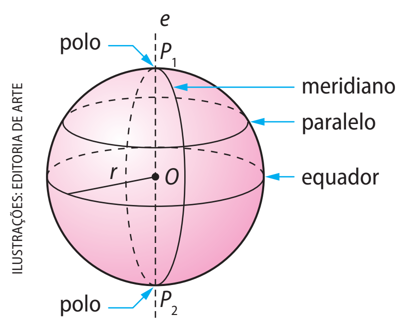

VERED BAREQUET/SHUTTERSTOCK.COM

- A cúpula dourada do Domo da Rocha, parte do Santuário Nobre, onde também está localizada a Mesquita de Al Aqsa, em Jerusalém (Israel), tem um formato que lembra parte de uma esfera. Fotografia de 2024.

Dada uma esfera, definimos **eixo** como qualquer reta que contém o centro da esfera e o indicamos por *e*.

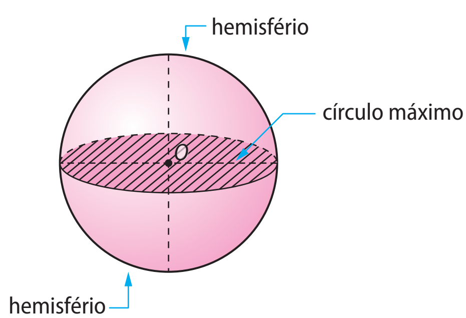
Agora, fixado um eixo *e*, definimos os seguintes elementos:

- **Polos**: são os pontos de intersecção da superfície esférica com o eixo *e*; são indicados por P_1 e P_2;
- **Equador**: é a circunferência obtida como intersecção entre a superfície esférica e um plano perpendicular ao eixo *e* que passa pelo centro da esfera;
- **Paralelos**: são as circunferências obtidas como intersecções entre a superfície esférica e planos perpendiculares ao eixo *e*. São, portanto, coincidentes com o equador ou paralelos a ele;
- **Meridianos**: circunferências obtidas como intersecções da superfície esférica com planos que contêm o eixo *e*.



Os círculos obtidos pela intersecção da esfera com um plano que passa pelo centro *O* são chamados **círculos máximos**.

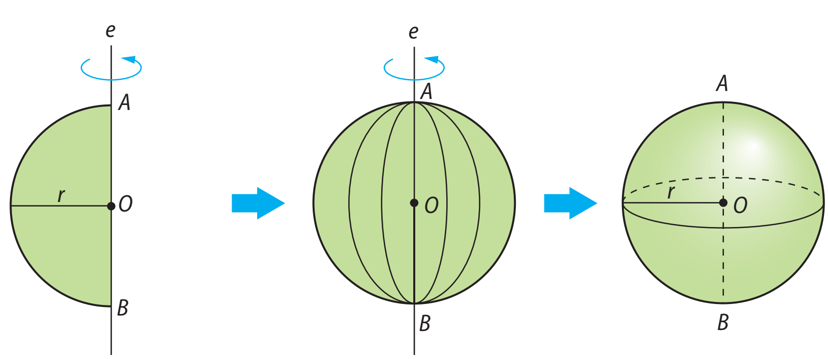
Cada círculo máximo divide a esfera em duas partes iguais chamadas de **hemisférios**.



Saiba que...

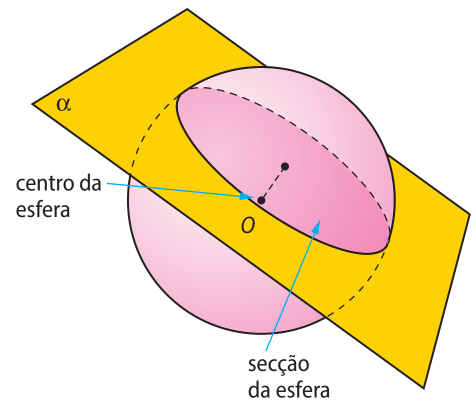
Os mesmos elementos da esfera foram adotados para dividir o planeta Terra. Ele é dividido em dois hemisférios (Norte e Sul), a partir da linha do equador, que corresponde a uma circunferência máxima do planeta, medindo 40 075 km.

A esfera também pode ser obtida pela rotação completa de um semicírculo em torno de um eixo que contém seu diâmetro. Por isso, o eixo *e* também é chamado de **eixo de rotação**.



» Secção de uma esfera

Considere um plano α cuja distância ao centro O de uma esfera seja menor do que o raio r. A intersecção entre esse plano e a esfera é um círculo, como representado na figura a seguir.

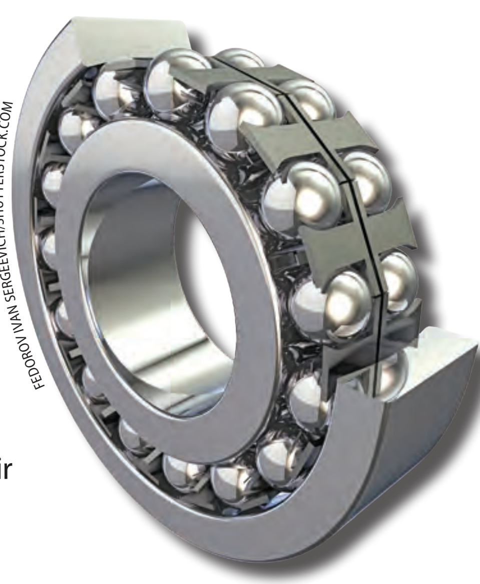


ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Quando o plano passa pelo ponto O (centro da esfera), como já estudamos, o círculo obtido é chamado de círculo máximo.

» Volume de uma esfera

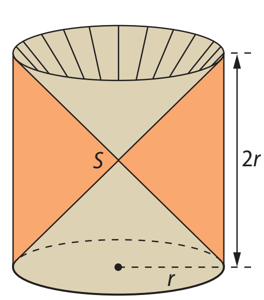
Rolamentos são peças utilizadas em máquinas para reduzir o atrito entre partes móveis. O tipo de rolamento mais utilizado é o de esferas, que apresenta, em seu interior, pequenas esferas de aço, como mostra a imagem. Para saber quanto aço foi utilizado nessas esferas, é necessário determinar o volume dessa forma geométrica. Mas como fazemos isso?



FEDOROV IVAN SERGEEVICH/SHUTTERSTOCK.COM

■ O rolamento de esferas é o tipo mais conhecido e utilizado.

Para calcular o volume de uma esfera de raio r, vamos utilizar o princípio de Cavalieri. Considere um cilindro equilátero de altura $2r$ e raio da base r. Retirando dois cones circulares retos, de altura r e raio da base r, cujas bases coincidem com as bases desse cilindro, obtemos o sólido A (conhecido como anticlepsidra), representado na figura a seguir na cor laranja.

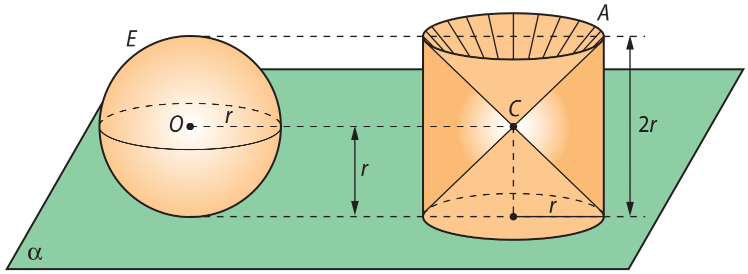


■ Sólido A.

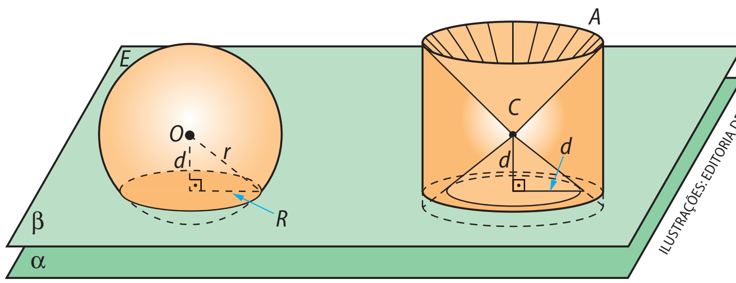
O volume do sólido A é igual à diferença entre o volume do cilindro equilátero e os volumes dos dois cones circulares retos, ou seja:

$$V_A = V_{cilindro} - 2V_{cone} = \pi r^2 \cdot 2r - 2 \cdot \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r = 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Agora, vamos considerar uma esfera E de raio r e o sólido A, apoiados em um mesmo plano α, conforme mostra a figura a seguir.



Considere também um plano β paralelo a α e secante aos sólidos que secciona a esfera E e o sólido A a uma distância d do centro da esfera O, como mostra a figura a seguir.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

O plano β determina um círculo na esfera E, cujo raio indicaremos por R. Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$r^2 = R^2 + d^2 \Rightarrow R^2 = r^2 - d^2$$

Assim, a área S_1 do círculo é dada por:

$$S_1 = \pi R^2 = \pi(r^2 - d^2) \quad \text{I}$$

A secção determinada pelo plano β no sólido A é uma coroa circular de raios r e d, e sua área S_2 é dada por:

$$S_2 = \pi(r^2 - d^2) \quad \text{II}$$

Assim, comparando I e II, verificamos que a área da secção plana da esfera E (círculo) é igual à área da secção plana do sólido A (coroa circular).

Logo, pelo princípio de Cavalieri, a esfera E tem o mesmo volume que o sólido A, portanto o volume V da esfera é dado por:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Para acessar

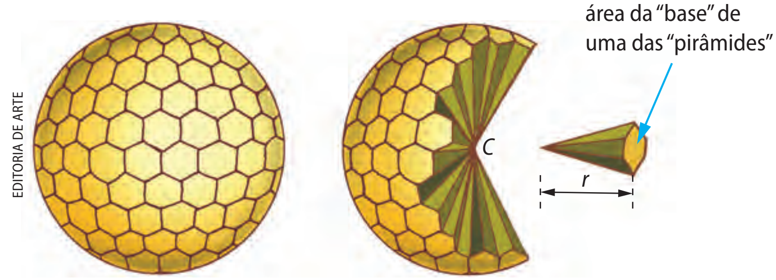
- O QUE é o "problema dos beijos" que atormenta os matemáticos há séculos. **BBC News Brasil**, [*s. l.*], 18 jun. 2023. Disponível em: https://www.bbc.com/portuguese/articles/cxe5j1yg4llo. Acesso em: 10 out. 2024.

  Você sabe qual é a maneira mais eficiente de empilhar objetos esféricos? Leia a matéria e descubra as dificuldades envolvidas nesse problema.

» Área de uma superfície esférica

Agora que já aprendemos como determinar o volume de uma esfera, vamos usar esse resultado para verificar o cálculo da área de uma superfície esférica.

Uma esfera pode ser imaginada como a reunião de vários sólidos parecidos com "pirâmides" de vértices em C (centro da esfera), como representado na figura a seguir.



Esses sólidos não são verdadeiramente pirâmides, pois a "base" de cada sólido é uma superfície arredondada. No entanto, quanto mais sólidos considerarmos, mais a base deixa de ser arredondada e se torna mais plana, aproximando-se, assim, da forma de uma pirâmide.

A altura de cada "pirâmide" é o raio r da esfera.

Considere uma esfera de centro C decomposta em uma quantidade de n sólidos parecidos com pirâmides cujos vértices se encontram no centro da esfera.

Desse modo, a superfície esférica fica dividida em n "polígonos", bases das "pirâmides", cujas áreas chamaremos de $S_1, S_2, S_3, ..., S_n$. Para n muito grande, cada "polígono" tem área e perímetro muito pequenos, e a soma das áreas de todos esses "polígonos" se aproxima da área da superfície esférica S:

$$S_1 + S_2 + S_3 + ... + S_n \simeq S \quad \text{I}$$

Além disso, quanto maior for o número n, mais a soma dos volumes de todas essas "pirâmides" se aproxima do volume da esfera. O volume de uma pirâmide é dado por $V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} S_b \cdot h$ e, sendo $h = r$ (raio da esfera) e $S_b = S_i$, que é a área do i-ésimo polígono, podemos escrever o volume da i-ésima pirâmide como $V_i = \frac{1}{3} S_i \cdot r$, $i = 1, 2, ..., n$.

Assim, se V é o volume da esfera, para n muito grande, temos:

$$V \simeq V_1 + V_2 + V_3 + ... + V_n$$

$$V \simeq \frac{S_1 \cdot r}{3} + \frac{S_2 \cdot r}{3} + \frac{S_3 \cdot r}{3} + ... + \frac{S_n \cdot r}{3} = \frac{1}{3} \cdot r(S_1 + S_2 + S_3 + ... + S_n) \quad \text{II}$$

Substituindo I em II, obtemos $V \simeq \frac{1}{3} S \cdot r$

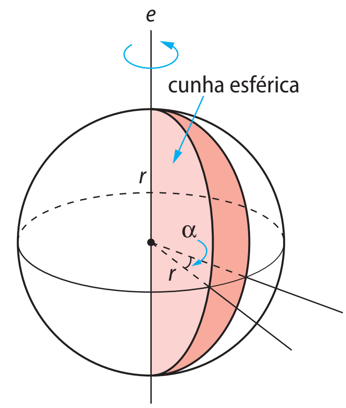
Logo, como $V = \frac{4\pi r^3}{3}$, temos: $\frac{4\pi r^3}{3} \simeq \frac{1}{3} S \cdot r \Rightarrow S \simeq 4\pi r^2$

Estudamos que quanto maior for o número n, mais S se aproxima de $4\pi r^2$. Logo, fazendo n tender ao infinito, obtemos a área da superfície esférica:

$$S = 4\pi r^2$$

Cunha esférica

Chamamos de **cunha esférica** o sólido gerado pela rotação, por um ângulo de medida α ($0° < \alpha \leqslant 360°$), de um semicírculo de raio r em torno do eixo que contém seu diâmetro, como mostrado a seguir.



O volume da cunha esférica pode ser calculado por meio de uma regra de três que compara esse sólido com a esfera.

Ângulo central	Volume	
$360°$	$\frac{4}{3}\pi r^3$	← esfera
α	V_{cunha}	← cunha esférica

$$\alpha \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = 360° \cdot V_{\text{cunha}} \Rightarrow V_{\text{cunha}} = \frac{4 \cdot \alpha\pi r^3}{3 \cdot 360°}$$

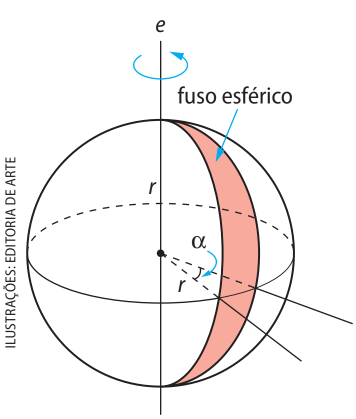
Logo:

$$V_{\text{cunha}} = \frac{\alpha\pi r^3}{270°}$$

Fuso esférico

Chamamos de **fuso esférico** a superfície gerada pela rotação, por um ângulo de medida α ($0° < \alpha \leqslant 360°$), de uma semicircunferência de raio r em torno do eixo que contém seu diâmetro, como mostrado na figura a seguir.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE



A área do fuso esférico pode ser calculada por meio de uma regra de três que o compara à superfície esférica.

Ângulo central	Área	
$360°$	$4\pi r^2$	← superfície esférica
α	S_{fuso}	← fuso esférico

$$\alpha \cdot 4\pi r^2 = 360° \cdot S_{\text{fuso}} \Rightarrow S_{\text{fuso}} = \frac{4 \cdot \alpha\pi r^2}{360°}$$

Logo:

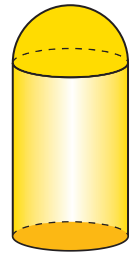
$$S_{\text{fuso}} = \frac{\alpha\pi r^2}{90°}$$

Pense e responda

Como seriam as fórmulas do volume da cunha esférica e da área do fuso esférico se o ângulo α fosse considerado em radiano?

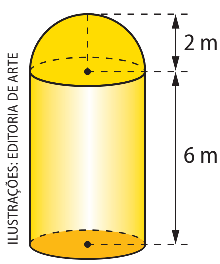
$V_{\text{cunha}} = \frac{2}{3}\alpha r^3$; $S_{\text{fuso}} = 2\alpha r^2$

7. Um silo tem o formato de um cilindro circular reto (com fundo) sob uma semiesfera, como na figura. Determine o volume desse silo, sabendo que o raio do cilindro mede 2 m e que a altura do silo mede 8 m.



Resolução

O volume do silo é igual à soma dos volumes de uma semiesfera de raio 2 m e de um cilindro de raio 2 m e altura 6 m.



$$V_{\text{semiesfera}} = \frac{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2^3}{2} = \frac{16\pi}{3}$$

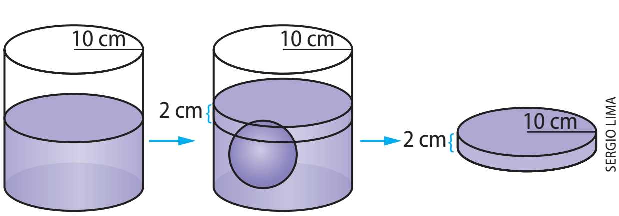
$$V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot 2^2 \cdot 6 = 24\pi$$

$$V_{\text{silo}} = \frac{16\pi}{3} + 24\,\pi = \frac{88}{3}\pi$$

Portanto, o volume do silo é $\frac{88\pi}{3}$ m^3.

8. Para medir o diâmetro de uma esfera maciça, João utilizou a seguinte estratégia: colocou certa quantidade de água em um recipiente de formato cilíndrico de raio 10 cm e altura 20 cm. Em seguida, mergulhou a esfera na água, de modo que ela ficou totalmente submersa. Ele, então, verificou que a altura da água no recipiente subiu 2 cm. Assim, pôde determinar o diâmetro da esfera. Qual é esse diâmetro?

Resolução



Sem a esfera. Com a esfera.

O volume da esfera é equivalente ao volume de água deslocado, o qual, por sua vez, corresponde ao volume de um cilindro de raio 10 cm e altura 2 cm.

$$V_{\text{deslocado}} = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 10^2 \cdot 2 = 200\pi$$

$$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = 200\pi \Rightarrow R = \sqrt[3]{150} \simeq 5{,}3$$

Como o diâmetro da esfera é o dobro do seu raio, ele é aproximadamente igual a 10,6 cm.

9. A professora Cristina produziu com os estudantes de sua turma da pré-escola enfeites de Natal no formato de esferas, com 12 cm de diâmetro cada uma. Para pintar a superfície dessas esferas, ela dispõe de uma latinha de tinta, com a qual, conforme informação do fabricante, é possível pintar até 5 m^2 de superfície.

Nessas condições, qual é o número máximo de enfeites que a turma de Cristina poderá pintar?

Resolução

Em cada esfera, temos: $r = \frac{12}{2} \Rightarrow r = 6$

$S_{\text{esfera}} = 4\pi r^2 = 4 \cdot \pi \cdot 6^2$

$S_{\text{esfera}} = 144\pi$

Considerando $\pi = 3{,}14$, a área da superfície esférica é 452,16 cm^2.

Como é possível pintar até 5 m^2 (50 000 cm^2) com a latinha de tinta, temos: $\frac{50\,000}{452{,}16} \simeq 110{,}58$

Portanto, a turma da professora Cristina poderá pintar até 110 enfeites.

10. Considere uma esfera cuja superfície tenha área igual a 676π cm^2. Nessas condições, determine:

a) a medida do raio da esfera;

b) o volume da esfera.

Resolução

a) Cálculo do raio da esfera:

$S = 676\pi \Rightarrow 4\pi r^2 = 676\pi \Rightarrow r^2 = 169$

Como r é positivo, temos $r = 13$.

Portanto, o raio da esfera é 13 cm.

b) Cálculo do volume:

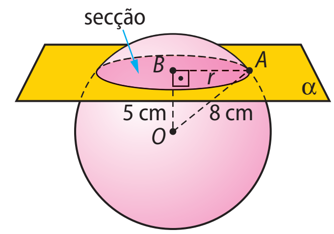
$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi \cdot 13^3 \Rightarrow V = \frac{8\,788}{3}\pi$

Portanto, o volume da esfera é $\frac{8\,788}{3}\pi$ cm^3.

11. Uma esfera de raio 8 cm é seccionada por um plano distante 5 cm de seu centro. Calcule o raio do círculo determinado pela secção.

Resolução

A intersecção do plano α com a esfera determina a secção indicada na figura.



Do triângulo retângulo *OBA*, tem-se:

$8^2 = 5^2 + r^2 \Rightarrow 64 = 25 + r^2 \Rightarrow r^2 = 39$

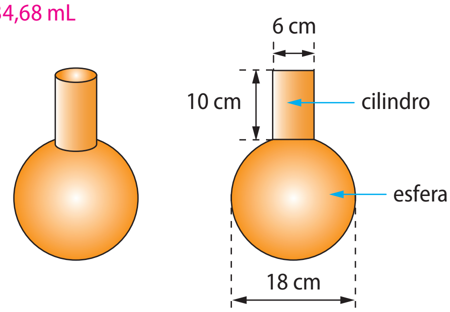
Como *r* é positivo, $r = \sqrt{39}$.

Portanto, o raio do círculo determinado pela secção é $\sqrt{39}$ cm.

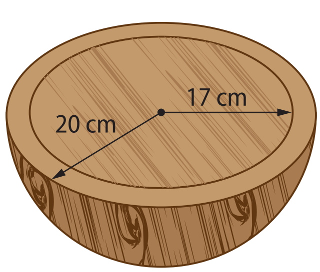
ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

36. Calcule, em mililitro, a capacidade aproximada do recipiente indicado na figura. Adote $\pi = 3{,}14$. Utilize a calculadora para auxiliá-lo nos cálculos. 3 334,68 mL



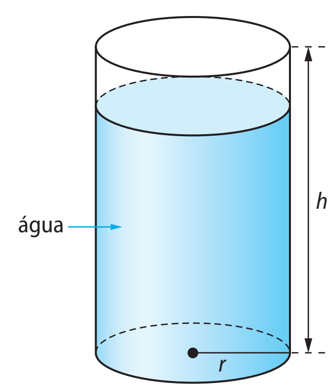
37. O recipiente da imagem é feito de madeira e tem densidade 0,7 g/cm^3. Tanto sua parte externa quanto a interna correspondem a superfícies de semiesferas, e seus raios estão indicados na imagem. Calcule a massa do recipiente em kilograma. aproximadamente 4,52 kg



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

38. Um reservatório no formato de uma semiesfera tem 18 m de diâmetro. Qual é o volume de água que cabe nesse reservatório? 486π m^3

39. (Unifesp) Um recipiente, contendo água, tem a forma de um cilindro circular reto de altura $h = 50$ cm e raio $r = 15$ cm.



Este recipiente contém 1 litro de água a menos que sua capacidade total.

a) Calcule o volume de água contido no cilindro (use $\pi = 3{,}14$). 34,325 L

b) Qual deve ser o raio *R* de uma esfera de ferro que, introduzida no cilindro e totalmente submersa, faça transbordarem exatamente 2 litros de água? aproximadamente 8,95 cm

40. (PUC-RJ) B_1 é uma bola esférica de volume V_1. B_2 é uma bola esférica de volume V_2, cujo raio é o triplo do raio de B_1.

Escolha a alternativa correta. alternativa **d**

a) $V_2 = 3V_1$

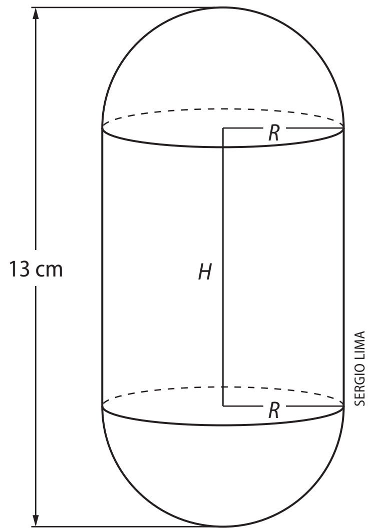
b) $V_2 = 9V_1$

c) $V_2 = 12V_1$

d) $V_2 = 27V_1$

e) $V_2 = 81V_1$

41. (Eear-SP) Um objeto metálico maciço é formado por um cilindro circular reto, de raio da base medindo R cm e H cm de altura, justaposto a 2 semiesferas de raio R cm, conforme a figura dada.

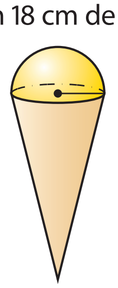


Se o objeto tem 13 cm de comprimento e 78π cm^2 de área total, então o valor de H é ______ cm. alternativa **d**

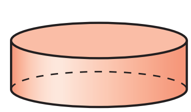
a) 4
b) 5
c) 6
d) 7

42. Uma esfera está inscrita em um cilindro equilátero de raio da base a. Qual é a razão entre o volume V_1 da esfera e o volume V_2 do cilindro? $\frac{2}{3}$

43. Uma casquinha de sorvete com formato de cone tem 3 cm de diâmetro da base e 6 cm de profundidade. Depois de totalmente preenchida, ainda é adicionada à casquinha meia bola de sorvete, conforme a imagem. Já o recipiente cilíndrico que armazena o sorvete tem 18 cm de diâmetro e 5 cm de altura.



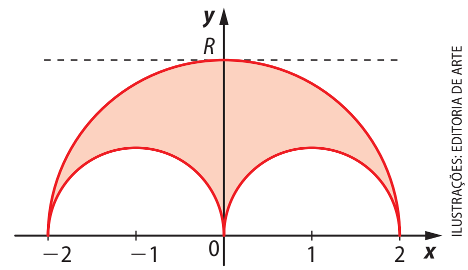
▪ Casquinha cônica com meia bola de sorvete.



▪ Recipiente que armazena o sorvete.

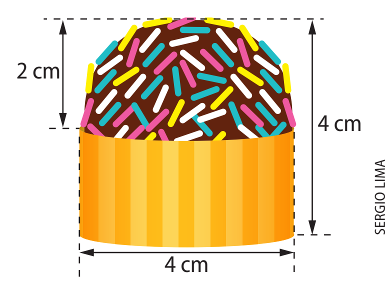
Determine o número de casquinhas que podem ser servidas com o sorvete armazenado em um recipiente cheio. 60 casquinhas

44. (PUC-RS) A região R da figura está limitada por três semicírculos.



Sabendo que R efetua uma volta completa em torno do eixo x, calcule o volume do sólido gerado. 8π

45. Em uma festa de arrecadação de fundos em uma escola, os pais de uma estudante resolveram fazer brigadeiros para vender durante a festa. Solicitando ajuda à filha, pediram a ela que confeccionasse caixinhas de papel-cartão para colocar cada um dos brigadeiros. As caixinhas confeccionadas deveriam ter formato cúbico. Antes de ser armazenado na caixinha, o brigadeiro é colocado em uma forminha de formato cilíndrico, de modo que metade do doce, de formato esférico, fique para fora da forminha.



Forme um pequeno grupo com seus colegas e, juntos, respondam às questões a seguir. Para todas as situações necessárias, considerem $\pi = 3{,}14$.
Utilizem a calculadora para auxiliá-los nos cálculos.

a) Qual é o volume aproximado de cada brigadeiro? 33,49 cm^3

b) Qual é a capacidade aproximada das forminhas de formato cilíndrico? 25,12 cm^3

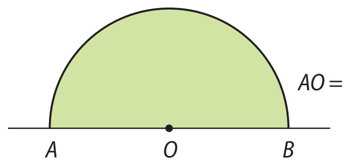
c) Sabendo que cada folha de papel-cartão tem 68 cm × 48 cm e que não há sobreposição de material na montagem, quantas caixinhas de aresta igual a 4 cm poderão ser confeccionadas? 34 caixinhas

46. Sabendo que a área de uma superfície esférica é 8π cm², calcule o raio da esfera. $\sqrt{2}$ cm

47. Um plano α secciona uma esfera de raio 20 cm. A distância do centro da esfera ao plano α é 12 cm. Calcule a área da secção obtida. 256π cm²

48. Qual é a área total da superfície esférica gerada pela rotação completa do semicírculo da figura em torno de seu diâmetro $\overline{AB}$? 100π cm²

EDITORIA DE ARTE



49. Supondo que a Terra seja uma esfera perfeita e sabendo que seu raio é de aproximadamente 6 400 km, determine:

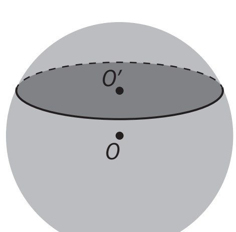
a) a área total da superfície terrestre (use $\pi = 3$); 491 520 000 km²

b) o valor percentual que ocupa o continente americano, cuja área é de 42 215 000 km², em relação à superfície total da Terra.

Utilize a calculadora para auxiliá-lo nos cálculos. aproximadamente 8,59%

50. (Faap-SP) A área da superfície de uma esfera e a área total de um cone reto são iguais. Determine o raio da esfera, sabendo que o volume do cone é 12π dm³ e o raio da base é 3 dm. $\sqrt{6}$ dm

51. (CPAEAM) Uma esfera com centro em O possui volume igual a $\frac{1372\pi}{3}$ cm³. Se tomarmos um plano e o fizermos interceptar essa esfera a uma distância d do seu centro, a seção plana circular resultante, de centro O', terá área igual a 24π cm² (figura abaixo). Assim, de acordo com os dados, calcule o valor d, ou seja $\overline{OO'}$, e assinale a opção correta. alternativa **c**



SERGIO LIMA

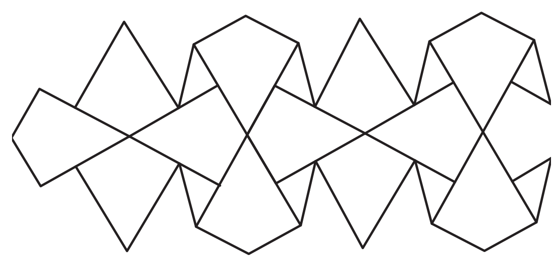
a) 1 cm
b) 3 cm
c) 5 cm
d) 7 cm
e) 10 cm

52. Uma esfera é seccionada por um plano α distante 12 cm do centro da esfera. O raio da secção obtida é 9 cm. Calcule o volume da esfera. 4500π cm³

53. (UPF-RS) Com inspiração na arquitetura, na cultura e nas cores da bandeira do Catar, a bola oficial da Copa do Mundo de 2022 foi denominada Al Rihla, que significa “a jornada” em árabe (Fonte: https://www.metropoles.com/esportes/futebol/adidas-e-fifa-revelam-aal-rihla-bola-oficial-da-copa-do-mundo-2022).

A bola é revestida de pele de poliuretano com uma nova forma de painel de 20 peças, que melhora sua aerodinâmica. A figura a seguir apresenta a bola e o seu painel de peças.

UPF-RS, 2023



SERGIO LIMA

A Al Rihla tem circunferência de cerca de 70 cm. Considere que, para a produção de uma peça da bola, a quantidade de pele de poliuretano foi aumentada em 10%, devido aos recortes que devem ser feitos. A quantidade desse material que será necessária para a produção de uma bola, em cm², é: alternativa **b**

a) $\frac{4 \times 35^2}{\pi}$

b) $\frac{4{,}4 \times 35^2}{\pi}$

c) $\frac{4{,}4 \times 70^2}{\pi^2}$

d) $4{,}4 \times 35^2$

e) $\frac{4 \times 70^2}{\pi}$

54. Calcule a área de um fuso esférico de raio 2 m e ângulo 135°. 6π m²

55. Calcule o volume de uma cunha esférica de raio 6 cm e ângulo 45°. 36π cm³

» Projeções cartográficas

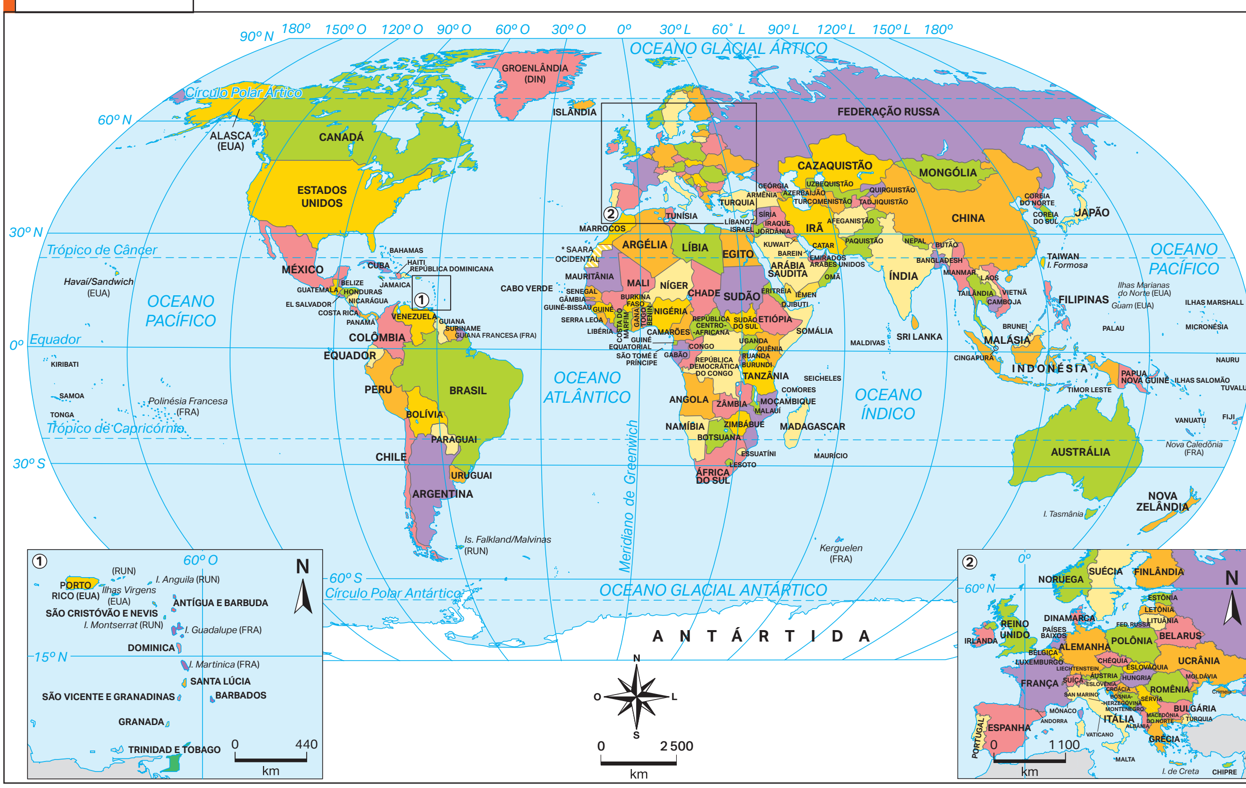
Uma parte de nosso estudo com cilindros e cones envolveu o cálculo da área de suas superfícies. Para isso, observamos a planificação desses sólidos geométricos. No entanto, essa não foi a maneira utilizada para obter a superfície da esfera, o que nos traz uma dúvida: é possível planificar uma esfera?

A resposta é não, não é possível planificar uma esfera. Então como podemos representar sua superfície no plano?

Junto a essa questão, devemos responder também a outra pergunta: para que representar uma superfície esférica no plano?

A resposta para essas perguntas aparece quando vemos um planisfério.

Planisfério



Fonte: INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Atlas geográfico escolar**. 9. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2023. p. 41a.

Mapas são representações planas de um corpo aproximadamente esférico, a Terra. Eles são importantes pois permitem a visualização de diversos detalhes que seriam impossíveis em globos, já que, para isso, estes precisariam ser muito grandes, o que os tornaria difíceis de manusear e de transportar.

Saiba que...

Planisférios são mapas que mostram todo o planeta de uma só vez. Também são chamados de mapas-múndi.

ANTONGRACHEV

Como não existe uma representação plana perfeita da esfera (uma planificação), é de se imaginar que as representações que existam apresentem algum tipo de distorção. Por isso, procuraram-se maneiras de desenhar um mapa que, de alguma forma, apresentasse poucas distorções, seja nos comprimentos, seja nas áreas ou nos formatos dos continentes. Essas "maneiras" são as **projeções cartográficas**.

Cada projeção cartográfica objetiva manter fiel algum aspecto, que pode ser a dimensão, a forma etc., em detrimento de outro. Por isso, cada projeção cartográfica responde a determinado objetivo de quem a apresenta, seja político, seja econômico ou cartográfico.

Cada tipo de projeção é conhecido pela superfície em que o globo terrestre é projetado. Neste Capítulo estudaremos a projeção cilíndrica, a cônica e a plana, isto é, aquelas em que o globo terrestre é projetado, respectivamente, sobre um cilindro, um cone e um plano.

Para acessar

- O QUE é a projeção Gall-Peters, mapa que promete acabar com "4 séculos de visão colonialista" do mundo. **BBC News Brasil**, [*s. l.*], 23 mar. 2017. Disponível em: https://www.bbc.com/portuguese/internacional-39349115. Acesso em: 10 out. 2024.

  Reportagem da **BBC News Brasil** sobre os aspectos políticos envolvidos nas projeções cartográficas.

» Projeção cilíndrica

É a projeção dos paralelos e meridianos sobre um cilindro que envolve a Terra e que, posteriormente, é planificado.

Saiba que...

Na bibliografia cartográfica, já foram descritos 400 tipos distintos de projeção.

Projeção cilíndrica

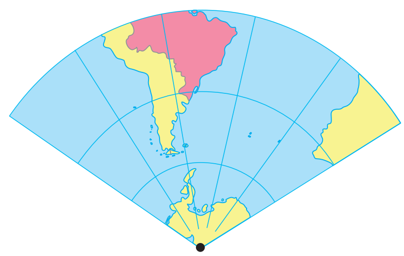
FERREIRA, Graça Maria L. **Atlas geográfico**: espaço mundial. Visualização cartográfica: Marcello Martinelli. 5. ed. rev. e atual. São Paulo: Moderna, 2019. p. 10.

▪ Projeção cilíndrica.

Projeção cônica

É a projeção do globo terrestre sobre um cone, que é planificado em seguida. Sua utilização se dá quando queremos representar as latitudes médias. Nessa projeção, as distorções aumentam conforme a representação se afasta do paralelo de contato com o cone, de modo que essa projeção é utilizada quando queremos produzir mapas regionais.

■ Projeção cônica, sem escala.



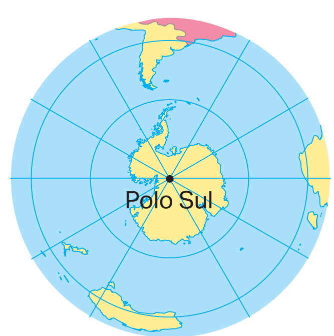
Fonte: FERREIRA, Graça Maria L. **Atlas geográfico**: espaço mundial. Visualização cartográfica: Marcello Martinelli. 5. ed. rev. e atual. São Paulo: Moderna, 2019. p. 10.

Projeção plana

Também conhecida como **projeção azimutal**, é aquela feita sobre um plano a partir de um determinado ponto, ou seja, de um ponto de vista. Esse tipo de projeção deforma áreas distantes desse ponto de vista central. É bastante utilizada para a representação das áreas polares.

ILUSTRAÇÕES: SELMA CAPARROZ

■ Projeção plana, sem escala.



Fonte: FERREIRA, Graça Maria L. **Atlas geográfico**: espaço mundial. Visualização cartográfica: Marcello Martinelli. 5. ed. rev. e atual. São Paulo: Moderna, 2019. p. 10.

As projeções cartográficas têm duas classificações principais: quanto à superfície de projeção e quanto às propriedades. As projeções estudadas anteriormente são classificadas de acordo com a superfície de projeção.

Quanto às propriedades, temos as seguintes classificações:

- **Equivalente**: preserva áreas.
- **Conforme**: preserva ângulos.
- **Equidistante**: preserva comprimentos.

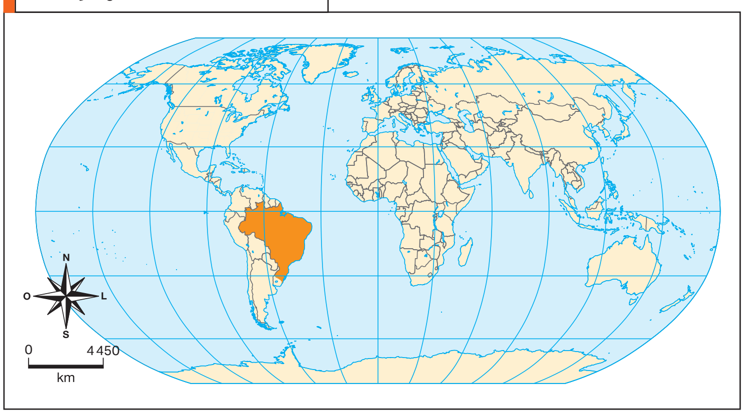
Observe os exemplos a seguir, que mostram o planisfério representado por três das projeções cartográficas mais conhecidas atualmente: a projeção de Peters, a de Robinson e a de Mercator.

Projeção de Peters

SONIA VAZ

Fonte: INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Atlas geográfico escolar**. 9. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2023. p. 26.

Projeção de Robinson



SONIA VAZ

Fonte: INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Atlas geográfico escolar**. 9. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2023. p. 29.

Acompanhe algumas diferenças entre essas projeções.

- A **projeção de Peters** é uma projeção cilíndrica e equivalente, que distorce o formato dos continentes, porém se aproxima mais das áreas deles.
- A **projeção de Robinson** é uma projeção afilática (que não é conforme, nem equivalente, nem equidistante) e pseudocilíndrica (não possui nenhuma superfície de projeção, porém se assemelha à projeção cilíndrica).
- A **projeção de Mercator** é uma projeção conforme e cilíndrica, bastante utilizada para representar o mundo. As distorções ocorrem sobretudo nos polos.

Projeção de Mercator

ALLMAPS

Fonte: INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Atlas geográfico escolar**. 9. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2023. p. 28.

ATIVIDADE RESOLVIDA

12. Leia a tirinha a seguir.

© JOAQUÍN SALVADOR LAVADO (QUINO) TODA MAFALDA/FOTOARENA

QUINO, J. L. **Toda Mafalda**. São Paulo: Martins Fontes, 2010. p. 348. Tira 2.

Na tirinha, a personagem Liberdade decide inverter o mapa e utilizá-lo de ponta-cabeça, de modo que o Norte ficará embaixo, enquanto o Sul ficará na parte de cima. Supondo que ela esteja usando um mapa cuja projeção é de Mercator, ela pode fazer isso? Justifique.

Resolução

Sim, pode. Como estudamos, mapas são projeções do globo no plano, e a projeção indicada só faz referência à técnica utilizada para fazer a projeção. A orientação dos mapas é uma convenção, e, mesmo de ponta-cabeça, o mapa continuará servindo ao seu propósito.

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

56. (UEA-AM) Examine a projeção cartográfica.

UEA, 2024

(https://atlasescolar.ibge.gov.br)

A projeção cartográfica representada tem como característica alternativa **a**

a) a fidelidade das formas e a distorção das áreas.

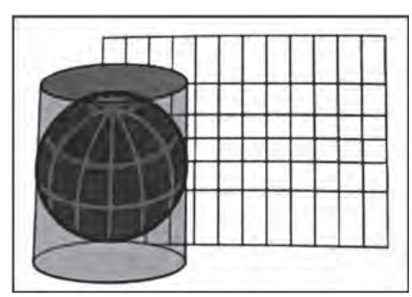
b) a fidelidade das áreas e a distorção das formas.

c) a distorção das formas, das áreas e dos ângulos.

d) a deformação das áreas próximas aos trópicos.

e) a conservação das áreas próximas aos polos.

57. (Unip-SP) Analise a projeção de Mercator.



UNIP, 2023

(Paulo M. L. de Menezes e Manoel C. Fernandes. *Roteiro de Cartografia*, 2013. Adaptado.)

Uma desvantagem dessa projeção é alternativa **c**

a) a representação dos círculos polares em linhas curvas.

b) o espaçamento decrescente dos paralelos sentido polos.

c) a distorção de área que ocorre em altas latitudes.

d) a representação em conformidade dos polos Norte e Sul.

e) a equivalência de formas entre os paralelos e meridianos.

58. (UEA-AM) Analise a imagem. alternativa **e**

(https://studymaps.com.br. Adaptado.)

A projeção cartográfica empregada nessa imagem tem como característica

a) alterar as propriedades forma, tamanho e distância, uma vez que procura distorcer ao mínimo todas elas.

b) conservar as distâncias dos continentes, uma vez que distorce as formas nessas áreas.

c) valorizar as regiões polares, uma vez que as distorções empregadas nessas áreas são mínimas.

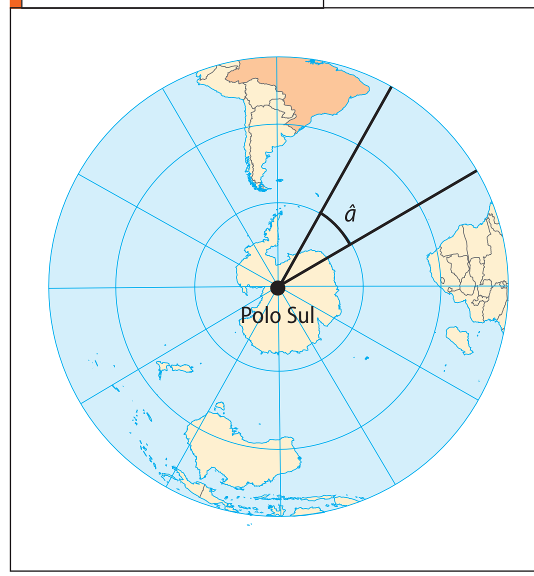
d) valorizar as regiões próximas ao Equador, uma vez que garante a real distância do azimute.

e) representar as porções territoriais em médias latitudes, uma vez que evita distorções nessas áreas.

59. a) A região representada é a região da Terra que compreende a Antártida, a Oceania, boa parte da América do Sul e o sul da África.

59. Observe a projeção a seguir e responda às perguntas.

Projeção plana polar



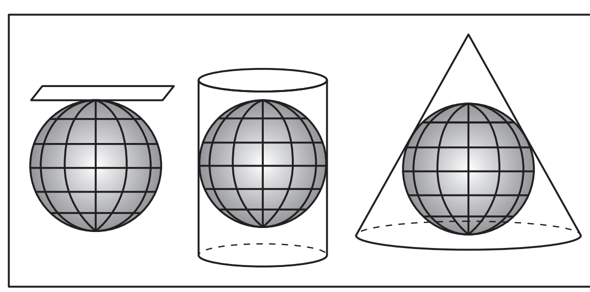
Fonte: INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Atlas geográfico escolar**. 9. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2023. p. 26.

- Sem escala.

a) Qual é a região representada na projeção plana polar?

b) Qual é a medida do ângulo *â*? 30°

60. (UEG-GO) Observe a figura a seguir.



Fonte: <http://www.geografiaparatodos.com.br/index.php?pag=capitulo_3_geoprocessamento_e_mapas>. Acesso em: 17 ago. 2016.

Os tipos de projeções cartográficas representados na figura são, respectivamente: alternativa **b**

a) cilíndrica, azimutal e cônica

b) azimutal, cilíndrica e cônica

c) cônica, azimutal e cilíndrica

d) azimutal, cônica e cilíndrica

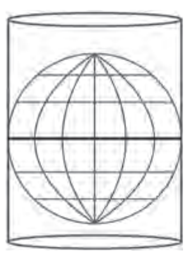
e) cilíndrica, cônica e azimutal

61. (Enem/MEC) alternativa **a**

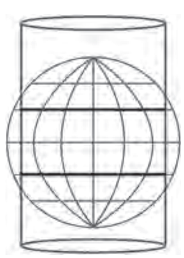
> É claramente impossível criar um mapa perfeito, no qual a escala principal seja preservada em todos os pontos. É fácil, porém, manter a escala principal ao longo de certas linhas ou pontos no mapa em que a escala seja constante e igual à escala principal, ocasionando uma distorção nula. Linhas de distorção nula são linhas em uma projeção em que a escala principal é preservada. São caracterizadas pela tangência ou secância da superfície terrestre com a superfície de projeção.
>
> MENEZES, P.; FERNANDES, M. **Roteiro de cartografia**. São Paulo: Oficina de Textos, 2013 (adaptado).

Conforme o texto, a projeção que representará uma região próxima à Linha do Equador com a menor distorção da escala principal é:

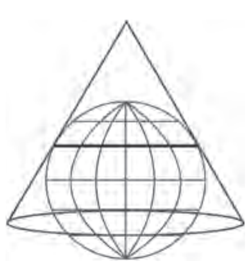
a)



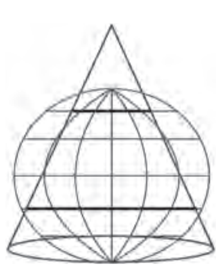
b)



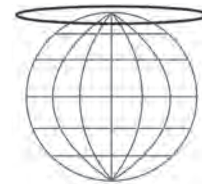
c)



d)



e)



IMAGENS: ENEM, 2023

62. (EsPCEx-SP)

> "Uma projeção cartográfica é o resultado de um conjunto de operações que permite representar no plano, tendo como referência paralelos e meridianos, os fenômenos que estão dispostos na superfície esférica".
>
> Fonte: SENE, Eustáquio de; MOREIRA, João Carlos. **Geografia Geral e do Brasil** volume único. 6. ed. São Paulo: Ática, 2018, p. 51.

Sobre projeção cartográfica, pode-se afirmar que: alternativa **b**

I. A projeção conforme é aquela que preserva o tamanho da área, porém com alteração das formas, ou seja, os ângulos não são idênticos aos do globo terrestre, como o exemplo da projeção de Mercator.

II. Na projeção equivalente, as áreas mantêm-se idênticas às do globo terrestre, porém há distorção das formas quando comparadas com a original, como por exemplo a projeção de Peters.

III. Na projeção afilática, as áreas e as formas são preservadas na sua forma original, por isso, tem sido uma das mais utilizadas em atlas e mapas de divulgação, como por exemplo a projeção de Robinson.

IV. A projeção equidistante é geralmente utilizada para fins específicos. As distâncias, quando traçadas do centro da projeção, são precisas. Porém, há distorções nas formas e nas áreas.

Das afirmações acima, estão corretas apenas

a) I e IV.
b) II e IV.
c) III e IV.
d) I e II.
e) II e III.

Cúpulas geodésicas

Você já ouviu falar em cúpulas ou estruturas geodésicas?

Essas estruturas, que, muitas vezes, apresentam formato semelhante ao de uma esfera ou semiesfera, são construídas a partir de malhas triangulares e, por isso, apresentam grande estabilidade e resistência, uma vez que os triângulos possuem rigidez geométrica.

Comumente usadas em cúpulas de estufas, coberturas de estádios e abrigos emergenciais, as estruturas geodésicas são reconhecidas por sua estabilidade, leveza, economia, aerodinâmica, facilidade de montagem, beleza, sustentabilidade e eficiência no aproveitamento de espaço. No texto a seguir, podemos compreender um pouco sobre essas estruturas.

FENGCHANG WANG/ALAMY/FOTOARENA

A Biosfera de Montreal (Canadá), é uma das maiores estruturas geodésicas do mundo, com 76 m de diâmetro. Fotografia de 2023.

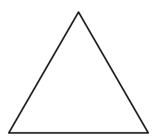
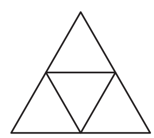
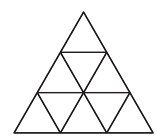
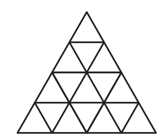
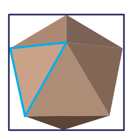
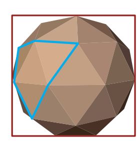
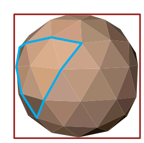
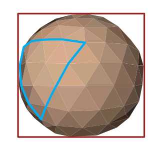
Composição das estruturas geodésicas

> [...] A estrutura Geodésica corresponde a uma malha triangular que cobre a superfície de uma esfera que, na maioria das vezes, deriva de poliedros regulares platônicos com face triangular, são eles: o tetraedro, o octaedro e o mais comum a ser utilizado [...] o icosaedro (com 20 lados), por ser o mais arredondado dos 3. Se estiver completa será chamada de esfera geodésica, e domo ou cúpula geodésica quando incompleta, parecer apenas um hemisfério.

Para gerar diferentes estruturas geodésicas a partir do icosaedro, basta aumentar o número de frequência, ou seja, subdividir as faces triangulares em triângulos cada vez menores, quanto mais alta a frequência, maior o número de triângulos no qual sua superfície está subdividida e mais a sua aparência torna-se arredondada [...]. Um icosaedro é considerado uma esfera geodésica de frequência 1. Cúpulas e esferas geodésicas podem configurar diferentes frequências para o mesmo diâmetro.

[...]

SOARES, T. L. F. *et al*. A relação entre a biomimética e a geodésica de Buckminster Fuller no planejamento de construções sustentáveis. *In*: CONGRESSO LUSO-BRASILEIRO PARA O PLANEJAMENTO URBANO, REGIONAL, INTEGRADO E SUSTENTÁVEL: contrastes, contradições e complexidades, 7., 2016, Maceió. **Anais** [...]. Maceió: Pluris, 2016. Localizável em: p. 5 do pdf. Disponível em: https://fau.ufal.br/evento/pluris2016/files/Tema%202%20-%20Cidades%20Inovadoras%20e%20%20Inteligentes/Paper1238.pdf. Acesso em: 4 set. 2024.

Frequência	1	2	3	4
Figura plana				
Figura espacial				

SERGIO LIMA

▪ A cada frequência, a quantidade de triângulos aumenta e a forma espacial se aproxima de uma esfera.

Acompanhe, agora, algumas vantagens da estrutura geodésica em relação a outras construções.

Vantagens construtivas

[...]

[...] **Força estrutural**: A forma geodésica otimiza a carga, propriedade da **tensegridade**, deslocando as forças em toda sua estrutura, uma vantagem à frente das estruturas retangulares dos edifícios tradicionais;

Tensegridade: propriedade presente em objetos cujos componentes usam a tração e a compressão de forma combinada, de modo a proporcionar estabilidade e resistência e assegurar a integridade global do objeto.

[...] **Economia**: A esfera tem 25% menos área de superfície por volume fechado do que qualquer outra forma. A cúpula combina a estabilidade inerente dos triângulos com a proporção vantajosa volume/área de superfície de uma esfera. Quanto maior for a cúpula, mais eficaz ela se torna. Isto é demonstrado duplicando o seu diâmetro, que resulta no aumento do volume em oito vezes. Com isso precisa de menos materiais de construção para incluir mais espaço. Há uma estimativa de redução de 30% de materiais e 50% de energia em relação a uma construção convencional de alvenaria de mesma área construída; redução também de custos com a mão de obra, pois a montagem é mais fácil, simples e rápida;

[...]

[...] **Segurança**: O *design* da cúpula geodésica é ergonômico, aerodinâmico e forte para resistir a situações extremas como: ventos fortes, tempestades, terremotos e acumulação de neve. [...]

[...] **Temperatura mais uniforme**: Devido ao fluxo melhorado do ar, a temperatura é mais uniforme do que numa habitação convencional. A área de superfície exposta no exterior nas cúpulas também é menor, permitindo menos troca de calor com o ambiente. Aliado a isto, o volume de ar dentro da cúpula também é menor, o que se traduz em economia para se manter morno no inverno, ou frio no verão, poupando-se até 50% em energia para aquecer ou esfriar.

[...]

[...] **Padrão de circulação radial**: nas escolas, o padrão circular elimina os corredores; nos teatros e igrejas, possibilita maior número de cadeiras e melhor visibilidade; nas vivendas otimiza os espaços e permite a criação de espaços mais sociáveis;

[...] **Coberturas autossustentáveis**: Independente do tamanho, permitem sempre amplos espaços desobstruídos sem a necessidade de vigas, colunas ou paredes de suporte interiores;

[...]

[...] **Construção em lugares remotos**: Com poucos e leves materiais e sendo de fácil montagem, torna-se bem indicado até mesmo para lugares ermos, como desertos, polos, florestas, praias, montanhas etc.;

[...]

[...] **Variedade de materiais**: Podem ser construídas praticamente com qualquer material (bambu, aço, madeira, concreto, pvc etc.); [...]

[...]


DELFIM MARTINS/PULSAR IMAGENS

Planetário Rubens de Azevedo, Centro Dragão do Mar de Arte e Cultura, em Fortaleza (CE). Fotografia de 2022.

SOARES, T. L. F. *et al*. A relação entre a biomimética e a geodésica de Buckminster Fuller no planejamento de construções sustentáveis. *In*: CONGRESSO LUSO-BRASILEIRO PARA O PLANEJAMENTO URBANO, REGIONAL, INTEGRADO E SUSTENTÁVEL: contrastes, contradições e complexidades, 7., 2016, Maceió. **Anais** [...]. Maceió: Pluris, 2016. Localizável em: p. 6-8 do pdf. Disponível em: https://fau.ufal.br/evento/pluris2016/files/Tema%202%20-%20Cidades%20Inovadoras%20e%20%20Inteligentes/Paper1238.pdf. Acesso em: 4 set. 2024.

Agora, faça o que se pede nas atividades a seguir. Ver as **Orientações para o professor**.

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. Pesquise quais são as maiores estruturas geodésicas do mundo. Inclua na pesquisa as dimensões das estruturas, sua localização e, se possível, algumas fotografias. Depois, compartilhe com a turma os resultados de sua pesquisa.

2. Observe o quadro que relaciona as frequências e as figuras planas usadas na composição de estruturas geodésicas e faça o que se pede nos itens a seguir.

a) Em seu caderno, faça a representação das figuras planas da 5ª e da 6ª frequências.

b) Podemos dizer que, em cada representação das figuras planas, temos um triângulo equilátero maior dividido em vários triângulos equiláteros menores congruentes e justapostos. A figura plana da 5ª frequência está dividida em quantos desses triângulos menores? E a figura plana da 6ª frequência?

c) Escreva uma função matemática que relacione a frequência i (com $i \in \mathbb{N}^*$) à quantidade n de triângulos menores congruentes e justapostos que subdividem o triângulo equilátero maior. Depois, esboce o gráfico da função obtida.

3. Suponha que o dono de uma hospedagem ofereça suítes em forma de domos geodésicos que podem ser inscritos em semiesferas de raio 2 m.

a) Qual é a área aproximada dos domos geodésicos que formam cada suíte? Considere $\pi \simeq 3{,}14$.

b) Você acha que a medida encontrada no item anterior é uma boa estimativa? Justifique.

4. Junte-se a dois colegas, e pensem em locais de sua comunidade em que poderiam ser construídas cúpulas geodésicas e na finalidade dessas cúpulas. Depois, construam a maquete da estrutura de uma cúpula geodésica, dando preferência à construção das arestas, sem a necessidade de produzir as faces. Por fim, comparem a soma das áreas dos triângulos que formam a cúpula da maquete com a área da parte da superfície esférica a que ela se assemelha.

Áreas e volumes de corpos redondos

Para que os computadores executem tarefas, é necessário que sejam programados para isso. Essa programação pode ser feita por meio de diversas linguagens e formas. Para esta atividade, vamos utilizar o **Scratch**, um *software* que pode ser usado *on-line* pelo *link* https://scratch.mit.edu (acesso em: 5 set. 2024) ou pode ser baixado no computador e usado *off-line*.

O Scratch utiliza uma linguagem de programação em blocos. Basta identificar os comandos que se deseja executar – à esquerda da tela – e arrastar os blocos para a área de trabalho – no centro da tela. Não se esqueça de garantir que seu bloco, isto é, sua sequência de comandos, seja coerente e atenda a seu objetivo.

Antes de começar, lembre-se de alterar o idioma para o português, clicando consecutivamente em ***Settings***, ***Language*** e **Português Brasileiro**.

Nesta atividade, será criado um programa que, com base nas informações da altura e do raio da base, calcula o volume de um cilindro.

I. Para que um programa seja executado, é necessário inicializá-lo com algum comando específico. No caso do Scratch, um dos comandos possíveis para a inicialização é clicar na bandeirinha verde. Para isso, precisamos inserir o bloco a seguir no programa. Ele está disponível em **Eventos**.

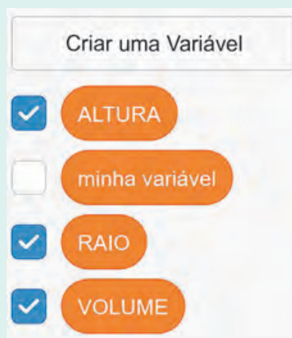
REPRODUÇÃO/SCRATCH

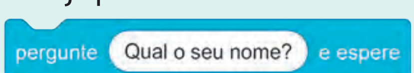
Depois disso, será adicionado o desenvolvimento do programa. O objetivo aqui será calcular o volume do cilindro. Para isso, lembre-se de como é feito esse cálculo: devemos multiplicar a área da base do cilindro, que é um círculo, pela sua altura. Assim, são necessárias duas informações: o raio da base (r) e a altura (h) do cilindro.

II. Quando o usuário do nosso programa inserir os dados necessários para o cálculo, será preciso armazená-los em algum lugar para, posteriormente, efetuarmos os cálculos. Esse armazenamento de informações é feito em variáveis.

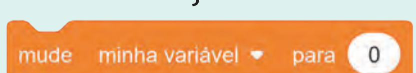
Para criar uma variável, clique na aba **Variáveis** e escolha **Criar uma variável**. No programa que estamos produzindo, precisaremos criar três variáveis: uma delas será chamada de **RAIO**, a outra, de **ALTURA** e a terceira, de **VOLUME**. Na janela de criação da variável, deixe selecionada a opção **Para todos os atores** e clique em **OK**.

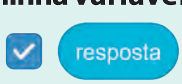
Se a variável estiver selecionada em azul, o valor dela será apresentado na tela quando o programa estiver sendo executado. Caso não queira deixar as variáveis visíveis para o usuário, basta deixar essa opção não selecionada. Vamos deixar selecionadas em azul as três variáveis recém-criadas.



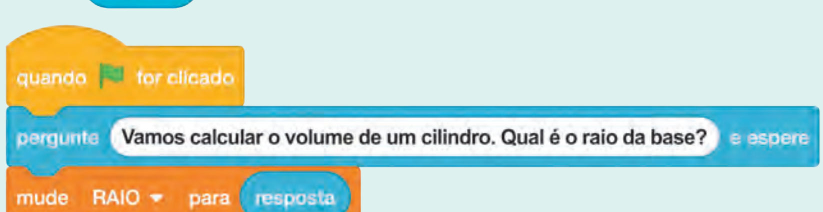
III. Para que seja possível inserir o valor do raio, clique na aba **Sensores**, arraste o bloco 

, encaixe-o no passo anterior e altere a pergunta para "Vamos calcular o volume de um cilindro. Qual é o raio da base?"

IV. Para que o valor informado esteja associado à variável RAIO, vá em **Variáveis**, arraste o bloco 

para baixo da pergunta e troque **minha variável** por **RAIO**. Em seguida, clique em **Sensores** e arraste o bloco 

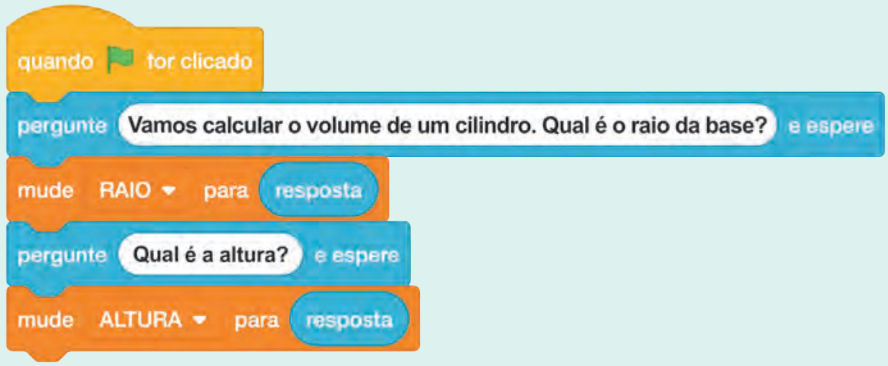
para o lugar do 0.



Esse passo garante que a variável RAIO assuma o valor informado na resposta da pergunta.

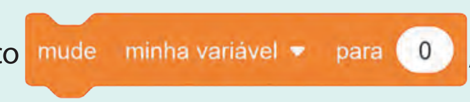
IMAGENS: REPRODUÇÃO/SCRATCH

V. Repetindo o mesmo processo para a altura, obtemos:



IMAGENS: REPRODUÇÃO/SCRATCH

VI. Com as variáveis RAIO e ALTURA assumindo os valores inseridos pelo usuário do nosso programa, podemos, então, passar ao cálculo do volume.

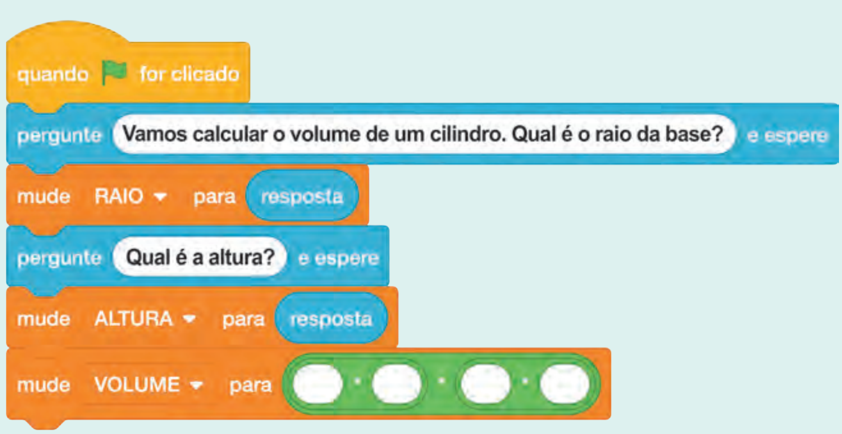
Para isso, arraste um novo bloco 

, alterando **minha variável** para **VOLUME**.

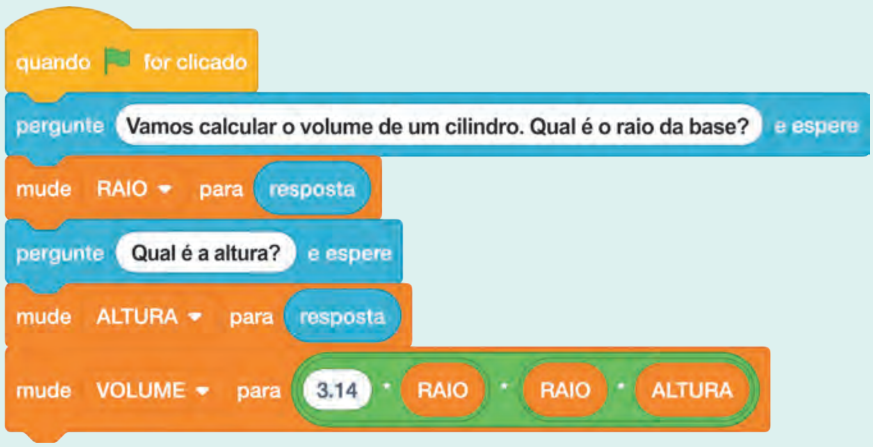
Agora, é necessário usar os operadores para efetuar os cálculos. Os operadores correspondem aos blocos associados às operações matemáticas.

O cálculo do volume do cilindro é dado pela fórmula $V = \pi r^2 h$, que é o mesmo que $V = \pi \cdot r \cdot r \cdot h$. Portanto, é preciso colocar quatro fatores na multiplicação de operadores.

Vá em **Operadores**, arraste  para o lugar do zero e, em cada um dos espaços, arraste duas novas multiplicações.



VII. Agora, vamos preencher as lacunas com os valores necessários para a realização do cálculo. Na primeira, vamos usar 3,14 (escreva "3.14") como uma aproximação para π. As demais lacunas receberão as variáveis RAIO (duas vezes) e ALTURA.



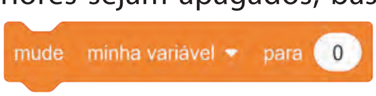
IMAGENS: REPRODUÇÃO/SCRATCH

Saiba que...

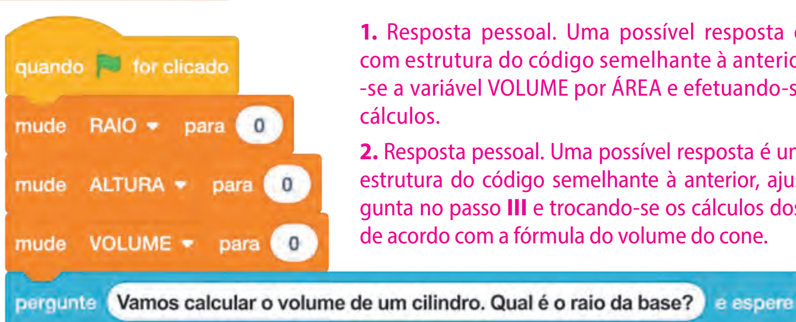
O Scratch utiliza linguagem e notação próprias, que podem diferir um pouco das utilizadas nesta Coleção. Por exemplo, para a separação da parte decimal de um número, o *software* usa o ponto no lugar da vírgula.

Faça um teste de execução clicando na bandeira verde na tela no lado direito. Digite o valor do raio desejado, por exemplo, "5". Em seguida, pressione a tecla ***Enter***. Na sequência, aparecerá a pergunta para digitar a altura. Repita o procedimento anterior digitando o valor da altura desejada, por exemplo, "6".

O valor do volume será dado na tela da direita, ao lado da variável VOLUME.

Para que, ao início de um novo teste, os valores informados em testes anteriores sejam apagados, basta inserir abaixo do bloco inicial três outros blocos 

, alterando as variáveis, como mostrado a seguir.



1. Resposta pessoal. Uma possível resposta é um programa com estrutura do código semelhante à anterior, substituindo-se a variável VOLUME por ÁREA e efetuando-se os respectivos cálculos.

2. Resposta pessoal. Uma possível resposta é um programa com estrutura do código semelhante à anterior, ajustando-se a pergunta no passo **III** e trocando-se os cálculos dos passos **VI** e **VII** de acordo com a fórmula do volume do cone.

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Agora, faça o que se pede nas atividades a seguir.

1. Crie um programa para determinar a área da superfície do cilindro e faça alguns testes para verificar o que ocorre ao serem alterados os valores informados nas variáveis.

2. Crie um programa que calcule o volume de um cone e faça alguns testes para verificar o que ocorre ao serem alterados os valores informados nas variáveis.

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Arquimedes

A contribuição de Arquimedes para o desenvolvimento da Matemática foi tão importante que a **Medalha Fields** traz, na parte da frente, a efígie de Arquimedes, com seu nome escrito em grego e a seguinte inscrição: *Transire svvm pectvs mvndoqve potiri* (Superar as próprias limitações e dominar o universo).

Essa medalha foi proposta pelo professor John Charles Fields (1863-1932) e começou a ser concedida em 1936 aos matemáticos que desenvolvam pesquisas de destaque.

Leia, a seguir, um texto sobre os estudos de Arquimedes acerca da esfera e do cilindro.

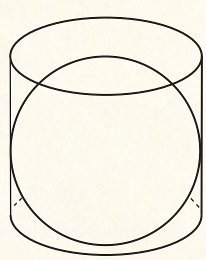
STEFAN ZACHOW/INTERNATIONAL MATHEMATICAL UNION/ WIKIPEDIA/WIKIMEDIA COMMONS DOMÍNIO PÚBLICO

▪ Frente e verso da Medalha Fields.

Arquimedes, a esfera e o cilindro

[...]

Plutarco, um escritor grego do 1º século d.C., é autor de um livro chamado “As Vidas dos Homens Ilustres” [...] Em particular, conta Plutarco que de todas as descobertas que Arquimedes fez, a que o geômetra mais apreciava era a relação de áreas e volumes de um cilindro e da esfera nele contida [...]. Mais precisamente, consideremos uma esfera de raio R, inscrita num cilindro circular reto, de altura $2R$ e cuja base tem raio R (Fig. l).



EDITORIA DE ARTE

$$\frac{V_E}{V_C} = \frac{A_E}{A_C} = \frac{2}{3}$$

▪ Figura 1. “... entre o muito que inventou parece-me que o que mais apreciava era a demonstração da proporção que há entre o cilindro e a esfera nele contida, pelo que pediu a seus parentes que, quando morresse, mandassem colocar sobre sua sepultura um cilindro contendo uma esfera com uma inscrição da proporção pela qual o que contém excede o conteúdo” (Plutarco). [...]

Então *o volume do cilindro é* $\frac{3}{2}$ *do volume da esfera, e a área total do cilindro também é* $\frac{3}{2}$ *da área da esfera*. Ainda segundo Plutarco, Arquimedes teria pedido a seus parentes e amigos que quando morresse mandassem colocar sobre sua sepultura um cilindro contendo uma esfera, com uma inscrição da proporção acima referida. Cícero, quando exercia funções de magistrado romano na Sicília, encontrou uma lápide contendo uma esfera inscrita num cilindro. Como ele mesmo conta, julgou ter achado o túmulo de Arquimedes e cuidou de restaurá-lo. Segundo o autor Howard Eves [...], há pouco mais de vinte anos, em 1965, durante uma escavação para construir um hotel em Siracusa, uma escavadeira deu com uma pedra com a mesma figura antiga de um cilindro contendo uma esfera. Assim, o túmulo de Arquimedes teria sido novamente encontrado nos tempos modernos. Mas desta vez faltou alguém com a clarividência de um Cícero e, ao que parece, esse túmulo está agora definitivamente perdido...

[...]

ÁVILA, Geraldo. Arquimedes, a esfera e o cilindro. **Revista do Professor de Matemática (RPM)**, São Paulo, n. 10, [201-]. Disponível em: http://www.rpm.org.br/cdrpm/10/3.htm. Acesso em: 17 set. 2024.

OLEX RUNDA/SHUTTERSTOCK.COM

ATIVIDADES COMPLEMENTARES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. (Enem/MEC) Um fabricante de creme de leite comercializa seu produto em embalagens cilíndricas de diâmetro da base medindo 4 cm e altura de 13,5 cm. alternativa **b**

O rótulo de cada uma custa R$ 0,60. Esse fabricante comercializará o referido produto em embalagens ainda cilíndricas de mesma capacidade, mas com a medida do diâmetro da base igual à da altura.

Levando-se em consideração exclusivamente o gasto com o rótulo, o valor que o fabricante deverá pagar por esse rótulo é de

a) R$ 0,20, pois haverá uma redução de $\frac{2}{3}$ na superfície da embalagem coberta pelo rótulo.

b) R$ 0,40, pois haverá uma redução de $\frac{1}{3}$ na superfície da embalagem coberta pelo rótulo.

c) R$ 0,60, pois não haverá alteração na capacidade da embalagem.

d) R$ 0,80, pois haverá um aumento de $\frac{1}{3}$ na superfície da embalagem coberta pelo rótulo.

e) R$ 1,00, pois haverá um aumento de $\frac{2}{3}$ na superfície da embalagem coberta pelo rótulo.

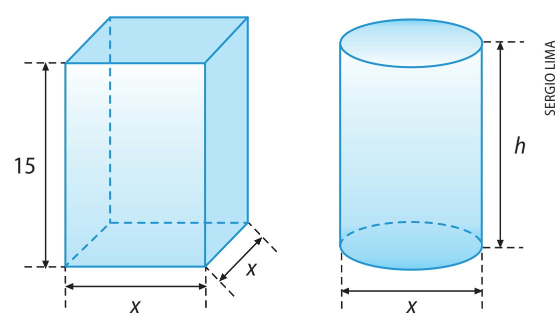
2. (PUCCamp-SP) Uma piscina circular tem 5 m de diâmetro. Um produto químico deve ser misturado à água na razão de 25 g por 500 litros de água. Se a piscina tem 1,6 m de profundidade e está totalmente cheia, quanto do produto deve ser misturado à água? (Use: $\pi = 3{,}1$.) alternativa **b**

a) 1,45 kg **b)** 1,55 kg **c)** 1,65 kg **d)** 1,75 kg **e)** 1,85 kg

3. (Cefet-PR) O raio de um cone equilátero cujos valores numéricos de sua área total e de seu volume se equivalem, em unidades de comprimento (u.c.), é: alternativa **a**

a) $3\sqrt{3}$ **b)** 3 **c)** $\sqrt{3}$ **d)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **e)** 1

4. (UEA-AM) Um determinado bombom é vendido nas embalagens **A** e **B**, ambas com volumes iguais. A embalagem **A** possui formato de um paralelepípedo reto-retângulo, com área da base igual a 144 cm² e a embalagem **B** possui formato de um cilindro circular reto. As figuras mostram as dimensões das duas embalagens, em centimetros. alternativa **b**



fora de escala

Usando $\pi = 3$, a medida da altura da embalagem **B**, indicada por h, é igual a

a) 15 cm. **b)** 20 cm. **c)** 25 cm. **d)** 22 cm. **e)** 18 cm.

5. (UFRGS-RS) Um tanque no formato de um cilindro circular reto, cujo raio da base mede 2 m, tem o nível da água aumentado de 25 cm após uma forte chuva. Essa quantidade de água corresponde a 5% do volume total de água que cabe no tanque. alternativa **c**

Assinale a alternativa que melhor aproxima o volume total de água que cabe no taque, em m³.

a) 57 **b)** 60 **c)** 63 **d)** 66 **e)** 69

6. (UFPA) Num cone reto, a altura é 3 m e o diâmetro da base é 8 m. Então, a área total, em metros quadrados, vale: alternativa **b**

a) 52π **b)** 36π **c)** 20π **d)** 16π **e)** 12π

7. (AFA-SP) Um cone de revolução possui volume igual a 128π cm³. Em sua base inscreve-se um hexágono regular de lado 8 cm.

Considere um cilindro que tenha o mesmo volume e a mesma área da base do cone descrito anteriormente.

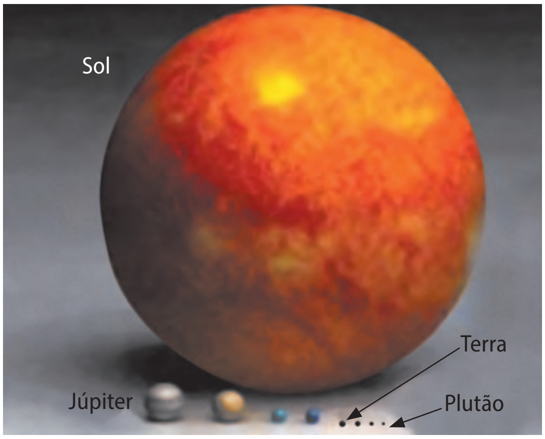
A razão entre a altura do cone e a altura do cilindro, nessa ordem, ambas na mesma unidade de medida, é igual a alternativa **d**

a) $\frac{1}{3}$ **c)** 1

b) $\frac{2}{3}$ **d)** 3

8. (Ficsae-SP) Em uma palestra, um cientista ilustrou comparativamente o tamanho dos planetas do sistema solar com auxílio da foto a seguir.

FICSAE, 2019



(www.colegioweb.com.br)

No entanto, o cientista disse que essa foto dificulta a percepção correta da diferença de tamanho entre os planetas. Para ilustrar o que dizia, ele pediu para a plateia considerar que todos os planetas são esféricos e que o tamanho do raio do planeta Júpiter é 11 vezes o tamanho do raio do planeta Terra. Em seguida, lançou a seguinte pergunta: se associarmos o planeta Terra a uma bola de futebol, o planeta Júpiter deverá ser associado, aproximadamente, a quantas dessas bolas?

A resposta correta para a pergunta do palestrante é alternativa **e**

a) 2 048. **c)** 33. **e)** 1 331.

b) 121. **d)** 22.

9. (Uneb-BA) Considere-se que

- cápsulas, de formato cilíndrico e extremidades hemisféricas, contêm determinado medicamento em microesferas de 1,0 mm de diâmetro;
- o comprimento total de cada cápsula mede 15 mm, e o diâmetro de cada hemisfera mede 6 mm.

É correto afirmar que o número máximo de microesferas que cabem no interior de cada cápsula, admitindo-se desprezíveis os espaços entre elas, é alternativa **03**

01) 500 **04)** 765

02) 681 **05)** 804

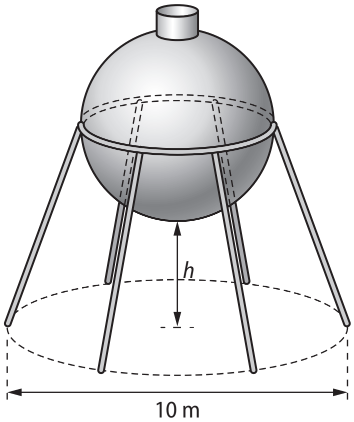
03) 702

10. (UFRGS-RS) Fundindo três esferas idênticas e maciças de diâmetros 2 cm, obtém-se uma única esfera maciça de raio alternativa **a**

a) $\sqrt[3]{3}$. **c)** $\sqrt[2]{6}$. **e)** 6.

b) $\sqrt[2]{4}$. **d)** 3.

11. (ESPM-SP) Um reservatório de água é constituído por uma esfera metálica oca de 4 m de diâmetro, sustentada por colunas metálicas inclinadas de 60° com o plano horizontal e soldadas à esfera ao longo do seu círculo equatorial, como mostra o esquema abaixo.



EDITORIA DE ARTE

Sendo $\sqrt{3} = 1{,}73$, a altura h da esfera em relação ao solo é aproximadamente igual a:

a) 2,40 m **d)** 3,40 m

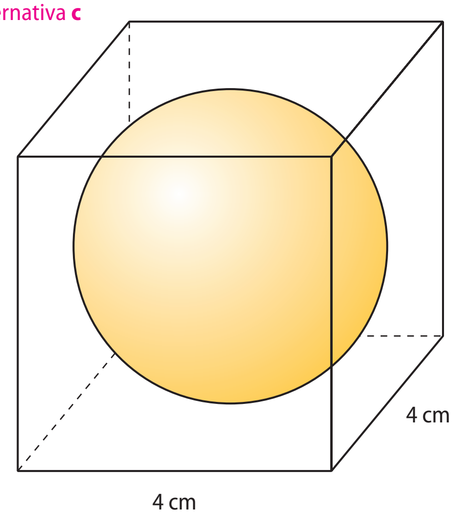
b) 2,80 m **e)** 3,60 m

c) 3,20 m

alternativa **c**

12. A figura mostra uma esfera inscrita em um cubo de aresta 4 cm (note que o plano de cada face do cubo é tangente à esfera). Calcule a área total da superfície esférica.

alternativa **c**



EDITORIA DE ARTE

a) 4π cm²

b) 8π cm²

c) 16π cm²

d) 32π cm²

e) π cm²

13. (Unisc-RS) Analise as afirmativas a seguir.

I. Cilíndrica, Cônica e Plana são as três principais classificações das projeções cartográficas.

II. Nas Projeções Cartográficas Equivalentes, busca-se manter a proporcionalidade das áreas apresentadas e, principalmente, a exatidão dos ângulos e das formas como ocorre, por exemplo, na Projeção de Peters.

III. Uma das mais conhecidas Projeções Cartográficas Conformes é a de Mercator. Nesse caso, as áreas de latitudes altas apresentam menos distorções em relação às de latitudes baixas.

Assinale a alternativa correta. alternativa **a**

a) Somente a afirmativa I está correta.

b) Somente a afirmativa II está correta.

c) Somente as afirmativas II e III estão corretas.

d) Somente as afirmativas I e III estão corretas.

e) Nenhuma das alternativas está correta.

PARA REFLETIR

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Neste Capítulo, estudamos os corpos redondos (cilindros, cones e esferas), com destaque para o cálculo de suas áreas e volumes. Entendemos a impossibilidade de se planificar a superfície de uma esfera e, com base nisso, estudamos as projeções cartográficas, considerando o planeta Terra uma esfera.

Nas páginas de abertura, foram abordados os formatos dos silos como modelos concretos de corpos redondos.

Vamos refletir a respeito das aprendizagens do Capítulo **3**: Respostas pessoais.

- Você já conhecia o cilindro, o cone e a esfera?
- Para os cálculos das áreas de cilindros e cones, precisamos calcular a área de círculos. Você lembrava como se faz esse cálculo?
- Você conhecia as cisternas, usadas para a captação da água das chuvas?
- Com relação às projeções cartográficas, destaque uma vantagem da projeção de Mercator e uma vantagem da projeção de Peters.

CAPÍTULO 4

ANÁLISE COMBINATÓRIA

Em 1961, foi publicado o livro **Cent mille milliards de poèmes** (Cem mil bilhões de poemas), do escritor francês Raymond Queneau (1903-1976), que encantou os amantes de poesia e da Matemática. A obra rompeu com a estrutura convencional dos livros e explorou a criatividade do leitor, por meio de uma experiência interativa com os versos.

Esse livro contém dez sonetos impressos na frente de cada página. Como um soneto é um poema composto de 14 versos, as páginas são divididas em 14 tiras horizontais, permitindo que os versos de uma página sejam combinados com os de outras páginas. Essa ideia engenhosa no formato físico do livro deixa fluir a criatividade do leitor, que pode compor, com base nas possibilidades de combinações, 10^{14} sonetos distintos, todos com a mesma estrutura, ou, como sugere o título, "cem mil bilhões de poemas".

A ideia é possibilitar a criação de sonetos clássicos regulares (dois quartetos e dois tercetos) bem construídos, por meio de uma "máquina de produzir poemas".

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Ver as **Orientações para o professor**.

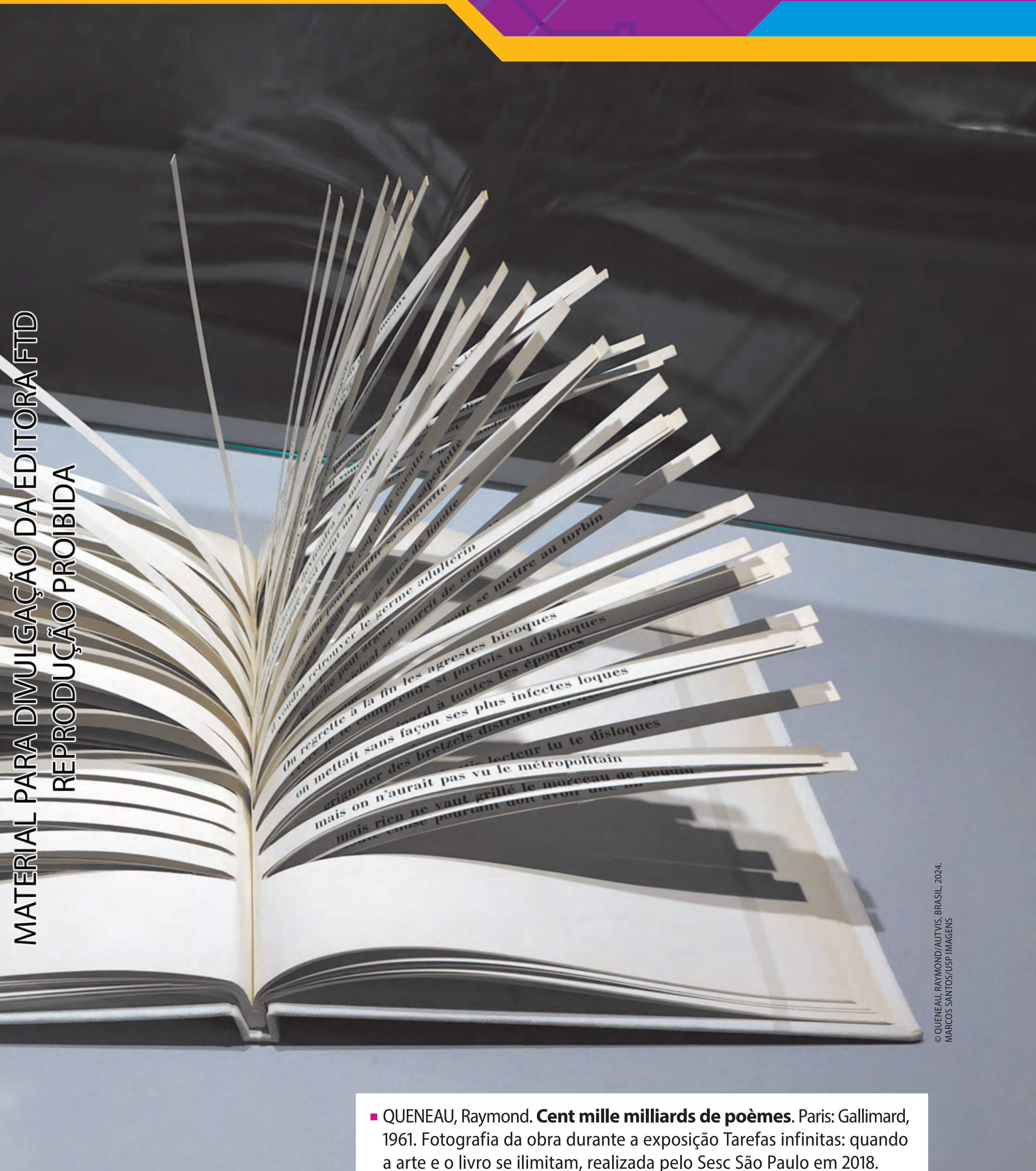
Agora, reúna-se a um colega, e façam o que se pede em cada questão.

1. Vocês gostam de poesia? Conversem sobre obras e autores que escrevem esse tipo de texto.

2. De acordo com o texto e a imagem apresentados, qual foi a inovação do livro **Cem mil bilhões de poemas**?

3. Inspirando-se em Raymond Queneau, criem um livro interativo. Separem três folhas de papel sulfite e criem, em cada uma, uma estrofe com quatro versos, de modo que as rimas sejam alternadas (a primeira com a terceira e a segunda com a quarta). Em seguida, colem ou grampeiem as folhas na margem esquerda e recortem os versos em tiras, da mesma maneira apresentada no livro de Queneau.

4. Com base no livro confeccionado na atividade anterior, qual é a quantidade de combinações possíveis para criar uma estrofe com quatro versos? Como vocês calcularam essa quantidade?



- QUENEAU, Raymond. **Cent mille milliards de poèmes**. Paris: Gallimard, 1961. Fotografia da obra durante a exposição Tarefas infinitas: quando a arte e o livro se ilimitam, realizada pelo Sesc São Paulo em 2018.

Introdução

Diariamente, inserimos em nossos computadores, *smartphones* ou *tablets* uma série de dados pessoais protegidos por senhas. Uma senha pode conter letras, maiúsculas ou minúsculas, números e símbolos. Dependendo da quantidade de caracteres utilizados, o número de possibilidades de senhas diferentes pode ser da ordem dos milhões; por exemplo: existem 11 881 376 senhas diferentes compostas de exatamente cinco letras minúsculas do nosso alfabeto.

Quantificar o número de possibilidades de senhas é um assunto da Combinatória, área da Matemática que analisa e estuda problemas de contagem de possibilidades, além de outros conteúdos. Neste Capítulo, vamos estudar e conhecer algumas técnicas de contagem de possibilidades da Combinatória, como o princípio multiplicativo, a permutação, o arranjo simples e a combinação simples.

Princípio multiplicativo

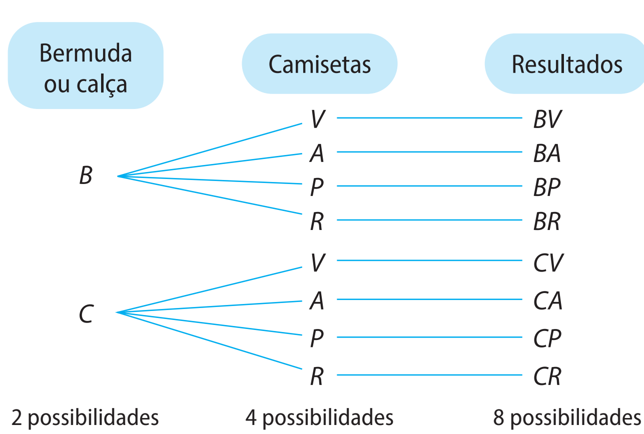
Antes de apresentarmos a definição do princípio multiplicativo, vamos analisar dois problemas.

Problema 1: De quantos modos distintos Adelaide pode vestir o manequim de sua loja, sabendo-se que ela separou, para a realização dessa tarefa, uma calça, uma bermuda e quatro camisetas?

Todas as possibilidades de vestir esse manequim estão representadas no diagrama a seguir, denominado **árvore de possibilidades** ou **diagrama de árvore**. Para isso, consideramos: as indicações bermuda (*B*) e calça (*C*); as quatro camisetas, nas cores verde (*V*), azul (*A*), preta (*P*) e rosa (*R*); e o resultado *BV*, por exemplo, que representa a composição do manequim com a bermuda e a camiseta verde.

GLAMOUR/SHUTTERSTOCK.COM

■ Possibilidades para vestir o manequim utilizando-se uma bermuda e quatro camisetas.



Pelo diagrama, há 8 possibilidades diferentes de se vestir o manequim. Outro modo de solucionar esse problema é efetuando a seguinte multiplicação:

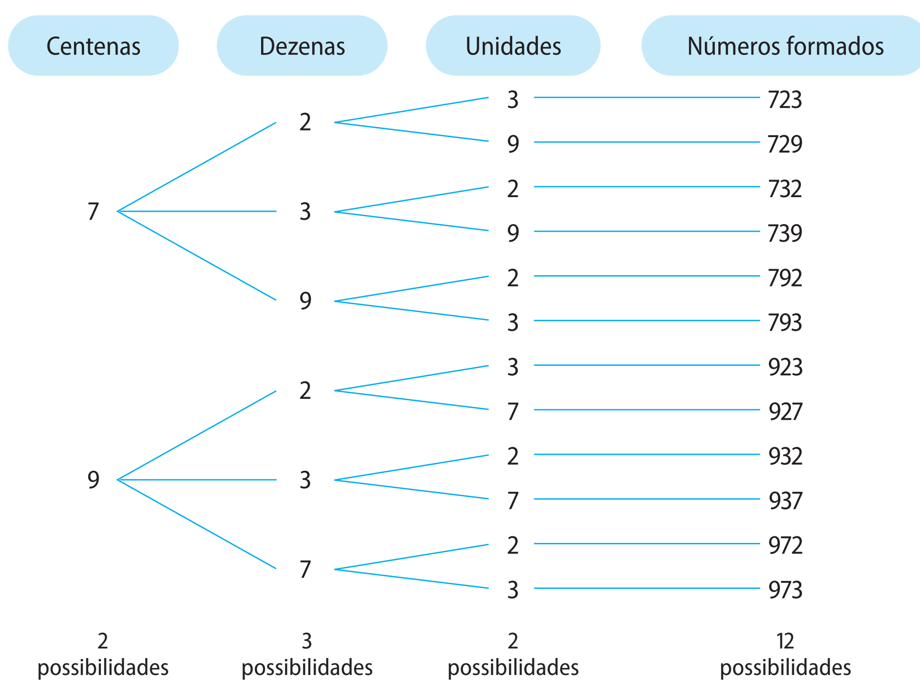
$$2 \cdot 4 = 8$$

Nessa multiplicação:

- o fator 2 é o número de possibilidades para vestir a parte de baixo do manequim (bermuda ou calça);
- o fator 4 é o número de possibilidades para vestir a parte de cima do manequim (camiseta).

Problema 2: Usando apenas os algarismos 2, 3, 7 e 9, sem repeti-los, quantos números naturais podemos formar de modo que sejam maiores do que 400 e menores do que 999?

O diagrama de árvore a seguir mostra todos os números que podemos formar respeitando as condições do problema.



Portanto, há 12 possibilidades de números naturais que podemos formar respeitando as condições impostas. Outro modo de solucionar esse problema é efetuando a seguinte multiplicação:

$$2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$$

Nessa multiplicação:

- o primeiro fator 2 é o número de possibilidades de algarismos para a centena (7 ou 9), uma vez que os números devem ser maiores do que 400;
- o fator 3 é o número de possibilidades para a dezena, pois, uma vez definido o algarismo da centena, ele não pode ser repetido na dezena;
- o último fator 2 é o número de possibilidades para a unidade, já que, uma vez definidos o algarismo da centena e o algarismo da dezena, nenhum deles pode ser repetido na unidade.

Os problemas anteriores exemplificam o **princípio multiplicativo**, também conhecido como **princípio fundamental da contagem**, que pode ser definido do seguinte modo:

Se um evento E pode ocorrer em k etapas sucessivas, de modo que:

- há p_1 possibilidades diferentes de ocorrer a primeira etapa;
- definida a primeira etapa, há p_2 possibilidades diferentes de ocorrer a segunda etapa;
- definida a segunda etapa, há p_3 possibilidades diferentes de ocorrer a terceira etapa;

⋮

- definida a penúltima etapa, há p_k possibilidades diferentes de ocorrer a última etapa;

então, o número de possibilidades diferentes de o evento E acontecer é:

$$p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_k$$

O princípio multiplicativo é uma das ferramentas básicas de contagem e é uma das mais utilizadas para solucionar problemas desse tipo. Para utilizá-lo, é necessário identificar o evento, estabelecer em quantas etapas ele pode acontecer e, para cada uma das etapas, quantificar suas possibilidades de ocorrência. Além disso, dependendo das condições impostas pelo problema, devemos adotar determinadas estratégias para a utilização desse princípio.

Observe, a seguir, cinco exemplos.

Exemplo 1: Uma pesquisa elaborou um questionário contendo 8 perguntas de múltipla escolha, com 4 alternativas cada uma. Se o entrevistado deve responder a todas as perguntas, escolhendo uma única alternativa, quantas respostas diferentes para esse questionário a pesquisa pode receber?

Identificar o evento, estabelecer em quantas etapas ele pode acontecer e quantificar as possibilidades de ocorrência de cada etapa é um processo de criatividade e imaginação.

Neste exemplo, imagine que você responderá às 8 perguntas desse questionário na ordem em que elas são apresentadas. Desse modo, temos o evento "responder ao questionário" sendo executado em 8 etapas, sendo que cada etapa é a seleção da resposta para uma pergunta. Além disso, como há 4 alternativas em cada pergunta, há 4 possibilidades em cada etapa.

BUMP23/SHUTTERSTOCK.COM

Imagem de um questionário com oito questões e quatro alternativas cada uma.

Assim, pelo princípio fundamental da contagem, a quantidade de respostas diferentes para esse questionário é dada pela multiplicação a seguir.

$$\underbrace{\overset{\text{número de possibilidades em cada etapa}}{4} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}_{\text{8 etapas}} = 65\,536$$

Portanto, a pesquisa pode receber 65 536 respostas diferentes para o questionário.

Exemplo 2: De quantos modos diferentes quatro pessoas podem se sentar em um banco de cinco lugares?

9AIR/SHUTTERSTOCK.COM

Banco com cinco lugares disponíveis.

Para determinar o evento desse exemplo, vamos imaginar que as quatro pessoas se sentam no banco uma após a outra, isto é, a primeira pessoa escolhe um lugar e se senta no banco; depois, a segunda pessoa faz o mesmo; em seguida, a terceira pessoa; e, por fim, a quarta pessoa. Desse modo, temos o evento "sentar-se em um banco de cinco lugares" sendo executado em 4 etapas. Além disso, há:

- 5 possibilidades diferentes de ocorrer a primeira etapa, pois havia inicialmente 5 lugares vazios no banco para a primeira pessoa escolher;
- 4 possibilidades de ocorrer a segunda etapa, pois sobraram 4 lugares vazios no banco para a segunda pessoa escolher, uma vez que a primeira pessoa já ocupou um lugar;
- 3 possibilidades de ocorrer a terceira etapa, pois sobraram 3 lugares vazios no banco após as duas primeiras pessoas ocuparem seus lugares;
- 2 possibilidades de ocorrer a quarta etapa, pois sobraram 2 lugares vazios no banco após as três primeiras pessoas ocuparem seus lugares.

Logo, a quantidade de modos diferentes como quatro pessoas podem se sentar em um banco de cinco lugares é expressa pela seguinte multiplicação:

$$\overbrace{\underbrace{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}_{\text{4 etapas}}}^{\text{número de possibilidades em cada etapa}} = 120$$

Portanto, existem 120 modos diferentes de as quatro pessoas se sentarem no banco.

Exemplo 3: Quantas senhas de quatro algarismos distintos podem ser criadas de modo que o número formado seja par?

Imagine que você tenha de criar uma senha com essas características. Nesse caso, o evento "criar uma senha" pode ocorrer em 4 etapas, sendo a primeira escolher o algarismo da unidade; a segunda escolher o algarismo da dezena; a terceira escolher o algarismo da centena; e a quarta escolher o algarismo da unidade de milhar.

Como a senha criada deve ser um número par, o número de possibilidades de ocorrer a primeira etapa – escolher o algarismo da unidade – é 5, uma vez que os únicos algarismos que podem ser escolhidos são 0, 2, 4, 6 e 8.

TKEMOT/SHUTTERSTOCK.COM

Uma das possibilidades de senha em um cadeado com senha de quatro dígitos.

Como existem, no total, 10 algarismos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9) e a senha deve conter quatro algarismos distintos, o número de possibilidades da segunda etapa é 9, pois, uma vez definido o algarismo da unidade, ele não pode ser utilizado novamente. Pelo mesmo raciocínio, o número de possibilidades da terceira etapa é 8, e o número de possibilidades da quarta etapa é 7, uma vez que os algarismos definidos nas etapas anteriores não podem ser utilizados novamente.

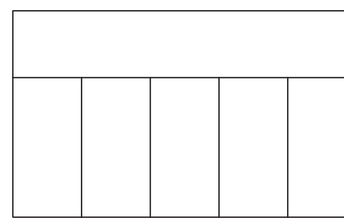
Assim, a quantidade de senhas com as características impostas pelo problema é dada pela multiplicação:

$$5 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 2520$$

Portanto, 2 520 senhas pares podem ser criadas com quatro algarismos distintos.

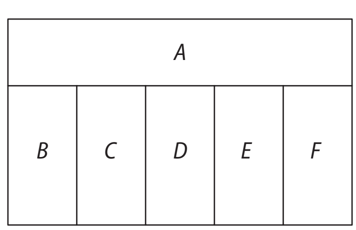
Note que, nesse exemplo, definimos como primeira etapa aquela em que havia a maior quantidade de restrições (a escolha do algarismo da unidade era mais restrita do que as escolhas dos demais algarismos). Essa é uma estratégia para a utilização do princípio multiplicativo: quantificar primeiro as possibilidades da etapa que contém o maior número de restrições.

Exemplo 4: Utilizando cinco cores diferentes, de quantas maneiras é possível colorir a figura de modo que as regiões adjacentes, que possuem um lado em comum, tenham cores distintas?



Observe, a seguir, uma das possibilidades de colorir a figura obedecendo às condições estabelecidas no enunciado.

Como a figura é composta de 6 regiões, uma horizontal (A) e cinco verticais (B, C, D, E e F), o evento "colorir a figura" pode ocorrer em 6 etapas, que recebem o mesmo nome da região a ser colorida, conforme indica o esquema a seguir.



ILUSTRAÇÕES: SERGIO LIMA

Iniciando a quantificação das possibilidades pela etapa A, obtemos:

- 5 possibilidades para a etapa A, pois há 5 opções de cores para pintar a região horizontal;
- 4 possibilidades para a etapa B, pois a cor definida para a região horizontal não pode mais ser utilizada;
- 3 possibilidades para a etapa C, pois a região C deve ter uma cor diferente das cores das regiões A e B;

- 3 possibilidades para a etapa *D*, pois a região *D* deve ter uma cor diferente das cores das regiões *A* e *C* (perceba que a região *D* pode ter a mesma cor da região *B*);
- 3 possibilidades para a etapa *E*, pois a região *E* deve ter uma cor diferente das cores das regiões *A* e *D*;
- 3 possibilidades para a etapa *F*, pois a região *F* deve ter uma cor diferente das cores das regiões *A* e *E*.

Logo, a multiplicação a seguir expressa o número de maneiras possíveis de colorir a figura.

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 1620$$

Portanto, a figura pode ser colorida de 1 620 maneiras diferentes.

Exemplo 5: Quantos números pares com três algarismos distintos podemos formar?

O evento "formar um número par com três algarismos" pode ocorrer em 3 etapas, sendo a primeira escolher o algarismo da centena; a segunda escolher o algarismo da dezena; e a terceira escolher o algarismo da unidade. Além de escolhermos algarismos distintos para cada etapa, na primeira não podemos escolher o 0 para a centena, pois, nesse caso, o número não teria três algarismos; já na última etapa, temos de escolher 0, 2, 4, 6 ou 8 como algarismo da unidade para formar um número par.

Começando pela última etapa, que tem o maior número de restrições, há 5 possibilidades para o algarismo da unidade; com isso, o número de possibilidades da centena depende do que foi definido para a unidade. Se foi escolhido o 0 para a unidade, há 9 possibilidades para a centena; caso contrário, há 8 possibilidades. Quando esse impasse acontece, é necessário dividir a ocorrência do evento em dois casos mutuamente excludentes, ou seja, se ocorrer um dos casos, o outro não ocorrerá. Acompanhe os casos a seguir.

- **Caso 1**: Quando o algarismo da unidade é 0.
  Nesse caso, há 1 possibilidade para o algarismo da unidade (o algarismo 0), 9 possibilidades para o algarismo da centena e 8 possibilidades para o algarismo da dezena, pois o número formado deve ter três algarismos distintos. Pelo princípio multiplicativo, a quantidade de números com três algarismos distintos que terminam em 0 é:
  $$9 \cdot 8 \cdot 1 = 72$$
- **Caso 2**: Quando o algarismo da unidade é 2, 4, 6 ou 8.
  Nesse caso, há 4 possibilidades para o algarismo da unidade (2, 4, 6 ou 8), 8 possibilidades para o algarismo da centena (não pode ser 0 nem ser igual ao algarismo da unidade) e 8 possibilidades para o algarismo da dezena (pode ser 0, mas não pode ser igual aos algarismos da unidade e da centena). Pelo princípio multiplicativo, a quantidade de números desse caso é:
  $$8 \cdot 8 \cdot 4 = 256$$

Como o número par ou termina em 0 ou termina em 2, 4, 6, ou 8, pelo **princípio aditivo** podemos adicionar as quantidades dos dois casos.

$$72 + 256 = 328$$

Portanto, podemos formar 328 números pares com três algarismos distintos.

Nesse exemplo, para a aplicação do princípio multiplicativo, utilizamos a estratégia de dividir o evento em dois casos mutuamente excludentes. Ao final, aplicamos o princípio aditivo de conjuntos disjuntos.

Saiba que...

Princípio aditivo
Se dois conjuntos *A* e *B* são finitos e disjuntos, ou seja, $A \cap B = \varnothing$, o número de elementos da união $A \cup B$ é dado por:
$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

Fatorial

Neste tópico, vamos apresentar o número fatorial. Ele será utilizado nas técnicas de contagem, permutação, arranjo simples e combinação simples. Acompanhe sua definição.

Sendo n um número natural, com $n \geqslant 2$, definimos o **fatorial de *n*** como o produto dos n números naturais consecutivos de 1 a n e o indicamos por $n!$ (lê-se: n fatorial ou fatorial de n).

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Definem-se também $1! = 1$ e $0! = 1$.

Por exemplo:

- $2! = 2 \cdot 1 = 2$
- $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
- $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
- $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

A partir da definição de fatorial, podemos escrever, para qualquer n natural maior do que ou igual a 2:

$$n! = n \cdot \underbrace{(n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{(n-1)!}$$

Portanto: $\boxed{n! = n \cdot (n - 1)!}$

Podemos escrever, por exemplo, $8! = 8 \cdot 7!$, pois:

$$8! = 8 \cdot \underbrace{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{7!} = 8 \cdot 7!$$

Saiba que...

As calculadoras científicas possuem uma tecla específica para o cálculo do fatorial, normalmente indicada por "x!".

ATIVIDADES RESOLVIDAS

1. Fernanda precisa organizar 15 livros, um do lado do outro, em uma prateleira. De quantas maneiras diferentes ela pode realizar essa tarefa?

Resolução

O evento "organizar 15 livros um do lado do outro" pode ocorrer em 15 etapas, sendo cada etapa a colocação de um livro na prateleira. A primeira etapa tem 15 possibilidades, pois Fernanda deve escolher um dos 15 livros para ser colocado primeiro na prateleira. A segunda etapa tem 14 possibilidades, uma vez que um livro já foi colocado. A terceira etapa tem 13 possibilidades, e assim por diante, até a décima quinta etapa, que é a colocação do último livro na prateleira. Desse modo, pelo princípio fundamental da contagem, o número de maneiras diferentes de organizar esses livros é:

$15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 15!$

Portanto, Fernanda pode organizar esses livros de 15! maneiras diferentes.

Dependendo da ordem de grandeza, é comum respostas de problemas de contagem serem expressas por números fatoriais, por exemplo: $15! = 1\,307\,674\,368\,000$

2. (Enem/MEC) Um modelo de telefone celular oferece a opção de desbloquear a tela usando um padrão de toques como senha.

ENEM, 2020

Os toques podem ser feitos livremente nas 4 regiões numeradas da tela, sendo que o usuário pode escolher entre 3, 4 ou 5 toques ao todo.

Qual expressão representa o número total de códigos existentes?

a) $4^5 - 4^4 - 4^3$
b) $4^5 + 4^4 + 4^3$
c) $4^5 \times 4^4 \times 4^3$
d) $(4!)^5$
e) 4^5

Resolução

Como a senha para desbloquear a tela do celular pode conter 3, 4 ou 5 toques, o evento "criar uma senha" para desbloquear a tela do celular pode ser dividido em três casos mutuamente excludentes.

Caso 1: A senha contém 3 toques.

Nesse caso, o evento pode ocorrer em 3 etapas, uma para cada toque, e há 4 possibilidades em cada etapa, pois a tela do celular apresenta 4 regiões numeradas de 1 a 4. Logo, pelo princípio multiplicativo, o número de senhas possíveis que contém 3 toques é expresso por:

$$4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$$

Caso 2: A senha contém 4 toques.

Nesse caso, o evento pode ocorrer em 4 etapas, uma para cada toque, e há 4 possibilidades em cada etapa. Logo, o número de senhas possíveis que contém 4 toques é expresso por:

$$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^4$$

Caso 3: A senha contém 5 toques.

Nesse caso, o evento pode ocorrer em 5 etapas, uma para cada toque, e há 4 possibilidades em cada etapa. Logo, o número de senhas possíveis que contém 5 toques é expresso por:

$$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^5$$

Como os casos 1, 2 e 3 constituem conjuntos disjuntos, isto é, eles não possuem elementos em comum, pelo princípio aditivo, o número total de códigos existentes é dado por:

$$4^3 + 4^4 + 4^5$$

Portanto, está correta a alternativa **b**.

3. Simplifique.

a) $\dfrac{21!}{19!}$

b) $\dfrac{10! + 8!}{8!}$

c) $\dfrac{n!}{(n-2)!}$

Resolução

a) $\dfrac{21!}{19!} = \dfrac{21 \cdot 20 \cdot 19!}{19!} = 420$

b) $\dfrac{10! + 8!}{8!} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8! + 8!}{8!} =$

$= \dfrac{8!(10 \cdot 9 + 1)}{8!} = 91$

c) $\dfrac{n!}{(n-2)!} = \dfrac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{(n-2)!} =$

$= n^2 - n$

4. Determine o conjunto solução da equação $(n - 4)! = 120$.

Resolução

$(n - 4)! = 120 \Rightarrow (n - 4)! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (n - 4)! = 5!$

Pela igualdade entre números fatoriais, obtemos:

$(n - 4)! = 5! \Rightarrow n - 4 = 5 \Rightarrow n = 9$

Portanto, o conjunto solução da equação é $S = \{9\}$.

ATIVIDADES

1. a) As possibilidades de caminho são $(x, 1)$, $(x, 2)$, $(y, 1)$, $(y, 2)$, $(z, 1)$ e $(z, 2)$.

1. Catarina e Virgínia combinaram ir juntas a um *show*. Catarina mora na rua *A* e vai buscar a amiga Virgínia, que mora na rua *B*. De lá, seguirão para o endereço onde ocorrerá o *show*, na rua *C*. Para Catarina chegar à casa de Virgínia, ela tem três caminhos diferentes (x, y ou z). Já para ir da casa de Virgínia ao *show*, elas têm duas opções diferentes (caminho 1 ou caminho 2).

a) Quais são os caminhos que Catarina pode percorrer para ir ao *show*, saindo de sua casa e passando pela casa de Virgínia?

b) Como você calcularia o total de opções de caminho listadas no item **a** aplicando o princípio multiplicativo? $3 \cdot 2 = 6$

c) Desenhe o diagrama de árvore dos possíveis caminhos que Catarina pode percorrer para ir ao *show*, passando pela casa de Virgínia. Ver as **Orientações para o professor**.

2. Uma moeda tem duas faces: cara (K) e coroa (C). Lança-se essa moeda três vezes seguidas e observa-se qual das faces fica voltada para cima.

a) Represente, em um diagrama de árvore, todos os resultados possíveis desse experimento. Ver as **Orientações para o Professor**.

b) Pelo princípio fundamental da contagem, escreva a multiplicação que expressa a quantidade de resultados possíveis desse experimento. $2 \cdot 2 \cdot 2$

3. No cardápio de café da manhã de uma lanchonete, há quatro sabores de suco, três opções de lanche e dois tipos de fruta. Pagando um valor fixo, o cliente pode escolher um suco, um lanche e uma fruta. De quantas maneiras diferentes é possível compor um café da manhã nessa lanchonete? 24 maneiras

4. (UECE) Uma prova do exame válido para seleção de vagas visando ao ingresso em Instituições de Ensino Superior é elaborada da seguinte forma:

I. 40 questões são formuladas no formato objetivo, com alternativas de respostas ou conclusões das quais apenas uma é correta.

II. Cada questão disponibiliza 5 alternativas para identificação, pelo candidato, daquela que é a única correta.

Assim, é correto concluir-se que o número de gabaritos que podem ser construídos para essa prova é alternativa **a**

a) 5^{40}.

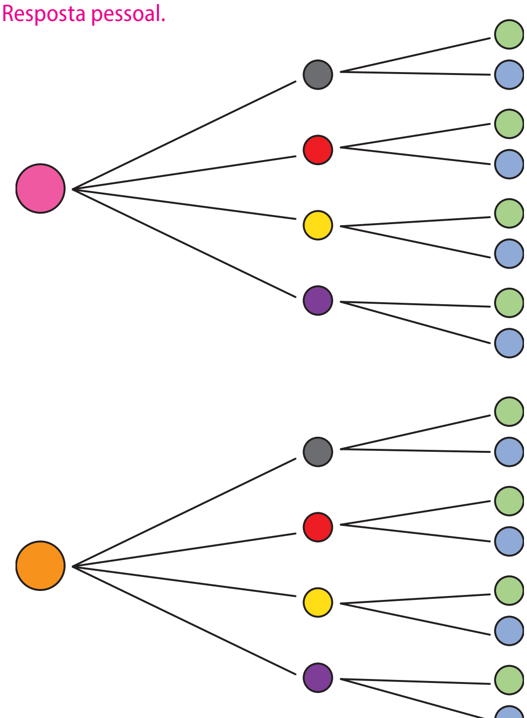
b) 40^{5}.

c) $5 \cdot (60!)$.

d) $60 \cdot (5!)$.

5. Escreva uma situação-problema de Combinatória cuja resolução possa ser expressa pelo diagrama de possibilidades a seguir.

Resposta pessoal.

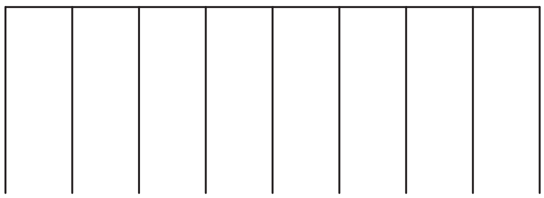


EDITORIA DE ARTE

6. Oito cavalos disputam uma corrida. Quantas são as possibilidades de chegada para os 3 primeiros lugares? 336 possibilidades

7. Em uma sala de espera, há seis cadeiras dispostas lado a lado. De quantos modos distintos quatro pessoas podem ocupar esses lugares? 360 modos

8. A figura ilustra oito vagas vazias de um estacionamento. De quantas maneiras diferentes quatro carros podem ocupar quatro dessas vagas? 1 680 maneiras



9. (UFAL) Quantos números inteiros positivos divisíveis por 5, de 4 algarismos distintos, podem ser escritos com os algarismos 1, 3, 5, 7, 9? 24 números

10. (UFG-GO) Utilizando as notas dó, ré, mi, fá, sol, lá e si, um músico deseja compor uma melodia com 4 notas, de modo que tenha notas consecutivas distintas. Por exemplo: {dó, ré, dó, mi} e {si, ré, mi, fá} são melodias permitidas, enquanto que {ré, ré, dó, mi} não, pois possui duas notas ré consecutivas.

a) Escreva cinco melodias diferentes, de acordo com o critério dado. Ver as **Orientações para o professor**.

b) Qual o número de melodias que podem ser compostas nessas condições? 1 512 melodias

11. Determine a quantidade de números:

a) com quatro algarismos. 9 000 números

b) com quatro algarismos distintos. 4 536 números

c) divisíveis por 5, com quatro algarismos distintos. 952 números

12. (UEG-GO) Maria tem 5 saias, sendo uma de cada cor: azul, vermelha, branca, preta e lilás. Ela possui ainda 4 blusas: azul, rosa, marfim e preta. De quantas formas diferentes ela poderá se vestir de modo a não usar saia e blusa da mesma cor? alternativa **c**

a) 10
b) 09
c) 18
d) 12
e) 16

13. Calcule.

a) $6!$ 720

b) $10!$ 3 628 800

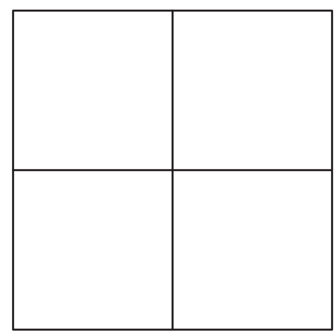
c) $\dfrac{8!}{5!}$ 336

d) $\dfrac{17!}{15!}$ 272

e) $\dfrac{6! + 3! - 2!}{5!}$ $\dfrac{181}{30}$

f) $\dfrac{4! - 2! - 0!}{1!}$ 21

14. Flávia tem seis lápis de cores diferentes. De quantas maneiras distintas ela pode colorir a figura a seguir de modo que os quadrados com um lado em comum não tenham cores iguais? 630 maneiras



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

15. Simplifique as expressões:

a) $\dfrac{n!}{(n-1)!}$ n

b) $\dfrac{(3n)! + (3n-1)!}{(3n+1)!}$ $\dfrac{1}{3n}$

16. Resolva as equações:

a) $(n-2)! = 720$ $S = \{8\}$

b) $(n-2)! = 2(n-4)!$ $S = \{4\}$

17. (Ufop-MG) Resolva a equação

$$\frac{n!}{(n-2)!} + \frac{(n+1)!}{(n-1!)!} = 6n - 4$$ $S = \{2\}$

18. Para proteger seus dados em um aplicativo bancário no celular, Flávia criou uma senha com seis caracteres diferentes. Ela escolheu vogais minúsculas para os três primeiros caracteres e algarismos para os três últimos. Quantas senhas distintas podem ser criadas com essas características? 43 200 senhas

FÓRUM

Segurança digital: o papel fundamental das senhas

Desde a era dos primeiros computadores até a atualidade, as senhas têm sido a primeira linha de defesa contra invasores cibernéticos interessados em acessar informações confidenciais. A importância de criar senhas seguras não pode ser subestimada. Uma senha robusta, que combina letras maiúsculas e minúsculas, números e caracteres especiais, funciona como uma fortaleza digital, o que dificulta tentativas de invasão.

Contudo, a segurança digital vai além da criação de senhas complexas. Muitos *sites* e aplicativos têm adotado medidas adicionais para garantir a proteção dos dados de seus usuários. A autenticação em duas etapas, por exemplo, adiciona uma camada extra de segurança, exigindo um segundo método de verificação, como um código enviado por mensagem de texto ou gerado por um aplicativo específico. Essa abordagem reduz significativamente o risco de acesso não autorizado, mesmo se a senha principal for comprometida.

Outra medida de proteção adicional é o uso de tecnologias biométricas, como impressão digital ou reconhecimento facial. Portanto, é essencial que os usuários verifiquem quais medidas estão disponíveis em cada caso e as utilizem de forma eficaz. Ao adotar essas práticas de segurança digital, o usuário aumentará a garantia da integridade dos seus dados.

PEOPLEIMAGES.COM - YURI A/SHUTTERSTOCK.COM

As senhas ajudam a garantir a privacidade e a segurança no uso de dispositivos eletrônicos.

Com base na leitura do texto, reúna-se a um colega, e façam o que se pede.

- Discutam outras estratégias que possam aumentar a segurança digital e comentem os riscos que uma pessoa corre ao ter seus dados violados. Ver as **Orientações para o professor**.

Permutação simples

Alguns problemas de Combinatória que aparecem com muita frequência consistem em determinar a quantidade de sequências (ou filas) que é possível formar com n objetos distintos apenas trocando-os de lugar. Acompanhe o exemplo.

Saiba que...

Permutar é sinônimo de trocar.

Quatro atletas, A, B, C e D, disputam uma corrida feminina de 100 m rasos. De quantas maneiras pode ocorrer a ordem de chegada dessa corrida, sabendo-se que não há empates em nenhuma das posições?

MIKE POWELL/STOCKBYTE/GETTY IMAGES

▪ A quantidade de maneiras como os competidores podem chegar ao final de uma corrida é determinada por uma permutação simples.

A resolução desse problema pelo princípio fundamental da contagem é dada pela multiplicação:

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Note que, nessa multiplicação, os fatores 4, 3, 2 e 1 correspondem, respectivamente, ao número de possibilidades de se definirem, nesta ordem, o 1º, o 2º, o 3º e o 4º lugares. Observe que essa resolução também pode ser representada pelo seguinte número fatorial:

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

As 24 ordens possíveis de chegada dessas quatro atletas estão representadas no quadro a seguir, e cada uma delas é chamada de permutação simples das atletas A, B, C e D.

ABCD	*ACDB*	*BACD*	*BCDA*	*CABD*	*CBDA*	*DABC*	*DBCA*
ABDC	*ADBC*	*BADC*	*BDAC*	*CADB*	*CDAB*	*DACB*	*DCAB*
ACBD	*ADCB*	*BCAD*	*BDCA*	*CBAD*	*CDBA*	*DBAC*	*DCBA*

Seja E um conjunto com n elementos distintos, com $n \in \mathbb{N}^*$. Cada sequência diferente dos n elementos de E é denominada **permutação simples**, e o número de permutações simples dos n elementos é indicado por P_n, em que:

$$P_n = n!$$

Observe a seguir outros exemplos em que a permutação simples é empregada.

a) As sequências (1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) e (3, 2, 1) são as permutações simples do conjunto {1, 2, 3}. Note que o número de permutações desse conjunto é:

$$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

b) De quantas maneiras é possível dispor 10 livros distintos, lado a lado, em uma prateleira? Cada sequência diferente em que os livros são colocados na prateleira é uma permutação simples desses 10 livros. Logo, o número de maneiras de dispor esses livros é:

$$P_{10} = 10! = 3\,628\,800$$

» Permutação com repetição

Um anagrama é formado pela troca de posição das letras de uma palavra, podendo ou não ter significado na língua de origem. Por exemplo, os anagramas da palavra CABO são:

CABO	CBOA	ACBO	ABOC	BCAO	BAOC	OCAB	OABC
CAOB	COAB	ACOB	AOCB	BCOA	BOCA	OCBA	OBCA
CBAO	COBA	ABCO	AOBC	BACO	BOAC	OACB	OBAC

Cada anagrama da palavra CABO é uma permutação simples das letras C, A, B e O. Logo, o número de anagramas dessa palavra é dado por:

$$P_4 = 4! = 24$$

Considere, agora, os anagramas da palavra PIPA, que contém 4 letras – a mesma quantidade da palavra CABO. Como a letra P se repete na palavra, quando trocamos um P pelo outro, obtemos o mesmo anagrama, e não um diferente. Com isso, o número de permutações simples $P_4 = 4!$ conta cada anagrama 2 vezes, uma vez que há 2! maneiras de trocar as letras P entre si. Desse modo, o número de anagramas da palavra PIPA é obtido pela seguinte divisão:

$$\frac{4!}{2!} = \frac{24}{2} = 12$$

Os 12 anagramas da palavra PIPA são:

PIPA	PPIA	PAPI	IPPA	IAPP	APPI
PIAP	PPAI	PAIP	IPAP	APIP	AIPP

De forma análoga, o número de anagramas da palavra ABACATE, que tem 7 letras, sendo uma delas (a letra A) repetida três vezes, é dado pela divisão a seguir.

$$\frac{7!}{3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 840$$

Isso ocorre porque o número de permutações simples, 7!, conta o mesmo anagrama 3! vezes, uma vez que há 3! maneiras de trocar as letras A entre si.

Para solucionar problemas de permutações com repetição, podemos utilizar a seguinte fórmula:

O número de permutações de n elementos, com $n \in \mathbb{N}^*$, em que um dos elementos se repete α vezes, outro se repete β vezes, e assim por diante, até o último elemento, que se repete γ vezes, é dado por:

$$P_n^{\alpha,\beta,\ldots,\gamma} = \frac{n!}{\alpha! \cdot \beta! \cdot \ldots \cdot \gamma!}$$

Vamos agora considerar mais um exemplo: quantos anagramas tem a palavra RIGOROSO?

Essa palavra tem 8 letras, com a letra R se repetindo 2 vezes, e a letra O se repetindo 3 vezes. Assim, o número de permutações das suas letras é:

$$P_8^{2,3} = \frac{8!}{2! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 1 \cdot 3!} = 3\,360$$

Portanto, a palavra RIGOROSO tem 3 360 anagramas.

ATIVIDADES RESOLVIDAS

5. Quantos números de cinco algarismos distintos podem ser formados usando-se os algarismos 1, 3, 5, 7 e 8?

Resolução

Podemos solucionar esse exercício de dois modos.

1º modo: Qualquer um dos cinco algarismos dados pode ocupar a ordem das dezenas de milhar, restando, então, quatro algarismos para a unidade de milhar, três para a centena, dois para a dezena e, finalmente, um para a unidade. Então, pelo princípio multiplicativo, temos:

$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

2º modo: Observe que cada permutação simples dos algarismos 1, 3, 5, 7 e 8 gera um número diferente. O número de permutações simples de 5 elementos é:

$P_5 = 5! = 120$

Portanto, podemos formar 120 números.

6. Considere os anagramas da palavra LIVRO.

a) Quantos deles começam com L e terminam com O?

b) Quantos começam com I ou terminam com V?

Resolução

a) Os anagramas que se iniciam com a letra L e têm a letra O no final são do tipo:

$$\text{L}\underbrace{\_\ \_\ \_}_{\text{3 letras}}\text{O}$$

Fixadas essas duas letras, observe que cada permutação simples das outras 3 letras gera um anagrama diferente. Determinando P_3, temos:

$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Portanto, há 6 anagramas que começam com L e terminam com O.

b) Considere:

- x o número de anagramas que começam com I;
- y o número de anagramas que terminam com V;
- z o número de anagramas que começam com I e terminam com V.

Desse modo, o número de anagramas que começam com I ou terminam com V é expresso por: $x + y - z$

Note que é necessário subtrair z, pois os anagramas que começam com I e terminam com V, por exemplo **I**LRO**V**, são quantificados tanto pelo número x quanto pelo número y; consequentemente, a adição $x + y$ conta duas vezes esses anagramas.

Vamos calcular cada um desses números.

- Anagramas que começam com I:

$$I\underbrace{\_\ \_\ \_\ \_}_{\text{4 letras}}$$

$x = P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

- Anagramas que terminam com V:

$$\underbrace{\_\ \_\ \_\ \_}_{\text{4 letras}}V$$

$y = P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

- Anagramas que começam com I e terminam com V:

$$I\underbrace{\_\ \_\ \_}_{\text{3 letras}}V$$

$z = P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

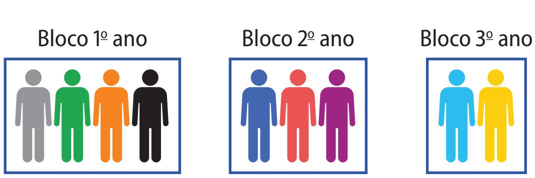
- Anagramas que começam com I ou terminam com V:
  $x + y - z = 24 + 24 - 6 = 42$

Portanto, 42 anagramas de LIVRO começam com I ou terminam com V.

7. Nove estudantes do Ensino Médio de uma escola, sendo quatro do 1º ano, três do 2º e dois do 3º, farão uma apresentação musical. De quantas maneiras eles podem se posicionar lado a lado para essa apresentação, de modo que os estudantes do mesmo ano permaneçam juntos?

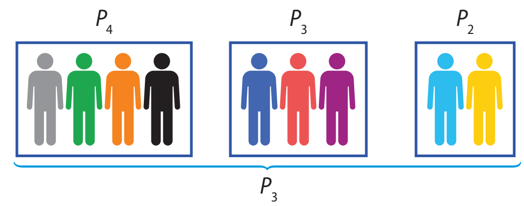
Resolução

Decidir a posição desses nove estudantes pode ocorrer em quatro etapas. A primeira é definir a posição em que os 4 estudantes do 1º ano estarão juntos, formando um bloco do 1º ano. A segunda é definir a posição em que os 3 estudantes do 2º ano estarão juntos, formando um bloco do 2º ano. A terceira é definir a posição em que os 2 estudantes do 3º ano estarão juntos, formando um bloco do 3º ano. Por fim, definir a posição desses três blocos lado a lado.



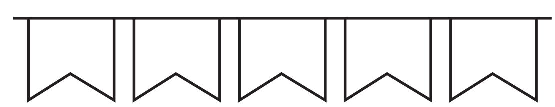
- O número de possibilidades da 1ª etapa é P_4, pois há 4 estudantes do 1º ano.
- O número de possibilidades da 2ª etapa é P_3.
- O número de possibilidades da 3ª etapa é P_2.

Como se trata de três blocos, o número de possibilidades de dispor lado a lado esses blocos é P_3.



Pelo princípio multiplicativo, temos:
$P_4 \cdot P_3 \cdot P_2 \cdot P_3 = 4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 3! =$
$= 24 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 6 = 1728$
Portanto, há 1728 maneiras de os estudantes se posicionarem lado a lado de modo que os estudantes do mesmo ano permaneçam juntos.

8. De quantas maneiras diferentes é possível colorir as cinco bandeirinhas ilustradas a seguir de modo que quaisquer duas delas tenham a cor azul e as demais tenham as cores verde, amarelo e vermelho?



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Resolução

Considere que as letras *Z*, *D*, *A* e *V* representam as cores:

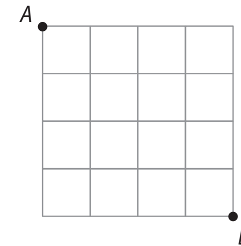
- azul (*Z*)
- verde (*D*)
- amarelo (*A*)
- vermelho (*V*).

Com isso, podemos indicar a forma como as bandeirinhas poderão ser pintadas por anagramas compostos pelas letras *Z*, *Z*, *D*, *A* e *V*. Por exemplo, o anagrama *DVZAZ* indica que as cinco bandeirinhas serão pintadas, da esquerda para a direita, nas cores verde (*D*), vermelho (*V*), azul (*Z*), amarelo (*A*) e azul (*Z*). Determinando o número de permutações dessas 5 letras, em que a letra *Z* se repete 2 vezes, temos:

$$P_5^2 = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 60$$

Logo, há 60 maneiras diferentes de colorir essas bandeirinhas.

9. Uma formiga, inicialmente no vértice *A*, anda sobre as linhas do quadriculado da figura, sempre para a direita ou para baixo, até chegar ao vértice *B*. De quantas maneiras diferentes ela pode fazer esse percurso?

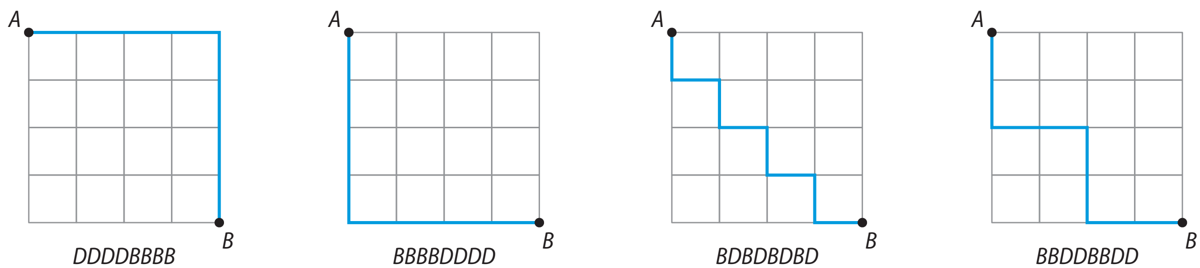


EDITORIA DE ARTE

Resolução

Vamos indicar o deslocamento da formiga entre dois vértices consecutivos pela letra *D*, se ela for para a direita, e pela letra *B*, se ela for para baixo.

Alguns caminhos possíveis são: *DDDDBBBB*, *BBBBDDDD*, *BDBDBDBD* e *BBDDBBDD*.



ILUSTRAÇÕES: SERGIO LIMA

Observe que, para ir do ponto *A* ao ponto *B*, independentemente do caminho escolhido, a formiga sempre fará 4 deslocamentos entre dois vértices consecutivos para a direita (*DDDD*) e 4 deslocamentos entre dois vértices consecutivos para baixo (*BBBB*). Desse modo, cada anagrama formado pelas letras *D*, *D*, *D*, *D*, *B*, *B*, *B* e *B* representa um percurso diferente que a formiga pode fazer.

Calculando o número de permutações dessas 8 letras, em que há 4 repetições da letra *D* e 4 da letra *B*, temos:

$$P_8^{4,4} = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4!} = 70$$

Logo, a formiga pode fazer esse percurso de 70 maneiras diferentes.

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

19. Escreva os seis anagramas da palavra PAZ. PAZ, PZA, APZ, AZP, ZPA e ZAP

20. (UFSM-RS) Para cuidar da saúde, muitas pessoas buscam atendimento em cidades maiores, onde há centros médicos especializados e hospitais mais equipados. Muitas vezes, o transporte até essas cidades é feito por *vans* disponibilizadas pelas prefeituras.

Em uma *van* com 10 assentos, viajarão 9 passageiros e o motorista. De quantos modos distintos os 9 passageiros podem ocupar suas poltronas na *van*? alternativa **d**

a) 4 032.
b) 36 288.
c) 40 320.
d) 362 880.
e) 403 200.

21. Quantos anagramas da palavra EDITORA:

a) começam com A? 720 anagramas

b) começam com A e terminam com E? 120 anagramas

22. Considere a palavra FELINO.

a) Quantos são os anagramas dessa palavra? 720

b) Quantos começam com N? 120

c) Quantos terminam com vogal? 360

d) Quantos apresentam as letras E, L e I juntas e nessa ordem? 24

e) Quantos apresentam as letras E, L e I juntas e em qualquer ordem? 144

23. (UFMG) Permutando-se os algarismos do número 123 456, formam-se números de seis algarismos.
Supondo-se que todos os números formados com esses seis algarismos tenham sido colocados numa lista em ordem crescente,

a) DETERMINE quantos números possui essa lista. 720

b) DETERMINE a posição do primeiro número que começa com o algarismo 4. 361

c) DETERMINE a posição do primeiro número que termina com o algarismo 2. 34

24. Um estudante ganhou quatro livros diferentes de Matemática, três livros diferentes de Física e dois livros diferentes de Química. De quantos modos distintos esses livros podem ser enfileirados em uma prateleira de uma estante mantendo-se juntos os da mesma disciplina? 1 728 modos

25. Escreva os dez anagramas da palavra ARARA. AAARR, AARAR, AARRA, ARARA, ARAAR, ARRAA, RRAAA, RARAA, RAARA e RAAAR

26. Quantos anagramas tem cada palavra a seguir?

a) PATA 12

b) PARALELOGRAMO 129 729 600

c) GUANABARA 15 120

27. Determine a quantidade de números distintos obtidos pela permutação dos algarismos dos números:

a) 73 431 60

b) 343 434 20

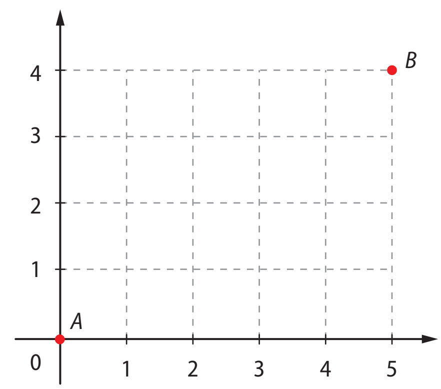
28. Alfredo, Armando, Ricardo, Renato e Ernesto querem criar uma sigla com cinco símbolos, sendo cada símbolo a primeira letra de seus nomes. Qual é o número total de siglas possíveis de se formar? 30

29. Uma cesta contém dez frutas: seis maçãs e quatro peras. Ana quer retirar, uma a uma, as dez frutas dessa cesta. De quantas maneiras ela poderá retirá-las? 210 maneiras

30. Quantos anagramas tem a palavra ARAPONGA com a letra P ocupando o último lugar? 840 anagramas

31. (UFSC) Calcule o número de anagramas da palavra CLARA em que as letras AR aparecem juntas e nessa ordem. 24 anagramas

32. Na figura a seguir, deslocando-se uma unidade de cada vez, para cima ou para a direita, quantos caminhos diferentes podem ser feitos de *A* até *B*? 126 caminhos



EDITORIA DE ARTE

33. (Unifimes-MG) Cinco amigos compraram ingressos para uma peça de teatro, de modo que as poltronas ficavam na mesma fileira, uma ao lado da outra. Sabendo que no dia da peça um dos amigos não pôde comparecer, e que as poltronas do teatro são numeradas, o número de maneiras distintas dos quatro amigos que foram ao teatro se sentarem nessas poltronas era alternativa **e**

a) 30.

b) 60.

c) 20.

d) 5.

e) 120.

34. Para uma apresentação de dança, oito dançarinos formarão uma fila de modo que Julia e Guilherme fiquem lado a lado. De quantas maneiras distintas eles poderão formar essa fila? alternativa **a**

a) $7! \cdot 2!$

b) $\frac{8!}{2!}$

c) $6! \cdot 2!$

d) $\frac{7!}{2!}$

e) $8! \cdot 2!$

35. Elabore uma situação-problema cuja resolução seja dada pela multiplicação $P_4 \cdot P_3$. Resposta pessoal.

Arranjo simples

> **Saiba que...**
> Arranjar significa colocar em ordem, organizar.

Todos os problemas de arranjo simples são solucionados pelo princípio multiplicativo. Acompanhe o exemplo.

Uma turma de 3º ano do Ensino Médio deve eleger um representante, um vice-representante e um suplente. Se apenas cinco estudantes, Maria, Paula, João, Carolina e Everaldo, candidataram-se para esses cargos, de quantas maneiras distintas três desses cinco estudantes podem ser escolhidos?

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras distintas de escolher três desses cinco estudantes é dado pela multiplicação:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

Nessa multiplicação, os fatores 5, 4 e 3 são, nessa ordem, o número de possibilidades de eleger o representante, o vice-representante e o suplente.

Dizemos que esse tipo de problema é um arranjo simples de 5 elementos tomados 3 a 3, pois havia 5 candidatos para 3 cargos distintos (representante, vice-representante e suplente). Cada um dos 60 resultados possíveis dessa eleição é denominado arranjo simples de 3 estudantes dos 5 candidatos.

É importante ressaltar que, mudando apenas os cargos dos estudantes eleitos, temos um resultado diferente da eleição. Por exemplo, o trio Maria (*M*), Paula (*P*) e João (*J*) poderiam ser eleitos de seis maneiras distintas. Considerando que a primeira letra da sigla é a inicial do nome do representante, a segunda letra é a inicial do nome do vice-representante e a terceira letra é a inicial do nome do suplente, temos as seguintes opções:

MPJ	*MJP*
JMP	*JPM*
PMJ	*PJM*

> Seja E um conjunto com n elementos distintos, com $n \in \mathbb{N}^*$. Cada sequência de p elementos distintos de E é denominada **arranjo simples** de E.

A seguir, apresentamos outros exemplos de arranjos simples.

a) As sequências (M, P, J), (M, J, P), (J, M, P) e (E, C, J) são alguns dos arranjos simples de três elementos do conjunto {M, P, J, C, E}.

b) As sequências (1, 3, 5, 7), (7, 5, 3, 1), (1, 9, 5, 11) e (5, 1, 3, 7) são alguns dos arranjos simples de quatro elementos do conjunto {1, 3, 5, 7, 9, 11}.

» Fórmula do arranjo simples

Apesar de todos os problemas de arranjo simples poderem ser quantificados por meio do princípio multiplicativo, também é possível fazer essa quantificação por meio de fórmula específica.

Dado um conjunto $E = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ com n elementos, com $n \in \mathbb{N}^*$, pelo princípio multiplicativo, o número de arranjos simples $A_{n,\,p}$ (lemos: arranjo de n elementos tomados p a p) de p elementos distintos do conjunto E, ou seja, o número de sequências com p elementos distintos de E, é dado pela seguinte multiplicação:

$$A_{n,\,p} = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1)}_{p \text{ elementos}}$$

Note que, nessa multiplicação, o fator n é o número de possibilidades de escolher o primeiro elemento da sequência; definido o primeiro elemento, $(n - 1)$ é o número de possibilidades de escolher o segundo elemento; definidos o primeiro e o segundo elemento, $(n - 2)$ é o número de possibilidades de escolher o terceiro elemento; e assim por diante, até o número de possibilidades $(n - p + 1)$ de escolher o último elemento dessa sequência.

Para indicar o número $A_{n,\,p}$ utilizando fatoriais, vamos multiplicar a expressão anterior por $\frac{(n-p)!}{(n-p)!}$. Acompanhe.

Saiba que...

Observe que: $\frac{(n-p)!}{(n-p)!} = 1$

$$A_{n,\,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1) \cdot \frac{(n-p)!}{(n-p)!}$$

$$A_{n,\,p} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1) \cdot (n-p) \cdot (n-p-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-p)!}$$

$$A_{n,\,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Portanto, o número de arranjos simples $A_{n,\,p}$ de n elementos tomados p a p, em que n e p são números naturais diferentes de zero e $p \leqslant n$, pode ser determinado pela fórmula:

$$\boxed{A_{n,\,p} = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

Acompanhe a aplicação dessa fórmula por meio do exemplo a seguir.

Para calcular o número de arranjos de 7 elementos tomados 3 a 3, podemos:

- utilizar o princípio multiplicativo: $A_{7,\,3} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$
- ou utilizar a fórmula: $A_{7,\,3} = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$

Para assistir

- O JOGO da imitação. Direção: Morten Tyldum. EUA: Bristol Automotive; Reino Unido: Black Bear, 2014. *Streaming* (114 min).

  Essa ficção aborda a vida e a contribuição do matemático inglês Alan Turing (1912-1954) para desvendar o código nazista durante a Segunda Guerra Mundial.

REPRODUÇÃO/BLACK BEAR PICTURES

▪ Capa do filme **O jogo da imitação**.

ATIVIDADES RESOLVIDAS

10. Quantos números de três algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 7?

Comentar com os estudantes que, de modo geral, as atividades de análise combinatória podem ser resolvidas de diferentes maneiras.

Resolução

Podemos solucionar esse exercício de dois modos.

1º modo: Qualquer um dos seis algarismos dados pode ocupar a ordem das centenas, restando, então, dois algarismos para a dezena e, por fim, um algarismo para a unidade. Então, pelo princípio multiplicativo, temos:

$$6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$$

2º modo: Cada número formado com as características impostas pelo enunciado é um arranjo simples de 3 elementos desses 6 algarismos. O número de arranjos simples de 6 elementos tomados 3 a 3 é:

$$A_{6,\,3} = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 120$$

Logo, podemos formar 120 números.

11. Vinte pessoas se candidataram para uma comissão que será composta de um presidente, um vice-presidente, um tesoureiro e um secretário. De quantas maneiras essa comissão poderá ser formada, sabendo-se que cargos distintos não podem ser ocupados pela mesma pessoa e que o candidato Lucas foi selecionado, mas seu cargo ainda não foi definido?

Resolução

A formação dessa comissão pode ocorrer em duas etapas. A primeira etapa é definir o cargo do candidato já selecionado, Lucas, e a segunda é definir os candidatos para os outros três cargos. Há 4 possibilidades para a primeira etapa, porque Lucas pode assumir qualquer um dos 4 cargos da comissão. Definida a primeira etapa, sobram 3 cargos e 19 candidatos. Cada arranjo simples de 3 dos 19 candidatos é um modo de preencher as vagas dos 3 cargos que faltam. Por isso, o número de possibilidades da segunda etapa é a quantidade de arranjos simples $A_{19,\,3}$.

Pelo princípio multiplicativo, temos:

$$4 \cdot A_{19,\,3} = 4 \cdot \frac{19!}{(19-3)!} = 4 \cdot \frac{19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16!}{16!} =$$
$$= 23\,256$$

Portanto, há 23 256 maneiras de compor essa comissão.

12. Uma prova de natação é disputada por 10 competidores, dos quais 4 são brasileiros. Qual é o número de resultados possíveis para a prova, de modo que pelo menos um brasileiro fique em uma das três primeiras colocações?

Resolução

Cada arranjo simples de 3 dos 10 nadadores é um resultado possível das três primeiras colocações dessa competição. Logo, o total de possibilidades das três primeiras colocações é:

$$A_{10,\,3} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} = 720$$

Dos 10 competidores, 4 são brasileiros, consequentemente, 6 não são. Assim, cada arranjo simples de 3 dos 6 competidores não brasileiros é um resultado da competição na qual não ocorre a presença de brasileiros nas três primeiras colocações. Logo, o total de possibilidades das três primeiras colocações, sem que haja a presença de brasileiros, é:

$$A_{6,\,3} = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 120$$

Subtraindo 120 do total de possibilidades, que é 720, temos:

$$720 - 120 = 600$$

Portanto, há 600 resultados possíveis em que pelo menos um brasileiro fique em uma das três primeiras colocações.

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

36. Resolva os problemas a seguir de duas maneiras. A primeira utilizando o princípio multiplicativo, e a segunda utilizando a fórmula do arranjo simples. Em seguida, responda: qual método de resolução você prefere? Por quê? Resposta pessoal.

a) De quantas maneiras três pessoas podem se sentar em nove cadeiras numeradas de 1 a 9? 504 maneiras

b) Quantos números de cinco algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9? 15 120 números

37. Elabore uma situação-problema cuja resolução possa ser determinada calculando-se o número de arranjos simples de 12 elementos tomados 4 a 4. Resposta pessoal.

38. Copie o quadro no caderno e complete-o com todos os arranjos simples, todas as sequências, de 3 elementos do conjunto $E = \{A, B, C, D\}$.

(A, B, C)	(A, C, B)	(B, A, C)	(B, C, A)	(C, A, B)	(C, B, A)
(A, B, D)	(A, D, B)	(B, A, D)	(B, D, A)	(D, A, B)	(D, B, A)
(A, C, D)	(A, D, C)	(C, A, D)	(C, D, A)	(D, A, C)	(D, C, A)
(B, C, D)	(B, D, C)	(C, B, D)	(C, D, B)	(D, B, C)	(D, C, B)

39. (UFJF-MG) Um ônibus com 40 assentos numerados de 01 a 40 foi alugado para uma excursão que fará uma viagem com 25 turistas. De quantos modos distintos os turistas poderão ser acomodados para a viagem considerando que não há preferência por lugares?

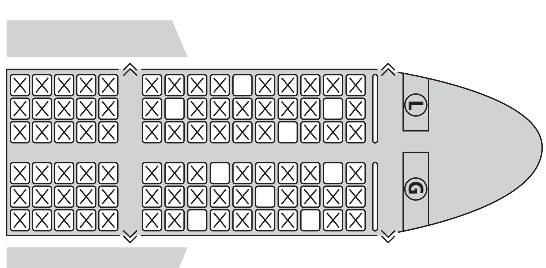
a) $\frac{40!}{15!}$ **c)** 40 **e)** $40! - 15!$

b) $\frac{25!}{15!}$ **d)** $15!$

alternativa **a**

40. (Enem/MEC) Uma família composta por sete pessoas adultas, após decidir o itinerário de sua viagem, consultou o *site* de uma empresa aérea e constatou que o voo para a data escolhida estava quase lotado. Na figura, disponibilizada pelo *site*, as poltronas ocupadas estão marcadas com X e as únicas poltronas disponíveis são as mostradas em branco.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE



Disponível em: www.gebh.net.
Acesso em: 30 out. 2013 (adaptado).

O número de formas distintas de se acomodar a família nesse voo é calculado por alternativa **a**

a) $\frac{9!}{2!}$ **c)** $7!$ **e)** $\frac{5!}{4!} \times \frac{4!}{3!}$

b) $\frac{9!}{7! \times 2!}$ **d)** $\frac{5!}{2!} \times 4!$

41. Quantos números de três algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, incluindo sempre o algarismo 4? 168 números

42. Sabendo-se que uma bandeira tem quatro faixas horizontais:

a) quantas são as possibilidades de pintá-la com quatro cores distintas, escolhendo entre vermelho, laranja, amarelo, verde, azul, roxo e marrom? 840 possibilidades

b) quantas bandeiras podem ser pintadas se, além da condição do item **a**, a cor amarela estiver sempre presente? 480 bandeiras

43. Em uma gincana escolar, cinco meninos e sete meninas disputaram uma competição. Em quantos resultados possíveis dessa competição há, pelo menos, um menino em uma das três primeiras colocações? 1 110 resultados

44. (Enem/MEC) Um determinado campeonato de futebol, composto por 20 times, é disputado no sistema de pontos corridos. Nesse sistema, cada time joga contra todos os demais times em dois turnos, isto é, cada time joga duas partidas com cada um dos outros times, sendo que cada jogo pode terminar empatado ou haver um vencedor.
Sabendo-se que, nesse campeonato, ocorreram 126 empates, o número de jogos em que houve ganhador é igual a alternativa **c**

a) 64. **c)** 254. **e)** 634.

b) 74. **d)** 274.

45. (UFRGS-RS) Uma biblioteca está elaborando etiquetas de identificação para os livros do acervo de tal forma que, em cada etiqueta, são usadas quatro letras distintas, de um alfabeto de 26 letras, e quatro algarismos também distintos, de 0 a 9.
A figura abaixo mostra um exemplo de modelo da etiqueta produzida.

EMAT**9501**

Assinale a alternativa que apresenta o número total de etiquetas distintas produzidas pela biblioteca. alternativa **c**

a) $26 + 10$ **d)** $A_{26,\,4} + A_{10,\,4}$

b) $26 \cdot 10$ **e)** $10A_{26,\,4} + 26A_{10,\,4}$

c) $A_{26,\,4} \cdot A_{10,\,4}$

Combinações simples

Os problemas de combinações simples consistem em determinar o número de maneiras possíveis de selecionar p elementos distintos entre n objetos diferentes disponíveis. Acompanhe o exemplo.

De quantos modos distintos um professor pode selecionar um trio de um grupo de 5 estudantes?

Cada seleção diferente de 3 estudantes para formar o trio é denominada combinação simples de 3 elementos dos 5 estudantes. Por exemplo, suponha que os 5 estudantes sejam Maria (M), Paula (P), João (J), Carolina (C) e Everaldo (E). Considerando que cada letra da sigla é a inicial de um dos nomes, as 10 combinações simples de 3 elementos desses 5 estudantes são:

MPJ	*MPC*	*MPE*	*MJC*	*MJE*	*MCE*	*PJC*	*PJE*	*PCE*	*JCE*

Portanto, o professor pode selecionar o trio de 10 modos distintos.

Seja E um conjunto com n elementos distintos, com $n \in \mathbb{N}^*$. Cada subconjunto de p elementos distintos de E é denominado **combinação simples** de E.

Observe alguns exemplos.

a) Os subconjuntos $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$ e $\{b, c, d\}$ são todas as combinações simples de três elementos do conjunto $\{a, b, c, d\}$.

b) Os subconjuntos {2, 4, 6, 8}, {0, 2, 6, 10}, {0, 2, 4, 6} e {4, 6, 8, 10} são algumas combinações simples de quatro elementos do conjunto {0, 2, 4, 6, 8, 10}.

Fórmula da combinação simples

O quadro a seguir ilustra os 24 arranjos simples (sequências) de 3 elementos distintos e as 4 combinações simples (subconjuntos) de 3 elementos distintos do conjunto $E = \{1, 5, 10, 20\}$.

Combinações (subconjuntos)	Arranjos (sequências)					
{1, 5, 10}	(1, 5, 10)	(1, 10, 5)	(5, 1, 10)	(5, 10, 1)	(10, 1, 5)	(10, 5, 1)
{1, 5, 20}	(1, 5, 20)	(1, 20, 5)	(5, 1, 20)	(5, 20, 1)	(20, 1, 5)	(20, 5, 1)
{1, 10, 20}	(1, 10, 20)	(1, 20, 10)	(10, 1, 20)	(10, 20, 1)	(20, 1, 10)	(20, 10, 1)
{5, 10, 20}	(5, 10, 20)	(5, 20, 10)	(10, 5, 20)	(10, 20, 5)	(20, 5, 10)	(20, 10, 5)

Observe, no quadro, que, para cada uma das 4 combinações simples, há 6 arranjos simples correspondentes que contêm, exatamente, os mesmos elementos dessas combinações em diferentes ordens. Isso acontece porque o número de permutações simples de 3 elementos é $3! = 6$. Desse modo, o número de combinações simples $C_{4,\,3}$ (lemos: combinações de 4 elementos tomados 3 a 3) de 3 elementos do conjunto E pode ser obtido dividindo-se o número de arranjos simples $A_{4,\,3}$ pelo número de permutações simples de 3 elementos, ou seja:

$$C_{4,3} = \frac{A_{4,\,3}}{3!} = \frac{24}{6} = 4$$

No caso geral, de forma análoga, dado um conjunto $E = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ com n elementos, com $n \in \mathbb{N}^*$, para cada combinação simples $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ de p elementos de E, existem $p!$ arranjos simples $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ que contêm os mesmos elementos dessas combinações em diferentes ordens. Desse modo, o número de combinações simples $C_{n,\,p}$ (lemos: combinações de n elementos tomados p a p) de p elementos de E é dado pela seguinte divisão:

$$C_{n,\,p} = \frac{A_{n,\,p}}{p!} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{p! \cdot n - p!}$$

Portanto, o número de combinações simples $C_{n,\,p}$ de n elementos tomados p a p, em que n e p são números naturais diferentes de zero e $p \leqslant n$, é calculado pela seguinte fórmula:

$$C_{n,\,p} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}$$

Observe exemplos de aplicação dessa fórmula.

a) O número de combinações de 6 elementos tomados 4 a 4 é dado por:

$$C_{6,\,4} = \frac{6!}{4! \cdot (6-4)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 2!} = \frac{30}{2 \cdot 1} = 15$$

b) O número de combinações de 7 elementos tomados 3 a 3 é dado por:

$$C_{7,\,3} = \frac{7!}{3! \cdot (7-3)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4!} = 35$$

c) O número de combinações de 7 elementos tomados 4 a 4 é dado por:

$$C_{7,\,4} = \frac{7!}{4! \cdot (7-4)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$$

O número de combinações simples $C_{n,\,p}$ de n elementos tomados p a p, com n e p naturais e $n \geqslant p$, também é indicado por $\binom{n}{p}$ e denominado **número binomial**, isto é:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}$$

Como exemplos, temos:

- $\binom{8}{2} = \frac{8!}{2! \cdot (8-2)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{2! \cdot 6!} = 28$
- $\binom{8}{6} = \frac{8!}{6! \cdot (8-6)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{6! \cdot 2!} = 28$
- $\binom{10}{9} = \frac{10!}{9! \cdot (10-9)!} = \frac{10 \cdot 9!}{9! \cdot 1!} = 10$
- $\binom{10}{1} = \frac{10!}{1! \cdot (10-1)!} = \frac{10 \cdot 9!}{1! \cdot 9!} = 10$

Pense e responda

O que se pode dizer sobre os números binomiais $\binom{n}{p}$ e $\binom{n}{n-p}$?

Eles são iguais.

ATIVIDADES RESOLVIDAS

13. De quantas maneiras é possível escalar um time de voleibol de quadra, composto de 6 jogadores, dispondo de 10 atletas?

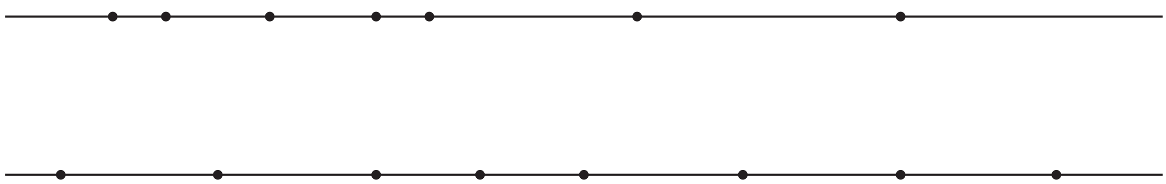
Resolução

Cada combinação simples de 6 dos 10 atletas é uma escalação diferente do time. O número de combinações simples de 10 elementos tomados 6 a 6 é:

$$C_{10,\,6} = \frac{10!}{6! \cdot (10 - 6)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6! \cdot 4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$$

Portanto, o time de voleibol pode ser escalado de 210 maneiras distintas.

14. Quantos quadriláteros podemos formar com os 15 pontos destacados na figura a seguir?



EDITORIA DE ARTE

Resolução

O evento "formar um quadrilátero" pode ocorrer em duas etapas. A primeira é escolher 2 dos 7 pontos destacados na reta de cima, e a segunda é escolher 2 dos 8 pontos destacados na reta de baixo. Assim, o número de possibilidades para a primeira etapa é:

$$C_{7,\,2} = \frac{7!}{2! \cdot (7 - 2)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{2 \cdot 1 \cdot 5!} = 21$$

Já o número de possibilidades para a segunda etapa é:

$$C_{8,\,2} = \frac{8!}{2! \cdot (8 - 2)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{2 \cdot 1 \cdot 6!} = 28$$

Pelo princípio multiplicativo, temos:

$$C_{7,\,2} \cdot C_{8,\,2} = 21 \cdot 28 = 588$$

Portanto, é possível formar 588 quadriláteros.

15. Em uma turma com 15 estudantes, dos quais 10 são meninas e 5 são meninos, será formada uma comissão composta de 4 meninas e 2 meninos. Sabendo que Renata já foi escolhida e que Eduardo não deseja participar, de quantos modos distintos é possível finalizar a composição dessa comissão?

Resolução

O evento "compor a comissão" pode ocorrer em duas etapas. A primeira é finalizar a escolha das 3 meninas entre as 9 opções que sobraram, uma vez que Renata já foi escolhida. A segunda é escolher 2 meninos entre 4 opções, pois Eduardo não deseja participar.

Cada combinação simples de 3 das 9 meninas é uma escolha diferente para a composição da comissão. Então, o número de possibilidades da primeira etapa é:

$$C_{9,\,3} = \frac{9!}{3! \cdot (9 - 3)!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6!} = 84$$

De forma análoga, cada combinação simples de 2 dos 4 meninos é uma escolha diferente para a composição da comissão. Logo, o número de possibilidades da segunda etapa é:

$$C_{4,\,2} = \frac{4!}{2! \cdot (4 - 2)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2 \cdot 1 \cdot 2!} = 6$$

Pelo princípio multiplicativo, temos:

$$C_{9,\,3} \cdot C_{4,\,2} = 84 \cdot 6 = 504$$

Portanto, é possível finalizar a composição dessa comissão de 504 modos distintos.

16. Em uma empresa, um projeto precisa de uma equipe de 4 pessoas, que deve ser montada a partir de um grupo de 10 funcionários. Além disso, o gerente do projeto deseja que, entre os membros da equipe, um seja selecionado como responsável pelos prazos e outro, como responsável pelos gastos do projeto.

a) De quantas maneiras diferentes a equipe de 4 pessoas pode ser formada a partir dos 10 funcionários?

b) Após a formação da equipe, de quantas maneiras diferentes os 2 responsáveis podem ser escolhidos entre os membros da equipe?

Resolução

a) Cada combinação simples de 10 funcionários tomados 4 a 4 é uma formação de equipe diferente.

$$C_{10,\,4} = \frac{10!}{4! \cdot (10-4)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 6!} = 210$$

Portanto, há 210 maneiras de formar a equipe de 4 pessoas.

b) Escolher os dois responsáveis pode ocorrer em duas etapas. Na primeira, há 4 possibilidades de escolher o responsável pelos prazos. Definida essa etapa, há 3 possibilidades de escolher o responsável pelos gastos. Pelo princípio multiplicativo, temos:

$$4 \cdot 3 = 12$$

Portanto, há 12 maneiras diferentes de escolher os dois representantes.

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

46. Copie e complete o quadro com todas as combinações simples, todos os subconjuntos, de 3 elementos do conjunto $E = \{A, B, C, D, E, F\}$.

$\{A, B, C\}$	$\{A, C, D\}$	$\{A, D, F\}$	$\{B, C, F\}$	$\{C, D, E\}$
$\{A, B, D\}$	$\{A, C, E\}$	$\{A, E, F\}$	$\{B, D, E\}$	$\{C, D, F\}$
$\{A, B, E\}$	$\{A, C, F\}$	$\{B, C, D\}$	$\{B, D, F\}$	$\{C, E, F\}$
$\{A, B, F\}$	$\{A, D, E\}$	$\{B, C, E\}$	$\{B, E, F\}$	$\{D, E, F\}$

47. De quantas maneiras é possível escalar um time de basquete, composto de 5 jogadores, dispondo-se de 8 atletas? 56 maneiras

48. Em uma empresa, há 6 sócios brasileiros e 4 japoneses. Agora, a diretoria será composta de 5 sócios, sendo 3 brasileiros e 2 japoneses. De quantos modos essa composição pode ocorrer? 120 modos

49. Em uma sala, há 5 rapazes e 6 moças. Quantos grupos de 2 rapazes e 3 moças podem ser formados? 200 grupos

50. Ao elaborar uma prova de Matemática contendo 5 questões, um professor dispõe de 5 questões de Álgebra e 6 de Trigonometria. Calcule o número de provas diferentes que é possível elaborar usando, em cada prova, 2 questões de Álgebra e 3 de Trigonometria. 200 provas

51. Elabore uma situação-problema cuja resolução seja dada por $\binom{30}{5}$. Resposta pessoal.

52. (UEA-AM) O técnico de futebol de uma escola precisa escolher 11 alunos do ensino médio para uma competição. Ele tem à disposição 5 alunos do primeiro ano, 5 alunos do segundo ano e 7 alunos do terceiro ano. Se ele quer escolher 3 alunos do primeiro ano, 3 alunos do segundo ano e os demais do terceiro ano, o número de maneiras diferentes que ele poderá fazer essa escolha é: alternativa **d**

a) 420. **b)** 840. **c)** 1600. **d)** 2100. **e)** 3200.

53. Seis amigos combinaram de praticar esportes em um complexo esportivo.

a) Para entrar no complexo, eles formaram uma fila. De quantas maneiras diferentes essa fila poderia ter sido formada? 720 maneiras

b) Dentro do complexo, eles disputaram uma corrida. O primeiro colocado ganhou um sorvete, o segundo ganhou um chocolate e o terceiro, um bombom. De quantos modos distintos esses doces poderiam ter sido distribuídos? 120 modos

c) Eles se organizaram em dois times para jogar basquete, cada time com três jogadores. De quantas maneiras distintas esses dois times poderiam ter sido formados? 20 maneiras

54. (UFSCar-SP) Em seu trabalho, João tem 5 amigos, sendo 3 homens e 2 mulheres. Já sua esposa Maria tem, em seu trabalho, 4 amigos (distintos dos de João), sendo 2 homens e 2 mulheres. Para uma confraternização, João e Maria pretendem convidar 6 dessas pessoas, sendo exatamente 3 homens e 3 mulheres. Determine de quantas maneiras eles podem convidar essas pessoas:

a) dentre todos os seus amigos no trabalho. 40 maneiras

b) de forma que cada um deles convide exatamente 3 pessoas, dentre seus respectivos amigos. 18 maneiras

55. (IME-RJ) Com 10 espécies de frutas, quantos tipos de salada, contendo 6 espécies diferentes, podem ser feitas? 210 tipos

56. (UFSC) Um campeonato de futebol de salão é disputado por várias equipes, jogando entre si, turno e returno. Sabendo-se que foram jogadas 272 partidas, determine o número de equipes participantes. 17 equipes

57. (Funorte-MG) No Colégio Indyu de Montes Claros, 5 alunos da turma do 1º ano do Ensino Médio e 4 alunos da turma do 2º ano do Ensino Médio se candidataram para participarem da comissão julgadora de um festival de danças do Colégio Impar, escola de criança. Sabendo que essa comissão será formada por apenas 3 alunos e que não poderá ter alunos de uma só turma, o número de maneiras diferentes de se escolher esses 3 alunos é

a) 42 **b)** 58 **c)** 66 **d)** 70

alternativa **d**

58. Em uma reunião de professores, cada participante cumprimentou todos os seus colegas, resultando em 210 apertos de mãos. Determine o número de professores presentes na reunião. 21 professores

59. (Cederj-RJ) Em um grupo de 58 formandos da Escola de Engenharia de uma universidade, 28 fizeram o curso de Engenharia de Produção, 18 de Engenharia Elétrica e 12 de Engenharia de Telecomunicações. Cada formando concluiu apenas um dos três cursos. Se, para constituir uma comissão de formatura, deve-se escolher, obrigatoriamente, dois estudantes de cada um dos cursos, de quantas maneiras distintas tal comissão pode ser formada? alternativa **b**

a) $(14 \times 27) + (9 \times 17) + (6 \times 11)$

b) $14 \times 27 \times 9 \times 17 \times 6 \times 11$

c) $28 \times 27 \times 18 \times 17 \times 12 \times 11$

d) $(28 \times 27) + (18 \times 17) + (12 \times 11)$

60. (UFRGS-RS) Um time de futebol de salão dispõe de vinte jogadoras de futebol, entre as quais apenas Antônia, Maria e Eduarda são goleiras. O número de times possíveis, com cinco jogadoras, em que apenas a goleira joga em uma posição fixa, é alternativa **e**

a) $C_{17,\,4}$. **b)** $C_{20,\,4}$. **c)** $C_{20,\,5}$. **d)** $C_{3,\,1} + C_{17,\,4}$. **e)** $C_{3,\,1} \cdot C_{17,\,4}$.

61. (EsPCEx-SP) Sobre uma semicircunferência de diâmetro *AB*, são dispostos 10 pontos distintos, incluindo *A* e *B*. Tomando-se quaisquer três pontos distintos dentre os 10, quantos triângulos não retângulos podem ser formados?

a) 8 **b)** 10 **c)** 30 **d)** 112 **e)** 120

alternativa **d**

As placas dos automóveis

Você já observou que as placas dos automóveis possuem um padrão? No Brasil, o primeiro sistema de placas surgiu no início do século XX e vem se modificando ao longo dos anos. A partir de 2018, o Brasil começou a implementar as placas no padrão Mercosul.

Com base em uma iniciativa da União Europeia, o Mercosul propôs a criação de um modelo único de placas para os automóveis dos países-membros. A ideia é a de que os países se organizem de modo a começar a implementação. Leia o texto a seguir sobre o assunto.

> A Placa Mercosul é o novo padrão para a Placa de Identificação Veicular no Brasil, criada num acordo com os demais países membros do Mercosul, Mercado Comum do Cone Sul.
>
> Com reuniões que se iniciaram em 2010 de modo a unificar as placas de Argentina, Brasil, Bolívia, Paraguai, Uruguai e Venezuela, nosso país só efetivou mesmo a implantação do novo modelo a partir de setembro de 2018.
>
> O objetivo do projeto é tornar a fiscalização mais fácil com maior número de combinações, tornar a aquisição mais barata e integrar a gestão de tráfego e sua fiscalização entre os países membros.
>
> Acredita-se que os 110 milhões de veículos do Mercosul serão beneficiados pelo novo modelo, que só no Brasil garante 450 milhões de combinações.
>
> No antigo, cinza, apenas 175 milhões de combinações eram possíveis.
>
> [...]
>
> OLIVEIRA, Ricardo de. Placa Mercosul: letras, tabela, detalhes, legislação. **Notícias automotivas**, [*s. l.*], 30 jun. 2024. Disponível em: https://www.noticiasautomotivas.com.br/placa-mercosul/. Acesso em: 27 set. 2024.

As combinações das placas do Mercosul são *LLLNLNN* para automóveis e *LLLNNLN* para motocicletas, em que *L* é letra e *N* é número. Observe um exemplo de placa desse modelo para automóvel.

CELLI07/SHUTTERSTOCK.COM

▪ Modelo de placa do Mercosul em vigência no Brasil em 2024.

HANS ELMO/SHUTTERSTOCK.COM

Veja como as placas de identificação de veículos evoluíram no Brasil

[...]

[...] O sistema pioneiro foi adotado entre 1901 e 1941. As placas da época tinham fundo preto e fonte branca. Iniciavam com a letra P (para carros particulares) ou A (veículos de aluguel), seguida de até cinco algarismos.

Entre 1941 e 1969, foi usado um segundo sistema, sem letras. Os números eram separados em duplas e a placa passou a informar o Estado e o município em que o carro havia sido licenciado. Foi nessa fase que surgiu a diferenciação por cor de acordo com o tipo de utilização do veículo. Os carros particulares passaram a usar placas laranjas (amarelas, a partir de meados da década de 60) com algarismos pretos; os veículos oficiais usavam placa branca com fonte preta; e os carros de aluguel usavam placa vermelha com algarismos em branco.

[...]

O terceiro sistema, alfanumérico, foi introduzido no final de 1969 e passou a conter combinação de duas letras e quatro números para carros (motos tinham duas letras e três números), escritos em preto sobre um fundo amarelo.

[...]

A partir de 1990, foi adotado o Sistema RENAVAM, que permanecerá vigente até a entrada das placas com padrão Mercosul. [...]

[...]

Esse sistema atual é do tipo ABC-1234, sendo que cada Estado passou a ter seus intervalos de combinações de letras (o Rio de Janeiro, por exemplo, passou a expedir placas com jogos de letras entre KMF e LVE). [...]

[...]

BLABLO101/SHUTTERSTOCK.COM

VEJA como as placas de identificação de veículos evoluíram no Brasil. **Estadão**, São Paulo, 18 mar. 2018. Jornal do carro. Disponível em: https://jornaldocarro.estadao.com.br/servicos/veja-como-as-placas-de-identificacao-de-veiculos-evoluiram-no-brasil/. Acesso em: 13 set. 2024.

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Agora, faça o que se pede nas atividades a seguir.

1. De acordo com o segundo texto, considere a placa do sistema Renavam, na qual há três letras do alfabeto (de um total de 26) e quatro algarismos (de 0 a 9), e determine:

a) a quantidade de placas que podem ser criadas; 175 760 000 placas

b) a quantidade de placas que podem ser criadas de modo a não haver nenhum número e nenhuma letra repetidos; 78 624 000 placas

c) a quantidade de placas que podem ser criadas com as três letras iniciais do seu nome. Resposta pessoal.

2. De acordo com o primeiro texto, considere a placa de modelo Mercosul. Tendo em vista essa nova formulação (*LLLNLNN*) para automóveis no Brasil, responda às perguntas.

a) Quantas placas podem ser criadas com esse novo padrão? 456 976 000 placas

b) Em relação ao padrão anterior, quantas placas a mais podem ser criadas com esse novo padrão? 281 216 000 placas

3. Junte-se a um colega, e façam uma pesquisa histórica sobre os modelos de placas que já foram utilizados no Brasil. Elaborem uma linha do tempo usando imagens e textos, incluindo a evolução na quantidade de placas que cada sistema permitiu criar. Ver as **Orientações para o professor**.

Cálculos fatoriais utilizando o Scratch

Neste Capítulo, você pôde perceber que, na resolução de diversos problemas de contagem, usamos cálculos com fatorial. O programa que vamos construir nesta seção pode ajudar nesses cálculos. Esse programa permite que a atenção seja dirigida ao raciocínio que deve ser desenvolvido na resolução dos problemas. Lembramos que o **Scratch**, disponível em https://scratch.mit.edu/ (acesso em: 28 out. 2024), é uma linguagem de programação em blocos, em que basta identificar os comandos que se deseja executar, à esquerda da tela, e arrastar os blocos para a área de trabalho, no centro da tela.

Desenvolvendo a função fatorial no Scratch

Aprendemos o que é o fatorial de um número natural *n*. O cálculo do fatorial de um número da ordem das dezenas, por exemplo, pode ser bem trabalhoso. Por isso, propomos esse programa para ajudar os cálculos desenvolvidos no estudo de Combinatória.

Para desenvolver um programa que calcula operações fatoriais, siga os passos a seguir.

I. Depois de clicar no botão **Criar**, clique na categoria **Eventos** e arraste o bloco destacado na imagem para a área de trabalho.

II. Clique na categoria **Sensores** e insira o bloco apresentado abaixo do bloco anterior. Substitua o texto padrão por: “Digite *n* para obter *n*!”.

IMAGENS: REPRODUÇÃO/SCRATCH

III. Na categoria **Variáveis**, clique em **Criar uma variável** e crie duas variáveis: *x* e *y*, uma de cada vez. Após esse passo, aparecerão, em **Variáveis**, estes blocos:

IV. Desmarque essas variáveis, para que elas não apareçam para o usuário na tela de interação.

V. Ainda em **Variáveis**, arraste duas vezes o bloco indicado para a sequência de blocos que está sendo formada.

VI. No primeiro bloco, você deve selecionar a variável *x* no espaço **Minha variável** e, no campo **Para**, deve digitar o valor “1” no lugar do 0.

VII. No segundo bloco, você deve selecionar a variável *y*. No campo **Para**, você deve retornar à categoria **Sensores** e arrastar o bloco .

Até aqui, seu programa deve estar assim:

VIII. Clique na categoria **Controle** e arraste um bloco igual ao da figura para a área de trabalho, encaixando-o abaixo dos anteriores. Em seguida, na categoria **Sensores**, arraste o bloco **resposta** para o espaço indicado na imagem.

IX. Retorne para a categoria **Variáveis**, arraste dois blocos **Mude** para dentro do bloco **Repita** e altere a variável do primeiro bloco para *x* e a variável do segundo bloco para *y*.

Nesse momento, é preciso configurar as operações matemáticas em ambos os blocos. Para isso, clique na categoria **Operadores** e arraste para o bloco que foi configurado com a variável *x* o bloco de produto: 

Para o bloco que foi configurado com a variável *y* arraste o bloco da diferença: 

X. Em **Variáveis**, arraste a variável *x* e a variável *y* para o bloco de multiplicação. Na subtração, arraste a variável *y* para o primeiro espaço e digite “1” no segundo espaço.

XI. Para finalizar, clique na categoria **Aparência** e arraste o bloco da imagem para o final da sequência de blocos.

XII. Depois, vá para **Variáveis** e arraste a variável *x* para onde está escrito “Olá”. Você também pode mudar o tempo de exibição da resposta. Para isso, no campo em que está o número 2, digite “5”, por exemplo, para que a resposta fique visível durante 5 segundos. Caso ainda considere pouco, digite um valor maior. Ao final, seu programa ficará conforme a imagem.

IMAGENS: REPRODUÇÃO/SCRATCH

Pense e responda

Por que é preciso inicializar a variável *x* com o valor 1? A cada repetição, o que acontece com o valor de *x*?

Ver as **Orientações para o professor**.

Agora, faça o que se pede nas atividades a seguir.

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Ver as **Orientações para o professor**.

1. No passo **VIII**, depois de inserir o bloco repetição, o valor 10 foi substituído pelo bloco resposta. O que representa essa modificação? Esse valor poderia ser diferente?

2. No passo **X**, no bloco que corresponde à variável *y*, foi efetuado o cálculo $y - 1$. Explique por que é necessário subtrair 1 do valor *y*.

3. Analise e explique por que essa sequência de blocos proposta no texto funciona, ou seja, calcula o fatorial de um número dado.

4.  A programação apresentada não é a única forma de calcular o fatorial de um número dado. Reúna-se a mais dois colegas, e construam outra maneira de, dado um número *n*, calcular seu fatorial.

ATIVIDADES COMPLEMENTARES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. (UEA-AM) Um *campus* universitário tem 7 portarias que podem ser usadas tanto para entrada como para saída de alunos. O número máximo de formas distintas como um aluno poderá entrar e sair desse *campus* utilizando portarias diferentes é alternativa **a**

a) 42. **b)** 36. **c)** 14. **d)** 48. **e)** 28.

2. (Enem/MEC) Uma empresa construirá sua página na internet e espera atrair um público de aproximadamente um milhão de clientes. Para acessar essa página, será necessária uma senha com formato a ser definido pela empresa. Existem cinco opções de formato oferecidas pelo programador, descritas no quadro, em que "L" e "D" representam, respectivamente, letra maiúscula e dígito.

Opção	Formato
I	LDDDDD
II	DDDDDD
III	LLDDDD
IV	DDDDD
V	LLLDD

As letras do alfabeto, entre as 26 possíveis, bem como os dígitos, entre os 10 possíveis, podem se repetir em qualquer das opções.

A empresa quer escolher uma opção de formato cujo número de senhas distintas possíveis seja superior ao número esperado de clientes, mas que esse número não seja superior ao dobro do número esperado de clientes.

A opção que mais se adequa às condições da empresa é alternativa **e**

a) I. **b)** II. **c)** III. **d)** IV. **e)** V.

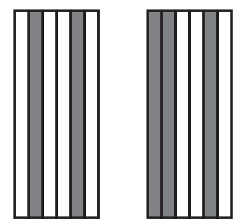
3. (Unaerp-SP) Uma fechadura de segredo possui 4 contadores que podem assumir valores de 0 a 9 cada um, de tal sorte que, ao girar os contadores, esses números podem ser combinados para formar o segredo e abrir a fechadura. De quantos modos esses números podem ser combinados para se tentar encontrar o segredo? alternativa **a**

a) 10 000 **c)** 83 200 **e)** 720
b) 64 400 **d)** 126

4. (Uneb-BA) A distribuição de cinco bolas de cores distintas entre duas pessoas de modo que cada pessoa receba, pelo menos, uma bola pode ser feita em um número máximo, de formas distintas, igual a alternativa **02**

01) 25 **03)** 35 **05)** 50
02) 30 **04)** 45

5. (UCSal-BA) Um código para leitura ótica é constituído por 6 barras, brancas ou pretas. Nenhum código tem barras de uma só cor. Veja dois exemplos desses códigos:



EDITORIA DE ARTE

Quantos desses códigos, distintos entre si, podem ser formados? alternativa **c**

a) 128 **c)** 62 **e)** 16
b) 64 **d)** 32

6. (Uneb-BA) Um grupo de 8 enfermeiros contratados por um hospital deve ser distribuído de modo que 3 fiquem no setor de pronto-socorro, 3 no setor cirúrgico e os demais na ala pediátrica. O número de maneiras distintas de se fazer tal distribuição é igual a

01) 66 **04)** 560 alternativa **04**
02) 182 **05)** 718
03) 320

7. (UECE) Listando-se, em ordem crescente, todos os números de cinco dígitos formados com os algarismos 1, 3, 5, 6, e 7, pode-se afirmar corretamente que, nesta lista, a quantidade de números menores do que 61 573 é

a) 74 **b)** 76 **c)** 75 **d)** 77

alternativa **c**

8. (ITA-SP) Considere os números de 2 a 6 algarismos distintos formados utilizando-se apenas 1, 2, 4, 5, 7 e 8. Quantos destes números são ímpares e começam com um dígito par?

a) 375 **c)** 545 **e)** 625
b) 465 **d)** 585

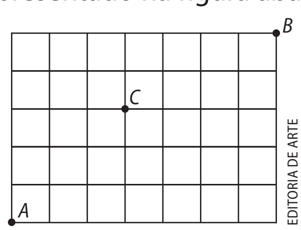
alternativa **d**

9. (UEA-AM) Para serem transportadas ao aeroporto, seis pessoas de uma mesma família, sendo dois adultos e quatro crianças, devem ocupar as duas primeiras fileiras de bancos de uma *van*, com três assentos em cada fileira. O número de maneiras diferentes pelas quais as seis pessoas podem distribuir-se nos assentos, de modo que os adultos ocupem sempre os dois assentos das extremidades da primeira fileira, é

a) 96. **b)** 18. **c)** 24. **d)** 36. **e)** 48.

alternativa **e**

10. (UFRGS-RS) Um aplicativo de transporte disponibiliza em sua plataforma a visualização de um mapa com ruas horizontais e verticais que permitem realizar deslocamentos partindo do ponto *A* e chegando ao ponto *B*, conforme representado na figura abaixo.



EDITORIA DE ARTE

O número de menores caminhos possíveis que partem de *A* e chegam a *B*, passando por *C*, é

a) 28 **b)** 35 **c)** 100 **d)** 300 **e)** 792

alternativa **d**

11. (UFSCar-SP/Unicamp-SP) Ana tem um cartão com uma senha de 4 dígitos. Certo dia, ao tentar realizar uma compra, ela se esqueceu da senha, porém lembra que

- sua senha tem exatamente um dígito 1;
- sua senha tem exatamente dois dígitos 3;
- o dígito 1 não é sucedido imediatamente por um dígito 3.

Supondo que Ana escreva todas as possíveis senhas que cumprem essas condições, quantas são as possibilidades de senha que ela escreverá? alternativa **a.**

a) 48. **b)** 58. **c)** 68. **d)** 78.

12. (Enem/MEC) Uma montadora de automóveis divulgou que oferta a seus clientes mais de 1 000 configurações diferentes de carro, variando o modelo, a motorização, os opcionais e a cor do veículo. Atualmente, ela oferece 7 modelos de carros com 2 tipos de motores: 1.0 e 1.6. Já em relação aos opcionais, existem 3 escolhas possíveis: central multimídia, rodas de liga leve e bancos de couro, podendo o cliente optar por incluir um, dois, três ou nenhum dos opcionais disponíveis.

Para ser fiel à divulgação feita, a quantidade mínima de cores que a montadora deverá disponibilizar a seus clientes é alternativa **b**

a) 8. **b)** 9. **c)** 11. **d)** 18. **e)** 24.

13. (Unitins-TO)

Avalie as assertivas a seguir considerando a imagem da logomarca da Universidade Estadual do Tocantins.

UNITINS, 2024

I. Com a palavra UNITINS, podem ser obtidos 1260 anagramas.

II. Com a palavra UNITINS, há 120 anagramas iniciados e finalizados com a letra N.

III. Com a palavra UNITINS, há 60 anagramas iniciados e finalizados com a letra I.

Está correto o que se afirma apenas em

a) I e II. **b)** I e III. **c)** III. **d)** I. **e)** II.

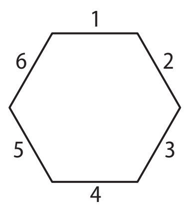
alternativa **b**

14. (Omif) Numa palestra realizada no evento da segunda fase da OMIF 2019, um grupo de oito amigos resolveu se sentar na primeira fila do auditório, que tinha exatamente oito lugares vagos consecutivos. Entre estes amigos, estavam Pedro e Marineide. Motivados pelo ambiente em que se encontravam, resolveram calcular a quantidade de maneiras diferentes em que eles podiam se dispor de modo que, entre Pedro e Marineide, houvesse, exatamente, duas pessoas. Sabendo que eles calcularam este resultado corretamente, eles concluíram que esta quantidade é:

a) 720 **b)** 1440 **c)** 3600 **d)** 7200 **e)** 20160

alternativa **d**

15. (UFPR) Ana, Beatriz e Carlos escolhem lugares para se sentar em uma mesa hexagonal regular. Cada lugar corresponde a um dos lados do hexágono, que estão numerados de 1 a 6, conforme a figura a seguir. Os lados 1 e 4 são considerados lados opostos na mesa, assim como 2 e 5, e 3 e 6. De quantas formas diferentes Ana, Beatriz e Carlos podem escolher os lugares numerados de modo que nenhum deles fique sentado ao lado oposto do outro? alternativa **a**



EDITORIA DE ARTE

a) 48. **b)** 36. **c)** 24. **d)** 12. **e)** 8.

16. (Uesb-BA) O filme "Filho de boi" retrata a formação do protagonista João como palhaço no circo. O traje do palhaço é um aspecto relevante na sua apresentação. Considerando que João deva montar seu traje composto de uma camiseta, uma calça e um chapéu e tendo à sua disposição 3 camisetas, 2 calças e 4 chapéus, pode-se afirmar que a quantidade de trajes diferentes que ele pode formar é de:

a) 12. **b)** 24. **c)** 36. **d)** 9. **e)** 16.

alternativa **b**

17. (UFSCar-SP/Unicamp-SP) Seis amigos se preparam para assistir a um jogo de futebol e vão se sentar numa mesma fileira do estádio. De quantas maneiras eles podem se organizar nas cadeiras escolhidas para se sentar, sabendo que dois deles se sentarão sempre um do lado do outro? alternativa **b**

a) 140. **b)** 240. **c)** 340. **d)** 440.

18. (Fuvest-SP) Uma lotação possui três bancos para passageiros, cada um com três lugares, e deve transportar os três membros da família Sousa, o casal Lúcia e Mauro e mais quatro pessoas. Além disso:

1. a família Sousa quer ocupar um mesmo banco;
2. Lúcia e Mauro querem sentar-se lado a lado.

Nessas condições, o número de maneiras distintas de dispor os nove passageiros na lotação é igual a: alternativa **e**

a) 928 **c)** 1 828 **e)** 3 456
b) 1 152 **d)** 2 412

19. (Enem/MEC) Um prédio, com 9 andares e 8 apartamentos de 2 quartos por andar, está com todos os seus apartamentos à venda. Os apartamentos são identificados por números formados por dois algarismos, sendo que a dezena indica o andar onde se encontra o apartamento, e a unidade, um algarismo de 1 a 8, que diferencia os apartamentos de um mesmo andar. Quanto à incidência de sol nos quartos desses apartamentos, constatam-se as seguintes características, em função de seus números de identificação:

- naqueles que finalizam em 1 ou 2, ambos os quartos recebem sol apenas na parte da manhã;
- naqueles que finalizam em 3, 4, 5 ou 6, apenas um dos quartos recebe sol na parte da manhã;
- naqueles que finalizam em 7 ou 8, ambos os quartos recebem sol apenas na parte da tarde.

Uma pessoa pretende comprar 2 desses apartamentos em um mesmo andar, mas quer que, em ambos, pelo menos um dos quartos receba sol na parte da manhã.

De quantas maneiras diferentes essa pessoa poderá escolher 2 desses apartamentos para compra nas condições desejadas? alternativa **b**

a) $9 \times \dfrac{6!}{(6-2)!}$

b) $9 \times \dfrac{6!}{(6-2)! \times 2!}$

c) $9 \times \dfrac{4!}{(4-2)! \times 2!}$

d) $9 \times \dfrac{2!}{(2-2)! \times 2!}$

e) $9 \times \left(\dfrac{8!}{(8-2)! \times 2!} - 1\right)$

20. (Fempar-PR) Com 10 consoantes diferentes dadas e as 5 vogais, queremos formar conjuntos de 3 letras diferentes, sendo 2 consoantes e 1 vogal.

A ordem das 3 letras em cada conjunto não o faz diferente. Por exemplo, o conjunto {A, B, C} é igual ao conjunto {B, A, C}.

Assinale a opção que indica o número de conjuntos que podemos formar, nas condições dadas. alternativa **e**

a) 455. **b)** 450. **c)** 360. **d)** 250. **e)** 225.

21. (UEM-PR) Assinale o que for correto.

01) Há exatamente 520 maneiras de escolhermos 3 números pares distintos pertencentes ao conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 31\}$.

02) Com as letras *B*, *C*, *D*, *F* e *G* podemos formar exatamente 140 senhas de 5 letras distintas.

04) Com os números 1, 2, 3, 5, 7, 8 e 9 podemos formar pelo menos 60 múltiplos de 5 com 4 algarismos distintos.

08) A equação $\frac{(n+3)!}{(n+1)!} = 42$ não tem solução.

16) O algarismo das unidades da soma $12! + 14! + 16! + 18! + 20!$ é igual ao algarismo das unidades da soma $12 + 14 + 16 + 18 + 20$. alternativas **04** e **16**

PARA REFLETIR

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Resposta possível: A dificuldade do papagaio será a quantidade de possibilidades de senha; por exemplo, caso a senha contenha 5 letras minúsculas distintas, o total de senhas diferentes é: $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 7\,893\,600$

Neste Capítulo, estudamos o princípio multiplicativo (ou princípio fundamental da contagem), que é uma ferramenta básica muito utilizada para solucionar problemas de contagem. Estudamos também que, para sua utilização, é necessário identificar o evento, estabelecer em quantas etapas ele pode acontecer e, para cada uma das etapas, quantificar as possibilidades de ocorrência. Além disso, aprendemos que, dependendo das condições impostas pelo problema, devemos adotar estratégias de resolução, como dividir a ocorrência do evento em casos mutuamente excludentes, para depois aplicar o princípio aditivo.

Ainda, trabalhamos como descrever todas as possibilidades de ocorrência de um evento por meio do diagrama de árvore (ou diagrama de possibilidades), conhecemos o fatorial de um número e resolvemos problemas utilizando as técnicas e as fórmulas das permutações simples, das permutações com repetições, dos arranjos simples e das combinações simples.

Vamos refletir a respeito das aprendizagens do Capítulo **4**:

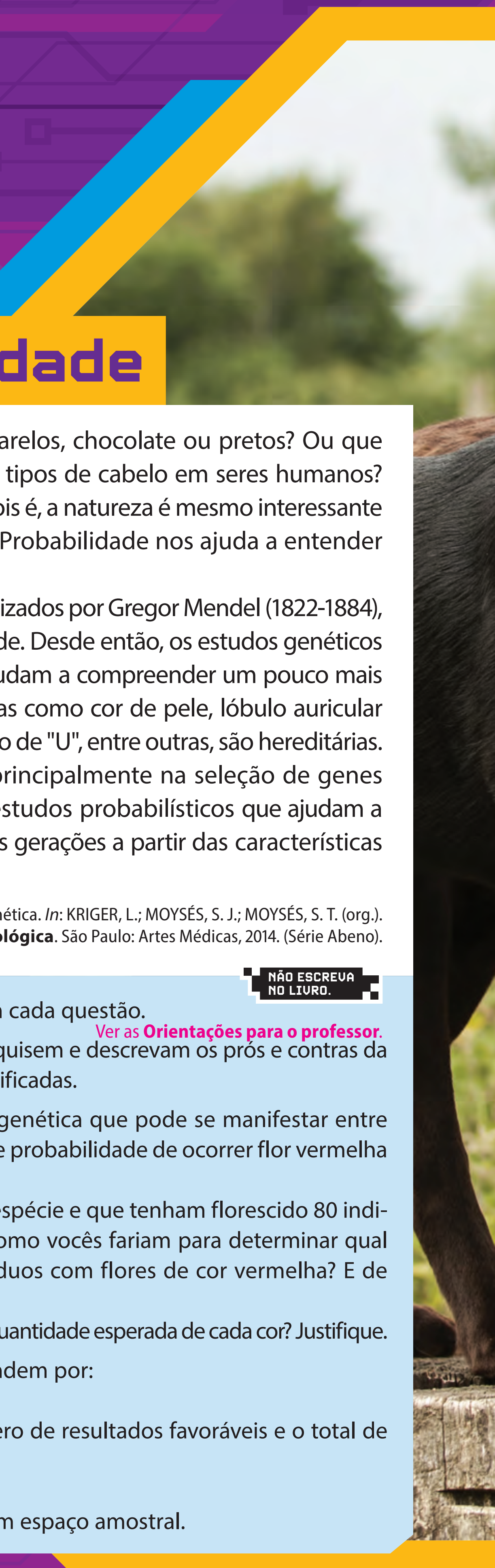
- Leia a tirinha a seguir e responda: o que provoca o humor? O que provoca humor é a quebra de expectativa do personagem ao descobrir que não existem bolinhas pretas no teclado.

WILL. [A senha]. **Humor com Ciência**. [*S. l.*], c2024. Disponível em: https://www.humorcomciencia.com/tagtirinha/senha/. Acesso em: 27 set. 2024.

- Ainda sobre a tirinha anterior, levando em consideração o que você estudou em Combinatória, responda: qual será a dificuldade do papagaio em descobrir a senha?
- Qual é a utilidade da notação do número fatorial? Espera-se que os estudantes respondam que o fatorial é um modo de simplificar o registro de multiplicações de números consecutivos.
- Em que situações-problema podemos utilizar as técnicas de contagem de permutações simples e de permutações com repetições? Cite exemplos. Espera-se que os estudantes relatem situações-problema e exemplos que foram apresentados neste Capítulo.
- Em que situações-problema podemos utilizar as técnicas de contagem de arranjos simples e combinações simples? Cite exemplos. Espera-se que os estudantes relatem situações-problema e exemplos que foram apresentados neste Capítulo.

CAPÍTULO

5 Probabilidade



Já reparou que os cães labradores podem ser amarelos, chocolate ou pretos? Ou que existe um número muito grande de cores, espessuras e tipos de cabelo em seres humanos? Que, de modo geral, os gatos de três cores são fêmeas? Pois é, a natureza é mesmo interessante e diversificada, em parte pela combinação genética, e a Probabilidade nos ajuda a entender como isso funciona.

Os famosos experimentos com ervilhas, que foram realizados por Gregor Mendel (1822-1884), desenvolveram as bases dos estudos sobre hereditariedade. Desde então, os estudos genéticos avançaram, e hoje temos muitas informações que nos ajudam a compreender um pouco mais o ser humano. Sabemos, por exemplo, que características como cor de pele, lóbulo auricular aderente ou não, habilidade de dobrar a língua em formato de "U", entre outras, são hereditárias.

Atualmente, a Genética conta com a tecnologia, principalmente na seleção de genes para produção agrícola. Para essa seleção, há muitos estudos probabilísticos que ajudam a prever as características que se manifestarão nas próximas gerações a partir das características das gerações parentais.

Fonte dos dados: TREVILATTO, P. C. *et al.* Introdução ao estudo da genética. *In*: KRIGER, L.; MOYSÉS, S. J.; MOYSÉS, S. T. (org.). **Genética odontológica**. São Paulo: Artes Médicas, 2014. (Série Abeno).

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Agora reúna-se a um colega, e façam o que se pede em cada questão.

Ver as **Orientações para o professor**.

1. O que são organismos geneticamente modificados? Pesquisem e descrevam os prós e contras da produção e do consumo de plantas geneticamente modificadas.

2. A cor de certa espécie de planta é uma característica genética que pode se manifestar entre vermelha e branca. Ao cruzar essa espécie, temos 75% de probabilidade de ocorrer flor vermelha e de o restante ser branca.

a) Suponham que um floricultor tenha semeado essa espécie e que tenham florescido 80 indivíduos, que mantiveram as proporções descritas. Como vocês fariam para determinar qual é a quantidade esperada, nessa colheita, de indivíduos com flores de cor vermelha? E de indivíduos com flores de cor branca?

b) Pode-se afirmar que haverá, com certeza, na colheita, a quantidade esperada de cada cor? Justifique.

3. Descrevam ou deem exemplos do que vocês compreendem por:

- experimentos aleatórios;
- cálculo de probabilidade como a razão entre o número de resultados favoráveis e o total de resultados possíveis;
- espaço amostral e eventos equiprováveis.
- eventos dependentes e eventos independentes de um espaço amostral.

CLAIRE NORMAN/SHUTTERSTOCK.COM

■ Os cães labradores têm cerca de 55 cm a 62 cm de altura na idade adulta e podem apresentar pelagem de uma das três cores: preta, chocolate ou amarela.

Introdução

Quando estamos ao nível do mar e aquecemos um pouco de água, a que temperatura ela entra em ebulição? Se soltarmos uma bola de determinada altura, com que velocidade ela atingirá o chão?

Ao repetirmos esses dois experimentos, aquecer um pouco de água e soltar uma bola, sob as mesmas condições, eles apresentarão resultados idênticos aos encontrados antes. A água entrará em ebulição sempre na mesma temperatura, e a bola atingirá o chão sempre com a mesma velocidade. Por isso, podemos prever e afirmar quais serão os resultados.

Por outro lado, não podemos prever nem afirmar qual será o resultado, se será cara ou coroa, quando lançamos uma moeda, ou qual será o número da face voltada para cima quando jogamos um dado cúbico numerado de 1 a 6, mesmo repetindo várias vezes esses lançamentos sob as mesmas condições.

Denominamos experimentos:

- **determinísticos** aqueles que, quando são repetidos sob as mesmas condições, apresentam resultados idênticos;
- **aleatórios** aqueles que, quando são repetidos sob as mesmas condições, geralmente, apresentam resultados diferentes.

A Probabilidade é a área da Matemática que cria e desenvolve modelos abstratos que possibilitam estudar e analisar fenômenos e experimentos aleatórios. Neste Capítulo, estudaremos uma variedade de experimentos e fenômenos aleatórios que apresentam um número discreto e finito de resultados possíveis.

Espaço amostral e evento

Considere que dois amigos, Fábio e Ana, lançam um dado cúbico, cujas faces são numeradas de 1 a 6, e considere a face voltada para cima como resultado. Ana deseja o resultado de número 5, e Fábio, um número par.

Nesse experimento, não é possível afirmar qual face sairá voltada para cima. No entanto, podemos afirmar que os **resultados possíveis** são: 1, 2, 3, 4, 5 ou 6. Em Probabilidade, dizemos que:

O conjunto U que contém todos os resultados possíveis de um experimento aleatório é denominado **espaço amostral**. O número de elementos de um espaço amostral é indicado por $n(U)$.

Cada subconjunto A de um espaço amostral U é denominado **evento**. O número de elementos de um evento é indicado por $n(A)$.

Cada subconjunto unitário de um espaço amostral U, isto é, cada subconjunto que contém um único elemento, é denominado **evento elementar** ou **evento simples**.

Portanto, no experimento aleatório de Fábio e Ana, temos:

- o espaço amostral $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
- o número de elementos do espaço amostral, $n(U) = 6$;
- o evento elementar (ou evento simples) desejado por Ana, $A = \{5\}$;
- o número de elementos do evento desejado por Ana, $n(A) = 1$;
- o evento desejado por Fábio, $B = \{2, 4, 6\}$;
- o número de elementos do evento desejado por Fábio, $n(B) = 3$.

A seguir, acompanhe mais um exemplo.

Duas moedas, uma de um real e outra de cinquenta centavos, são lançadas simultaneamente. Carla espera, como resultado, que as faces voltadas para cima sejam duas caras, e José, uma cara e uma coroa.

Para descrever o espaço amostral desse experimento, vamos utilizar a notação de par ordenado (x, y), em que a letra x indica o resultado da moeda de um real e a letra y, o resultado da moeda de cinquenta centavos. Além disso, utilizaremos a letra K para o resultado "cara" e a letra C para "coroa". Desse modo, descrevemos:

- o espaço amostral, $U = \{(K, K), (K, C), (C, K), (C, C)\}$;
- o número de elementos do espaço amostral, $n(U) = 4$;
- o evento elementar (ou evento simples) esperado por Carla, $A = \{(K, K)\}$;
- o número de elementos do evento esperado por Carla, $n(A) = 1$;
- o evento esperado por José, $B = \{(K, C), (C, K)\}$;
- o número de elementos do evento esperado por José, $n(B) = 2$.

» Eventos elementares equiprováveis

Ao descrever um espaço amostral U de um experimento aleatório, devemos analisar se existe uma única maneira para cada evento elementar de U acontecer. Acompanhe um exemplo.

Suponha que Vitor jogue uma moeda não viciada duas vezes consecutivas e anote o número de caras obtidas, ou seja, o número de vezes em que a face cara saiu voltada para cima. O espaço amostral desse experimento aleatório pode ser representado de dois modos.

- **1º modo**: $U = \{0, 1, 2\}$. Nesse espaço amostral, cada evento elementar indica um número possível de resultados "cara" que Vitor anotou.
- **2º modo**: $V = \{(C, C), (K, C), (C, K), (K, K)\}$. Nesse espaço amostral, cada evento elementar (x, y) descreve um resultado possível do primeiro e do segundo lançamentos. No par ordenado (K, C), por exemplo, a letra K indica o resultado "cara" no primeiro lançamento e a letra C, "coroa" no segundo lançamento.

Saiba que...

Dizemos que uma moeda ou um dado é viciado quando é modificado, isto é, adulterado, de modo que suas faces tenham chances diferentes de sair voltadas para cima.

Observe, no quadro a seguir, que o evento elementar "número possível de caras que Vitor anotou" ser 1 no espaço amostral U pode acontecer de duas maneiras distintas: é possível Vitor anotar 1 quando ocorre coroa no primeiro lançamento e cara no segundo ou, ao contrário, quando ocorre cara no primeiro lançamento e coroa no segundo.

	Resultados possíveis do experimento aleatório			
	coroa e coroa	**coroa e cara**	**cara e coroa**	**cara e cara**
Elementos de *U*	0	1	1	2
Elementos de *V*	$(C; C)$	$(C; K)$	$(K; C)$	$(K; K)$

Quando isso acontece, sempre optamos pelo espaço amostral no qual cada evento simples tem apenas uma única maneira de acontecer, como é o caso do espaço amostral $V = \{(K, K), (K, C), (C, K), (C, C)\}$, cujos elementos têm essa característica. Além disso, como a moeda é não viciada, admitimos que todos os eventos elementares do espaço amostral V são igualmente prováveis e os denominamos **eventos elementares equiprováveis**.

Perceba que o evento elementar "número possível de caras que Vitor anotou" ser 1 no espaço amostral $U = \{0, 1, 2\}$ tem uma chance de ocorrência maior em relação aos demais eventos simples, pois há duas maneiras possíveis de ele acontecer, enquanto, para cada um dos demais eventos simples, há apenas uma. Nesse caso, dizemos que o espaço amostral U possui **eventos elementares não equiprováveis**.

Para admitir que os eventos elementares de um espaço amostral são equiprováveis, analisamos: se as características do experimento aleatório não favorecem um possível resultado em relação aos demais; e se existe uma única maneira de cada evento elementar acontecer.

Acompanhe os exemplos.

Exemplo 1: Marcos retira ao acaso uma ficha de uma urna que contém 5 fichas numeradas de 1 a 5. Porém, a ficha de número 3 tem medidas diferentes em relação às demais fichas.

Nesse exemplo, os eventos elementares do espaço amostral $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ são não equiprováveis, porque a diferença de tamanho da ficha de número 3 altera a chance de ela ser sorteada em relação às demais, já que pode, inclusive, ser identificada pelo tato. Ou seja, as características do experimento aleatório interferem no resultado, por isso, nesse caso, não podemos admitir que os eventos elementares de U possuem chances iguais de ocorrência.

Exemplo 2: Sandra retira ao acaso uma ficha de uma urna que contém 3 fichas idênticas. A única diferença entre elas é a cor, duas são vermelhas e a outra é amarela.

Os eventos simples do espaço amostral $U = \{\text{vermelha, amarela}\}$ são não equiprováveis, porque há duas maneiras diferentes de Sandra retirar uma ficha vermelha, enquanto há apenas uma maneira de retirar uma ficha amarela. Por outro lado, os eventos simples do espaço amostral $V = \{\text{vermelha 1, vermelha 2, amarela}\}$ são equiprováveis, porque as fichas são idênticas e uma é retirada ao acaso; além disso, só existe um único modo para cada evento elementar de V acontecer.

» Tipos de eventos

Seja U um espaço amostral, não vazio, de um experimento aleatório, dizemos que:

- dois eventos, A e B, de U são **mutuamente exclusivos** quando $A \cap B = \varnothing$.
- dois eventos, C e D, de U são **complementares** quando $C \cap D = \varnothing$ e $C \cup D = U$.
- um evento E de U é **impossível** quando $E = \varnothing$.
- um evento F de U é **certo** quando $F = U$.

Acompanhe o exemplo a seguir.

Fernanda e Daniel jogam dois dados cúbicos não viciados, um branco e outro vermelho, e observam os números das faces voltadas para cima.

O espaço amostral equiprovável desse experimento aleatório é:

$U = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

O primeiro número, x, de cada par ordenado (x, y) indica o número observado no dado branco, e o segundo, y, o número observado no dado vermelho.

Agora, com relação ao exemplo, considere as seguintes situações.

1) Fernanda deseja o evento A: que a soma dos resultados dos dois dados seja 4. Daniel deseja o evento B: que a soma dos resultados dos dois dados seja 3. Assim, tem-se:

$A = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$ $\qquad$ $B = \{(1, 2), (2, 1)\}$

Os eventos A e B são **mutuamente exclusivos**, pois $A \cap B = \varnothing$. Ou seja, é impossível que os dois eventos ocorram ao mesmo tempo.

2) Fernanda espera o evento C: dois números iguais. Daniel espera o evento D: dois números diferentes.

$C = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$

$D = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5)\}$

Saiba que...

Indicamos o complementar de um evento A por $\overline{A}$.

Os eventos C e D são **complementares**, pois $C \cap D = \varnothing$ e $C \cup D = U$. Isto é, se o evento C não aconteceu, então o evento D ocorreu, e vice-versa.

3) Fernanda torce pelo evento E: que a soma dos resultados seja menor ou igual a 1.

$$E = \varnothing$$

O evento E é **impossível**, pois não existe um evento elementar de U cuja soma dos resultados seja menor ou igual a 1.

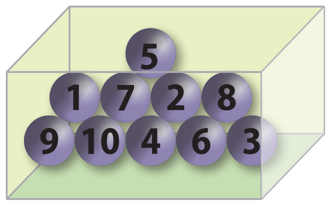
4) Fernanda deseja o evento F: que a soma dos resultados seja menor ou igual a 12.

$$F = U$$

O evento F é **certo**, pois todos os eventos elementares de U têm como soma dos seus resultados um número menor ou igual a 12.

ATIVIDADES RESOLVIDAS

1. Uma urna contém 10 bolas idênticas, numeradas de 1 a 10. Retira-se uma bola ao acaso e observa-se o número indicado.



EDITORIA DE ARTE

Descreva, de forma explícita, os conjuntos indicados em cada item a seguir e dê o número de elementos de cada um.

a) O espaço amostral U.

b) O evento A, em que o número da bola retirada é ímpar.

c) O evento B, em que o número da bola retirada é maior do que 6.

Resolução

a) O espaço amostral U é o conjunto de todos os resultados possíveis:
$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
Logo, $n(U) = 10$.

b) O evento A, em que o número da bola retirada é ímpar, é o conjunto: $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.
Logo, $n(A) = 5$.

c) O evento B, em que o número da bola retirada é maior do que 6, é o conjunto: $B = \{7, 8, 9, 10\}$. Logo, $n(B) = 4$.

2. Em um cesto, há seis bolas idênticas de vôlei, três brancas e três vermelhas. Desse cesto são retiradas, sucessivamente, três bolas ao acaso.

a) Descreva o espaço amostral U desse experimento aleatório e determine o seu número de elementos.

b) Podemos admitir que os eventos simples do espaço amostral descrito no item anterior são equiprováveis? Justifique.

c) Classifique como mutuamente exclusivos, complementares, impossíveis ou certos a dupla de eventos ou os eventos desse experimento aleatório. Justifique cada uma das classificações.

I. Evento A: retirar três bolas brancas. Evento B: retirar três bolas vermelhas.

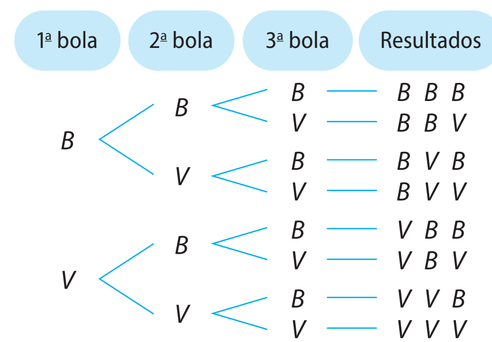
II. Evento C: retirar três bolas de cores iguais. Evento D: retirar uma bola branca e duas vermelhas ou retirar duas brancas e uma vermelha.

III. Evento E: retirar uma quantidade de bolas brancas igual à quantidade de bolas vermelhas.

IV. Evento F: retirar uma bola branca ou uma bola vermelha.

Resolução

a) Chamando cada bola branca de B e cada bola vermelha de V, ao construir a árvore de possibilidades, temos:



Portanto, $U = \{(BBB), (BBV), (BVB), (BVV), (VBB), (VBV), (VVB), (VVV)\}$ e $n(U) = 8$.

b) Sim, podemos admitir que os eventos simples do espaço amostral U são equiprováveis, pois só existe uma única maneira de cada evento elementar de U acontecer e não há nenhuma característica no experimento que favoreça um dos possíveis resultados em relação aos demais.

c) **(I)** Os eventos $A = \{(BBB)\}$ e $B = \{(VVV)\}$ são mutuamente exclusivos, pois $A \cap B = \varnothing$. Ou seja, eles não podem acontecer simultaneamente.

(II) Os eventos $C = \{(BBB), (VVV)\}$ e $D = \{(BBV), (BVB), (BVV), (VBB), (VBV), (VVB)\}$ são complementares, pois $C \cap D = \varnothing$ e $C \cup D = U$. Isto é, se um deles não aconteceu, o outro, com certeza, ocorreu.

(III) Não existe nenhum evento elementar no espaço amostral em que a quantidade de bolas brancas retiradas seja igual à quantidade de vermelhas. Logo, o evento E é impossível e é indicado por $E = \varnothing$.

(IV) Em todos os eventos elementares de U ocorre a retirada de uma bola branca ou de uma bola vermelha. Logo, o evento F é certo, ou seja, $F = U$.

ATIVIDADES

3. O espaço amostral *V* possui eventos elementares equiprováveis, pois só existe uma única maneira para cada evento elementar ocorrer. Além disso, as fichas são idênticas e retiradas ao acaso, ou seja, não existe nada no experimento que favoreça um resultado em relação aos demais.

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. Considere o experimento: o lançamento de dois dados, um branco e outro verde, ambos com as faces numeradas de 1 a 6, e a observação das faces superiores. Faça o que se pede.

a) Descreva o espaço amostral. Ver as **Orientações para o professor**.

b) Descreva o evento: ocorrência de números iguais nos dois dados.

c) Descreva o evento: ocorrência de números cuja soma seja 5.

d) Determine o número de elementos de cada item anterior.

2. Os baralhos comuns são compostos de 52 cartas diferentes divididas em quatro naipes: ouros ♦, paus ♣, espadas ♠ e copas ♥. Cada naipe contém 13 cartas. As cartas com as letras A, J, Q e K são chamadas, respectivamente, de ás, valete, dama e rei. Considere a retirada, ao acaso, de uma carta de um baralho comum e classifique os eventos, ou a dupla de eventos, desse experimento aleatório.

a) Evento *A*: retirar uma carta vermelha.
Evento *B*: retirar uma carta preta. complementares

b) Evento *C*: retirar uma carta de ouros.
Evento *D*: retirar uma carta de espadas. mutuamente exclusivos

c) Evento *E*: retirar uma carta que contém um número ou contém uma letra. certo

d) Evento *F*: retirar uma carta de espadas vermelha. impossível

3. Em uma caixa, há quatro fichas idênticas numeradas de 1 a 4. Retiram-se em sequência, sem reposição, duas dessas fichas ao acaso e adicionam-se os números observados.
Considere os seguintes espaços amostrais desse experimento aleatório.

I. O espaço amostral *U*, em que cada elemento de *U* indica uma soma possível dos dois números retirados.
$U = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

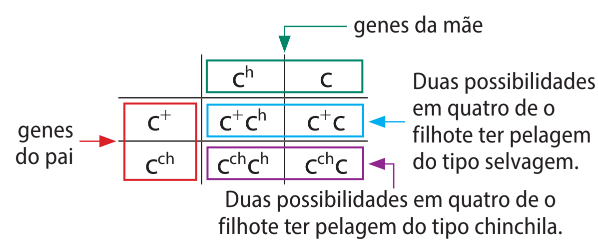
II. O espaço amostral *V*, em que cada elemento (x, y) indica a sequência dos dois números retirados, de modo que *x* representa o número da primeira ficha e *y* o da segunda.
$V = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$

- Em qual dos dois espaços amostrais, *U* ou *V*, podemos admitir que os eventos elementares são equiprováveis? Justifique.

4. Os experimentos de Mendel, que foi citado na abertura do Capítulo, foram importantes para entender como ocorre a transmissão de características determinadas geneticamente. Podemos fazer previsões, por exemplo, de como serão os pelos de uma ninhada de coelhos apenas conhecendo os pais.
Os genes que determinam a pelagem dos coelhos são chamados de c^+, c^{ch}, c^h e c. A combinação de dois desses quatro genes, dos quais cada gene vem de um dos pais, indica o tipo de pelagem, conforme o quadro a seguir:

Combinações de genes	Tipo de pelagem
c^+c^+ ou c^+c^{ch} ou c^+c^h ou c^+c	Selvagem ou aguti
$c^{ch}c^{ch}$ ou $c^{ch}c^h$ ou $c^{ch}c$	Chinchila
c^hc^h ou c^hc	Himalaio
cc	Albino

Sabendo disso, podemos fazer uma previsão do cruzamento para determinar as possibilidades de tipo de pelagem em cada filhote. Por exemplo, vamos fazer essa análise para um filhote que ainda nascerá, sabendo que seu pai tem pelagem do tipo selvagem c^+c^{ch} e sua mãe tem pelagem do tipo himalaio c^hc.
Desse modo, o espaço amostral para esse caso é $U = \{(c^+c^h), (c^+c), (c^{ch}c^h), (c^{ch}c)\}$.



- Agora, elabore um problema com essas informações e troque-o com um colega. Resolva a atividade feita por ele e confira a que foi feita por você. Resposta pessoal.

Probabilidade

Neste tópico, apresentaremos um modo de associar um número a cada resultado possível de um experimento aleatório que possui as seguintes características: um espaço amostral U com um número finito de eventos simples equiprováveis; qualquer evento de U é a união de dois ou mais eventos simples; e a união de todos os eventos simples resulta em U. Acompanhe o exemplo.

Ana e Fábio jogam um dado cúbico não viciado, cujas faces são numeradas de 1 a 6, e consideram a face voltada para cima como resultado. Ana deseja o resultado de número 5, e Fábio, o de um número par.

O espaço amostral U desse experimento aleatório é $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e o seu número de elementos é $n(U) = 6$.

O evento elementar A desejado por Ana é $A = \{5\}$ e o seu número de elementos é $n(A) = 1$.

O evento B desejado por Fábio é $B = \{2, 4, 6\}$ e o seu número de elementos é $n(B) = 3$.

Dizer que o dado é não viciado significa admitir que os eventos elementares do espaço amostral U são equiprováveis, isto é, todos têm a mesma chance de ocorrência. Então, a medida da chance de o evento elementar A ocorrer é dada pela razão um sexto, 1 em 6, pois as quantidades de elementos de A e de U são, respectivamente, 1 e 6. Chamamos essa razão de probabilidade do evento A e podemos indicá-la por:

$$\frac{1}{6} = 0{,}1666... = 16{,}666...\%$$

Portanto, a probabilidade de sair o número 5 no lançamento do dado é $\frac{1}{6}$. Observe que a probabilidade de cada um dos demais eventos elementares de U também é $\frac{1}{6}$, por exemplo, a probabilidade de sair o número 3 no lançamento do dado é $\frac{1}{6}$.

O evento B, sair um número par no lançamento do dado, possui 3 elementos. Nesse caso, a probabilidade de B ocorrer é dada pela razão três sextos, 3 em 6, que pode ser representada por:

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$$

Logo, a probabilidade de sair um número par no lançamento do dado é $\frac{1}{2}$ ou 50%. Note que o evento B é a união de três eventos simples.

Saiba que...

A probabilidade pode ser representada na forma de fração, porcentagem ou decimal.

$$B = \{2\} \cup \{4\} \cup \{6\} = \{2, 4, 6\}$$

Além disso, a união de todos os eventos elementares desse experimento resulta em U, isto é:

$$\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\} \cup \{5\} \cup \{6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = U$$

Para os experimentos aleatórios em que é possível associar um espaço amostral com as mesmas características do exemplo anterior, definimos:

Seja U um espaço amostral, não vazio, com um número finito de eventos elementares equiprováveis e A um evento do espaço amostral U, a **probabilidade de ocorrer o evento A**, indicada por $P(A)$, é a razão entre o número de elementos do evento, $n(A)$, e o número de elementos do espaço amostral, $n(U)$:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)}$$

» Propriedades

As propriedades a seguir são consequências imediatas da definição de probabilidade. Para essas propriedades, considere um espaço amostral U, não vazio, com um número finito de eventos elementares e os eventos A e B desse espaço.

1) A probabilidade do evento certo é 1.

Se A é o evento certo, ou seja, $A = U$ e $n(A) = n(U)$, temos:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} \Rightarrow P(A) = \frac{n(U)}{n(U)} \Rightarrow P(A) = P(U) = 1$$

2) A probabilidade do evento impossível é 0.

Se A é o evento impossível, ou seja, $A = \varnothing$ e $n(A) = 0$, temos:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} \Rightarrow P(A) = \frac{0}{n(U)} \Rightarrow P(A) = 0$$

3) Para todo evento A, temos $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

Seja $n(A)$ o número de elementos do evento A, então:

$$0 \leqslant n(A) \leqslant n(U) \Rightarrow \frac{0}{n(U)} \leqslant \frac{n(A)}{n(U)} \leqslant \frac{n(U)}{n(U)} \Rightarrow 0 \leqslant P(A) \leqslant 1$$

4) Se A e B são dois eventos mutuamente exclusivos, então: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Seja $n(A \cup B)$ o número de elementos do evento $A \cup B$, pela definição de probabilidade, temos:

$$P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(U)} \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{n(A) + n(B) - n(A \cap B)}{n(U)}$$

Como A e B são eventos mutuamente exclusivos, ou seja, $A \cap B = \varnothing$ e $n(A \cap B) = 0$, então:

$$P(A \cup B) = \frac{n(A)}{n(U)} + \frac{n(B)}{n(U)} - \frac{0}{n(U)} \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

5) Se A e B são dois eventos complementares, então: $P(A) + P(B) = 1$

Uma condição para que eventos A e B sejam complementares é serem mutuamente exclusivos, ou seja, $A \cap B = \varnothing$. Pela propriedade de eventos mutuamente exclusivos, temos:

$$P(A) + P(B) = P(A \cup B)$$

A outra condição para que eventos A e B sejam complementares é $A \cup B = U$, logo:

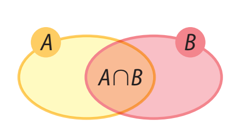
$$P(A) + P(B) = P(U) \Rightarrow P(A) + P(B) = 1$$

Outro modo de escrever essa propriedade é $P(A) = 1 - P(\overline{A})$, em que $\overline{A}$ é o complementar do conjunto A.

Saiba que...

Sejam A e B dois conjuntos finitos, a quantidade de elementos do conjunto $A \cup B$, que indicamos por $n(A \cup B)$, é dada por:
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$,
em que:

- $n(A)$ é o número de elementos do conjunto A.
- $n(B)$ é o número de elementos do conjunto B.
- $n(A \cap B)$ é o número de elementos que os conjuntos A e B têm em comum.



SERGIO LIMA

ATIVIDADES RESOLVIDAS

3. Considere os números de três algarismos distintos que podem ser formados pelos algarismos 2, 3 e 4. Calcule a probabilidade de se escolher ao acaso um desses números e ele ser:

a) múltiplo de 3. **b)** múltiplo de 5.

Resolução

O espaço amostral U que contém eventos elementares equiprováveis desse experimento aleatório é $U = \{234, 243, 324, 342, 423, 432\}$.

a) Seja A o evento de U: escolher um múltiplo de 3. Um número é múltiplo de 3 quando a soma dos seus algarismos é divisível por 3. Observe que:

- $2 + 3 + 4 = 9$
- 9 é divisível por 3

Ou seja, todos os elementos de U são divisíveis por 3. Logo, A é o evento certo, $A = U$, e sua probabilidade é 1 ou 100%.

b) Seja B o evento de U: escolher um múltiplo de 5. Observe que não há múltiplos de 5 em U, pois nenhum dos seis números terminam em 0 ou 5. Logo, B é o evento impossível, $B = \varnothing$, e sua probabilidade é 0 ou 0%.

4. No lançamento de dois dados cúbicos não viciados e numerados de 1 a 6, qual é a probabilidade:

a) de a soma das faces superiores ser maior do que 7?

b) de o produto das faces superiores ser 1?

c) de a soma das faces superiores ser maior do que 7 ou o produto das faces superiores ser 1?

Resolução

O espaço amostral U que contém eventos elementares equiprováveis desse experimento aleatório é:

$U = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

O número de elementos desse espaço é $n(U) = 36$.

a) O seguinte subconjunto de U representa o evento A, a soma das faces superiores ser maior do que 7.

$A = \{(2, 6), (3, 5), (3, 6), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

O número de elementos desse evento é $n(A) = 15$. Assim, temos:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

Logo, a probabilidade de a soma das faces superiores ser maior do que 7 é $\frac{5}{12}$.

b) O subconjunto unitário $\{(1, 1)\}$ de U descreve o evento B, o produto das faces superiores ser 1. Assim:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(U)} = \frac{1}{36}$$

Então, a probabilidade de o produto das faces superiores ser 1 é $\frac{1}{36}$.

c) O evento "a soma das faces superiores ser maior do que 7 ou o produto das faces superiores ser 1" é a união dos eventos A e B, indicada por $A \cup B$, pois se deseja o acontecimento de A ou de B. Observe que esses eventos não possuem elementos em comum, $A \cap B = \varnothing$. Então, eles são mutuamente exclusivos. Pela propriedade dos eventos mutuamente exclusivos, temos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) =$$
$$= \frac{15}{36} + \frac{1}{36} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

Portanto, a probabilidade de a soma das faces superiores ser maior do que 7 ou o produto das faces superiores ser 1 é $\frac{4}{9}$.

5. Considere um conjunto de dez frutas, em que três estão estragadas. Escolhendo aleatoriamente duas frutas desse conjunto, determine a probabilidade de:

a) ambas não estarem estragadas.

b) pelo menos uma fruta estar estragada.

Resolução

a) Representaremos as frutas pelas dez primeiras letras do alfabeto: a, b, c, d, e, f, g, h, i, j. O espaço amostral U que contém eventos elementares equiprováveis desse experimento aleatório é $U = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, ..., \{i, j\}\}$, em que cada elemento de U é uma combinação simples de 2 das 10 frutas. Desse modo, o número de elementos desse espaço é:

$$n(U) = C_{10,2} = \frac{10!}{2! \cdot (10-2)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{2 \cdot 1 \cdot 8!} = 45$$

Considere o evento A de U: escolher duas frutas não estragadas. Se das 10 frutas 3 estão estragadas, então cada combinação simples de 2 das 7 frutas não estragadas é um elemento do evento A, e o seu número elementos é:

$$n(A) = C_{7,2} = \frac{7!}{2! \cdot (7-2)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{2 \cdot 1 \cdot 5!} = 21$$

Pela definição de probabilidade, temos:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}$$

Logo, a probabilidade de duas frutas não estragadas serem escolhidas é $\frac{7}{15}$.

b) Seja B o evento de U: escolher pelo menos uma fruta estragada. Nesse caso, B é o evento complementar de A em relação ao espaço amostral U, pois escolher pelo menos uma significa escolher uma ou duas frutas estragadas, enquanto escolher duas frutas não estragadas é indicado pelo evento A. Em outras palavras, se não aconteceu A, com certeza, aconteceu B. Pela propriedade de eventos complementares, temos:

$$P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{7}{15} \Rightarrow P(B) = \frac{8}{15}$$

Portanto, a probabilidade de pelo menos uma fruta estragada ser escolhida é $\frac{8}{15}$.

6. Em uma caixa, foram colocadas dez fichas idênticas numeradas de 1 a 10. Ao sortear duas delas, sem reposição, qual é a probabilidade de essas fichas possuírem números consecutivos?

Resolução

O espaço amostral U que contém eventos elementares equiprováveis desse experimento aleatório é $U = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), ..., (10, 9)\}$, em que cada elemento de U é um arranjo simples de 2 das 10 fichas. Assim, o número de elementos desse espaço é:

$$n(U) = A_{10,2} = 10 \cdot 9 = 90$$

Seja A o evento de U: sortear duas fichas com números consecutivos. Pelo princípio fundamental da contagem, o evento A pode ocorrer em três etapas. A primeira, com 2 possibilidades, é decidir se as fichas com números consecutivos serão retiradas em ordem crescente ou decrescente. Uma vez definida a primeira etapa, a segunda, com 9 possibilidades, é escolher uma ficha com número de 1 a 9, se for em ordem crescente, ou escolher uma ficha com número de 2 a 10, se for em ordem decrescente. Uma vez definida a segunda etapa, a terceira, com 1 possibilidade, é retirar a ficha com o número consecutivo da ficha retirada na etapa anterior. Assim, o número de elementos do evento A é:

$$n(A) = 2 \cdot 9 \cdot 1 = 18$$

Pela definição de probabilidade, temos:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{18}{90} = \frac{1}{5} = 0{,}2 = 20\%$$

Logo, a probabilidade de serem sorteadas fichas com números consecutivos é 20%.

7. No lançamento de uma moeda viciada, a chance de ocorrer "cara" é quatro vezes maior do que a chance de ocorrer "coroa". Calcule a probabilidade de ocorrer "cara" em um lançamento dessa moeda.

Resolução

Sejam os eventos K, ocorrer "cara", e C, ocorrer "coroa".

Pelo enunciado, temos que $P(K) = 4 \cdot P(C)$.

Observe que K e C são eventos complementares, então $P(K) + P(C) = 1$. Substituindo $P(K)$ por $4 \cdot P(C)$, obtemos:

$4 \cdot P(C) + P(C) = 1 \Rightarrow 5 \cdot P(C) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow P(C) = \frac{1}{5} = 20\%$

A probabilidade de sair coroa é 20%, logo:

$$100\% - 20\% = 80\%$$

Assim, a probabilidade de sair cara é 80%.

5. Uma caixa contém 30 bolas idênticas de madeira, 18 azuis e 12 amarelas. Ao retirar uma bola ao acaso dessa caixa, qual é a probabilidade de ela ser azul? E a probabilidade de ser amarela? $P(\text{azul}) = \frac{3}{5}$; $P(\text{amarela}) = \frac{2}{5}$

6. No lançamento de um dado não viciado de formato cúbico, com as faces numeradas de 1 a 6, determine a probabilidade de se obter:

a) o número 1; $\frac{1}{6}$

b) um número primo; $\frac{1}{2}$

c) um número divisível por 2; $\frac{1}{2}$

d) um número menor do que 5; $\frac{2}{3}$

e) um número maior do que 6. 0

7. Considere todos os números de três algarismos distintos que podem ser formados usando os algarismos 3, 5 e 7. Escolhendo um desses números ao acaso, qual é a probabilidade de essa escolha recair em um número:

a) múltiplo de 3? 1 ou 100%

b) par? 0

8. No lançamento simultâneo de dois dados não viciados, um vermelho e outro branco, com as faces numeradas de 1 a 6, determine a probabilidade dos seguintes eventos.

a) Os números obtidos são iguais. $\frac{1}{6}$

b) A soma dos números obtidos é igual a 9. $\frac{1}{9}$

c) A soma dos números obtidos é menor do que 4. $\frac{1}{12}$

d) A soma dos números obtidos é igual a 8, e um dos dados apresenta o número 6. $\frac{1}{18}$

9. Um envelope contém fichas idênticas numeradas de 1 a 20. Ao ser retirada uma ficha ao acaso, qual é a probabilidade de ocorrer um número:

a) ímpar? $\frac{1}{2}$

b) maior do que 7? $\frac{13}{20}$

c) múltiplo de 5? $\frac{1}{5}$

d) divisível por 3? $\frac{3}{10}$

10. De um baralho comum de 52 cartas, tira-se ao acaso uma delas. Determine a probabilidade de a carta ser:

a) uma dama de qualquer naipe; $\frac{1}{13}$

b) uma dama de paus; $\frac{1}{52}$

c) uma carta de ouros; $\frac{1}{4}$

d) uma figura. $\frac{3}{13}$

11. Em uma gaveta, há três canetas de tinta azul, duas de tinta preta, quatro de tinta verde e três que estão sem carga de tinta. Escolhendo uma dessas canetas ao acaso, determine a probabilidade de a caneta:

a) escrever em uma dessas cores; $\frac{3}{4}$

b) não escrever; $\frac{1}{4}$

c) escrever em azul. $\frac{1}{4}$

12. (Enem/MEC) Em uma central de atendimento, cem pessoas receberam senhas numeradas de 1 até 100. Uma das senhas é sorteada ao acaso. Qual é a probabilidade de a senha sorteada ser um número de 1 a 20? alternativa **c**

a) $\frac{1}{100}$

b) $\frac{19}{100}$

c) $\frac{20}{100}$

d) $\frac{21}{100}$

e) $\frac{80}{100}$

13. Uma pesquisa apontou que a probabilidade de uma mulher fumante com idade acima de 40 anos ter câncer é de aproximadamente 75,6%. Qual é a probabilidade aproximada de uma mulher fumante com mais de 40 anos não ter câncer? aproximadamente 24,4%

14. Pedro utilizou um dado não viciado para fazer dois lançamentos sucessivos, multiplicou os números obtidos e anotou o produto entre eles.

a) Quais números Pedro pode ter anotado? 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30 e 36

b) Qual é a probabilidade de Pedro ter anotado o número 25? $\frac{1}{36}$

c) Qual é a probabilidade de Pedro ter anotado um número ímpar? $\frac{1}{4}$

d) Qual é a probabilidade de Pedro ter anotado um número par? $\frac{3}{4}$

15. Em um jogo, dois dados não viciados de seis faces são lançados, e os números das faces superiores são adicionados. Antes de um lançamento, Jaqueline deu o palpite de que a soma das faces superiores seria igual a 7 ou 11. Qual é a probabilidade de o palpite de Jaqueline ocorrer? $\frac{2}{9}$

16. (UFAL) Considere que três vértices de um hexágono regular são escolhidos ao acaso. Qual a probabilidade de que os vértices escolhidos formem um triângulo retângulo? $\frac{3}{5}$ ou 60%

17. (FGV-SP)

a) Quantos conjuntos de 3 letras distintas podem ser formados usando as letras da palavra INTEGRAL? 56

b) Qual a probabilidade de, escolhendo ao acaso um desses conjuntos, obtermos um que inclua a letra L? $\frac{3}{8}$

18. Os personagens *K* e *L* de um jogo eletrônico só podem ser adquiridos em uma caixa de recompensa. Ao comprar uma caixa dessas, a chance de o personagem *K* ser adquirido é o triplo da chance do personagem *L*. Se um jogador comprou uma caixa dessas, qual é a probabilidade de ele adquirir o personagem *K*, sabendo que, obrigatoriamente, um dos dois personagens será adquirido? 75%

19. (UFF-RJ) Os cavalos *X*, *Y* e *Z* disputam uma prova final na qual não poderá ocorrer empate. Sabe-se que a probabilidade de *X* vencer é igual ao dobro da probabilidade de *Y* vencer. Da mesma forma, a probabilidade de *Y* vencer é igual ao dobro da probabilidade de *Z* vencer. Calcule a probabilidade de:

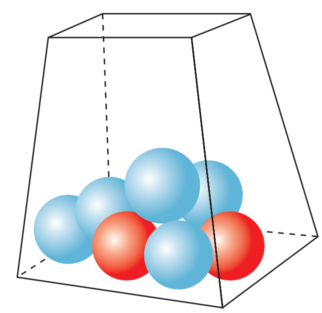
a) *X* vencer. $\frac{4}{7}$ **b)** *Y* vencer. $\frac{2}{7}$ **c)** *Z* vencer. $\frac{1}{7}$

20. (ITA-SP) Lançando três dados de 6 faces, numeradas de 1 a 6, sem ver o resultado, você é informado de que a soma dos números observados na face superior de cada dado é igual a 9. Determine a probabilidade de o número observado em cada uma dessas faces ser um número ímpar. $\frac{7}{25}$

21. (UFPE) Escolhendo aleatoriamente um dos anagramas da palavra COVEST, qual a probabilidade de suas primeira e última letras serem consoantes? alternativa **d**

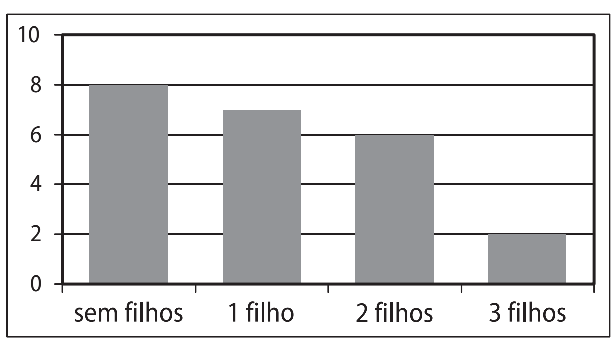
a) $\frac{4}{7}$
b) $\frac{5}{7}$
c) $\frac{1}{5}$
d) $\frac{2}{5}$
e) $\frac{3}{5}$

22. (UERJ) Em uma urna há sete bolinhas, sendo duas delas vermelhas e cinco azuis. Quatro do total de bolinhas serão sorteadas ao acaso.



Calcule a probabilidade de pelo menos uma das bolinhas sorteadas ser vermelha. $\frac{6}{7}$

23. (Enem/MEC) As 23 ex-alunas de uma turma que completou o Ensino Médio há 10 anos se encontraram em uma reunião comemorativa. Várias delas haviam se casado e tido filhos. A distribuição das mulheres, de acordo com a quantidade de filhos, é mostrada no gráfico abaixo.



ILUSTRAÇÕES: SERGIO LIMA

Um prêmio foi sorteado entre todos os filhos dessas ex-alunas. A probabilidade de que a criança premiada tenha sido um(a) filho(a) único(a) é: alternativa **e**

a) $\frac{1}{3}$
b) $\frac{1}{4}$
c) $\frac{7}{15}$
d) $\frac{7}{23}$
e) $\frac{7}{25}$

FÓRUM

Microtransações nos jogos eletrônicos

Nos últimos anos, as microtransações transformaram radicalmente a paisagem dos jogos eletrônicos. Essas microtransações, que oferecem aos jogadores a oportunidade de comprar itens virtuais ou melhorias dentro do jogo com dinheiro real, tornaram-se uma fonte significativa de receita para a indústria dos jogos. No entanto, sua ascensão não ocorreu sem controvérsias.

Por um lado, defensores das microtransações afirmam que elas proporcionam aos jogadores a liberdade de personalizar sua experiência de jogo de acordo com suas preferências, mesmo que isso signifique investir dinheiro extra.

Por outro lado, críticos argumentam que as microtransações podem criar uma divisão entre jogadores que pagam e os que não pagam, criando um ambiente desigual e prejudicando a diversão do jogo. Além disso, há preocupações éticas sobre o uso de práticas de monetização que podem ser consideradas manipuladoras, especialmente quando direcionadas a públicos mais jovens e vulneráveis.

Um dos aspectos mais polêmicos das microtransações é o conceito de *loot boxes*, ou caixas de recompensa, que oferecem aos jogadores a chance de obter itens aleatórios, cuja probabilidade de serem obtidos é menor quanto mais raro for o item.

Essa busca constante por recompensas raras pode criar um ciclo de comportamento compulsivo, em que os jogadores sentem uma pressão crescente para continuar comprando *loot boxes* na esperança de obter aquela recompensa. Essa dinâmica reforça as comparações entre as *loot boxes* e os jogos de azar, já que ambos envolvem a busca por resultados incertos com a esperança de uma recompensa gratificante.

Essa controvérsia em torno das microtransações levou a várias ações regulatórias em todo o mundo, com alguns países proibindo ou restringindo severamente certas práticas de monetização em jogos eletrônicos. No entanto, a indústria continua a se adaptar, procurando novas formas de monetização que atendam às demandas dos jogadores e às regulamentações em constante mudança.

Fonte dos dados: MARTINS, Ernane Rosa (org.). **Digital games and learning 2**. Ponta Grossa: Atena Editora, 2019. v. 2. p. 148-152. Disponível em: https://educapes.capes.gov.br/bitstream/capes/432397/1/e-book-Digital-Games-and-Learning-2.pdf. Acesso em: 18 out. 2024.

Após a leitura e a reflexão sobre o texto, faça o que se pede.

- Reúna-se a alguns colegas e debatam a respeito das vantagens, desvantagens e cuidados que se deve ter na prática das microtransações. Ver as **Orientações para o professor**.

KLYAKSUN/SHUTTERSTOCK.COM/MONORY/SHUTTERSTOCK.COM

- De modo geral, os jogos eletrônicos trabalham com a ideia de recompensa, seja com pontuação, seja com itens diversos ou outros ganhos, como modo de manter a motivação no jogo.

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

O desenvolvimento da Probabilidade

O interesse pelo estudo da Probabilidade é bem antigo na história. Leia o texto a seguir e confira.

[...]

A teoria da Probabilidade apareceu como ramo da Matemática em meados do século XV, embora tenha se iniciado como ciência empírica muito antes desse período. Suas raízes apareceram principalmente nos jogos e apostas. Há registros de que, por volta do 1200 a.C., um pedaço de osso do calcanhar (astragalus) fosse utilizado formando faces como as de um dado. Mesmo antes disso, por volta de 3500 a.C., no Egito, já havia jogos utilizando ossinhos. Os Romanos também eram apaixonados por jogos de dados e cartas que, durante a Idade Média, foram proibidos pela Igreja Cristã.

AKG-IMAGES/ALBUM/FOTOARENA

▪ [BUSTO de Jerônimo Cardano]. Século XVI. 1 gravura.

No século XVI, o matemático e jogador italiano, Jerônimo Cardano (1501-1576), decidiu estudar as probabilidades de ganhar em vários jogos de azar. Analisou seriamente as probabilidades de retirar ases de um baralho de cartas e de obter "setes" com dois dados e publicou os resultados dessas pesquisas em um manual para jogadores chamado "*Liber de Ludo Aleae*" (*O livro dos jogos de azar* – 1526).

Cardano é considerado iniciador da teoria das probabilidades, pois foi o primeiro a fazer observações do conceito probabilístico de um dado honesto e a escrever um argumento teórico para calcular probabilidades. Ele afirmou que, ao jogar dados, a chance de se obter um, três ou cinco era a mesma de se obter dois, quatro ou seis.

Apesar disso, muitos autores atribuem a origem dessa teoria às correspondências trocadas entre Pascal e Fermat em que falavam do objetivo de se obter solução dos problemas de jogos de azar propostos, em 1653, por Chevalier de Méré, conhecido como filósofo do jogo que também interessou-se pelo uso da Matemática para determinar as apostas nos jogos de azar.

[...]

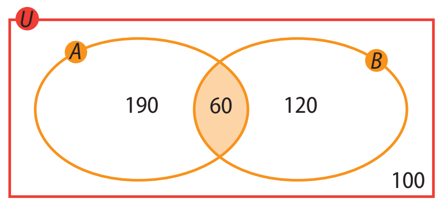
LOPES, Celi E.; MEIRELLES, Elaine. O desenvolvimento da probabilidade e da estatística. *In*: ENCONTRO REGIONAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA, 18., 2005, Campinas. **Anais** [...]. Campinas: Unicamp, 2005. p. 1. Disponível em: http://www.ime.unicamp.br/erpm2005/anais/m_cur/mc02_b.pdf. Acesso em: 16 out. 2024.

Probabilidade da união de dois eventos

Acompanhe a análise de uma situação que envolve uma pesquisa sobre a preferência entre dois jornais. Nessa pesquisa, 470 pessoas foram consultadas, e o resultado foi este: das 470 pessoas, 250 leem o jornal **A**, 180 leem o jornal **B** e 60 leem ambos os jornais. Escolhendo um dos entrevistados ao acaso, vamos verificar a probabilidade de ele ser:

a) leitor dos jornais **A** e **B**;

Vamos construir um diagrama em que os leitores do jornal **A** são representados pelo conjunto *A*, os leitores do jornal **B**, pelo conjunto *B*, e todas as pessoas envolvidas na pesquisa, nosso espaço amostral, pelo conjunto *U*. Temos:



SERGIO LIMA

Como 60 pessoas leem ambos os jornais, indicamos 60 na intersecção de *A* com *B*.
Se 250 leem o jornal **A**, então calculamos: $250 - 60 = 190$
Logo, indicamos 190 na região $A - B$.
Se 180 leem o jornal **B**, então calculamos: $180 - 60 = 120$
Assim, indicamos 120 na região $B - A$.
Como foram consultadas 470 pessoas, então calculamos: $190 + 60 + 120 = 370$
Portanto, concluímos que 100 pessoas não leem nenhum dos dois jornais. Assim, a probabilidade de que a pessoa leia ambos os jornais é:

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(U)} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{60}{470} = \frac{6}{47}$$

Logo, $P(A \cap B) = \frac{6}{47}$.

Portanto, a probabilidade de se escolher um entrevistado ao acaso e ele ser leitor dos jornais **A** e **B** é $\frac{6}{47}$.

b) leitor do jornal **A** ou do jornal **B**.

Quando adicionamos o número de pessoas que leem o jornal **A** com o número de pessoas que leem o jornal **B**, contamos duas vezes aquelas que leem os dois jornais; por isso, devemos subtrair esse grupo. Observe:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Dividindo essa igualdade por $n(U)$, temos:

$$\frac{n(A \cup B)}{n(U)} = \frac{n(A)}{n(U)} + \frac{n(B)}{n(U)} - \frac{n(A \cap B)}{n(U)}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Portanto, a probabilidade de ocorrer o evento *A* ou o evento *B* é dada pela soma das probabilidades de os dois eventos ocorrerem separadamente menos a de eles ocorrerem simultaneamente.

Esse resultado vale para a situação anterior, dos leitores dos jornais, e também para o caso geral de dois eventos *A* e *B* quaisquer.

Calculando a probabilidade de ser escolhido um leitor do jornal **A** ou do jornal **B**, temos:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{250}{470} = \frac{25}{47}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(U)} = \frac{180}{470} = \frac{18}{47}$$

$$P(A \cap B) = \frac{6}{47}$$

Sendo $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, temos:

$$P(A \cup B) = \frac{25}{47} + \frac{18}{47} - \frac{6}{47} = \frac{37}{47}$$

$$P(A \cup B) = \frac{37}{47}$$

Portanto, escolhendo-se um entrevistado ao acaso, a probabilidade de ele ser leitor do jornal **A** ou do jornal **B** é $\frac{37}{47}$.

WAVEBREAKMEDIA/SHUTTERSTOCK.COM

▪ Atualmente, muitas pessoas preferem ler jornais em meios virtuais. Entretanto, ainda há pessoas que optam pela leitura da versão impressa.

ATIVIDADES RESOLVIDAS

8. Ao se retirar uma carta de um baralho comum de 52 cartas, qual é a probabilidade de ocorrer um rei ou um valete?

Resolução

Vamos considerar os eventos:

- *A*: sair um rei.
- *B*: sair um valete.

Observamos que não há elementos em comum entre os dois eventos, ou seja, $A \cap B = \varnothing$. Como estudamos, esses eventos são chamados de mutuamente exclusivos, e tem-se que $P(A \cap B) = 0$.

Utilizando a fórmula da probabilidade da união de dois eventos e considerando $P(A \cap B) = 0$, temos: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Como, em um baralho, há quatro reis e quatro valetes, obtemos:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(U)} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{1}{13} + \frac{1}{13} = \frac{2}{13} \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{2}{13}$$

Portanto, a probabilidade de ocorrer um rei ou um valete é $\frac{2}{13}$.

9. (UFPE) Escolhendo aleatoriamente um número natural no conjunto {1, 2, ..., 100} de naturais sucessivos, seja *p* a probabilidade de este natural ser divisível por 2 ou por 3. Indique 100*p*.

Resolução

Vamos considerar os eventos:

- *A*: ser um número natural divisível por 2.
- *B*: ser um número natural divisível por 3.

Note que os elementos em comum entre os dois eventos, ou seja, $A \cap B$, serão dados pelos múltiplos de 6.

$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50, 52, 54, 56, 58, 60, 62, 64, 66, 68, 70, 72, 74, 76, 78, 80, 82, 84, 86, 88, 90, 92, 94, 96, 98, 100\}$ e $n(A) = 50$

$B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54, 57, 60, 63, 66, 69, 72, 75, 78, 81, 84, 87, 90, 93, 96, 99\}$ e $n(B) = 33$

$A \cap B = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90, 96\}$ e $n(A \cap B) = 16$

Utilizando a fórmula da probabilidade da união de dois eventos, temos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{50}{100} \text{ e } P(B) = \frac{n(B)}{n(U)} = \frac{33}{100}$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(U)} = \frac{16}{100}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{50}{100} + \frac{33}{100} - \frac{16}{100} = \frac{67}{100}$$

Como $p = P(A \cup B)$, $100p = 100 \cdot \frac{67}{100} = 67$.

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

24. Em um grupo de 80 estudantes, 50 jogam futebol, 40 jogam vôlei e 20 jogam futebol e vôlei. Escolhendo-se ao acaso um dos estudantes, qual é a probabilidade de ele:

a) jogar vôlei? $\frac{1}{2}$

b) jogar futebol? $\frac{5}{8}$

c) jogar vôlei e futebol? $\frac{1}{4}$

d) jogar vôlei ou futebol? $\frac{7}{8}$

e) jogar somente futebol? $\frac{3}{8}$

f) não praticar nenhum desses esportes? $\frac{1}{8}$

25. Um professor passou dez questões para seus estudantes Jorge, César e Teresa resolverem. Sabe-se que: Jorge fez três questões; César concluiu duas; Teresa, quatro; as questões que foram resolvidas eram diferentes. Escolhendo-se uma questão ao acaso, qual é a probabilidade de ela ter sido resolvida por:

a) Jorge? $\frac{3}{10}$

b) Jorge ou César? $\frac{1}{2}$

c) ninguém? $\frac{1}{10}$

26. (FGV-SP) Roberto J., administrador recém-formado, envia um currículo para duas empresas, **A** e **B**, à procura de emprego.
A probabilidade de ser aceito pela empresa **A** é 25% e a de ser aceito pela **B** é 20%; a probabilidade de ser aceito por ambas é 8%.

a) Qual a probabilidade de ser aceito por ao menos uma das empresas? 37%

b) Qual a probabilidade de ser aceito por exatamente uma empresa? 29%

27. Ao ser retirada uma carta de um baralho de 52 cartas, qual é a probabilidade de sair um rei ou uma carta de espadas? $\frac{4}{13}$

28. Uma urna contém 30 bolas idênticas numeradas de 1 a 30. Ao ser retirada uma bola ao acaso, qual é a probabilidade de que seu número seja:

a) par? $\frac{1}{2}$

b) ímpar? $\frac{1}{2}$

c) par e menor do que 15? $\frac{7}{30}$

d) múltiplo de 4 ou de 5? $\frac{2}{5}$

29. (Unicamp-SP) Três candidatos, **A**, **B** e **C**, concorrem à presidência de um clube. Uma pesquisa apontou que, dos sócios entrevistados, 150 não pretendem votar. Dentre os entrevistados que estão dispostos a participar da eleição, 40 sócios votariam apenas no candidato **A**, 70 votariam apenas em **B**, e 100 votariam apenas no candidato **C**. Além disso, 190 disseram que não votariam em **A**, 110 disseram que não votariam em **C**, e 10 sócios estão na dúvida e podem votar tanto em **A** como em **C**, mas não em **B**. Finalmente, a pesquisa revelou que 10 entrevistados votariam em qualquer candidato. Com base nesses dados, pergunta-se:

a) Quantos sócios entrevistados estão em dúvida entre votar em **B** ou em **C**, mas não votariam em **A**? Dentre os sócios consultados que pretendem participar da eleição, quantos não votariam em **B**? 20; 150

b) Quantos sócios participaram da pesquisa? Suponha que a pesquisa represente fielmente as intenções de voto de todos os sócios do clube. Escolhendo um sócio ao acaso, qual a probabilidade de que ele vá participar da eleição, mas ainda não tenha se decidido por um único candidato? 400; $\frac{1}{10}$

30. Um grupo de 100 funcionários de uma empresa apresenta a seguinte composição:

	Homem	**Mulher**	**Total**
Trabalha no setor de produção	10	20	30
Trabalha no setor de vendas	30	40	70
Total	40	60	100

Sorteando-se um funcionário dessa empresa, qual é a probabilidade de sair:

a) um homem? $\frac{2}{5}$

b) um homem que trabalha no setor de vendas ou uma mulher que trabalha no setor de produção? $\frac{1}{2}$

c) uma mulher que trabalha no setor de vendas? $\frac{2}{5}$

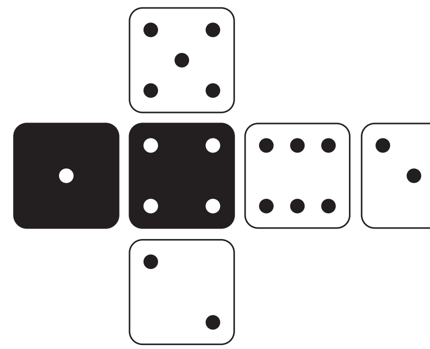
31. Fabiano foi convidado para uma festa e decidiu vestir uma camiseta e uma calça para a ocasião. Ao separar suas roupas em duas pilhas, uma de camisetas e outra de calças, ele observou que as quantidades e as cores estavam dispostas de acordo com o quadro a seguir.

	Camisetas	Calças
Branca	3	1
Preta	5	2
Azul	3	6
Vermelha	0	1
Amarela	1	0
Verde	2	0
Rosa	1	0

Elabore um problema com a probabilidade de Fabiano pegar da pilha de camisetas (ou da de calças), de forma aleatória, uma peça de roupa de cor X ou Y. Resposta pessoal.

32. (UFSCar-SP) A tabela indica as apostas feitas por cinco amigos em relação ao resultado decorrente do lançamento de um dado, cuja planificação está indicada na figura.

Ana	Face branca ou número par.
Bruna	Face branca ou número 5.
Carlos	Face preta ou número menor que 2
Diego	Face preta ou número maior que 2.
Érica	Face branca ou número menor que 4.


EDITORIA DE ARTE

Se trocarmos o conectivo "ou" pelo conectivo "e" na aposta de cada um, o jogador que terá maior redução nas suas chances de acertar o resultado, em decorrência dessa troca, será:

a) Ana.
b) Bruna.
c) Carlos.
d) Diego.
e) Érica.

alternativa **d**

Probabilidade condicional

Considere um grupo de 100 adolescentes. Eles foram questionados sobre a área de interesse com a qual têm mais afinidade. Os resultados estão apresentados a seguir.

Áreas de interesse / Sexo	Exatas	Humanas	Biológicas	Total
Masculino	19	16	14	49
Feminino	14	25	12	51
Total	33	41	26	100

Um desses jovens é selecionado ao acaso, e sabe-se que sua área de maior interesse é Biológicas. Qual é a probabilidade de esse jovem ser do sexo feminino?

Considere U o espaço amostral desse experimento aleatório com 100 elementos e os seguintes eventos:

- A: o jovem sorteado é do sexo feminino, sendo $n(A) = 51$.
- B: a área de interesse do jovem sorteado é Biológicas, sendo $n(B) = 26$.
- $A \cap B$: ser do sexo feminino e a área de interesse ser Biológicas, sendo $n(A \cap B) = 12$.

A probabilidade de o evento A ocorrer é:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{51}{100} = 0{,}51 = 51\%$$

No entanto, é desejada a probabilidade do evento A condicionada à ocorrência do evento B. Ou seja, o jovem ser do sexo feminino dado que a área de interesse do sorteado é Biológicas. Esse caso é um exemplo do que denominamos **probabilidade condicional** ou **probabilidade de *A* dado *B***, a qual é indicada por **$P(A/B)$**, que lemos: probabilidade de A, sabendo que B ocorreu.

Pelo quadro apresentado anteriormente, temos o total de 26 jovens cuja área de interesse é Biológicas, dos quais, 12 são do sexo feminino, logo:

$$P(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{12}{26} \simeq 46{,}2\%$$

Pense e responda

$\frac{19}{49}$

Considere, agora, que um rapaz foi selecionado. Qual é a probabilidade de ele se interessar pela área de Exatas?

Observe que a informação de que B ocorreu, isto é, a área de interesse do sorteado é Biológicas, alterou a probabilidade do evento A, o jovem sorteado ser do sexo feminino, ou seja:

$$P(A/B) \neq P(A)$$

A probabilidade condicionada possui a seguinte definição:

Sejam A e B eventos de um espaço amostral U não vazio e $P(B) > 0$, a **probabilidade de ocorrer o evento *A*, sabendo que *B* ocorreu**, indicada por $P(A/B)$, é dada por:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Pense e responda

Sejam A e B dois eventos mutuamente exclusivos de um espaço amostral não vazio, ou seja, $A \cap B = \varnothing$, qual é a $P(A/B)$? E a $P(B/A)$? $P(A/B) = P(B/A) = 0$

Observe que, ao simplificar a fórmula da probabilidade condicional, obtemos:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(U)}}{\frac{n(B)}{n(U)}} = \frac{n(A \cap B)}{n(U)} \cdot \frac{n(U)}{n(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} \Rightarrow \boxed{P(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}}$$

Para assistir

- MULHERES cientistas na história | Nerdologia História. [*S. l.*: *s. n.*], 2019. 1 vídeo (8 min). Publicado pelo canal Nerdologia. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=WWvIQJg4SCM. Acesso em: 16 out. 2024.

  O vídeo apresenta breves relatos históricos de mulheres cientistas, destacando como elas foram fundamentais para o desenvolvimento de suas ciências.

» Eventos sucessivos

Uma consequência da fórmula da probabilidade condicional muito utilizada na resolução de problemas probabilísticos é que a probabilidade de dois eventos, A e B, ocorrerem sucessivamente pode ser obtida do seguinte modo:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)}$$

Acompanhe o exemplo a seguir.

Três mulheres e três homens disputarão uma competição de natação em que todos têm as mesmas chances de vencer a prova. Qual é a probabilidade de uma mulher chegar em primeiro e um homem em segundo?

Todos os competidores têm a mesma chance de vencer a prova, logo o espaço amostral contém 6 eventos simples equiprováveis. Considerando A o evento "uma mulher chegar em primeiro", a probabilidade desse evento é:

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Dado que uma mulher venceu, sobram 5 competidores. Considerando B/A o evento "um homem chegou na segunda posição dado que uma mulher venceu", a probabilidade desse evento é:

$$P(B/A) = \frac{3}{5}$$

Desse modo, a probabilidade de os eventos A e B ocorrerem sucessivamente, uma mulher chegar em primeiro e um homem, em segundo, é obtida por:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10} = 0{,}3 = 30\%$$

Portanto, a probabilidade de uma mulher vencer a competição e um homem ficar na segunda colocação é 30%.

Pense e responda

Como seria a solução desse exemplo utilizando o princípio multiplicativo para indicar o número de elementos do espaço amostral e o número de elementos do evento desejado?

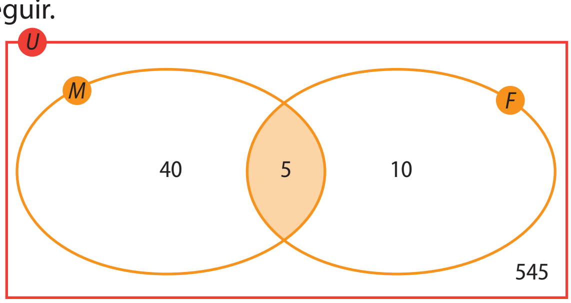
$P(A \cap B) = \frac{3 \cdot 3}{6 \cdot 5} = \frac{9}{30} = 30\%$

ATIVIDADES RESOLVIDAS

10. Em uma escola com 600 estudantes, 40 ficaram de recuperação apenas em Matemática, dez, somente em Física, e cinco, nas duas disciplinas. Determine a probabilidade de um estudante fazer recuperação de Física, sabendo que ele ficou de recuperação em Matemática.

Resolução

Construindo um diagrama, obtemos a imagem a seguir.



SERGIO LIMA

Queremos obter $P(F/M)$, ou seja, a probabilidade de um estudante fazer recuperação de Física, sabendo que ele fará recuperação também de Matemática.

$$P(F/M) = \frac{n(F \cap M)}{n(M)} \Rightarrow P(F/M) = \frac{5}{45} \Rightarrow P(F/M) = \frac{1}{9}$$

Portanto, a probabilidade de um aluno fazer recuperação de Física, sabendo que ele ficou de recuperação em Matemática, é $\frac{1}{9}$.

11. Em uma caixa, há cartões idênticos com a seguinte numeração: 1 2 3 4 5

Retirando-se ao acaso dois cartões, sucessivamente, sem reposição do primeiro, determine a probabilidade de os dois números retirados serem ímpares.

Resolução

Vamos considerar os eventos:

- A: sair número ímpar na 1ª retirada;
- B: sair número ímpar na 2ª retirada;
- B/A: sair número ímpar na 2ª retirada, sabendo que na 1ª já saiu número ímpar.

Note que $n(A) = 3$ em um espaço amostral de 5 elementos, e que $n(B/A) = 2$, em um espaço amostral de 4 elementos, pois não houve reposição da 1ª retirada. Logo:

$$P(A) = \frac{3}{5} \text{ e } P(B/A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

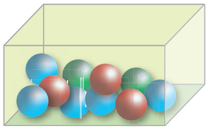
Sabemos que $P(B/A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)}$, então: $P(B \cap A) = P(A) \cdot P(B/A)$

Assim, a probabilidade de sair um número ímpar na 1ª e na 2ª retiradas é:

$$P(B \cap A) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10} = 0{,}30 \text{ ou } P(B \cap A) = 30\%$$

Portanto, $P(B \cap A) = 0{,}30$ ou 30%.

12. Uma caixa contém bolas idênticas, diferentes apenas pela cor, conforme a ilustração. Sorteando-se sucessivamente e sem reposição duas bolas da caixa, qual é a probabilidade de retirar:



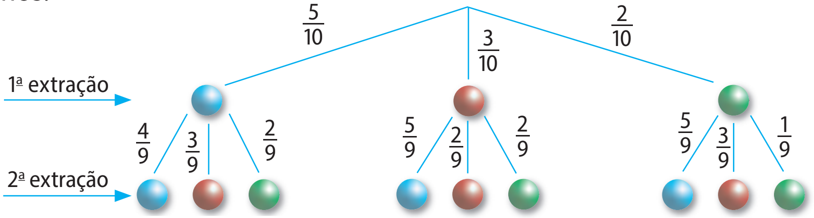
a) duas bolas azuis? **b)** duas bolas da mesma cor? **c)** uma bola vermelha na 2ª extração?

Resolução

Vamos considerar os eventos:

- A_1: tirar bola azul na 1ª extração;
- A_2: tirar bola azul na 2ª extração;
- V_1: tirar bola vermelha na 1ª extração;
- V_2: tirar bola vermelha na 2ª extração;
- M_1: tirar bola verde na 1ª extração;
- M_2: tirar bola verde na 2ª extração.

Construindo a árvore de possibilidades e escrevendo ao lado das ramificações as respectivas probabilidades, temos:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

a) A probabilidade de as duas bolas serem azuis é igual a: $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$

Portanto, a probabilidade de extrair duas bolas azuis é $\frac{2}{9}$.

b) Seja X o evento sortear duas bolas da mesma cor, então X é a união dos eventos mutuamente exclusivos: evento A, sortear duas bolas azuis; evento V, sortear duas vermelhas; e evento M, sortear duas verdes. Logo, a probabilidade $P(X)$ desejada é dada pela adição das probabilidades desses eventos, isto é:

$P(X) = P(A) + P(V) + P(M) \Rightarrow P(X) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) + P(V_1) \cdot P(V_2/V_1) + P(M_1) \cdot P(M_2/M_1)$

Pela árvore de possibilidades, temos: $P(X) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{20 + 6 + 2}{90} = \frac{14}{45}$

Logo, a probabilidade de tirar duas bolas de cores iguais é $\frac{14}{45}$.

c) A probabilidade de tirar uma bola vermelha na 2ª extração é dada por:

$P(V_2) = P(A_1) \cdot P(V_2/A_1) + P(V_1) \cdot P(V_2/V_1) + P(M_1) \cdot P(V_2/M_1)$

Pela árvore de possibilidades, temos: $P(V_2) = \frac{5}{10} \cdot \frac{3}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{15 + 6 + 6}{90} = \frac{3}{10}$

Portanto, a probabilidade de tirar uma bola vermelha na 2ª extração é $\frac{3}{10}$.

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

33. Jogando-se um dado e sabendo-se que foi obtido um número maior do que 4, qual é a probabilidade de ele ser um número par? 50%

34. (PUCCamp-SP) Lança-se um par de dados não viciados. Se a soma nos dois dados é 8, calcule a probabilidade de ocorrer a face 5 em um deles. $\frac{2}{5}$

35. Na extração de uma carta de um baralho de 52 cartas, considere os eventos:

- *A*: sair um rei;
- *B*: sair uma carta de paus.

Determine:

a) *P*(*A*) e *P*(*B*) $\frac{1}{13}$; $\frac{1}{4}$

b) *P*(*A*/*B*) e *P*(*B*/*A*) $\frac{1}{13}$; $\frac{1}{4}$

36. Retirando-se duas cartas ao acaso, sem reposição, de um baralho de 52 cartas, qual é a probabilidade de o naipe da primeira ser de paus e o da segunda ser de copas? $\frac{13}{204}$

37. (Enem/MEC) Numa escola com 1 200 alunos foi realizada uma pesquisa sobre o conhecimento desses em duas línguas estrangeiras, inglês e espanhol. Nessa pesquisa constatou-se que 600 alunos falam inglês, 500 falam espanhol e 300 não falam qualquer um desses idiomas. Escolhendo-se um aluno dessa escola ao acaso e sabendo-se que ele não fala inglês, qual a probabilidade de que esse aluno fale espanhol? alternativa **a**

a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{5}{8}$
c) $\frac{1}{4}$
d) $\frac{5}{6}$
e) $\frac{5}{14}$

38. (Famema-SP) Uma confecção de roupas produziu um lote com um total de 150 camisetas, distribuídas entre os tamanhos P e M, sendo 59 lisas e as demais estampadas. Nesse lote, havia 100 camisetas tamanho P, das quais 67 eram estampadas. Retirando-se, ao acaso, uma camiseta desse lote e sabendo que seu tamanho é M, a probabilidade de que seja uma peça estampada é igual a alternativa **c**

a) 36%.
b) 24%.
c) 48%.
d) 60%.
e) 72%.

39. (UERJ) Um instituto de pesquisa colheu informações para saber as intenções de voto no segundo turno das eleições para governador de um determinado estado. Os dados estão indicados no quadro abaixo:

Intenção de voto	Percentual
Candidato **A**	26%
Candidato **B**	40%
Votos nulos	14%
Votos brancos	20%

Escolhendo aleatoriamente um dos entrevistados, verificou-se que ele não vota no candidato **B**. A probabilidade de que esse eleitor vote em branco é: alternativa **d**

a) $\frac{1}{6}$
b) $\frac{1}{5}$
c) $\frac{1}{4}$
d) $\frac{1}{3}$
e) $\frac{2}{5}$

40. (Enem/MEC) Em um determinado ano, os computadores da receita federal de um país identificaram como inconsistentes 20% das declarações de imposto de renda que lhe foram encaminhadas. Uma declaração é classificada como inconsistente quando apresenta algum tipo de erro ou conflito nas informações prestadas. Essas declarações consideradas inconsistentes foram analisadas pelos auditores, que constataram que 25% delas eram fraudulentas. Constatou-se ainda que, dentre as declarações que não apresentaram inconsistências, 6,25% eram fraudulentas. Qual é a probabilidade de, nesse ano, a declaração de um contribuinte ser considerada inconsistente, dado que ela era fraudulenta? alternativa **e**

a) 0,0500
b) 0,1000
c) 0,1125
d) 0,3125
e) 0,5000

41. (Enem/MEC) A senha de um cofre é uma sequência formada por oito dígitos, que são algarismos escolhidos de 0 a 9. Ao inseri-la, o usuário se esqueceu dos dois últimos dígitos que formam essa senha, lembrando somente que esses dígitos são distintos.
Digitando ao acaso os dois dígitos esquecidos, a probabilidade de que o usuário acerte a senha na primeira tentativa é alternativa **b**

a) $\frac{2}{8}$ **b)** $\frac{1}{90}$ **c)** $\frac{2}{90}$ **d)** $\frac{1}{100}$ **e)** $\frac{2}{100}$

42. (Unicamp-SP) João e Maria estão passeando pela floresta. Para não se perderem no caminho, levaram consigo uma sacola com 100 pedrinhas, sendo 60 pedrinhas brancas e 40 pedrinhas pretas. A cada 5 passos eles retiram aleatoriamente uma pedrinha da sacola e jogam-na no chão para marcar o caminho. Quando eles pararam para fazer um lanche, notaram que já tinham sido jogadas 35 pedrinhas brancas e 25 pedrinhas pretas. Qual a probabilidade de as próximas duas pedrinhas jogadas serem brancas? alternativa **b**

a) $\frac{7}{13}$. **b)** $\frac{5}{13}$. **c)** $\frac{11}{52}$. **d)** $\frac{7}{52}$.

43. (UERJ) Para fazer o sorteio de um livro, quatro amigos colocaram três bolas brancas e duas pretas em uma caixa. Decidiram que o primeiro a retirar uma bola preta ficará com o livro. Na ordem alfabética de seus nomes, cada um retira uma bola, ao acaso, sem devolvê-la à caixa. A probabilidade de o terceiro amigo retirar a primeira bola preta e ficar com o livro é igual a: alternativa **b**

a) 10% **b)** 20% **c)** 30% **d)** 40%

44. Elabore um problema em que seja solicitada a probabilidade de ocorrência de dois eventos sucessivos, *A* e *B*, cuja resolução possa ser determinada por: Resposta pessoal.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

45. O gerente de uma loja de brinquedos alugou uma "máquina de pelúcia", na qual uma garra pega, aleatoriamente, um dos três bichos de pelúcia disponíveis: cachorro, gato ou urso. Evandro e Mariana vão receber, cada um, um brinde dessa máquina e perceberam que há exatamente 14 bichos de pelúcia na máquina, sendo sete cachorros, cinco gatos e dois ursos. Qual é a probabilidade de Evandro e Mariana receberem bichos de pelúcia do mesmo tipo? $\frac{32}{91}$

46. (Unesp)

Combate ao *Aedes aegypti*

O Ministério da Saúde convoca a população brasileira a manter permanentemente a mobilização nacional pelo combate ao *Aedes aegypti*, mosquito transmissor de quatro tipos de dengue, zika, chikungunya e febre amarela.

O período do verão é o mais propício à proliferação do mosquito, por causa das chuvas, e consequentemente é a época de maior risco de infecção por essas doenças. No entanto, a recomendação é não descuidar nenhum dia do ano.

UNESP, 2020

(http://portalms.saude.gov.br. Adaptado.)

Uma pessoa contraiu febre amarela, tratou-se e, algum tempo depois, contraiu dengue tipo 2. Supondo que essa pessoa resida em uma cidade onde circulam com a mesma prevalência os vírus causadores de todas essas doenças, e que essa pessoa venha a adquirir duas delas, a probabilidade de que essas doenças sejam dengue e chikungunya, nessa ordem, é alternativa **c**

a) 25%. **b)** 5%. **c)** 15%. **d)** 10%. **e)** 30%.

Eventos independentes

A probabilidade condicional de um evento A, sabendo que B ocorreu, geralmente, não é igual à probabilidade de A. Em notação matemática, indicamos esse fato por:

$$P(A/B) \neq P(A)$$

Além disso, dizemos que os eventos A e B são **dependentes**.

Existem situações em que a probabilidade condicional de um evento A, sabendo que B ocorreu, é igual à probabilidade de A, isto é:

$$P(A/B) = P(A)$$

Nesse caso, dizemos que o evento A é **independente** do evento B. Em outras palavras, a informação de que B ocorreu não altera em nada a chance de ocorrência do evento A. Acompanhe o exemplo.

São jogados uma moeda e um dado cúbico cujas faces são numeradas de 1 a 6, ambos não viciados. Qual é a probabilidade de se obter o resultado de número 5 no dado, sabendo que o resultado da moeda foi "cara"?

Adotando C para "coroa" e K para "cara", o espaço amostral U com 12 eventos simples equiprováveis desse experimento aleatório é:

$$U = \{(C, 1), (C, 2), (C, 3), (C, 4), (C, 5), (C, 6), (K, 1), (K, 2), (K, 3), (K, 4), (K, 5), (K, 6)\}$$

Considere os seguintes eventos de U:

- A: obter o resultado 5 no dado, note que $n(A) = 2$;
- B: obter o resultado "cara" na moeda, note que $n(B) = 6$;
- $A \cap B$: obter como resultado 5 no dado e "cara" na moeda, note que $n(A \cap B) = 1$.
- A/B: obter o resultado 5 no dado, sabendo que saiu "cara" na moeda.
- A probabilidade do evento A, obter o resultado 5 no dado, é:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

A probabilidade condicional do evento A dado B, obter 5 no dado, sabendo que saiu "cara" na moeda, é:

$$P(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{1}{6}$$

Logo, a ocorrência do evento B não mudou a probabilidade do evento A, pois:

$$P(A/B) = P(A) = \frac{1}{6}$$

Por isso, dizemos que o evento A é independente de B.

Suponha que A e B sejam dois eventos independentes, isto é, $P(A/B) = P(A)$. Substituindo $P(A/B)$ por $P(A)$ na fórmula da probabilidade condicional, temos:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Desse modo, definimos:

> Se A e B são eventos independentes de um espaço amostral U, então:
> $$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

ATIVIDADES RESOLVIDAS

13. Considere uma caixa contendo dez bolas idênticas, sendo diferentes apenas pela cor, quatro são pretas e seis são azuis. Sorteando-se duas bolas, de modo que a primeira bola retirada é recolocada na caixa antes de ser sorteada a segunda, qual é a probabilidade:

a) de a primeira bola ser preta e a segunda, azul?

b) de as duas bolas serem pretas?

Resolução

Seja U o espaço amostral com 10 eventos simples equiprováveis desse experimento aleatório contendo os eventos:

- A: a primeira bola sorteada é preta;
- B: a segunda bola sorteada é azul;
- C: a segunda bola sorteada é preta.

a) Há 4 bolas pretas na caixa, logo a probabilidade do evento A é $P(A) = \frac{4}{10}$.

Há 6 bolas azuis, e a primeira bola retirada retorna à caixa antes de ser sorteada a segunda, então a probabilidade do evento B é $P(B) = \frac{6}{10}$.

Por causa da reposição, a primeira bola retirada não interfere na probabilidade do segundo sorteio, ou seja, os eventos A e B são independentes, portanto:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{24}{100} = 0{,}24 = 24\%$$

A probabilidade de sortear uma bola preta e, em seguida, uma azul é 24%.

b) Como a primeira bola sorteada retorna à caixa, a probabilidade do evento C é $P(C) = \frac{4}{10}$.

Por causa da reposição, os eventos A e C são independentes, logo:

$$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C) = \frac{4}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{16}{100} = 0{,}16 = 16\%$$

A probabilidade de serem sorteadas duas bolas pretas é 16%.

14. (Unifesp) Um jovem possui dois despertadores. Um deles funciona em 80% das vezes em que é colocado para despertar e o outro em 70% das vezes. Tendo um compromisso para daqui a alguns dias e preocupado com a hora, o jovem pretende colocar os dois relógios para despertar.

a) Qual é a probabilidade de que os dois relógios venham a despertar na hora programada?

b) Qual é a probabilidade de que nenhum dos dois relógios venha a despertar na hora programada?

Resolução

a) Sejam os eventos A e B, respectivamente, relógio 1 despertar e relógio 2 despertar. Logo, $P(A) = \frac{80}{100}$ e $P(B) = \frac{70}{100}$. Assim, a probabilidade de ambos os relógios despertarem simultaneamente é:

$$P(A \cap B) = \frac{80}{100} \cdot \frac{70}{100} = \frac{5\,600}{10\,000} = \frac{56}{100} = 0{,}56 = 56\%$$

b) A probabilidade de que nenhum dos dois relógios desperte é dada pelo cálculo das probabilidades dos eventos complementares. Logo, $P(\overline{A}) = \frac{20}{100}$ e $P(\overline{B}) = \frac{30}{100}$.

Assim, a probabilidade de que ambos os relógios não despertem é:

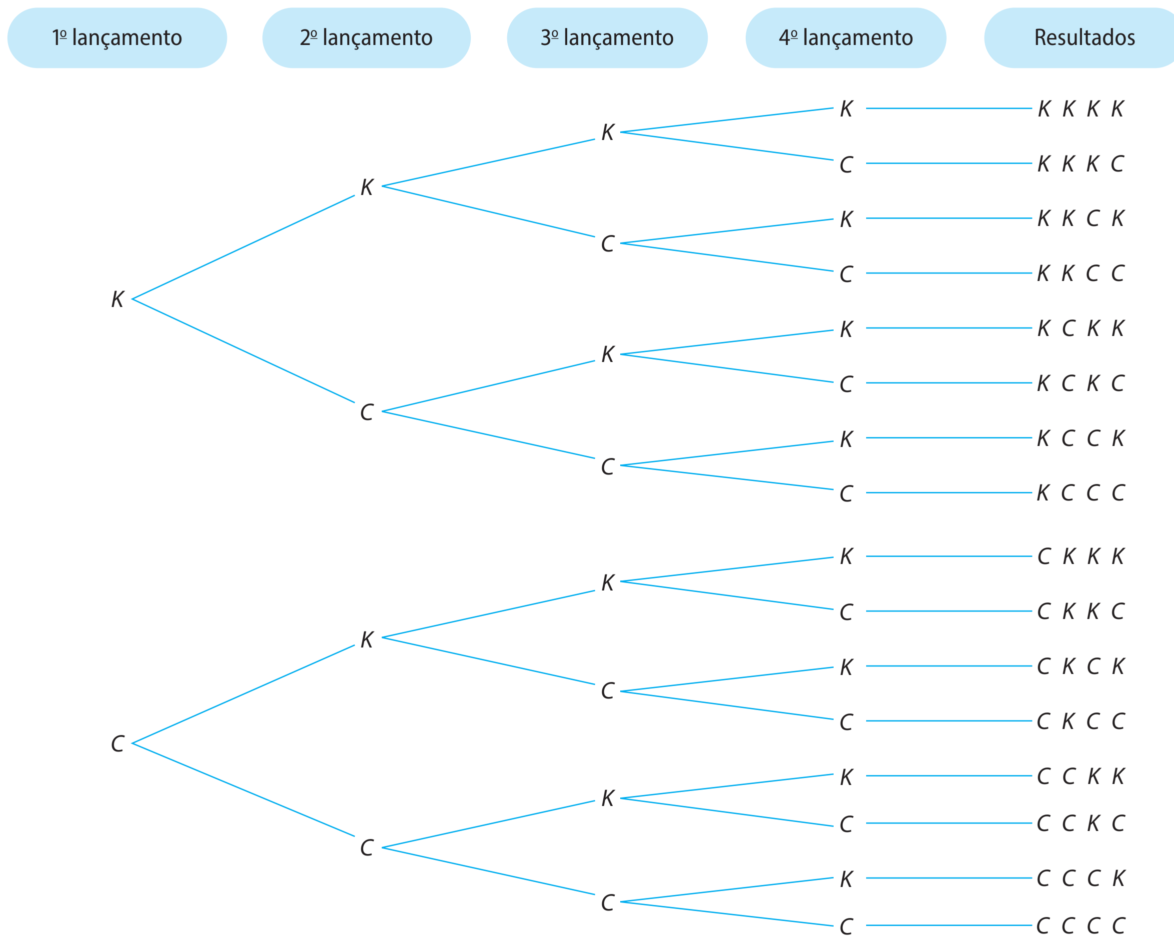
$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{20}{100} \cdot \frac{30}{100} = \frac{600}{10\,000} = \frac{6}{100} = 0{,}06 = 6\%$$

15. Uma moeda é lançada quatro vezes. Qual é a probabilidade de sair pelo menos uma vez "cara"?

Resolução

Considere o evento *A*: sair pelo menos uma vez "cara".

Adotando *K* para "cara" e *C* para "coroa", temos a seguinte árvore de possibilidades:



Desses 16 resultados possíveis, 15 apresentam pelo menos uma "cara". Portanto: $P(A) = \frac{15}{16}$.

Um modo mais prático de resolver essa questão é calcular inicialmente a probabilidade dos casos desfavoráveis ao evento *A*, isto é, a probabilidade de "não sair nenhuma cara" (evento complementar de *A*). A única maneira de não sair "cara" é sair "coroa" nos quatro lançamentos. Assim:

$$P(\bar{A}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

4º lançamento
3º lançamento
2º lançamento
1º lançamento

Portanto, a probabilidade de sair pelo menos uma "cara" é:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1 \Rightarrow P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

$$P(A) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{16 - 1}{16} \Rightarrow P(A) = \frac{15}{16}$$

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

52. alternativa **d**

47. Um dado com as faces numeradas de 1 a 6, não viciado, é lançado duas vezes. Qual é a probabilidade de saírem números menores do que 3 nos dois lançamentos? $\frac{1}{9}$

48. No lançamento de um dado e de uma moeda, qual é a probabilidade de obtermos "cara" e um número maior do que 3? $\frac{1}{4}$

49. Qual é a probabilidade de um casal ter quatro filhos, todos do sexo feminino? $\frac{1}{16}$

50. Retirando-se duas cartas ao acaso, com reposição, de um baralho com 52 cartas, qual é a probabilidade de a primeira ser de ouros e a segunda, de espadas? $\frac{1}{16}$

51. Na gaveta de um armário, há duas chaves tipo **A** e uma tipo **B**. Em outra gaveta, há um cadeado que é aberto pelas chaves do tipo **A** e três que são abertos pelas chaves do tipo **B**. Uma pessoa escolhe, ao acaso, uma chave da primeira gaveta e um cadeado da segunda gaveta. Qual é a probabilidade de o cadeado ser aberto pela chave escolhida? $\frac{5}{12}$

52. (OBMEP) Em um jogo, Pedro lança uma moeda para decidir quantas casas avançar. Quando sai cara, ele avança uma casa; quando sai coroa, ele avança duas casas. O jogo acaba quando Pedro alcança ou ultrapassa a última casa. Faltam três casas para Pedro terminar o jogo. Qual é a probabilidade de que ele tire coroa em sua última jogada?

a) $\frac{7}{8}$ **b)** $\frac{5}{6}$ **c)** $\frac{2}{3}$ **d)** $\frac{5}{8}$ **e)** $\frac{3}{4}$

53. (FGV-SP) Uma moeda é viciada de tal forma que os resultados possíveis, cara e coroa, são tais que a probabilidade de sair cara num lançamento é o triplo da de sair coroa.

a) Lançando-se uma vez a moeda, qual a probabilidade de sair cara? $\frac{3}{4}$

b) Lançando-se três vezes a moeda, qual a probabilidade de sair exatamente uma cara? $\frac{9}{64}$

54. (Inatel-MG) Uma caixa contém 4 cubos brancos e 2 pretos; outra contém 3 cubos brancos e 5 pretos. Extrai-se um cubo de cada caixa. Calcule a probabilidade de ambos os cubos serem brancos. $\frac{1}{4}$

55. (Unesp) Um piloto de Fórmula 1 estima que suas chances de subir ao pódio numa dada prova são de 60% se chover no dia da prova e de 20% se não chover. O Serviço de Meteorologia prevê que a probabilidade de chover durante a prova é de 75%. Nessas condições, calcule a probabilidade de que o piloto venha a subir ao pódio. $\frac{1}{2}$ ou 50%

56. (Fuvest-SP) Uma urna contém 5 bolas brancas e 3 bolas pretas. Três bolas são retiradas ao acaso, sucessivamente, sem reposição. Determine

a) a probabilidade de que tenham sido retiradas 2 bolas pretas e 1 bola branca. $\frac{15}{56}$

b) a probabilidade de que tenham sido retiradas 2 bolas pretas e 1 bola branca, sabendo-se que as três bolas retiradas não são da mesma cor. $\frac{1}{3}$

57. (Enem/MEC) Uma competição esportiva envolveu 20 equipes com 10 atletas cada. Uma denúncia à organização dizia que um dos atletas havia utilizado substância proibida. Os organizadores, então, decidiram fazer um exame *antidoping*. Foram propostos três modos diferentes para escolher os atletas que irão realizá-lo:

Modo **I**: sortear três atletas dentre todos os participantes;

Modo **II**: sortear primeiro uma das equipes e, desta, sortear três atletas;

Modo **III**: sortear primeiro três equipes e, então, sortear um atleta de cada uma dessas três equipes.

Considere que todos os atletas têm igual probabilidade de serem sorteados e que $P(\text{I})$, $P(\text{II})$ e $P(\text{III})$ sejam as probabilidades de que o atleta que utilizou a substância proibida seja um dos escolhidos para o exame no caso do sorteio ser feito pelo modo I, II ou III. Comparando-se essas probabilidades obtém-se alternativa **e**

a) $P(\text{I}) < P(\text{III}) < P(\text{II})$

b) $P(\text{II}) < P(\text{I}) < P(\text{III})$

c) $P(\text{I}) < P(\text{II}) = P(\text{III})$

d) $P(\text{I}) = P(\text{II}) < P(\text{III})$

e) $P(\text{I}) = P(\text{II}) = P(\text{III})$

Probabilidades em espaços amostrais não discretos

Os experimentos aleatórios estudados até o momento possuíam espaços amostrais discretos com um número finito de eventos elementares. Entretanto, existem experimentos que possuem espaços amostrais não discretos, que são indicados por intervalos reais, por exemplo.

Um ônibus chega sempre ao seu destino em qualquer instante entre 17 horas e 17 horas e 20 minutos. Qual é a probabilidade de, em determinado dia, ele chegar antes das 17 horas e 5 minutos?

Podemos considerar o intervalo real [0, 20], em que 0 indica que o ônibus chegou às 17 horas e 20 indica que o ônibus chegou às 17 horas e 20 minutos, como o espaço amostral U desse experimento aleatório, ou seja, $U = [0, 20]$. Além disso, de forma análoga, o evento A, chegar antes das 17 horas e 5 minutos, pode ser indicado pelo intervalo real $A = [0, 5[$.

Para calcular a probabilidade de eventos em espaços amostrais expressos por intervalos reais, podemos admitir que todos os pontos do intervalo são equiprováveis e considerar a porcentagem que o evento representa em relação ao espaço amostral. No exemplo do ônibus, observe que o comprimento do intervalo A em relação ao comprimento do espaço amostral U representa:

$$\frac{5}{20} = \frac{1}{4} = 25\%$$

Desse modo, podemos dizer que a probabilidade de o ônibus chegar antes das 17 horas e 5 minutos é 25%.

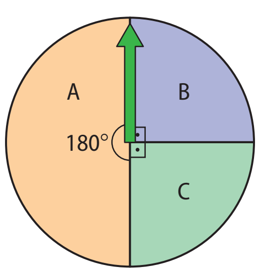
Para ler

- ABUCHAIBE, Rafael. Como é calculada chance de chuva que serviços de meteorologia divulgam. **BBC News Brasil**, [*s. l.*], 29 abr. 2023. Disponível em: https://www.bbc.com/portuguese/articles/c1680x5g0pjo. Acesso em: 7 ago. 2024.

  A reportagem relata algumas características das previsões meteorológicas e como devem ser interpretadas.

ATIVIDADE RESOLVIDA

16. Um jogo possui uma roleta dividida em 3 setores, **A**, **B** e **C**, cujos ângulos centrais estão indicados na figura. Após um giro, se o ponteiro parar sobre uma linha compartilhada por setores adjacentes, que possuem um lado em comum, ele é girado novamente. Calcule a probabilidade de o ponteiro apontar para cada um dos setores após um giro aleatório.



SERGIO LIMA

Resolução

Vamos indicar por A, B e C, respectivamente, os eventos "o ponteiro apontar para o setor **A**", "apontar para o setor **B**" e "apontar para o setor **C**".

Como o giro é aleatório, admitiremos que, após um giro, as posições finais do ponteiro possuem chances iguais. Além disso, vamos considerar que o comprimento do espaço amostral U é 360, pois uma volta completa do ponteiro possui 360°. De forma análoga, o comprimento do evento A é 180, o do evento B é 90 e o do evento C é 90. Calculando o percentual de quanto cada evento representa do espaço amostral, temos:

$\frac{180}{360} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$ $\qquad$ $\frac{90}{360} = \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\%$

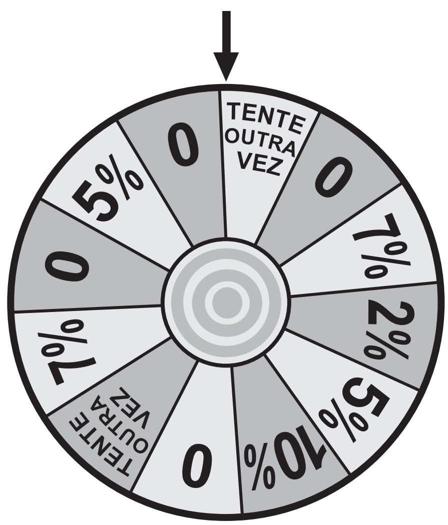
Logo, a probabilidade de o ponteiro apontar para o setor **A** é 50%, para o setor **B** é 25% e para o setor **C** é 25%.

ATIVIDADES

60. a) A probabilidade de que o ângulo central do setor seja obtuso é $\frac{1}{3}$ e a de que seja agudo é $\frac{5}{12}$.

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

58. (Enem/MEC) Em uma campanha promocional de uma loja, um cliente gira uma roleta, conforme a apresentada no esquema, almejando obter um desconto sobre o valor total de sua compra. O resultado é o que está marcado na região apontada pela seta, sendo que todas as regiões são congruentes. Além disso, um dispositivo impede que a seta venha a apontar exatamente para a linha de fronteira entre duas regiões adjacentes. Um cliente realiza uma compra e gira a roleta, torcendo para obter o desconto máximo.



A probabilidade, em porcentagem, de esse cliente ganhar o desconto máximo com um único giro da roleta é melhor aproximada por

a) 8,3.
b) 10,0.
c) 12,5.
d) 16,6.
e) 50,0.

alternativa **a**

59. (UFRJ) Um ponto *P* é aleatoriamente selecionado num retângulo *S* de dimensões 50 cm por 20 cm. Considere, a partir de *S*, as seguintes regiões:

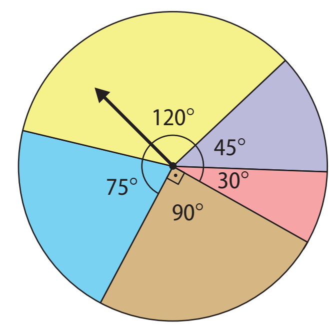
Região **A** – retângulo de dimensões 15 cm por 4 cm com centro no centro de *S* e

Região **B** – círculo de raio 4 cm com centro no centro de *S*. $\left(\frac{16\pi + 24\sqrt{3}}{3\,000}\right)$

Suponha que a probabilidade de que o ponto *P* pertença a uma região contida em *S* seja proporcional à área da região.

Determine a probabilidade de que *P* pertença simultaneamente às regiões **A** e **B**.

60. (Unesp) A figura indica uma roleta circular, dividida em cinco setores. As posições finais do ponteiro giratório da roleta, após um giro aleatório em torno do centro do círculo, possuem mesmas probabilidades. Se, após o giro, o ponteiro para sobre a linha compartilhada por setores circulares contíguos, ele é girado novamente.



ILUSTRAÇÕES: SERGIO LIMA

a) Girando-se ao acaso o ponteiro da roleta até que ele pare em uma região do interior de algum dos cinco setores, qual a probabilidade de que o ângulo central do setor seja obtuso? E qual a probabilidade de que esse ângulo seja agudo?

b) Girando-se ao acaso duas vezes o ponteiro da roleta e anotando-se os dois ângulos obtidos, qual é a probabilidade de que ao menos um deles seja ângulo interno de um polígono regular? $\frac{119}{144}$

61. (Enem/MEC) Num determinado bairro há duas empresas de ônibus, ANDABEM e BOMPASSEIO, que fazem o trajeto levando e trazendo passageiros do subúrbio ao centro da cidade. Um ônibus de cada uma dessas empresas parte do terminal a cada 30 minutos, nos horários indicados na tabela.

Horário do ônibus

ANDABEM	BOMPASSEIO
...	...
6h00min	6h10min
6h30min	6h40min
7h00min	7h10min
7h30min	7h40min
...	...

Carlos mora próximo ao terminal de ônibus e trabalha na cidade. Como não tem hora certa para chegar ao trabalho nem preferência por qualquer das empresas, toma sempre o primeiro ônibus que sai do terminal. Nessa situação, pode-se afirmar que a probabilidade de Carlos viajar num ônibus da empresa ANDABEM é: alternativa **d**

a) um quarto da probabilidade de ele viajar num ônibus da empresa BOMPASSEIO.

b) um terço da probabilidade de ele viajar num ônibus da empresa BOMPASSEIO.

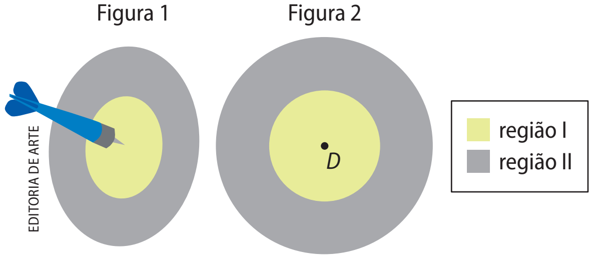
c) metade da probabilidade de ele viajar num ônibus da empresa BOMPASSEIO.

d) duas vezes maior do que a probabilidade de ele viajar num ônibus da empresa BOMPASSEIO.

e) três vezes maior do que a probabilidade de ele viajar num ônibus da empresa BOMPASSEIO.

62. (UERJ) Para construir um alvo de dardos como o da figura 1, foram traçados dois círculos de centro D, um de raio r e outro de raio $2r$, conforme ilustra a figura 2. Duas regiões são observadas no alvo: I, definida pelo círculo menor; II, a da coroa circular. alternativa **c**

Figura 1 Figura 2



EDITORIA DE ARTE

Considere que um dardo lançado por uma pessoa sempre atinge o alvo em qualquer ponto das regiões I ou II, sendo a probabilidade de acertar cada região diretamente proporcional à sua respectiva área. Assim, ao lançar um dardo, a probabilidade de essa pessoa acertar a região II é igual a:

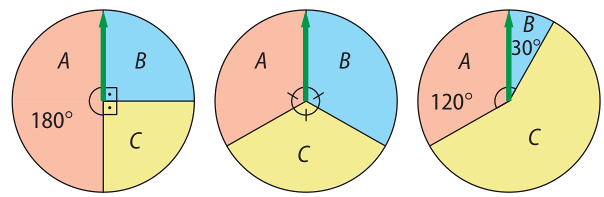
a) $\frac{5}{6}$

b) $\frac{2}{3}$

c) $\frac{3}{4}$

d) $\frac{1}{2}$

63. (UPE) A figura a seguir é composta por três roletas em formato circular, cada uma dividida em três regiões **A**, **B** e **C** e com uma seta com origem em seus centros. Após girar a seta, a chance de que esta pare em qualquer parte da roleta é sempre a mesma.



Roleta 1 Roleta 2 Roleta 3

SERGIO LIMA

As setas nas três roletas são giradas simultaneamente e sabe-se que todas pararam em exatamente uma das regiões **A**, **B** ou **C**. Seja $P(A)$ a probabilidade de as três setas pararem na região **A**, $P(B)$ a probabilidade de as três setas pararem na região **B** e $P(C)$ a probabilidade de as três setas pararem na região **C**. É CORRETO afirmar que alternativa **c**

a) $P(A) = P(B) = P(C)$

b) $P(A) > P(B) > P(C)$

c) $P(A) > P(C) > P(B)$

d) $P(C) > P(A) > P(B)$

e) $P(C) > P(B) > P(A)$

64. (FGV-SP) Duas pessoas combinaram de se encontrar entre 12h00 e 13h00. Elas também combinaram de esperar até 20 minutos pela outra pessoa depois de chegar ao local do encontro. Assumindo que os horários de chegada ao local de encontro são uniformemente distribuídos no intervalo de uma hora, que vai das 12h00 às 13h00, a probabilidade de que elas se encontrem no intervalo combinado é igual a alternativa **c**

a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{4}{9}$

c) $\frac{5}{9}$

d) $\frac{2}{3}$

e) $\frac{5}{6}$

Prevenção da gravidez na adolescência

A gravidez na adolescência é um grave problema de saúde pública, por causa das diversas consequências para a mãe, para o bebê e para todo o núcleo familiar. Uma gravidez não planejada pode trazer uma série de impactos físicos, psicológicos e sociais.

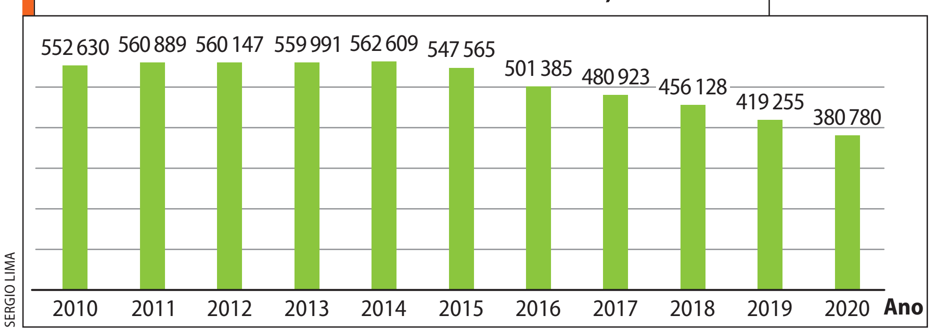
A Organização Mundial de Saúde (OMS) considera gravidez na adolescência a gestação que ocorre entre 10 e 20 anos de idade. Os riscos para a menina gestante são mortalidade materna, eclâmpsia, diabetes gestacional, hipertensão, anemia, infecções urinárias e infecções sexualmente transmissíveis (ISTs). Para o bebê, existe maior probabilidade de parto prematuro, baixo peso ao nascer (menos de 2,5 kg), desnutrição fetal nos casos em que a mãe tem anemia, malformações e síndrome de Down.

Em relação aos impactos psicológico e social, é preciso lidar com a questão da autoimagem, porque ocorre uma rápida mudança corporal na gestação. A permanência na escola também é dificultada, 70% das adolescentes que engravidam abandonam a escola e, consequentemente, anulam ou adiam o sonho de cursar uma universidade. Além disso, há a dificuldade de arrumar e conciliar um emprego e cuidar de uma criança.

No Brasil, a taxa de nascimentos de crianças filhas de mães entre 15 e 19 anos é 50% maior do que a média mundial – a taxa mundial é estimada em 46 nascimentos a cada mil meninas, enquanto no Brasil estão estimadas 68,4 gestações nessa fase da vida.

A situação ainda é mais preocupante quando é analisado o recorte de crianças e adolescentes entre 10 e 14 anos. Em 2020, foram registradas 17,5 mil mães nessa faixa etária. Na última década, a Região Nordeste foi a que mais teve casos de gravidez com esse perfil, totalizando 61,2 mil casos, seguida pela Região Sudeste, com 42,8 mil. Observe os dados no gráfico a seguir.

Brasil: faixa etária materna de 10 até 19 anos, 2010-2020



Fonte: BRASIL. Ministério dos Direitos Humanos e da Cidadania. **Casos de gravidez na adolescência diminuíram, em média, 18% desde 2019**. Brasília, DF: MDHC, 31 out. 2022. Disponível em: https://www.gov.br/mdh/pt-br/assuntos/noticias/2022/fevereiro/casos-de-gravidez-na-adolescencia-diminuiram-em-media-18-desde-2019. Acesso em: 16 out. 2024.

Por isso, há a necessidade de ações para a prevenção da gravidez na adolescência, como a Semana Nacional de Prevenção da Gravidez na Adolescência, que acontece anualmente na primeira semana de fevereiro, voltada para adolescentes, jovens, pais ou responsáveis.

Há também uma campanha de distribuição de métodos contraceptivos, como preservativo masculino ou feminino, anticoncepcionais, entre outros, realizada pelo Sistema Único de Saúde (SUS), que ajuda no planejamento familiar e na prevenção de algumas infecções sexualmente transmissíveis.

Evitar uma gravidez indesejada é responsabilidade do homem e da mulher. Existem vários métodos anticoncepcionais, observe alguns a seguir.

PORTAL DRAUZIO VARELLA/JÚPITER CONTEÚDO

CAMISINHA MASCULINA

Mecanismo: A camisinha é uma barreira física que impede o contato entre os espermatozoides e o óvulo. Não precisa de receita.

Benefícios: Previne também as ISTs (infecções sexualmente transmissíveis), como HPV, sífilis e aids.

EFICÁCIA CONTRA GRAVIDEZ: 85%

CAMISINHA FEMININA

Mecanismo: É o mesmo da camisinha masculina. Não precisa de receita.

Benefícios: Também protege contra ISTs.

EFICÁCIA CONTRA GRAVIDEZ: 79%

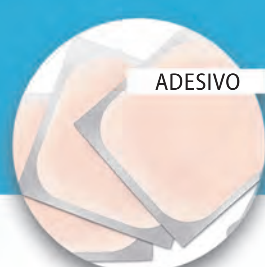
ESPONJA VAGINAL

Mecanismo: Um disco côncavo forma uma barreira física entre espermatozoides e o óvulo, além de liberar espermicidas. Não precisa de receita.

Benefícios: Pode ser colocada até 24 horas antes da relação.

EFICÁCIA CONTRA GRAVIDEZ: de 76 a 88% (o risco aumenta se a mulher já teve filhos)

ADESIVO



Mecanismo: Após ser colocado na pele, libera hormônios que caem na corrente sanguínea e impedem a ovulação. Precisa de receita.

Benefícios: Fácil aplicação.

EFICÁCIA CONTRA GRAVIDEZ: 91%

PÍLULA COMBINADA

Mecanismo: A liberação de dois hormônios (estrogênio e progestina) impede a ovulação. Precisa de receita.

Benefícios: Receitada adequadamente, ameniza sintomas de TPM e pode proteger contra câncer de ovário.

EFICÁCIA CONTRA GRAVIDEZ: 97%

- As imagens da página estão fora de proporção.

Fontes dos dados: RIBEIRO, Maiara. **Gravidez na adolescência**: quais são os impactos? [*S. l.*]: Portal Drauzio Varella, 28 dez. 2022. Disponível em: https://drauziovarella.uol.com.br/mulher/gravidez-na-adolescencia-quais-sao-os-impactos/. FUJITA JUNIOR, Luiz. **Principais métodos anticoncepcionais de fácil acesso**: infográfico. [*S. l.*]: Portal Drauzio Varella, 2 jan. 2024. Infográfico. Disponível em: https://drauziovarella.uol.com.br/infograficos/principais-metodos-anticoncepcionais-de-facil-acesso-infografico/. BRASIL. Ministério dos Direitos Humanos e da Cidadania. **Casos de gravidez na adolescência diminuíram, em média, 18% desde 2019**. Brasília, DF: MDHC, 31 out. 2022. Disponível em: https://www.gov.br/mdh/pt-br/assuntos/noticias/2022/fevereiro/casos-de-gravidez-na-adolescencia-diminuiram-em-media-18-desde-2019. Acessos em: 16 out. 2024.

Ver as **Orientações para o professor**.

Agora, reúna-se a mais 3 ou 4 colegas, e façam as atividades a seguir. NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. Como uma pessoa pode determinar qual método contraceptivo utilizará? Somente a eficácia é suficiente para determinar o método a ser utilizado?

2. Levantem hipóteses para explicar os motivos que levam o Brasil a ter índices 50% maiores de gravidez na adolescência do que a média mundial.

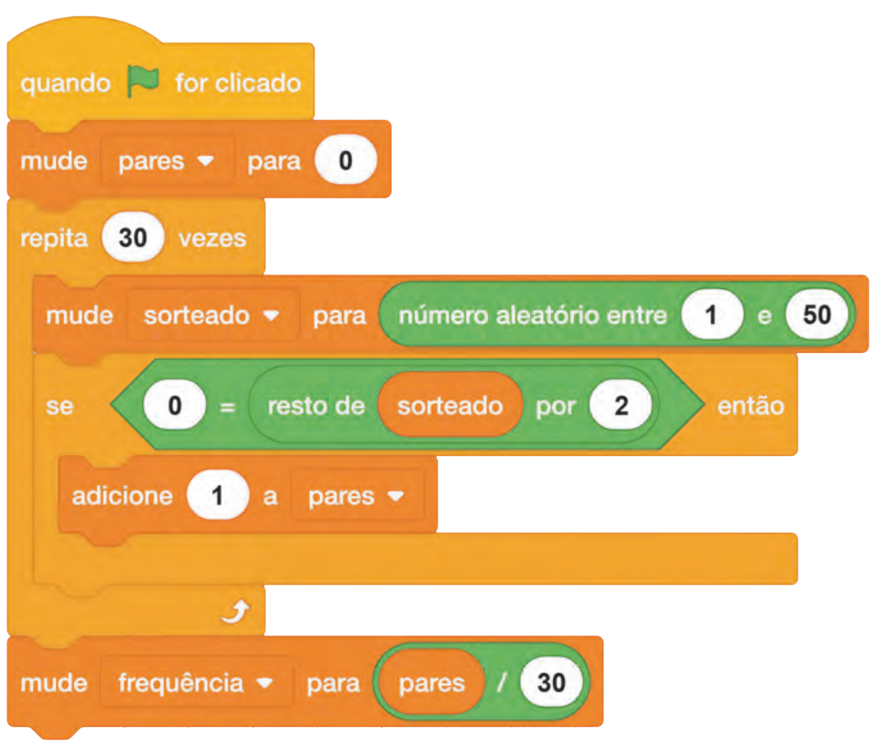
3. Produzam e publiquem um material em suas redes sociais para conscientização sobre a prevenção da gravidez na adolescência.

Frequência relativa e Probabilidade

Imagine jogar uma moeda não viciada *n* vezes e calcular a frequência relativa do resultado “cara”, ou seja, o número de vezes que saiu “cara” dividido por *n*. A probabilidade de ser obtida “cara” ao jogar essa moeda é 0,5. Desse modo, à medida que o número de repetições *n* desse experimento aumenta indefinidamente, é esperado que a frequência relativa do resultado “cara” tenda a se estabilizar próximo de 0,5. Em uma linguagem matemática, dizemos que ela vai convergir para 0,5.

Nesta seção, vamos construir um programa de computador que sorteia um número de 1 a 50. Inicialmente, ele repetirá esse experimento aleatório 30 vezes e calculará a frequência relativa dos números pares sorteados, ou seja, a quantidade de pares sorteados dividida por 30. Depois, ele será reprogramado para repetir esse procedimento 100, 1 000 e 10 000 vezes. Com isso, você poderá observar como a frequência relativa dos números pares sorteados tende a se estabilizar e se aproximar da probabilidade 0,5, pois a probabilidade de sortear um número par de 1 a 50 é 0,5.

Vamos realizar a atividade no **Scratch**, e a programação final terá a configuração indicada na imagem a seguir. Durante as etapas da programação, consulte essa configuração sempre que necessário.

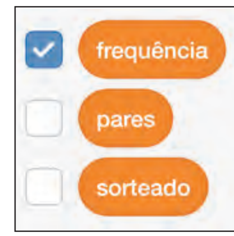


I. Para iniciar, acesse o *link* https://scratch.mit.edu (acesso em: 2 nov. 2024), clique em **Criar**, altere o idioma para Português Brasileiro no *menu* **Configurações**, , e siga as etapas.
Clique na categoria **Eventos** e arraste para a área de trabalho o bloco indicado na imagem.

IMAGENS: REPRODUÇÃO/ SCRATCH

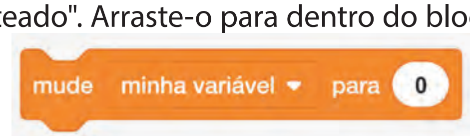
II. Clique na categoria **Controle** e arraste o bloco indicado na imagem, encaixando-o no bloco do passo anterior. Essa repetição será referente ao sorteio dos 30 números aleatórios. Portanto, substitua o número 10, que aparece automaticamente no comando, por 30; para isso, clique em cima do 10 e digite "30".

III. Clique na categoria **Variáveis**, em seguida clique em **Criar uma variável** e crie a variável "sorteado". Além disso, é necessário contar quantos números pares foram sorteados; assim, criaremos outra variável e a nomearemos "pares". Por fim, é necessária, ainda, uma variável que armazenará a frequência relativa de o número sorteado ser par. Essa variável será a "frequência". Após a criação das três variáveis, deixe selecionada em azul apenas a variável "frequência". Dessa maneira, apenas ela ficará visível para o usuário.

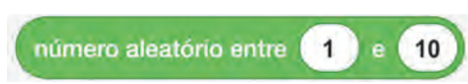


IMAGENS: REPRODUÇÃO/SCRATCH

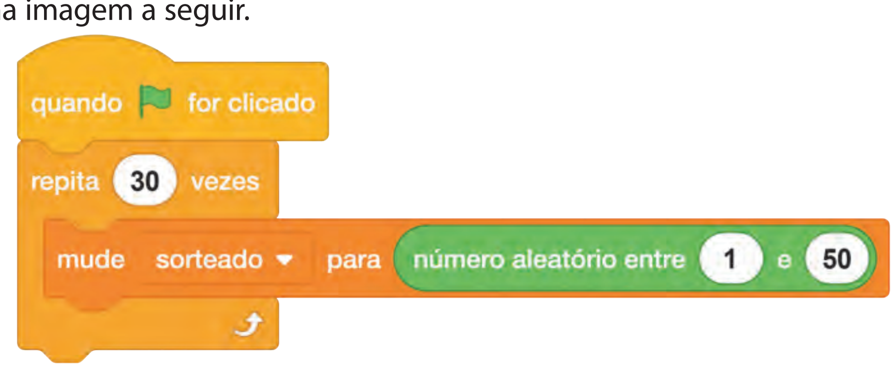
IV. Ainda em **Variáveis**, arraste o bloco indicado na imagem e substitua o texto "minha variável" preestabelecido por "sorteado". Arraste-o para dentro do bloco **Repita**.



V. Desejamos sortear números entre 1 e 50. Assim, vá à categoria **Operadores**, escolha o comando indicado na imagem e substitua o valor 10 preestabelecido por "50".



Depois, encaixe-o no lugar do 0 no bloco que foi apresentado em **IV**, de modo que fique como na imagem a seguir.



VI. Para verificar se um número natural é par, o resto da divisão desse número por 2 deve ser igual a zero. Assim, vamos introduzir um comando condicional. Na categoria **Controle**, selecione o comando indicado na imagem e encaixe-o dentro do bloco **Repita**.

VII. Na categoria **Operadores**, arraste o bloco indicado na cor verde na imagem para dentro do bloco **Se**, formando a seguinte estrutura.

VIII. No lugar do 50, é preciso colocar o operador indicado na imagem, que vai analisar o resto da divisão.

Depois, arraste a variável "sorteado" para dentro do campo vazio depois de "resto de" e preencha com "0" o campo vazio antes do sinal de igualdade e com "2" o campo vazio depois de "por", para que a condição seja atendida. Esse bloco ficará como indicado na imagem a seguir.

IX. Se a condição imposta for satisfeita, deverá ser adicionada uma unidade à variável "par". Para isso, clique na categoria **Variáveis** e, depois, selecione o comando a seguir, substituindo "minha variável" pela variável "pares".

Encaixe esse bloco dentro do bloco **Se** e será obtida a configuração a seguir.

IMAGENS: REPRODUÇÃO/SCRATCH

X. Sintetizando o que foi feito até aqui: o programa inicia quando a bandeira verde é clicada. Na sequência, é repetido 30 vezes o processo de:

- sortear um número entre 1 e 50;
- verificar se o número sorteado é par;
- se for par, adicionar 1 ao contador de números pares.

XI. Para calcular a frequência relativa dos números pares sorteados, clique em **Variáveis** e arraste o bloco de cor laranja indicado na imagem para que fique abaixo do bloco **Repita**.

Substitua o texto “minha variável” preestabelecido por "frequência". Depois selecione, na categoria **Operadores**, o comando indicado na cor verde na imagem e coloque-o no bloco de cor laranja, no lugar do 0. No primeiro espaço vazio, insira a variável "pares" e, no segundo, o número "30".

XII. Clicando na bandeira verde, no topo da área de trabalho, a variável "frequência" apresentará a frequência relativa dos números pares sorteados. Ao clicar novamente na bandeira verde, o novo experimento vai ser feito adicionando os novos pares ao número de pares do experimento anterior. Para evitar esse problema, é necessário colocar, no início do programa, uma linha que deixe o contador de número de pares zerado antes de realizar um novo experimento. Assim, clique em **Variáveis** e arraste o bloco indicado na imagem para antes do bloco **Repita**.

IMAGENS: REPRODUÇÃO/SCRATCH

Troque o texto "minha variável" preestabelecido por "pares", deixando o 0 como está. Assim, a cada novo experimento, o contador de números pares será zerado.

Agora, faça o que se pede nas atividades a seguir. NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. Utilize o programa criado para responder aos itens.

a) Clique na bandeira verde e registre a frequência relativa dos números pares sorteados ao repetir o experimento 30 vezes. Que frequência você obteve? A resposta depende do experimento.

b) Mude a configuração da programação para repetir 100 vezes o experimento, ou seja, mude os campos que contêm o número 30 para 100. Clique novamente na bandeira verde e registre a frequência relativa. Que frequência você obteve? A resposta depende do experimento.

c) Altere novamente a configuração para repetir o experimento 1 000 vezes e depois 10 000 vezes e anote as frequências relativas observadas em cada configuração. Que frequências você obteve? A resposta depende do experimento.

d) De acordo com as respostas obtidas nos itens anteriores, o que aconteceu com a frequência relativa dos números pares sorteados durante esse processo?

2. Crie um programa que calcule a chance de, ao sortearmos 50 números entre 1 e 100, ele ser múltiplo de 2 ou múltiplo de 3. Elaboração do estudante.

1. d) Espera-se que os estudantes respondam que, conforme configurou-se um número maior para o número de repetições do experimento, obteve-se uma frequência relativa mais próxima de 0,5.

ATIVIDADES COMPLEMENTARES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. (UFRR) O *Role Playing Game* (RPG) de mesa possui um dado conhecido entre os jogadores como D8. Este dado honesto possui 8 faces pentagonais, enumeradas de 1 a 8, com arestas de mesma medida. Jogando duas vezes este dado, a probabilidade da soma das faces resultar em 8 é de alternativa **e**

a) $\frac{1}{8}$
b) $\frac{1}{64}$
c) $\frac{9}{64}$
d) $\frac{1}{16}$
e) $\frac{7}{64}$

2. (Cesgranrio-RJ) Em uma amostra de 500 peças, existem exatamente quatro defeituosas. Retirando-se ao acaso uma peça dessa amostra, a probabilidade de ela ser perfeita é de: alternativa **c**

a) 99,0%
b) 99,1%
c) 99,2%
d) 99,3%
e) 99,4%

3. (Vunesp-SP) Numa pesquisa feita com 200 homens, observou-se que 80 eram casados, 20 separados, 10 eram viúvos e 90 eram solteiros. Escolhido um homem ao acaso, a probabilidade de ele não ser solteiro é: alternativa **c**

a) 0,65
b) 0,6
c) 0,55
d) 0,5
e) 0,35

4. (UFRGS-RS) Considere um hexágono regular convexo com vértices, *A*, *B*, *C*, *D*, *E* e *F*. Tomando dois vértices ao acaso, a probabilidade de eles serem extremos de uma diagonal do hexágono é alternativa **c**

a) $\frac{1}{5}$
b) $\frac{2}{5}$
c) $\frac{3}{5}$
d) $\frac{4}{5}$
e) 1

5. (UEG-GO) Um jogo de programa de auditório entre dois participantes consiste em rodar dois piões idênticos, em forma de prisma regular hexagonal, cujas faces laterais estão numeradas de 1 a 6, conforme ilustra a figura.

UEG, 2018

▪ Figura: Pião do jogo

Ganha o prêmio do jogo o participante que obtiver, na soma das faces dos dois piões, a maior pontuação. Por exemplo: se um participante rodar os piões e obtiver face 3 no primeiro pião e face 4 no segundo pião, ele soma 7 pontos. Em caso de mesma pontuação (empate), nenhum participante ganha o prêmio. Dessa forma, se o primeiro participante roda os piões e obtém face 4 no primeiro pião e face 5 no segundo pião, a probabilidade de ele ganhar o prêmio desse jogo é de alternativa **d**

a) $\frac{3}{18}$ **b)** $\frac{5}{18}$ **c)** $\frac{9}{18}$ **d)** $\frac{13}{18}$ **e)** $\frac{15}{18}$

6. (Fuvest-SP) Em uma urna, há bolas amarelas, brancas e vermelhas. Sabe-se que: alternativa **c**

I. A probabilidade de retirar uma bola vermelha dessa urna é o dobro da probabilidade de retirar uma bola amarela.

II. Se forem retiradas 4 bolas amarelas dessa urna, a probabilidade de retirar uma bola vermelha passa a ser $\frac{1}{2}$.

III. Se forem retiradas 12 bolas vermelhas dessa urna, a probabilidade de retirar uma bola branca passa a ser $\frac{1}{2}$.

A quantidade de bolas brancas na urna é

a) 8. **b)** 10. **c)** 12. **d)** 14. **e)** 16.

7. (Unicamp-SP) Um dado não tendencioso de seis faces será lançado duas vezes. A probabilidade de que o maior valor obtido nos lançamentos seja menor do que 3 é igual a

a) $\frac{1}{3}$ **b)** $\frac{1}{5}$ **c)** $\frac{1}{7}$ **d)** $\frac{1}{9}$

alternativa **d**

8. (Enem/MEC) Um morador de uma região metropolitana tem 50% de probabilidade de atrasar-se para o trabalho quando chove na região; caso não chova, sua probabilidade de atraso é de 25%. Para um determinado dia, o serviço de meteorologia estima em 30% a probabilidade da ocorrência de chuva nessa região.
Qual é a probabilidade de esse morador se atrasar para o serviço no dia para o qual foi dada a estimativa de chuva? alternativa **c**

a) 0,075 **b)** 0,150 **c)** 0,325 **d)** 0,600 **e)** 0,800

9. (Uneb-BA) Das pessoas que procuraram atendimento em um posto de saúde certo dia, constatou-se que 60% eram mulheres, 60% tinham mais de 18 anos e 85% eram mulheres ou tinham mais de 18 anos. Escolhendo-se, ao acaso, a ficha de um desses pacientes, a probabilidade de ele ser um homem, se tiver mais de 18 anos, é igual a alternativa **e**

a) $\frac{1}{4}$ **b)** $\frac{8}{25}$ **c)** $\frac{2}{5}$ **d)** $\frac{9}{20}$ **e)** $\frac{5}{12}$

10. (UFRGS-RS) As máquinas *A* e *B* produzem o mesmo tipo de parafuso. A porcentagem de parafusos defeituosos produzidos, respectivamente, pelas máquinas *A* e *B* é de 15% e de 5%. Foram misturados, numa caixa, 100 parafusos produzidos por *A* e 100 produzidos por *B*. Se tirarmos um parafuso ao acaso e ele for defeituoso, a probabilidade de que tenha sido produzido pela máquina *A* é de alternativa **e**

a) 10% **b)** 15% **c)** 30% **d)** 50% **e)** 75%

11. (EsPCEx-SP) A probabilidade de um casal ter um filho de olhos azuis é igual a $\frac{1}{3}$. Se o casal pretende ter 4 filhos, a probabilidade de que no máximo dois tenham olhos azuis é:

a) $\frac{1}{9}$ **b)** $\frac{7}{9}$ **c)** $\frac{8}{9}$ **d)** $\frac{2}{3}$ **e)** $\frac{1}{2}$

alternativa **c**

12. (UniCesumar-PR) O professor de Anatomia de um curso de Medicina preparou 20 questões para uma prova oral, sendo 12 sobre Sistema Respiratório, das quais 9 são difíceis, e preparou, também, 8 questões sobre Sistema Digestivo, das quais 6 são difíceis. Escreveu cada questão em um cartão e misturou todos eles sobre a mesa, de modo que os alunos não podiam identificar seus registros. Um dos alunos do curso pegou, ao acaso, um dos cartões. Sabendo que nesse cartão há uma questão difícil, qual é a probabilidade de essa questão tratar sobre Sistema Respiratório?

a) 55%. **b)** 60%. **c)** 65%. **d)** 70%. **e)** 80%.

alternativa **b**

13. (IFMA) Um professor de matemática solicitou aos seus alunos que identificassem a quantidade de anagramas possíveis de serem formados com as letras da palavra *chatbot*. Se cada um desses anagramas fosse escrito em um pedaço de papel e sorteado, aleatoriamente, apenas um papel, a probabilidade de o anagrama sorteado iniciar e terminar com letras iguais é, aproximadamente, de alternativa **a**

a) 4,8%. **b)** 11,9%. **c)** 2,4%. **d)** 14,3%

14. (FMABC-SP) Considere três caixas contendo cartelas de certo medicamento. A caixa **P** tem 10 cartelas, das quais 4 já ultrapassaram o prazo de validade. A caixa **Q** tem 6 cartelas, das quais 1 já ultrapassou o prazo de validade, e a caixa **R** tem 9 cartelas, das quais 3 já ultrapassaram o prazo de validade. Tomando-se aleatoriamente uma das caixas e retirando-se ao acaso uma cartela dessa caixa, a probabilidade de que essa cartela contenha medicamento com prazo de validade ultrapassado é de alternativa **d**

a) $\frac{3}{9}$ **b)** $\frac{1}{3}$ **c)** $\frac{4}{15}$ **d)** $\frac{3}{10}$ **e)** $\frac{2}{3}$

15. (UERJ)

População agredida fisicamente no Brasil em 2009

Cor ou raça	Homens	Mulheres
Branca	567 000	474 000
Preta	880 000	608 000

Adaptado de IBGE/PNAD, 2009.

A partir dos dados da tabela, escolhe-se ao acaso uma pessoa dessa população. Sabendo que essa pessoa é uma mulher, a probabilidade de ela ser preta é mais próxima de: alternativa **b**

a) 0,64 **b)** 0,56 **c)** 0,44 **d)** 0,36

16. (Enem/MEC) Em um colégio público, a admissão no primeiro ano se dá por sorteio. Neste ano há 55 candidatos, cujas inscrições são numeradas de 01 a 55. O sorteio de cada número de inscrição será realizado em etapas, utilizando-se duas urnas. Da primeira urna será sorteada uma bola, dentre bolas numeradas de 0 a 9, que representará o algarismo das unidades do número de inscrição a ser sorteado e, em seguida, da segunda urna, será sorteada uma bola para representar o algarismo das dezenas desse número. Depois do primeiro sorteio, e antes de se sortear o algarismo das dezenas, as bolas que estarão presentes na segunda urna serão apenas aquelas cujos números formam, com o algarismo já sorteado, um número de 01 a 55.

As probabilidades de os candidatos de inscrição número 50 e 02 serem sorteados são, respectivamente, alternativa **a**

a) $\frac{1}{50}$ e $\frac{1}{60}$

b) $\frac{1}{50}$ e $\frac{1}{50}$

c) $\frac{1}{50}$ e $\frac{1}{10}$

d) $\frac{1}{55}$ e $\frac{1}{54}$

e) $\frac{1}{100}$ e $\frac{1}{100}$

17. (Enem/MEC) No alojamento de uma universidade, há alguns quartos com o padrão superior ao dos demais. Um desses quartos ficou disponível, e muitos estudantes se candidataram para morar no local. Para escolher quem ficará com o quarto, um sorteio será realizado. Para esse sorteio, cartões individuais com os nomes de todos os estudantes inscritos serão depositados em uma urna, sendo que, para cada estudante de primeiro ano, será depositado um único cartão com seu nome; para cada estudante de segundo ano, dois cartões com seu nome; e, para cada estudante de terceiro ano, três cartões com seu nome. Foram inscritos 200 estudantes de primeiro ano, 150 de segundo ano e 100 de terceiro ano. Todos os cartões têm a mesma probabilidade de serem sorteados. Qual a probabilidade de o vencedor do sorteio ser um estudante de terceiro ano? alternativa **e**

a) $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{1}{3}$ **c)** $\frac{1}{8}$ **d)** $\frac{2}{9}$ **e)** $\frac{3}{8}$

18. (IFMG) Um determinado jogo com várias cartas com desenhos de animais é jogado com as seguintes regras, em ordem:

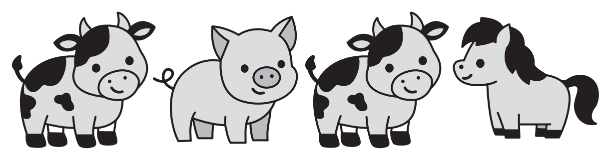
(1) A banca sorteia e mostra 4 cartas, ainda sem uma ordem definida;

(2) Cada jogador recebe outras 3 cartas e as coloca lado a lado em uma ordem que não poderá ser mudada;

(3) A banca agora pega as 4 cartas sorteadas no começo e as coloca lado a lado de forma aleatória;

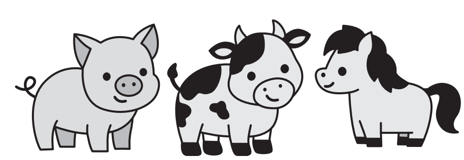
(4) Vence o jogador que conseguir enxergar exatamente sua sequência, da esquerda para direita, dentro da sequência da banca.

Considere agora as cartas sorteadas pela banca em determinada partida, ainda fora de ordem, conforme regra (1):



▪ **CARTAS DA BANCA**

Nesta partida, certo jogador recebeu e organizou suas 3 cartas na seguinte sequência, conforme regra (2):



ILUSTRAÇÕES: BENTINHO

▪ **SEQUÊNCIA DO JOGADOR**

Note que se, por exemplo, a sequência da banca fosse a apresentada, o jogador ganharia a partida, pois sua sequência aparece dentro da sequência da banca.

A banca então embaralha suas quatro cartas sorteadas e irá colocá-las em ordem de forma aleatória.

Neste momento, a probabilidade deste jogador vencer a partida conforme as regras é de, aproximadamente, alternativa **c**

a) 4%

b) 8%

c) 17%

d) 75%

19. (OBMEP) Em um teatro, cinco garotos e cinco garotas escolheram aleatoriamente seus lugares em uma fila com exatamente 10 cadeiras. Dado que as cinco garotas estão em 5 cadeiras adjacentes, qual é a probabilidade de que os cinco garotos também estejam em 5 cadeiras adjacentes? alternativa **c**


OBMEP, 2023

a) 1 **b)** $\frac{3}{4}$ **c)** $\frac{1}{3}$ **d)** $\frac{2}{5}$ **e)** $\frac{1}{2}$

20. (IFMG) JORGE, um namorado muito dedicado, mandou fazer para presentear sua amada uma coleção de cinco moedas em que em uma das faces foram desenhadas as letras de seu nome e na outra as letras do nome de ALINE. Elas foram feitas de forma que a primeira moeda tenha a letra J em uma das faces e a letra A na outra, a segunda moeda tenha a letra O em uma face e a letra L na outra, e assim sucessivamente. A probabilidade de lançadas todas as moedas, uma por vez, na ordem dos nomes, e se formar exatamente JORGE ou ALINE é igual a alternativa **c**

a) $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{1}{8}$ **c)** $\frac{1}{16}$ **d)** $\frac{1}{32}$

PARA REFLETIR

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Neste Capítulo, estudamos e analisamos uma diversidade de fenômenos e experimentos aleatórios por meio de um modelo probabilístico. Para isso, aprendemos a descrever e associar a cada experimento aleatório um espaço amostral com eventos elementares equiprováveis, a classificar os eventos de um espaço amostral e a determinar suas probabilidades.

Estudamos também probabilidade condicional, probabilidade de eventos sucessivos e probabilidade de eventos independentes. Além disso, na seção **Explorando a tecnologia**, trabalhamos as relações entre a frequência relativa e a probabilidade.

Agora, vamos refletir a respeito das aprendizagens deste Capítulo. Respostas pessoais.

- Quando associamos um espaço amostral a um experimento aleatório, o que devemos analisar?
- Liste os diferentes tipos de evento de um espaço amostral e explique como você faz para identificar cada um.
- Elabore um texto explicando as relações e as diferenças entre os conceitos de probabilidade condicional, probabilidade de eventos sucessivos e probabilidade de eventos independentes.
- Qual é a diferença entre o cálculo de uma probabilidade e o cálculo de uma frequência relativa?
- As informações presentes na seção **Conexões com...**, sobre os métodos contraceptivos que auxiliam tanto na prevenção da gravidez precoce quanto na prevenção contra as ISTs contribuíram para esclarecer alguma dúvida que você tinha sobre o tema?
- Na seção **História da Matemática**, você leu que Jerônimo Cardano se apoiou na observação dos resultados dos jogos de azar para construir sua teoria. No seu entendimento, como estudar probabilidade pode contribuir para que as pessoas tenham consciência de que jogos de azar as prejudicam em vários aspectos?

CAPÍTULO 6

Matrizes e sistemas lineares

Os elementos químicos já descobertos pela humanidade são organizados, de acordo com suas características e propriedades, na tabela periódica. Na Matemática, quando organizamos dados numéricos em uma tabela, podemos dizer que esses dados estão em uma matriz. Diferentemente da tabela periódica, as matrizes possuem operações algébricas definidas, como adição e multiplicação, por exemplo, assuntos que estudaremos neste Capítulo.

Um cientista chamado Antoine-Laurent de Lavoisier (1743-1794), com base em experimentos envolvendo reações químicas, enunciou a **lei da conservação das massas**. Ele concluiu que a massa de todas as substâncias no início da reação é igual à massa das substâncias no fim dela. Essa lei também ficou conhecida como **lei de Lavoisier**.

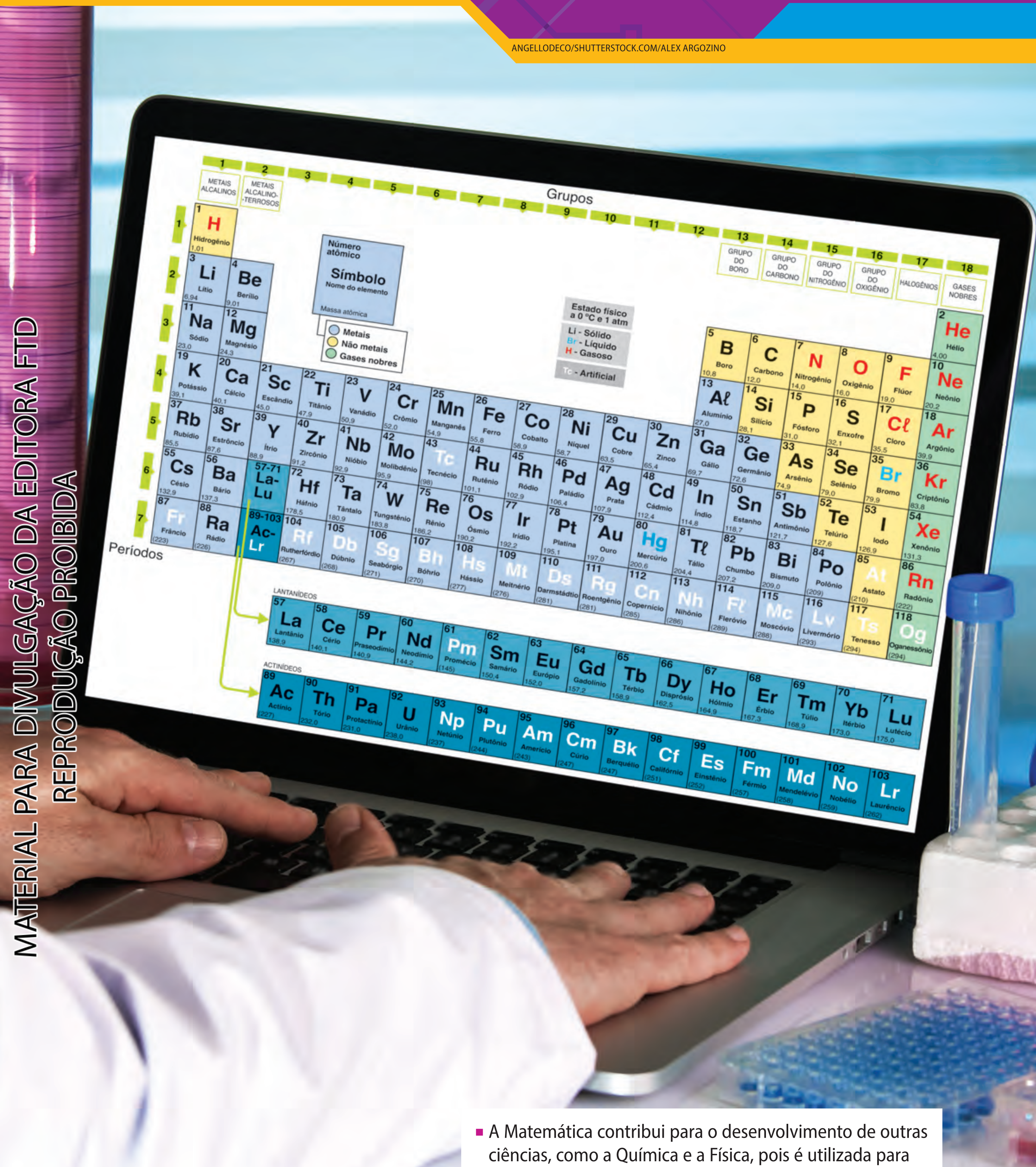
Nos laboratórios e na indústria química, são realizados cálculos envolvendo a quantidade de reagentes e de produtos presentes em uma reação química. Um desses cálculos envolve o balanceamento de equações químicas que representam as reações. Um dos métodos empregados para realizar esse balanceamento utiliza sistemas lineares, outro assunto deste Capítulo.

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Ver as **Orientações para o professor**.

Agora reúna-se a um colega, e façam o que se pede em cada questão.

1. Vocês já realizaram algum experimento envolvendo a observação de transformações de substâncias em um laboratório ou já assistiram a algum vídeo envolvendo esse tipo de experimento? Se sim, descrevam para os colegas como foi a experiência.
2. Além dos elementos químicos organizados na tabela periódica, que outros dados e informações vocês conhecem que são organizados em tabelas? Citem um exemplo.
3. O que são tabelas de dupla entrada? Deem um exemplo.
4. Expliquem como vocês fazem para resolver um sistema com duas equações e duas incógnitas.



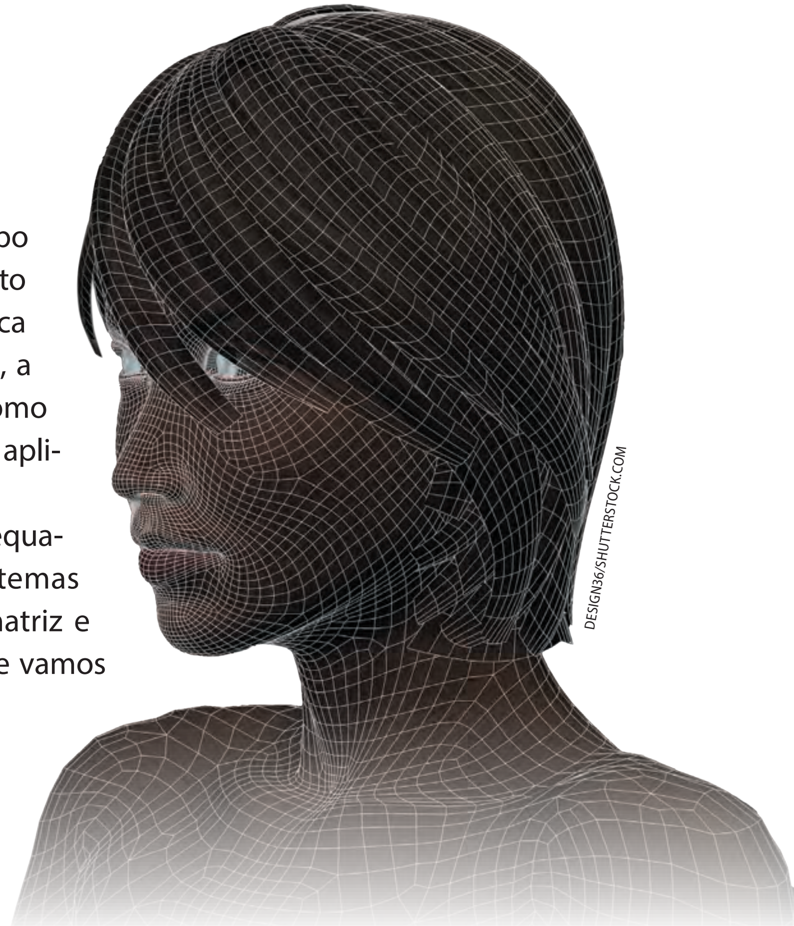
ANGELLODECO/SHUTTERSTOCK.COM/ALEX ARGOZINO

- A Matemática contribui para o desenvolvimento de outras ciências, como a Química e a Física, pois é utilizada para descrever estruturas, processos e fenômenos.

Introdução

As matrizes são bastante utilizadas no campo da Tecnologia, em especial, no desenvolvimento de animações por meio de computação gráfica e no trabalho com programação. Além disso, a resolução de televisores e monitores, bem como a de câmeras digitais, é um dos exemplos de aplicação envolvendo cálculos matriciais.

Situações que envolvem a resolução de equações lineares simultâneas, ou seja, de sistemas lineares, estão associadas ao conceito de matriz e às operações relacionadas a ele, assuntos que vamos estudar neste Capítulo.


DESIGN36/SHUTTERSTOCK.COM

▪ O uso de matrizes é amplamente empregado na computação gráfica e no processamento de imagens.

Matrizes

No dia a dia, informações relacionadas a determinado contexto, como o consumo de alimentos em certo período, podem ser organizadas em tabelas (linhas e colunas) para analisar melhor as variáveis.

Observe, por exemplo, uma tabela de dupla entrada que mostra a quantidade mensal aproximada de quatro alimentos básicos, em kilograma, consumida por uma família durante um trimestre.

Consumo de alimentos – 2º trimestre

Alimento \ Mês	Abril	Maio	Junho
Arroz	10 kg	11,5 kg	9 kg
Feijão	4 kg	5 kg	6 kg
Carne	8,5 kg	7 kg	10 kg
Legumes	12 kg	11 kg	16,5 kg

Fonte: Dados fictícios.

Cada linha dessa tabela corresponde a um alimento e cada coluna corresponde a um mês.

Assim, por exemplo, no cruzamento da linha indicada com "Feijão" e da coluna indicada com "Abril", temos 4 kg, que indica o consumo de feijão no mês de abril.

Em Matemática, tabelas de dados numéricos podem ser representadas por matrizes, nas quais os dados, também chamados elementos ou termos, são dispostos em filas horizontais (linhas) e filas verticais (colunas). Esses elementos ficam entre parênteses ou entre colchetes, como podemos observar, a seguir, na representação matricial dos dados numéricos da tabela anterior.

$$\begin{pmatrix} 10 & 11{,}5 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8{,}5 & 7 & 10 \\ 12 & 11 & 16{,}5 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} 10 & 11{,}5 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8{,}5 & 7 & 10 \\ 12 & 11 & 16{,}5 \end{bmatrix}$$

Representa a quantidade, em quilograma, de legumes que a família consumiu em maio.

Pense e responda

O que o elemento de valor 11 dessa matriz representa?

Uma **matriz** $m \times n$ (lê-se: m por n) é composta de $m \cdot n$ elementos dispostos em m linhas e n colunas, em que $m, n \in \mathbb{N}^*$.

As linhas de uma matriz são numeradas de cima para baixo, e as colunas, da esquerda para a direita, como mostra o exemplo a seguir.

$$\begin{array}{c|ccc} & 1^{\text{a}} \text{ coluna} & 2^{\text{a}} \text{ coluna} & 3^{\text{a}} \text{ coluna} \\ \hline 1^{\text{a}} \text{ linha} & 10 & 8 & 9 \\ 2^{\text{a}} \text{ linha} & 4 & 5 & 6 \\ 3^{\text{a}} \text{ linha} & 5 & 7 & 10 \\ 4^{\text{a}} \text{ linha} & 12 & 11 & 16 \end{array}$$

Essa matriz tem quatro linhas e três colunas. Dizemos, então, que é uma matriz **do tipo** ou **de ordem** 4×3 (lê-se: quatro por três), e os números que a constituem são os seus **elementos** (ou **entradas**).

As matrizes geralmente são nomeadas com uma letra maiúscula, e, para indicar os elementos dessa matriz, usamos a mesma letra, porém minúscula, acompanhada de dois índices, que representam, respectivamente, a linha e a coluna em que o elemento está localizado.

Por exemplo, considerando a matriz $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -1 & 0 \\ 4 & \pi & 5{,}3 \end{bmatrix}$, temos:

- o elemento que está na 1ª linha e na 1ª coluna é $a_{11} = \frac{1}{3}$;
- o elemento que está na 2ª linha e na 3ª coluna é $a_{23} = 5{,}3$.

Pense e responda

Qual é o elemento a_{21} da matriz A? E o elemento a_{12} da matriz A? 4; −1

Assim, podemos representar genericamente a matriz A como:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

De modo geral, uma matriz A com m linhas e n colunas ($m \times n$) pode ser representada genericamente por:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ com } m, n \in \mathbb{N}^*$$

A matriz genérica A pode ser representada, de forma abreviada, por: $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ou $A = (a_{ij})_{m \times n}$

Saiba que...

A matriz que tem todos os elementos iguais a zero é chamada **matriz nula**. Indicamos por $0_{m \times n}$ a matriz nula de ordem $m \times n$, em que $m, n \in \mathbb{N}^*$.

Na representação expandida e na abreviada, o elemento a_{ij} está na linha i e na coluna j, em que i assume valores no conjunto $\{1, 2, 3, ..., m\}$ e j assume valores no conjunto $\{1, 2, 3, ..., n\}$. Por exemplo, se os elementos da matriz $A = [a_{ij}]_{2 \times 3}$ são obtidos pela lei de formação $a_{ij} = 3i + j$, podemos calcular o valor de cada elemento e determinar a matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

- $a_{11} = 3 \cdot 1 + 1 = 3 + 1 \Rightarrow a_{11} = 4$
- $a_{12} = 3 \cdot 1 + 2 = 3 + 2 \Rightarrow a_{12} = 5$
- $a_{13} = 3 \cdot 1 + 3 = 3 + 3 \Rightarrow a_{13} = 6$
- $a_{21} = 3 \cdot 2 + 1 = 6 + 1 \Rightarrow a_{21} = 7$
- $a_{22} = 3 \cdot 2 + 2 = 6 + 2 \Rightarrow a_{22} = 8$
- $a_{23} = 3 \cdot 2 + 3 = 6 + 3 \Rightarrow a_{23} = 9$

Portanto, $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

» Matriz quadrada

Matriz quadrada é aquela que possui o número de linhas igual ao número de colunas. Nesse caso, chamamos de **matriz $n \times n$** ou, simplesmente, matriz quadrada **de ordem n**.

Observe alguns exemplos.

a) A matriz $A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ é uma matriz quadrada de ordem 2.

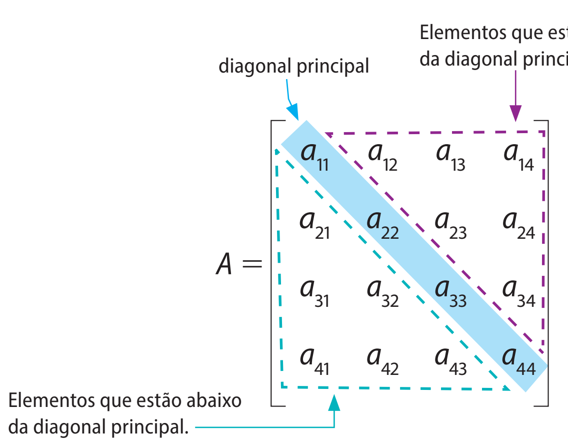
b) A matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & \frac{3}{5} & 6 \\ \sqrt{7} & 8 & 9 \end{pmatrix}$ é uma matriz quadrada de ordem 3.

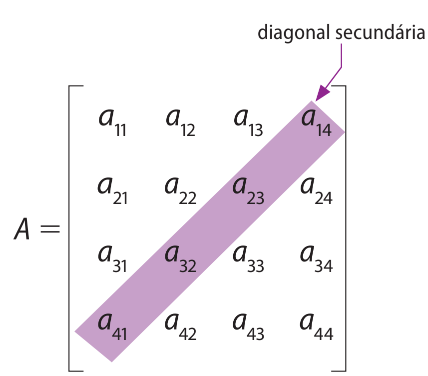
Em uma matriz quadrada, os elementos a_{ij} para os quais $i = j$ formam uma diagonal denominada **diagonal principal** da matriz. Os elementos a_{ij} para os quais $i + j = n + 1$ formam uma diagonal chamada **diagonal secundária** da matriz.

Quando $i > j$, o elemento a_{ij} está **abaixo** da diagonal principal.

Quando $i < j$, o elemento a_{ij} está **acima** da diagonal principal.

Por exemplo, para uma matriz quadrada de ordem 4, temos:





A matriz quadrada de ordem n na qual $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$ e $a_{ij} = 1$ para $i = j$ é chamada **matriz identidade** de ordem n e é indicada por I_n.

diagonal principal

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Pense e responda

Na matriz identidade de ordem n, que número real verificamos em todas as entradas que estão na diagonal principal? E em todas as entradas que não estão na diagonal principal? 1; 0

ATIVIDADES RESOLVIDAS

1. Observe as matrizes e responda às questões.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 7 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Qual é a ordem da matriz B?

b) O elemento a_{12} da matriz A é igual a qual elemento b_{ij} da matriz B?

c) Qual é o produto da diagonal principal da matriz A?

d) Qual é a soma dos elementos da diagonal secundária da matriz identidade?

Resolução

a) A matriz B possui 3 linhas e 2 colunas, portanto sua ordem é 3×2.

b) O elemento a_{12} está na primeira linha e na segunda coluna da matriz A, logo $a_{12} = 3$.
O número 3 na matriz B está na terceira linha e na primeira coluna, ou seja, $b_{31} = 3$.
Portanto, $a_{12} = b_{31}$.

c) Os elementos da diagonal principal da matriz A são $a_{11} = 2$ e $a_{22} = 5$, logo:
$a_{11} \cdot a_{22} = 2 \cdot 5 = 10$
Portanto, o produto da diagonal principal é 10.

d) A matriz identidade é a C, e os elementos da sua diagonal secundária são $a_{13} = 0$, $a_{22} = 1$ e $a_{31} = 0$, logo:
$a_{13} + a_{22} + a_{31} = 0 + 1 + 0 = 1$
Assim, a soma da diagonal secundária é 1.

2. Construa a matriz $B = (b_{ij})_{3 \times 3}$, em que:

$$b_{ij} = \begin{cases} 2i + j, \text{ se } i \geqslant j \\ 2j - i, \text{ se } i < j \end{cases}$$

Resolução

Para construir a matriz B, é necessário calcular cada entrada, de acordo com os índices referentes à linha e à coluna, utilizando a expressão correspondente.
Inicialmente, representamos genericamente a matriz B.

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

- Para determinar b_{11}, verificamos que $i = 1$ e $j = 1$; nesse caso, $i = j$.
Assim, $b_{11} = 2i + j = 2 \cdot 1 + 1 = 3$.
Logo, $b_{11} = 3$.
- Para determinar b_{12}, verificamos que $i = 1$ e $j = 2$; nesse caso, $i < j$.
Assim, $b_{12} = 2j - i = 2 \cdot 2 - 1 = 3$.
Logo, $b_{12} = 3$.
- Para determinar b_{13}, verificamos que $i = 1$ e $j = 3$; nesse caso, $i < j$.
Assim, $b_{13} = 2j - i = 2 \cdot 3 - 1 = 5$.
Logo, $b_{13} = 5$.
- Para determinar b_{21}, verificamos que $i = 2$ e $j = 1$; nesse caso, $i > j$.
Assim, $b_{21} = 2i + j = 2 \cdot 2 + 1 = 5$.
Logo, $b_{21} = 5$.
- Para determinar b_{22}, verificamos que $i = 2$ e $j = 2$; nesse caso, $i = j$.

Assim, $b_{22} = 2i + j = 2 \cdot 2 + 2 = 6$.
Logo, $b_{22} = 6$.

- Para determinar b_{23}, verificamos que $i = 2$ e $j = 3$; nesse caso, $i < j$.
  Assim, $b_{23} = 2j - i = 2 \cdot 3 - 2 = 4$.
  Logo, $b_{23} = 4$.
- Para determinar b_{31}, verificamos que $i = 3$ e $j = 1$; nesse caso, $i > j$.
  Assim, $b_{31} = 2i + j = 2 \cdot 3 + 1 = 7$.
  Logo, $b_{31} = 7$.
- Para determinar b_{32}, verificamos que $i = 3$ e $j = 2$; nesse caso, $i > j$.
  Assim, $b_{32} = 2i + j = 2 \cdot 3 + 2 = 8$.
  Logo, $b_{32} = 8$.
- Para determinar b_{33}, verificamos que $i = 3$ e $j = 3$; nesse caso, $i = j$.
  Assim, $b_{33} = 2i + j = 2 \cdot 3 + 3 = 9$.
  Logo, $b_{33} = 9$.

Portanto, a matriz B é:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

ATIVIDADES

1. (Unimontes-MG) Ao associarmos as letras do alfabeto aos números, segundo a correspondência

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

podemos afirmar que a palavra UNIMONTES pode ser codificada pela matriz 3×3 dada por
alternativa **b**

a) $\begin{bmatrix} 21 & 14 & 9 \\ 13 & 15 & 14 \\ 19 & 5 & 20 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 21 & 14 & 9 \\ 13 & 15 & 14 \\ 20 & 5 & 19 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 21 & 14 & 9 \\ 13 & 16 & 14 \\ 20 & 5 & 19 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 21 & 14 & 9 \\ 13 & 16 & 14 \\ 19 & 5 & 20 \end{bmatrix}$

2. Obtenha a matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, sabendo que $a_{ij} = 3i - j^2$. Ver as **Orientações para o professor**.

3. Dizemos que uma matriz quadrada é um quadrado mágico se as somas dos elementos de cada linha, de cada coluna e de cada diagonal, principal e secundária, são todas iguais. Qual(is) das matrizes a seguir corresponde(m) a um quadrado mágico? *A e B*

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 8 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{bmatrix}$$

Para ler

- LOPES, Tânia Isabel D. **A história dos quadrados mágicos**. Coimbra: Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, 21 jun. 2012. Disponível em: https://www.mat.uc.pt/~mat0717/public_html/Cadeiras/1Semestre/O%20que%20%C3%A9%20um%20quadrado%20m%C3%A1gico.pdf. Acesso em: 20 set. 2024.

  Leia o texto indicado para conhecer um pouco da história dos quadrados mágicos.

4. Determine cada matriz definida a seguir.
Ver as **Orientações para o professor**.

a) $A = (a_{ij})_{1 \times 3}$, tal que $a_{ij} = 2i - j$

b) $B = (b_{ij})_{4 \times 2}$, tal que $b_{ij} = \begin{cases} i + j, \text{ se } i \leq j \\ i - j, \text{ se } i > j \end{cases}$

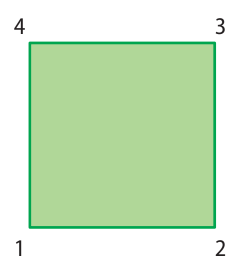
c) $C = (c_{ij})_{3 \times 3}$, tal que $c_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i+j}, \text{ se } i \neq j \\ 0, \text{ se } i = j \end{cases}$

5. (UEPA) A tabela abaixo, regularmente disposta em linhas (atleta) e colunas (dia), representa os registros dos tempos de treinamento dos atletas **A**, **B** e **C** em 3 dias. Sendo i a ordem das linhas e j a ordem das colunas e $a_{ij} = 30i + 10j$ o elemento genérico desta tabela, com i e j dados em minutos, o tempo de treinamento gasto pelo atleta **B** no terceiro dia foi de: alternativa **a**

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1^{\underline{o}}\text{ dia} & 2^{\underline{o}}\text{ dia} & 3^{\underline{o}}\text{ dia} \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \end{array}$$

a) 1 hora e 30 minutos.
b) 1 hora e 50 minutos.
c) 2 horas.
d) 2 horas e 10 minutos.
e) 2 horas e 30 minutos.

6. (Unimep-SP) É dado um quadrado de lado medindo 1 unidade, numerado conforme a figura. A matriz 4×4, tal que a_{ij} é a distância entre os vértices de números i e j, é: alternativa **b**



EDITORIA DE ARTE

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & 1 & 2 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

e) nenhuma das alternativas anteriores.

7. Determine a soma dos elementos da diagonal principal com os elementos da diagonal secundária da matriz quadrada $A = (a_{ij})_{4 \times 4}$ em que $a_{ij} = i - j$. zero

» Igualdade de matrizes

Quando consideradas duas matrizes de mesma ordem, os elementos que ocupam a mesma posição em cada uma delas, ou seja, que têm o mesmo índice, são denominados **elementos correspondentes**.

Por exemplo, nas matrizes $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$, os elementos a_{11} e b_{11} são correspondentes, assim como os elementos a_{12} e b_{12}, a_{21} e b_{21} e a_{22} e b_{22}.

Duas matrizes de mesma ordem, $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, são **iguais** se cada elemento de A for igual ao elemento correspondente de B. Denotamos isso por:

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \text{ para todo } i \in \{1, 2, \dots, m\} \text{ e todo } j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Exemplo:

Considere as matrizes a seguir.

$$A = \begin{pmatrix} x & -2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -5 & y \end{pmatrix}$$

Se $A = B$, então $x = 1$ e $y = 4$.

» Adição de matrizes

Uma livraria fez uma doação para as bibliotecas de duas escolas do bairro. Os títulos foram selecionados de acordo com a faixa etária, visando atender a estudantes do Ensino Fundamental – Anos Iniciais (EFAI), do Ensino Fundamental – Anos Finais (EFAF) e do Ensino Médio (EM). Nessa doação, os exemplares eram livros de autores internacionais (AI) e de autores brasileiros (AB).

Observe o número de livros doados para cada biblioteca.

LUIS SALVATORE/PULSAR IMAGENS

■ As bibliotecas escolares são espaços importantes de incentivo à leitura. Biblioteca de escola municipal de Ensino Fundamental em Bento Gonçalves (RS). Fotografia de 2023.

Livros doados para a Biblioteca Cecília Meireles

Segmento / Autor	EFAI	EFAF	EM
AI	36	45	75
AB	60	72	120

Fonte: Dados fictícios.

Livros doados para a Biblioteca Rachel de Queiroz

Segmento / Autor	EFAI	EFAF	EM
AI	24	60	54
AB	52	98	100

Fonte: Dados fictícios.

Pense e responda

Quantos livros de autores brasileiros destinados a estudantes do Ensino Médio foram doados por essa livraria na situação apresentada? Como você fez para descobrir isso?

Para se obter a quantidade de livros doados pela livraria, de acordo com cada característica especificada na tabela, basta adicionar os valores correspondentes às células das duas tabelas.

Considerando a matriz A, formada pelos números de livros doados para a Biblioteca Cecília Meireles, e a matriz B, formada pelos números de livros doados para a Biblioteca Rachel de Queiroz, temos:

$$A = \begin{pmatrix} 36 & 45 & 75 \\ 60 & 72 & 120 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 24 & 60 & 54 \\ 52 & 98 & 100 \end{pmatrix}$$

Nesse caso, para se obter o total de livros doados pela livraria às duas bibliotecas, de acordo com as características especificadas nas tabelas, basta adicionar os elementos correspondentes das matrizes A e B, ou seja, determinar a matriz $C = A + B$ da seguinte maneira:

$$C = \begin{pmatrix} 36 & 45 & 75 \\ 60 & 72 & 120 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 24 & 60 & 54 \\ 52 & 98 & 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36+24 & 45+60 & 75+54 \\ 60+52 & 72+98 & 120+100 \end{pmatrix}$$

A matriz $C = \begin{pmatrix} 60 & 105 & 129 \\ 112 & 170 & 220 \end{pmatrix}$ é o resultado da adição das matrizes A e B, que, de modo geral, definimos a seguir.

Dadas as matrizes de mesma ordem $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, a **matriz soma** de A com B, indicada por $A + B$, é a matriz $C = (c_{ij})_{m \times n}$, tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para todo $i \in \{1, 2, 3, ..., m\}$ e todo $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$.

220 livros. Espera-se que os estudantes respondam que, para descobrir o resultado, foram adicionados os números das células do cruzamento da linha AB e da coluna EM nas duas tabelas.

Multiplicação de um número real por uma matriz

O quadro a seguir mostra o estoque de alguns produtos de um supermercado no início da semana.

Produto \ Marca	A	B	C
Sabão em barra	60	105	129
Detergente	112	170	220

Para o fim de semana, o supermercado precisa dobrar a quantidade desses produtos. Observe que, multiplicando por 2 cada número do quadro, as novas quantidades são determinadas.

Produto \ Marca	A	B	C
Sabão em barra	$2 \cdot 60 = 120$	$2 \cdot 105 = 210$	$2 \cdot 129 = 258$
Detergente	$2 \cdot 112 = 224$	$2 \cdot 170 = 340$	$2 \cdot 220 = 440$

Na Matemática, definimos:

Dados uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e um número real k, o **produto de k por A**, indicado por $k \cdot A$, é a matriz $B = (b_{ij})_{m \times n}$, em que $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$, para todo $i \in \{1, 2, 3, ..., m\}$ e todo $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$.

Em outras palavras, efetuamos o produto de um número real por uma matriz multiplicando cada elemento da matriz por esse número. O resultado é uma matriz de mesma ordem. Acompanhe o exemplo do estoque inicial e final do supermercado na situação apresentada no início deste tópico.

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 60 & 105 & 129 \\ 112 & 170 & 220 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 60 & 2 \cdot 105 & 2 \cdot 129 \\ 2 \cdot 112 & 2 \cdot 170 & 2 \cdot 220 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 & 210 & 258 \\ 224 & 340 & 440 \end{pmatrix}$$

Matriz oposta

Dada uma matriz A de ordem $m \times n$, dizemos que a **matriz oposta** de A, denotada por $-A$, é aquela que, quando adicionada à matriz A, resulta na matriz nula de ordem $m \times n$. No exemplo a seguir, acompanhe a adição de duas matrizes opostas.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -6 & 7 \end{bmatrix}}_{A_{2 \times 2}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 6 & -7 \end{bmatrix}}_{(-A)_{2 \times 2}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{0_{2 \times 2}}$$

Observe que, ao multiplicarmos uma matriz A de ordem $m \times n$ por -1, obtemos como resposta a matriz oposta $-A$, ou seja:

$$-1 \cdot A = -A$$

Definimos a **subtração** $A - B$ de duas matrizes de mesma ordem como uma adição entre a matriz A e a matriz oposta de B, isto é:

$$A - B = A + \underbrace{(-B)}_{\substack{\text{matriz} \\ \text{oposta de } B}}$$

Propriedades da adição de matrizes

Dadas as matrizes A, B, C e 0 (matriz nula) de mesma ordem $m \times n$, valem as propriedades seguintes:

1ª) Propriedade comutativa: $A + B = B + A$

2ª) Propriedade associativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$

3ª) Propriedade do elemento neutro: $A + 0 = 0 + A = A$

4ª) Propriedade do elemento oposto: $A + (-A) = (-A) + A = 0$

ATIVIDADE RESOLVIDA

3. Dada a matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ em que:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ se } i = j \\ 1, \text{ se } i > j \\ -1, \text{ se } i < j \end{cases}$$

Calcule $A + I_3$.

Resolução

Inicialmente, escrevemos a representação genérica da matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Com base na definição da matriz A, temos:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Como I_3 é a matriz identidade de ordem 3, a soma $A + I_3$ é calculada da seguinte maneira:

$$A + I_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto: $A + I_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

8. Uma escola fez um levantamento para identificar a quantidade de estudantes matriculados por sexo e por turno. Observe.

Quantidade de estudantes matriculados

	Ensino Fundamental		Ensino Médio	
Sexo / Turno	Masculino	Feminino	Masculino	Feminino
Manhã	340	410	180	152
Tarde	105	87	64	36
Noite	96	134	113	88

Fonte: Dados fictícios.

Ver as **Orientações para o professor**.

a) Organize esses dados em duas matrizes, $A_{3 \times 2}$ e $B_{3 \times 2}$, de modo que a matriz A represente os estudantes do Ensino Fundamental por turno e sexo, e a matriz B represente os estudantes do Ensino Médio por turno e sexo.

b) Determine a matriz $C = A + B$, em que C representa o total de estudantes da escola de acordo com o turno e o sexo.

9. Considerando $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, verifique que: Ver as **Orientações para o professor**.

a) $A + B = B + A$

b) $A + (B + C) = (A + B) + C$

c) $B + 0_{2 \times 2} = B$

d) $C + (-C) = 0_{2 \times 2}$

10. Considere as seguintes matrizes:

- $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$, definida por $a_{ij} = i + j$
- $B = (b_{ij})_{2 \times 3}$, definida por $b_{ij} = i - j$

$c_{23} = 4$

Determine o elemento c_{23} da matriz $C = A + B$.

» Multiplicação de matrizes

Os quadros a seguir apresentam as quantidades de produtos vendidos por uma loja no primeiro trimestre do ano e os preços desses produtos.

	Produto I	Produto II
Janeiro	10	5
Fevereiro	20	10
Março	15	20

	Preço (R$)
Produto I	80,00
Produto II	100,00

Para calcular o faturamento de cada mês com a venda desses produtos, temos de efetuar as seguintes operações:

	Faturamento (R$)
Janeiro	$10 \cdot 80{,}00 + 5 \cdot 100{,}00 = 1.300{,}00$
Fevereiro	$20 \cdot 80{,}00 + 10 \cdot 100{,}00 = 2.600{,}00$
Março	$15 \cdot 80{,}00 + 20 \cdot 100{,}00 = 3.200{,}00$

A situação descrita pode ser representada pela seguinte multiplicação matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 20 & 10 \\ 15 & 20 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 80 \\ 100 \end{bmatrix}}_{B} = \begin{bmatrix} 10 \cdot 80 + 5 \cdot 100 \\ 20 \cdot 80 + 10 \cdot 100 \\ 15 \cdot 80 + 20 \cdot 100 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1\,300 \\ 2\,600 \\ 3\,200 \end{bmatrix}}_{C}$$, em que:

- os elementos da matriz A, de ordem 3×2, representam as quantidades vendidas de cada produto;
- os elementos da matriz B, de ordem 2×1, representam os preços dos produtos;
- os elementos da matriz C, de ordem 3×1, resultado da multiplicação da matriz A pela matriz B, representam os faturamentos de cada mês.

Apresentamos a seguir a definição de multiplicação de matrizes.

> Dadas uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e uma matriz $B = (b_{ij})_{n \times p}$, o **produto** de A por B, indicado por $A \cdot B$ ou AB, é a matriz $C = (c_{ij})_{m \times p}$, em que cada elemento c_{ij} é dado por:
>
> $$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + a_{i3} \cdot b_{3j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj}$$

Com base na definição, observe exemplos de como calcular a multiplicação de matrizes.

a) A multiplicação das matrizes $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} g & h \\ i & j \\ k & m \end{bmatrix}$ resulta em:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} ag + bi + ck & ah + bj + cm \\ dg + ei + fk & dh + ej + fm \end{bmatrix}$$

b) Dadas as matrizes $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 10 & 20 & 30 \end{bmatrix}$, efetuamos $C \cdot D$ do seguinte modo:

$$C \cdot D = \begin{bmatrix} -1 \cdot 5 + 0 \cdot 10 & -1 \cdot 6 + 0 \cdot 20 & -1 \cdot 7 + 0 \cdot 30 \\ 1 \cdot 5 + 2 \cdot 10 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 20 & 1 \cdot 7 + 2 \cdot 30 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 10 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 20 & 3 \cdot 7 + 4 \cdot 30 \end{bmatrix}$$

$$C \cdot D = \begin{bmatrix} -5 & -6 & -7 \\ 25 & 46 & 67 \\ 55 & 98 & 141 \end{bmatrix}$$

Para realizar a multiplicação de matrizes $A \cdot B$, é necessário que a quantidade de colunas da matriz A seja igual ao número de linhas da matriz B. O resultado será uma matriz com tantas linhas quanto a matriz A e tantas colunas quanto a matriz B, ou seja:

$$A_{m \times \underbrace{n}} \cdot B_{\underbrace{n} \times p} = (A \cdot B)_{m \times p}$$

iguais

Por exemplo, dadas as matrizes $A_{3 \times 4}$ e $B_{4 \times 2}$, temos:

$$A_{3 \times 4} \cdot B_{4 \times 2} = (A \cdot B)_{3 \times 2} \qquad B_{4 \times 2} \cdot A_{3 \times 4}$$

iguais

diferentes → Nesse caso, não existe $B \cdot A$, pois não é possível realizar a multiplicação definida.

Acompanhe a seguir um exemplo.

Considere as matrizes $E = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ e $F = \begin{bmatrix} 4 & 5 \end{bmatrix}$. Não existe o produto $E \cdot F$, pois a matriz E tem 2 colunas e a matriz F tem apenas 1 linha. No entanto, existe o produto $F \cdot E$, porque a matriz F tem 2 colunas e a matriz E tem 2 linhas. O resultado desse produto é:

$$F \cdot E = \begin{bmatrix} 4 \cdot 0 + 5 \cdot 1 & 4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 \end{bmatrix}$$

$$F \cdot E = \begin{bmatrix} 5 & 23 \end{bmatrix}$$

Propriedades da multiplicação de matrizes

Dadas as matrizes A, B e C, de modo que as somas e os produtos estejam definidos, valem as propriedades:

1ª) Propriedade associativa: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

2ª) Propriedade distributiva: $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$ (à esquerda)

$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ (à direita)

3ª) Propriedade do elemento neutro para matrizes quadradas: $A \cdot I_n = A$ e $I_n \cdot A = A$, em que A é uma matriz quadrada de ordem n e I_n é a matriz identidade de ordem n.

Saiba que...

Na multiplicação de matrizes, também pode ser utilizada a notação de potência. Por exemplo, o produto $A \cdot A$ também pode ser indicado por A^2.

Observações:

a) A multiplicação de matrizes **não é comutativa**, ou seja, pode não valer a propriedade $AB = BA$.

Por exemplo: se $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, então $AB \neq BA$, pois $AB = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $BA = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$.

b) Se ocorrer $AB = BA$, dizemos que as **matrizes *A* e *B* comutam**.

Por exemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ comutam, pois $AB = \begin{pmatrix} 12 & 12 \\ 18 & 6 \end{pmatrix}$ e $BA = \begin{pmatrix} 12 & 12 \\ 18 & 6 \end{pmatrix}$.

Observe que é necessário que as matrizes A e B sejam quadradas para que existam tanto o produto AB como o produto BA.

c) Diferentemente do que ocorre com os números reais, o produto de duas matrizes não nulas pode resultar em uma matriz nula.

Por exemplo: considerando $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, temos $A \neq 0$, $B \neq 0$ e $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

ATIVIDADES RESOLVIDAS

4. Sendo $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$, determine, se possível:

a) $A \cdot B$

b) $B \cdot A$

Resolução

a) Como A é uma matriz de ordem 2×2 e B, de ordem 2×3, existe a matriz C tal que $C = AB$. A matriz C é de ordem 2×3. Nesse caso, temos:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} = 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$

$c_{12} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} = 2 \cdot 4 + 1 \cdot (-3) = 5$

$c_{13} = a_{11} \cdot b_{13} + a_{12} \cdot b_{23} = 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 5 = 1$

$c_{21} = a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} = 3 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 = -1$

$c_{22} = a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} = 3 \cdot 4 + (-1) \cdot (-3) = 15$

$c_{23} = a_{21} \cdot b_{13} + a_{22} \cdot b_{23} = 3 \cdot (-2) + (-1) \cdot 5 = -11$

Logo: $C = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -1 & 15 & -11 \end{bmatrix}$

b) Como B é uma matriz de ordem 2×3 e A, de ordem 2×2, temos a quantidade de colunas de B diferente da quantidade de linhas de A. Nesse caso, não existe a matriz produto $B \cdot A$.

5. (UFPB) As mensagens entre duas agências de espionagem, Gama e Rapa, são trocadas usando uma linguagem de códigos, onde cada número inteiro entre 0 e 25 representa uma letra, conforme mostra a tabela a seguir:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
7	10	22	9	5	4	18	2	17	25	23	12	14	8	1	19	15	20	21	11	3	16	24	6	13	0

A agência Gama enviou para a Rapa o nome de um espião codificado na matriz $A = \begin{bmatrix} 11 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Para decodificar uma palavra de cinco letras, dada por uma matriz A, de ordem 5×1, formada por inteiros entre 0 e 25, deve-se multiplicá-la pela matriz de conversão $C = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 20 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ e, usando-se a tabela dada, converter os números em letras.

Utilizando-se esse processo, conclui-se que o nome do espião é:

a) DIEGO **b)** SHUME **c)** SADAN **d)** RENAN **e)** RAMON

Resolução

De acordo com as informações do enunciado, calculamos o produto $C \cdot A$.

$$\underset{5 \times 5}{\begin{bmatrix} 1 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 20 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}} \cdot \underset{5 \times 1}{\begin{bmatrix} 11 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 11 + 9 \\ 3 + 4 \\ 14 \\ 1 \\ 2 + 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 7 \\ 14 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Com base na linguagem de códigos utilizada pelas agências, decodificam-se os elementos da matriz obtida:

- 20 corresponde à letra R;
- 14 corresponde à letra M;
- 8 corresponde à letra N.
- 7 corresponde à letra A;
- 1 corresponde à letra O;

Logo, o nome do espião é RAMON.

Resposta: alternativa **e**.

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

11. Considerando as matrizes $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcule: Ver as **Orientações para o professor**.

a) $2A$ **b)** $-3B$ **c)** $\frac{1}{2}B$ **d)** $3A + 2B$

12. Sendo $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\alpha = 2$ e $\beta = 3$, verifique que: Ver as **Orientações para o professor**.

a) $\alpha(\beta X) = (\alpha\beta)X$

b) $\alpha(X + Y) = \alpha X + \alpha Y$

c) $(\alpha + \beta)X = \alpha X + \beta X$

d) $1 \cdot Y = Y$

13. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 5 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 12 \\ 9 & -6 & 15 \end{bmatrix}$, determine, se possível: Ver as **Orientações para o professor**.

a) $\frac{1}{2}(A + B)$

b) $-4A - \frac{2}{3}B$

14. Sejam as matrizes:

$A = (a_{ij})_{2 \times 2}$, em que $a_{ij} = \begin{cases} i + j, \text{ se } i \neq j \\ 1, \text{ se } i = j \end{cases}$

$B = (b_{ij})_{2 \times 2}$, em que $b_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ se } i \neq j \\ 2i - j, \text{ se } i = j \end{cases}$

Calcule: Ver as **Orientações para o professor**.

a) $C = 2A - 3B$ **b)** $D = \frac{1}{2}A - \frac{1}{4}B$

15. Determine, quando possível, a matriz que resulta das multiplicações indicadas a seguir.

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 5 & 4 \\ -3 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 14 \\ -6 & 18 \\ -16 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -5 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Não é possível determinar este produto.

c) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot (2\ \ 4\ \ -1)$ $\begin{pmatrix} 6 & 12 & -3 \\ 2 & 4 & -1 \\ -4 & -8 & 2 \end{pmatrix}$

16. Dados $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, calcule AB e BA. As matrizes A e B comutam?
Ver as **Orientações para o professor**.

17. (UFSC) Sejam $A = (a_{ij})_{4 \times 3}$ e $B = (b_{ij})_{3 \times 4}$ duas matrizes definidas por $a_{ij} = i + j$ e $b_{ij} = 2i + j$, respectivamente. Se $A \cdot B = C$, então qual é o elemento c_{32} da matriz C? $c_{32} = 94$

18. Uma fábrica de mochilas utiliza três tamanhos de zíper na confecção de dois modelos de mochilas, conforme indicado no quadro a seguir.

	Modelo X	Modelo Y
Pequeno	4	2
Médio	2	3
Grande	1	2

Essa fábrica recebeu a seguinte encomenda para o último trimestre do ano.

	Outubro	Novembro	Dezembro
Mochila X	50	100	200
Mochila Y	50	150	100

18. a) Ver as **Orientações para o professor**.
18. c) 650 zíperes


FRACTALMONSTER/SHUTTERSTOCK.COM


PRILL/SHUTTERSTOCK.COM

- Os dois modelos fabricados têm compartimentos internos nos quais também são utilizados zíperes.

a) Escreva a matriz $T_{3 \times 2}$, que representa a quantidade de zíperes, por tamanho, utilizada em cada modelo de mochila.

b) Escreva a matriz $E_{2 \times 3}$ para representar a quantidade de mochilas, por modelo, encomendada para o último trimestre do ano. Ver as **Orientações para o professor**.

c) Calcule o produto $T \cdot E$ e responda: quantos zíperes de tamanho médio serão necessários para confeccionar as mochilas encomendadas no mês de novembro?

d) Elabore um problema que possa ser respondido com as informações apresentadas nesta atividade. Resposta pessoal.

19. (UFPR) Calcule o valor de a de modo que exista somente uma matriz $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, tal que o produto $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -a \\ a & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ seja igual a $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$. $a = 2$

20. (UEG-GO) Tatiana e Tiago comunicam-se entre si por meio de um código próprio dado pela resolução do produto entre as matrizes A e B, ambas de ordem 2×2, onde cada letra do alfabeto corresponde a um número, isto é, $a = 1, b = 2, c = 3, ..., z = 26$. Por exemplo, se a resolução de $A \cdot B$ for igual a $\begin{bmatrix} 1 & 13 \\ 15 & 18 \end{bmatrix}$, logo a mensagem recebida é amor. Dessa forma, se a mensagem recebida por Tatiana foi flor e a matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, então a matriz A é
alternativa **b**

a) $\begin{bmatrix} -8 & 7 \\ -8 & 10 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} -8 & 5 \\ -7 & 11 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -6 & 6 \\ -7 & 11 \end{bmatrix}$ **d)** $\begin{bmatrix} -6 & -7 \\ 6 & 11 \end{bmatrix}$

Mobilidade urbana e matrizes

Leia o texto a seguir.

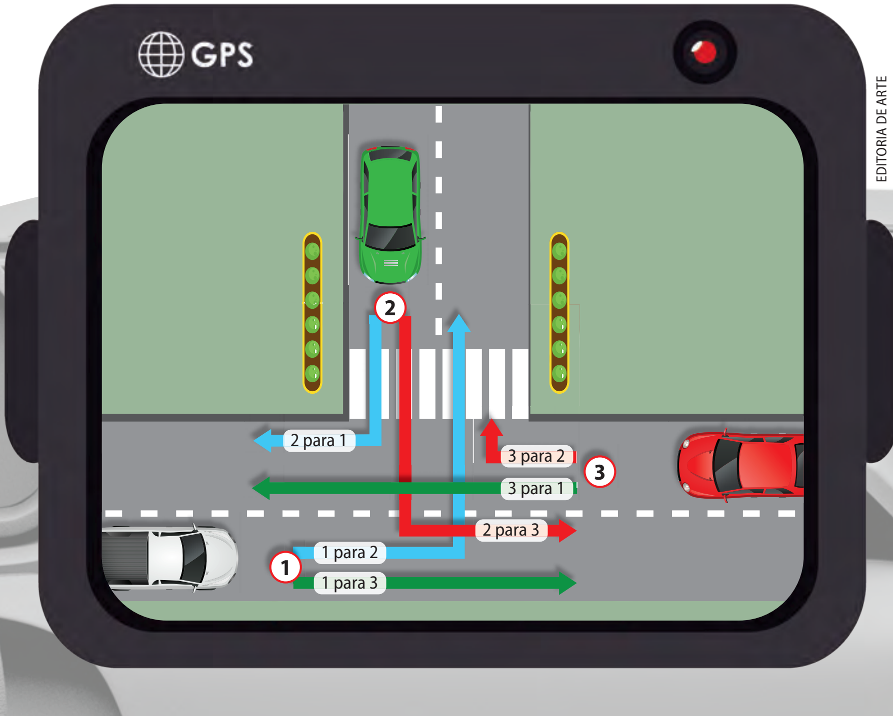
> [...]
>
> O transporte veicular é um artifício indispensável para a mobilidade humana, do qual a maioria da população mundial usufrui para se deslocar de forma rápida e segura, sendo estas características as mais importantes para se classificar um bom meio de transporte. [...] a má qualidade do transporte público e o aumento populacional constituem-se em fatores decisórios para o acúmulo de veículos nos centros urbanos. Em razão do aumento contínuo da frota veicular, os sistemas de trânsito atuais da maioria das cidades acabam não comportando o grande número de veículos existentes. Por consequência, surgem os inevitáveis congestionamentos e, com esses, vários problemas à sociedade, como alto nível de estresse, poluição, acidentes e prejuízos econômicos, sendo estes últimos decorrentes do alto consumo de combustível e desperdício de tempo. [...]
>
> [...]

LACORTT, M.; KRIPKA, M.; KRIPKA, R. M. L. Modelos matemáticos para otimização do tráfego urbano semaforizado. **Tendências em Matemática Aplicada e Computacional**, São Carlos, v. 14, n. 3, p. 359-372, 2013. p. 359. Disponível em: https://www.scielo.br/pdf/tema/v14n3/a08v14n3.pdf. Acesso em: 17 set. 2024.

Uma preocupação crescente no planejamento das cidades são as estratégias para organizar o fluxo de veículos. Isso mobiliza engenheiros de tráfego e órgãos reguladores de trânsito, que utilizam alguns modelos matemáticos para otimizar o tráfego urbano.

Observe a seguir uma situação envolvendo o fluxo de carros em um cruzamento, analisada por meio de matrizes.

Em um cruzamento de ruas de **mão dupla**, o fluxo de automóveis nos pontos **1**, **2** e **3** é organizado por três conjuntos de semáforos, de modo que o ciclo desses semáforos dura 4 minutos. Os engenheiros de tráfego fizeram um modelo para descobrir quantos carros passam por hora, em cada semáforo, nesse cruzamento. Observe-o a seguir.



EDITORIA DE ARTE

HKEITA/SHUTTERSTOCK.COM; CHESKY/SHUTTERSTOCK.COM; JEMASTOCK/SHUTTERSTOCK.COM

Nesse modelo, foram construídas inicialmente as matrizes M_1, M_2 e M_3, que indicam o tempo m_{ij}, em minuto, pelo qual alguns semáforos se mantêm simultaneamente abertos, permitindo o fluxo de i para j.

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Durante os primeiros dois minutos do ciclo, ficam verdes os semáforos de (1) para (2), de (1) para (3) e de (2) para (1).

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Em seguida, durante um minuto, ficam verdes os semáforos de (2) para (1), de (2) para (3) e de (3) para (2).

$$M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Por fim, durante o último minuto do ciclo, ficam verdes os semáforos de (3) para (1), de (3) para (2) e de (1) para (3).

Para saber o intervalo de tempo que cada semáforo fica aberto no ciclo de 4 minutos, adicionamos M_1, M_2 e M_3, obtendo a matriz M.

Com base nessa matriz, que corresponde a um ciclo de 4 minutos, é possível fazer uma estimativa da quantidade de veículos que pode passar nesse cruzamento, considerando determinados períodos, e buscar resolver problemas de engarrafamento.

Por exemplo: se considerarmos que, em 1 minuto, passam cerca de 15 veículos pelo cruzamento, para saber quantos veículos passam em 1 hora, fazemos:

$$\underbrace{15}_{\substack{\text{15 veículos} \\ \text{(por minuto)}}} \cdot \underbrace{15}_{\text{15 ciclos}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{ciclo de 4 min}} = \begin{bmatrix} 0 & 450 & 675 \\ 675 & 0 & 225 \\ 225 & 450 & 0 \end{bmatrix}$$

Note que 15 ciclos de 4 minutos equivalem a 1 hora, pois $15 \cdot 4 = 60$, 60 minutos.

Nesse caso, se o número de carros em alguma das direções for maior do que a quantidade calculada, teremos um engarrafamento, que pode ou não ser resolvido se forem alterados os intervalos de tempo de abertura dos semáforos, isto é, se forem modificados os valores nas matrizes M_1, M_2 e M_3.

Ver as **Orientações para o professor**.

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Agora, reúna-se a mais colegas, e façam o que se pede nas atividades a seguir.

1. Nos grandes centros urbanos, os congestionamentos são frequentes. Descrevam as possíveis causas e pensem em uma alternativa que possibilite diminuir o tráfego de veículos nas vias. Pesquisem sobre mobilidade urbana e identifiquem cidades que têm apresentado propostas inovadoras nesse sentido.

2. O que vocês sabem sobre Engenharia de Tráfego? Pesquisem sobre essa área de trabalho e verifiquem instituições que oferecem curso nessa área. Indiquem qual é o órgão responsável pela engenharia de tráfego de sua cidade. Descrevam o que essa área tem a ver com mobilidade urbana.

3. Utilizando o exemplo apresentado, pesquisem um cruzamento que seja de mão dupla. Elaborem um problema considerando ciclos de semáforos, utilizando a matriz que representa o tempo durante o qual cada semáforo fica aberto em cada um dos sentidos. Compartilhem com os outros grupos o problema que vocês elaboraram.

Sistemas lineares

Você já estudou e resolveu sistemas de equações com duas equações e duas incógnitas na sua vida estudantil. Neste tópico, vamos aprofundar esse estudo, apresentando as classificações de um sistema linear e o método do escalonamento para solucionar sistemas com três ou mais incógnitas e com três ou mais equações.

Equação linear

Acompanhe a situação a seguir, em que apresentamos uma aplicação de equação linear.

Andréa percebeu que o saldo de seu cartão escolar de transporte era R$ 120,00. Na cidade onde mora, os estudantes pagam R$ 3,00 na viagem de ônibus, R$ 2,50 na de metrô e R$ 2,00 na viagem de trem. Com esse saldo do cartão, quantas viagens Andréa pode fazer utilizando esses meios de transporte?

Uma situação como essa pode ser traduzida para a linguagem matemática. Para isso, podemos utilizar **incógnitas** (valores desconhecidos), representadas por meio de letras, relacionando-as com as informações apresentadas na situação analisada.

Considerando x, y e z, respectivamente, o número de viagens de ônibus, de metrô e de trem, podemos escrever a seguinte sentença:

$$3{,}00 \cdot x + 2{,}50 \cdot y + 2{,}00 \cdot z = 120{,}00 \quad \text{ou} \quad 3x + 2{,}5y + 2z = 120$$

Toda equação que pode ser escrita na forma geral $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b$, em que $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ e b são números reais e $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ são incógnitas, é denominada **equação linear**.

Na equação linear $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b$:

- $a_1, a_2, ..., a_n$ são números reais chamados **coeficientes** (ou **parâmetros**);
- $x_1, x_2, ..., x_n$ são as **incógnitas**;
- b é o termo (ou parâmetro) independente.

Uma ênupla, ou seja, uma sequência ordenada de n números reais $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ que, substituindo, respectivamente, por $x_1, x_2, ..., x_n$, tornam verdadeira a igualdade $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$, é uma **solução da equação**.

Por exemplo, a sentença $3x + 2{,}5y + 2z = 120$ é uma equação linear em que 3; 2,5 e 2 são os coeficientes; x, y e z são as incógnitas; e 120 é o termo independente. Essa equação apresenta várias soluções, entre as quais as ternas ordenadas (20, 20, 5), (16, 16, 16) e (25, 18, 0), pois cada uma delas torna verdadeira a igualdade $3x + 2{,}5y + 2z = 120$.

Pense e responda

Imagine que Andréa não vai utilizar o metrô e que a quantidade de viagens de ônibus que vai fazer será o dobro da quantidade de viagens de trem. Qual é a solução da equação $3x + 2{,}5y + 2z = 120$ considerando essa condição? $S = \{(30, 0, 15)\}$

Observe outros exemplos de equações lineares:

a) $2x - y = 4$

Nessa equação, 2 e -1 são os coeficientes; x e y são as incógnitas; e 4 é o termo independente. Duas das soluções dessa equação são, por exemplo, os pares ordenados (2, 0) e (3, 2), pois, substituindo, respectivamente, os valores de x e y na equação, obtemos uma sentença verdadeira.

- Para $x = 2$ e $y = 0$, temos:
  $2 \cdot 2 - 0 = 4$, ou seja, o par ordenado (2, 0) torna verdadeira a sentença $2x - y = 4$.
- Para $x = 3$ e $y = 2$, temos:
  $2 \cdot 3 - 2 = 4$, ou seja, o par ordenado (3, 2) também torna verdadeira a sentença $2x - y = 4$.

b) $x + 2y - z = 0$

Não são exemplos de equações lineares:

a) $xy = 15$

b) $x^2 + y^2 = 1$

Algumas respostas possíveis: (1, 1, 0) e $(-1, 1, -2)$.

Pense e responda

- Determine duas das possíveis soluções da equação: $x + 2y - z = 3$
- A terna ordenada (2, 3, 0) é solução da equação $x + 2y - z = 3$? Justifique sua resposta.

Ver as **Orientações para o professor**.

FÓRUM

Auxílio em passagem estudantil

Diversos países ao redor do mundo oferecem descontos em passagens de ônibus para os estudantes, e no Brasil isso não é diferente. Contudo, as políticas variam de um estado para outro e até mesmo entre municípios.

No município de São Paulo, por exemplo, estudantes podem ter direito à gratuidade ou à meia-tarifa no transporte público. Já em Fortaleza, todos os estudantes do município que têm carteirinha de estudante válida por uma unidade escolar da cidade têm direito a duas passagens gratuitas no transporte público por ônibus em dias úteis do ano letivo.

PV PRODUCTIONS/ SHUTTERSTOCK.COM

O sistema de transporte de alguns municípios brasileiros utiliza cartões nos quais é possível carregar o crédito das viagens. O valor de cada viagem realizada é debitado de acordo com o uso.

Fontes dos dados: UNIÃO BRASILEIRA DOS ESTUDANTES SECUNDARISTAS. **Bilhete único SPTrans Estudante, tire suas dúvidas!** São Paulo: Ubes, c2024. Disponível em: https://www.ubes.org.br/2018/bilhete-unico-sptrans-estudante/. PASSE Livre Estudantil oferta passagens grátis a partir desta segunda; veja como funciona. **G1**, Ceará, 12 nov. 2023. Disponível em: https://g1.globo.com/ce/ceara/noticia/2023/11/12/passe-livre-estudantil-oferta-passagens-gratis-a-partir-desta-segunda-veja-como-funciona.ghtml. Acessos em: 27 set. 2024.

Agora, faça o que se pede a seguir.

1. No município onde você mora, existe esse tipo de auxílio para estudantes? Você conhece alguma pessoa que não pode estudar por dificuldade de acesso ao local da escola, por residir em região afastada ou local com acesso apenas por embarcação? Resposta pessoal. A resposta depende de onde o estudante mora.

2. No seu entendimento, qual é a importância desse tipo de auxílio, considerando o orçamento das famílias e o direito de acesso aos estudos? Reúna-se a mais colegas para discutirem esse assunto. Ver as **Orientações para o professor**.

Equação linear homogênea

Quando o termo independente b de uma equação linear é igual a zero, ela é denominada **equação linear homogênea**. Nesse caso, temos:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = 0$$

A ênupla (0, 0, ..., 0) é uma das soluções de qualquer equação linear homogênea.

Por exemplo, a equação $2x - y + 3z = 0$ é homogênea, e (0, 0, 0) é uma de suas soluções, pois: $2 \cdot 0 - 0 + 3 \cdot 0 = 0$

Equações lineares equivalentes

Quando duas ou mais equações lineares têm o mesmo conjunto solução, elas são denominadas **equações equivalentes**.

Por exemplo, as equações lineares $4x + y - 2z = -7$ e $-8x - 2y + 4z = 14$ são equações equivalentes, pois qualquer solução de uma também é solução da outra.

Sistemas lineares $m \times n$

Denominamos **sistema linear** $m \times n$, de m equações com n incógnitas, todo conjunto de m equações lineares que pode ser representado como:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Nesse caso:

- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são as **incógnitas**;
- $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{mn}$ são números reais chamados **coeficientes**;
- $b_1, b_2, \ldots, b_m$ são os **termos independentes**.

Quando uma ênupla ordenada $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ é solução de cada uma das equações de um sistema linear, ou seja, torna simultaneamente verdadeiras todas as sentenças que o compõem, $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ é **solução do sistema linear**.

Acompanhe os exemplos.

a) $\begin{cases} 2x + y - \frac{z}{3} = 1 \\ -x + 2y - 3z = 0 \\ -3x + y + 2z = -1 \end{cases}$

O sistema linear é 3×3, pois possui 3 equações e 3 incógnitas (x, y e z).

b) $\begin{cases} m - 3n + 1p = 2 \\ 2m + n - p = 0 \end{cases}$

O sistema linear é 2×3, pois possui 2 equações e 3 incógnitas (m, n e p).

» Classificação de sistemas lineares

Um sistema linear é classificado em:

- sistema possível e determinado (SPD) quando possui uma única solução;
- sistema possível e indeterminado (SPI) quando possui infinitas soluções;
- sistema impossível (SI) quando não possui solução.

Acompanhe as resoluções, as classificações e as representações gráficas de três sistemas lineares 2×2.

a) $\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x - 3y = 2 \end{cases}$

Resolução algébrica pelo método da adição.

$$\begin{cases} x + y = 6 \quad \times(-2) \\ 2x - 3y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - 2y = -12 \\ \underline{\;\;2x - 3y = \;\;\;2\;} \end{cases}$$
$$-5y = -10 \Rightarrow y = 2$$

Substituindo y por 2 em $x + y = 6$, temos:

$x + y = 6 \Rightarrow x + 2 = 6 \Rightarrow x = 4$

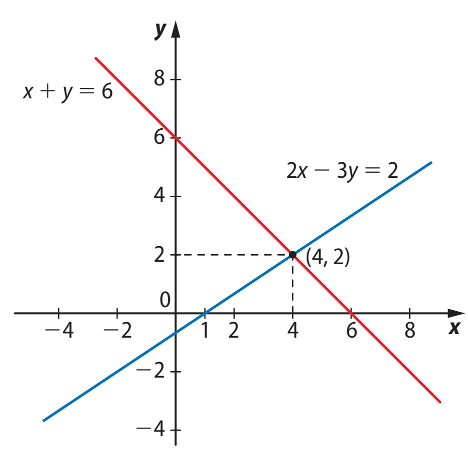
Portanto, o sistema é possível e determinado (SPD), pois possui solução única, sendo seu conjunto solução expresso por $S = \{(4, 2)\}$.

Representação gráfica

Equações lineares da forma $ax + by = c$ são representadas no plano cartesiano por uma reta. Cada ponto pertencente à reta satisfaz à equação, portanto representa uma solução dela. Nesse caso, o sistema linear com duas equações de forma $ax + by = c$ é representado graficamente por duas retas no mesmo plano cartesiano.

A equação $x + y = 6$ tem como solução o par ordenado (4, 2) e o par ordenado (0, 6), além de outros, como (1, 5), (3, 3), (−1, 7), ... Logo, a reta do plano cartesiano que passa pelos pontos (4, 2) e (0, 6) representa graficamente a equação $x + y = 6$. Da mesma forma, a equação $2x - 3y = 2$ será representada pela reta do plano cartesiano que passa pelos pontos (4, 2) e (1, 0), pois as coordenadas (x, y) desses pontos são soluções dessa equação.

Com isso, temos a seguinte representação gráfica do sistema: $\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x - 3y = 2 \end{cases}$



EDITORIA DE ARTE

Podemos observar que essas retas são **concorrentes**, ou seja, elas se cruzam em um único ponto. Isso indica que há **um único** par ordenado, nesse caso, (4, 2), que é a solução do sistema.

b) $\begin{cases} x - 2y = 2 & \text{(I)} \\ 2x - 4y = 0 & \text{(II)} \end{cases}$

Resolução algébrica pelo método da substituição.

Manipulando a equação (I), temos:

$x - 2y = 2 \Rightarrow x = 2 + 2y$

Substituindo a incógnita x por $2 + 2y$ na equação (II), obtemos:

$2x - 4y = 0 \Rightarrow 2 \cdot (2 + 2y) - 4y = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 + 4y - 4y = 0 \Rightarrow$

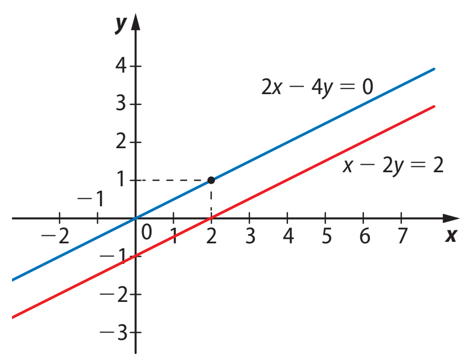
$\Rightarrow 4 = 0$ (**uma igualdade falsa**)

Ao resolver o sistema pelo método da substituição, obtivemos uma igualdade falsa. Nesse caso, o sistema é impossível (SI), pois não admite solução. Sendo assim, seu conjunto solução é $S = \varnothing$.

Representação gráfica

Note que a equação $x - 2y = 2$ é representada pela reta do plano cartesiano que passa pelos pontos (0, −1) e (2, 0), duas soluções dessa equação. Da mesma forma, a equação $2x - 4y = 0$ é representada pela reta que passa pelos pontos (0, 0) e (2, 1).

O plano cartesiano apresentado ilustra a representação do sistema: $\begin{cases} x - 2y = 2 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases}$



EDITORIA DE ARTE

Podemos observar que essas retas são **paralelas**, ou seja, elas não se cruzam. Isso indica que **não existe** um par ordenado que seja solução do sistema.

c) $\begin{cases} -x + 2y = 1 & \text{(I)} \\ 3x - 6y = -3 & \text{(II)} \end{cases}$

Resolução algébrica pelo método da substituição.

Manipulando a equação (I), temos:

$-x + 2y = 1 \Rightarrow x = 2y - 1$

Substituindo a incógnita x por $2y - 1$ na equação (II), obtemos:

$3x - 6y = -3 \Rightarrow 3 \cdot (2y - 1) - 6y = -3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6y - 3 - 6y = -3 \Rightarrow$

$\Rightarrow -3 = -3$ (**uma igualdade verdadeira**)

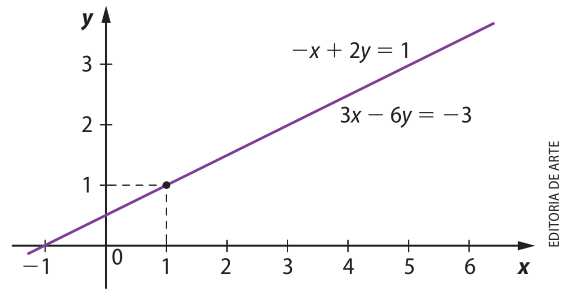
Ao resolver o sistema, obtivemos uma igualdade verdadeira. Nesse caso, o sistema é possível e indeterminado (SPI), isto é, admite infinitas soluções.

Representação gráfica

Os pares ordenados (−1, 0) e (1, 1) são soluções do sistema $\begin{cases} -x + 2y = 1 \\ 3x - 6y = -3 \end{cases}$, pois:

$\begin{cases} -(-1) + 2 \cdot 0 = 1 \\ 3 \cdot (-1) - 6 \cdot 0 = -3 \end{cases}$ e $\begin{cases} -1 + 2 \cdot 1 = 1 \\ 3 \cdot 1 - 6 \cdot 1 = -3 \end{cases}$

Nesse caso, a representação gráfica do sistema é dada por duas retas coincidentes, pois ambas as retas passam pelos pontos $(-1, 0)$ e $(1, 1)$. Observe:



Como as retas são **coincidentes**, elas têm infinitos pontos de intersecção, que representam as **infinitas soluções** do sistema linear possível e indeterminado.

ATIVIDADES RESOLVIDAS

6. Verifique se a terna ordenada $(3, -2, 4)$ é solução da equação linear $4x - 3y + 5z = 36$.

Resolução

Substituindo $x = 3$, $y = -2$ e $z = 4$ no primeiro membro da equação, temos:

$4 \cdot 3 - 3(-2) + 5 \cdot 4 = 12 + 6 + 20 = 38$

Como $38 \neq 36$, a terna ordenada $(3, -2, 4)$ não é uma solução da equação linear $4x - 3y + 5z = 36$.

7. Resolva e classifique os sistemas a seguir.

a) $\begin{cases} 2a - b = 5 \\ 4a - 2b = 10 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ 4x + 6y = 10 \end{cases}$

Resolução

a) Vamos resolver esse sistema usando o método da substituição.

$$\begin{cases} 2a - b = 5 & \text{I} \\ 4a - 2b = 10 & \text{II} \end{cases}$$

Isolando b na equação I, temos:

$b = 2a - 5$

Substituímos b por $2a - 5$ em II:

$4a - 2 \cdot (2a - 5) = 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4a - 4a + 10 = 10$

Logo, $0a = 0$.

Observe que qualquer número real colocado no lugar de a torna verdadeira a sentença. Isso significa que o sistema tem infinitas soluções, ou seja, ele é possível e indeterminado.

Como $b = 2a - 5$, então cada uma das infinitas soluções é um par ordenado cujo 1º elemento é um número real qualquer e cujo 2º elemento é o dobro do 1º menos 5, ou seja, as soluções são pares ordenados da forma $(k, 2k - 5)$, para qualquer número real k.

Algumas das soluções desse sistema são:

$(1, -3)$, $(-3, -11)$, $(0, -5)$ e $\left(\frac{1}{2}, -4\right)$

Como estamos trabalhando com números reais, temos:

$S = \{(k, 2k - 5) \mid k \in \mathbb{R}\}$

b) Vamos resolver o sistema utilizando o método da adição. Multiplicando a primeira equação por (-2), temos:

$$\begin{cases} -4x - 6y = -18 \\ 4x + 6y = 10 \end{cases}$$

Adicionando, membro a membro, essas equações, temos: $0x + 0y = -8$

Observe que não há valores reais de x e de y que tornam verdadeira essa sentença. Por isso, dizemos que não existe solução, e, nesse caso, temos um sistema impossível.

Portanto, o conjunto solução é vazio, indicado por $S = \varnothing$.

De fato, observando as duas equações do sistema, é possível perceber que não há solução, pois as equações $2x + 3y = 9$ e $4x + 6y = 10$ são incompatíveis:

multiplicando por 2 a primeira equação, obtemos $4x + 6y = 18$, ou seja, $4x + 6y$ não pode, simultaneamente, ser igual a 10 e a 18.

8. Calcule m e n, de modo que os sistemas $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$ e $\begin{cases} mx - ny = -1 \\ nx + my = 2 \end{cases}$ tenham o mesmo conjunto solução.

Resolução

Empregando o método da adição, vamos resolver o primeiro sistema.

$$\begin{cases} x - y = 1 & \text{I} \\ 2x + y = 5 & \text{II} \end{cases}$$

Adicionando, membro a membro, as equações I e II, obtemos: $3x = 6$

Logo, $x = 2$.

Substituindo x por 2 na equação I, temos $y = 1$.

Como os sistemas devem ter o mesmo conjunto solução, que, nesse caso, é constituído de uma única solução, o par ordenado (2, 1) é também solução do segundo sistema. Substituindo as incógnitas do segundo sistema por esses valores, determinamos m e n.

$$\begin{cases} 2m - n = -1 & \text{III} \\ 2n + m = 2 & \text{IV} \end{cases}$$

Multiplicando por -2 a equação IV e adicionando, membro a membro as equações, temos:

$$\begin{cases} 2m - n = -1 \\ -2m - 4n = -4 \end{cases}$$
$$-5n = -5$$

Logo, $n = 1$.

Substituindo n por 1 na equação III, obtemos m.

$2m - 1 = -1 \Rightarrow 2m = 0$

Logo, $m = 0$.

Assim, para que esses sistemas tenham o mesmo conjunto solução, devemos ter $m = 0$ e $n = 1$.

9. (UFPE) Uma fábrica de automóveis utiliza três tipos de aço, A_1, A_2 e A_3, na construção de três tipos de carro, C_1, C_2 e C_3. A quantidade dos três tipos de aço, em tonelada, usados na confecção dos três tipos de carro está na tabela a seguir.

	C_1	C_2	C_3
A_1	2	3	4
A_2	1	1	2
A_3	3	2	1

Se foram utilizadas 26 toneladas de aço do tipo A_1, 11 toneladas do tipo A_2 e 19 toneladas do tipo A_3, qual o total de carros construídos dos tipos C_1, C_2 ou C_3?

Resolução

Considerando x, y e z os respectivos números de carros dos tipos C_1, C_2 e C_3 que foram construídos e utilizando as informações fornecidas, representamos a situação por meio de um sistema linear 3×3 (3 equações e 3 incógnitas), como indicado a seguir.

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 26 & \text{I} \\ x + y + 2z = 11 & \text{II} \\ 3x + 2y + z = 19 & \text{III} \end{cases}$$

Isolando x na equação II, temos:

$x = 11 - y - 2z$ IV

Substituindo x por $11 - y - 2z$ na equação I, temos:

$2 \cdot (11 - y - 2z) + 3y + 4z = 26$

$22 - 2y - 4z + 3y + 4z = 26$

Logo, $y = 4$.

Substituindo x por $11 - y - 2z$ na equação III, temos:

$3 \cdot (11 - y - 2z) + 2y + z = 19$

$33 - 3y - 6z + 2y + z = 19$

$y + 5z = 14$ V

Substituindo y por 4 na equação V, obtemos z:

$4 + 5z = 14$

Logo, $z = 2$.

Substituindo y por 4 e z por 2 na equação IV, determinamos x:

$x = 11 - 4 - 2 \cdot 2$

Logo, $x = 3$.

Portanto, foram construídos 3 carros do tipo C_1, 4 carros do tipo C_2 e 2 carros do tipo C_3, totalizando 9 carros.

ATIVIDADES

21. Considerando x, y e z as incógnitas, qual(is) das seguintes equações é(são) linear(es)? alternativa **a**

a) $4x - y + \frac{z}{2} = 0$

b) $5x + 2yz = 0$

c) $2x + 3y - z^2 = 0$

d) $xyz = 1$

22. Dos pares ordenados $(0, -3)$, $(1, 2)$, $\left(4, -\frac{1}{3}\right)$ e $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, quais são soluções da equação $2x - 3y = 9$? $(0, -3)$ e $\left(4, -\frac{1}{3}\right)$

23. A equação linear $0x + 0y = 4$ possui solução? Justifique. Resposta esperada: Não, pois, qualquer que seja o par ordenado (a, b), temos $0a + 0b \neq 4$.

24. Determine m, de modo que $(-1, 2, -3)$ seja solução da equação linear: $2a - 4b + mc = 0$ $m = -\frac{10}{3}$

25. Determine os valores de m para que a equação $x - 4y + z = m^2 - 4$ seja homogênea. $m = 2$ ou $m = -2$

26. Verifique se $(-1, 2)$ é solução do sistema: É solução.

$$\begin{cases} a - 4b = -9 \\ 3a + b = -1 \end{cases}$$

27. Determine o conjunto solução do sistema a seguir. $S = \{(10, 5)\}$

$$\begin{cases} 2x - y = 15 \\ x + 3y = 25 \end{cases}$$

28. (UFG-GO) Para se deslocar de casa até o seu trabalho, um trabalhador percorre 550 km por mês. Para isso, em alguns dias, ele utiliza um automóvel e, em outros, uma motocicleta. Considerando que o custo do kilometro rodado é de 21 centavos para o automóvel e de 7 centavos para a motocicleta, calcule quantos kilometros o trabalhador deve andar em cada um dos veículos para que o custo total mensal seja de R$ 70,00.
motocicleta: 325 km; automóvel: 225 km

29. Um caminhão-baú pode transportar, em uma mesma viagem, no máximo, 58 caixas. Essas caixas podem ser de um tipo **A** ou de um tipo **B**, de modo que elas têm, respectivamente, 56 kg e 72 kg. Sabendo que a carga máxima que esse caminhão pode transportar por viagem é de 3,84 toneladas, responda às questões a seguir.

$$\begin{cases} x + y = 58 \\ 56x + 72y = 3\,840 \end{cases}$$

a) Quais equações representam essa situação, considerando o caminhão com a capacidade máxima ocupada?

b) Quantas caixas de cada tipo são transportadas por esse caminhão quando ele viaja com a capacidade máxima ocupada?
21 caixas do tipo **A** e 37 do tipo **B**

30. Elabore um problema que possa ser resolvido por um dos sistemas a seguir. Em seguida, resolva-os e responda: esses sistemas têm o mesmo conjunto solução? Resposta pessoal. $S = \{(4, 3)\}$; sim

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + 5y = 11 \\ 3x - y = 9 \end{cases}$$

31. Utilizando o **GeoGebra**, interprete geometricamente cada sistema a seguir e o classifique em possível e determinado, possível e indeterminado ou impossível.

a) $\begin{cases} x - 5y = -4 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 4x - 8y = 7 \end{cases}$ impossível

c) $\begin{cases} 2x + 4y = 2 \\ 4x + 8y = 4 \end{cases}$ possível e indeterminado

31. a) possível e determinado

32. Considere o sistema linear a seguir.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$$

Verifique se as ternas ordenadas a seguir são soluções desse sistema.

a) $(2, -1, 1)$ É solução.

b) $(0, 0, 0)$ Não é solução.

33. (UECE) Um hotel possui exatamente 58 unidades de hospedagem assim distribuídas: m quartos duplos, p quartos triplos e q suítes para quatro pessoas. A capacidade máxima de lotação do hotel é 166 pessoas, sendo que, dessas, 40 lotam completamente todas as suítes. A diferença entre o número de quartos triplos e o número de quartos duplos é: alternativa **c**

a) 8

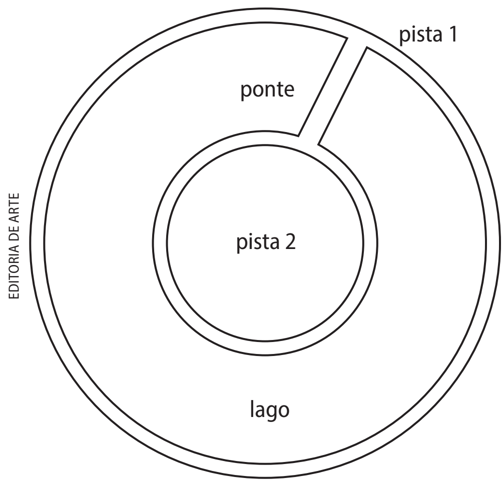
b) 10

c) 12

d) 14

35. a) sistema possível e indeterminado; $S = \left\{\left(x; \frac{x}{2}; x\right) \mid x \in \mathbb{R}\right\}$

34. (UFG-GO) Em um determinado parque, existe um circuito de caminhada, como mostra a figura a seguir.



Um atleta, utilizando um podômetro, percorre em um dia a pista **1** duas vezes, atravessa a ponte e percorre a pista **2** uma única vez, totalizando 1157 passos. No dia seguinte, percorre a pista **1** uma única vez, atravessa a ponte e percorre a pista **2**, também uma única vez, totalizando 757 passos. Além disso, percebe que o número de passos necessários para percorrer sete voltas na pista **1** equivale ao número de passos para percorrer oito voltas na pista **2**. Diante do exposto, conclui-se que o comprimento da ponte, em passos, é:

a) 5.
b) 6.
c) 7.
d) 8.
e) 15.

alternativa **c**

35. Foi exposto, na abertura deste Capítulo, que o balanceamento de equações químicas pode ser realizado por meio de um sistema de equações. A equação química (I), não balanceada, indica que uma reação de moléculas compostas de dois átomos de hidrogênio (H_2) com moléculas compostas de dois átomos de oxigênio (O_2) formam moléculas de água (H_2O).

$$\text{(I)} \quad \alpha H_2 + \beta O_2 \rightarrow \omega H_2O$$

Para balancear essa equação, é necessário determinar as quantidades mínimas de moléculas, expressas pelas incógnitas α, β e ω, de modo que o número de átomos de hidrogênio e de oxigênio seja igual antes e depois da reação. Observe que:

- a quantidade de átomos de hidrogênio (H) antes da reação é 2α e, depois da reação, é 2ω;
- a quantidade de átomos de oxigênio (O) antes da reação é 2β e, depois da reação, é 1ω.

Desse modo, a menor solução inteira positiva do sistema linear (II) torna a equação química (I) balanceada.

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} 2\alpha = 2\omega \\ 2\beta = \omega \end{cases}$$

a) Classifique e dê a solução geral do sistema linear (II).

b) Determine a menor solução inteira positiva do sistema linear (II). $S = \{(2, 1, 2)\}$

c) Escreva a equação química (I) balanceada. $2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$

Sistemas lineares escalonados

Estudaremos agora um processo conhecido como escalonamento, que também nos permite resolver e classificar sistemas lineares. Antes, porém, vamos apresentar o que é um sistema escalonado.

Observe o sistema linear escalonado.

$$\begin{cases} 2x - y + 5z + 2w = 4 & \text{(I)} \\ 3y + 8z - 2w = 1 & \text{(II)} \\ -z - 4w = 0 & \text{(III)} \\ 2w = -1 & \text{(IV)} \end{cases}$$

Pense e responda

- Como você resolveria esse sistema linear?
- Comparando com os sistemas que você já resolveu neste Capítulo, resolver esse sistema foi mais prático? Por quê?

Ver as **Orientações para o professor**.

Note que a equação I tem 4 incógnitas, a equação II tem 3 incógnitas, a equação III, 2 incógnitas e a equação IV, 1 incógnita. Além disso, todas as equações apresentam as incógnitas na mesma ordem (*x*, *y*, *z* e *w*). No entanto, consideramos que o coeficiente da incógnita *x* da equação II é zero; do mesmo modo, os coeficientes das incógnitas *x* e *y* da equação III são zero; e os coeficientes das incógnitas *x*, *y* e *z* da equação IV também são zero. Ou seja, o sistema poderia ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} 2x - y + 5z + 2w = 4 & \text{I} \\ 0x + 3y + 8z - 2w = 1 & \text{II} \\ 0x + 0y - z - 4w = 0 & \text{III} \\ 0x + 0y + 0z + 2w = -1 & \text{IV} \end{cases}$$

Porém, para simplificar a escrita, não registramos as incógnitas cujos coeficientes são nulos.

Identificamos que um sistema linear de *m* equações com *n* incógnitas está escalonado quando todas as equações apresentam as incógnitas na mesma ordem e a quantidade de incógnitas com coeficientes nulos aumenta a cada equação. Observe outros exemplos de sistemas escalonados.

a) $\begin{cases} 4x + y - 6z = -9 \\ 2y + 3z = 8 \\ 5z = 10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a - b + c = 4 \\ 5b - 2c = -12 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x - y + 2z - w = 5 \\ 2w = -1 \end{cases}$

» Resolução de um sistema linear escalonado

Observe, a seguir, três exemplos de como resolver e classificar um sistema escalonado.

Exemplo 1. O sistema linear escalonado deste exemplo tem a quantidade de equações igual ao número de incógnitas. Sua resolução é feita da última para a primeira equação, primeiro, é determinado o valor da incógnita *z* pela equação III, em seguida, é substituído o valor encontrado de *z* na equação II, então, é obtido o valor da incógnita *y* e assim por diante. Acompanhe:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 & \text{I} \\ 5y + z = 1 & \text{II} \\ -z = 7 & \text{III} \end{cases}$$

Começando pela equação III, temos:

$$-z = 7 \Rightarrow z = -7$$

Substituindo *z* por -7 na equação II, obtemos:

$$5y + (-7) = 1 \Rightarrow 5y = 8 \Rightarrow y = \frac{8}{5}$$

Substituindo *z* por -7 e *y* por $\frac{8}{5}$ na equação I, temos:

$$x + 2 \cdot \left(\frac{8}{5}\right) - (-7) = 2 \Rightarrow x = 2 - \frac{51}{5} \Rightarrow x = -\frac{41}{5}$$

Portanto, o sistema é possível e determinado (SPD), pois possui a solução única:

$$S = \left\{\left(-\frac{41}{5}; \frac{8}{5}; -7\right)\right\}$$

Exemplo 2. O sistema linear escalonado deste exemplo apresenta uma quantidade de equações menor do que o número de incógnitas: 2 equações e 3 incógnitas (*a*, *b* e *c*).

$$\begin{cases} 7a - b + 5c = 0 & \text{I} \\ \quad\; b - 2c = -1 & \text{II} \end{cases}$$

Nesse caso, a solução geral desse sistema será expressa em função de uma variável real α. Para isso, vamos admitir que a última incógnita c seja igual a α, isto é:

$$c = \alpha, \text{ em que } \alpha \in \mathbb{R}$$

Em seguida, substituindo c por α na equação II, temos:

$$b - 2 \cdot \alpha = -1 \Rightarrow b = 2\alpha - 1$$

Por fim, substituindo c por α e b por $2\alpha - 1$ na equação I, obtemos:

$$7a - (2\alpha - 1) + 5 \cdot \alpha = 0 \Rightarrow 7a = -3\alpha - 1 \Rightarrow a = \frac{-3\alpha - 1}{7}$$

Portanto, o sistema linear é possível e indeterminado (SPI), e sua solução geral é:

$$S = \left\{\left(\frac{-3\alpha - 1}{7}; 2\alpha - 1; \alpha\right) \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}$$

Exemplo 3. Não existe nenhum valor real de w que torne a última equação do sistema linear deste exemplo verdadeira.

$$\begin{cases} 2x - 5y + 3z - w = 0 \\ \quad\;\; 3y - 8z - 5w = 4 \\ \quad\quad\quad\;\; z - 7w = -2 \\ \quad\quad\quad\quad\;\; 0w = 6 \end{cases}$$

Como a última equação $0w = 6$ não tem solução real, o sistema linear é impossível (SI), e o seu conjunto solução é indicado por:

$$S = \varnothing$$

» Sistemas equivalentes

> Quando dois sistemas lineares admitem o mesmo conjunto solução, dizemos que são **sistemas equivalentes**.

Por exemplo: $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + y - z = 1 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 3x + y - z = 2 \\ x + y - 2z = -3 \end{cases}$ são sistemas equivalentes, pois ambos os sistemas lineares 3×3 têm o mesmo conjunto solução, $S = \{(1, 2, 3)\}$.

$$\begin{cases} 1 + 2 + 3 = 6 \\ 2 \cdot 1 + 2 - 3 = 1 \\ 1 + 2 - 3 = 0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} 1 - 2 \cdot 2 + 3 = 0 \\ 3 \cdot 1 + 2 - 3 = 2 \\ 1 + 2 - 2 \cdot 3 = -3 \end{cases}$$

Indicamos que dois sistemas são equivalentes usando o símbolo $\sim$.

» Escalonamento de sistemas lineares

Sempre é possível escalonar um sistema linear transformando o sistema inicial em um sistema escalonado equivalente, ou seja, que possui o mesmo conjunto solução. Para isso, podem ser realizadas as seguintes etapas:

a) Trocar de lugar duas ou mais equações de um sistema linear.

b) Reescrever uma equação para alinhar as incógnitas correspondentes.

c) Multiplicar ou dividir ambos os membros de uma equação por um número real qualquer não nulo.

d) Substituir uma equação do sistema por sua soma com um múltiplo de outra equação do mesmo sistema.

Acompanhe, a seguir, o processo de escalonamento de um sistema linear.

$$\begin{cases} y + 2x + 2z = 0 & \text{(I)} \\ 3x - y - 3z = -6 & \text{(II)} \\ -x + y + 2z = 3 & \text{(III)} \end{cases}$$

1º) Vamos reescrever a equação (I) para alinhar as incógnitas correspondentes e colocar a equação (III) no lugar da equação (I), obtendo as equações L_1, L_2 e L_3.

$$\begin{cases} y + 2x + 2z = 0 \\ 3x - y - 3z = -6 \\ -x + y + 2z = 3 \end{cases} \sim \begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ 3x - y - 3z = -6 \\ -x + y + 2z = 3 \end{cases} \sim \begin{cases} -x + y + 2z = 3 & (L_1) \\ 3x - y - 3z = -6 & (L_2) \\ 2x + y + 2z = 0 & (L_3) \end{cases}$$

2º) Vamos substituir a equação L_2 pela equação L_4, em que L_4 é resultado da adição de L_2 com o produto de L_1 por 3. Em seguida, vamos substituir a equação L_3 pela equação L_5, em que L_5 é resultado da adição de L_3 com o produto de L_1 por 2.

$$\begin{cases} -x + y + 2z = 3 & (L_1) \quad \times 3 \quad \times 2 \\ 3x - y - 3z = -6 & (L_2) \; + \\ 2x + y + 2z = 0 & (L_3) \; + \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + y + 2z = 3 & (L_1) \\ 2y + 3z = 3 & (L_4) \\ 3y + 6z = 6 & (L_5) \end{cases}$$

3º) Vamos dividir a equação L_5 por 3 para obtermos a equação L_6, que colocaremos, em seguida, na posição da equação L_4.

$$\begin{cases} -x + y + 2z = 3 & (L_1) \\ 2y + 3z = 3 & (L_4) \\ 3y + 6z = 6 & (L_5) \div 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + y + 2z = 3 & (L_1) \\ y + 2z = 2 & (L_6) \\ 2y + 3z = 3 & (L_4) \end{cases}$$

4º) Para finalizar o escalonamento, vamos substituir a equação L_4 pela equação L_7, em que L_7 é o resultado da adição da equação L_4 com o produto da equação L_6 por -2.

$$\begin{cases} -x + y + 2z = 3 & (L_1) \\ y + 2z = 2 & (L_6) \quad \times (-2) \\ 2y + 3z = 3 & (L_4) \; + \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + y + 2z = 3 & (L_1) \\ y + 2z = 2 & (L_6) \\ -z = -1 & (L_7) \end{cases}$$

Resolvendo o sistema escalonado, encontramos a solução $S = \{(-1; 0; 1)\}$. Portanto, o sistema é possível e determinado (SPD).

ATIVIDADE RESOLVIDA

10. Resolva e classifique os sistemas lineares pelo método do escalonamento.

a) $\begin{cases} x - 2y + z = 4 \\ 2x + y + 3z = 3 \\ x + 3y + 2z = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ -2x + y + z = 3 \\ -3x + 4y + z = 4 \end{cases}$

Resolução

a) $\begin{cases} x - 2y + z = 4 & (L_1) \\ 2x + y + 3z = 3 & (L_2) \\ x + 3y + 2z = -1 & (L_3) \end{cases}$

Primeiro, vamos substituir a equação L_2 pela equação L_4, em que L_4 é resultado da adição de L_2 com o produto de L_1 por -2. Em seguida, vamos substituir a equação L_3 pela equação L_5, em que L_5 é resultado da adição de L_3 com o produto de L_1 por -1. Observe:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 4 & (L_1) \quad \times(-2) \quad \times(-1) \\ 2x + y + 3z = 3 & (L_2) \; + \\ x + 3y + 2z = -1 & (L_3) \; + \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 4 & (L_1) \\ 5y + z = -5 & (L_4) \\ 5y + z = -5 & (L_5) \end{cases}$$

Note que as equações L_4 e L_5 são idênticas. Logo, temos um sistema escalonado com três incógnitas e duas equações. Admitindo que a incógnita $z = \beta$, em que $\beta \in \mathbb{R}$, podemos usar a equação L_4 para determinar o valor da incógnita y em função de β.

Substituindo z por β e y por $\dfrac{-5 - \beta}{5}$ na equação L_1, vamos obter o valor da incógnita x em função de β.

$$x - 2 \cdot \left(\frac{-5 - \beta}{5}\right) + \beta = 4$$

$$x + \frac{10 + 2\beta}{5} + \beta = 4$$

$$x = \frac{10 - 7\beta}{5}$$

Portanto, o sistema é possível e indeterminado (SPI), e sua solução geral é:

$$S = \left\{\left(\frac{10 - 7\beta}{5}; \frac{-5 - \beta}{5}; \beta\right) \mid \beta \in \mathbb{R}\right\}$$

b) $\begin{cases} x + 2y - z = 2 & (L_1) \\ -2x + y + z = 3 & (L_2) \\ -3x + 4y + z = 4 & (L_3) \end{cases}$

Vamos substituir a equação L_2 pela equação L_4, em que L_4 é resultado da adição de L_2 com o produto de L_1 por 2. Em seguida, vamos substituir a equação L_3 pela equação L_5, em que L_5 é resultado da adição de L_3 com o produto de L_1 por 3. Acompanhe:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 & (L_1) \quad \times 2 \quad \times 3 \\ -2x + y + z = 3 & (L_2) \; + \\ -3x + 4y + z = 4 & (L_3) \; + \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 2 & (L_1) \\ 5y - z = 7 & (L_4) \\ 10y - 2z = 10 & (L_5) \end{cases}$$

Agora, vamos substituir a equação L_5 pela equação L_6, em que L_6 é resultado da adição de L_5 com o produto de L_4 por -2.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 & (L_1) \\ 5y - z = 7 & (L_4) \quad \times(-2) \\ 10y - 2z = 10 & (L_5) \; + \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 2 & (L_1) \\ 5y - z = 7 & (L_4) \\ 0z = -4 & (L_6) \end{cases}$$

A equação L_6 do sistema linear escalonado não tem solução. Portanto, o sistema é impossível (SI), e seu conjunto solução é indicado por $S = \varnothing$.

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

36. Em cada caso, resolva os sistemas escalonados.

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 70 \\ 4y = 80 \end{cases}$ $S = \{(10, 20)\}$

b) $\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ y - z = 4 \\ 7z = 21 \end{cases}$ $S = \{(-12, 7, 3)\}$

c) $\begin{cases} a - 3b + 2c - d = -1 \\ 5b - 3c + d = 3 \\ \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}d = 1 \\ \frac{1}{5}d = \frac{1}{5} \end{cases}$ $S = \{(1, 1, 1, 1)\}$

d) $\begin{cases} 4x + 2y - z = 6 \\ 3y - 5z = 2 \\ 0z = 1 \end{cases}$ $S = \varnothing$

e) $\begin{cases} 2x + y = 13 \\ 0y = 0 \end{cases}$ $S = \left\{\left(\frac{13 - \lambda}{2}, \lambda\right) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$

f) $\begin{cases} 3a + b - 2c + d = 1 \\ 3b + c - 2d = 4 \\ c + d = 1 \\ 0d = 2 \end{cases}$ $S = \varnothing$

37. O sistema seguinte tem o número de equações menor do que o número de incógnitas. Determine a solução geral desse sistema.

$\begin{cases} x + y - 2z + t = 1 \\ -y + 5z - 4t = 5 \\ 6z - t = 2 \end{cases}$

Ver as **Orientações para o professor**.

38. Resolva os sistemas a seguir por escalonamento e classifique-os.

a) $\begin{cases} x + y - z + t = 0 \\ x - y + z - t = 2 \\ -x + y + z - t = -4 \\ x - y - z - t = -4 \end{cases}$ $S = \{(1, -2, 3, 4)\}$; sistema possível e determinado

b) $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 9 \\ x - y + 2z = 2 \\ x + 4y + 2z = 7 \end{cases}$ $S = \{(3 - 2\lambda, 1, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$; sistema possível e indeterminado

39. Resolva, por escalonamento, os seguintes sistemas lineares.

a) $\begin{cases} -x + y - z = 5 \\ x + 2y + 4z = 4 \\ 2x + y + 2z = -1 \end{cases}$ $S = \{(-2; 3; 0)\}$

b) $\begin{cases} 2x - y + 2z = 8 \\ x + 2y + 4z = 5 \\ 3x - 3y - z = 7 \end{cases}$ $S = \{(1, -2, 2)\}$

40. (UFPE) Um nutricionista pretende misturar três tipos de alimentos (**A**, **B** e **C**) de forma que a mistura resultante contenha 3 600 unidades de vitaminas, 2 500 unidades de minerais e 2 700 unidades de gorduras. As unidades por grama de vitaminas, minerais e gorduras dos alimentos constam da tabela a seguir:

	Vitaminas	Minerais	Gordura
A	40	100	120
B	80	50	30
C	120	50	60

Quantos gramas do alimento **C** devem compor a mistura? 20 gramas

41. (FGV-SP) Para trabalhar na feira internacional do livro, a editora contratou três funcionários: Ana, Beto e Carlos, com salários x, y e z reais, respectivamente. O salário de Ana é igual à soma dos salários de Beto e Carlos. No final da feira, a editora pagou uma gratificação, de valor igual ao salário de Beto, a cada um dos três. Assim, Ana recebeu no total R$ 2.300,00, e a soma dos valores que os três receberam foi de R$ 5.400,00. Qual foi o valor da gratificação que receberam? R$ 800,00

Utilizando o Matrix calculator

Nesta seção, você vai explorar o *site* **Matrix calculator** e utilizá-lo para conferir resoluções de sistemas de equações lineares pelo método do escalonamento. Mas, para isso, vamos compreender antes o modo como um sistema linear é representado na forma matricial.

Considere o sistema linear de m equações com n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \dots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

A matriz $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$, na qual cada linha é formada, ordenadamente, pelos coeficientes e termos independentes de cada equação, é denominada **matriz completa** do sistema.

A matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, formada pelos coeficientes ordenados de cada equação, é denominada **matriz dos coeficientes** do sistema.

Exemplo:

- Sistema linear
$$\begin{cases} 2x + 5y - z = 0 \\ 4x - 3y + 6z = -1 \\ 7x + y - 2z = 8 \end{cases}$$
- Matriz completa
$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & 6 & -1 \\ 7 & 1 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$
- Matriz dos coeficientes
$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -3 & 6 \\ 7 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Consideremos, ainda, as seguintes matrizes associadas ao sistema:

- $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, formada pelas incógnitas.
- $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, formada pelos termos independentes.

Ao multiplicarmos a matriz dos coeficientes pela matriz das incógnitas, obtemos a matriz dos termos independentes:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Dizemos que essa é a **forma matricial** do sistema linear considerado.

Em notação simplificada, temos: $A \cdot X = B$, em que A é a matriz de ordem $m \times n$ formada por todos os coeficientes do sistema, X é a matriz de ordem $n \times 1$ formada por todas as incógnitas, e B é a matriz de ordem $m \times 1$ formada por todos os termos independentes.

Quando um sistema linear tem o número de equações igual ao número de incógnitas, a matriz dos coeficientes do sistema é uma matriz quadrada. Observe o exemplo.

- Sistema linear

$$\begin{cases} 2x + 5y - z = 0 \\ 4x - 3y + 6z = -1 \\ 7x + y - 2z = 8 \end{cases}$$

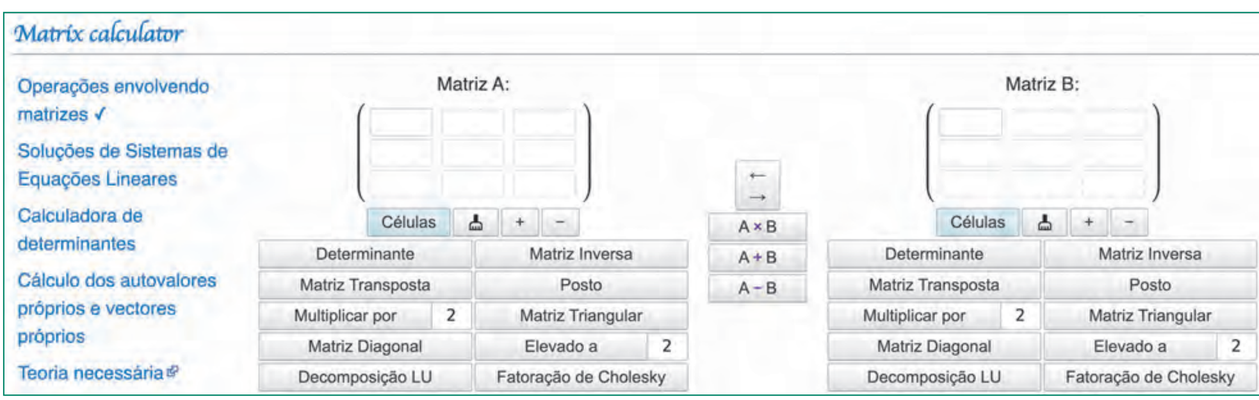
- Forma matricial

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -3 & 6 \\ 7 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Agora, vamos utilizar o Matrix calculator.

Você pode acessar o *site* por meio do *link* matrixcalc.org/pt (acesso em: 21 set. 2024). A vantagem de utilizar essa plataforma está no fato de que todo o processo que envolve a resolução é apresentado em etapas, permitindo que a revisão da resolução seja mais rápida.

Ao digitar esse *link* no navegador, você terá acesso à seguinte página inicial.



REPRODUÇÃO/MATRIX CALCULATOR

Inicialmente, acompanhe a resolução de um sistema linear de três equações com três incógnitas pelo método do escalonamento. Nesse escalonamento, em uma das passagens, **foi cometido um erro**, que, posteriormente, vamos identificar e corrigir com o auxílio do Matrix calculator.

O sistema a ser resolvido é o seguinte:

$$\begin{cases} x + 2y - z = -2 \\ 2x - y + 2z = 5 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$$

Primeiro, vamos substituir a equação L_2 pela equação L_4, em que L_4 é resultado da adição de L_2 com o produto de L_1 por -2. Em seguida, vamos substituir a equação L_3 pela equação L_5, em que L_5 é resultado da adição de L_3 com o produto de L_1 por -2.

$$\begin{cases} x + 2y - z = -2 & (L_1) \ \times(-2) \ \times(-2) \\ 2x - y + 2z = 5 & (L_2) \ + \\ 2x + y + z = 2 & (L_3) \ + \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y - z = -2 & (L_1) \\ 5y + 4z = 9 & (L_4) \\ -3y + 3z = 6 & (L_5) \end{cases}$$

Agora, vamos substituir a equação L_5 pela equação L_6, em que L_6 é resultado da adição da equação L_5 com o produto da equação L_4 por $\frac{3}{5}$.

$$\begin{cases} x + 2y - z = -2 & (L_1) \\ \phantom{x+{}} 5y + 4z = 9 & (L_4) \times \frac{3}{5} \\ -3y + 3z = 6 & (L_5) \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y - z = -2 & (L_1) \\ \phantom{x+{}} 5y + 4z = 9 & (L_4) \\ \phantom{x+2y+{}} \frac{27}{5}z = \frac{57}{5} & (L_6) \end{cases}$$

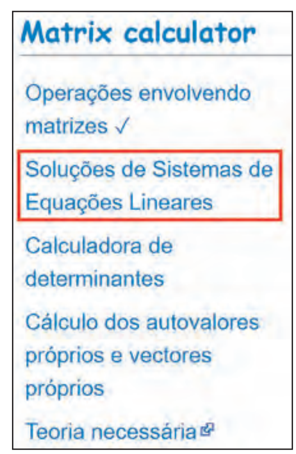
Resolvendo as equações do sistema, de baixo para cima, temos:

$$z = \frac{19}{9},\ y = \frac{1}{9} \text{ e } x = -\frac{1}{9}$$

Por outro lado, ao verificarmos se os resultados obtidos tornam verdadeiras as sentenças que formam o sistema, observamos que isso não acontece, o que indica que há erro na resolução.

$$\begin{cases} -\frac{1}{9} + 2 \cdot \frac{1}{9} - \frac{19}{9} = -2 \\ 2 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) - \frac{1}{9} + 2 \cdot \frac{19}{9} = \frac{35}{9} \\ 2 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) + \frac{1}{9} + \frac{19}{9} = 2 \end{cases}$$

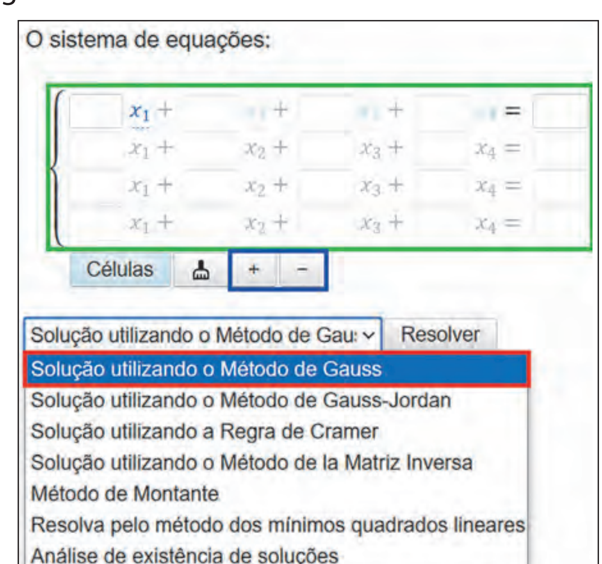
Como, em geral, essas verificações são muito trabalhosas, vamos utilizar o Matrix calculator para nos auxiliar na verificação da resolução.



Para isso, siga os passos a seguir.

I. Em um navegador, digite o *link* apresentado anteriormente e clique na opção **Solução de Sistemas de Equações Lineares**, conforme o destaque em vermelho.

II. O *site* apresenta a seção desejada, na qual você vai inserir os coeficientes das equações do sistema. Mas, antes, verifique se a ordem do sistema é a que você precisa. Você pode aumentar ou diminuir a quantidade de células clicando nos botões destacados em azul, como na imagem a seguir.

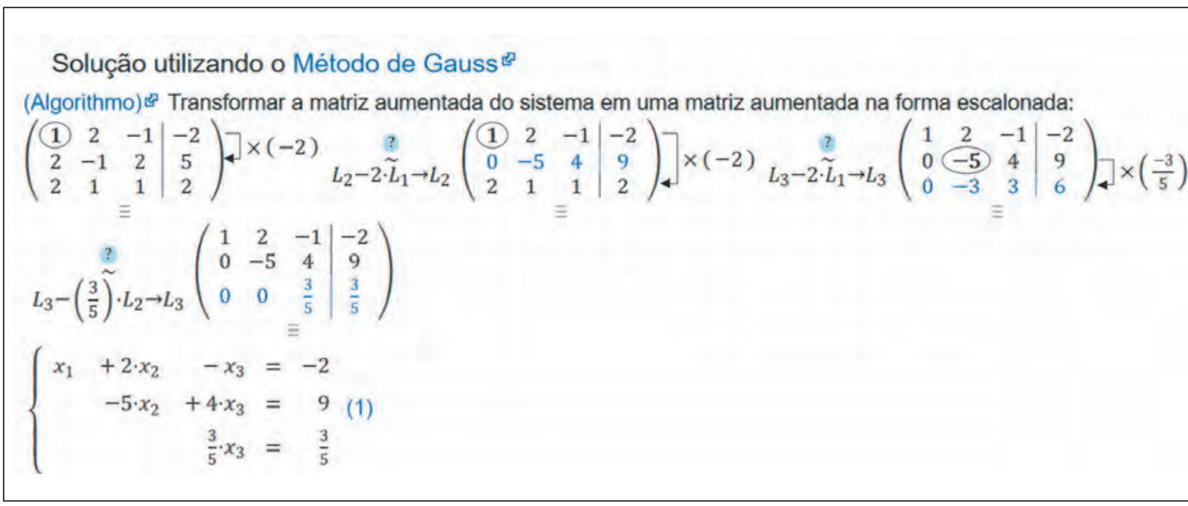


IMAGENS: REPRODUÇÃO/MATRIX CALCULATOR

III. Ajuste a quantidade de células, para que o sistema fique com três equações e três incógnitas, e complete os quadrinhos, na parte destacada em verde na imagem anterior, com os coeficientes das equações. Caso a equação linear tenha algum coeficiente nulo, preencha o quadrinho da incógnita correspondente com o número 0.

Depois de completar o sistema com os coeficientes, clique em **Solução utilizando o Método de Gauss**, destacado em vermelho na imagem anterior, que também é conhecido como método de escalonamento de matrizes.

IV. O *site* apresenta o escalonamento da matriz completa do sistema e o sistema linear escalonado equivalente ao sistema inicial, como pode ser verificado na imagem a seguir.



V. Explore o *site*, lendo as explicações sobre cada passo, e compare o escalonamento apresentado com o escalonamento feito no início desta seção. Observe que o sistema linear escalonado corretamente é este:

$$\begin{cases} x + 2y - z = -2 \\ -5y + 4z = 9 \\ \frac{3}{5}z = \frac{3}{5} \end{cases}$$

Resolvendo as equações do sistema, têm-se as soluções $z = 1$, $y = -1$ e $x = 1$.

Agora, faça o que se pede nas atividades a seguir.

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. Qual foi o erro cometido no escalonamento da matriz no início da seção?
Ver as **Orientações para o professor**.

2. Determine o sistema linear escalonado equivalente ao sistema a seguir. Utilize o Matrix calculator para conferir a sua resolução. $S = \{(1, 2, 3)\}$

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + 2y + z = 8 \\ x + y + 2z = 9 \end{cases}$$

1. (Cesupa) Aproveitando o recesso do mês de julho, o Cesupa pretende alterar parte do sistema de refrigeração em 3 de seus prédios, num período de uma semana. Para tanto, convida 3 firmas para submeter orçamentos para o trabalho envolvido em cada um dos prédios. As propostas recebidas estão representadas na matriz abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 53 & 96 & 37 \\ 47 & 87 & 41 \\ 60 & 92 & 36 \end{bmatrix}$$

onde a_{ij} é o orçamento em unidades de mil reais da firma i para o prédio j.

Como cada firma, no período previsto de uma semana, só consegue fazer o serviço em um dos prédios, será preciso então contratar uma firma diferente para cada prédio. A contratação firma/prédio, dentre as abaixo apresentadas, que levará o Cesupa a uma despesa mínima é: alternativa **a**

a) a_{11}, a_{22}, a_{33}
b) a_{11}, a_{23}, a_{32}
c) a_{12}, a_{23}, a_{31}
d) a_{13}, a_{22}, a_{31}

2. (Unicruz-RS) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, a matriz que resulta da operação $2A - B$ é: alternativa **b**

a) $\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 4 & -10 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -9 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -4 & 8 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -9 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 11 \end{bmatrix}$

3. (Vunesp-SP) Considere três lojas, L_1, L_2 e L_3, e três tipos de produtos, P_1, P_2 e P_3. A matriz a seguir descreve a quantidade de cada produto vendido por cada loja na primeira semana de dezembro. Cada elemento a_{ij} da matriz indica a quantidade do produto P_i vendido pela loja L_j, $i, j = 1, 2, 3$. alternativa **e**

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} L_1 & L_2 & L_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 30 & 19 & 20 \\ 15 & 10 & 8 \\ 12 & 16 & 11 \end{bmatrix} \end{array}$$

Analisando a matriz, podemos afirmar que:

a) a quantidade de produtos do tipo P_2 vendidos pela loja L_2 é 11.
b) a quantidade de produtos do tipo P_1 vendidos pela loja L_3 é 30.
c) a soma das quantidades de produtos do tipo P_3 vendidos pelas três lojas é 40.
d) a soma das quantidades de produtos do tipo P_i vendidos pelas lojas L_i, $i = 1, 2, 3$ é 52.
e) a soma das quantidades dos produtos dos tipos P_1 e P_2 vendidos pela loja L_1 é 45.

4. (UCDB-MS) Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},$$

tem-se que o produto $A \cdot B$ é igual a: alternativa **a**

a) $\begin{bmatrix} 3 & 16 \\ 13 & 6 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 3 & 16 \\ 6 & 13 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 13 & 16 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 3 & 13 \\ 16 & 6 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 16 & 3 \\ 13 & 6 \end{bmatrix}$

5. (UFC-CE) O valor de $2A^2 + 4B^2$ quando $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ é igual a: alternativa **b**

a) $\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

6. (UFABC-SP) Duas bicicletas desenvolvem movimentos retilíneos e uniformes sobre a mesma trajetória, com suas grandezas em unidades do Sistema Internacional. Suas funções horárias estão representadas matricialmente por:

$$\begin{pmatrix} 1 & -20 \\ 1 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 70 \end{pmatrix}$$

Nessas condições, as duas bicicletas se encontrarão no instante: alternativa **c**

a) 1,0 s.
b) 1,4 s.
c) 2,0 s.
d) 3,5 s.
e) 5,0 s.

7. (ESA-MG) Os Batalhões de Inteligência Militar desenvolvem formas para o envio de mensagens secretas, sendo uma delas os códigos matemáticos que seguem os passos a seguir:

1. O destinatário e o remetente possuem uma matriz chave C;
2. O destinatário recebe do remetente uma matriz P, tal que $MC = P$, onde M é a matriz da mensagem a ser codificada;
3. Cada número da matriz M corresponde a uma letra do alfabeto:
   $1 = a, 2 = b, 3 = c, \dots, 23 = z$;
4. Consideramos o alfabeto com 23 letras, excluindo as letras k, w e y;
5. O número zero corresponde ao ponto de exclamação;
6. A mensagem é lida, encontrando a matriz M, fazendo correspondência número/letra e ordenando as letras por linhas da matriz conforme segue:
   $m_{11}\ m_{12}\ m_{13}\ m_{21}\ m_{22}\ m_{23}\ m_{31}\ m_{32}\ m_{33}$.

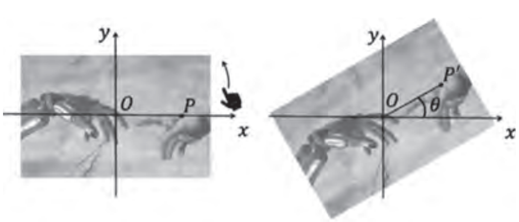
Considere as matrizes:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } P = \begin{pmatrix} 15 & 40 & 13 \\ 19 & 44 & 13 \\ 1 & -10 & 0 \end{pmatrix}$$

Com base nas informações descritas, qual alternativa apresenta a mensagem enviada por meio da matriz M? alternativa **c**

a) Brasil!
b) Território!
c) Pantanal!
d) Montanha!
e) Guerreiro!

8. (UEL-PR) Com a criação da tela sensível ao toque e sensores de movimento, foi possível utilizar gestos humanos como interface de comunicação com a máquina. Por conta disso, pode-se girar uma imagem em um celular. Admita que um aplicativo receba o gesto para girar a ilustração de Emil Lendof, que faz uma releitura do fragmento *A Criação de Adão de Michelangelo*, por um ângulo $\theta = \frac{\pi}{6}$ radianos no sentido anti-horário. O aplicativo considera a imagem em um plano cartesiano de origem O de modo que cada ponto P é rotacionado até um ponto P' no mesmo sistema de coordenadas, conforme imagens a seguir.



UEL, 2024

Sabendo que se $P = (a, b)$, $P' = (a', b')$ e

$$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \text{ então}$$

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = M \times \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

assinale a alternativa que apresenta, corretamente, as coordenadas do ponto P'. alternativa **e**

a) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{1}{2}b, \frac{1}{2}a - \frac{\sqrt{3}}{2}b\right)$

b) $\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b, \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right)$

c) $\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b, \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b\right)$

d) $\left(\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b, \frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{1}{2}b\right)$

e) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{1}{2}b, \frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b\right)$

9. (Fuvest-SP) Matrizes podem ser usadas para se obter informações sobre uma rede social. Para compreender como isso pode ser feito, consideremos como exemplo uma pequena rede social formada por 4 pessoas: P_1, P_2, P_3, P_4. A matriz associada a essa rede social é a matriz 4×4:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

O valor 1 (um) na posição a_{32} (linha 3, coluna 2) da matriz significa que a pessoa P_3 segue a pessoa P_2, ao passo que o valor 0 (zero) na posição a_{24} (linha 2, coluna 4) significa que a pessoa P_2 não segue a pessoa P_4. O valor 0 (zero) será atribuído às posições a_{ii}. O significado do valor da posição b_{mn} da matriz produto $M \times M = M^2$ é a quantidade de conexões da pessoa P_m até a pessoa P_n passando exatamente por uma pessoa, diferente delas duas, que chamaremos de conexão de grau 2. Dessa forma, os valores das posições da matriz M^2 podem refletir o alcance da rede social, suas potencialidades e fraquezas, a influência de certos membros dela, dentre outros aspectos. Com relação à rede social apresentada, é correto afirmar que: alternativa **b**

a) Existem 5 pares de pessoas diferentes ($P_i \neq P_j$) que não possuem conexões de grau 2.

b) Existem 6 pares de pessoas diferentes ($P_i \neq P_j$) que possuem apenas uma conexão de grau 2.

c) Existem 3 pares de pessoas diferentes ($P_i \neq P_j$) que possuem 2 conexões de grau 2 diferentes.

d) Existem 3 pessoas que possuem conexões de grau 2 com todas as outras pessoas da rede social.

e) Existe apenas 1 pessoa P_i ($i \neq 3$) tal que P_i e P_3 seguem-se mutuamente.

(Note e adote: A posição b_{mn} da matriz produto $M \times M = M^2$ é dada pela expressão $b_{mn} = a_{m1}a_{1n} + a_{m2}a_{2n} + a_{m3}a_{3n} + a_{m4}a_{4n}$.)

10. (Enem/MEC) Diante de um sanduíche e de uma porção de batatas fritas, um garoto, muito interessado na quantidade de calorias que pode ingerir em cada refeição, analisa os dados de que dispõe. Ele sabe que a porção de batatas tem 200 g, o que equivale a 560 calorias, e que o sanduíche tem 250 g e 500 calorias. Como ele deseja comer um pouco do sanduíche e um pouco das batatas, ele se vê diante da questão: "Quantos gramas de sanduíche e quantos gramas de batata eu posso comer para ingerir apenas 462 calorias permitidas para esta refeição?"
Considerando que x e y representam, respectivamente, em grama, as quantidades do sanduíche e das batatas que o garoto pode ingerir, indique a alternativa correspondente à expressão algébrica que relaciona corretamente essas quantidades. alternativa **a**

a) $2x + 2{,}8y = 462$

b) $2{,}8x + 2y = 462$

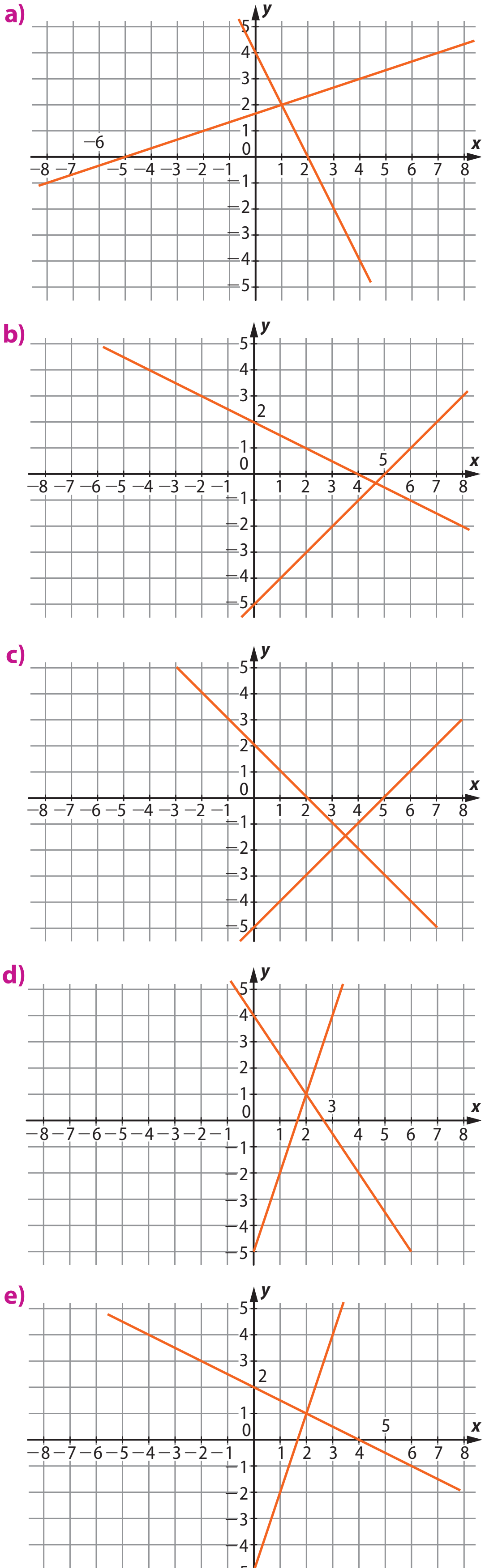
c) $1{,}8x + 2{,}3y = 1060$

d) $\frac{1}{2}x + 0{,}4y = 462$

e) $0{,}4x + \frac{1}{2}y = 462$

11. (Fuvest-SP) Considere o sistema linear $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$. Assinale a alternativa que representa graficamente esse sistema.
alternativa **e**

a)
b)
c)
d)
e)



ILUSTRAÇÕES: SERGIO LIMA

12. (EsPCEx-SP) Dado o sistema:

$$\begin{cases} 10x + 50y + 30z = 300 \\ 20x + 140y + 80z = 500 \end{cases}$$

Sendo $x, y, z \in \mathbb{R}$, então o valor de $x + y + z$ é igual a: alternativa **c**

a) 20
b) 30
c) 40
d) 50
e) 60

13. (UERJ) Uma nutricionista recomendou, para uma pessoa adulta, a ingestão de pão, fruta e iogurte no café da manhã. Os três alimentos, em conjunto, devem conter, exatamente, 16 g de proteínas, 124 g de carboidratos e 10 g de gorduras. Admita a seguinte quantidade de nutrientes, em gramas, em uma porção de 100 g de cada alimento:

QUANTIDADE DE NUTRIENTE (EM G)	PORÇÃO DE 100 G		
	PÃO	FRUTA	IOGURTE
proteínas	8	0	4
carboidratos	60	20	2
gorduras	4	0	3

A partir da tabela, calcule quantas porções de cada alimento essa pessoa deve ingerir de modo a consumir as quantidades de nutrientes recomendadas para seu café da manhã.
1 porção de pão, 3 porções de fruta e 2 porções de iogurte

PARA REFLETIR

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Neste Capítulo, estudamos o conceito de matrizes e operações envolvendo matrizes. Também foram apresentados os sistemas lineares e suas classificações. Respostas pessoais.

Vamos refletir a respeito das aprendizagens do Capítulo **6**:

- Você já conhecia algum dos conteúdos apresentados ao longo deste Capítulo? Qual(is)?
- Você consegue pensar em outras situações do dia a dia que podem ser resolvidas utilizando sistemas de equações lineares?
- Você consegue reconhecer se houve um aprofundamento em relação ao que você conhecia sobre o conceito de sistemas de equações?
- Monte um quadro comparativo entre as propriedades da adição de matrizes e as propriedades da adição de números reais. Depois, faça o mesmo para as propriedades da multiplicação.

LUCIANA WHITAKER/PULSAR IMAGENS

CAPÍTULO 7

TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

No estado do Piauí, localiza-se Buriti dos Lopes, município brasileiro conhecido como a cidade dos bordados. A técnica utilizada nesses bordados é a de fio contado, na qual os pontos, que têm formato de pequenas cruzes, são agrupados de modo a criar figuras e padrões.

A qualidade dos bordados dessa região é amplamente reconhecida, pois o artesanato feito pelas bordadeiras de Buriti é exposto, por meio de cooperativas, em feiras e salões nacionais e internacionais.

Nos padrões dos bordados, observam-se desenhos que se repetem, ora lado a lado, ora refletidos uns em relação aos outros. Esses padrões de repetição retratam ideias relacionadas às transformações geométricas, assunto que será tratado neste Capítulo.

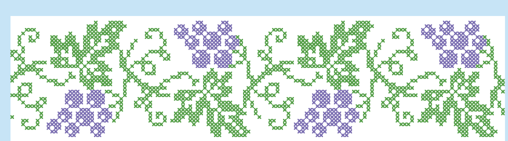
Fontes dos dados: COLEÇÕES artesanais diferenciadas produzidas em Buriti dos Lopes podem ser vistas em Salão Internacional. *In*: JORNAL DA PARNAÍBA. Parnaíba, 9 nov. 2013. Disponível em: https://www.jornaldaparnaiba.com/2013/11/colecoes-artesanais-diferenciadas.html.
GILDAZIO. Antes do bordado, Buriti era a cidade das rendas. **Portal buritinense**: portal de notícias de Buriti dos Lopes, Buriti dos Lopes, 10 jan. 2011. Disponível em: https://www.portalburitiense.com.br/2011/01/10/antes-do-bordado-buriti-era-a-cidade-das-rendas/. Acessos em: 23 out. 2024.

Agora, reúna-se a um colega, e façam o que se pede em cada questão.

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. As produções consideradas artesanato são feitas manualmente e, em geral, uma a uma, como uma toalha de mesa bordada ou mesmo uma pipa de empinar. Descrevam algum trabalho manual que vocês já tenham feito. Resposta pessoal.

2. Descrevam padrões que podem ser observados no bordado a seguir.



ALONA STANOVA/ISTOCK/GETTY IMAGES

3. Descrevam o que vocês entendem por:

- duas figuras simétricas em relação a uma reta; Ver as **Orientações para o professor**.
- duas figuras semelhantes;
- duas figuras congruentes.

2. Resposta pessoal. Exemplo de resposta: os cachos de uva da parte superior estão refletidos em relação aos cachos de uva da parte inferior, como em um espelho. Porém, estão deslocados para a direita, encaixando-se entre dois cachos da parte inferior.

Bordados feitos por artesãs do Centro de Artesanato Municipal de Buriti dos Lopes (PI). Fotografia de 2022.

Introdução

O artista gráfico holandês Maurits Cornelis Escher (1898-1972) frequentemente explorava ideias matemáticas em sua arte, especialmente as relacionadas à geometria e à simetria, criando obras que fascinavam tanto matemáticos quanto artistas. Sua habilidade permitiu-lhe produzir obras que extrapolam categorias artísticas tradicionais e continuam a intrigar e a inspirar observadores de todas as idades.

Suas obras muitas vezes apresentam padrões repetitivos que, por meio de técnicas como a **tesselação**, fundem-se e se transformam de maneiras surpreendentes, como pode ser observado na obra a seguir.

Tesselação: padrão geométrico composto de repetições que preenchem completamente uma superfície, sem deixar espaços vazios e sem sobreposições.

ESCHER, Maurits Cornelis. **Distribuição regular de répteis**. 1942. Tinta sobre papel, 22,0 cm × 20,7 cm. Coleção particular.

Repare como o lagarto destacado em azul pode ser associado ao lagarto destacado em verde por meio de um deslocamento horizontal para a direita. Além disso, o lagarto destacado em amarelo pode ser associado ao lagarto destacado em azul por meio de um giro em torno da ponta de suas caudas.

Pense e responda

Você já conhecia alguma obra de Escher? Se sim, qual?

Respostas pessoais.

Tanto o deslocamento quanto o giro ilustram ideias matemáticas denominadas **transformações geométricas no plano**.

Uma transformação T no plano α é uma função bijetora $T: \alpha \to \alpha$, isto é, uma função que associa cada ponto P de α a um único ponto P_1 de α.

Chamamos P_1 de imagem do ponto P pela transformação T. Para indicar essa transformação, utilizamos a notação:

$$P_1 = T(P)$$

Neste Capítulo, apresentaremos dois tipos de transformações: as isométricas e as homotéticas.

Transformações isométricas

Uma isometria no plano α é uma transformação T que preserva distâncias, isto é, para quaisquer dois pontos A e B do plano α e suas imagens $A_1 = T(A)$ e $B_1 = T(B)$, temos que:

$$d(A, B) = d(A_1, B_1)$$

Agora, vamos apresentar três tipos de isometrias: **reflexão**, **translação** e **rotação**.

Reflexão

Vamos estudar dois tipos de reflexão: a reflexão em relação a um ponto e a reflexão em relação a uma reta.

Reflexão em relação a um ponto

Dizemos que o ponto P_1 é o simétrico do ponto P em relação ao ponto A quando A é o ponto médio do segmento $\overline{PP_1}$. Na figura, A é ponto médio do segmento de reta $\overline{PP_1}$, logo o ponto P_1 é o simétrico de P em relação a A, e vice-versa.

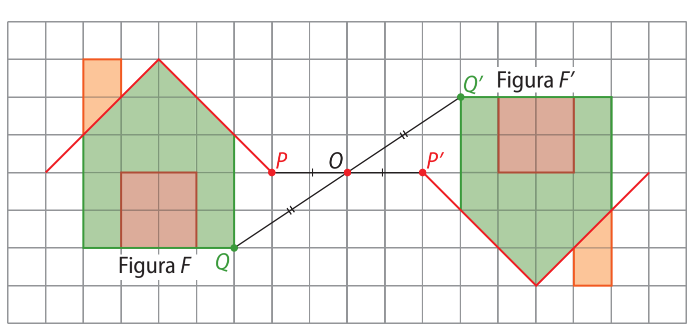
EDITORIA DE ARTE

Observe também que, como A é o ponto médio do segmento, as distâncias de A aos pontos P e P_1 são iguais, ou seja, $d(A, P) = d(A, P_1)$.

O simétrico de A em relação ao ponto A, por convenção, é o próprio ponto A.

Sendo A um ponto do plano α, a **reflexão em relação ao ponto** A é a transformação T que associa cada ponto P de α ao ponto P_1 simétrico de P em relação ao ponto A.

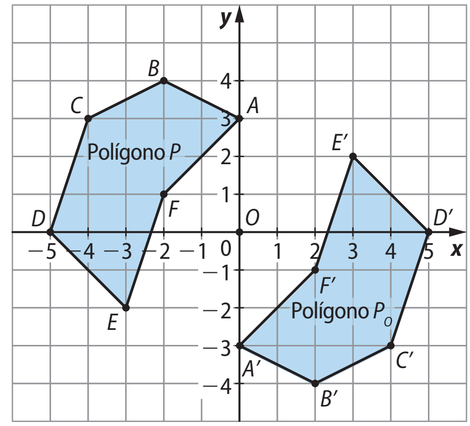
É comum imaginarmos o ponto A como um espelho, no qual o ponto P vê sua imagem P_1 refletida em relação a A. O exemplo a seguir apresenta a figura F e sua reflexão, a figura F', em relação ao ponto O.



BENTINHO

Note que $OP = OP'$ e $OQ = OQ'$. Temos, também, resultados análogos para qualquer outro ponto da figura F e sua respectiva imagem na figura F'.

Vamos agora comparar as coordenadas dos vértices de um polígono *P* com as coordenadas de sua imagem P_O, em que P_O é a reflexão de *P* em relação à origem *O*(0, 0) do plano cartesiano.



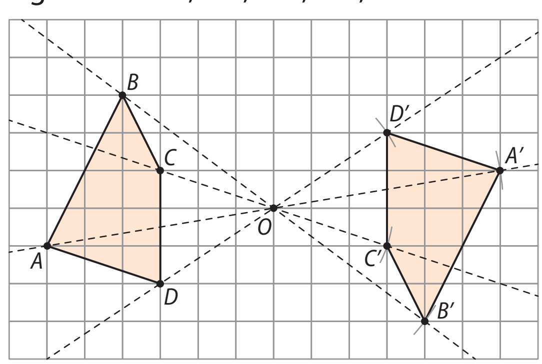
ILUSTRAÇÕES: SERGIO LIMA

	Coordenadas dos vértices dos polígonos					
P	*A*(0, 3)	*B*(−2, 4)	*C*(−4, 3)	*D*(−5, 0)	*E*(−3, −2)	*F*(−2, 1)
P_O	*A*′(0, −3)	*B*′(2, −4)	*C*′(4, −3)	*D*′(5, 0)	*E*′(3, 2)	*F*′(2, −1)

Pela comparação, podemos dizer que tanto as abscissas dos vértices do polígono *P*′ são opostas às abscissas dos vértices correspondentes em *P* quanto as ordenadas dos vértices do polígono *P*′ são opostas às ordenadas dos vértices correspondentes em *P*.

Utilizando régua e compasso, podemos desenhar a imagem de um polígono *ABCD* dada pela reflexão em relação ao ponto *O*. Observe:

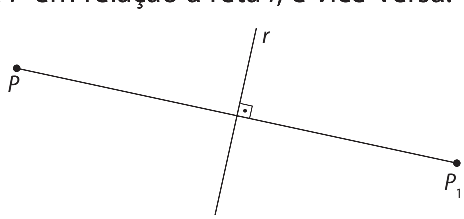
I. Com a régua, traçamos a reta $\overleftrightarrow{OA}$.
II. Com a ponta-seca do compasso em *O* e com abertura de medida *OA*, marcamos o ponto *A*′ (diferente de *A*) na reta $\overleftrightarrow{OA}$.
III. Com a régua, traçamos a reta $\overleftrightarrow{OB}$.
IV. Com a ponta-seca do compasso em *O* e com abertura de medida *OB*, marcamos o ponto *B*′ (diferente de *B*) na reta $\overleftrightarrow{OB}$.
V. Repetimos os passos III e IV para os vértices *C* e *D*.
VI. Com a régua, traçamos os segmentos $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{C'D'}$, $\overline{D'A'}$, de modo a construir o polígono *A*′*B*′*C*′*D*′.



Com a estratégia apresentada, podemos desenhar a reflexão de outros polígonos em relação a um ponto.

Reflexão em relação a uma reta

Dizemos que o ponto P_1 é o simétrico do ponto *P* em relação à reta *r* quando *r* é a mediatriz do segmento $\overline{PP_1}$. Na figura, *r* é a mediatriz do segmento de reta $\overline{PP_1}$, logo o ponto P_1 é o simétrico de *P* em relação à reta *r*, e vice-versa.



EDITORIA DE ARTE

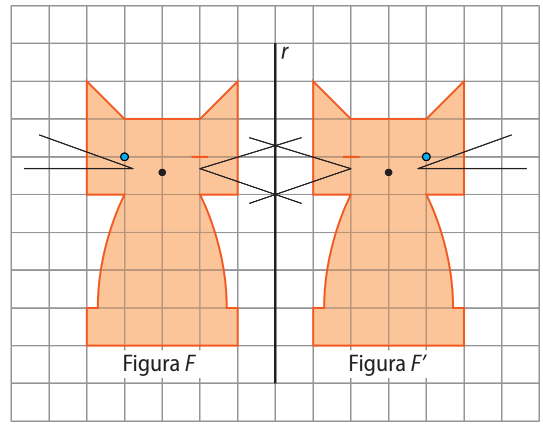
Saiba que...

A mediatriz de um segmento é a reta que passa perpendicularmente pelo ponto médio desse segmento.

Se o ponto *P* pertence à reta *r*, dizemos que o seu simétrico em relação à reta *r* é ele próprio.

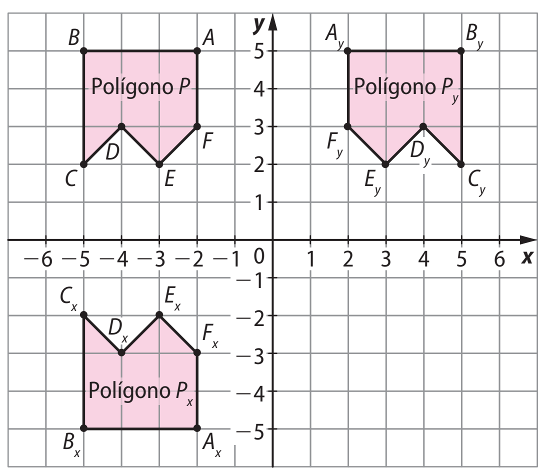
Sendo r uma reta do plano α, a **reflexão em relação à reta** r é a transformação T que associa cada ponto P de α ao ponto P_1 simétrico de P em relação a r.

É comum imaginarmos a reta r como um espelho, no qual o ponto P vê sua imagem P_1 refletida em relação a r. O exemplo a seguir apresenta a figura F e a sua reflexão, figura F', em relação à reta r.



Note que a distância entre um ponto da figura F e a reta r é igual à distância entre a imagem desse ponto na figura F' e a reta r. Por exemplo, o olho azul do gato da figura F dista 4 u.c. da reta r, e o olho azul do gato da figura F' também dista 4 u.c. da reta r.

Considere o polígono P e suas imagens P_y e P_x, em que P_y é a reflexão de P em relação ao eixo y e P_x é a reflexão de P em relação ao eixo x.



O quadro a seguir mostra as coordenadas dos vértices dos três polígonos.

	Coordenadas dos vértices dos polígonos					
P	$A(-2, 5)$	$B(-5, 5)$	$C(-5, 2)$	$D(-4, 3)$	$E(-3, 2)$	$F(-2, 3)$
$\boldsymbol{P_x}$	$A_x(-2, -5)$	$B_x(-5, -5)$	$C_x(-5, -2)$	$D_x(-4, -3)$	$E_x(-3, -2)$	$F_x(-2, -3)$
$\boldsymbol{P_y}$	$A_y(2, 5)$	$B_y(5, 5)$	$C_y(5, 2)$	$D_y(4, 3)$	$E_y(3, 2)$	$F_y(2, 3)$

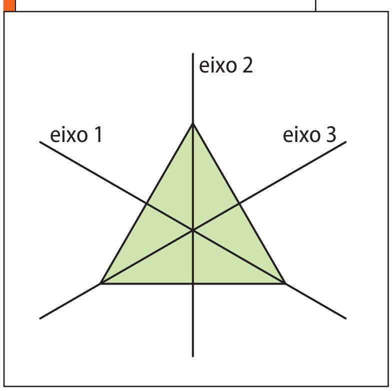
Ao comparar as coordenadas dos vértices dos polígonos P e P_x, observamos que as abscissas dos vértices do polígono P_x são iguais às abscissas dos vértices correspondentes em P, enquanto as ordenadas correspondentes são opostas entre si. Ao fazer a mesma comparação entre as coordenadas dos vértices dos polígonos P e P_y, observamos que as ordenadas dos vértices do polígono P_y são iguais às ordenadas dos vértices correspondentes em P, enquanto as abscissas correspondentes são opostas entre si.

Figuras com simetria

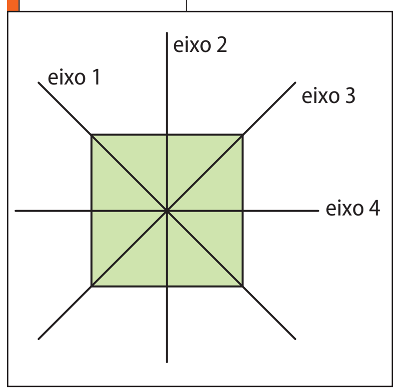
Dizemos que uma figura apresenta simetria em relação a uma reta *r* quando *r* divide a figura em duas partes, P_1 e P_2, de modo que P_2 seja a reflexão de P_1 em relação a *r*. À reta *r* damos o nome de **eixo de simetria**.

Uma figura geométrica simétrica pode ter um ou mais eixos de simetria. Observe a seguir algumas figuras com os seus eixos de simetria.

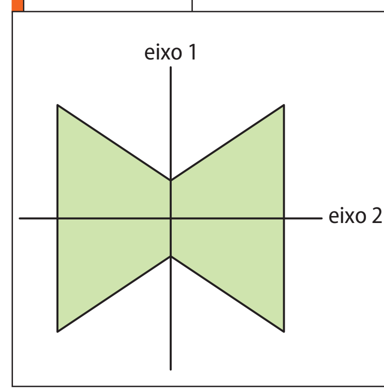
Triângulo equilátero



Quadrado

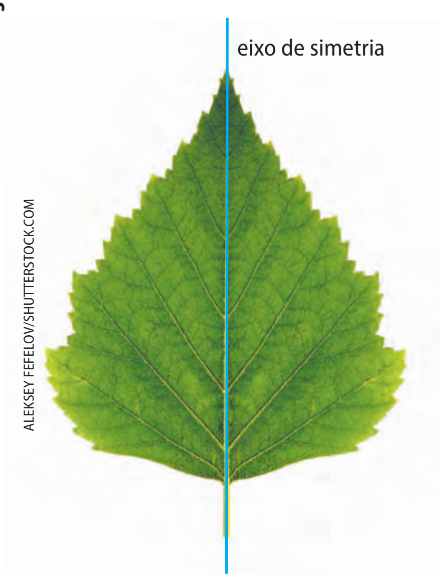


Hexágono

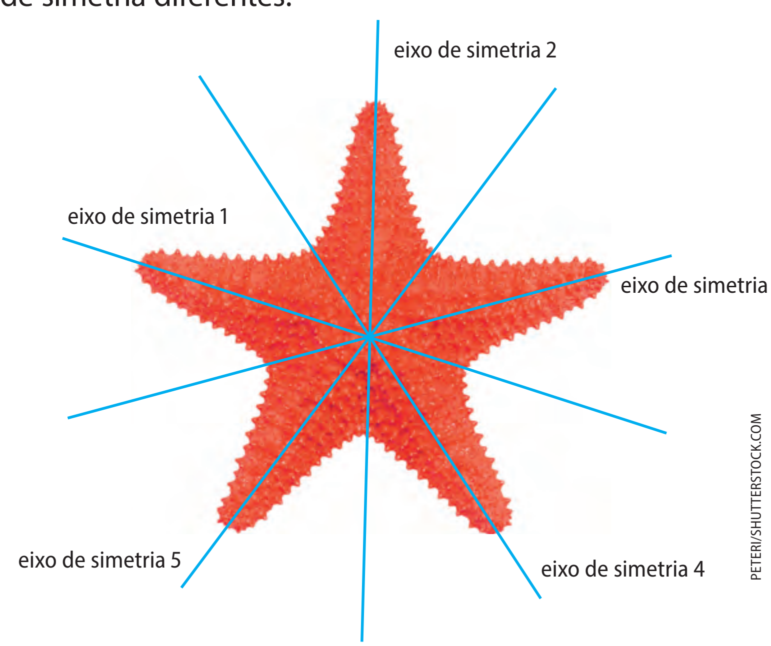


ILUSTRAÇÕES: SERGIO LIMA

Na natureza, há vários elementos que transmitem a ideia de simetria em relação a uma reta, como as duas metades de uma folha ou as duas metades de uma estrela-do-mar, a qual pode ser analisada conforme cinco eixos de simetria diferentes.



ALEKSEY FEFELOW/SHUTTERSTOCK.COM



PETERI/SHUTTERSTOCK.COM

■ O eixo de simetria em uma folha e os cinco eixos de simetria em uma estrela-do-mar. (As imagens estão fora de proporção.)

Pense e responda

- Quantos eixos de simetria tem um pentágono regular? E um hexágono regular? Um pentágono regular tem cinco eixos de simetria, e um hexágono regular, seis eixos.
- Quantos eixos de simetria há em um polígono regular de *n* lados? Em um polígono regular de *n* lados, há *n* eixos de simetria.

A obra a seguir é do renomado artista plástico baiano Rubem Valentim (1922-1991), conhecido por explorar elementos da cultura afro-brasileira em suas obras. Observe que essa obra também apresenta simetria em relação a uma reta.

Saiba que...

- Cultura afro-brasileira refere-se ao conjunto de tradições, costumes, expressões artísticas, religiosas e sociais dos africanos e de seus descendentes na formação da sociedade brasileira.
- Nesta coleção, trabalhamos apenas a simetria no plano. Portanto, as simetrias observadas em elementos da natureza e na Arquitetura serão apresentadas e consideradas apenas em fotografias.

MUSEU DE ARTE MODERNA DE SÃO PAULO, SÃO PAULO, BRASIL/ROMULO FIALDINI/TEMPO COMPOSTO

VALENTIM, Rubem. **Emblema 4**. 1969. Acrílica sobre aglomerado, 120 cm × 73,2 cm. Museu de Arte Moderna de São Paulo.

Para acessar

- BRASIL. Ministério da Cultura. Fundação Cultural Palmares. **Manifestações culturais negras**. Brasília, DF: MinC, 3 fev. 2023. Disponível em: https://www.gov.br/palmares/pt-br/departamentos/fomento-a-cultura/manifestacoes-culturais-negras-1. Acesso em: 28 set. 2024.

Nesse *site*, é possível conhecer algumas manifestações culturais negras brasileiras.

Na Arquitetura, podemos observar simetrias em fachadas de edifícios, por exemplo. Observe as imagens a seguir.

JOAO MELLO/SHUTTERSTOCK.COM

Teatro municipal do Rio de Janeiro (RJ). Fotografia de 2024. (As imagens desta página estão fora de proporção.)

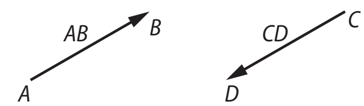
ANGELA_MACARIO/SHUTTERSTOCK.COM

Museu Frei Confaloni, antiga estação ferroviária de Goiânia (GO). Fotografia de 2021.

» Translação

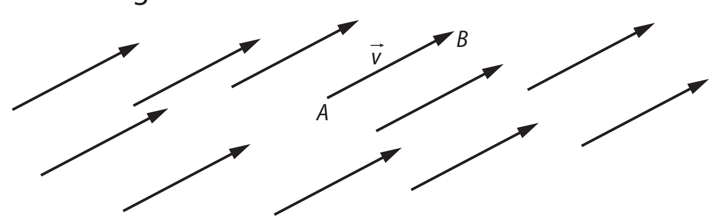
No plano, o segmento de reta orientado AB é um segmento em que admitimos o ponto A como origem e o ponto B como extremidade. O mesmo segmento, orientado no sentido oposto, tem origem em B e extremidade em A e é indicado por BA.

Nas figuras, a seta aponta para as extremidades B e D dos segmentos orientados AB e CD. Observe que os segmentos são paralelos e têm o mesmo comprimento e sentidos opostos.



No plano, o **vetor** $\vec{v}$, determinado pelo segmento orientado AB, é o conjunto de todos os segmentos orientados que:

- são paralelos ou colineares ao segmento orientado AB;
- têm o mesmo comprimento (módulo) que o segmento orientado AB;
- têm o mesmo sentido do segmento orientado AB.



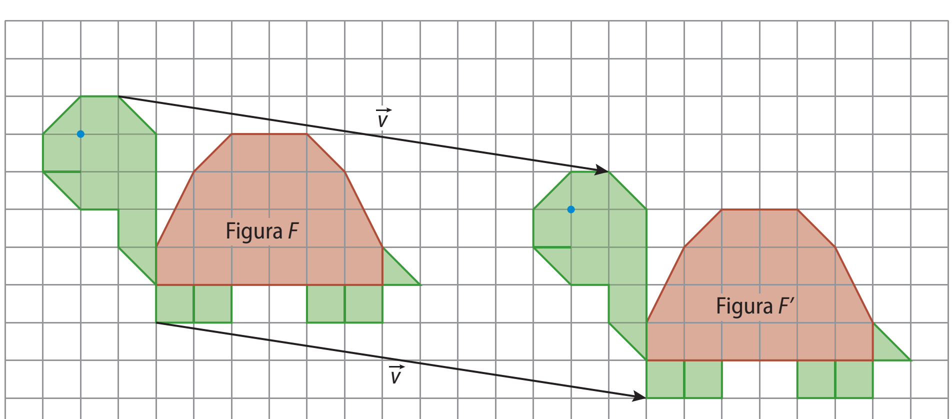
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Quando tratamos de vetores, qualquer um dos segmentos orientados do conjunto pode ser tomado como representante. Note que qualquer outro segmento orientado na figura anterior é também um representante do vetor $\vec{v}$.

Sendo $\vec{v}$ um vetor do plano α, a **translação** pelo vetor $\vec{v}$ é a transformação T que associa cada ponto P de α ao ponto P_1, de modo que PP_1 seja um segmento orientado do vetor $\vec{v}$.

Usamos a notação $P_1 = P + \vec{v}$ para indicar a translação do ponto P pelo vetor $\vec{v}$.

É comum imaginarmos que o vetor $\vec{v}$ transportou o ponto P para a posição P_1. Observe, no exemplo a seguir, como temos a impressão de que cada ponto da figura F foi deslocado pelo vetor para sua nova posição, formando a figura F'.

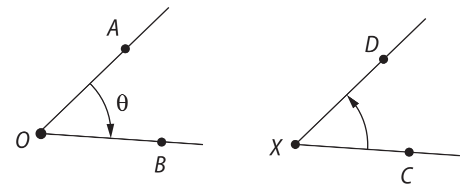


BENTINHO

» Rotação

No plano, o **ângulo orientado** $\theta = A\hat{O}B$ é um ângulo em que admitimos a semirreta $\overrightarrow{OA}$ como origem e a semirreta $\overrightarrow{OB}$ como extremidade. O mesmo ângulo, orientado no sentido oposto, tem origem em $\overrightarrow{OB}$ e extremidade em $\overrightarrow{OA}$ e é indicado por $B\hat{O}A$.

Nas figuras, a seta aponta para as semirretas que são as extremidades dos ângulos orientados $A\hat{O}B$ e $C\hat{X}D$. Observe que esses ângulos têm sentidos opostos. Para simplificar a comunicação, vamos dizer que o ângulo $A\hat{O}B$ é medido no sentido horário, enquanto o ângulo $C\hat{X}D$ é medido no sentido anti-horário.



EDITORIA DE ARTE

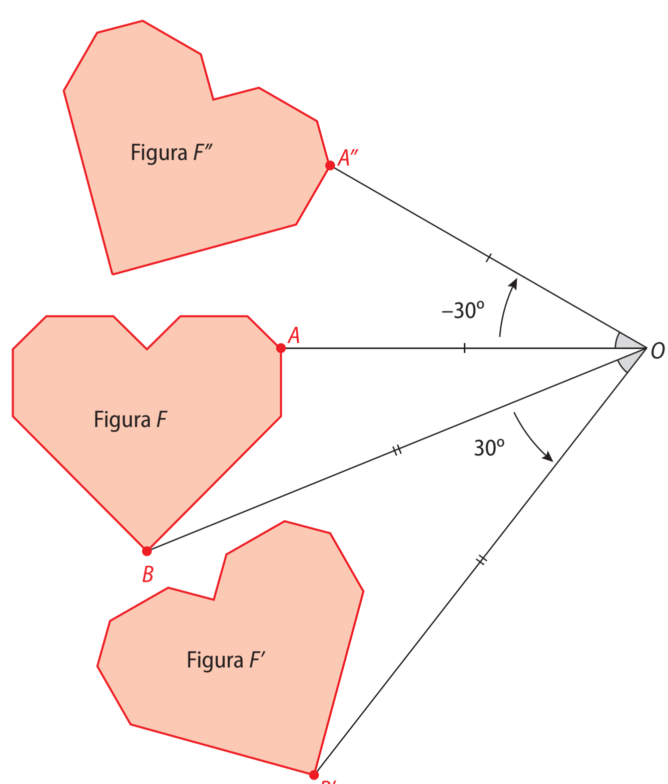
Sendo A um ponto do plano α e $\theta = A\hat{O}B$ um ângulo orientado, a **rotação** de centro em A e ângulo θ é a transformação T que associa cada ponto P de α ao ponto P_1, de modo que:

- os segmentos de reta $\overline{AP}$ e $\overline{AP_1}$ tenham o mesmo comprimento, ou seja, $AP = AP_1$;
- a medida do ângulo $P\hat{A}P_1$ seja igual à medida do ângulo θ, ou seja, $m\left(P\hat{A}P_1\right) = \theta$;
- o ângulo orientado $P\hat{A}P_1$ tenha o mesmo sentido que o ângulo orientado $A\hat{O}B$.

Convencionamos que a rotação se dará no sentido anti-horário para valores de θ positivos e no sentido horário para valores de θ negativos. Por exemplo, a figura F' é imagem da figura F por uma rotação de um ângulo de medida 30° em torno do ponto O, enquanto a figura F'' é imagem da figura F por uma rotação de um ângulo de medida −30° em torno do ponto O.

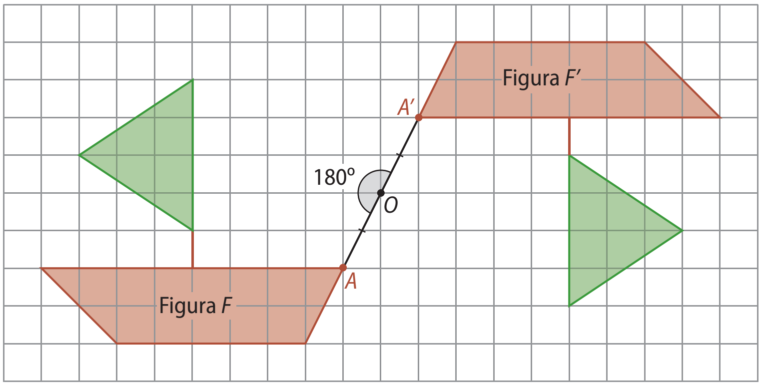
Note que $OB = OB'$ e $\text{med}\left(B\hat{O}B'\right) = 30°$ (sentido anti-horário de rotação) e que $OA = OA''$ e $\text{med}\left(A\hat{O}A''\right) = -30°$ (sentido horário de rotação).

Como alternativa à utilização do sinal da medida do ângulo para indicar o sentido de rotação, pode-se deixar o sentido explícito no texto, por exemplo: a figura F' é imagem da figura F por uma rotação de um ângulo de medida 30° no sentido anti-horário em torno do ponto O, enquanto a figura F'' é imagem da figura F por uma rotação de um ângulo de medida 30° no sentido horário em torno do ponto O.



BENTINHO

É importante destacar que a rotação de ângulo 180° em torno de um ponto *O* coincide com a reflexão dessa figura em relação ao ponto *O*. Observe um exemplo disso na figura a seguir.



FÓRUM

Confecções indígenas

Os artefatos das comunidades indígenas trazem consigo, além de apelo visual, informações culturais relacionadas a saberes transmitidos de geração para geração.

Nas imagens a seguir, temos exemplos de grafismos indígenas na arte da cestaria de arumã, uma planta nativa da Amazônia, feita pelo povo baniwa, do Alto Xingu.


FABIO COLOMBINI


ISMAR INGBER/PULSAR IMAGENS

▪ Detalhe de grafismo de balaio e balaios confeccionados pelo povo baniwa com talo de arumã e corante natural.

Ver as **Orientações para o professor**.

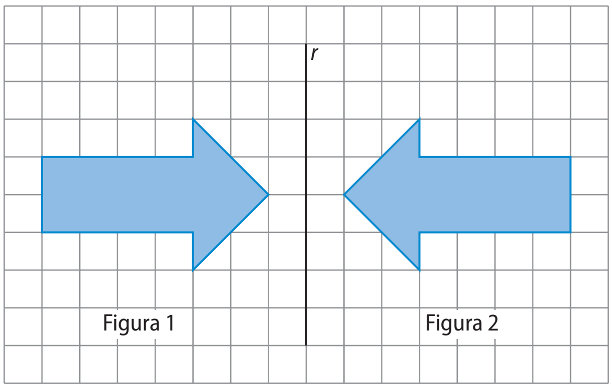
Converse com os colegas e o professor sobre as questões a seguir.

- Vocês já conheciam esse tipo de grafismo? Os grafismos das imagens apresentam algum tipo de isometria? Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes identifiquem reflexões, translações e rotações nas fotografias dos balaios.
- Pesquisem sobre a arte dos povos indígenas do Brasil e da sua região. Selecionem alguns grafismos pesquisados, apresentem as imagens aos colegas e discutam a importância da valorização da arte indígena. Pesquisa dos estudantes. Espera-se que os estudantes compreendam que as diferentes culturas devem ser respeitadas e valorizadas em sua diversidade.

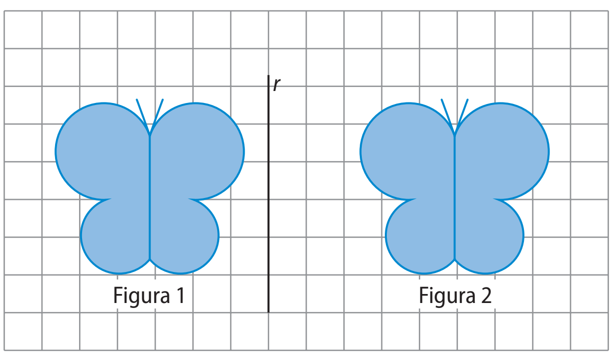
ATIVIDADES RESOLVIDAS

1. Observe as figuras congruentes na malha quadriculada, em que o lado de cada quadrado mede 1 u.c., e verifique se a figura 2 é a reflexão da figura 1 em relação à reta *r*. Justifique.

a)



b)

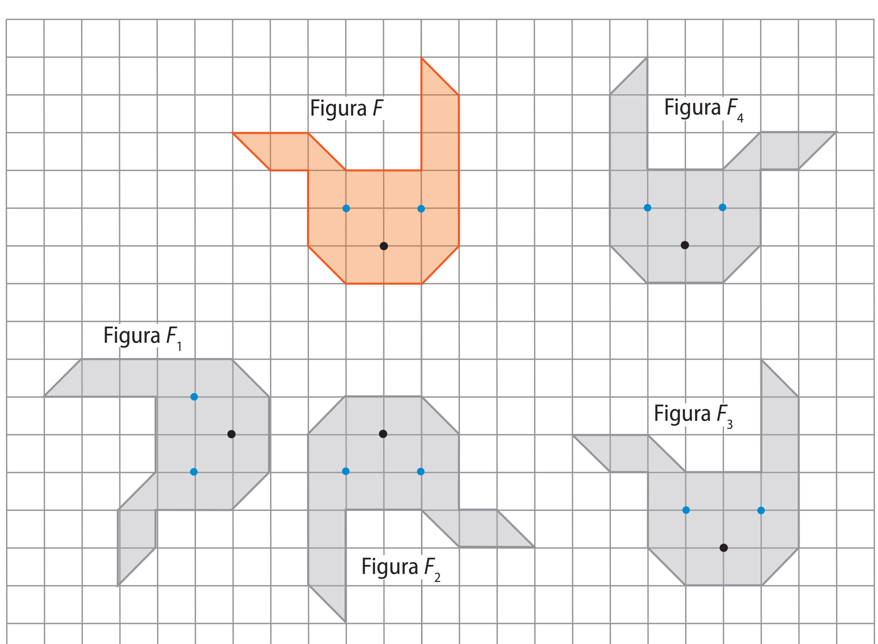


Resolução

a) Observe, na malha quadriculada, que a reta *r* é a mediatriz dos segmentos determinados por qualquer ponto da figura 1 e o ponto correspondente da figura 2. Logo, a figura 2 é a reflexão da figura 1 em relação à reta *r*.

b) Pela malha quadriculada, temos que a reta *r* não é a mediatriz de qualquer segmento de reta determinado por um ponto da figura 1 e o ponto correspondente da figura 2. Portanto, a figura 2 não é a reflexão da figura 1 em relação à reta *r*.

2. Quais são as isometrias das figuras F_1, F_2, F_3 e F_4 em relação à figura *F* na malha quadriculada a seguir? Considere a medida do lado do quadrado da malha igual a 1 u.c.

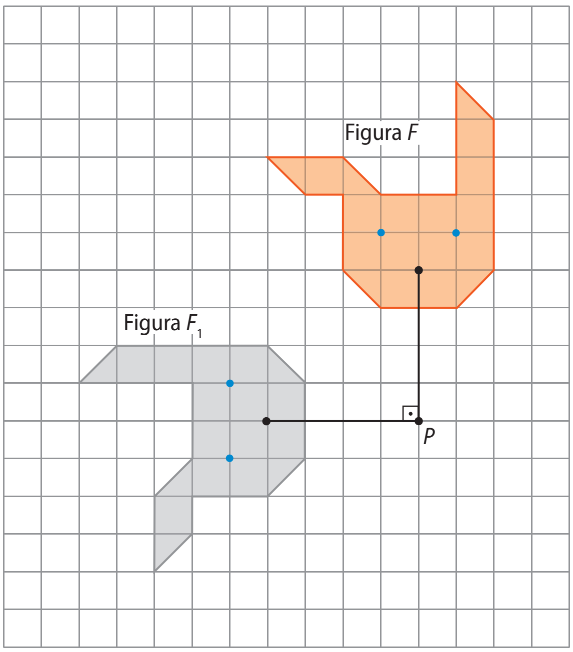


ILUSTRAÇÕES: BENTINHO

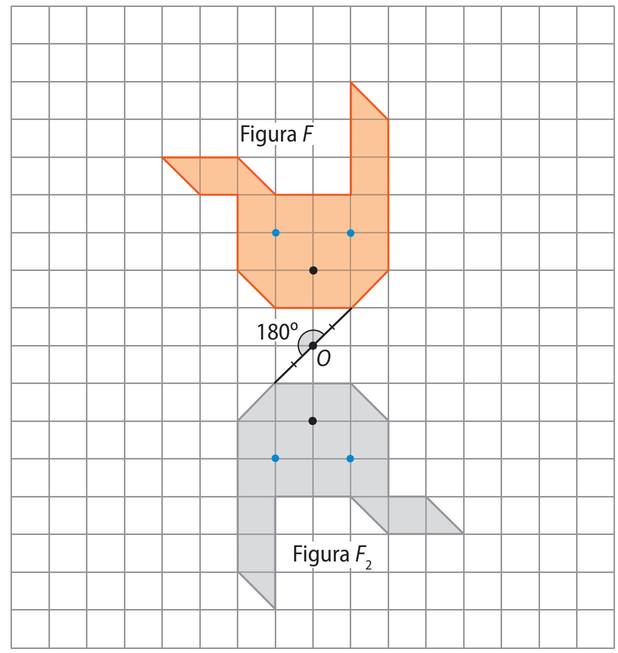
Resolução

Vamos analisar caso a caso.

- A figura F_1 é a rotação de 90° de F em torno do ponto P no sentido anti-horário.

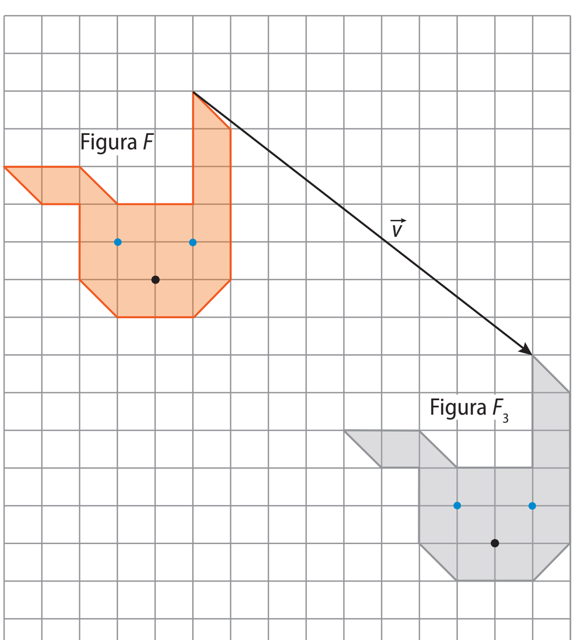


- A figura F_2 é a reflexão de F em relação ao ponto O e é também a rotação de 180° de F em torno do ponto O.

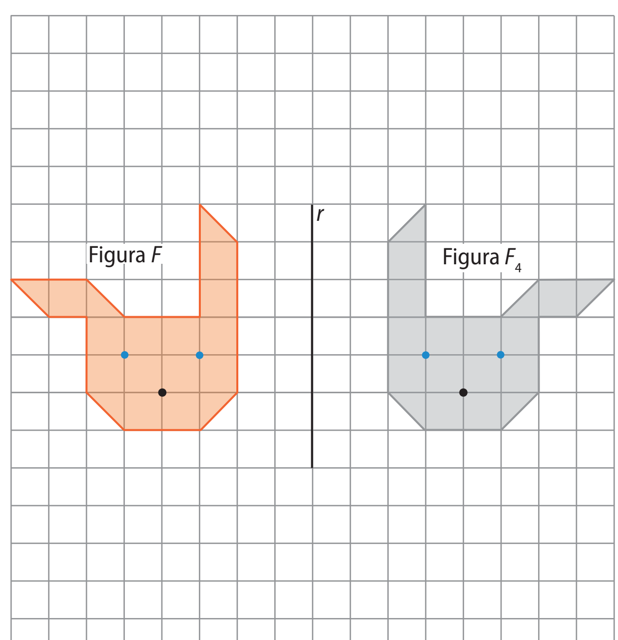


ILUSTRAÇÕES: BENTINHO

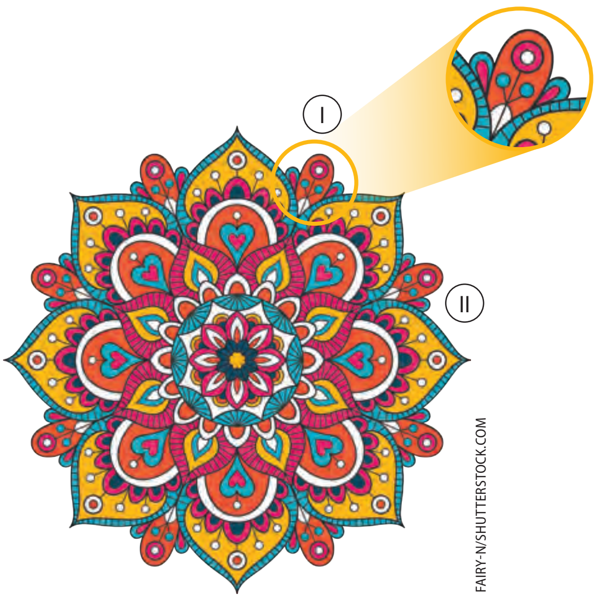
- A figura F_3 é a translação de F pelo vetor $\vec{v}$.



- A figura F_4 é a reflexão de F em relação à reta r.



3. Em algumas culturas, as mandalas simbolizam harmonia e equilíbrio e, por esse motivo, são frequentemente utilizadas na Arquitetura e em decorações. Observe a seguir a ilustração de uma mandala.



FAIRY-N/SHUTTERSTOCK.COM

Note que parte do desenho que compõe a mandala se repete de acordo com um padrão. O elemento destacado no *zoom*, por exemplo, repete-se outras sete vezes.

a) Como é chamada a transformação que podemos associar às repetições do elemento destacado da mandala?

b) Descreva a rotação que associa o elemento I ao elemento II destacado considerando o sentido horário. Agora, descreva a rotação considerando o sentido anti-horário.

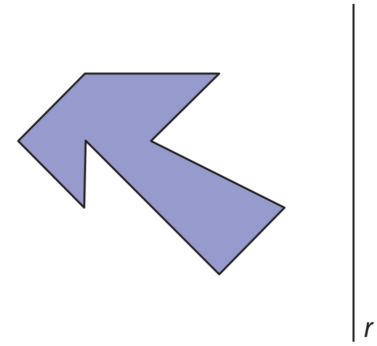
Resolução

a) Rotação em torno de um ponto (centro da mandala).

b) Como há 8 repetições, o menor ângulo de rotação é obtido pela divisão da volta completa (360°) por 8, ou seja, $\frac{360°}{8} = 45°$. Assim, o elemento II é a rotação de $-45°$ (sentido horário) do elemento I em torno do centro da mandala. Caso seja considerada a rotação em torno do centro da mandala no sentido anti-horário, o ângulo de rotação será $360° - 45° = 315°$.

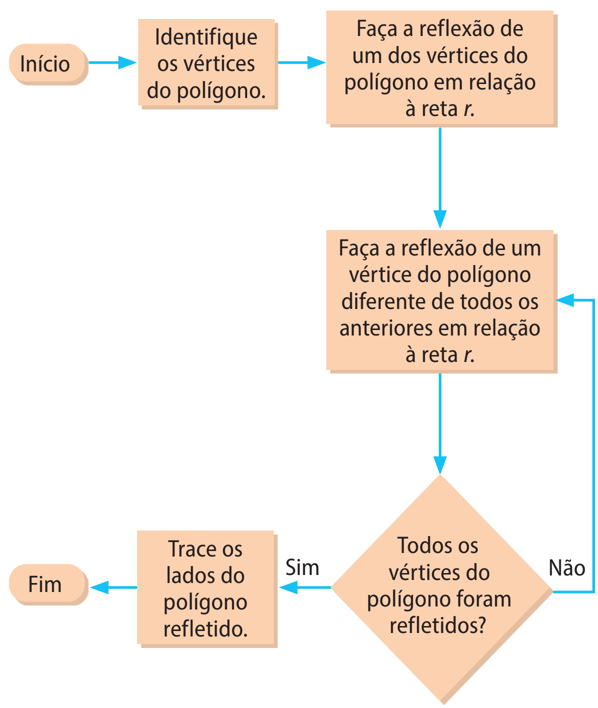
4. Construa um fluxograma que indique os passos para desenhar a reflexão em relação à reta *r* do polígono mostrado a seguir.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE



Resolução

Para desenhar a reflexão de um polígono em relação a uma reta, determinamos primeiro as imagens dos vértices; em seguida, traçamos os lados do polígono. O fluxograma a seguir indica os passos necessários para essa construção.



Pense e responda

- Faz diferença o vértice escolhido para começar o processo? Explique. Não, pois cada reflexão é independente das outras.
- Esse processo serve para refletir qualquer polígono em relação a uma reta? Explique. Sim, pois, no fluxograma, não foram utilizadas características específicas de nenhum polígono, apenas elementos gerais.

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. Determine em quais das imagens a seguir podemos admitir simetria em relação a uma reta. As imagens não estão em proporção. Nas imagens dos itens **a** e **b**.

a)

BOONCHUAY PROMJIAM/SHUTTERSTOCK.COM

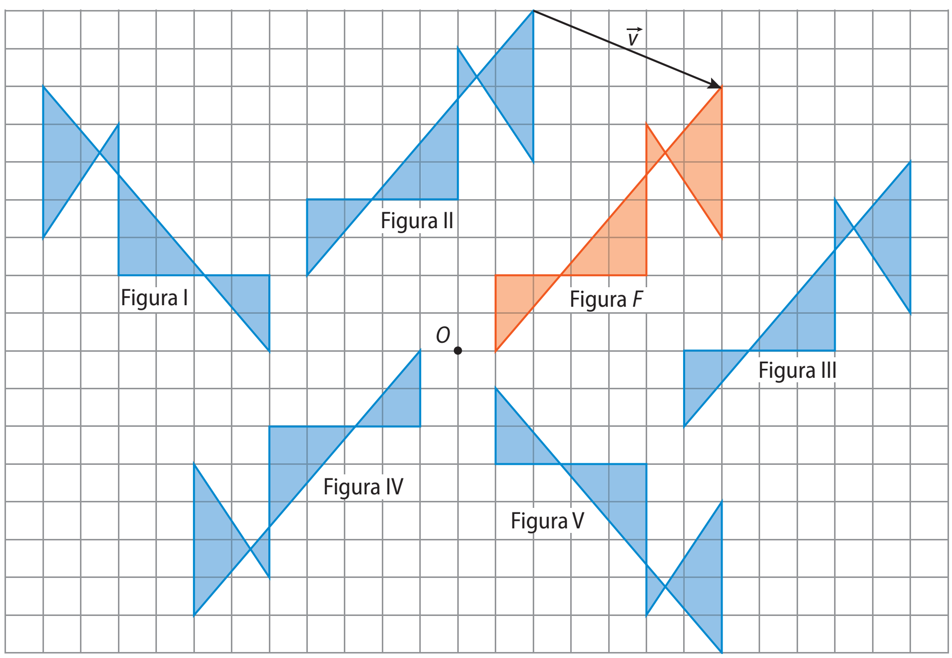
b)

ZHURAVLEV ANDREY/SHUTTERSTOCK.COM

c)

STEFAN PETRU ANDRONACHE/SHUTTERSTOCK.COM

2. Observe as figuras na malha quadriculada a seguir, em que a medida do lado de cada quadrado mede 1 u.c., e responda às perguntas.



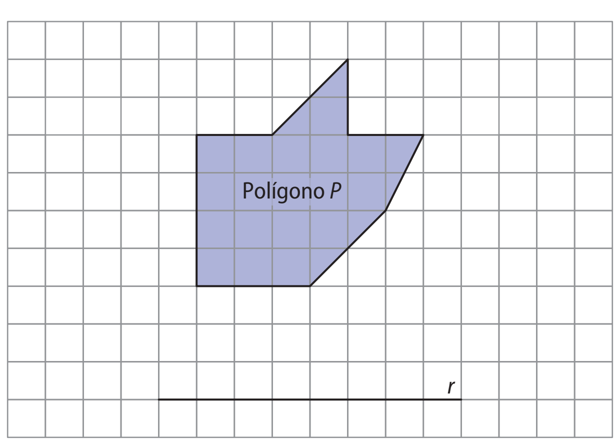
BENTINHO

a) Qual figura representa a reflexão da figura *F* em relação a uma reta vertical? figura I

b) Qual figura representa a translação da figura *F* pelo vetor $\vec{v}$? figura III

c) Qual figura representa a rotação da figura *F* em 180° em torno do ponto *O*? figura IV

3. Desenhe, em uma folha de papel quadriculado, o polígono *P′*, que é a reflexão do polígono *P* a seguir em relação à reta *r*. Ver as **Orientações para o professor**.



SERGIO LIMA

4. (Enem/MEC) Um programa de edição de imagens possibilita transformar figuras em outras mais complexas. Deseja-se construir uma nova figura a partir da original. A nova figura deve apresentar simetria em relação ao ponto *O*.

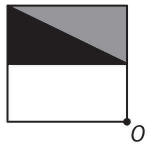
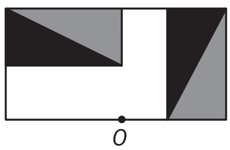


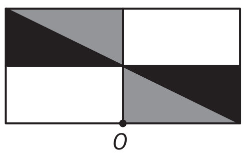
Figura original

A imagem que representa a nova figura é: alternativa **e**

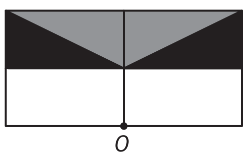
a)



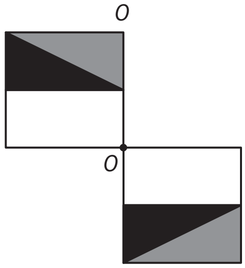
b)



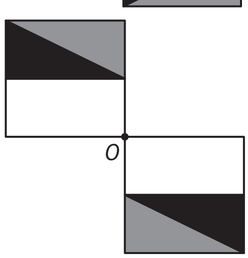
c)



d)

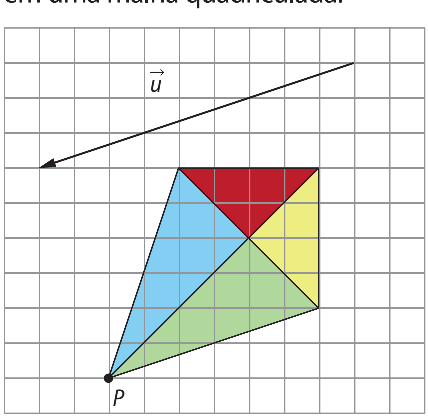


e)



ILUSTRAÇÕES: SERGIO LIMA

5. Observe a figura a seguir, que representa uma pipa em uma malha quadriculada.



EDITORIA DE ARTE

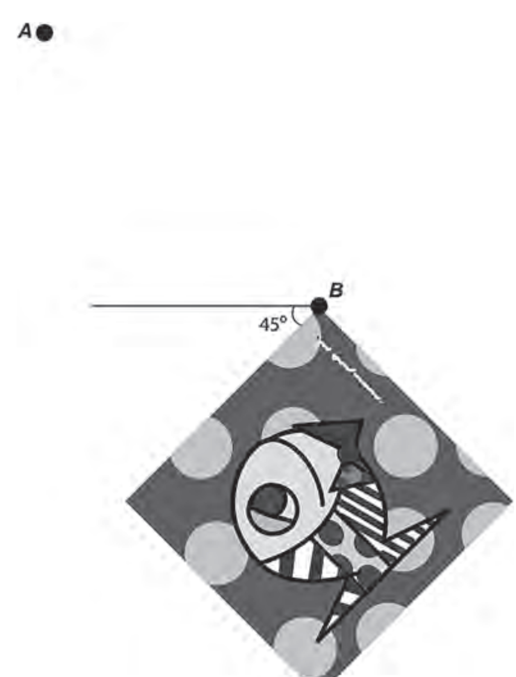
Agora, desenhe, em uma folha de papel quadriculado, as figuras obtidas a partir de cada uma das transformações a seguir.

a) Translação pelo vetor $\vec{u}$. Ver as **Orientações para o professor**.

b) Rotação de 180° em torno do ponto *P* no sentido anti-horário. Ver as **Orientações para o professor**.

- Como ficaria a figura rotacionada, se, no item **b**, mantendo o ângulo e o centro de rotação, fizéssemos a rotação em sentido horário? A figura ficaria igual.

6. (Enem/MEC) A imagem apresentada na figura é uma cópia em preto e branco da tela quadrada intitulada *O peixe*, de Marcos Pinto, que foi colocada em uma parede para exposição e fixada nos pontos *A* e *B*. Por um problema na fixação de um dos pontos, a tela se desprendeu, girando rente à parede. Após o giro, ela ficou posicionada como ilustrado na figura, formando um ângulo de 45° com a linha do horizonte.

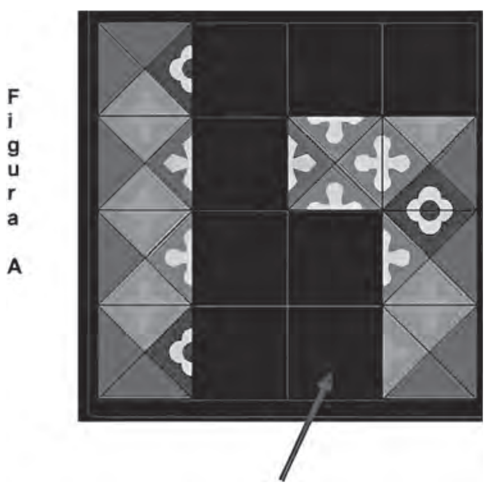


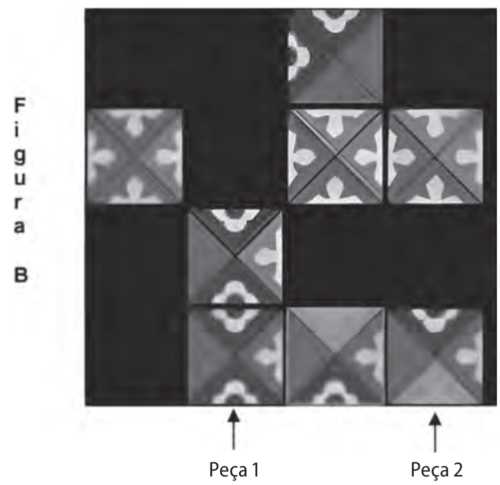
ENEM, 2017

Para recolocar a tela na sua posição original, deve-se girá-la, rente à parede, no menor ângulo possível inferior a 360°. A forma de recolocar a tela na posição original, obedecendo ao que foi estabelecido, é girando-a em um ângulo de alternativa **b**

a) 90° no sentido horário.
b) 135° no sentido horário.
c) 180° no sentido anti-horário.
d) 270° no sentido anti-horário.
e) 315° no sentido horário.

7. (Enem/MEC) As figuras a seguir exibem um trecho de um quebra-cabeças que está sendo montado. Observe que as peças são quadradas e há 8 peças no tabuleiro da figura *A* e 8 peças no tabuleiro da figura *B*. As peças são retiradas do tabuleiro da figura *B* e colocadas no tabuleiro da figura *A* na posição correta, isto é, de modo a completar os desenhos.





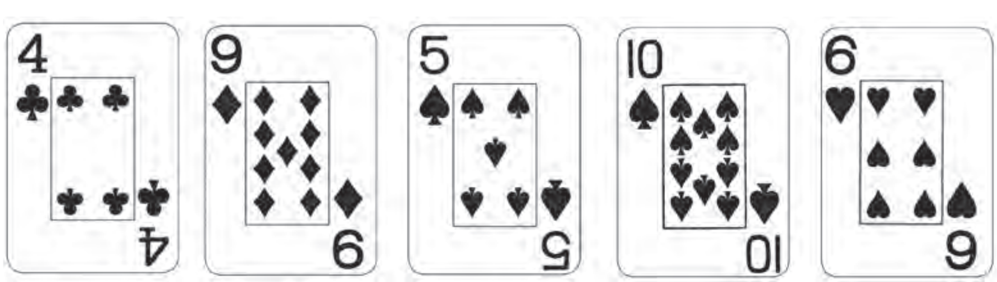
IMAGENS: ENEM, 2009

Disponível em: http://pt.eternityii.com. Acesso em: 14 jul. 2009.

É possível preencher corretamente o espaço indicado pela seta no tabuleiro da figura *A* colocando a peça alternativa **c**

a) 1 após girá-la 90° no sentido horário.
b) 1 após girá-la 180° no sentido anti-horário.
c) 2 após girá-la 90° no sentido anti-horário.
d) 2 após girá-la 180° no sentido horário.
e) 2 após girá-la 270° no sentido anti-horário.

8. (Cefet-MG) As cartas de um baralho tradicional possuem características para facilitar a visualização dos jogadores. A ideia é de que elas possam ser lidas de "cabeça para baixo", isto é, não é necessário rotacionar uma carta em 180° para que ela possa ser compreendida. De fato, algumas cartas são idênticas se vistas em posições distintas, por meio de uma rotação. Considere a figura a seguir composta por cinco cartas:



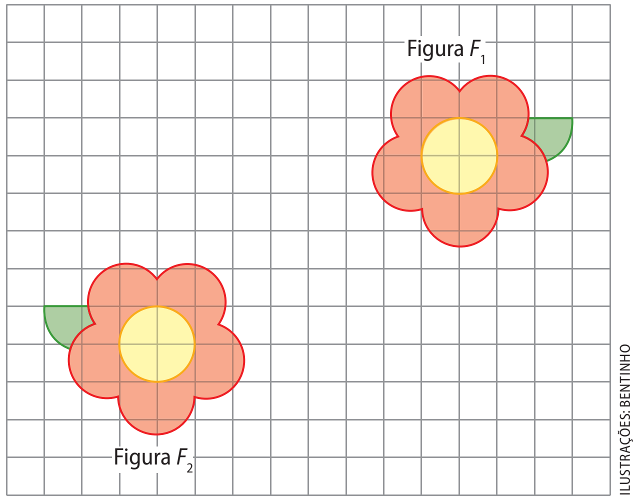
CEFET-MG, 2022

O número de cartas dessa figura que exibirão exatamente a mesma imagem após uma rotação de 180° é alternativa **c**

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4

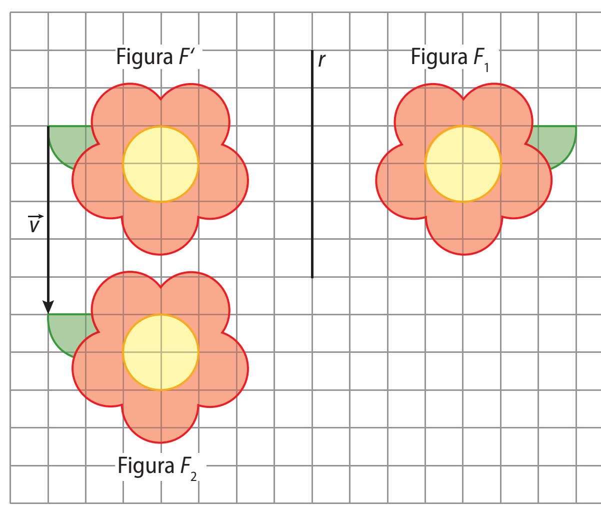
» Composição de transformações

Na imagem a seguir, podemos observar duas figuras congruentes, F_1 e F_2, que não são imagens uma da outra por nenhuma das isometrias estudadas até o momento.



No entanto, se considerarmos uma figura auxiliar F', conseguimos identificar algumas isometrias. Acompanhe:

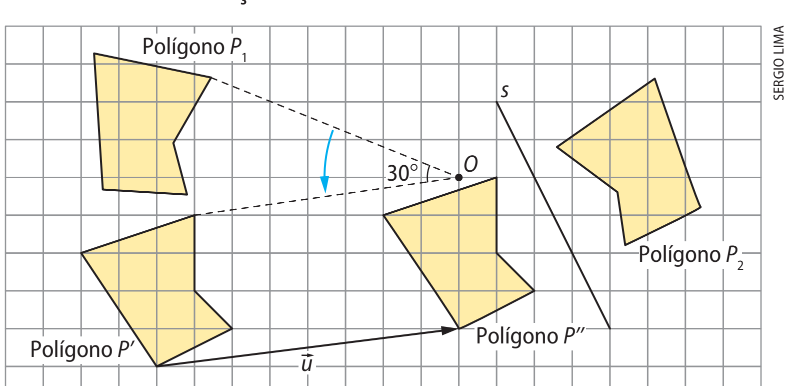
- A figura F' é a reflexão em relação à reta r da figura F_1.
- A figura F_2 é a translação pelo vetor $\vec{v}$ da figura F'.



Assim, dizemos que a figura F_2 é imagem da figura F_1 por meio de uma **composição de transformações**.

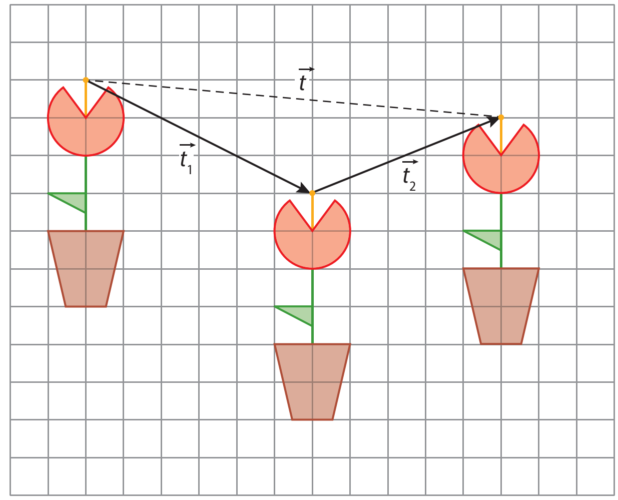
Acompanhe outro exemplo. O polígono P_2 pode ser associado ao polígono P_1 pela seguinte composição:

- O polígono P' é a rotação de 30° em torno do ponto O no sentido anti-horário de P_1.
- O polígono P'' é a translação pelo vetor $\vec{u}$ de P'.
- O polígono P_2 é a reflexão em relação à reta s de P''.



Um caso de composição de transformações interessante de ser analisado é a composição de duas translações, que sempre resulta em uma nova translação. Observe um exemplo a seguir.

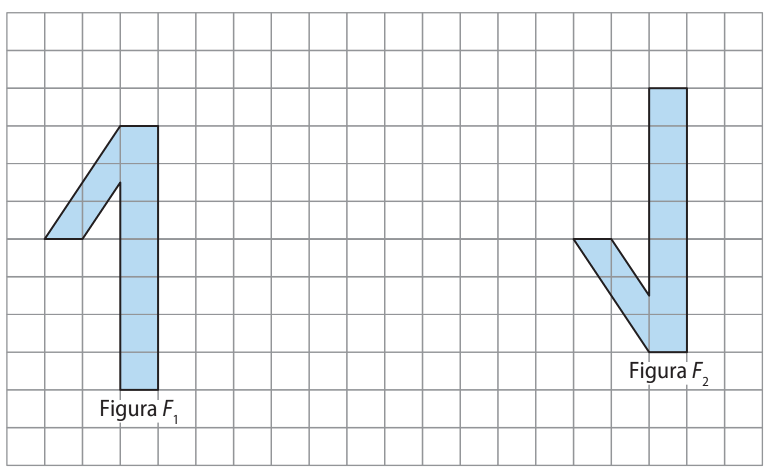
A translação pelo vetor $\vec{t}$ é a composição da translação pelo vetor $\vec{t_1}$ seguida da translação pelo vetor $\vec{t_2}$.



BENTINHO

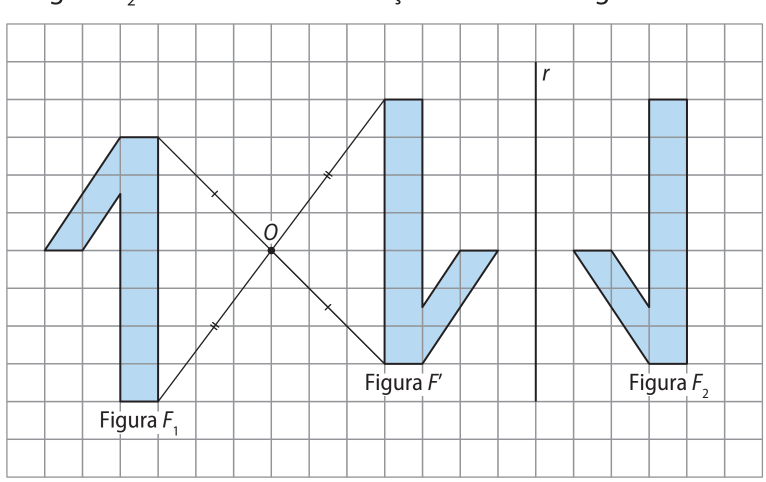
ATIVIDADE RESOLVIDA

5. Analise as figuras a seguir e identifique isometrias que, quando compostas, associam as figuras F_1 e F_2.



Resolução

Uma composição possível é uma reflexão em relação a um ponto seguida de uma reflexão em relação a uma reta. Para isso, considere a figura F', que é a reflexão em relação ao ponto O da figura F_1. Por fim, a figura F_2 é a reflexão em relação à reta r da figura F'.

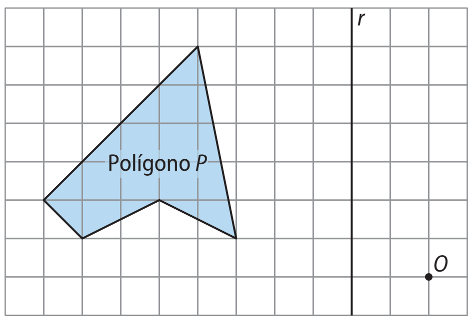


ILUSTRAÇÕES: SERGIO LIMA

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

9. Copie a figura a seguir em uma folha de papel quadriculado e faça o que se pede.



ILUSTRAÇÕES: SERGIO LIMA

Ver as **Orientações para o professor**.

a) Desenhe a imagem P_a do polígono P dada pela seguinte composição:

- P_1 é a reflexão em relação ao ponto O do polígono P;
- P_a é a reflexão em relação à reta r de P_1.

b) Obtenha a imagem P_b do polígono P dada pela seguinte composição:

- P_2 é a reflexão em relação à reta r de P;
- P_b é a reflexão em relação ao ponto O de P_2.

10. Copie a figura F a seguir em uma folha de papel quadriculado e desenhe as figuras indicadas.

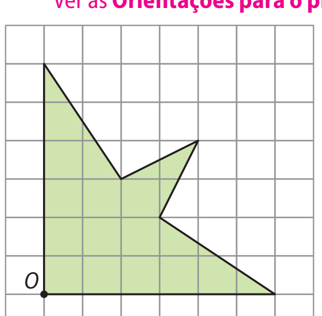
a) F_1, que é a rotação de 90° no sentido horário em torno do ponto O da figura F;

b) F_2, que é a rotação de 90° no sentido horário em torno do ponto O da figura F_1;

c) F_3, que é a rotação de 90° no sentido horário em torno do ponto O da figura F_2.

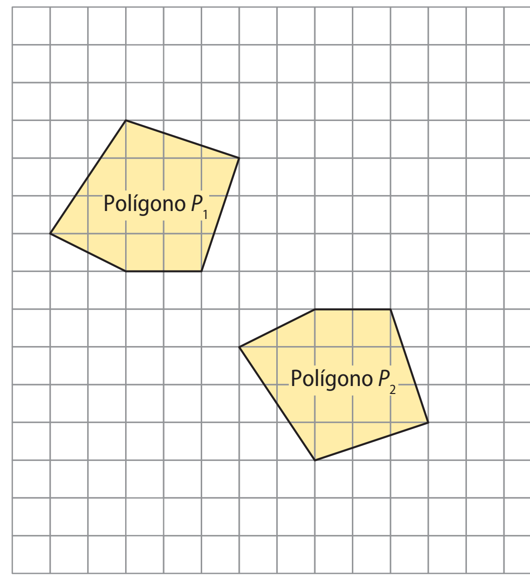
Para finalizar, pinte as imagens obtidas após cada rotação com cores diferentes.

Ver as **Orientações para o professor**.



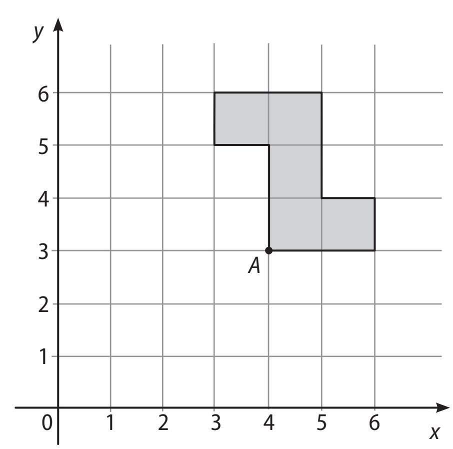
11. Analise os polígonos congruentes a seguir e identifique isometrias que, quando compostas, associam o polígono P_1 ao polígono P_2.

Ver as **Orientações para o professor**.



12. (Cefet-MG). A figura representada na malha quadriculada foi disponibilizada em uma aula de Matemática juntamente com a indicação das transformações 1, 2 e 3. O professor indicou que essas transformações deveriam ser realizadas, nessa ordem, em tal figura.

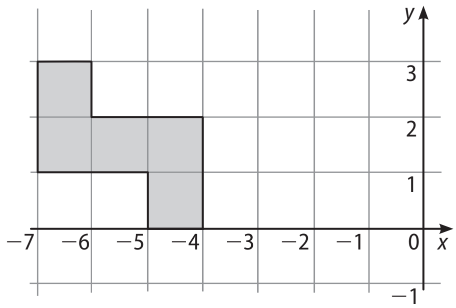
alternativa **b**



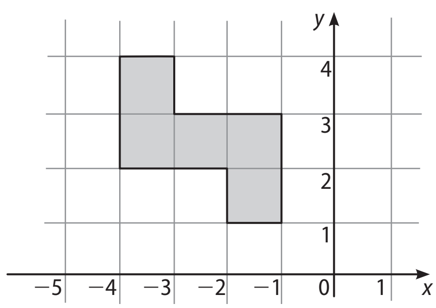
Transformação 1	Transformação 2	Transformação 3
Rotação de 90° no sentido anti-horário em relação ao ponto A	Reflexão em relação ao eixo y	Translação de 1 unidade para baixo

Após a realização dessas três transformações, a figura resultante está representada em

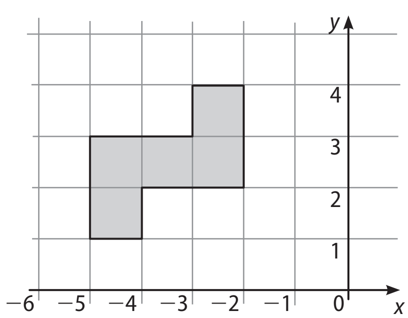
a)



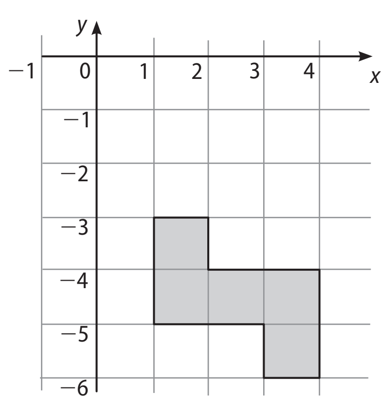
b)



c)

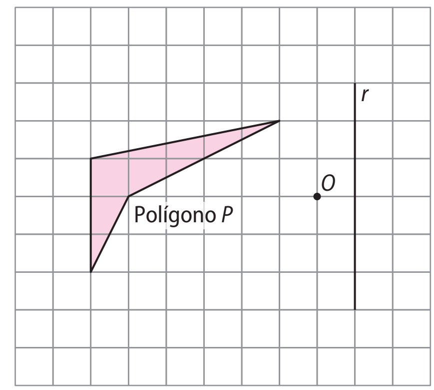


d)



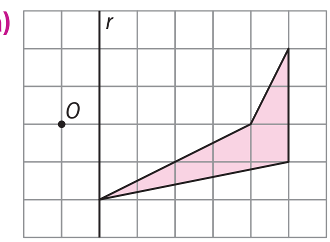
13. Assinale a alternativa que apresenta a imagem P_i do polígono P dada pela composição das transformações a seguir. alternativa **d**

- 1ª transformação: P' é a rotação de 90° em torno do ponto O no sentido horário do polígono P;
- 2ª transformação: P_i é a reflexão em relação à reta r do polígono P'.

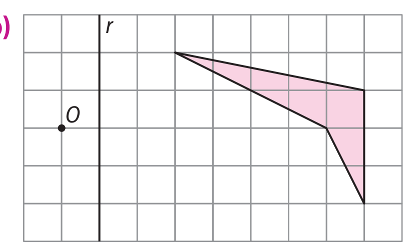


ILUSTRAÇÕES: SERGIO LIMA

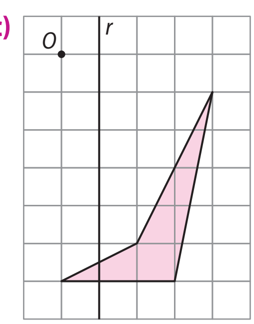
a)



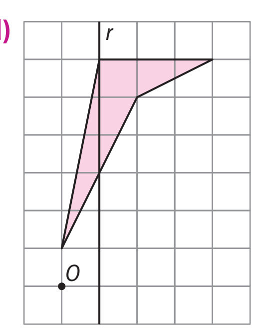
b)



c)

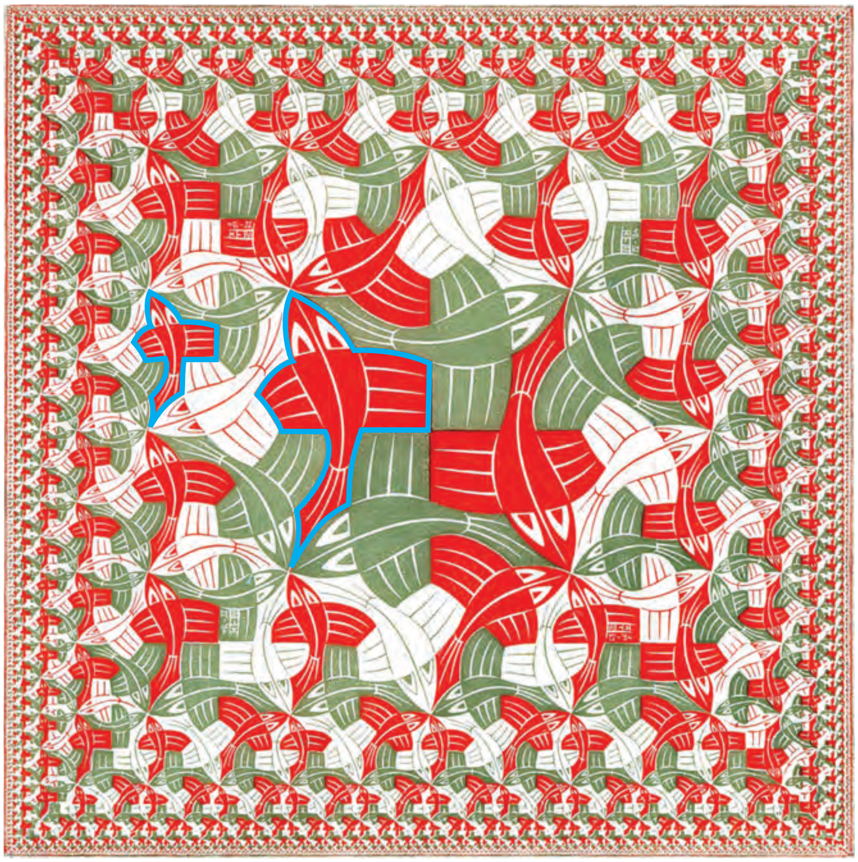


d)



Transformações homotéticas

Na introdução do Capítulo, analisamos uma obra de Escher que apresentava figuras idênticas em diferentes posições. Agora, vamos observar outra de suas obras.



ESCHER, Maurits Cornelis. **Limite quadrado**. 1964. Xilogravura, 34 cm × 34 cm. Coleção particular.

Considere os dois peixes destacados em azul. Eles ilustram a noção intuitiva de duas figuras planas semelhantes. Em Matemática, dois polígonos são semelhantes quando os ângulos correspondentes são congruentes e os lados correspondentes são proporcionais, por exemplo, dois quadrados são sempre semelhantes entre si.

Estudaremos, neste tópico, a associação entre dois polígonos semelhantes por meio de uma transformação geométrica denominada homotetia.

Sendo O um ponto do plano α e k um número real, em que $k \neq 0$, a **homotetia** de centro em O e de razão k é a transformação T que associa cada ponto P de α ao ponto P_1, de modo que os pontos O, P e P_1 sejam colineares e que:

$$\overrightarrow{OP_1} = k \cdot \overrightarrow{OP},$$

em que:

- $\overrightarrow{OP_1}$ é o vetor determinado pelo segmento orientado OP_1; e
- $\overrightarrow{OP}$ é o vetor determinado pelo segmento orientado OP.

Os pontos P e P_1 são chamados de **homólogos**.

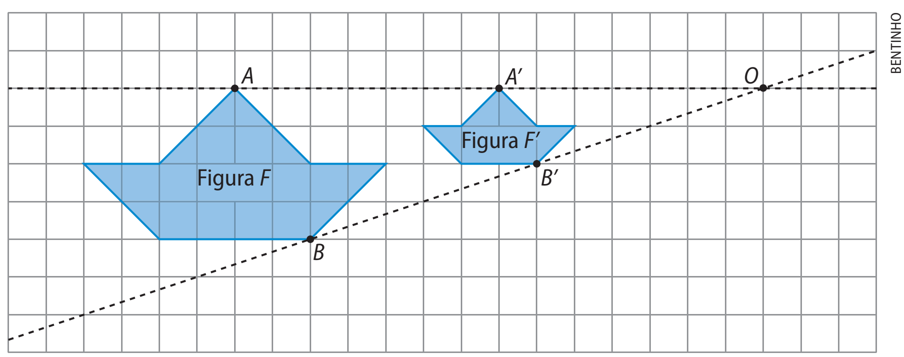
Conforme o valor da razão k, classificamos as homotetias em:

- direta, quando $k > 0$;
- inversa, quando $k < 0$.

Classificamos também a homotetia em:

- ampliação, quando $|k| > 1$;
- redução, quando $0 < |k| < 1$.

Na malha quadriculada a seguir, em que o lado de cada quadrado mede 1 u.c., o polígono F' é a redução do polígono F por uma homotetia direta de centro O e razão $k = \frac{1}{2}$.



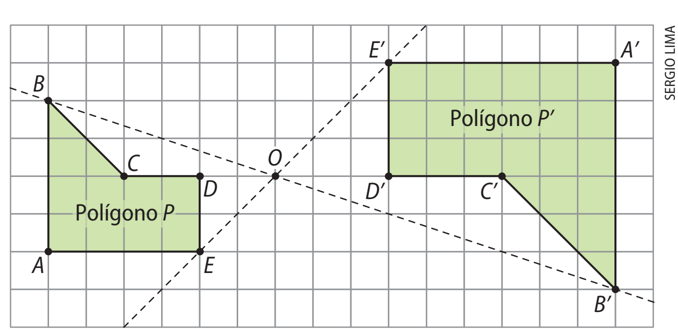
Observe no exemplo que:

- os pontos A e A', bem como os pontos B e B', são homólogos.
- o centro O, intersecção das retas $\overleftrightarrow{AA'}$ e $\overleftrightarrow{BB'}$, não pertence ao segmento $\overline{AA'}$ nem ao segmento $\overline{BB'}$. Isso ocorre quando a homotetia é direta.
- a razão de homotetia k é positiva e pode ser determinada por:

$$d(O, A') = k \cdot d(O, A) \Rightarrow k = \frac{d(O, A')}{d(O, A)} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$$

- a razão de semelhança entre os polígonos F' e F é igual à razão de homotetia.

O exemplo a seguir ilustra, em uma malha quadriculada, na qual o lado de cada quadrado mede 1 u.c., o polígono P', que é uma ampliação do polígono P por uma homotetia inversa de centro O e razão $k = -\frac{3}{2}$.



Observe no exemplo que:

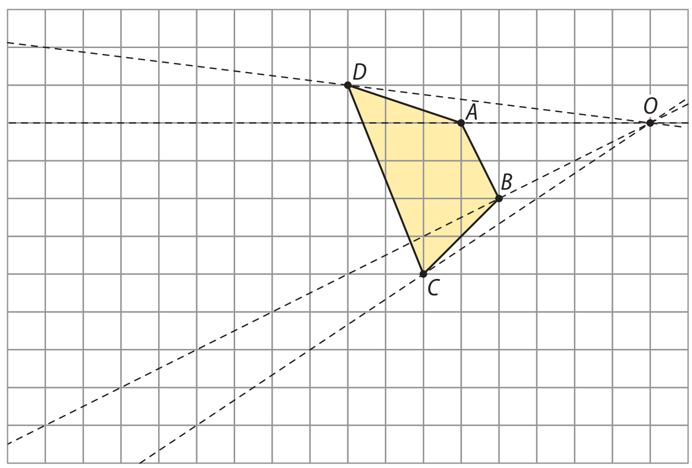
- o centro O, intersecção das retas $\overleftrightarrow{BB'}$ e $\overleftrightarrow{EE'}$, pertence ao segmento $\overline{BB'}$ e pertence também ao segmento $\overline{EE'}$. Isso ocorre quando a homotetia é inversa.
- a razão de homotetia k é negativa e pode ser determinada por:

$$k = \frac{d(O, D')}{d(O, D)} = -\frac{3}{2}$$

- uma homotetia inversa de razão igual a -1 seria igual a uma reflexão em relação a um ponto.

Para construir a ampliação direta de um polígono por uma homotetia, primeiro, determinamos as imagens de seus vértices e, depois, traçamos os lados. Acompanhe o passo a passo.

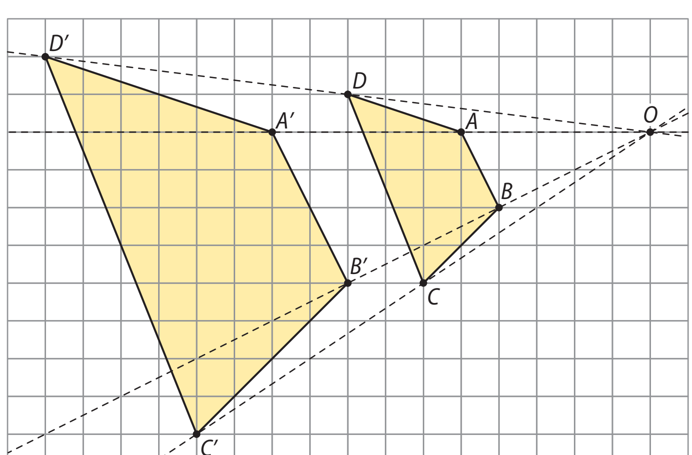
1. Dados o quadrilátero $ABCD$, o centro O da homotetia e sua razão $k = 2$, traçamos as retas que passam por O e por cada um dos vértices do quadrilátero.



ILUSTRAÇÕES: SERGIO LIMA

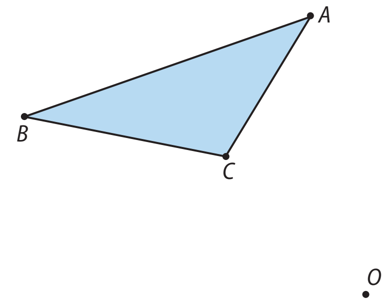
2. Como $k > 0$, trata-se de uma homotetia direta, portanto os vértices A', B', C' e D' do polígono ampliado devem estar nas semirretas $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{OD}$, respectivamente, de modo que $OA' = 2 \cdot OA$, $OB' = 2 \cdot OB$, $OC' = 2 \cdot OC$ e $OD' = 2 \cdot OD$. Para se obterem as medidas OA', OB', OC' e OD', os comprimentos OA, OB, OC e OD devem ser medidos com régua graduada diretamente na figura e substituídos nas equações indicadas anteriormente. A partir disso, obtemos os vértices da nova figura.

3. Com a régua, traçam-se os segmentos $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{C'D'}$ e $\overline{D'A'}$, lados do quadrilátero $A'B'C'D'$, imagem do quadrilátero $ABCD$ pela homotetia considerada.



ATIVIDADE RESOLVIDA

6. Construa a imagem $A'B'C'$ do triângulo ABC por uma homotetia inversa de centro O, de modo que a área do triângulo $A'B'C'$ seja $\frac{1}{9}$ da área do triângulo ABC.



Resolução

Sendo S_{ABC} e $S_{A'B'C'}$, respectivamente, as áreas dos triângulos ABC e $A'B'C'$, pelo enunciado, temos que:

$$S_{A'B'C'} = \frac{1}{9} \cdot S_{ABC} \Rightarrow S_{ABC} = 9 \cdot S_{A'B'C'}$$

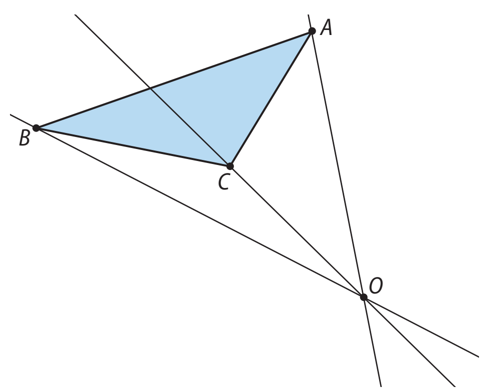
A razão de homotetia k é a razão de semelhança entre os triângulos $A'B'C'$ e ABC. Desse modo, a razão de homotetia elevada ao quadrado é igual à razão entre as áreas dos triângulos $A'B'C'$ e ABC, ou seja:

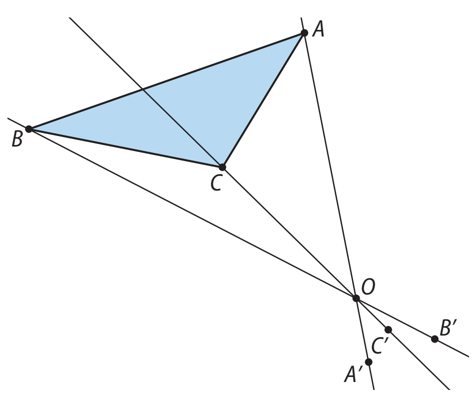
$$k^2 = \frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} \Rightarrow k^2 = \frac{S_{A'B'C'}}{9 \cdot S_{A'B'C'}} \Rightarrow k^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow k = \pm\frac{1}{3}$$

Como se trata de uma homotetia inversa, temos que $k < 0$. Logo, $k = -\frac{1}{3}$.

Agora, podemos seguir o passo a passo:

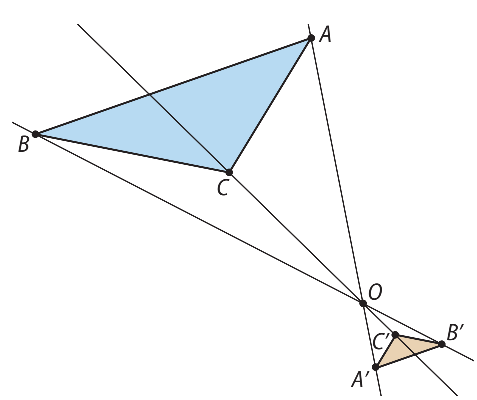
1. Traçamos as retas $\overleftrightarrow{OA}$, $\overleftrightarrow{OB}$ e $\overleftrightarrow{OC}$.





2. Como se trata de uma homotetia inversa, os vértices A', B' e C' devem estar nas semirretas opostas a $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$, respectivamente, de modo que $OA' = \frac{1}{3} \cdot OA$, $OB' = \frac{1}{3} \cdot OB$ e $OC' = \frac{1}{3} \cdot OC$, lembrando que os comprimentos OA, OB e OC são medidos com régua graduada diretamente na figura. Dessa maneira, obtemos os vértices da homotetia.

3. Com a régua, traçam-se os segmentos $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$ e $\overline{C'A'}$, lados do triângulo $A'B'C'$, imagem do triângulo ABC pela homotetia considerada.



ILUSTRAÇÕES: SERGIO LIMA

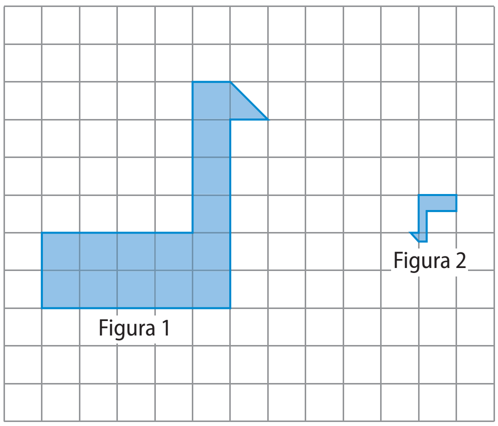
ATIVIDADES

18. Figura 1: ampliação direta; a razão de homotetia é 1,8.
Figura 2: redução inversa; a razão de homotetia é −0,6.

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

14. Sabendo que a figura 2 é a imagem da figura 1 por uma homotetia, faça o que se pede.

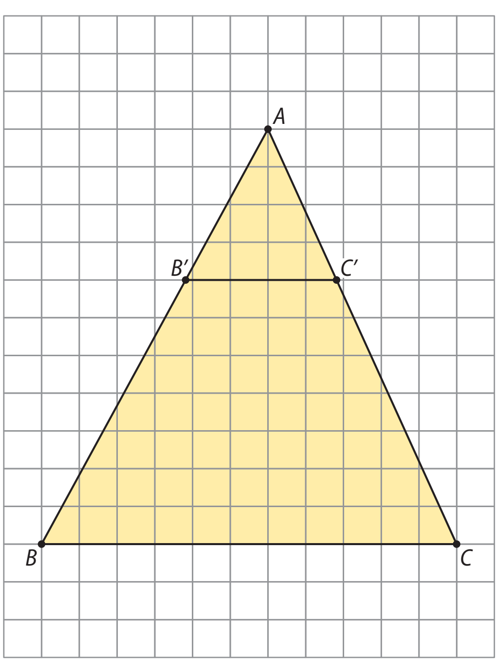
BENTINHO



a) Classifique a homotetia em direta ou inversa. homotetia inversa

b) Calcule a razão de homotetia. Para isso, considere a medida do lado dos quadrados da malha quadriculada igual a 1 u.c. −0,2

15. Na figura a seguir, o triângulo $AB'C'$ é a imagem do triângulo ABC por uma homotetia.

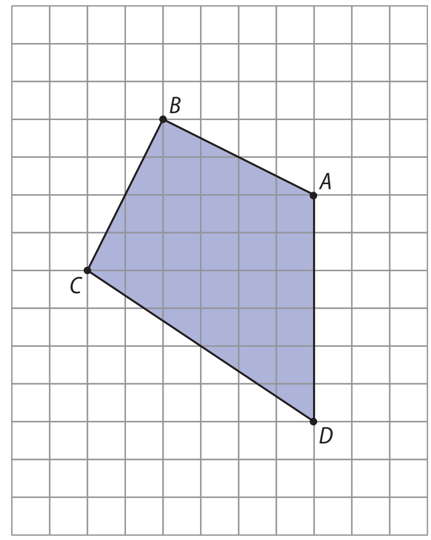


Determine:

a) o centro da homotetia; ponto *A*

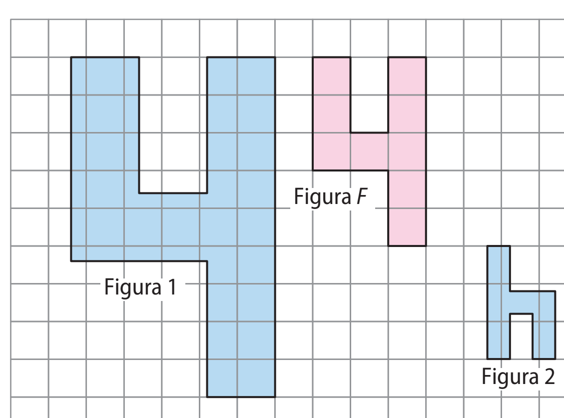
b) a razão da homotetia. $\frac{4}{11}$

16. Copie a figura a seguir em uma folha de papel quadriculado e desenhe a imagem do quadrilátero *ABCD* pela homotetia de centro *C* e razão $-\frac{1}{2}$. Ver as **Orientações para o professor.**



17. A área de um triângulo *ABC* é 8 vezes a área de um triângulo $A'B'C'$. Qual é a razão da homotetia direta entre o triângulo maior e o triângulo menor? $2\sqrt{2}$

18. As figuras 1 e 2 são imagens por homotetias da figura *F*. Para cada uma delas, determine a classificação da homotetia e sua razão. Considere a medida do lado dos quadrados da malha quadriculada como 1 u.c.

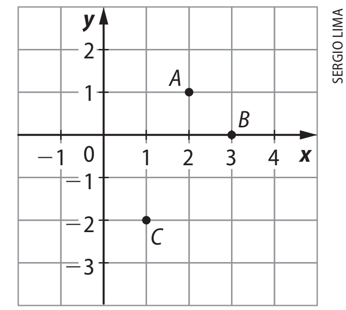


ILUSTRAÇÕES: SERGIO LIMA

- A figura 2 é imagem da figura 1 por homotetia? Se sim, qual é a razão dessa homotetia? sim, $-\frac{1}{3}$

Transformações geométricas e matrizes

Acompanhe, neste tópico, o estudo das transformações geométricas por meio de matrizes.



Um ponto $P(x, y)$ do plano cartesiano pode ser representado pela matriz coluna $P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Por exemplo, os pontos $A(2, 1)$, $B(3, 0)$ e $C(1, -2)$, representados no plano cartesiano a seguir, em notação matricial, são expressos por:

- $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$
- $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$
- $C = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

Os vértices $A(2, 1)$, $B(3, 0)$ e $C(1, -2)$ de um triângulo, no plano cartesiano, podem ser representados pela seguinte notação matricial: $\begin{bmatrix} x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{bmatrix}$, ou seja $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

Reflexão em relação aos eixos coordenados

Em um plano cartesiano, a reflexão em relação ao eixo x associa um ponto (a, b) do plano ao ponto $(a, -b)$. Essa associação pode ser obtida por meio da multiplicação matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ -b \end{bmatrix},$$

em que $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ é denominada matriz de reflexão em relação ao eixo x.

A reflexão em relação ao eixo y associa um ponto (a, b) do plano ao ponto $(-a, b)$, associação que pode ser obtida pela multiplicação matricial:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a \\ b \end{bmatrix},$$

em que $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é denominada matriz de reflexão em relação ao eixo y.

Exemplo:

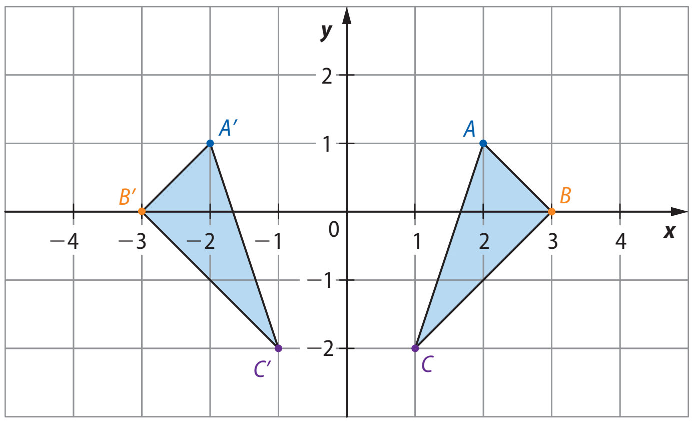
Os vértices de um triângulo em um plano cartesiano são $A(2, 1)$, $B(3, 0)$ e $C(1, -2)$. As coordenadas dos vértices do triângulo $A'B'C'$, reflexão do triângulo ABC em relação ao eixo y, são dadas pela multiplicação entre a matriz de reflexão em relação ao eixo y e a matriz que contém as coordenadas dos vértices do triângulo ABC, isto é:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{A'} & x_{B'} & x_{C'} \\ y_{A'} & y_{B'} & y_{C'} \end{bmatrix}$$

Substituindo os valores das coordenadas e efetuando a multiplicação, temos:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Portanto, as coordenadas dos vértices do triângulo $A'B'C'$ são $A'(-2, 1)$, $B'(-3, 0)$ e $C'(-1, -2)$. Observe a ilustração dessa reflexão no plano cartesiano.



Pense e responda

Quantas linhas e quantas colunas terá uma matriz que representa um hexágono?

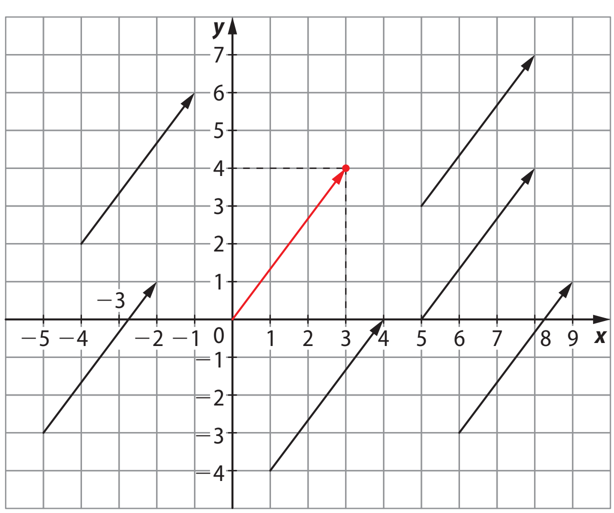
duas linhas e seis colunas

» Translação

Para representar um vetor $\vec{v}$ em notação matricial, utilizamos como representante de $\vec{v}$ o segmento orientado cuja origem coincide com a origem do sistema cartesiano, e sua extremidade (x, y) é indicada pela matriz coluna $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, ou seja: $\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Por exemplo, entre os segmentos orientados de $\vec{v}$ dispostos no plano cartesiano a seguir, consideramos o destacado em vermelho e, assim, denotamos o vetor por $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

ILUSTRAÇÕES: SERGIO LIMA



Representantes do vetor $\vec{v}$ no plano cartesiano.

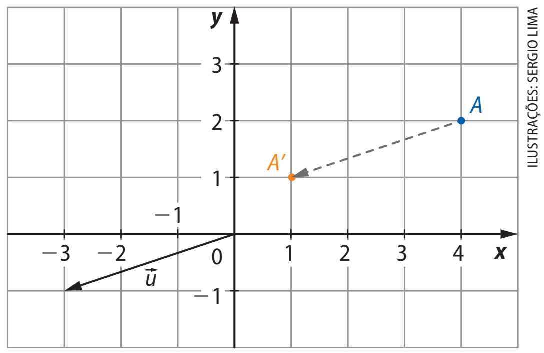
Para determinar as coordenadas (x', y') da imagem P', em que P' é a translação do ponto $P(x, y)$ pelo vetor $\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, em um plano cartesiano, efetuamos a seguinte adição matricial:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

Por exemplo, as coordenadas do ponto A', translação do ponto $A(4, 2)$ pelo vetor $\vec{u} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$, são (1, 1), pois:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A figura ilustra essa translação.



As coordenadas do vetor de translação seguem um padrão, as translações para a direita têm a coordenada x do vetor positiva e as translações para a esquerda têm a coordenada x do vetor negativa. De modo similar, as translações para cima têm a coordenada y do vetor positiva e as translações para baixo têm a coordenada y do vetor negativa. Desse modo, a translação de 3 unidades para a direita e 2 unidades para baixo é expressa pelo vetor $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$.

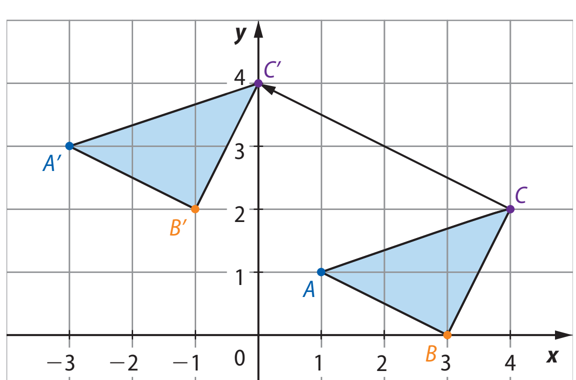
Quando queremos encontrar as coordenadas de todos os vértices de um polígono P', em que P' é a translação pelo vetor $\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ do polígono P que possui n vértices, devemos adicionar a matriz que contém as coordenadas de P com a matriz que contém n colunas iguais a $\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}$.

Exemplo:

Os pontos $A(1, 1)$, $B(3, 0)$ e $C(4, 2)$ são vértices de um triângulo. As coordenadas do triângulo $A'B'C'$, translação 4 unidades para a esquerda e 2 unidades para cima do triângulo ABC, são obtidas pela adição:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -4 & -4 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Portanto, os vértices do triângulo $A'B'C'$ são $A'(-3, 3)$, $B'(-1, 2)$ e $C'(0, 4)$.



» Rotação com centro na origem

Para determinar as coordenadas (x', y') da imagem P', em que P' é a rotação do ponto $P(x, y)$ de um ângulo orientado α, com $\alpha > 0$, em torno da origem do plano cartesiano, efetuamos a seguinte multiplicação matricial:

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha \\ \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

Como $\alpha > 0$, o sentido de rotação é anti-horário.

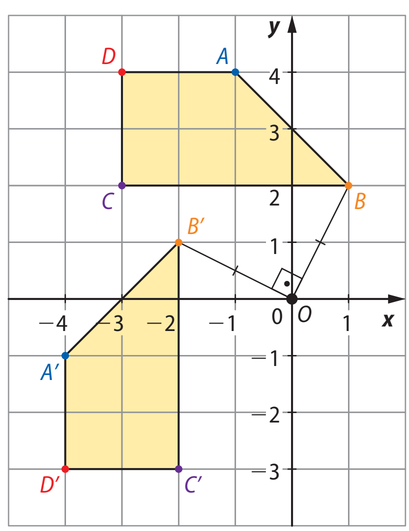
Exemplo:

Considere os pontos $A(-1, 4)$, $B(1, 2)$, $C(-3, 2)$ e $D(-3, 4)$ vértices de um quadrilátero. A rotação com centro na origem do plano cartesiano e ângulo 90° desse quadrilátero resultará em uma imagem cujos vértices são obtidos pela seguinte multiplicação:

$$\begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\text{sen}\,90^\circ \\ \text{sen}\,90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 & -3 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 & -3 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -2 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

Desse modo, temos que as coordenadas dos vértices da imagem são $A'(-4, -1)$, $B'(-2, 1)$, $C'(-2, -3)$ e $D'(-4, -3)$. A figura a seguir ilustra essa rotação.



SERGIO LIMA

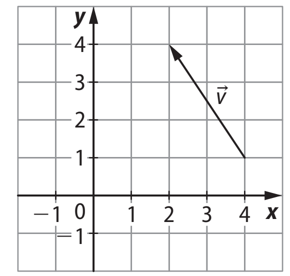
Quando a medida do ângulo orientado de rotação α for negativa, o sentido de rotação é horário. Nesse caso, consideramos que uma rotação de ângulo α no sentido horário equivale a uma rotação de ângulo de medida igual a $360^\circ - \alpha$ no sentido anti-horário. Por exemplo, rotacionar 30° no sentido horário um ponto P em torno da origem do sistema cartesiano equivale a rotacionar o mesmo ponto 330° no sentido anti-horário, pois $360^\circ - 30^\circ = 330^\circ$.

Um caso particular de rotação em torno da origem do sistema cartesiano é quando o ângulo α é igual a 180°, pois essa rotação coincide com a **reflexão em relação à origem** do sistema. Nesse caso, para obter as coordenadas (x', y') da imagem P', em que P' é a reflexão do ponto $P(x, y)$ em relação à origem, efetuamos a seguinte multiplicação matricial:

$$\begin{bmatrix} \cos 180^\circ & -\text{sen}\,180^\circ \\ \text{sen}\,180^\circ & \cos 180^\circ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

ATIVIDADES RESOLVIDAS

7. Determine as coordenadas da imagem A', que é a translação do ponto $A(21, 35)$ pelo vetor $\vec{v}$ indicado na figura a seguir.



Resolução

O vetor $\vec{v}$ determina a translação 2 unidades para a esquerda e 3 unidades para cima, logo $\vec{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Como $A = \begin{bmatrix} 21 \\ 35 \end{bmatrix}$, temos: $\begin{bmatrix} 21 \\ 35 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 38 \end{bmatrix}$

Portanto, as coordenadas da imagem são $A'(19, 38)$.

8. Considere os pontos $A(18, -2)$, $B(3, -5)$, $C(-16, 4)$ e $D(6, 6)$. A imagem do quadrilátero $ABCD$ após uma reflexão em relação à origem e uma translação de 12 unidades para a direita e 15 unidades para baixo é o quadrilátero $A'B'C'D'$. Obtenha as coordenadas dos vértices do quadrilátero $A'B'C'D'$.

Resolução

A reflexão em relação à origem coincide com o caso particular de rotação em que $\alpha = 180°$. Desse modo, para encontrar as coordenadas dos vértices do quadrilátero $A'B'C'D'$, fazemos:

$$\begin{bmatrix} x_{A'} & x_{B'} & x_{C'} & x_{D'} \\ y_{A'} & y_{B'} & y_{C'} & y_{D'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 180° & -\operatorname{sen} 180° \\ \operatorname{sen} 180° & \cos 180° \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_A & x_B & x_C & x_D \\ y_A & y_B & y_C & y_D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 12 & 12 & 12 \\ -15 & -15 & -15 & -15 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_{A'} & x_{B'} & x_{C'} & x_{D'} \\ y_{A'} & y_{B'} & y_{C'} & y_{D'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 18 & 3 & -16 & 6 \\ -2 & -5 & 4 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 12 & 12 & 12 \\ -15 & -15 & -15 & -15 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -18 & -3 & 16 & -6 \\ 2 & 5 & -4 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 12 & 12 & 12 \\ -15 & -15 & -15 & -15 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_{A'} & x_{B'} & x_{C'} & x_{D'} \\ y_{A'} & y_{B'} & y_{C'} & y_{D'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 9 & 28 & 6 \\ -13 & -10 & -19 & -21 \end{bmatrix}$$

Temos, portanto, as seguintes coordenadas: $A'(-6, -13)$, $B'(9, -10)$, $C'(28, -19)$ e $D'(6, -21)$.

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

19. Determine as coordenadas dos vértices da imagem que resulta de uma reflexão em relação ao eixo y do hexágono de vértices $A(2, 2)$, $B(1, 4)$, $C(-2, 4)$, $D(-3, 0)$, $E(-1, -3)$ e $F(1, -2)$.
$A'(-2, 2)$, $B'(-1, 4)$, $C'(2, 4)$, $D'(3, 0)$, $E'(1, -3)$ e $F'(-1, -2)$

20. Assinale a matriz que representa o vetor de uma translação de 4 unidades para a esquerda.
alternativa **c**

a) $\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix}$

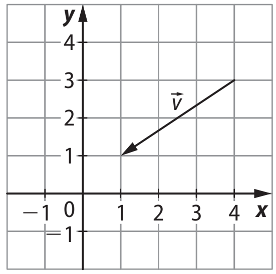
e) $\begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}$

22. a) $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $F = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix}$

22. c) $A_2(4, 4)$, $B_2(-1, 7)$ e $C_2(-1, 1)$

22. d) $D_1(-2, 0)$, $E_1(0, 3)$ e $F_1(4, -1)$

21. Considere o vetor $\vec{v}$ representado na figura a seguir. 23. b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 5 \\ -2 & -5 & -6 & -3 \end{bmatrix}$



ILUSTRAÇÕES: SERGIO LIMA

Se $P'(16, -4)$ é a imagem do ponto P pela translação pelo vetor $\vec{v}$, então: alternativa **c**

a) $P = \begin{bmatrix} 17 \\ -3 \end{bmatrix}$

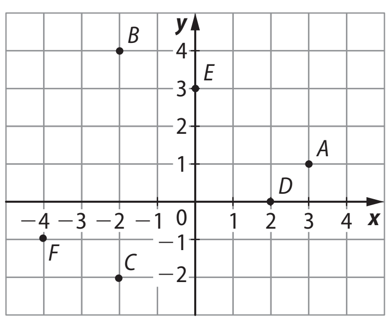
b) $P = \begin{bmatrix} 13 \\ -6 \end{bmatrix}$

c) $P = \begin{bmatrix} 19 \\ -2 \end{bmatrix}$

d) $P = \begin{bmatrix} 18 \\ -5 \end{bmatrix}$

e) $P = \begin{bmatrix} 8 \\ -5 \end{bmatrix}$

22. Considere os pontos A, B, C, D, E e F no plano cartesiano e faça o que se pede.



a) Escreva as coordenadas dos pontos A, B, C, D, E e F em notação matricial.

b) Determine as coordenadas das imagens A_1, B_1 e C_1, sabendo que elas são, respectivamente, a reflexão em relação ao eixo x dos pontos A, B e C. $A_1(3, -1)$, $B_1(-2, -4)$ e $C_1(-2, 2)$

c) Determine as coordenadas dos vértices do triângulo $A_2B_2C_2$, imagem do triângulo ABC pela translação de vetor $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

d) Determine as coordenadas dos pontos D_1, E_1 e F_1 e das imagens, respectivamente, dos pontos D, E e F por uma reflexão em relação ao eixo y.

e) Determine as coordenadas dos vértices do triângulo $D_2E_2F_2$, imagem do triângulo DEF por uma rotação de 60° em torno da origem do sistema cartesiano.

23. Considere a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}$. Sabendo que ela representa todas as coordenadas dos vértices do polígono P, determine:

a) o nome do polígono P. quadrilátero

b) a matriz que representa as coordenadas dos vértices da imagem obtida pela reflexão em relação ao eixo x do polígono P.

c) a matriz que representa as coordenadas dos vértices da imagem obtida pela translação 2 unidades para a direita e 4 unidades para baixo do polígono P.

d) a matriz que representa as coordenadas dos vértices da imagem obtida pela rotação de 90° em torno da origem do sistema cartesiano do polígono P.

24. A equação matricial que fornece a imagem $P'(x', y')$ de um ponto $P(x, y)$ pela rotação de ângulo α, com $\alpha < 0$, em torno da origem do sistema cartesiano é: alternativa **b**

a) $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

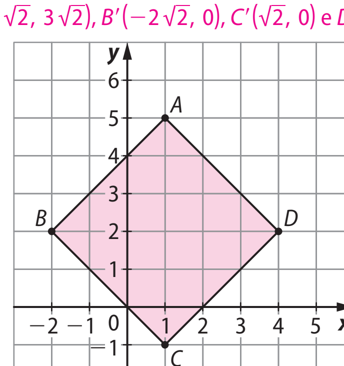
b) $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

25. Obtenha as coordenadas A', B', C' e D' dos vértices da imagem obtida pela rotação de 45° em torno da origem do sistema cartesiano do quadrilátero $ABCD$ representado na figura.
$A'(-2\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$, $B'(-2\sqrt{2}, 0)$, $C'(\sqrt{2}, 0)$ e $D'(\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$



22. e) $D_2(-1, -\sqrt{3})$, $E_2\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$ e $F_2\left(\frac{-4+\sqrt{3}}{2}, \frac{-4\sqrt{3}-1}{2}\right)$

23. c) $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 & 7 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

23. d) $\begin{bmatrix} -2 & -5 & -6 & -3 \\ 1 & 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

Esther Mahlangu e a cultura ndebele

Os povos africanos são reconhecidos por sua riqueza e diversidade. Nesse contexto, a cultura ndebele surge como uma das expressões mais distintas e fascinantes. De origem situada entre a África do Sul e o Zimbábue, o povo ndebele é conhecido por sua arte visual colorida e geométrica. A artista Esther Mahlangu, cujo trabalho apresenta a herança visual dos ndebele, ultrapassou fronteiras e compartilhou a beleza e a profundidade da cultura africana com o mundo. Para saber um pouco mais sobre a artista e a cultura ndebele, leia os textos a seguir.

Esther Mahlangu

Nasceu em 1935, [em] Middelburg, África do Sul.

Vive e trabalha em Mabhoko.

Esther Mahlangu faz parte da comunidade Ndebele em Gauteng, localizada no norte de Pretória. Os Ndebele, ao contrário de muitas outras tribos da África do Sul, conseguiram preservar suas tradições ancestrais centenárias. Apesar de ser uma sociedade patriarcal, o patrimônio artístico é transmitido de mãe para filha; quando uma jovem atinge a puberdade, ela se retira da sociedade masculina por três meses e aprende os padrões cerimoniais do bordado Ndebele – no século XIX, essa tradição foi estendida a pinturas decorativas nas paredes, também executadas exclusivamente pelas mulheres Ndebele.

Esther Mahlangu é uma importante defensora dessa tradição. Ela desenha à mão livre, sem medir ou esboçar primeiro, usando tintas vinílicas luminosas e de alto contraste que conferem um vigor extraordinário aos seus murais. Embora à primeira vista pareçam puramente abstratas, suas composições são construídas com base em um sistema altamente inventivo de signos e símbolos. Mahlangu é a primeira artista Ndebele a transpor pinturas murais para telas e a levar as convenções de sua obra de arte para uma arena mais ampla. Em 1989, ela veio a Paris para criar murais para a exposição Magiciens de la Terre e, ao concordar em realizar outros trabalhos [...], Mahlangu tornou a arte de Ndebele celebrada no mundo inteiro. Ela declarou: “Minha mãe e minha avó me ensinaram a pintar quando eu tinha dez anos. Tenho estado ocupada com isso desde então e sempre gostei. Quando estou pintando meu coração é muito amplo, ele se estende. Isso me faz me sentir muito, muito feliz.”

ESTHER Mahlangu. Genebra: Caacart: The Jean Pigozzi African Art Collection, 2024. Tradução nossa. Disponível em: https://www.caacart.com/artiste/mahlangu-esther/. Acesso em: 3 set. 2024.


MARCO LONGARI/AFP/GETTY IMAGES

A artista visual sul-africana Esther Mahlangu posa durante uma entrevista na abertura da sua nova grande retrospectiva na Iziko South African National Gallery, na Cidade do Cabo (África do Sul). Fotografia de 2024.

Casas Ndebele

[...]

Entrelaçar essas cores e seus significados simbólicos através da geometria é uma forma de linguagem para o povo Ndebele. Com suas casas como tela, eles expressam padrões coloridos que podem comunicar o *status* de um proprietário, o anúncio de um casamento, uma oração ou um protesto. Embora os padrões de cores Ndebele sejam agora popularizados em todo o mundo e tenham sido aplicados no *design* de produtos como carros e aviões, sua inspiração nos lembra de como a cor na arquitetura pode ser usada, além de um elemento decorativo, como linguagem.

[...]

YAKUBU, Paul. **As inspirações por trás das cores da arquitetura tradicional africana**. Tradução: Diogo Simões. [*S. l.*]: ArchDaily, 2 set. 2023. Disponível em: https://www.archdaily.com.br/br/1005333/as-inspiracoes-por-tras-das-cores-da-arquitetura-tradicional-africana. Acesso em: 3 set. 2024.

SIPHIWE SIBEKO/REUTERS/FOTOARENA

Ruínas da aldeia ndebele, compreendendo um antigo museu ao ar livre criado para preservar a cultura tribal, em Botshabelo, nos arredores de Middelburg, na província de Mpumalanga (África do Sul). Fotografia de 2021.

1. Respostas pessoais. Algumas transformações isométricas que podem ser citadas são a translação e a reflexão em relação a uma reta.

Agora, faça o que se pede nas atividades a seguir.

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. Observe a fotografia da fachada da construção ndebele e responda: você consegue identificar padrões que lembram transformações isométricas? Em caso afirmativo, quais são elas?

2. Pesquise uma obra de Esther Mahlangu que apresente ideias de simetria. Represente em seu caderno a parte da obra que contém uma dessas ideias. Resposta pessoal.

3. Tomando como inspiração a obra da artista Esther Mahlangu que você pesquisou, crie um desenho que ilustre as ideias das transformações isométricas. Resposta pessoal.

Mosaicos no GeoGebra

Vamos utilizar o **GeoGebra** para criar mosaicos a partir de múltiplas translações de um polígono.

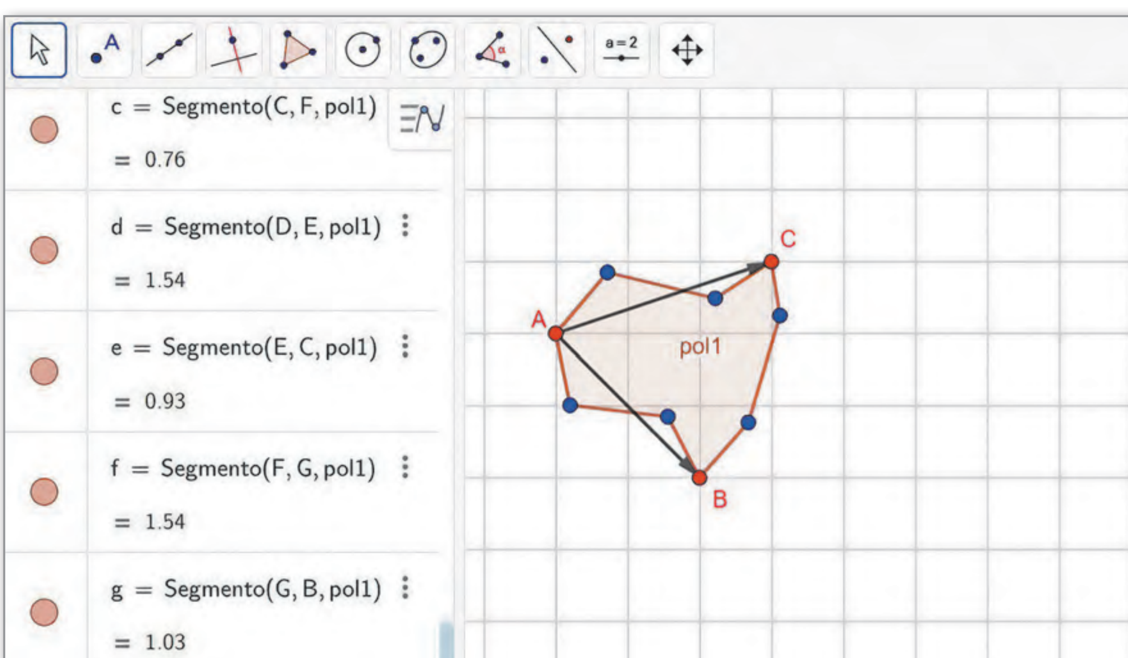
Para isso, realize a sequência de passos a seguir.

I. Desabilite os eixos e deixe habilitada a malha principal, você pode fazer isso clicando com o botão direito na janela de visualização. Selecione, então, três pontos não colineares na janela de visualização, que serão nomeados automaticamente como *A*, *B* e *C*. Mude a cor desses três pontos para vermelho, de modo a facilitar a visualização deles. As opções de formatação dos elementos estão disponíveis ao clicar sobre o botão , no canto superior direito da janela de visualização.

II. Usando a ferramenta **Vetor**, , construa um vetor (vetor $\vec{u}$) clicando em *A* e *B*, nessa ordem, e outro vetor (vetor $\vec{v}$) clicando em *A* e *C*, nessa ordem.

III. Construa pontos entre os pontos *A* e *B*, *A* e *C* e *B* e *C*; para isso, observe a figura como exemplo. Depois, usando a ferramenta **Polígono**, , construa um polígono que contenha como vértices os pontos *A*, *B* e *C* e os pontos construídos. Esse polígono será automaticamente nomeado como pol1.

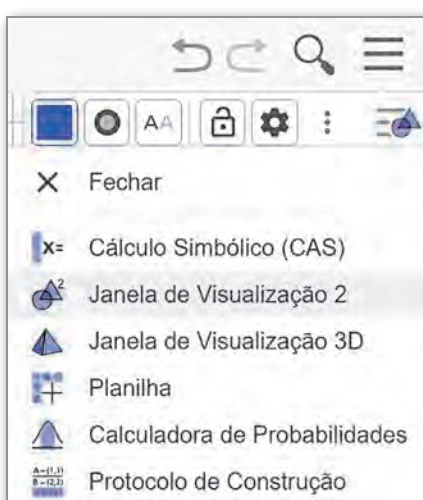
IV. Clicando com o botão direito sobre cada elemento e desabilitando a opção **Exibir rótulo**, oculte os rótulos dos segmentos, dos vetores e dos pontos construídos. Deixe apenas os rótulos dos pontos *A*, *B* e *C* e do polígono pol1.



IMAGENS: REPRODUÇÃO/GEOGEBRA

V. Na caixa de ferramentas, selecione a ferramenta **Controle Deslizante**, .
Em seguida, clique em qualquer lugar na janela de visualização. Uma janela será aberta para formatar esse controle deslizante, conforme a figura a seguir. Altere o nome do controle deslizante para “m” e ajuste o intervalo para mínimo 0 e máximo 30, além de deixar o incremento igual a 1; em seguida, clique em **OK**.

VI. Abra uma segunda janela de visualização. Para isso, clique em e, em seguida, na opção ⋮, no canto superior direito da janela de visualização, e, depois, selecione **Janela de Visualização 2**. Feito isso, desabilite os eixos dessa nova janela.

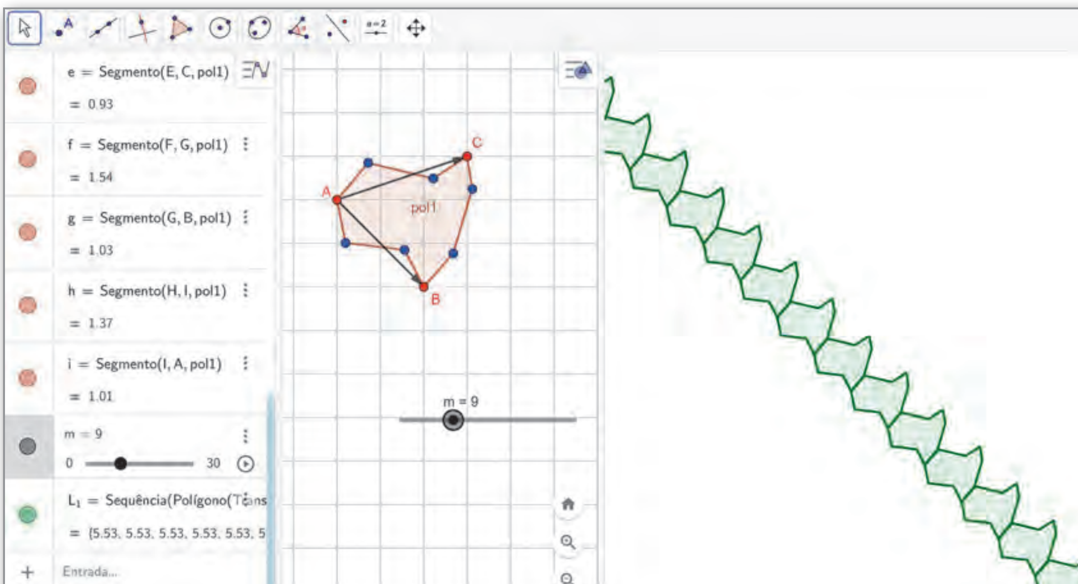


IMAGENS: REPRODUÇÃO/GEOGEBRA

VII. Clique sobre a janela de visualização 2 e, em seguida, no campo de entrada, digite o comando: “L_1=Sequência(Transladar(pol1,u*i),i,−m,m)” e pressione ***Enter***.

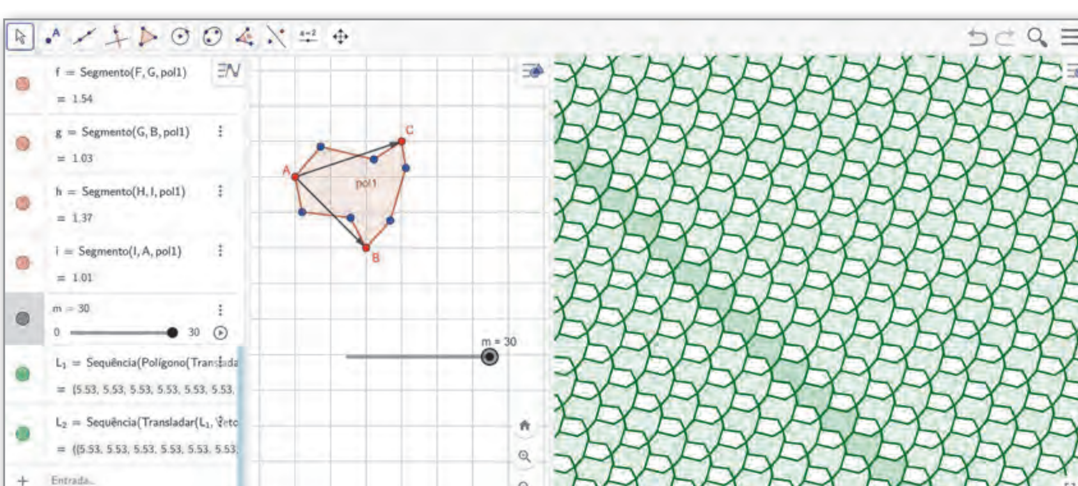
O significado do código é o seguinte: "L_1" é o nome dado ao comando; "Sequência" e "Transladar" são funções que vão repetir o polígono 1; "u*i" indica os múltiplos do polígono; e "−m" e "m" indicam o intervalo em que ocorrem as repetições.

Na janela de visualização 2, aparecerá uma faixa de figuras que representa translações do polígono pol1 pelo vetor $\vec{u}$ (conforme o local em que estiver o controle deslizante). Mova o cursor do controle deslizante para aumentar ou diminuir a faixa de figuras.



VIII. Clique sobre a janela de visualização 2 e, em seguida, no campo de entrada, digite o comando "L_2=Sequência(Transladar(L_1,v*i),i,−m,m)" e pressione ***Enter***.

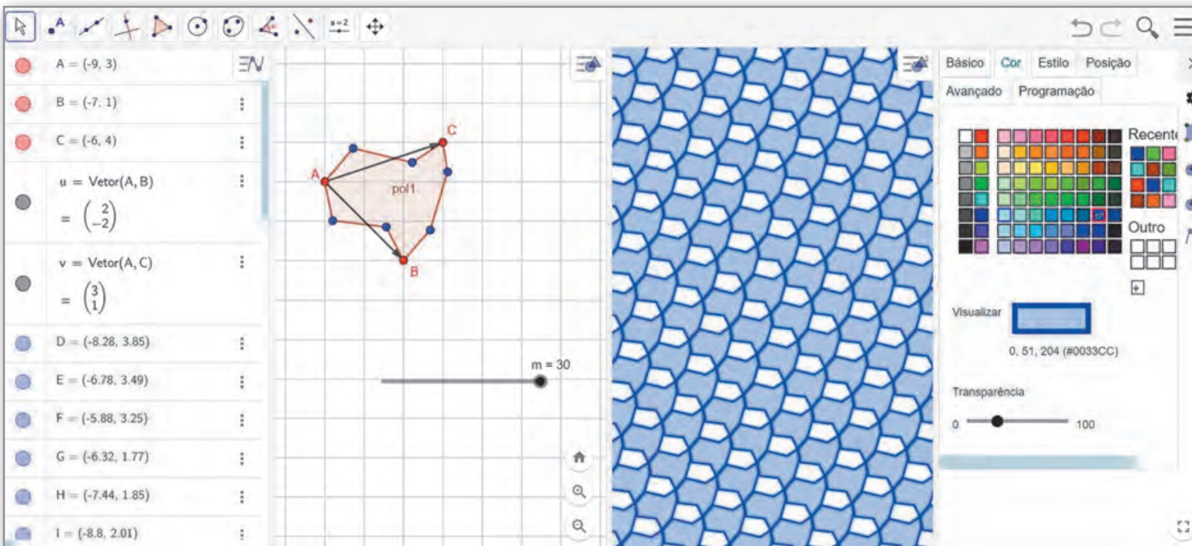
Na janela de visualização 2, aparecerá um mosaico de figuras, que representa translações da faixa obtida anteriormente pelo vetor $\vec{v}$. Mova o controle deslizante para aumentar ou diminuir o mosaico de figuras.



IMAGENS: REPRODUÇÃO/GEOGEBRA

IX. Para que o mosaico não apresente sobreposições ou caso queira mudar o desenho do polígono, ajuste, na janela de visualização 1, a posição de alguns dos vértices do polígono pol1, construídos no passo **III**, conforme a sua vontade.

A faixa construída pelo comando L_1 estará sobreposta à faixa construída pelo comando L_2, por isso estará mais escura. Assim, para ocultar uma das linhas de polígono, na janela de Álgebra, clique na bolinha colorida ao lado direito do comando L_1. Caso queira, mude a cor do mosaico nas **Configurações** do comando L_2.



Agora, faça o que se pede nas atividades a seguir. NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. Faça uma construção seguindo o passo a passo apresentado. Resposta pessoal.

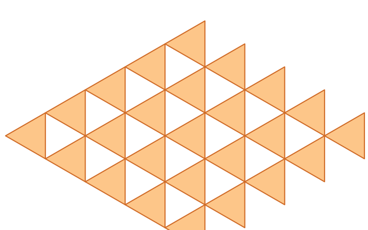
2. Para $m = 1$, quantos polígonos aparecem na janela de visualização 2? E para $m = 2$? E para $m = 3$? Para $m = 1$, aparecem 9 polígonos; para $m = 2$, aparecem 25 polígonos; para $m = 3$, aparecem 49 polígonos.

3. Escreva, em função de n, com $0 \leqslant n \leqslant 30$, quantos polígonos aparecem na janela de visualização 2 quando $m = n$. Para $m = n$, com $0 \leqslant n \leqslant 30$, aparecem $(2n + 1)^2$ polígonos.

4. Deslize o controle para $m = 30$ e descreva o que ocorre na janela de visualização 2 ao mover o ponto A, B ou C na janela de visualização 1. O polígono do mosaico tem sua forma alterada, e as linhas de polígonos podem mudar de direção.

Saiba que...

É possível criar outros tipos de mosaicos no GeoGebra, como o que está ilustrado a seguir.



EDITORIA DE ARTE

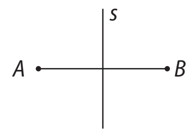
Para acessar

- TOMSON, Paulo. **Mosaico geométrico**. [*S. l.*]: GeoGebra, c2024. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/vrzdnuwe. Acesso em: 23 out. 2024.

Nesse *site*, você encontra outros mosaicos que podem ser construídos usando o GeoGebra.

ATIVIDADES COMPLEMENTARES

1. (UERJ) Considerando o conceito de simetria, observe o desenho abaixo:



Os pontos *A* e *B* são simétricos em relação à reta *s*, quando *s* é a mediatriz do segmento $\overline{AB}$. Observe este novo desenho:

Em relação à reta *s*, a imagem simétrica da letra R apresentada no desenho é: alternativa **c**

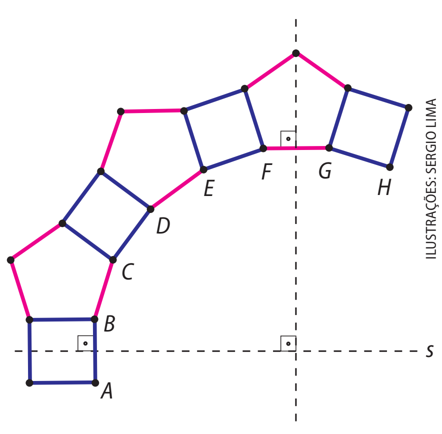
a) 

c) 

b) 

d) 

2. (UERJ) Três pentágonos regulares congruentes e quatro quadrados são unidos pelos lados conforme ilustra a figura a seguir.



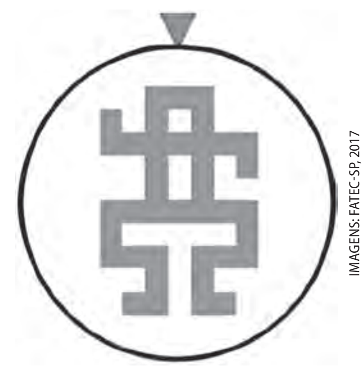
ILUSTRAÇÕES: SERGIO LIMA

Acrescentam-se outros pentágonos e quadrados, alternadamente adjacentes, até se completar o polígono regular *ABCDEFGH...A*, que possui dois eixos de simetria indicados pelas retas *r* e *s*.

Se as retas perpendiculares *r* e *s* são mediatrizes dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{FG}$, o número de lados do polígono *ABCDEFGH...A* é igual a: alternativa **b**

a) 18
b) 20
c) 24
d) 30

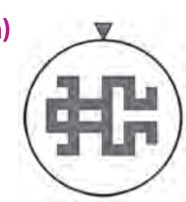
3. (Fatec-SP) Em um círculo recortado em papel cartão foi feito o desenho de um homem estilizado. Esse círculo foi utilizado para montar uma roleta, conforme a figura 1, fixada em uma parede. Quando a roleta é acionada, o círculo gira livremente em torno do seu centro, e o triângulo indicador permanece fixo na parede.

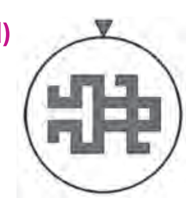


IMAGENS: FATEC-SP, 2017

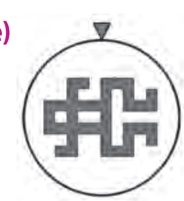
Figura 1

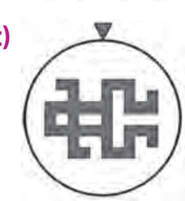
Considerando, inicialmente, a imagem do homem na posição da figura 1, obtém-se, após a roleta realizar uma rotação de três quartos de volta, no sentido horário, a figura representada em alternativa **e**

a) 

d) 

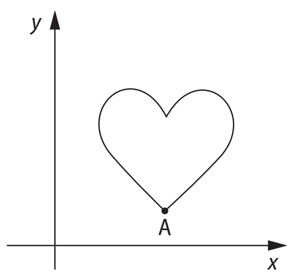
b) 

e) 

c) 

4. (Enem/MEC)

Isometria é uma transformação geométrica que, aplicada a uma figura, mantém as distâncias entre pontos. Duas das transformações isométricas são a reflexão e a rotação. A reflexão ocorre por meio de uma reta chamada eixo. Esse eixo funciona como um espelho, a imagem refletida é o resultado da transformação. A rotação é o "giro" de uma figura ao redor de um ponto chamado centro de rotação. A figura sofreu cinco transformações isométricas, nessa ordem:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

1ª) Reflexão no eixo *x*;

2ª) Rotação de 90 graus no sentido anti-horário, com centro de rotação no ponto A;

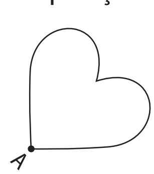
3ª) Reflexão no eixo *y*;

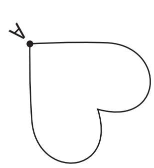
4ª) Rotação de 45 graus no sentido horário, com centro de rotação no ponto A;

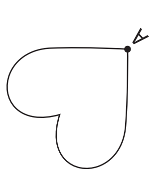
5ª) Reflexão no eixo *x*.

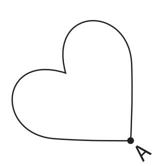
Disponível em: www.pucsp.br.
Acesso em: 2 ago. 2012.

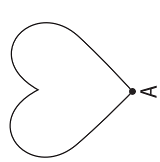
Qual a posição final da figura? alternativa **c**

a) 

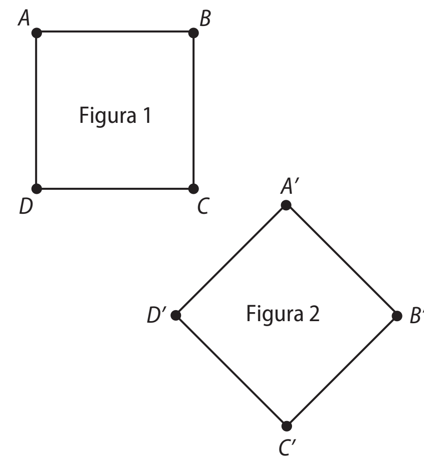
b) 

c) 

d) 

e) 

5. (Saresp) A seguir, são apresentadas a figura 1 e a figura 2, ambas representando quadrados:



ILUSTRAÇÕES:SERGIO LIMA

Sabendo que a figura 2 foi obtida a partir de duas transformações isométricas da figura 1, assinale a alternativa que contém as possíveis transformações que foram utilizadas. alternativa **e**

a) Rotação em relação ao centro do quadrado e reflexão em relação a um dos lados do quadrado.

b) Reflexão em relação a uma das diagonais do quadrado e rotação em relação a um dos vértices do quadrado.

c) Translação e reflexão em relação a uma reta paralela a um dos lados do quadrado.

d) Reflexão em relação a uma reta paralela a um dos lados do quadrado e rotação em relação a um dos vértices do quadrado.

e) Rotação em relação ao centro do quadrado e translação.

6. (ESPM-SP) A rotação de um ponto $P(x, y)$ do plano cartesiano em torno da origem é um outro ponto $P'(x', y')$, obtido pela equação matricial:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha \\ \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

onde α é o ângulo de rotação, no sentido anti-horário. Desse modo, se $P = (\sqrt{3}, 1)$ e $\alpha = 60°$, as coordenadas de P' serão:

a) $(-1, 2)$

b) $(-1, \sqrt{3})$

c) $(0, \sqrt{3})$

d) $(0, 2)$

e) $(1, 2)$

alternativa **d**

7. (Unicamp-SP) Para construir uma curva "floco de neve", divide-se um segmento de reta (Figura 1) em três partes iguais. Em seguida, o segmento central sofre uma rotação de 60°, e acrescenta-se um novo segmento de mesmo comprimento dos demais, como o que aparece tracejado na Figura 2. Nas etapas seguintes, o mesmo procedimento é aplicado a cada segmento da linha poligonal, como está ilustrado nas Figuras 3 e 4.

Fig. 1

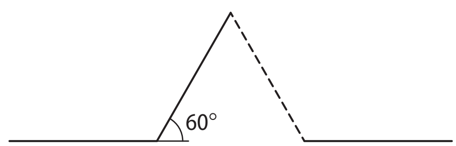


Fig. 2

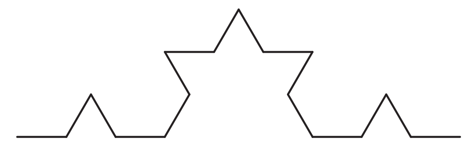


Fig. 3

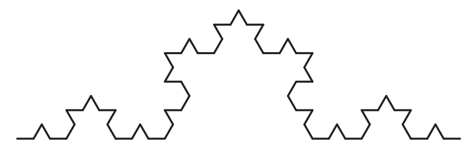
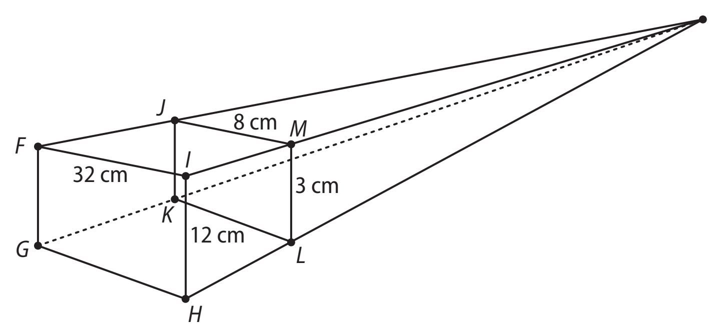


Fig. 4

Se o segmento inicial mede 1 cm, o comprimento da curva obtida na sexta figura é igual a alternativa **c**

a) $\left(\dfrac{6!}{4!\,3!}\right)$ cm. **b)** $\left(\dfrac{5!}{4!\,3!}\right)$ cm. **c)** $\left(\dfrac{4}{3}\right)^5$ cm. **d)** $\left(\dfrac{4}{3}\right)^6$ cm.

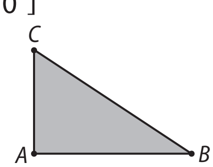
8. (Prova Paraná) Uma transformação de homotetia a partir do retângulo *JKLM* gerou o retângulo *FGHI*. As dimensões desses polígonos estão apresentadas na figura abaixo.



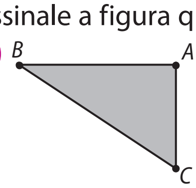
Qual é a razão de homotetia dessa ampliação? alternativa **c**

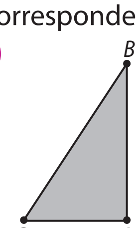
a) 0,25 **b)** 1,5 **c)** 4 **d)** 15 **e)** 24

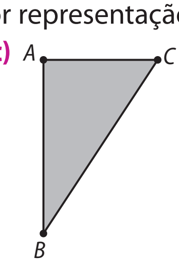
9. (ESPM-SP) Considere a matriz $M = \begin{bmatrix} x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ representando os vértices do triângulo *ABC* abaixo e a matriz $T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ como uma matriz de transformação linear.

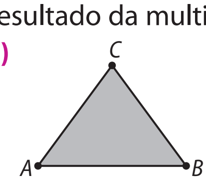


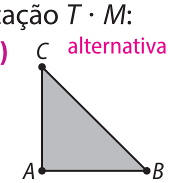
Assinale a figura que corresponde à melhor representação do resultado da multiplicação $T \cdot M$: alternativa **b**

a)


b)


c)


d)


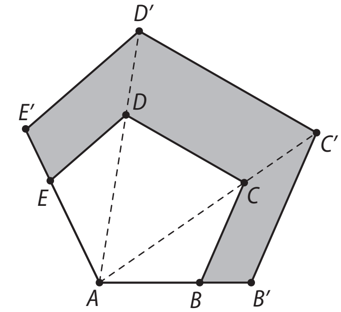
e)


ILUSTRAÇÕES: SERGIO LIMA

10. (Fempar-PR) O pentágono *ABCDE* da figura abaixo foi ampliado a partir do ponto *A*, resultando no pentágono *AB′C′D′E′* semelhante ao pentágono inicial.

Sabe-se que $AB = 10$ m, $BB' = 5$ m e que a área do pentágono *ABCDE* é igual a 220 m².

Assinale a opção que indica a área da região sombreada da figura, em m². alternativa **d**



SERGIO LIMA

a) 110.
b) 185.
c) 235.
d) 275.
e) 290.

11. (Unesp) Um ponto *P*, de coordenadas (x, y) do plano cartesiano ortogonal, é representado pela matriz coluna $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, assim como a matriz coluna $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ representa, no plano cartesiano ortogonal, o ponto *P* de coordenadas (x, y).

Sendo assim, o resultado da multiplicação matricial $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ é uma matriz coluna que, no plano cartesiano ortogonal, necessariamente representa um ponto que é alternativa **b**

a) uma rotação de *P* em 180° no sentido horário, e com centro em (0, 0).
b) uma rotação de *P* em 90° no sentido anti-horário, e com centro em (0, 0).
c) simétrico de *P* em relação ao eixo horizontal *x*.
d) simétrico de *P* em relação ao eixo vertical *y*.
e) uma rotação de *P* em 90° no sentido horário, e com centro em (0, 0).

PARA REFLETIR

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Neste Capítulo, estudamos as transformações geométricas. Conhecemos as isometrias denominadas reflexão, translação e rotação, que são transformações geométricas que preservam a distância entre dois pontos. Estudamos também a composição de transformações.

Trabalhamos as homotetias, que são as transformações geométricas que associam polígonos semelhantes, e, por fim, algumas transformações isométricas por meio de matrizes.

Nas páginas de abertura, conhecemos um pouco sobre os bordados de Buriti dos Lopes e, na introdução do Capítulo, foi apresentada a imagem de uma obra de Escher.

Agora, vamos refletir sobre as aprendizagens do Capítulo **7**: Respostas pessoais.

- Depois de ter estudado o conteúdo deste Capítulo, você tem um olhar diferente sobre bordados e mosaicos? Explique.
- Cite pelo menos três conteúdos apresentados ao longo deste Capítulo. Você já conhecia algum deles?
- Cite alguns objetos do dia a dia que remetam à ideia de simetria. Justifique sua resposta.
- Explique a diferença entre congruência e semelhança e a relação desses conceitos com as isometrias e as homotetias.
- Explique como a sua produção inspirada em uma obra da artista Esther Mahlangu auxiliou sua compreensão sobre transformações isométricas e simetrias.
- Explique como o trabalho feito com o GeoGebra contribuiu para o seu entendimento das translações.

RESPOSTAS DAS ATIVIDADES

Capítulo 1 – Matemática financeira

Atividades

2. a) 420
   b) 22,5
   c) 1,8
   d) 240
3. a) Aproximadamente 92 250 habitantes.
   b) Aproximadamente 94 556 habitantes.
4. 50%
5. 6%
6. Aproximadamente R$ 231,52.
7. a) 320 km
   b) 264 km
   c) 2,4h ou 2h24min
8. Alternativa **b**.
9. R$ 4.320,00
10. R$ 135,00
11. a) Não.
    b) $x = 10$
12. a) R$ 1.800,00
    b) R$ 250.000,00
    c) Resposta pessoal.
13. R$ 2.500,00
14. R$ 295,00
15. R$ 1.032,00
16. R$ 26,25
17. Alternativa **e**.
18. R$ 24,00
19. R$ 192,00
20. R$ 6.000,00
21. Alternativa **a**.
22. 3% a.m.
23. a) R$ 700,00
    b) R$ 2.520,00
    c) R$ 945,00
24. R$ 2.634,00
25. R$ 97,20
26. R$ 25.000,00
27. R$ 13.620,00
28. 2,5% a.m.
29. Aproximadamente R$ 208.548,38.
30. Aproximadamente R$ 20.980,00.
31. Aproximadamente R$ 37.642,03.
32. Aproximadamente R$ 7.103,77.
33. Alternativa **c**.
34. Alternativa **b**.
35. Aproximadamente R$ 13.824,00.
36. a) Aproximadamente R$ 4.499,46.
    b) Aproximadamente R$ 43.060,65.
    c) Aproximadamente R$ 4.376,66.
37. Aproximadamente R$ 5.796,37.
    Aproximadamente R$ 796,37.
38. Alternativa **d**.
39. Aproximadamente R$ 1.544,49.
40. Alternativa **b**.
41. Alternativa **d**.
42. Alternativa **c**.
43. Aproximadamente 11 meses.
44. 6% a.m.
45. I – F; II – F; III – V; IV – F; V – V
46. a) Aproximadamente 3 meses.
    b) Aproximadamente 2 anos.
47. a) R$ 12.000,00; R$ 15.000,00; R$ 30.000,00
    b) Aproximadamente 6 meses.
    c) 3% a.m.
48. Resposta pessoal.
49. Alternativa **d**.
50. Alternativa **c**.
51. Alternativa **a**.
52. Aproximadamente R$ 18.302,83.
53. Aproximadamente R$ 3.987,74.
54. Opção 3.
55. Resposta pessoal.
56. a) A primeira prestação é mais alta no SAC. Resposta pessoal.
    b) Resposta pessoal.
57. a) R$ 3.125,00
    b) R$ 2.800,00
58. a) R$ 56.250,00
    b) Aproximadamente R$ 1.833,85.
    c) Aproximadamente R$ 1.171,88.
    d) Sistema Price: R$ 31.774,96; SAC: R$ 27.562,50.
59. Alternativa **c**.

Atividades complementares

1. Alternativa **a**.
2. Alternativa **e**.
3. Alternativa **b**.
4. Alternativa **a**.
5. Alternativa **d**.
6. Alternativa **a**.
7. Alternativa **c**.
8. Alternativa **b**.
9. Alternativa **c**.
10. Alternativa **a**.
11. Alternativa **d**.
12. Alternativa **c**.
13. Alternativa **a**.
14. Alternativa **e**.
15. Alternativa **a**.
16. Alternativa **c**.

Capítulo 2 – Poliedros

Atividades

1. 9 vértices
2. 15 arestas e 10 vértices
3. 12 vértices
4. 10 vértices
5. Alternativa **b**.
6. Alternativa **a**.
7. Alternativa **b**.
8. 60 átomos e 90 ligações
9. 384 cm^2
10. 3 dm, 4 dm e 12 dm
11. 400 cm^2
12. Alternativa **c**.
13. $S_t = 132$ dm^2
14. 8 cm; 4 cm
15. 292 cm^2
16. 1 192 m^2
17. 54 dm^2
18. a) 470 cm^2
    b) 280 m^2
19. 15 u.c.
20. 4,86 m^3
21. 4 cm e 32 cm
22. Alternativa **c**.
23. Resposta pessoal.
24. Alternativa **c**.
25. Alternativa **b**.
26. 83,04 cm^3
27. O volume que as caixas ocuparão é $800x^2y\,(1 + \sqrt{2})$.
28. a) 12 000 cm^3
    b) 90 kg
29. a) 96 m^2
    b) $48\sqrt{3}$ m^3
30. Alternativa **c**.
31. Alternativa **c**.
32. a) 6 cm
    b) $2\sqrt{13}$ cm
    c) $2\sqrt{22}$ cm
    d) $48(3 + \sqrt{13})$ cm^2
33. a) $4\sqrt{3}$ cm
    b) $2\sqrt{21}$ cm
    c) 10 cm
    d) $48\sqrt{3}(2 + \sqrt{7})$ cm^2
34. 180 cm^2
35. $225\sqrt{3}$ cm^2
36. 260 cm^2
37. $V = \frac{16}{3}$ u.v.
38. Alternativa **b**.
39. Aproximadamente 83 cm^3.
40. a) Volume do bloco retangular: 128 u.v.; área da base da pirâmide: $16\sqrt{3}$ u.a.
    b) $8\sqrt{3}$ u.c.
41. Alternativa **c**.
42. $V = 1\,000$ cm^3
43. $V = 8a^3\sqrt{3}$
44. Resposta pessoal.

Atividades complementares

1. Alternativa **d**.
2. Alternativa **b**.
3. Alternativa **e**.

4. Alternativa **a**.
5. Alternativa **a**.
6. Alternativa **e**.
7. Alternativa **b**.
8. Alternativa **a**.
9. Alternativa **b**.
10. Alternativa **a**.
11. Alternativa **b**.
12. Alternativa **c**.
13. Alternativa **b**.
14. Alternativa **d**.
15. Alternativa **a**.
16. Alternativa **a**.
17. Alternativa **e**.
18. Alternativa **c**.
19. $\frac{512\sqrt{2}}{3}$ mm³

Capítulo 3 – Corpos redondos

Atividades

1. **a)** 36π cm²
   b) 60π cm²
   c) 132π cm²
2. 314 cm²
3. 2 cm
4. 140π cm²
5. 176π cm²
6. **a)** 20 cm
   b) 600π cm²
7. Alternativa **d**.
8. Alternativa **a**.
9. Alternativa **d**.
10. Alternativa **d**.
11. **a)** 2510π cm²
    b) 13725π cm³
12. Alternativa **c**.
13. 75π cm³
14. Alternativa **d**.
15. **a)** $V_1 \simeq 350$ cm³; $V_2 \simeq 500$ cm³
    b) A lata (1).
16. Alternativa **c**.
17. $19\,000\pi$ cm³
18. Resposta pessoal.
19. 47,1 cm²
20. **a)** 96π cm²
    b) 144π cm²
21. **b)** $r = 1{,}5$ cm
22. 100π cm²
23. $10\sqrt{2}$ cm
24. $\sqrt{19}$ cm
25. 27 latas
26. $H = 3\sqrt{7}R$
27. 96π m²
28. 12π cm³
29. $\frac{2\pi}{3}$ cm³
30. 12π cm³
31. $\frac{V}{8}$
32. $\frac{1}{6}$
33. $\frac{125\pi}{2}$ dm³
34. Resposta pessoal.
35. **a)** Raio da base e altura; utilizando diferentes instrumentos de medida.
    b) 48 canudinhos
    c) 8,3 gramas
    d) Resposta pessoal.
36. 3 334,68 mL
37. Aproximadamente 4,52 kg.
38. 486π m³
39. **a)** 34,325 L
    b) Aproximadamente 8,95 cm.
40. Alternativa **d**.
41. Alternativa **d**.
42. $\frac{2}{3}$
43. 60 casquinhas
44. 8π
45. **a)** Aproximadamente 33,49 cm³.
    b) 25,12 cm³
    c) 34 caixinhas
46. $\sqrt{2}$ cm
47. 256π cm²
48. 100π cm²
49. **a)** 491 520 000 km²
    b) Aproximadamente 8,59%.
50. $\sqrt{6}$ dm
51. Alternativa **c**.
52. $4\,500\pi$ cm³
53. Alternativa **b**.
54. 6π m²
55. 36π cm³
56. Alternativa **a**.
57. Alternativa **c**.
58. Alternativa **e**.
59. **a)** Região da Antártida, da Oceania e parte da América do Sul e do sul da África.
    b) 30°
60. Alternativa **b**.
61. Alternativa **a**.
62. Alternativa **b**.

Atividades complementares

1. Alternativa **b**.
2. Alternativa **b**.
3. Alternativa **a**.
4. Alternativa **b**.
5. Alternativa **c**.
6. Alternativa **b**.
7. Alternativa **d**.
8. Alternativa **e**.
9. Alternativa **03**.
10. Alternativa **a**.
11. Alternativa **c**.
12. Alternativa **c**.
13. Alternativa **a**.

Capítulo 4 – Análise combinatória

Atividades

1. **a)** $(x, 1), (x, 2), (y, 1), (y, 2), (z, 1)$ e $(z, 2)$
   b) $3 \cdot 2 = 6$
2. **b)** $2 \cdot 2 \cdot 2$
3. 24 maneiras
4. Alternativa **a**.
5. Resposta pessoal.
6. 336 possibilidades
7. 360 modos
8. 1 680 maneiras
9. 24 números
10. **a)** Resposta pessoal.
    b) 1512 melodias
11. **a)** 9 000 números
    b) 4 536 números
    c) 952 números
12. Alternativa **c**.
13. **a)** 720
    b) 3 628 800
    c) 336
    d) 272
    e) $\frac{181}{30}$
    f) 21
14. 630 maneiras
15. **a)** n
    b) $\frac{1}{3n}$
16. **a)** $S = \{8\}$ **b)** $S = \{4\}$
17. $S = \{2\}$
18. 43 200 senhas
19. PAZ, PZA, APZ, AZP, ZPA e ZAP.
20. Alternativa **d**.
21. **a)** 720 anagramas
    b) 120 anagramas
22. **a)** 720
    b) 120
    c) 360
    d) 24
    e) 144
23. **a)** 720
    b) 361
    c) 34
24. 1 728 modos
25. AAARR, AARAR, AARRA, ARARA, ARAAR, ARRAA, RRAAA, RARAA, RAARA e RAAAR.
26. **a)** 12
    b) 129 729 600
    c) 15 120
27. **a)** 60 **b)** 20
28. 30
29. 210 maneiras
30. 840 anagramas
31. 24 anagramas
32. 126 caminhos
33. Alternativa **e**.
34. Alternativa **a**.
35. Resposta pessoal.

36. a) 504 maneiras
b) 15 120 números
37. Resposta pessoal.
39. Alternativa **a**.
40. Alternativa **a**.
41. 168 números
42. a) 840 possibilidades
b) 480 bandeiras
43. 1 110 resultados
44. Alternativa **c**.
45. Alternativa **c**.
47. 56 maneiras
48. 120 modos
49. 200 grupos
50. 200 provas
51. Resposta pessoal.
52. Alternativa **d**.
53. a) 720 maneiras
b) 120 modos
c) 20 maneiras
54. a) 40 maneiras
b) 18 maneiras
55. 210 tipos
56. 17 equipes
57. Alternativa **d**.
58. 21 professores
59. Alternativa **b**.
60. Alternativa **e**.
61. Alternativa **d**.

Atividades complementares

1. Alternativa **a**.
2. Alternativa **e**.
3. Alternativa **a**.
4. Alternativa **02**.
5. Alternativa **c**.
6. Alternativa **04**.
7. Alternativa **c**.
8. Alternativa **d**.
9. Alternativa **e**.
10. Alternativa **d**.
11. Alternativa **a**.
12. Alternativa **b**.
13. Alternativa **b**.
14. Alternativa **d**.
15. Alternativa **a**.
16. Alternativa **b**.
17. Alternativa **b**.
18. Alternativa **e**.
19. Alternativa **b**.
20. Alternativa **e**.
21. Alternativas **04** e **16**.

Capítulo 5 - Probabilidade

Atividades

1. a) $U = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$
b) $A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$
c) $B = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$
d) $n(U) = 36$; $n(A) = 6$; $n(B) = 4$
2. a) Complementares.
b) Mutuamente exclusivos.
c) Certo.
d) Impossível.
3. O espaço amostral V possui eventos elementares equiprováveis.
4. Resposta pessoal.
5. $P(\text{azul}) = \frac{3}{5}$; $P(\text{amarela}) = \frac{2}{5}$
6. a) $\frac{1}{6}$
b) $\frac{1}{2}$
c) $\frac{1}{2}$
d) $\frac{2}{3}$
e) 0
7. a) 1 ou 100%
b) 0
8. a) $\frac{1}{6}$
b) $\frac{1}{9}$
c) $\frac{1}{12}$
d) $\frac{1}{18}$
9. a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{13}{20}$
c) $\frac{1}{5}$
d) $\frac{3}{10}$
10. a) $\frac{1}{13}$
b) $\frac{1}{52}$
c) $\frac{1}{4}$
d) $\frac{3}{13}$
11. a) $\frac{3}{4}$
b) $\frac{1}{4}$
c) $\frac{1}{4}$
12. Alternativa **c**.
13. Aproximadamente 24,4%.
14. a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30 e 36
b) $\frac{1}{36}$
c) $\frac{1}{4}$
d) $\frac{3}{4}$
15. $\frac{2}{9}$
16. $\frac{3}{5}$ ou 60%
17. a) 56
b) $\frac{3}{8}$
18. 75%
19. a) $\frac{4}{7}$
b) $\frac{2}{7}$
c) $\frac{1}{7}$
20. $\frac{7}{25}$
21. Alternativa **d**.
22. $\frac{6}{7}$
23. Alternativa **e**.
24. a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{5}{8}$
c) $\frac{1}{4}$
d) $\frac{7}{8}$
e) $\frac{3}{8}$
f) $\frac{1}{8}$
25. a) $\frac{3}{10}$
b) $\frac{1}{2}$
c) $\frac{1}{10}$
26. a) 37%
b) 29%
27. $\frac{4}{13}$
28. a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{1}{2}$
c) $\frac{7}{30}$
d) $\frac{2}{5}$
29. a) 20; 150
b) 400; $\frac{1}{10}$
30. a) $\frac{2}{5}$
b) $\frac{1}{2}$
c) $\frac{2}{5}$
31. Resposta pessoal.
32. Alternativa **d**.
33. 50%
34. $\frac{2}{5}$
35. a) $\frac{1}{13}$; $\frac{1}{4}$
b) $\frac{1}{13}$; $\frac{1}{4}$
36. $\frac{13}{204}$
37. Alternativa **a**.
38. Alternativa **c**.
39. Alternativa **d**.
40. Alternativa **e**.
41. Alternativa **b**.
42. Alternativa **b**.

43. Alternativa **b**.
44. Resposta pessoal.
45. $\frac{32}{91}$
46. Alternativa **c**.
47. $\frac{1}{9}$
48. $\frac{1}{4}$
49. $\frac{1}{16}$
50. $\frac{1}{16}$
51. $\frac{5}{12}$
52. Alternativa **d**.
53. a) $\frac{3}{4}$

    b) $\frac{9}{64}$
54. $\frac{1}{4}$
55. $\frac{1}{2}$ ou 50%
56. a) $\frac{15}{56}$

    b) $\frac{1}{3}$
57. Alternativa **e**.
58. Alternativa **a**.
59. $\left(\frac{16\pi + 24\sqrt{3}}{3\,000}\right)$
60. a) $P(\text{obtuso}) = \frac{1}{3}$; $P(\text{agudo}) = \frac{5}{12}$

    b) $\frac{119}{144}$
61. Alternativa **d**.
62. Alternativa **c**.
63. Alternativa **c**.
64. Alternativa **c**.

Atividades complementares

1. Alternativa **e**.
2. Alternativa **c**.
3. Alternativa **c**.
4. Alternativa **c**.
5. Alternativa **d**.
6. Alternativa **c**.
7. Alternativa **d**.
8. Alternativa **c**.
9. Alternativa **e**.
10. Alternativa **e**.
11. Alternativa **c**.
12. Alternativa **b**.
13. Alternativa **a**.
14. Alternativa **d**.
15. Alternativa **b**.
16. Alternativa **a**.
17. Alternativa **e**.
18. Alternativa **c**.
19. Alternativa **c**.
20. Alternativa **c**.

Capítulo 6 – Matrizes e sistemas lineares

Atividades

1. Alternativa **b**.
2. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -6 \\ 5 & 2 & -3 \\ 8 & 5 & 0 \end{pmatrix}$
3. A e B
4. a) $A = (1 \quad 0 \quad -1)$

   b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

   c) $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
5. Alternativa **a**.
6. Alternativa **b**.
7. Zero.
8. a) $A = \begin{bmatrix} 340 & 410 \\ 105 & 87 \\ 96 & 134 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 180 & 152 \\ 64 & 36 \\ 113 & 88 \end{bmatrix}$

   b) $C = \begin{bmatrix} 520 & 562 \\ 169 & 123 \\ 209 & 222 \end{bmatrix}$

10. $c_{23} = 4$
11. a) $2A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ -4 & -2 & 8 \\ 0 & 10 & 4 \end{pmatrix}$

    b) $-3B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -9 \\ -6 & 0 & -18 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

    c) $\frac{1}{2}B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

    d) $3A + 2B = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 6 \\ -2 & -3 & 24 \\ 2 & 17 & 8 \end{pmatrix}$
13. a) $\frac{1}{2}(A + B) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 7 & -5 & 9 \end{bmatrix}$

    b) $-4A - \frac{2}{3}B = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -8 \\ -26 & 20 & -22 \end{bmatrix}$
14. a) $C = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$

    b) $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$
15. a) $\begin{pmatrix} 1 & 14 \\ -6 & 18 \\ -16 & 3 \end{pmatrix}$

    b) Não é possível determinar este produto.

    c) $\begin{pmatrix} 6 & 12 & -3 \\ 2 & 4 & -1 \\ -4 & -8 & 2 \end{pmatrix}$
16. $AB = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$; $BA = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$; A e B não comutam.
17. $c_{32} = 94$
18. a) $T = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

    b) $E = \begin{bmatrix} 50 & 100 & 200 \\ 50 & 150 & 100 \end{bmatrix}$

    c) 650 zíperes

    d) Resposta pessoal.

19. $a = 2$

20. Alternativa **b**.

21. Alternativa **a**.

22. $(0, -3)$ e $\left(4, -\frac{1}{3}\right)$

23. Não.

24. $m = -\frac{10}{3}$

25. $m = 2$ ou $m = -2$

26. É solução.

27. $S = \{(10, 5)\}$

28. Motocicleta: 325 km; automóvel: 225 km.

29. a) $\begin{cases} x + y = 58 \\ 56x + 72y = 3\,840 \end{cases}$

b) 21 caixas do tipo **A** e 37 do tipo **B**

30. Resposta pessoal. $S = \{(4, 3)\}$; sim.

31. a) Possível e determinado.

b) Impossível.

c) Possível e indeterminado.

32. a) É solução. b) Não é solução.

33. Alternativa **c**.

34. Alternativa **c**.

35. a) Sistema possível e indeterminado; $S = \left\{\left(x; \frac{x}{2}; x\right) \mid x \in \mathbb{R}\right\}$.

b) $S = \{(2, 1, 2)\}$

c) $2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$

36. a) $S = \{(10, 20)\}$

b) $S = \{(-12, 7, 3)\}$

c) $S = \{(1, 1, 1, 1)\}$

d) $S = \varnothing$

e) $S = \left\{\left(\frac{13-\lambda}{2}, \lambda\right) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$

f) $S = \varnothing$

37. $S = \left\{\left(5 + \frac{5\alpha}{2}, -\frac{20+19\alpha}{6}, \frac{2+\alpha}{6}, \alpha\right) \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}$

38. a) $S = \{(1, -2, 3, 4)\}$; sistema possível e determinado

b) $S = \{(3 - 2\lambda, 1, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$; sistema possível e indeterminado

39. a) $S = \{(-2; 3; 0)\}$ b) $S = \{(1, -2, 2)\}$

40. 20 gramas

41. R$ 800,00

Atividades complementares

1. Alternativa **a**.
2. Alternativa **b**.
3. Alternativa **e**.
4. Alternativa **a**.
5. Alternativa **b**.
6. Alternativa **c**.
7. Alternativa **c**.
8. Alternativa **e**.
9. Alternativa **b**.
10. Alternativa **a**.
11. Alternativa **e**.
12. Alternativa **c**.
13. 1 porção de pão, 3 porções de fruta e 2 porções de iogurte

Capítulo 7 – Transformações geométricas

Atividades

1. Nas imagens dos itens **a** e **b**.

2. a) Figura I.

b) Figura III.

c) Figura IV.

4. Alternativa **e**.

5. • A figura ficaria igual.

6. Alternativa **b**.

7. Alternativa **c**.

8. Alternativa **c**.

11. Resposta pessoal.

12. Alternativa **b**.

13. Alternativa **d**.

14. a) Homotetia inversa.

b) $-0{,}2$

15. a) Ponto A.

b) $\frac{4}{11}$

17. $2\sqrt{2}$

18. Figura 1: ampliação direta; a razão de homotetia é 1,8.
Figura 2: redução inversa; a razão de homotetia é $-0{,}6$.

• Sim; $-\frac{1}{3}$

19. $A'(-2, 2)$, $B'(-1, 4)$, $C'(2, 4)$, $D'(3, 0)$, $E'(1, -3)$ e $F'(-1, -2)$

20. Alternativa **c**.

21. Alternativa **c**.

22. a) $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $F = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix}$

b) $A_1(3, -1)$, $B_1(-2, -4)$ e $C_1(-2, 2)$

c) $A_2(4, 4)$, $B_2(-1, 7)$ e $C_2(-1, 1)$

d) $D_1(-2, 0)$, $E_1(0, 3)$ e $F_1(4, -1)$

e) $D_2(-1, -\sqrt{3})$, $E_2\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$ e $F_2\left(\frac{-4+\sqrt{3}}{2}, \frac{-4\sqrt{3}-1}{2}\right)$

23. a) Quadrilátero.

b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 5 \\ -2 & -5 & -6 & -3 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 & 7 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -2 & -5 & -6 & -3 \\ 1 & 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

24. Alternativa **b**.

25. $A'(-2\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$, $B'(-2\sqrt{2}, 0)$, $C'(\sqrt{2}, 0)$ e $D'(\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$

Atividades complementares

1. Alternativa **c**.
2. Alternativa **b**.
3. Alternativa **e**.
4. Alternativa **c**.
5. Alternativa **e**.
6. Alternativa **d**.
7. Alternativa **c**.
8. Alternativa **c**.
9. Alternativa **b**.
10. Alternativa **d**.
11. Alternativa **b**.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS COMENTADAS

ALMEIDA, Lourdes W. de; SILVA, Karina P. da; VERTUAN, Rodolfo Eduardo. **Modelagem matemática na educação básica**. São Paulo: Contexto, 2016.
Essa obra proporciona oportunidades de integração envolvendo atividades normalmente desenvolvidas nas aulas de Matemática e em situações do dia a dia, no que tange a aspectos econômicos, sociais e ambientais.

BARUFI, Maria Cristina B.; LAURO, Maira M. **Funções elementares, equações e inequações**: uma abordagem utilizando microcomputador. 1. ed. São Paulo: CAEM-IME/USP, 2001.
Esse material aborda aspectos sobre o ensino de funções afim e quadrática a partir do uso de *softwares*.

BOYER, Carl B. **História da matemática**. 3. ed. Tradução: Helena de Castro. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.
O livro aborda fatos e estudos da História da Matemática, destacando a fascinante relação da humanidade com números, formas e padrões ao longo do tempo.

BRASIL. **Lei nº 13.415, de 16 de fevereiro de 2017**. Altera as Leis nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, e 11.494, de 20 de junho 2007, que regulamenta o Fundo de Manutenção e Desenvolvimento da Educação Básica e de Valorização dos Profissionais da Educação, a Consolidação das Leis do Trabalho […]. Brasília, DF: Presidência da República, [2023]. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2015-2018/2017/lei/l13415.htm. Acesso em: 7 out. 2024.
Lei que alterou a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf. Acesso em: 7 out. 2024.
Documento oficial contendo um conjunto de orientações que norteia a (re)elaboração dos currículos de referência das escolas das redes pública e privada de ensino de todo o Brasil. Traz os conhecimentos essenciais, as competências, as habilidades e as aprendizagens pretendidas para crianças e jovens em cada etapa da Educação Básica.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Currículos e Educação Integral. **Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica**. Brasília, DF: MEC: SEB: Dicei, 2013. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/media/seb/pdf/d_c_n_educacao_basica_nova.pdf. Acesso em: 18 out. 2024.
As Diretrizes Curriculares Nacionais (DCNs) são normas obrigatórias para a Educação Básica que orientaram a elaboração da BNCC. Elas são discutidas, concebidas e fixadas pelo Conselho Nacional de Educação (CNE).

BRASIL. Ministério da Saúde. Secretaria de Atenção à Saúde. Departamento de Atenção Básica. **Guia alimentar para a população brasileira**. 2. ed. Brasília, DF: MS, 2014. Disponível em: https://bvsms.saude.gov.br/bvs/publicacoes/guia_alimentar_populacao_brasileira_2ed.pdf. Acesso em: 7 out. 2024.
Apresenta aspectos sobre os alimentos saudáveis e contribui para a adequação de uma rotina de alimentação saudável.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Temas Contemporâneos Transversais na BNCC**: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília, DF: MEC: SEB, 2019. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/contextualizacao_temas_contemporaneos.pdf. Acesso em: 7 out. 2024.
Documento explicativo sobre os temas transversais a serem abordados na Educação Básica.

CARRANO, Paulo; DAYRELL, Juarez. Juventude e Ensino Médio: quem é este aluno que chega à escola. *In*: DAYRELL, Juarez; CARRANO, Paulo; MAIA, Carla L. **Juventude e Ensino Médio**: sujeitos e currículos em diálogo. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2014. Disponível em: https://educacaointegral.org.br/wp-content/uploads/2015/01/livro-completo_juventude-e-ensino-medio_2014.pdf. Acesso em: 7 out. 2024.
Como o próprio título indica, trata-se de um texto que procura "descrever" o jovem atual.

CARVALHO, João P. de. Um problema de Fibonacci. **Revista do Professor de Matemática (RPM)**, São Paulo, n. 17, [201-]. Disponível em: http://www.rpm.org.br/cdrpm/17/2.htm. Acesso em: 7 out. 2024.
Apresenta uma explicação sobre a história do matemático Leonardo Fibonacci e como ele chegou à sequência de Fibonacci.

COELHO, José Renato P. **O GeoGebra no ensino das funções exponenciais**. 2016. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Laboratório de Ciências Matemáticas, Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campos dos Goytacazes, 2016. Disponível em: https://uenf.br/posgraduacao/matematica/wp-content/uploads/sites/14/2017/09/30052016Jos%C3%A9-Renato-Paveis-Coelho.pdf. Acesso em: 7 out. 2024.
O material explora a utilização do *software* GeoGebra e de planilhas no estudo das funções exponenciais.

COSTA, Antonio Carlos G. da; VIEIRA, Maria A. **Protagonismo juvenil**: adolescência, educação e participação democrática. Salvador: Fundação Odebrecht: FTD, 2000.
O livro apresenta, de forma sistematizada, diversos estudos sobre protagonismo juvenil, com relatos de estudantes que vivenciaram, durante a vida escolar deles, ações protagonistas e os impactos dessa experiência em suas trajetórias acadêmica e profissional.

CRESPO, Antônio A. **Estatística fácil**. 19. ed. São Paulo: Saraiva, 2009.
O livro apresenta conceitos básicos e avançados de Estatística de maneira direta e simplificada, contextualizando com dados e problemas reais. Em todos os tópicos, há problemas e exercícios relacionados aos conceitos recém-apresentados.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Etnomatemática**: elo entre as tradições e a modernidade. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.
O autor, que é um dos precursores da pesquisa em etnomatemática no Brasil, apresenta seus pensamentos sobre a área, definindo esse campo de pesquisa e construindo um histórico da pesquisa etnomatemática no Brasil e no exterior. Nesse contexto, o autor discute também o conceito de cultura, que está intimamente relacionado ao conceito de etnomatemática. Ao longo de toda a obra, há discussões sobre a importância e a relevância desses estudos para a sala de aula.

DOMINGUES, Hygino H.; IEZZI, Gelson. **Álgebra moderna**. 4. ed. reimp. São Paulo: Atual, 2003.
Essa obra apresenta conceitos matemáticos, como conjuntos, funções, entre outros, destacando demonstrações e a importância de uma linguagem formal na escrita matemática.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.
O livro aborda vários fatos e estudos da Matemática organizados de forma cronológica.

FAZENDA, Ivani C. A. **Interdisciplinaridade**: história, teoria e pesquisa. 18. ed. Campinas: Papirus, 2012. (Coleção Magistério: Formação e Trabalho Pedagógico).
Essa obra propõe reflexões sobre a construção de um saber mais integrado e livre, destacando a integração de diferentes áreas de conhecimento, permeando o processo de ensino e aprendizagem.

GOWERS, Timothy. **Matemática**: uma breve introdução. Lisboa: Gradiva, 2008.
O autor Timothy Gowers é professor de Matemática na Universidade de Cambrigde e ganhador da medalha Fields, que equivale ao prêmio Nobel para a área da Matemática. Nessa obra, ele explica, de maneira simples, as diferenças fundamentais entre a Matemática escolar e a Matemática acadêmica. Ele também aborda questões filosóficas sobre a natureza dos conhecimentos matemáticos historicamente construídos pela humanidade, proporcionando uma compreensão de conceitos abstratos de modo intuitivo, como números complexos e infinito. Pare ler esse livro, é necessário apenas o conhecimento da Matemática escolar.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Censo demográfico 2022**: população e domicílios: primeiros resultados. Rio de Janeiro: IBGE, 2023. Disponível em: https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv102011.pdf. Acesso em: 21 out. 2024.
Documento que apresenta os primeiros resultados de população e domicílios referentes ao Censo 2022.

KENSKI, Vani M. **Educação e tecnologias**: o novo ritmo da informação. 8. ed. Campinas: Papirus, 2012. (Coleção Papirus Educação).
Essa obra busca refletir sobre as relações entre educação e tecnologias, evitando jargões, teorias e abordagens específicas desses campos de conhecimento, de modo que as discussões propostas sejam mais acessíveis a todos.

LIMA, Elon L. *et al*. **A matemática do Ensino Médio**. 11. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016. (Coleção Professor de Matemática, 1 v.).
Livro que aborda conceitos matemáticos desenvolvidos no Ensino Médio, destacando demonstrações e atividades de aprofundamento.

LOPES, Celi E.; NACARATO, Adair M. (org.). **Escritas e leituras na educação matemática**. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.
Livro que traz um compilado de artigos discutindo perspectivas consideradas fundamentais no ensino de Matemática, que deve focalizar os saberes do estudante, incentivando a criação dos próprios procedimentos e o desenvolvimento do raciocínio e da criatividade, priorizando a aquisição e a comunicação em linguagem matemática.

MACHADO, Nilson José. **Epistemologia e didática**: as concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente. 6. ed. São Paulo: Cortez, 2005.
Essa obra apresenta reflexões que buscam articular questões epistemológicas e ações docentes, bem como analisar formas usuais do trabalho escolar propondo alternativas didáticas.

MELO, Marcela Camila P. de; JUSTULIN, Andresa Maria. A resolução de problemas: uma metodologia ativa na construção do conceito de semelhança de triângulos. *In*: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 15., 2019, Londrina. **Anais** […]. Londrina: Sociedade Brasileira de Educação Matemática – Regional Paraná, 2019. Disponível em: http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/EPREM/XV_EPREM/paper/viewFile/1019/881. Acesso em: 7 out. 2024.
Apresentação teórica e prática da metodologia de resolução de problemas.

MONTEIRO, Martha S.; CERRI, Cristina. **História dos números complexos**. São Paulo: Centro de Aperfeiçoamento de Ensino de Matemática: Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 2001. Disponível em: https://www.ime.usp.br/~martha/caem/complexos.pdf. Acesso em: 7 out. 2024.
Apresenta informações sobre o desenvolvimento dos números complexos ao longo da história.

MORGADO, Augusto César. **Matemática discreta**. Rio de Janeiro: SBM, 2015.
O livro apresenta tópicos sobre números naturais, progressões, análise combinatória, probabilidade, médias e princípio das gavetas. Ele também tem um capítulo sobre Matemática financeira, no qual explica como funcionam os dois tipos de sistemas de amortização utilizados nos financiamentos em geral.

ORGANIZAÇÃO DAS NAÇÕES UNIDAS PARA A EDUCAÇÃO, A CIÊNCIA E A CULTURA. **Declaração Mundial sobre Educação para Todos**: satisfação das necessidades básicas de aprendizagem, Jomtien, 1990. Brasília, DF: Unesco, 1990. Disponível em: https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000086291_por. Acesso em: 7 out. 2024.
Documento importante para conhecimento do professor e que foi um dos suportes para a elaboração da BNCC.

PASQUAL JÚNIOR, Paulo Antonio. **Pensamento computacional e tecnologias**: reflexões sobre a educação no século XXI. Caxias do Sul: Educs, 2020.
Mostra os preceitos básicos do pensamento computacional como uma série de ferramentas mentais para a decomposição do problema e para o reconhecimento de padrões, de abstração e de algoritmo de resolução em um contexto de aprendizagem ativa, na qual o sujeito aprenderá por meio de ações próprias. Dessa forma, discute-se o desenvolvimento computacional na educação à luz das metodologias ativas de aprendizagem.

PATERLINI, Roberto R. Técnicas de máximos e de mínimos. **Revista do Professor de Matemática (RPM)**, São Paulo, n. 35, [201-]. Disponível em: http://www.rpm.org.br/cdrpm/35/6.htm. Acesso em: 7 out. 2024.
Artigo no qual são investigadas situações-problema por meio de diferentes técnicas para se encontrar os valores de máximo ou de mínimo da função.

POMMER, Wagner M. O número de Euler: possíveis abordagens no ensino básico. **Nilson José Machado**, São Paulo, 2010. Seminário sobre Ensino de Matemática apresentado no Programa de pós-graduação da Faculdade de Educação da USP (Feusp). Disponível em: https://www.nilsonjosemachado.net/sema20100831.pdf. Acesso em: 7 out. 2024.
Esse material apresenta aspectos históricos sobre o número de Euler que contribuem para ampliar o estudo sobre o tema.

PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.
Nessa obra, são apresentadas algumas vantagens de se trabalhar com investigações matemáticas em sala de aula, destacando-se o estabelecimento de conjecturas, reflexões e formalização do conhecimento matemático pelos estudantes.

PORTAL DA OBMEP. Rio de Janeiro, c2024. *Site*. Disponível em: https://portaldaobmep.impa.br/. Acesso em: 7 out. 2024.
Portal que disponibiliza materiais teóricos, videoaulas e atividades interativas sobre Matemática na Educação Básica.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.
Esse é o primeiro livro de história da Matemática publicado no Brasil, escrito por uma autora que apresenta um olhar crítico de como a história da matemática tem sido contada ao longo do tempo.

SKOVSMOSE, Ole. **Educação matemática crítica**: a questão da democracia. Tradução: Abgail Lins e Jussara de Loiola Araújo. 6. ed. Campinas: Papirus, 2013. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).
Nesse livro, as discussões destacam a importância da perspectiva democrática na educação matemática e seu caráter emancipatório, enfatizando o papel da modelagem na educação matemática.

SOARES, Evanildo C. **Uma investigação histórica sobre os logaritmos com sugestões didáticas para a sala de aula**. 2011. Dissertação (Mestrado em Ciências Naturais e Matemática) – Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2011. Disponível em: https://repositorio.ufrn.br/bitstream/123456789/16070/1/EvanildoCS_DISSERT.pdf. Acesso em: 7 out. 2024.
Explora o trabalho com logaritmos em situações de sala de aula, considerando uma perspectiva histórica.

WAGNER, Eduardo. Por que as antenas são parabólicas? **Revista do Professor de Matemática (RPM)**, São Paulo, n. 33, [201-]. Disponível em: http://rpm.org.br/cdrpm/33/3.htm. Acesso em: 7 out. 2024.
Artigo que apresenta uma reflexão sobre a forma parabólica das antenas.

ZABALA, Antoni; ARNAU, Laia. **Como aprender e ensinar competências**. Tradução: Carlos Henrique Lucas Lima. Porto Alegre: Artmed, 2010.
Uma obra que apresenta um novo enfoque no ensino e na aprendizagem de competências, priorizando as capacidades cognitivas, em relação à aquisição de conhecimento.

SIGLAS DOS EXAMES OFICIAIS

AFA-SP: Academia da Força Aérea
Cederj-RJ: Fundação Centro de Ciências e Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro – Consórcio Cederj
Cefet-MG: Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
Cefet-PR: Centro Federal de Educação Tecnológica do Paraná
Cesgranrio-RJ: Centro de Seleção de Candidatos ao Ensino Superior do Grande Rio
Cesupa: Centro Universitário do Estado do Pará
CPAEAM: Escola de Aprendizes-marinheiros
Eear-SP: Escola de Especialistas da Aeronáutica
Enem/MEC: Exame Nacional do Ensino Médio
Epcar-MG: Escola Preparatória de Cadetes do Ar
ESA-MG: Escola Superior de Advocacia de Minas Gerais
ESPM-SP: Escola Superior de Propaganda e *Marketing*
EsPCEx-SP: Escola Preparatória de Cadetes do Exército
Faap-SP: Fundação Armando Alvares Penteado
Famema-SP: Faculdade de Medicina de Marília
Famerp-SP: Faculdade de Medicina de São José do Rio Preto
Fatec-SP: Faculdade de Tecnologia
Fempar-PR: Fundação Escola do Ministério Público do Estado do Paraná
FGV-SP: Fundação Getulio Vargas
Ficsae-SP: Faculdade Israelita de Ciências da Saúde Albert Einstein
FMABC-SP: Faculdade de Medicina do ABC
FUCMT: Faculdades Unidas Católicas de Mato Grosso
Funorte-MG: Faculdades Unidas do Norte de Minas
Fuvest-SP: Fundação Universitária para o Vestibular
IFCE: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará
IFMA: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão
IFMG: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais
IFSC: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Santa Catarina
IME-RJ: Instituto Militar de Engenharia
Inatel-MG: Instituto Nacional de Telecomunicações
ITA-SP: Instituto Tecnológico de Aeronáutica
Mack-SP: Universidade Presbiteriana Mackenzie
OBMEP: Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
Omif: Olimpíada de Matemática das Instituições Federais
Prova Paraná: Secretaria de Estado da Educação do Paraná – Prova Paraná – Avaliação Diagnóstica
PUCCamp-SP: Pontifícia Universidade Católica de Campinas
PUC-RJ: Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
PUC-RS: Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul

Saresp-SP: Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo
UCDB-MS: Universidade Católica Dom Bosco
UCSal-BA: Universidade Católica do Salvador
UEA-AM: Universidade do Estado do Amazonas
UECE: Universidade Estadual do Ceará
UEG-GO: Universidade Estadual de Goiás
UEL-PR: Universidade Estadual de Londrina
UEM-PR: Universidade Estadual de Maringá
UEMG: Universidade do Estado de Minas Gerais
UEPA: Universidade do Estado do Pará
UEPB: Universidade Estadual da Paraíba
UEPG-PR: Universidade Estadual de Ponta Grossa
UERJ: Universidade do Estado do Rio de Janeiro
UERN: Universidade Estadual do Rio Grande do Norte
Uesb-BA: Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
Uesc-BA: Universidade Estadual de Santa Cruz
UFABC-SP: Universidade Federal do ABC
UFAL: Universidade Federal de Alagoas
UFC-CE: Universidade Federal do Ceará
UFCG-PB: Universidade Federal de Campina Grande
Ufersa-RN: Universidade Federal Rural do Semiárido
UFF-RJ: Universidade Federal Fluminense
UFG-GO: Universidade Federal de Goiás
UFJF-MG: Universidade Federal de Juiz de Fora
UFMA: Universidade Federal do Maranhão
UFMG: Universidade Federal de Minas Gerais
Ufop-MG: Universidade Federal de Ouro Preto
UFPA: Universidade Federal do Pará
UFPB: Universidade Federal da Paraíba
UFPE: Universidade Federal de Pernambuco
UFPel-RS: Universidade Federal de Pelotas
UFPI: Universidade Federal do Piauí
UFPR: Universidade Federal do Paraná
UFRGS-RS: Universidade Federal do Rio Grande do Sul
UFRJ: Universidade Federal do Rio de Janeiro
UFRN: Universidade Federal do Rio Grande do Norte
UFRR: Universidade Federal de Roraima
UFS-SE: Universidade Federal de Sergipe
UFSC: Universidade Federal de Santa Catarina
UFSCar-SP: Universidade Federal de São Carlos
UFSM-RS: Universidade Federal de Santa Maria
UFV-MG: Universidade Federal de Viçosa
Ulbra-RS: Universidade Luterana do Brasil
Unaerp-SP: Universidade de Ribeirão Preto
UnB-DF: Universidade de Brasília
Uneb-BA: Universidade do Estado da Bahia
Unesp: Universidade Estadual Paulista
Unicamp-SP: Universidade Estadual de Campinas
UniCesumar-PR: Universidade Cesumar
Unicruz-RS: Universidade de Cruz Alta
Unifesp-SP: Universidade Federal de São Paulo
Unifimes-MG: Centro Universitário de Mineiros
Unifor-CE: Universidade de Fortaleza
Unimep-SP: Universidade Metodista de Piracicaba
Unimontes-MG: Universidade Estadual de Montes Claros
Unip-SP: Universidade Paulista
Unisc-RS: Universidade de Santa Cruz do Sul
Unitins-TO: Fundação Universidade do Tocantins
UPE: Universidade de Pernambuco
UPF-RS: Universidade de Passo Fundo
UTFPR: Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Vunesp-SP: Fundação para o Vestibular da Universidade Estadual Paulista

ORIENTAÇÕES PARA O PROFESSOR

Caro professor,

Atualmente, o ensino de Matemática, assim como o de outras áreas do conhecimento, está pautado pelas indicações presentes nos documentos oficiais do governo, principalmente na Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

As perspectivas desse trabalho estão voltadas para atender aos estudantes do século XXI, reconhecendo que "as rápidas transformações na dinâmica social contemporânea nacional e internacional, em grande parte decorrentes do desenvolvimento tecnológico, atingem diretamente as populações jovens e, portanto, suas demandas de formação"[1].

Diante desse cenário, ensinar Matemática hoje significa desenvolver nos estudantes competências e habilidades apoiadas em noções, conceitos e métodos matemáticos que lhes possibilitem empregar estratégias próprias e criar soluções por meio da observação, da análise, do estabelecimento de conexões e do levantamento de conjecturas, percebendo e expressando regularidades.

Promover tais ações nos estudantes requer que você, professor, tenha domínio dos conteúdos da área, identifique as dificuldades de aprendizagem deles e, com o apoio de estudos da Educação Matemática, ajude-os a superá-las, favorecendo a autonomia e a cooperação em sala de aula.

Cientes disso, e com a intenção de contribuir para o trabalho docente, elaboramos estas **Orientações para o professor**, nas quais, além das discussões sobre os conteúdos e os métodos de ensino, procuramos fornecer subsídios para o seu trabalho como professor, por meio de comentários a respeito das seções e dos conteúdos abordados e de sugestões de leituras complementares, a fim de colaborar para a sua formação.

Na parte específica de cada volume, oferecemos observações e sugestões que visam enriquecer os temas abordados nos capítulos, tanto no aspecto teórico quanto no metodológico. Além disso, apresentamos as respostas e as resoluções das atividades, proporcionando uma compreensão mais completa dos conteúdos.

Para finalizar, desejamos a você muito sucesso em seu trabalho e esperamos que estas orientações possam ajudar a aprimorar sua prática pedagógica.

Os autores.

[1] BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. Brasília, DF: MEC, 2018. p. 462. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 11 set. 2024.

SUMÁRIO

PARTE GERAL

PARTE ESPECÍFICA

Estrutura da obra

Esta Coleção é formada por três volumes, um para cada série do Ensino Médio, sendo cada um constituído por um conjunto de objetos de conhecimento que estão integrados na própria Matemática. Além disso, apresentam também situações cuja contextualização evidencia modelos matemáticos que representam fatos e fenômenos de outras áreas de conhecimento que estão presentes no cotidiano, em especial a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

Ela foi elaborada tendo em vista atender à BNCC, contemplando propostas de trabalho que promovam o desenvolvimento das competências gerais e específicas e das habilidades presentes nesse documento, sem, no entanto, deixar de lado suas características essenciais de atendimento às expectativas de professores e estudantes do Ensino Médio.

Tal estruturação pode ser observada em todos os volumes da Coleção, uma vez que essas integrações são ressaltadas em várias das seções que compõem os capítulos – **Abertura**, **Conexões com...** e **História da Matemática**. Há também destaques sobre alguns aspectos do conhecimento matemático, que embasam reflexões sobre temas transversais e pontos curiosos de sua presença na vida e no desenvolvimento humano, apontados nos boxes **Fórum**, **Saiba que**... e **Pense e responda**. Essas seções e esses boxes possibilitam ao professor uma exploração mais dinâmica do material, podendo indicar aos estudantes por qual das propostas iniciar o trabalho.

Cada um dos livros que compõem esta Coleção está estruturado da forma descrita a seguir.

A proposta da **Abertura** de capítulo é apresentar uma contextualização de aplicação do conteúdo que será abordado. Considerando a diversidade possível de uso dos conteúdos matemáticos, ora são apresentadas situações atuais, ora situações que envolvem a história da Matemática ou que tratam de alguma profissão, porém sempre tendo em vista o estabelecimento de uma relação entre o que está sendo apresentado e os conteúdos a serem desenvolvidos no capítulo. O professor poderá usá-la para um levantamento diagnóstico dos conhecimentos prévios que os estudantes já possuem sobre o conteúdo a ser desenvolvido.

A seção **Atividades resolvidas** tem por princípio a apresentação de uma forma organizada de resolução e de emprego da linguagem matemática. Um aspecto dessa seção a ser considerado e analisado tanto pelos professores como pelos estudantes é que há situações nas quais diferentes caminhos são discutidos para se chegar à solução de uma questão, destacando-se, assim, o fato de que não há um modo único de resolução em Matemática e de que, portanto, os estudantes têm liberdade para criar estratégias próprias de resolução.

Com as **Atividades**, busca-se a familiarização dos estudantes com os conteúdos estudados no capítulo, tanto com relação a problemas envolvendo diferentes contextos do dia a dia quanto com questões específicas para a sistematização de procedimentos necessários para utilização desses conhecimentos em diferentes situações. Estão presentes nessa seção questões do Enem e de vestibulares de instituições de Ensino Superior de todas as regiões do país, questões de olimpíadas nacionais e questões elaboradas pelos autores, para que os estudantes tenham maiores oportunidades de desenvolvimento das competências e habilidades abordadas em cada capítulo.

A seção **Conexões com...** explora temas diversos, com foco na interdisciplinaridade e com o propósito de desenvolver a competência leitora, a cidadania e o senso crítico dos estudantes. A seção apresenta um texto seguido de algumas questões que relacionam a Matemática com temas do cotidiano, explorando gráficos, infográficos, tabelas etc. que se conectem com o conteúdo tratado no capítulo. As questões apresentadas nessa seção são principalmente voltadas a atividades investigativas a serem realizadas em duplas ou em grupos colaborativos e vão exigir processos reflexivos e/ou tomadas de decisão sobre intervenções na comunidade. Outro aspecto importante dessa seção é o fato de, em muitas propostas, os estudantes serem convidados a apresentar suas produções à comunidade escolar, o que possibilita o desenvolvimento de sua comunicação matemática.

A seção **História da Matemática** aborda fatos históricos ligados à Matemática, a fim de contextualizar o conteúdo abordado no capítulo e/ou apresentar o desenvolvimento e a evolução de determinada ideia ou teoria ao longo do tempo. A abordagem histórica é sempre um modo interessante de motivar os estudantes para as possibilidades de criação em Matemática e de destacar aspectos referentes à observação, à análise e à percepção de regularidades que estão por trás dessas descobertas.

Explorando a tecnologia é uma seção que promove o desenvolvimento e/ou o aprofundamento de conhecimentos matemáticos por meio da exploração de *softwares* livres, propiciando um trabalho interativo com alternativas para investigar possibilidades de resolução e para analisar consequências em uma representação ao se fazerem modificações em outra, por exemplo. Para esse trabalho, há orientações iniciais de como utilizar o *software* indicado para cada situação, além da indicação do endereço para o *download* e de orientações para sua instalação. O pensamento computacional também poderá ser desenvolvido por meio de atividades chamadas de desplugadas, isto é, que não dependem do uso do computador, as quais colocam em evidência o emprego da lógica de programação.

A seção **Atividades complementares** tem por objetivo apresentar questões presentes em exames oficiais, como Enem, olimpíadas nacionais e vestibulares realizados em todas as regiões brasileiras, priorizando-se os mais recentes. Sua presença no livro e as possíveis discussões a serem realizadas pelos professores a partir delas apontam para a necessidade da sistematização de alguns aspectos e procedimentos abordados no capítulo.

Com a seção **Para refletir**, os estudantes são incentivados a realizar reflexões a fim de identificar possíveis conexões com o que foi estudado no capítulo e de avaliar sua aprendizagem com relação às ações desenvolvidas no decorrer do trabalho. É uma ótima oportunidade para a realização da autoavaliação pelos estudantes.

Além dessas seções, os volumes apresentam também boxes que enriquecem as propostas apresentadas e ampliam as possibilidades de desenvolvimento das competências gerais da BNCC.

No boxe **Fórum**, é apresentada uma situação referente a algum tema contemporâneo que tenha relação com o conteúdo abordado no capítulo. Em seguida, são propostas algumas questões, com o intuito de promover debates e/ou trocas e compartilhamento de conhecimentos. Tais ações exigem a mobilização de estratégias de debate e de construção de argumentação coerente para defesa do ponto de vista. Além disso, há a possibilidade de esse boxe ser utilizado em momentos *on-line*, por meio de grupos fechados de discussão em *e-mail*, rede social ou aplicativos de troca de mensagens.

O **Pense e responda** é um boxe que traz perguntas curtas e diretas sobre propostas a serem investigadas pelos estudantes, incentivando-os a elaborar hipóteses e buscar sua comprovação ou negação.

O boxe **Saiba que...** tem como função principal fornecer uma dica interessante ou uma informação relevante a respeito do conteúdo. Pode ser referente à teoria apresentada ou a uma determinada forma de resolução de um problema e pode ser utilizado para implementar o conteúdo apresentado.

Nos boxes **Para ler**, **Para assistir**, **Para acessar** e **Para ouvir**, como o próprio nome indica, são fornecidas sugestões de livros, *links*, filmes, *podcasts* etc. Sua finalidade é fornecer um canal confiável com informações complementares a respeito do tópico em estudo.

Pressupostos teóricos e metodológicos

Os pressupostos teóricos e metodológicos que fundamentam esta Coleção foram cuidadosamente construídos com base nas pesquisas mais recentes em Educação Matemática e nas orientações oficiais do Ministério da Educação (MEC), especialmente a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Esta Coleção proporciona oportunidades para o planejamento de aulas baseadas em metodologias ativas que promovem o protagonismo dos estudantes no processo de aprendizagem, aliadas ao uso pedagógico de tecnologias digitais e ao pensamento computacional. O pluralismo de ideias é aspecto central, criando um ambiente que valoriza a diversidade cultural e promove a cultura de paz e o respeito às diferenças.

Além disso, no decorrer dos volumes, é possível encontrar abordagens relacionadas aos Temas Contemporâneos Transversais conectados aos conteúdos matemáticos. Também são consideradas as exigências de avaliações externas, como o Enem e os vestibulares, de modo a preparar os estudantes para esses desafios com uma visão crítica e contextualizada.

A Coleção busca não apenas ensinar Matemática de maneira formal, mas também contribuir para a formação de uma visão interdisciplinar e integradora. Para isso, sempre que possível, apresenta a Matemática de forma integrada com as outras áreas do conhecimento, em específico, com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. A obra incentiva o uso do raciocínio lógico e do pensamento crítico em conjunto com a compreensão de questões sociais e ambientais que afetam a vida cotidiana. A construção de conhecimentos é realizada de forma colaborativa e reflexiva, sempre com ênfase no desenvolvimento da autonomia intelectual e emocional dos estudantes e na promoção de uma cidadania ativa e ética.

Objetivos da obra

- Incentivar discussões justas e respeitosas, a fim de promover a socialização de ideias, a prática colaborativa e o respeito ao outro e às diferenças.
- Refletir sobre aspectos relacionados à saúde física e emocional, como prática de esportes, conhecimento dos nutrientes presentes nos alimentos, formas de prevenção e de controle de doenças, entre outros, de modo a promover a tomada de decisões conscientes e responsáveis com base na análise de dados.
- Refletir, discutir e argumentar sobre questões relacionadas à necessidade de conservação do meio ambiente, tais como desmatamento, efeito estufa, urbanização e gestão de resíduos, utilizando, para isso, a interpretação de dados e o conhecimento científico.
- Compreender e fazer uso da linguagem matemática e de suas diferentes representações (simbólica, algébrica e gráfica), ampliando as possibilidades de se comunicar, ler e interpretar o mundo.
- Apropriar-se de diferentes tipos de raciocínio lógico-matemático (indução, dedução e raciocínio por analogia) para solucionar problemas, comunicar-se (oralmente e por escrito), argumentar e inferir.
- Compreender e analisar a produção e a circulação de textos de divulgação científica e de mídias sociais, considerando os elementos que constituem esses textos (em termos de gêneros discursivos) e os procedimentos de leitura multimodal e inferencial.
- Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para compreender, analisar e propor soluções para situações do cotidiano e demandas econômicas do dia a dia, incluindo temas como inflação, juros, orçamento, financiamento e empréstimo, refletindo sobre questões sociais relacionadas ao uso do dinheiro e a alternativas, como o uso de planilhas eletrônicas, que possibilitem controlar gastos e poupar.
- Apropriar-se da linguagem e dos conceitos de conjuntos, suas propriedades e as operações que podem ser feitas nessa estrutura, a fim de fazer uso desse conhecimento nos diversos campos da Matemática e no cotidiano.
- Ser capaz de aplicar o conceito de função na modelagem de situações em diversos contextos e identificar momentos em que a tecnologia pode ser uma aliada nesse processo, solucionando problemas que envolvam funções afins, funções quadráticas, funções exponenciais, funções logarítmicas, funções definidas por mais de uma sentença e funções trigonométricas.
- Ser capaz de identificar e aplicar o conceito de sequências em diferentes contextos da Matemática e do cotidiano, identificando padrões e regularidades em experimentações, com ou sem uso de tecnologia, propondo conjecturas e generalizações.
- Diferenciar demonstrações matemáticas de experimentações empíricas (visualização de desenhos, construção de modelos materiais, medições de grandezas, entre outros), identificando hipótese e tese em propriedades e teoremas matemáticos, compreendendo sua demonstração e validando seus resultados pelo método dedutivo.
- Apropriar-se do conceito de matrizes, suas principais aplicações em diferentes áreas de conhecimento e em situações do cotidiano, suas propriedades e das operações que podem ser realizadas com esse tipo de representação.
- Consolidar a noção de sistemas de equações lineares para interpretar, modelar e resolver situações em diversos contextos e identificar momentos em que a tecnologia pode ser uma aliada nesse processo.
- Investigar e registrar, por meio de fluxograma, quando possível, o algoritmo que resolve um problema, utilizando conceitos iniciais de linguagem de programação escritos em linguagem corrente e/ou matemática.
- Analisar e compreender problemas e demandas do cotidiano para refletir e propor ações e soluções que utilizem conceitos como perímetro, área, volume, massa, capacidade, entre outras grandezas.
- Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras. Compreender e utilizar as unidades de medida dessas diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), e expressar, quando necessário, medidas em notação científica, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro.
- Utilizar representações que possibilitem a aplicação de relações métricas e trigonométricas na resolução de problemas, consolidando as noções de congruência e de semelhança de polígonos.
- Apropriar-se do conceito de transformações geométricas e das propriedades relacionadas a essas transformações para analisar elementos da natureza e de diferentes produções humanas, bem como construir figuras e modelos geométricos que possibilitem compreender e solucionar problemas do dia a dia.

- Refletir e debater sobre questões relacionadas aos resultados de pesquisas estatísticas divulgadas pela mídia, assim como elaborar e executar essas pesquisas para investigar questões e problemas do mundo contemporâneo, comunicando os resultados por meio de relatórios contendo gráficos adequados e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão, utilizando ou não recursos tecnológicos.
- Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvam a contagem de possibilidades e o cálculo de probabilidades.
- Identificar fenômenos e experimentos aleatórios e recorrer a análises probabilísticas para tomar decisões conscientes e responsáveis.

A etapa do Ensino Médio

O Ensino Médio tem passado por mudanças nos últimos anos. Novas ideias, discussões e propostas circulam constantemente nas comunidades escolares e nos órgãos voltados à Educação.

Essa etapa tem grande importância para a formação dos jovens e, consequentemente, para o futuro do país, por isso o interesse em investir em reformas que permitam construir o Ensino Médio desejado.

Espera-se que o Ensino Médio faça, de maneira competente, a articulação entre o Ensino Fundamental e o Ensino Superior/vida profissional, para que os estudantes possam consolidar, ampliar e utilizar as competências e habilidades desenvolvidas na etapa anterior, chegando à vida adulta, pessoal e profissional, com as capacidades e qualidades necessárias.

Espera-se também que, durante o Ensino Médio, os estudantes cultivem e aprimorem habilidades sociais, morais e emocionais para as etapas seguintes da vida, como respeito, cooperação, tolerância, equilíbrio emocional e resiliência.

Com base nessas expectativas, importantes mudanças aconteceram nos últimos anos. A carga horária foi ajustada, e a organização curricular sofreu alterações. Para garantir as aprendizagens desejadas em todo o território nacional, foi proposta a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que norteia não apenas a etapa do Ensino Médio, mas toda a Educação Básica.

Com novos direcionamentos, ficou estabelecida a etapa do Ensino Médio composta pela formação geral básica, com carga horária mínima de 2400 horas, e pelos itinerários formativos, com carga horária mínima de 600 horas.

A formação geral básica consiste no ensino obrigatório das áreas apresentadas na BNCC e dos respectivos componentes curriculares.

- Linguagens e suas Tecnologias: Artes, Educação Física, Língua Inglesa e Língua Portuguesa
- Matemática e suas Tecnologias: Matemática
- Ciências da Natureza e suas Tecnologias: Biologia, Física e Química
- Ciências Humanas e Sociais Aplicadas: História, Geografia, Sociologia e Filosofia

Os itinerários formativos correspondem à parte flexível do currículo, e cada estudante pode escolhê-los de acordo com seus interesses, dentro das quatro áreas do conhecimento da BNCC.

Cabe ao Conselho Nacional de Educação, em conjunto com os sistemas de ensino, estabelecer diretrizes nacionais contendo orientações e objetivos de aprendizagem, que devem ser contemplados nos itinerários. Além disso, também fica estabelecido que cada instituição de ensino deverá ofertar, pelo menos, dois itinerários.

Tomando por base as competências e habilidades apresentadas pela BNCC, que garantem as aprendizagens essenciais para esta etapa da Educação Básica, cabe aos sistemas de ensino e às escolas construir seus norteadores curriculares. Nesse sentido, cada sistema de ensino vem, desde 2019, (re)elaborando seus currículos estaduais, considerando não apenas os documentos normativos, como a BNCC e as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCNs), mas também as características e as necessidades regionais, suas culturas locais e os anseios dos estudantes.

Os referenciais curriculares devem servir de base para que as unidades escolares, em conjunto com seus professores, desenhem seus planejamentos curriculares e definam as estratégias pedagógicas e metodológicas que serão adotadas, bem como a forma como os materiais didáticos disponíveis podem ser utilizados para atender aos objetivos a serem atingidos.

As mudanças descritas começaram a ser implantadas, de maneira gradual, a partir de 2025. Educadores e autoridades da Educação prosseguem avaliando o processo, buscando corrigir rumos e aprimorar propostas que foram assertivas. Assim, o Ensino Médio que todos desejamos ainda está em construção.

A BNCC

Os desafios impostos à educação escolar de um público múltiplo e dinâmico inserido em uma efervescência de desenvolvimento em todas as áreas, provocada principalmente pelo avanço tecnológico, exigem um novo olhar e um posicionamento sobre a abordagem que deve ser dada ao conhecimento a ser construído e à constituição de um sujeito consciente de toda a contribuição que ele pode dar ao mundo de modo geral.

Para que essa **formação integral** seja possível, estudos em Educação e construções curriculares de diferentes países têm indicado que o ensino precisa estar orientado ao desenvolvimento de competências e habilidades.

A BNCC também apresenta tal posicionamento e, diante do fato de que diferentes significados têm sido atribuídos ao termo **competência**, ela apresenta a definição que adota:

> [...] **competência** é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho.[2]

No que tange ao termo **habilidade**, o documento também especifica:

> As **habilidades** expressam as aprendizagens essenciais que devem ser asseguradas aos alunos nos diferentes contextos escolares.[3]

Em outro trecho, esse documento destaca que o desenvolvimento de competências exige que

> [...] as decisões pedagógicas devem estar orientadas para o desenvolvimento de competências. Por meio da indicação clara do que os alunos devem "saber" (considerando a constituição de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores) e, sobretudo, do que devem "saber fazer" (considerando a mobilização desses conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho) [...][4]

Dessa forma, a BNCC delega à escola uma função social urgente, tendo em vista o mundo globalizado e a consequente necessidade de pessoas que "saibam fazer" e que tenham a capacidade de planejar e resolver problemas, que saibam ler o mundo por meio de palavras, imagens, fatos, números, códigos e outras linguagens, usando esses recursos para saber agir e conviver.

As **competências gerais** apresentadas pela BNCC têm o propósito do desenvolvimento integral do estudante:

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.

4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.

7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

[2] BRASIL, ref. 1, p. 8.
[3] BRASIL, ref. 1, p. 29.
[4] BRASIL, ref. 1, p. 13.

8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.[5]

Tendo em vista que a proposta de ensino é o desenvolvimento de competências, deve-se repensar o estudo de conteúdos, o que não significa menosprezá-los, mas sim mudar o foco do trabalho com eles. Ao longo das orientações específicas de cada capítulo, são destacados os momentos propícios para o desenvolvimento das competências gerais da BNCC. A memorização de fatos e/ou procedimentos referentes aos conteúdos abordados nos diferentes componentes curriculares não precisa ser totalmente abandonada, porém ela deve fazer sentido para os estudantes. Dentro do possível, as situações propostas devem buscar estabelecer integração entre as diferentes áreas, possibilitando o emprego de noções e conhecimentos matemáticos, geográficos, biológicos etc., além do domínio da língua.

Esses elementos apontam que o ensino por competências exige o repensar da prática docente. O professor precisa reconhecer que os objetos de conhecimento devem ser apresentados, sempre que possível, por meio de situações e problemas contextualizados que provoquem conflitos e exijam que os estudantes mobilizem seus processos cognitivos de observação, visualização, compreensão, organização, análise e síntese como suporte para a elaboração de uma argumentação consistente. É necessário lembrar que muitas situações matemáticas podem ser contextualizadas por meio de questões internas à própria Matemática e por meio da análise de seus procedimentos.

Temas Contemporâneos Transversais (TCTs) e competências socioemocionais

Trazer para a sala de aula problematizações sobre temas vividos pelas pessoas em seu dia a dia que influenciam suas vidas é uma forma de tratar os **Temas Contemporâneos Transversais (TCTs)**, que são referidos na BNCC. Esses temas não se vinculam a uma determinada área ou disciplina escolar, ao contrário, devem ser abordados por todas elas. Eles devem ser considerados como um conjunto de aprendizagens essenciais e indispensáveis a que todos os estudantes, crianças, jovens e adultos, têm direito.

A importância desse trabalho é a possibilidade de transformar a escola em um espaço voltado para a compreensão da realidade social e dos direitos e responsabilidades de todos em relação à vida pessoal, coletiva e ambiental. Esses temas são indicados por serem "aqueles que são intensamente vividos pelas comunidades, pelas famílias, pelos estudantes e pelos educadores no dia a dia, que influenciam e são influenciados pelo processo educacional"[6].

Observe a seguir os temas propostos[7].

- **Ciência e Tecnologia**: Ciência e Tecnologia;
- **Meio ambiente**: Educação Ambiental e Educação para o Consumo;
- **Economia**: Trabalho, Educação Financeira e Educação Fiscal;
- **Saúde**: Saúde e Educação Alimentar e Nutricional;
- **Cidadania e Civismo**: Vida Familiar e Social, Educação para o Trânsito, Educação em Direitos Humanos, Direitos da Criança e do Adolescente e Processo de envelhecimento, respeito e valorização do Idoso;
- **Multiculturalismo**: Diversidade Cultural e Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras.

---

5 BRASIL, ref. 1, p. 9-10.

6 BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Temas Contemporâneos Transversais na BNCC**: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília, DF: MEC: SEB, 2019. p. 7. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/contextualizacao_temas_contemporaneos.pdf. Acesso em: 9 set. 2024.

7 BRASIL, ref. 6, p. 13.

É preciso considerar as possibilidades de integração dos assuntos específicos de cada área com esses temas, pois eles têm caráter social e político e são um caminho promissor para os estudantes reconhecerem suas reais possibilidades de ação sobre a realidade em que vivem. Ao mesmo tempo, essa integração pode contribuir muito para a valorização dos conhecimentos escolares. Além disso, essa abordagem é profundamente significativa para a construção da cidadania e para a participação ativa do estudante na vida em sociedade. Ao longo das orientações específicas de cada capítulo, são destacadas as situações presentes na obra que desenvolvem os Temas Contemporâneos Transversais (TCTs), apresentando-se sugestões de como desenvolver esse trabalho.

O trabalho com os TCTs tem grande potencial para que atitudes e valores sejam colocados em discussão dentro da sala de aula.

A incorporação de atitudes e valores pelos estudantes está intimamente ligada ao desenvolvimento de **competências socioemocionais**. Tais competências são consideradas fundamentais para a construção de um percurso escolar que promova a educação integral dos estudantes, preparando-os para sua vida futura.

Tais competências dizem respeito ao relacionamento com os outros e consigo mesmo, à compreensão e gestão das emoções, ao estabelecimento e alcance de objetivos, à tomada de decisões autônomas e responsáveis e ao enfrentamento de situações adversas de maneira criativa e construtiva.

Estudos e discussões analisando quais estudantes que se saem melhor em atividades escolares indicam aqueles que apresentam características como organização, persistência, resiliência, enfrentamento e resolução de conflitos com controle da frustração e da ansiedade, além de autoestima, confiança e criatividade. Com base nessas conclusões, torna-se, então, evidente que o desenvolvimento cognitivo do jovem não se dá de modo isolado do seu desenvolvimento socioemocional. Desse modo, o professor assume um papel fundamental, tanto na criação de novas atividades quanto no planejamento e na condução das rotinas e ações que já têm lugar na escola. O professor, como mediador, pode integrar a esses momentos propostas na quais os estudantes, distribuídos em duplas, trios ou quartetos, possam discutir e colaborar entre si na resolução de problemas.

Em trabalhos colaborativos, o objetivo não é a homogeneização do pensamento e do conhecimento dos sujeitos participantes. Deve-se rejeitar o autoritarismo e a condução pedagógica com motivação hierárquica. Ao contrário, a colaboração entre os pares tem como objetivo a reconstrução do conhecimento dos participantes. Para isso, é importante respeitar a individualidade de cada sujeito, seus recursos e seu ritmo pessoal. Esse tipo de trabalho permite que as pessoas nele envolvidas passem a reconhecer o que sabem, o que os outros sabem e o que todos não sabem, resultando na busca de superação dos limites de cada um e do grupo como um todo.

Para que esse tipo de interação ocorra nos grupos colaborativos, é essencial que o professor determine os participantes, reunindo-os não pela amizade ou pela proximidade de localização na sala, mas por características que possibilitem que todos tenham voz no grupo e sejam considerados como participantes necessários. Essa ação favorece o desenvolvimento da autoestima, da confiança e da criatividade, o que promoverá o desenvolvimento cognitivo dos estudantes, além de fornecer as bases para a aceitação social.

A mediação do professor é o ponto-chave de todo esse processo, por meio de suas intervenções, com a acolhida de diferentes pontos de vista e com discussões realizadas principalmente com perguntas que instiguem os estudantes a justificar seus posicionamentos e suas conclusões. As questões podem ser do tipo: Todos chegaram a essa conclusão ou alguém teve alguma consideração um pouco diferente dessa?; E se fosse de tal forma? Vocês pensaram nessa outra possibilidade?; Vocês levaram em consideração outros pontos de vista?; Apoiaram-se no que já estudamos antes a respeito desse assunto?; Que tal estudarem também em outros livros e *sites* para dar maior respaldo ao que estão afirmando? etc.

A BNCC e o ensino de Matemática

No Ensino Médio, a área de Matemática e suas Tecnologias, de acordo com a BNCC, tem a responsabilidade de aproveitar todo o potencial já constituído pelos estudantes no Ensino Fundamental para promover ações que ampliem o letramento matemático iniciado na etapa anterior. O conceito de letramento matemático considerado pelo documento apoia-se naquele utilizado pelo Programa Internacional de Avaliação dos Estudantes (Pisa). Assim, é

> [...] definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. [...][8]

Desse modo, pretende-se que, ao final do Ensino Médio, os estudantes tenham se apropriado de seu papel como cidadãos nos contextos social, político, cultural e econômico.

Tal posicionamento exige que a postura no trato com as propostas matemáticas escolares considere a busca de problemas fora da Matemática, de modo a proporcionar aos estudantes a consciência de que essa área do conhecimento se abre para muitas outras, nas quais ela pode ser utilizada como uma ferramenta de compreensão e análise. Porém, é preciso destacar que a presença da Matemática nas diversas áreas do conhecimento não ocorre somente por meio dos registros fornecidos pelos fatos e fenômenos estudados, mas também pelo seu amplo conjunto de procedimentos de cálculo, análise, medição e estimativa dos fenômenos da realidade e de suas relações. Esse fato é o que traz a necessidade de também se trabalhar de modo cuidadoso a linguagem, as definições e os procedimentos matemáticos que darão suporte às resoluções dos problemas.

As competências específicas e as habilidades vinculadas à área de Matemática apresentadas na BNCC expressam esses aspectos, conferindo a professores e estudantes maiores oportunidades de reconhecer a presença da Matemática em situações reais e em outras áreas do conhecimento. A Matemática pode ser identificada na base de uma série de processos que organizam a vida contemporânea, ao mesmo tempo que aponta os conhecimentos específicos a serem construídos, como apresentado a seguir.

Competência específica 1 – Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

(**EM13MAT101**) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(**EM13MAT102**) Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.

(**EM13MAT103**) Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.

(**EM13MAT104**) Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.

(**EM13MAT105**) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).

(**EM13MAT106**) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).

Competência específica 2 – Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

(**EM13MAT201**) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.

(**EM13MAT202**) Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos.

[8] BRASIL, ref. 1, p. 266.

(**EM13MAT203**) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.

Competência específica 3 – Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

(**EM13MAT301**) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(**EM13MAT302**) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(**EM13MAT303**) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.

(**EM13MAT304**) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.

(**EM13MAT305**) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.

(**EM13MAT306**) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.

(**EM13MAT307**) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(**EM13MAT308**) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

(**EM13MAT309**) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(**EM13MAT310**) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.

(**EM13MAT311**) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.

(**EM13MAT312**) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.

(**EM13MAT313**) Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro.

(**EM13MAT314**) Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.).

(**EM13MAT315**) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

(**EM13MAT316**) Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).

Competência específica 4 – Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

(**EM13MAT401**) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.

(**EM13MAT402**) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.

(**EM13MAT403**) Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.

(**EM13MAT404**) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(**EM13MAT405**) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

(**EM13MAT406**) Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de *softwares* que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra.

(**EM13MAT407**) Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (*box-plot*), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise.

Competência específica 5 – Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

(**EM13MAT501**) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.

(**EM13MAT502**) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.

(**EM13MAT503**) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.

(**EM13MAT504**) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.

(**EM13MAT505**) Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.

(**EM13MAT506**) Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.

(**EM13MAT507**) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

(**EM13MAT508**) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

(**EM13MAT509**) Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.

(**EM13MAT510**) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.

(**EM13MAT511**) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.[9]

Nesta Coleção, as oportunidades de reconhecer a presença da Matemática em situações reais e em outras áreas do conhecimento se dão em vários momentos, como na **Abertura** de cada capítulo, nas seções **Atividades resolvidas** e **Atividades**, bem como na seção **Conexões**, entre outras. Esses são os elementos que dão suporte ao professor para propor aos estudantes os trabalhos em grupos colaborativos em diferentes situações de investigação.

O ensino da Matemática e o papel do professor

Nessa etapa da Educação Básica, há que se considerar que o desenvolvimento intelectual dos jovens permite maior capacidade de abstração e potencializa o pensar de modo rigoroso e criativo na resolução de problemas. Desse modo, a finalidade dos estudos não é apenas saber os conceitos e procedimentos matemáticos, mas saber usá-los como suporte para a realização de uma reflexão crítica em relação:

- à própria aprendizagem, que inclui o desenvolvimento do pensamento computacional e dos diferentes tipos de raciocínio lógico-matemáticos (indução, dedução e raciocínio por analogia);
- aos contextos sociais contemporâneos, isto é, a produção, a circulação e a recepção de textos de divulgação científica e de mídias sociais, considerando os elementos que constituem esses textos (em termos de gêneros discursivos) e procedimentos de leitura multimodal e inferencial.

Para contemplar essas metas, o professor pode se valer de vários recursos pedagógicos e metodológicos que façam com que o trabalho desenvolvido atenda aos objetivos estabelecidos em seu planejamento escolar, considerando e respeitando as particularidades e necessidades dos estudantes. Nesse sentido, esta Coleção busca trazer subsídios diversificados para desenvolver uma ação pedagógica que vai além da apresentação de conceitos e técnicas. Além disso, são descritas a seguir algumas metodologias de ensino e o pensamento computacional, propiciando uma reflexão sobre a prática docente. É importante ressaltar que a escolha de qual metodologia utilizar e do momento pedagógico no qual ela deve ser aplicada cabe ao professor. O livro didático não determina o emprego de uma ou outra metodologia; no entanto, ele oferece suporte para a estruturação e o desenvolvimento da atividade docente.

Atividades investigativas

Pensar sobre o ensino de Matemática exige pensar o que significa aprender Matemática. As perspectivas atuais de educadores matemáticos consagram que, para aprender Matemática, é preciso fazer Matemática.

Esse fazer significa se engajar em uma atividade que promova a observação e a análise de dados e informações, o estabelecimento de conexões e relações, a criação de conjecturas, a identificação e a expressão de regularidades, a busca de explicações, a criação de soluções, a invenção de estratégias próprias que envolvam noções, conceitos e procedimentos matemáticos, a validação de suas produções e a comunicação com os pares.

Assim, ensinar Matemática é, para um professor, criar as condições que possibilitarão que os estudantes façam Matemática. Embora possa parecer que essa seja uma missão impossível, na verdade, trata-se de promover, em sala de aula, uma atitude investigativa por parte dos estudantes, possibilitando-lhes mobilizar sua intuição e seus conhecimentos antigos em alternativas diversas de exploração. Esse tipo de atividade

> ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e o professor.[10]

Tendo como pressuposto que todos podem produzir Matemática, nas suas diferentes expressões, as atividades de investigação podem contribuir para aulas de Matemática mais dinâmicas e interessantes.

[9] BRASIL, ref. 1, p. 532-541.
[10] PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003. p. 23.

Chamar o estudante a agir como um matemático não implica trabalhar obrigatoriamente com problemas muito difíceis. Ponte, Brocardo e Oliveira[11] destacam que, ao contrário, investigar significa trabalhar questões que nos interpelam e, por isso, constitui uma poderosa forma de construir conhecimento. Assim, é em torno de um ou mais problemas que uma investigação matemática se desenvolve, porém as descobertas que ocorrem durante a busca da solução podem ser tão ou mais importantes do que a própria solução.

Aulas de investigação podem representar um desafio à prática do professor, pois elas demandam um equilíbrio entre garantir que o trabalho dos estudantes ocorra e seja significativo do ponto de vista do conhecimento matemático e conceder a eles o ambiente necessário para que desenvolvam sua autonomia, possibilitando a autoria da investigação.

Considerando esse equilíbrio, o professor precisa interagir com os estudantes para estar ciente de suas necessidades e características particulares, sem perder de vista os aspectos gerais da gestão da situação didática. Desse modo, o professor é levado a desempenhar diversos papéis no decorrer de uma atividade de investigação.

Criar o cenário e desafiar os estudantes: o sucesso de uma investigação depende do ambiente de aprendizagem que se cria na sala de aula, de modo que o estudante se sinta à vontade e lhe seja dado tempo para pensar, colocar questões, explorar suas ideias e exprimi-las. Dependendo da situação proposta, é preciso disponibilizar aos estudantes materiais diversos para manipulação ou consulta, sendo o livro didático o ponto de partida essencial para as suas buscas e pesquisas.

Ao propor uma atividade, é fundamental garantir que todos os estudantes entendam o sentido da tarefa proposta e aquilo que se espera deles no decurso da aula, de modo que compreendam o que significa investigar e aprender a fazê-lo. A proposta inicial da tarefa não pode ser demasiadamente pormenorizada sobre o que é para ser feito, uma vez que a interpretação pelo estudante do que se propõe é um dos objetivos dessas aulas, esperando-se que ele evolua para realizá-la autonomamente.

O professor precisa dar uma atenção especial à própria tarefa docente, escolhendo questões ou situações iniciais e colocadas no decorrer da atividade que, potencialmente, constituam um verdadeiro desafio aos estudantes.

Acompanhar o progresso dos estudantes: uma vez que os estudantes já estejam em processo de investigação, cabe ao professor manter uma posição de retaguarda, procurando compreender como eles estão pensando. Para isso, pode-se fazer questionamentos ou solicitar explicações.

É um desafio para o professor perceber aonde os estudantes querem chegar, uma vez que ele pode não ter acompanhado todo o processo de discussão dentro do grupo. Aqui o professor deve considerar que os estudantes podem ainda não ter os registros organizados e que sua comunicação matemática oral pode ser limitada e conter erros, precisando, assim, esforçar-se para compreendê-los, evitando corrigir cada afirmação ou conceito matemático apresentado de forma imprecisa.

Acompanhar o progresso dos estudantes possibilita ao professor sinalizar que eles podem continuar, por estarem indo na direção correta, intervir, de acordo com a necessidade do grupo, ou fornecer apoio mais direto para influenciar positivamente o trabalho deles.

A avaliação do desenvolvimento dos estudantes durante a atividade pode também levar o professor a decidir conceder mais tempo para a investigação, fazer uma pequena discussão intermediária com toda a turma ou passar à discussão final.

Apoiar o trabalho dos estudantes: na condução da aula, o apoio a ser dado precisa estar pautado na manutenção dos aspectos característicos do processo investigativo. Assim, a intervenção do professor pode assumir várias formas, como colocar questões, fornecer ou recordar informações relevantes, fazer sínteses e promover a reflexão por parte dos estudantes.

A postura interrogativa é a que o professor deve privilegiar, e suas questões podem ter diferentes intenções, como a de esclarecer ideias, próprias e dos jovens, a de refazer uma questão proposta por um estudante, para que ele pense melhor sobre a dúvida levantada, ou a de transformar uma questão em uma sugestão orientadora para a atividade.

Essa postura tem, também, a função de ajudar os estudantes a compreender que o papel principal do professor é apoiá-los em seu trabalho, e não simplesmente dizer se estão certos ou não, o que, aliás, deve ocorrer cada vez menos nessas aulas.

Em alguns momentos, a atividade investigativa pode sofrer bloqueio, porque os estudantes não com-

[11] PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, ref. 10.

preendem certos conceitos ou representações importantes para a sua continuidade. A intervenção do professor nesses momentos precisa ser a de fornecer ou recordar conceitos anteriormente estudados, para que os estudantes possam dar continuidade à tarefa.

Outra prática importante por parte do professor é a de promover a reflexão dos estudantes sobre o trabalho realizado e ajudá-los a fazer uma síntese da atividade, descrevendo avanços e recuos, os objetivos que tinham em mente e as estratégias que seguiram.

Raciocinar matematicamente: em atividades de investigação, é natural que os estudantes apresentem questões ou conjecturas em que o professor não havia pensado antes. É preciso avaliar rapidamente se será apropriado parar para refletir com os estudantes ou deixar isso para um momento posterior.

Construir o raciocínio matemático com os estudantes pode ser interessante, pois é uma oportunidade de eles acompanharem o desenvolvimento da ideia, enquanto o professor pensa em voz alta, colocando a questão debatida em termos matemáticos e buscando a sua justificativa.

Tudo o que foi exposto até este ponto deixa claro que, em toda atividade de investigação, devem ser dados tempo e oportunidade aos estudantes para que possam organizar e desenvolver seus modos de pensar, expressá-los para os colegas e para o professor e registrá-los utilizando linguagem matemática adequada. Desse modo, será possível a todos reconhecer o valor dos processos matemáticos, adquirir confiança em sua capacidade de fazer Matemática e, finalmente, tornarem-se aptos a resolver problemas.

No entanto, isso não quer dizer que as atividades matemáticas a serem propostas se restrinjam apenas às investigativas. Depois de propor problemas de investigação, o professor deve abordar problemas de familiarização com o novo conhecimento, apresentando diferentes domínios matemáticos e contextos.

Os contextos podem variar entre propostas envolvendo aspectos da história da Matemática, explorações de situações envolvendo a Etnomatemática, e, como os jovens estão conectados o tempo todo – inclusive durante as aulas –, atividades envolvendo as Tecnologias da Informação e Comunicação são potencialmente ricas nesse processo.

Nesta Coleção, há inúmeras possibilidades para se desenvolver uma atividade investigativa, por exemplo, na seção **Explorando a tecnologia** do Capítulo 3, “Introdução às funções e função afim”, do Volume 1, o estudante é conduzido a analisar, por meio de um simulador virtual, as relações entre os coeficientes da função afim e sua representação gráfica.

Metodologias ativas

Todos temos consciência de que a educação formal não acontece apenas no espaço físico da sala de aula, e, atualmente, considerando as possibilidades de uso das tecnologias que promovem uma integração de diferentes espaços e tempos, esse fato se tornou mais evidente. Dessa forma, é necessário fornecer aos estudantes possibilidades de aprendizagem que rompam com sua atitude passiva e ultrapassem o espaço físico da sala de aula.

Se queremos que os estudantes sejam proativos, precisamos adotar metodologias nas quais eles se envolvam em atividades cada vez mais complexas, em que tenham de tomar decisões e avaliar os resultados, com apoio de materiais relevantes. Se queremos que sejam criativos, eles precisam experimentar inúmeras novas possibilidades de mostrar sua iniciativa[12].

Segundo Morán[13], os estudantes devem ser mobilizados por meio de desafios e atividades bem planejadas e avaliadas por meio de acompanhamento do professor. Tais desafios contribuem para mobilizar competências intelectuais, emocionais, pessoais e de comunicação.

Ainda segundo o mesmo autor, as metodologias ativas são o ponto de partida para processos de reflexão, de integração cognitiva e de generalização. Desafios e atividades propostos devem ser do tipo investigativo, que exigem aprender pela descoberta por meio de pesquisas, análise de situações e identificação dos diferentes aspectos envolvidos, reconhecendo regularidades, fazendo escolhas e validando as conclusões.

As metodologias ativas mais aplicadas são a aprendizagem por projetos, a aprendizagem por resolução de problemas, a sala de aula invertida e a rotação por estações.

---

[12] MORÁN, José. Mudando a educação com metodologias ativas. *In*: SOUZA, Carlos Alberto de; MORALES, Ofelia Elisa T. (org.). **Convergências midiáticas, educação e cidadania**: aproximações jovens. Ponta Grossa: Proex: UEPG, 2015. (Coleção Mídias Contemporâneas, v. 2, p. 15-33). Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4941832/mod_resource/content/1/Artigo-Moran.pdf. Acesso em: 30 set. 2024.

[13] MORÁN, ref. 12.

Na **metodologia por projetos**, os estudantes são motivados a trabalhar de forma colaborativa em propostas interdisciplinares nas quais se abordam conceitos-chave dos objetos de conhecimento envolvidos. As aprendizagens são vinculadas a experiências e interesses deles, o que implica questionamento constante e reconstrução de certezas. Os conteúdos surgem de acordo com o desenvolvimento da pesquisa e são explorados de modo mais profundo do que se tivessem sido determinados previamente. O ponto de partida deve ser a definição de uma questão central, que irá determinar o que investigar. Em seguida, um conjunto de certezas provisórias e dúvidas temporárias estará presente ao longo da pesquisa, podendo também o professor prever a amplitude do projeto a partir dos conhecimentos prévios que os estudantes apresentam. A busca de informação na internet, em livros, revistas, entre outros meios, vai requerer a elaboração de registros importantes para o processo em desenvolvimento e para a socialização de ideias.

A **metodologia de resolução de problemas** propõe uma abordagem em que a construção do conhecimento se faz a partir de problemas geradores, propostos como ponto de partida para o ensino de conceitos e conteúdos matemáticos. O problema matemático é apresentado antes de se iniciar o conteúdo, e o estudante, ao resolvê-lo, construirá um conceito que ainda não conhece. Segundo Huanca e Onuchic, pesquisadores citados por Melo e Justulin[14], nessa metodologia "os professores, através e durante a resolução dos problemas, devem fazer conexões entre diferentes ramos da Matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos"[15]. Allevato e Onuchic indicam que as atividades podem ser organizadas em dez etapas:

(1) proposição do problema,
(2) leitura individual,
(3) leitura em conjunto,
(4) resolução do problema,
(5) observar e incentivar,
(6) registro das soluções na lousa,
(7) plenária,
(8) busca do consenso,
(9) formalização do conteúdo e
(10) proposição e resolução de novos problemas.[16]

Se surgirem dúvidas, o professor poderá auxiliar, porém as ações são exclusivamente dos estudantes; o docente age como observador e incentivador, estimulando o trabalho em grupo, incentivando a reflexão e a troca de ideias entre eles. Depois de os grupos concluírem suas resoluções, um representante é convidado a registrar na lousa sua resolução, esteja certa ou errada. Diante das respostas, os estudantes são convidados a refletir e a discutir os diferentes métodos utilizados na solução. Depois desse momento, o professor busca, com toda a turma, chegar a um consenso sobre o resultado obtido. Ao final das discussões, o professor formaliza o conteúdo matemático do qual emergiu o problema gerador, institucionaliza os conceitos, destaca diferentes formas operatórias e/ou demonstra propriedades específicas do assunto. É importante que sejam propostos novos problemas relacionados ao conteúdo que foi formalizado, para a familiarização com o novo conhecimento e reconhecimento de sua aplicação em diferentes contextos.

A **sala de aula invertida** se caracteriza por inverter o ciclo típico das aulas, no qual o professor apresenta o conteúdo e este é aplicado. Nessa metodologia, os estudantes devem ter contato antecipado com o conhecimento necessário antes da aula, para que, no ambiente da sala de aula possam interagir de forma ativa para esclarecer, trabalhar e aplicar o conhecimento com o qual tiveram contato. Embora muitas pesquisas apontem resultados positivos do emprego dessa metodologia, há também pesquisadores que apresentam críticas a ela. Segundo Valente[17], citado por Honório[18], alguns críticos destacam a dependência que esse modelo tem da tecnologia, o que pode criar um ambiente de aprendizagem desigual, tanto em termos do acesso à tecnologia quanto à motivação para os estudos independentes. Outra crítica é a da possibilidade de o estudante ir para a sala de aula sem se preparar, não tendo, com isso, condições de acompanhar as discussões ou

[14] MELO, Marcela Camila P. de; JUSTULIN, Andresa Maria. A resolução de problemas: uma metodologia ativa na construção do conceito de semelhança de triângulos. *In*: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 15., 2019, Londrina. **Anais** [...]. Londrina: Sociedade Brasileira de Educação Matemática – Regional Paraná, 2019. p. 1-14. Disponível em: http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/EPREM/XV_EPREM/paper/viewFile/1019/881. Acesso em: 29 set. 2024.
[15] HUANCA; ONUCHIC, 2011, *apud* MELO; JUSTULIN, ref. 14, p. 5.
[16] ALLEVATO; ONUCHIC, 2014, *apud* MELO; JUSTULIN, ref. 14, p. 5.
[17] VALENTE, 2014, *apud* HONÓRIO, ref. 18, p. 2.
[18] HONÓRIO, Hugo Luiz G. Sala de aula invertida: uma abordagem colaborativa na aprendizagem de matemática: estudos iniciais. *In*: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 20., 2016, Curitiba. **Anais** [...]. Curitiba: UFPR, 2016. p. 1-12. Disponível em: http://www.ebrapem2016.ufpr.br/wp-content/uploads/2016/04/gd6_Hugo_Hono%CC%81rio.pdf. Acesso em: 29 set. 2024.

prejudicando as interações possíveis. No entanto, essas críticas são rebatidas, com base justamente nessas interações entre os participantes do processo colaborativo, que tem como paradigma o predomínio da comunicação, da coordenação e da cooperação, o que faz com que as aprendizagens possam ocorrer. Nesse modelo, o professor disponibiliza materiais, normalmente em ambiente virtual (videoaula, tutorial, textos e questões) de acordo com seu planejamento de trabalho e, na sala de aula, dá *feedback* aos estudantes, de modo a esclarecer dúvidas e corrigir erros, pois, agora, seu papel é amparar, e não mais transmitir informações.

Na **metodologia de rotação por estações de aprendizagem**, os estudantes são divididos em pequenos grupos, que participarão de algumas estações de trabalho, sendo recomendado que, em pelo menos uma delas, a proposta envolva o uso de ambiente virtual. Essas estações podem estar alocadas em diferentes ambientes da escola. Os grupos executam um rodízio pelas estações, cada uma contendo uma atividade que se comunica com o objetivo central da aula. As estações precisam ser planejadas de forma que sejam independentes, sem exigência de algum pré-requisito ou exercício prévio, levando em consideração que cada grupo iniciará as atividades em uma estação diferente. Desse modo, o professor necessita ocupar-se de diferentes ações que cercam o planejamento das estações: definir quantas, quais serão e qual deve ser a quantidade de estudantes em cada estação; organizar o(s) espaço(s); delimitar o tempo necessário para cada estação e o tempo limite para a mudança de estação de trabalho; e pensar nos recursos didáticos necessários para cada estação. As propostas em cada estação podem variar, abrangendo tarefas de leitura, escrita, produção, discussão, realização de exercícios, atividades em plataformas virtuais, atividades envolvendo aplicativos e recursos tecnológicos, podendo, por exemplo, haver uma estação com o professor, uma na qual se realizem atividades individualizadas e uma com computadores para o desenvolvimento da atividade *on-line*.

Um exemplo de recurso desta Coleção para o uso de metodologias ativas é a atividade **12** do Capítulo 1, “Pesquisa Estatística”, do Volume 2, que pode ser desenvolvida por meio de uma metodologia por projetos. Nessa atividade, os estudantes organizam-se em grupos para realizar um estudo seguindo as etapas de uma pesquisa estatística.

Pensamento computacional

O desenvolvimento do pensamento computacional, iniciado no Ensino Fundamental, pode ser aprofundado nesta etapa da escolaridade. A BNCC aponta que esse tipo de pensamento

> [...] envolve as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos.[19]

Desse modo, ele pode ser entendido como um processo de formulação e resolução de problemas cujas soluções são representadas por meio de passos claros, de forma que uma pessoa ou uma máquina possam executá-los eficazmente. Esse processo envolve ações de pensamento que tratam da decomposição do problema em etapas, do reconhecimento de padrões e suas repetições, da abstração e da generalização que permitem a construção de algoritmos e, por fim, da avaliação da solução.

Para auxiliar os estudantes a desenvolver seu pensamento computacional, é necessário orientá-los para que empreguem estas quatro ações no momento da resolução de problemas:

- **ponto de partida**: decomposição do problema em partes, dividindo-o em problemas menores e mais fáceis de manejar. Tal ação, além de tornar todo o processo de solução mais explícito, facilita a detecção de erros pelo caminho.
- **reconhecimento de padrões**: essa ação é composta de dois momentos; no primeiro, devem-se buscar características e/ou propriedades que sejam comuns às várias partes do problema decomposto e que possam ser replicadas em cada uma delas; no segundo, deve ocorrer uma busca de soluções já utilizadas anteriormente que possam ser empregadas no problema atual, mesmo que com adaptações. Esse segundo momento é o passo necessário para a próxima ação.
- **abstração e generalização**: trata-se de identificar, em uma situação, os elementos que não são relevantes, reduzindo, assim, o foco de atenção aos detalhes substanciais para a resolução do problema. Nesse movimento, é possível detectar características/propriedades comuns a um conjunto de dados, identificar, por generalização, os procedimentos ou algoritmos que poderão ser adotados e, por fim, escrever o algoritmo. Reconhecer tipos de estruturas que podem ser reaplicadas faz os problemas se tornarem mais simples.

19 BRASIL, ref. 1, p. 474.

- **avaliação**: ela ocorre a todo momento, desde que se toma conhecimento do problema a resolver até se chegar ao algoritmo que o resolve. É necessário que, em cada uma das ações, aspectos como eficácia, consumo de recursos, rapidez, facilidade, abrangência da solução, entre outros, sejam analisados para que se tenha, ao final, um resultado mais robusto e confiável. Outra característica da avaliação é a de manter controle sobre as necessidades e propósitos das estratégias adotadas, para prevenir que pequenos erros de percurso se tornem grandes complicações ao final.

Muitos dos problemas discutidos em sala de aula podem ser analisados sob esse ponto de vista, sendo recomendado propor aos estudantes que representem as soluções por meio de fluxogramas que descrevam o processo de solução ou que realizem descrições orais e/ou escritas do passo a passo de suas resoluções.

Por outro lado, é também necessário que, no planejamento de sequências de trabalho e de ações pedagógicas a serem desenvolvidas em sala de aula, sejam consideradas as descobertas recentes, as novas tecnologias e a sua influência no conhecimento científico. Nesse contexto, destaca-se a importância do recurso a tecnologias digitais e aplicativos para o ensino e a aprendizagem matemática. Nesta Coleção, a seção **Explorando a tecnologia**, presente em todos os volumes, relaciona explorações matemáticas a *softwares* específicos, que atendem ao proposto na BNCC referente à cultura digital:

> fluência no uso da tecnologia digital para expressão de soluções e manifestações culturais de forma contextualizada e crítica.[20]

Os *softwares* explorados na Coleção são o **GeoGebra**, o **LibreOffice** e o **Scratch**, todos eles gratuitos e de fácil acesso *on-line*.

O GeoGebra é um *software* específico de Matemática voltado para o estudo de Geometria, Álgebra, Planilhas de Cálculo, Gráficos, Probabilidade e Estatística. Ele é conhecido como um *software* de matemática dinâmica por proporcionar movimentações e modificações do objeto matemático construído, permitindo, assim, o desenvolvimento de processos investigativos nas diferentes frentes estudadas, graças à interconexão que possui entre Geometria, Álgebra e planilha de cálculo. Em todos os capítulos em que se propõe sua utilização, há uma sugestão de uso com suporte para sua exploração pelos estudantes.

O LibreOffice também é apresentado nesta Coleção como um recurso gratuito para o uso de planilhas eletrônicas, edição de fórmulas matemáticas e gráficos, além de textos e apresentações. Nos capítulos em que seu uso é sugerido, há indicações de possibilidades de exploração pelos estudantes, cabendo ao professor mobilizar os processos investigativos por meio de questões que os incentivem a realizar ações de busca para a aprendizagem esperada.

O Scratch é um *software* voltado para a programação de animações ou jogos, utilizando imagens e sons disponíveis. Essa programação é feita a partir de blocos com os comandos básicos para a movimentação pretendida do personagem em cena. Seu uso em sala de aula é favorecido por ser extremamente intuitivo e visual, com manipulação simples de suas estruturas e da construção dos comandos. Esse recurso dá respaldo ao trabalho do desenvolvimento do pensamento computacional, pois favorece a capacidade analítica de antecipação da ação que se espera do personagem, montada por meio de blocos preestabelecidos, passíveis de serem encaixados uns aos outros de acordo com a lógica desejada. Sua aplicação também tem caráter investigativo, uma vez que os resultados podem ser imediatamente testados e observados na tela, de modo a permitir a análise do erro e sua correção a cada etapa construída.

Avaliação

Perrenoud[21] nos explica, em sua obra **Avaliação: da excelência à regulação das aprendizagens**, que ensinar, aprender e avaliar são ações que precisam ser coesas, equilibradas, para que professor e estudantes atinjam seus objetivos. Uma ação se liga à outra, como em um círculo.

Avaliar não é o final do processo, é um recurso a serviço do desenvolvimento do estudante e um instrumento importante para o professor, que atua como agente regulador da aprendizagem. Quando o professor planeja cada estratégia de avaliação, deve ter claros os objetivos a alcançar.

- Quais são as habilidades que se pretende verificar?
- Quais são os objetos do conhecimento que devem ser aplicados pelo estudante?
- Qual ou quais competências serão desenvolvidas?

É com base nesse planejamento que a estratégia deve ser criada, e não o contrário.

[20] BRASIL, ref. 1, p. 474.
[21] PERRENOUD, Phillipe. **Avaliação**: da excelência à regulação das aprendizagens: entre duas lógicas. Porto Alegre: Artmed, 1999.

É importante compartilhar com os estudantes os objetivos do instrumento de avaliação, para que eles sejam parte do processo e possam saber como e quando serão avaliados.

Cada resultado de avaliação deve ser analisado por ambas as partes, a fim de dar significado ao conceito ou nota atribuída. Com base na análise, definem-se as ações que serão necessárias – tanto do professor como do estudante. A implementação das ações faz com que se retome o círculo de ensinar, aprender e avaliar.

Diversificar as estratégias de avaliação é essencial para promover um aprendizado mais inclusivo e eficaz. Cada indivíduo tem habilidades e fragilidades distintas, e oferecer diferentes formas de avaliação permite que cada um seja reconhecido em suas áreas de maior competência, enquanto é incentivado a desenvolver habilidades nas áreas que acha mais desafiadoras. Assim, o professor cria um ambiente de aprendizado mais equilibrado e justo.

A área de Matemática no Ensino Médio é fértil para oferecer aos estudantes instrumentos diversificados de avaliação. Seu caráter de linguagem e instrumento para as demais ciências possibilita resolver problemas variados presentes em inúmeras áreas do conhecimento.

Concomitantemente, capacidades como formular e testar hipóteses, deduzir, generalizar e argumentar são desenvolvidas pelo pensamento matemático. A estrutura e as características da Matemática propiciam o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, tanto práticos quanto teóricos. Ao lidar com esses desafios, o estudante exercita e consolida as estruturas de pensamento necessárias para enfrentar situações diversas.

A seguir, são apresentados cinco modelos avaliativos, que podem ser combinados de acordo com os objetivos específicos do curso no Ensino Médio.

1. Avaliação diagnóstica
Utilizada, em geral, no início de um período (ano, semestre etc.) para verificar se o estudante tem os pré-requisitos necessários para adquirir novos conhecimentos. Por meio dela, pode-se conhecer o estágio de aprendizagem de cada indivíduo, salientando-se que seu objetivo não é classificar o estudante, mas detectar a presença ou a fragilidade de alguma habilidade. Os resultados podem levar a um replanejamento para o período ou a um trabalho específico com grupos de estudantes. Este tipo de avaliação pode ser precedido por uma sondagem oral com a turma, fazendo-se perguntas que facilitem resgatar conhecimentos, conceitos e definições, enfim, que sejam pré-requisitos importantes para o prosseguimento dos estudos. Os estudantes podem registrar tudo o que for lembrado, com mediação do professor. Em seguida, pode-se apresentar algumas questões para resolução individual que verifiquem as principais habilidades.
2. Avaliação formativa
Foca no processo de ensino-aprendizagem e é contínua, sendo composta de instrumentos diversificados aplicados ao longo de um período. O estudante recebe *feedbacks* de seu desempenho em cada atividade avaliativa e, com o professor, decide que ações podem ser tomadas para aprimorar seu desempenho. O professor avalia seu próprio trabalho com base nos resultados dos estudantes, verificando se é preciso rever conteúdos, reforçar habilidades etc. Os instrumentos avaliativos podem e devem contemplar atividades orais e escritas, atividades individuais, em duplas e em grupos, pesquisa, mapas conceituais, projetos, portfólios etc., proporcionando ao estudante oportunidades variadas e suficientes para demonstrar suas habilidades.
3. Avaliação somativa
É o modelo mais comumente utilizado, constando de provas dissertativas ou do tipo teste aplicadas ao final de um período. O objetivo é medir o grau de domínio do estudante a respeito de determinados saberes. Em geral, atribui-se uma nota ou conceito para o desempenho, sendo, portanto, uma avaliação classificatória. A presença deste modelo é importante no Ensino Médio, pois provavelmente os jovens terão contato com exames vestibulares e concursos na vida adulta. A ideia é que esse não seja o único tipo de avaliação proposto. Pode fazer parte da avaliação, sendo combinada com os outros modelos de avaliação.
4. Avaliação comparativa
Este modelo de avaliação compara o desempenho do estudante com o de outros estudantes na mesma fase de ensino. Pode ser utilizado de maneiras diferentes: • comparar o desempenho dos estudantes de uma turma com os de outra do mesmo ano, na mesma escola, aplicando-se a ambas as turmas a mesma avaliação. • comparar o desempenho dos estudantes de escolas distintas utilizando-se uma avaliação externa (Saeb, Saresp e Enem, por exemplo). A comparação dos resultados permite identificar se o desempenho está de acordo com as expectativas e, se necessário, implementar ações que minimizem discrepâncias.

5. Avaliação ipsativa
Neste modelo, o mesmo estudante é avaliado em momentos diferentes. Compara-se a situação do estudante no início da observação com a situação no final do período escolhido (bimestre, semestre, ano etc.). Não há comparação com outros colegas. O envolvimento do estudante é importante, pois a definição dos parâmetros que serão observados deve ser feita em parceria com ele. Ao longo do tempo, o estudante recebe *feedbacks* do professor, discute seus progressos ou dificuldades e repensa suas estratégias de estudo. A autoavaliação do estudante é um instrumento que complementa este modelo, incluindo aspectos de conteúdo e de postura de aprendizagem.

Outro aspecto da avaliação a ser tratado é o da autoavaliação, que contribui para incentivar o estudante a tomar consciência de seu próprio percurso de aprendizagem e se responsabilizar pelo seu empenho em avançar.

Nessa perspectiva, entende-se que a autoavaliação é um componente importante ao ser utilizada como instrumento da avaliação formativa, pois auxilia os estudantes a adquirir uma capacidade cada vez maior de analisar suas próprias responsabilidades, atitudes, comportamento, pontos fortes e fracos, sua condição de aprendizagem e suas necessidades para atingir os objetivos. Com o exercício constante da autoavaliação, os estudantes serão capazes de desenvolver sentimentos de responsabilidade pessoal e de apreciação da força dos empenhos individuais e de grupo. Além disso, aprendem a encarar prontamente as capacidades em várias empreitadas e a afinar suas potencialidades e contribuições, além de desenvolver a capacidade de análise contínua, na qual consideram o que já aprenderam, o que ainda não aprenderam, os aspectos facilitadores e os dificultadores do trabalho, conseguindo planejar as próprias ações. Além disso, a autoavaliação também incentiva os jovens a pensar sobre si mesmos e os conduz a uma modalidade de apreciação que se pratica durante a vida inteira, ajudando-os a avançar em sua autonomia.

A autoavaliação também deve ser orientada pelo professor, por meio de questões que incentivem os estudantes a refletir sobre suas ações durante a realização das atividades. No quadro a seguir, há exemplos de questões para esse fim.

AUTOAVALIAÇÃO
1. Entre os assuntos abordados, qual você considerou o mais interessante? E o menos interessante? Explique suas escolhas.
2. Comparando o trabalho de seu grupo com o dos outros grupos, como você avalia a produção de vocês?
3. Considerando a avaliação feita anteriormente, você acha que a produção do seu grupo poderia ter sido melhor? Em qual(is) aspecto(s)?
4. Como você avalia a participação de cada um dos integrantes de seu grupo na realização do trabalho? Como você se classifica dentro do seu grupo de trabalho: colaborativo(a), proativo(a), coordenador(a), inovador(a), organizador(a)?
5. As discordâncias entre você e seus colegas de grupo ocorreram de modo a chegarem a um consenso, com respeito pelas ideias do outro e com a construção de argumentação consistente, proposta com cordialidade? Dê um exemplo.
6. Você e seu grupo criaram estratégias para evitar distrações e manter a concentração, o esforço e a motivação durante a realização das tarefas? Dê um exemplo.
7. Durante as apresentações dos vários grupos, você se manteve envolvido e participante das discussões? O que você aprendeu que não sabia?
8. Quais conhecimentos matemáticos você adquiriu com a elaboração desse trabalho?
9. Quais conhecimentos de outras áreas você adquiriu com a elaboração desse trabalho?
10. Em que medida a seção **Para refletir** contribuiu para a análise de sua aprendizagem em cada um dos capítulos que compuseram os temas desse período?

A seguir são apresentados momentos do Livro do Estudante que podem ser usados para explorar alguns dos modelos de avaliação apresentados.

As **Aberturas** de capítulo contêm questões que possibilitam uma avaliação diagnóstica. Geralmente, elas mobilizam competências e habilidades relacionadas ao Ensino Fundamental – Anos Finais (EFAF), permitindo ao professor obter informações que contribuam para o planejamento das aulas.

As seções **Atividades**, distribuídas ao longo de cada capítulo, têm como finalidade constituir um instrumento de avaliação formativa (contínua), além de gerar novas oportunidades de aprendizagem, contribuindo para a assimilação e a compreensão dos conceitos matemáticos estudados até o momento. Nesse sentido, recomenda-se explicar aos estudantes que as atividades são um momento de avaliação que ocorre durante o ensino e aprendizagem da Matemática, pois, ao fazer as atividades, os estudantes poderão identificar suas aptidões, preferências e dificuldades, informações importantes para que eles reflitam e autorregulem seu próprio processo de aprendizagem. Ao mesmo tempo, as resoluções dessas atividades podem fornecer ao professor dados significativos para compreender o desenvolvimento de cada estudante. Por isso, as orientações específicas de cada capítulo apresentam, como sugestão, atividades cuja análise das resoluções pode contribuir para avaliar a evolução de cada estudante e para orientar seus estudos.

A seção **Atividades complementares**, apresentadas no final de cada capítulo, tem caráter de avaliação formativa relacionada ao preparo dos estudantes para os exames de larga escala que ocorrem ao término do Ensino Médio, em específico, o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) e os vestibulares, que são porta de entrada para cursos universitários. Uma possibilidade é solicitar a formação de duplas para a resolução dessas atividades. Quando todos finalizarem, por meio de um sorteio, estabelecer uma ordem para cada dupla explicar para a turma a resolução de uma dessas atividades. Com isso, além da correção, é possível sanar as dúvidas e verificar o desempenho dos estudantes. Além disso, as apresentações orais em Matemática desempenham papel relevante em relação aos objetivos de ensino. Ao expor seu raciocínio perante os colegas, o estudante trabalha sua capacidade de comunicação e argumentação, o que possibilita ao professor avaliar o progresso dos estudantes em relação ao domínio das aprendizagens envolvidas.

A seção final do capítulo, **Para refletir**, possibilita aos estudantes a oportunidade de realizar uma autoavaliação em relação ao seu processo de aprendizagem. Essa etapa contribui para o desenvolvimento da autopercepção e da autonomia, pois compreender seus avanços e investigar suas dificuldades é uma maneira de se perceber no processo de aprendizagem e incentivar um agir de forma responsável e comprometida. Além disso, a reflexão permite identificar a necessidade de retomar e/ou aprofundar alguns dos tópicos estudados. Um modo de utilizar essa seção como instrumento de avaliação é analisar o progresso dos estudantes de maneira qualitativa. Por exemplo, pode-se solicitar a entrega das atividades propostas nessa seção e classificar o trabalho realizado nos seguintes níveis:

- Não demonstra compreensão das perguntas, apresentando apenas respostas incorretas e incompletas;
- Demonstra alguma compreensão das perguntas, mas muitas respostas estão incompletas ou incorretas;
- Demonstra compreensão das perguntas, mas algumas respostas estão incompletas ou incorretas.
- Demonstra compreensão das perguntas, com boa organização e apresentação, estando a maioria das respostas corretas e completas.

Desse modo, é possível avaliar a pertinência das respostas em relação às situações propostas, a relevância e a correção dos aspectos matemáticos envolvidos, a qualidade da argumentação, bem como a clareza e a organização do raciocínio utilizado.

Bibliografia consultada e comentada

- BARUFI, Maria Cristina B.; LAURO, Maira M. **Funções elementares, equações e inequações**: uma abordagem utilizando microcomputador. 1. ed. São Paulo: CAEM-IME/USP, 2001. v. 1.

  O livro aborda aspectos do ensino de funções afim e quadrática a partir do uso de *softwares*.
- BOYER, Carl B. **História da matemática**. 4. ed. Tradução: Elza Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 2002.

  O livro aborda fatos e estudos da história da Matemática.
- BRASIL. **Lei nº 14.945, de 31 de julho de 2024**. Altera a Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996 (Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional), a fim de definir diretrizes para o ensino médio, e as Leis nºs 14.818, de 16 de janeiro de 2024, 12.711, de 29 de agosto de 2012, 11.096, de 13 de janeiro de 2005, e 14.640, de 31 de julho de 2023. Brasília, DF: Presidência da República, 2024. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2023-2026/2024/lei/l14945.htm. Acesso em: 24 out. 2024.

Lei que alterou a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional e estabeleceu uma mudança na estrutura do Ensino Médio, definindo a carga horária mínima dos estudantes na escola de 1 000 horas anuais e definindo uma nova organização curricular, mais flexível, que contemple a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 11 set. 2024.

  Documento oficial contendo um conjunto de orientações que norteia a (re)elaboração dos currículos de referência das escolas das redes pública e privada de ensino de todo o Brasil. Traz os conhecimentos essenciais, as competências, as habilidades e as aprendizagens pretendidas para crianças e jovens em cada etapa da Educação Básica.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Currículos e Educação Integral. **Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica**. Brasília, DF: MEC: SEB: Dicei, 2013. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/media/seb/pdf/d_c_n_educacao_basica_nova.pdf. Acesso em: 25 set. 2024.

  As Diretrizes Curriculares Nacionais (DCNs) são normas obrigatórias para a Educação Básica e orientaram a elaboração da BNCC. Elas são discutidas, concebidas e fixadas pelo Conselho Nacional de Educação (CNE).
- BRASIL. Ministério da Saúde. Secretaria de Atenção à Saúde. Departamento de Atenção Básica. **Guia alimentar para a população brasileira**. 2. ed. Brasília, DF: MS, 2014. Disponível em: https://bvsms.saude.gov.br/bvs/publicacoes/guia_alimentar_populacao_brasileira_2ed.pdf. Acesso em: 29 set. 2024.

  Apresenta aspectos sobre alimentos saudáveis e contribui para a adequação de uma rotina de alimentação saudável.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Temas Contemporâneos Transversais na BNCC**: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília, DF: MEC: SEB, 2019. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/contextualizacao_temas_contemporaneos.pdf. Acesso em: 11 set. 2024.

  Documento explicativo sobre os Temas Contemporâneos Transversais (TCTs) a serem abordados na Educação Básica.
- CARRANO, Paulo; DAYRELL, Juarez. Juventude e Ensino Médio: quem é este aluno que chega à escola. *In*: DAYRELL, Juarez; CARRANO, Paulo; MAIA, Carla L. **Juventude e Ensino Médio**: sujeitos e currículos em diálogo. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2014. p. 101-133. Disponível em: https://educacaointegral.org.br/wp-content/uploads/2015/01/livro-completo_juventude-e-ensino-medio_2014.pdf. Acesso em: 29 set. 2024.

  Como o próprio título indica, trata-se de um texto que procura “descrever” o jovem atual.
- CARVALHO, João P. de. Um problema de Fibonacci. **Revista do Professor de Matemática (RPM)**, São Paulo, n. 17, [201-]. Disponível em: http://www.rpm.org.br/cdrpm/17/2.htm. Acesso em: 29 set. 2024.

  Apresenta a história de Fibonacci e uma explicação sobre como ele chegou à sequência conhecida como sequência de Fibonacci.
- COELHO, José Renato P. **O GeoGebra no ensino das funções exponenciais**. 2016. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Laboratório de Ciências Matemáticas, Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campos dos Goytacazes, 2016. Disponível em: https://uenf.br/posgraduacao/matematica/wp-content/uploads/sites/14/2017/09/30052016Jos%C3%A9-Renato-Paveis-Coelho.pdf. Acesso em: 29 set. 2024.

  O material explora a utilização do *software* **GeoGebra** e de planilhas no estudo das funções exponenciais.
- CORREIA, Rosangela P. **Dos erros aos acertos**: o processo de avaliação na aprendizagem: perspectiva compensatória ou emancipatória? Porto Alegre: Dialética, 2023.

  A obra fala sobre como a avaliação pode ajudar o estudante a corrigir os erros ou a se libertar deles.
- DAMIANI, Magda F. Entendendo o trabalho colaborativo em educação e revelando seus benefícios. **Educar**, Curitiba, n. 31, p. 213-230, 2008. Disponível em: https://www.scielo.br/pdf/er/n31/n31a13.pdf. Acesso em: 29 set. 2024.

  Reflexões sobre o trabalho colaborativo e seu uso em sala de aula.
- EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

  O livro aborda vários fatos e estudos da Matemática cronologicamente.
- HIPPOLYTO, Luzia de Q. A avaliação educacional da matemática no ensino médio: avanços ou retrocessos? *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2016, São Paulo. **Anais** [...]. São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2016. Disponível em: https://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/8479_4409_ID.pdf. Acesso em: 29 set. 2024.

  O texto revisa como a avaliação de matemática mudou no Brasil ao longo dos anos e a compara com práticas internacionais, além de discutir os desafios que os educadores enfrentam.
- HOFFMANN, Jussara. **Avaliação mediadora**: uma prática em construção da pré-escola à universidade. 8. ed. Porto Alegre: Mediação, 1996.

  O texto aborda a avaliação como algo contínuo e humanizado, por meio da qual o professor media o aprendizado, auxiliando o estudante a se desenvolver.

- HONÓRIO, Hugo Luiz G. Sala de aula invertida: uma abordagem colaborativa na aprendizagem de matemática: estudos iniciais. *In*: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 20., 2016. Curitiba. **Anais** [...]. Curitiba: UFPR, 2016. Disponível em: http://www.ebrapem2016.ufpr.br/wp-content/uploads/2016/04/gd6_Hugo_Hono%CC%81rio.pdf. Acesso em: 29 set. 2024.

  Reflexões sobre a metodologia ativa de sala de aula invertida com base em sua aplicação prática.
- LIMA, Elon L. *et al*. **A matemática do Ensino Médio**. Rio de Janeiro: SBM, 2016. v. 1.

  Livro que aborda os conceitos de conjuntos, números e funções.
- LUCKESI, Cipriano. **Avaliação da aprendizagem escolar**: estudos e proposições. São Paulo: Cortez, 2018.

  A obra defende uma avaliação mais focada no aprendizado do que em notas, ajudando o estudante a crescer sem se prender a erros.
- LUCKESI, Cipriano. Tipificação da avaliação em educação: uma questão epistemológica. *In*: LUCKESI, Cipriano. **Luckesi**: avaliação em educação. Salvador, 6 jul. 2016. Disponível em: https://luckesi.blogspot.com/2016/07/109-tipificacao-da-avaliacao-em.html. Acesso em: 26 set. 2024.

  Nesse artigo, há reflexões sobre as adjetivações aplicadas ao ato de avaliar, discutindo como são colocadas de acordo com os momentos de sua execução.
- MELO, Marcela Camila P. de; JUSTULIN, Andresa Maria. A resolução de problemas: uma metodologia ativa na construção do conceito de semelhança de triângulos. *In*: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 15., 2019, Londrina. **Anais** [...]. Londrina: Sociedade Brasileira de Educação Matemática – Regional Paraná, 2019. Disponível em: http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/EPREM/XV_EPREM/paper/viewFile/1019/881. Acesso em: 29 set. 2024.

  Apresentação teórica e prática da metodologia ativa de resolução de problemas.
- MONTEIRO, Martha S.; CERRI, Cristina. **História dos números complexos**. São Paulo: Centro de Aperfeiçoamento de Ensino de Matemática: Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 2001. Disponível em: https: //www.ime.usp.br/~martha/caem/complexos.pdf. Acesso em: 29 set. 2024.

  Texto que apresenta informações sobre o desenvolvimento dos números complexos ao longo da história.
- MORÁN, José. Mudando a educação com metodologias ativas. *In*: SOUZA, Carlos Alberto de; MORALES, Ofelia Elisa T. (org.). **Convergências midiáticas, educação e cidadania**: aproximações jovens. Ponta Grossa: Proex: UEPG, 2015. (Coleção Mídias Contemporâneas, v. 2). Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4941832/mod_resource/content/1/Artigo-Moran.pdf. Acesso em: 30 set. 2024.

  Discussões do pesquisador brasileiro sobre a importância do trabalho com metodologias ativas no ensino atual.
- PERRENOUD, Phillipe. **Avaliação**: da excelência à regulação das aprendizagens: entre duas lógicas. Porto Alegre: Artmed, 1999.

  A obra explora a avaliação como ferramenta para acompanhar o aprendizado, comparando a busca pela excelência ao processo de monitoramento constante.
- PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

  Nessa obra, são apresentadas algumas vantagens de se trabalhar com investigações matemáticas em sala de aula, destacando-se o estabelecimento de conjecturas, reflexões e formalização do conhecimento matemático pelos estudantes.
- SANTOS, Emily. Não é brincadeira, é *bullying*: entenda comportamentos que configuram crime e saiba como agir. **G1**, São Paulo, 7 abr. 2024. Disponível em: https://g1.globo.com/educacao/noticia/2024/04/07/nao-e-brincadeira-e-bullying-entenda-comportamentos-que-configuram-crime-e-saiba-como-agir.ghtml. Acesso em: 24 out. 2024.

  A reportagem apresenta informações estatísticas sobre *bullying*, quais são os principais sinais e como agir diante dessa situação em ambiente escolar.
- SOARES, Evanildo C. **Uma investigação histórica sobre os logaritmos com sugestões didáticas para a sala de aula**. 2011. Dissertação (Mestrado em Ciências Naturais e Matemática) – Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2011. Disponível em: https://repositorio.ufrn.br/bitstream/123456789/16070/1/EvanildoCS_DISSERT.pdf. Acesso em: 29 set. 2024.

  A dissertação explora o trabalho com logaritmos em situações de sala de aula, considerando uma perspectiva histórica.
- TARDIF, Maurice. **Saberes docentes e formação profissional**. Petrópolis: Vozes, 2002.

  Nessa obra, o autor discute e qualifica os saberes que servem de base ao ofício de professor.
- ORGANIZAÇÃO DAS NAÇÕES UNIDAS PARA A EDUCAÇÃO, A CIÊNCIA E A CULTURA. **Declaração Mundial sobre Educação para Todos**: satisfação das necessidades básicas de aprendizagem, Jomtien, 1990. Brasília, DF: Unesco, 1990. Disponível em: https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000086291_por. Acesso em: 29 set. 2024.

  Documento importante para conhecimento do professor e que foi um dos suportes para a elaboração da BNCC.
- WAGNER, Eduardo. Por que as antenas são parabólicas? **Revista do Professor de Matemática (RPM)**, São Paulo, n. 33, [201-]. Disponível em: http://rpm.org.br/cdrpm/33/3.htm. Acesso em: 29 set. 2024.

  Artigo que apresenta uma reflexão sobre a forma parabólica das antenas.

PARTE ESPECÍFICA

Comentários e sugestões de abordagem para este Volume

O objetivo deste material é oferecer subsídios para a atividade docente, que assume um papel relevante dentro do complexo processo de ensino-aprendizagem, de forma articulada com as propostas apresentadas no Livro do estudante.

Nas **Orientações para o professor**, há uma descrição explicando de que forma estão sendo contempladas neste Volume as habilidades, as competências específicas e as competências gerais da BNCC. Em seguida, são apresentadas estratégias para auxiliar o processo de ensino-aprendizagem, de forma a contribuir para o desenvolvimento dessas competências e habilidades. Além disso, há sugestões de atividades complementares, instrumentos avaliativos e referências de outros materiais atualizados que podem ser utilizados. Vale ressaltar que esta obra não pretende ser a única referência de consulta nem apresentar soluções completas para os desafios enfrentados pelos professores, mas sim constituir uma alternativa para auxiliar a atividade docente e o processo de ensino-aprendizagem, contribuindo para a otimização do planejamento de aulas, sem deixar de respeitar a autonomia do docente que age de acordo com os desafios reais da comunidade escolar e da turma em que atua lecionando.

Este Volume é organizado em 7 capítulos. O quadro a seguir apresenta uma sugestão de cronograma, considerando 200 dias letivos, consequentemente, 40 semanas de aula. A proposta contempla 34 semanas, considerando 6 semanas para ajustes, avaliações e outras demandas pedagógicas.

Para planejamentos bimestrais, recomenda-se considerar 9 semanas de aula para cada bimestre; para planejamentos trimestrais, 12 semanas; e, para planejamentos semestrais, 17 semanas. No entanto, é importante que o professor avalie sua realidade e realize as adequações necessárias conforme o calendário escolar, de modo a privilegiar o desenvolvimento dos estudantes de acordo com suas necessidades e com as escolhas feitas pela comunidade escolar.

Semana	Capítulo	Tópicos
1ª	1	Porcentagem, Aumentos e descontos e Lucro e prejuízo
2ª	1	Juros, Juro simples, Juro composto e Juros e funções
3ª	1	Explorando a tecnologia, Valor presente e valor futuro, Orçamento familiar e Fórum
4ª	1	Sistemas de amortização, História da Matemática, Conexões com..., Atividades complementares e Para refletir
5ª	2	Poliedros, Poliedro regular e Poliedros de Platão
6ª	2	Prismas, Área da superfície de um prisma e Secção transversal de um prisma
7ª	2	Volume de um paralelepípedo reto-retângulo, Volume de um cubo, Princípio de Cavalieri, Volume de um prisma e Fórum
8ª	2	Pirâmides, Área da superfície de uma pirâmide, Secção transversal de uma pirâmide e Volume de uma pirâmide
9ª	2	Conexões com..., Explorando a tecnologia, Atividades complementares e Para refletir
10ª	3	Cilindro, Secções de um cilindro, Área da superfície de um cilindro reto e Volume de um cilindro
11ª	3	Cone, Secções de um cone, Área da superfície de um cone reto, Volume de um cone e Fórum
12ª	3	Esfera, Secção de uma esfera, Volume de uma esfera, Área de uma superfície esférica, Cunha esférica e Fuso esférico
13ª	3	Projeções cartográficas, Conexões com... e Explorando a tecnologia
14ª	3	História da Matemática, Atividades complementares e Para refletir
15ª	4	Princípio multiplicativo e Fatorial
16ª	4	Fórum, Permutação simples e Permutação com repetição
17ª	4	Arranjo simples e Combinações simples

Semana	Capítulo	Tópicos
18ª	4	Combinações simples e Conexões com...
19ª	4	Explorando a tecnologia, Atividades complementares e Para refletir
20ª	5	Espaço amostral e evento, Eventos elementares equiprováveis e Tipos de eventos
21ª	5	Probabilidade e Propriedades
22ª	5	Fórum, História da Matemática e Probabilidade da união de dois eventos
23ª	5	Probabilidade condicional e Eventos sucessivos
24ª	5	Eventos independentes e Probabilidades em espaços amostrais não discretos
25ª	5	Conexões com..., Explorando a tecnologia, Atividades complementares e Para refletir
26ª	6	Matrizes, Matriz quadrada e Igualdade de matrizes
27ª	6	Adição de matrizes, Multiplicação de um número real por uma matriz e Multiplicação de matrizes
28ª	6	Conexões com..., Sistemas lineares, Fórum e Classificação de sistemas lineares
29ª	6	Sistemas lineares escalonados
30ª	6	Explorando a tecnologia, Atividades complementares e Para refletir
31ª	7	Transformações isométricas e Fórum
32ª	7	Composição de transformações e Transformações homotéticas
33ª	7	Transformações geométricas e matrizes e Conexões com...
34ª	7	Explorando a tecnologia, Atividades complementares e Para refletir

Para todos os blocos semanais, estão disponíveis atividades resolvidas e atividades propostas. Recomenda-se a seleção de parte das atividades para ser desenvolvida em sala de aula (individualmente, em duplas ou grupos maiores) e outra parte para ser realizada fora do horário de aula.

Professor, caso tenha estudantes PcD (Pessoa com Deficiência), recomenda-se a leitura dos textos a seguir.

- SILVEIRA, Ingrid Machado. Desenvolvimento de recurso tátil no ensino da matemática financeira para alunos com deficiência visual. **Revista Educação Pública**, v. 21, n. 43, 30 nov. 2021. Disponível em: https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/21/43/desenvolvimento-de-recurso-tatil-no-ensino-da-matematica-financeira-para-alunos-com-deficiencia-visual. Acesso em: 4 nov. 2024.
- SANTOS, Cristina Paludo; LOOSE, Luis Carlos. Estratégias tecnológicas de interação e mediação para o ensino de geometria espacial: um estudo de caso com alunos surdos. *In*: WORKSHOP DE INFORMÁTICA NA ESCOLA (WIE), 23., 2017, Recife. **Anais** [...]. Porto Alegre: Sociedade Brasileira de Computação, 2017. p. 11-20. Disponível em: https://doi.org/10.5753/cbie.wie.2017.11. Acesso em: 4 nov. 2024.
- LEAL, Simone de Almeida Delphim; ABAD, Alberto (org.). **A formação de professores em educação matemática na perspectiva da educação especial e inclusiva**. Macapá: Unifap, 2019. Disponível em: https://www2.unifap.br/editora/files/2020/02/formacao-de-professores-em-educacao-matematica.pdf. Acesso em: 4 nov. 2024.

Capítulo 1 Matemática financeira

Orientações

O Capítulo explora a porcentagem e os conceitos de aumentos e descontos percentuais sucessivos, juros simples e juros compostos, alguns índices de inflação, sistemas de amortização de financiamento e empréstimo e orçamento familiar, favorecendo a reflexão e a análise crítica de questões ligadas à construção de nossa sociedade, colaborando, assim, para o desenvolvimento da competência específica 1 da área de Matemática e suas Tecnologias, em particular, a habilidade EM13MAT104. O uso de tecnologias digitais para fazer simulações envolvendo problemas do dia a dia relacionados a esse contexto favorece a compreensão e o trabalho com esses conceitos, desenvolvendo as competências específicas 2 e 3 da área de Matemática e suas Tecnologias, em particular, as habilidades EM13MAT203 e EM13MAT303.

O texto da **Abertura** do Capítulo e as questões propostas permitem trabalhar os Temas Contemporâneos

Transversais Educação para o Consumo e Educação Financeira. Também colaboram para o desenvolvimento da competência geral 6, pois os estudantes podem compartilhar e valorizar a diversidade dos saberes e vivências culturais, explorando aspectos de autonomia e de responsabilidade no que se refere ao tema.

Na atividade **1**, espera-se que os estudantes digam que as promoções divulgam descontos percentuais. Pode-se incentivar a troca de situações vivenciadas por eles relacionadas à venda e à compra de produtos e serviços em que as propagandas anunciam descontos.

A atividade **2** leva os estudantes a explicar como escolhem a melhor forma de pagamento. Uma resposta possível é comparar os valores correspondentes nas condições dadas com base no tempo e na quantidade de vezes em que o bem é parcelado. Há situações em que os valores não são diferentes, considerando as duas opções de pagamento indicadas.

Aproveitar a atividade **3** para promover uma discussão acerca dos cartões oferecidos por lojas que visam fidelizar o cliente. Muitas lojas oferecem descontos e baixos juros para quem paga com esse tipo de cartão, o que costuma ser viável para quem tem o hábito de comprar no mesmo estabelecimento com frequência ou realizar compras de grandes valores. Em alguns casos, a loja cobra uma taxa mensal ou anual pelo uso do cartão, por isso é importante analisar se há realmente vantagem em adquirir esse serviço. Cada loja estipula suas regras de uso do cartão, conforme estabelece sua instituição credora.

Na atividade **4**, espera-se que os estudantes respondam 28%.

A finalidade do tópico **Porcentagem** é revisar e aprofundar esse assunto, que é de grande importância para o exercício da cidadania.

No estudo do tópico **Aumentos e descontos sucessivos**, pode-se explicar que, após aumentos (ou descontos) percentuais sucessivos, o aumento médio percentual é calculado pela média geométrica. Para isso, pode-se apresentar o exemplo a seguir.

Em 2024, um produto custava R$ 100,00. Aumentou 100% em 2025, tendo seu preço elevado para R$ 200,00, e aumentou 28% em 2026, elevando seu preço para R$ 256,00. O aumento percentual médio anual que ocorreu nesse período é dado pela média geométrica M_G a seguir.

$$M_G = \sqrt{(2 \cdot 1{,}28)} = \sqrt{2{,}56} = 1{,}60$$

Portanto, o aumento médio anual foi 60%, pois:

$$100 \cdot 1{,}6 \cdot 1{,}6 = 256.$$

No estudo do tópico **Lucro e prejuízo**, pode-se verificar se os estudantes compreendem o significado de lucro propondo o problema a seguir.

João comprou um relógio por R$ 50,00 e o vendeu para seu amigo por R$ 60,00. Meses depois, João comprou de seu amigo o mesmo relógio por R$70,00 e o revendeu a outra pessoa por R$ 80,00. Ao final dessas duas transações, João teve lucro ou prejuízo? Explique.

Espera-se que os estudantes respondam que João teve um lucro total de R$ 20,00, sendo R$ 10,00 de lucro na primeira transação e mais R$ 10,00 de lucro na segunda.

Ao desenvolver o tópico **Juro simples**, propor aos estudantes que pesquisem, em boletos de compras, de condomínio, entre outros documentos financeiros, o percentual correspondente à multa e ao juro de mora, para que percebam que o juro simples, em geral, é aplicado em dívidas de curto prazo, de no máximo 30 dias.

No primeiro boxe **Pense e responda** do tópico **Juro composto**, explicar aos estudantes que, em cálculos envolvendo quantias monetárias, usamos apenas duas casas decimais após a vírgula, que indicam os centavos de real. Por isso, para obter o resultado, realiza-se o arredondamento para a ordem dos centésimos (segunda ordem da parte decimal do número) e, desse modo, a quantia correspondente é expressa em centavo. Se necessário, recordar as regras de arredondamento: se o algarismo da ordem dos milésimos (terceira ordem da parte decimal) for menor do que 5, o algarismo da ordem dos centésimos (segunda ordem da parte decimal) não se altera; já se o algarismo da ordem dos milésimos (terceira ordem da parte decimal) for igual ou maior do que 5, o algarismo da ordem dos centésimos (segunda ordem da parte decimal) é aumentado em um centésimo. Orientar os estudantes a proceder dessa maneira ao trabalhar com valores monetários nas atividades propostas.

O segundo boxe **Pense e responda** desse mesmo tópico leva os estudantes a perceber a diferença entre a aplicação a juro composto e a aplicação a juro simples, considerando uma mesma taxa e um mesmo período.

No tópico **Juros e funções**, os estudantes comparam representações gráficas de funções associadas a juro simples e a juro composto. Com isso, eles desenvolvem a competência específica 3 da área de Matemática e suas Tecnologias, com destaque para a habilidade EM13MAT303.

Nesse tópico, recomenda-se enfatizar a associação da função afim ao juro simples e da função exponencial ao juro composto, considerando como domínio os números naturais não nulos. Comentar que a representação gráfica ajuda a comparar visualmente duas aplicações, seja em uma mesma modalidade, seja em modalidades diferentes.

A seção **Explorando a tecnologia** trabalha o uso de planilhas eletrônicas para auxiliar o cálculo e a análise do juro simples e do juro composto. Dessa forma, colabora-se para o desenvolvimento da competência geral 5, pois os estudantes utilizam tecnologias digitais de maneira crítica, reflexiva e ética para se comunicar e resolver problemas. Na seção, estão também envolvidas as competências específicas 1, 2 e 3 da área de Matemática e suas Tecnologias, pois os estudantes são levados a utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em variados contextos, seja em questões socioeconômicas, seja tecnológicas, além de aplicar esses conceitos para resolver problemas e avaliar a plausibilidade dos resultados. Os estudantes exploram, ainda, as habilidades EM13MAT203 e EM13MAT303, ao aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações que envolvem a utilização de aplicativos e a criação de planilhas para simular cálculos de juro simples e juro composto, comparando os montantes obtidos em cada um dos regimes por meio de representações gráficas.

Na atividade **1**, os estudantes comparam o montante obtido nas modalidades de juro simples e de juro composto. Espera-se que eles calculem a diferença obtida em dezembro, bastando, para isso, realizar a subtração: $14\,257{,}61 - 13\,600{,}00 = 657{,}61$, obtendo, então, R$ 657,61.

Na atividade **2**, espera-se que eles percebam que, no primeiro mês, o montante obtido é o mesmo nas duas modalidades de juro, pois, ao considerar $t = 1$ nas duas fórmulas, obtém-se o mesmo resultado, conforme mostrado a seguir.

Juro simples: $M = C \cdot (1 + i \cdot t) \Rightarrow M = 10\,000 \cdot (1 + 0{,}03 \cdot 1) = 10\,300$

Juro composto: $M = C \cdot (1 + i)^t \Rightarrow M = 10\,000 \cdot (1 + 0{,}03)^1 = 10\,300$

Na atividade **3**, os estudantes precisam construir uma planilha considerando um capital de R$ 20.000,00 aplicado a uma taxa de 2% a.m. durante um ano. A seguir, reproduzimos uma possível resposta.

	A	B	C	D
1	Mês	Tempo (*t*)	Montante (*M*) a juro simples	Montante (*M*) a juro composto
2	Janeiro	1	R$ 20.400,00	R$ 20.400,00
3	Fevereiro	2	R$ 20.800,00	R$ 20.808,00
4	Março	3	R$ 21.200,00	R$ 21.224,16
5	Abril	4	R$ 21.600,00	R$ 21.648,64
6	Maio	5	R$ 22.000,00	R$ 22.081,62
7	Junho	6	R$ 22.400,00	R$ 22.523,25
8	Julho	7	R$ 22.800,00	R$ 22.973,71
9	Agosto	8	R$ 23.200,00	R$ 23.433,19
10	Setembro	9	R$ 23.600,00	R$ 23.901,85
11	Outubro	10	R$ 24.000,00	R$ 24.379,89
12	Novembro	11	R$ 24.400,00	R$ 24.867,49
13	Dezembro	12	R$ 24.800,00	R$ 25.364,84

REPRODUÇÃO/LIBREOFFICE

Na atividade resolvida **14**, no tópico **Valor presente e valor futuro**, explicar aos estudantes que o valor determinado na opção 2, de um total de R$ 2.908,68, é a quantia necessária, rendendo 2% ao mês, para pagar as 5 parcelas de R$ 605,00, como ilustra o quadro.

Período	Quantia rendendo 2% ao mês	Prestação	Saldo após pagamento da prestação
0	R$ 2.908,68	R$ 605,00	R$ 2.303,68
1	R$ 2.303,68 · 1,02 = R$ 2.349,75	R$ 605,00	R$ 1.744,75
2	R$ 1.744,75 · 1,02 = R$ 1.779,65	R$ 605,00	R$ 1.174,65
3	R$ 1.174,65 · 1,02 = R$ 1.198,14	R$ 605,00	R$ 593,14
4	R$ 593,14 · 1,02 = R$ 605,00	R$ 605,00	R$ 0,00

O tópico **Orçamento familiar** colabora para o desenvolvimento das competências específicas 1 e 2 da área de Matemática e suas Tecnologias, com ênfase nas habilidades EM13MAT104 e EM13MAT203, respectivamente, pois os estudantes interpretam taxas e índices de natureza socioeconômica, investigando os processos de cálculo desses números, e aplicam conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a criação de planilhas para controle de orçamento familiar. Com isso, exploram-se os Temas Contemporâneos Transversais Educação Financeira, Educação para o Consumo e Vida Familiar e Social.

Uma possibilidade de atividade complementar para esse tópico é propor aos estudantes que elaborem uma planilha com o orçamento da família deles, incluindo todos os gastos. Para isso, sugere-se a leitura do conteúdo disponível em: https://www.bcb.gov.br/cidadaniafinanceira/cidadania_como_orcamento (acesso em: 24 out. 2024), do Banco Central do Brasil, que explica, em texto e vídeo, como montar um orçamento familiar.

O trabalho com o consumo sustentável, no boxe **Fórum**, aborda o Tema Contemporâneo Transversal Educação para o Consumo. Com ele, podem ser desenvolvidas as competências gerais 4 e 7 da BNCC, pois os estudantes utilizam diferentes linguagens para se expressar e partilhar informações, experiências e ideias, argumentando com base em fatos, dados e informações confiáveis para defender pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos e a consciência socioambiental. Também permite desenvolver a competência específica 2 da área de Matemática e suas Tecnologias, ao propor a participação em ações que investigam o mundo contemporâneo para tomar decisões voltadas à sustentabilidade, e as competências específicas 2 e 3 da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, pois os estudantes precisam se perceber como parte da dinâmica da vida e do planeta e elaborar argumentos com base em decisões éticas e responsáveis para propor soluções de demandas locais, comunicando-as por diferentes meios. Esse trabalho pode ser desenvolvido em parceria com o professor de Biologia, da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

Uma opção de trabalho é incentivar os estudantes a discutir com suas famílias o desperdício de alimentos e apresentar a eles o *site* https://alimentesebem.sesisp.org.br/arquivos/noticia/acoes-para-conscientizar-e-reduzir-o-desperdicio-de-alimentos-em-casa (acesso em: 24 out. 2024), que traz diferentes materiais com objetivo de incentivar a redução de perdas de alimentos.

O trabalho com o tópico **Sistemas de amortização** colabora para o desenvolvimento das competências específicas 2 e 3 da área de Matemática e suas Tecnologias, pois os estudantes investigam ações do mundo contemporâneo relacionadas às finanças, fazendo uso de tecnologias para mobilizar conceitos e procedimentos matemáticos, a fim de aplicá-los na interpretação e na resolução de problemas em diversos contextos. Esse tópico também contribui para trabalhar as habilidades EM13MAT203, pois os estudantes aplicam conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações que envolvem o controle de orçamento familiar e utilizam simuladores de juros para tomar decisões, e EM13MAT303, pois interpretam e comparam situações envolvendo juros.

No boxe **Pense e responda** do tópico **Sistema Price**, para calcular o valor dos juros na quarta prestação, os estudantes devem determinar 2,5% de R$ 30.282,42, que é o saldo devedor correspondente à terceira parcela, como indicado na planilha, obtendo o valor de R$ 757,06.

No tópico **Sistema de Amortização Constante (SAC)**, comentar que esse modelo costuma ser utilizado no financiamento de bens com valores altos, por exemplo, imóveis.

A seção **História da Matemática** contribui para o desenvolvimento da competência geral 1, pois são valorizados os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social e cultural para entender e explicar a realidade, e da competência geral 6, pois permite valorizar a diversidade dos saberes e vivências culturais para apropriar-se de conhecimentos e experiências que possibilitam entender as relações próprias do mundo do trabalho. Para mais informações sobre o método das partidas dobradas, pode-se consultar o artigo "Epistemologia do método das partidas dobradas: considerações sobre aspectos históricos e métodos de ensino", disponível em: https://www.researchgate.net/publication/327926113_Epistemologia_do_metodo_das_partidas_dobradas_consideracoes_sobre_aspectos_historicos_e_metodos_de_ensino (acesso em: 24 out. 2024), em que os autores apresentam reflexões sobre o método em seus aspectos teóricos e conceituais.

Uma possibilidade nesse momento é verificar se os estudantes conhecem ou têm interesse em seguir carreira na área das Ciências Contábeis e apresentar a descrição de um curso de Ensino Superior destinado a essa formação específica; para isso, pode-se apresentar o *site*: https://www.contabeis.com.br/contabil/ciencias_contabeis/ (acesso em: 24 out. 2024), que contém uma descrição dessa Ciência.

O trabalho com a seção **Conexões com...** aborda o Tema Contemporâneo Transversal Educação Financeira. Esse trabalho possibilita desenvolver a competência específica 1 da área de Matemática e suas Tecnologias, ao utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações socioeconômicas. Em particular, também pode ser desenvolvida a habilidade EM13MAT104, que diz respeito à interpretação de taxas e índices, como a inflação.

A seguir, apresentam-se comentários e soluções das atividades.

1. Resposta possível: Por se tratar da alteração de preços e serviços, a inflação impacta basicamente o poder de compra das pessoas: quando os índices aumentam, por exemplo, de um mês para o outro, uma mesma cesta de produtos já não pode mais ser comprada com a mesma quantia do mês anterior.

2. $672{,}07 \cdot (1 - 0{,}0068) \simeq 667{,}50$, ou seja, R$ 667,50

3. **a)** $500{,}00 \cdot 1{,}0452 \cdot 1{,}1006 \cdot 1{,}0579 \cdot 1{,}0462 \simeq$
$\simeq 636{,}59$, ou seja, R$ 636,59

b) $1{,}0591 \cdot 1{,}065 \cdot 1{,}0584 \cdot 1{,}0591 \cdot 1{,}0641 \cdot 1{,}1067 \cdot$
$\cdot\ 1{,}0629 \cdot 1{,}0295 \cdot 1{,}0375 \cdot 1{,}0431 \cdot 1{,}0452 \cdot 1{,}1006 \cdot$
$\cdot\ 1{,}0579 \cdot 1{,}0462 \simeq 2{,}24$

Como 2,24 corresponde a 224%, tem-se que o aumento foi 124% (224 − 100).

4. Respostas possíveis: IPCA-15: difere do IPCA apenas pelo período de coleta, que abrange, em geral, do dia 16 do mês anterior ao dia 15 do mês de referência; IPP (Índice de Preços ao Produtor): mais voltado para a indústria, mede a variação de preços de venda recebidos pelos produtores de bens e serviços; Sinapi (Sistema Nacional de Pesquisa de Custos e Índices da Construção Civil): produzido em conjunto com a Caixa Econômica Federal, mede a variação de preços para o setor habitacional e de construção; IGP-M (Índice Geral de Preços – Mercado): calculado pela Fundação Getúlio Vargas (FGV), é formado por três outros índices, o Índice de Preços ao Produtor Amplo – Mercado (IPA-M), o Índice de Preços ao Consumidor – Mercado (IPC-M) e o Índice Nacional de Custo da Construção – Mercado (INCC-M).

5. Auxiliar os estudantes na realização da entrevista sobre o período de hiperinflação no Brasil, primeiramente, na seleção da pessoa entrevistada, em seguida, no roteiro das perguntas. Dizer-lhes que, no início da entrevista, é importante apresentar o tema que será tratado e, no caso de gravação em áudio ou vídeo, pedir autorização ao entrevistado. Orientá-los na elaboração das perguntas, cuidando para que a entrevista não fique muito extensa. Eles poderão acrescentar outras perguntas no decorrer da entrevista, conforme as respostas permitirem. Algumas questões que podem ser feitas são:

- Qual era a sua idade na referida época?
- Como era a sua configuração familiar e a renda média de sua família?
- Como eram feitas as compras de mercado: semanalmente ou mensalmente?
- Você se lembra do período da hiperinflação e do que ela alterou, em sua família, em relação ao consumo de produtos e serviços?

Recomendar aos estudantes que perguntem ao entrevistado se ele autoriza a reprodução da entrevista (áudio ou filmagem) para a turma e o professor, explicando que isso faz parte de um trabalho proposto na aula de Matemática. Após a entrevista, sugerir que a gravação ou trechos dela façam parte da apresentação. Para os estudantes que não tenham recursos disponíveis para a gravação, sugerir que anotem as respostas do entrevistado. Combinem um dia para a apresentação dos resultados para a turma, que pode acontecer por meio de apresentações ou pela entrega de um registro escrito.

Avaliação

A atividade **4** da **Abertura** do Capítulo possibilita uma avaliação diagnóstica da habilidade a seguir, que foi trabalhada no Ensino Fundamental — Anos Finais.

(**EF09MA05**) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com a ideia de aplicação de percentuais sucessivos e a determinação das taxas percentuais, preferencialmente com o uso de tecnologias digitais, no contexto da educação financeira.

A seguir, são apresentadas sugestões de atividades cuja análise das resoluções pode contribuir para avaliar a evolução de cada estudante e orientar seus estudos.

1ª avaliação formativa: atividades **5**, **10** e **19** (páginas 17 e 18, respectivamente).

2ª avaliação formativa: atividades **26**, **30**, **42** e **47** (páginas 21, 27, 28 e 29, respectivamente).

3ª avaliação formativa: atividades **52** e **57** (páginas 34 e 44, respectivamente).

Capítulo 2 Poliedros

Orientações

O Capítulo proporciona o estudo dos poliedros e de suas classificações: poliedros convexos ou não convexos, poliedros regulares, poliedros de Platão, prismas e pirâmides. Além disso, trabalha o cálculo de áreas e, pelo princípio de Cavalieri, o cálculo de volumes em atividades de diferentes contextos, contemplando as competências específicas 3 e 5 da área de Matemática e suas Tecnologias, em específico, as habilidades EM13MAT309 e EM13MAT504.

A **Abertura** do Capítulo analisa o processo de classificação de cristais, colaborando para a competência específica 1 da área de Ciências da Natureza e suas

Tecnologias. O tema abordado também permite discutir a aplicação da Matemática em diferentes áreas do conhecimento em contextos diversos, como previsto nas competências específicas 1 e 3 da área de Matemática e suas Tecnologias.

Sugere-se explorar a imagem presente na abertura, na qual é possível identificar cristais cujos formatos lembram poliedros. Em seguida, fazer a leitura coletiva do texto e exibir o vídeo **Você disse Cristalografia?**, que tem aproximadamente 12 minutos de duração, disponível em: https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1188 (acesso em: 17 out. 2024). Por fim, solicitar a realização das atividades.

Na atividade **1**, é possível que os estudantes reconheçam triângulos e retângulos, e alguns podem associar os cristais a poliedros, como prismas e pirâmides.

A resposta da atividade **2** é 60 cm^3.

A atividade **3** sugere uma pesquisa. Para realizá-la, é possível consultar o texto indicado a seguir, do *site* do Serviço Geológico do Brasil.

- BRANCO, Pércio de M. **Algumas gemas clássicas**. Brasília, DF: Serviço Geológico do Brasil, c2024. Disponível em: https://www.sgb.gov.br/algumas-gemas-classicas. Acesso em: 18 out. 2024.

A discussão dessa questão também permite uma abordagem interdisciplinar com o componente curricular de Geografia, da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Na atividade **4**, espera-se que os estudantes respondam que o nome é dado de acordo com o formato das células unitárias.

O último item da atividade **4** propõe uma pesquisa sobre os sistemas cristalinos. A seguir, são apresentadas algumas informações relacionadas ao sistema cristalino.

Sistema Cristalino	Formato da célula	Exemplos
Cúbico	Cubo (principal), octaedro, dodecaedro	diamante, ouro, prata, pirita e sodalita
Tetragonal	Bloco retangular	zircão, rutilo, idocrásio e cassiterita
Ortorrômbico	Bloco retangular, octaedro	topázio, crisoberilo e zoisita
Hexagonal	Prisma de base hexagonal	apatita, berilo (esmeraldas) e covellita
Trigonal	Tetraedro	quartzo, coríndon e turmalinas
Monoclínico	Várias formas prismáticas de base quadrática ou retangular	jadeítas, espodumênio, ortoclásio e euclásio
Triclínico	Várias formas prismáticas	turquesa e rondonita

Fonte dos dados: SANTOS, Dayene F. dos; SANTOS, Thaynara. K. O.; MORAES, Gabriela. C. de. Cristalografia e aplicações no ensino de geometria espacial. **REGRASP**, São Paulo, v. 4, n. 1, p. 99-120, mar. 2019. p. 106-107. Disponível em: https://regrasp.spo.ifsp.edu.br/index.php/regrasp/article/download/280/270. Acesso em: 18 out. 2024.

Ao apresentar o tópico **Poliedros**, sugere-se fazer um exercício de imaginação para incentivar a assimilação do que está sendo estudado. Para isso, pode-se questionar: "Se encostarmos um cubo, de todas as formas possíveis, em uma superfície plana, o contato entre o cubo e a superfície será um ponto, um segmento de reta ou um quadrado?". Espera-se que os estudantes digam: um ponto, se o contato for com um vértice; um segmento de reta, se o contato for com uma aresta; e um quadrado, se o contato for com uma face.

Para essa atividade e as demais, sempre que possível, sugere-se que os poliedros estudados sejam visualizados utilizando-se algum *software* de Geometria, como o **Poly**, disponível em: http://www.peda.com/poly/ (acesso em: 18 out. 2024.), o que contribui para o desenvolvimento da visão espacial dos estudantes.

No boxe **Saiba que...**, é apresentada a origem da palavra "poliedro". Conversar com os estudantes sobre a junção dos prefixos para a denominação dos poliedros, com base em seu número de lados (tetraedro, pentaedro, hexaedro etc.).

Ao estudar a **Relação de Euler**, recomenda-se que os estudantes assistam à videoaula do Portal da Matemática OBMEP disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=w13bWl7EQ6w (acesso em: 18 out. 2024).

A atividade **8** retoma a interdisciplinaridade com o componente curricular de Química, da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, ao mostrar a representação de uma molécula tridimensional de fulereno, uma forma alotrópica do carbono, e sua estrutura geométrica.

O estudo do tópico **Prismas** amplia e aprofunda os conceitos relacionados ao assunto que os estudantes conheceram ao longo do Ensino Fundamental. Nesse momento, a ideia é apresentar a definição de prisma apoiada em conceitos da Geometria Espacial de Posição. Os elementos de um prisma, provavelmente já conhecidos pelos estudantes, serão retomados e definidos. Diferenciam-se, ainda, os prismas retos dos prismas oblíquos.

O boxe **Pense e responda** do tópico **Prisma regular** pode ser respondido pela observação da imagem.

O estudo de prismas regulares, paralelepípedos, diagonal de um paralelepípedo reto-retângulo, área da superfície de um prisma e secção transversal de um prisma contribui para o desenvolvimento da competência específica 3 da área de Matemática e suas Tecnologias e da habilidade EM13MAT309. Recomenda-se trabalhar com materiais manipulativos, como planificações das superfícies de prismas regulares feitas em papéis sulfite ou em cartolinas, a fim de ajudar os estudantes a compreender e a assimilar esses conceitos, facilitando a identificação dos elementos e dos polígonos envolvidos.

No tópico **Volume de um paralelepípedo reto-retângulo**, sugere-se retomar o fato de que a unidade de volume é o cubo unitário. O boxe **Saiba que...** relembra a relação entre as unidades de medida de volume e as de capacidade. Essas medidas já foram estudadas no Ensino Fundamental e são utilizadas neste Capítulo.

O tópico **Princípio de Cavalieri** apresenta esse princípio para os estudantes como um axioma, pois sua demonstração envolve conceitos avançados. Ele possibilita calcular o volume de um prisma qualquer. Aqui, são trabalhadas a competência específica 5 da área de Matemática e suas Tecnologias e a habilidade EM13MAT504. O boxe **Saiba que...** informa que o matemático italiano Francesco Bonaventura Cavalieri (1598-1647) foi quem desenvolveu esse princípio. A seguir, apresenta-se um pequeno trecho sobre a história de Cavalieri, mostrando que ele se dedicou a diversas áreas da Matemática:

> […]
>
> Galileu tinha tido a intenção de escrever um tratado sobre o infinito em matemática, mas ele não foi encontrado. Enquanto isso, seu discípulo Cavalieri fora estimulado pela *Stereometria* de Kepler, bem como por ideias antigas e medievais e pelo encorajamento de Galileu, a organizar seus pensamentos sobre infinitésimos em forma de livro. Cavalieri era membro de uma ordem religiosa […] e viveu em Milão e Roma antes de tornar-se professor em Bolonha, em 1629. Caracteristicamente para seu tempo ele escreveu sobre muitos aspectos da matemática pura e aplicada – geometria, trigonometria, astronomia e óptica – e foi o primeiro autor italiano a apreciar os logaritmos. […]
>
> […]

BOYER, Carl B. **História da matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1974. p. 241.

Explorar a situação contextualizada do início do tópico **Volume de um prisma**, destacando a importância desse conceito para a determinação do espaço necessário para o armazenamento dos mais diferentes produtos.

O boxe **Pense e responda** retoma a situação inicial e solicita aos estudantes que calculem o volume da embalagem apresentada, de modo que eles tenham a oportunidade de aplicar o que foi apresentado anteriormente. Como atividade de ampliação do conteúdo, é possível supor o volume de cada bombom que será armazenado na caixa e solicitar aos estudantes que determinem a quantidade de bombons que cabe na embalagem. Outra possibilidade é fixar a quantidade de bombons que cabem armazenados na caixa e calcular qual é o volume máximo que cada unidade de bombom pode ter.

O tema do boxe **Fórum** é o impacto das embalagens e o desafio dos resíduos sólidos. Esse assunto é de grande importância para a sociedade atual, visto que o descarte de resíduos tem se tornado um grande problema para os gestores das cidades. Ele envolve a questão ambiental e uma discussão associada ao consumo, o que favorece o trabalho com os Temas Contemporâneos Transversais Educação Ambiental e Educação para o Consumo. Há, ainda, um alinhamento com a competência específica 1 da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e com a competência geral 4, já que a atividade trata de uma pesquisa e propõe uma discussão sobre possíveis ações que minimizem o impacto ambiental dos resíduos no meio ambiente.

O debate proposto favorece a competência geral 7, ao fomentar a construção de ideias e decisões que promovam práticas sustentáveis. As respostas dos estudantes podem variar, dependendo de suas experiências individuais, seus níveis de conscientização e suas perspectivas pessoais. É importante que os estudantes compartilhem suas experiências em relação ao descarte de embalagens e às escolhas de consumo. Isso pode incluir desde práticas conscientes de reciclagem até desafios enfrentados para encontrar alternativas sustentáveis em determinadas situações. Durante o diálogo, fazer perguntas que incentivem os estudantes a refletir sobre as consequências de suas ações; por exemplo, pode-se questionar como o descarte inadequado de embalagens afeta o meio ambiente local e globalmente ou como escolhas individuais de consumo podem contribuir para padrões insustentáveis de produção e consumo.

O ideal é que os estudantes pensem além do óbvio e considerem uma variedade de opções para abordar os problemas relacionados ao descarte de embalagens e ao consumo excessivo. Isso pode incluir desde campanhas de conscientização até iniciativas práticas de redução de resíduos na escola ou na comunidade. Ao final, incentivar os estudantes a identificar ações práticas que possam ser realizadas na escola ou na comunidade para abordar as questões discutidas. Isso pode incluir desde pequenas mudanças de hábitos individuais até projetos mais amplos que envolvam toda a comunidade, como a compra de produtos com refil, o uso de embalagens recicladas ou biodegradáveis ou, ainda, de produtos com embalagens mais simples.

Na atividade **23**, os estudantes precisam elaborar um problema pertinente a partir de algumas informações previamente fornecidas pelo enunciado. Sugere-se que essa atividade seja resolvida em pequenos grupos, fomentando a troca de ideias entre os estudantes e colaborando para o desenvolvimento da capacidade de expressão e de argumentação, de acordo com as competências gerais 4 e 7. Aqui, é trabalhada a competência específica 3 da área de Matemática e suas Tecnologias e a habilidade EM13MAT309, que envolve resolver e elaborar problemas ligados a áreas e volumes de prismas.

No tópico **Pirâmides**, são abordados os cálculos de áreas e de volumes. Assim como no caso dos prismas, a definição de pirâmide está apoiada em conceitos que envolvem a Geometria Espacial de Posição.

O boxe **Pense e responda** do tópico **Área da superfície de uma pirâmide** apresenta a definição de tetraedro regular e solicita a determinação da fórmula que fornece a altura h em função da medida da aresta a. Atividades como essa contribuem para o desenvolvimento da competência específica 5 da área de Matemática e suas Tecnologias.

Ainda nesse tópico, é interessante comparar, com uso de materiais manipulativos, a planificação da superfície de uma pirâmide de base quadrada com a planificação da superfície de um prisma de base quadrada.

No tópico **Volume de uma pirâmide**, recomenda-se retomar os conceitos de semelhança de triângulos e o princípio de Cavalieri, o que trabalha a competência específica 5 da área de Matemática e suas Tecnologias e a habilidade EM13MAT504. É importante explicar cada passo do desenvolvimento, sempre questionando o entendimento dos estudantes, pois esse pode ser um tópico um pouco mais complexo para eles. Destacar que todo esse processo é necessário para se obter a expressão geral do volume de uma pirâmide, reforçando o caráter dedutivo da Matemática.

A atividade **44** solicita a elaboração de um problema envolvendo três variáveis (custo, quantidade de cores e quantidade de demãos) na pintura de uma pirâmide. Garantir um espaço de troca de ideias entre os estudantes. A atividade possibilita uma diversidade de enunciados, contribuindo para o desenvolvimento da competência específica 3 da área de Matemática e suas Tecnologias e da habilidade EM13MAT309.

O tema da seção **Conexões com...** é Arte e Geometria, valorizando e discorrendo sobre manifestações artísticas brasileiras, o que possibilita desenvolver as competências gerais 3 e 4. Esse tema relaciona-se com os componentes curriculares de Língua Portuguesa e de Arte. Desse modo, sugere-se avaliar a possibilidade de desenvolver um trabalho em conjunto com os professores desses componentes sobre o concretismo e o neoconcretismo, que foram movimentos que marcaram a história da Arte e da literatura brasileira.

O início dos anos 1950 foram decisivos para o concretismo brasileiro, pois essa foi a primeira vez, no Brasil, que o desdobramento ou a reformulação de um conceito artístico ocorreu de modo tão rápido e com tendência a criar uma dinâmica de ruptura tão rígida, mesmo que essa tendência tenha esmorecido com o tempo. O concretismo é geralmente datado de 1950, e o neoconcretismo é geralmente datado do final dos anos 1950. Para mais informações, consultar:

- CONCRETISMO/Neoconcretismo. São Paulo: Museu Afro Brasil Emanoel Araujo, [2017]. Localizável em: Índice biográfico: movimentos estéticos. Disponível em: http://www.museuafrobrasil.org.br/pesquisa/indice-biografico/movimentosesteticos/concretismo-neoconcretismo. Acesso em: 18 out. 2024.
- CONCRETISMO nas artes visuais. *In*: ENCICLOPÉDIA Itaú Cultural de Arte e Cultura Brasileira. São Paulo: Itaú Cultural, 7 fev. 2024. Disponível em: http://enciclopedia.itaucultural.org.br/termo370/concretismo-nas-artes-visuais. Acesso em: 18 out. 2024.

Na seção **Explorando a tecnologia**, os estudantes podem explorar o *software* de matemática dinâmica **GeoGebra** para construir e visualizar propriedades de prismas e pirâmides e as respectivas planificações das superfícies de prismas e de pirâmides. Para essa abordagem, o uso do sistema de três eixos cartesianos é necessário, pois traz a noção da tridimensionalidade.

O prisma construído terá como base um triângulo equilátero. Antes de passar à resolução das atividades da seção, sugere-se uma exploração por parte dos estudantes: que eles construam outros prismas, com diferentes bases. Para isso, precisam retomar os passos seguidos no tutorial e observar em quais etapas farão ajustes. Essa complementação da atividade permite a análise das condições estabelecidas e a tomada de decisões com base nelas.

Na atividade **1**, os estudantes vão construir representações de prismas regulares de base pentagonal e de base quadrada, assim como as respectivas planificações das superfícies desses prismas. Os estudantes precisam seguir o passo a passo apresentado, mas adequando-o às situações, com as novas variáveis solicitadas. Sugere-se orientá-los a investigar os conceitos de prisma estudados, observando os padrões e fazendo experimentações com as novas medidas. Essa investigação, que desenvolve a competência específica 5 da área de Matemática e suas Tecnologias, ocorre de modo mais eficiente com o uso do *software*, pois este permite que as alterações sejam feitas e que os resultados sejam percebidos imediatamente.

Avaliação

As atividades **1** e **2** da **Abertura** do Capítulo possibilitam uma avaliação diagnóstica dos conhecimentos prévios dos estudantes. Além disso, a atividade **2** está relacionada à habilidade a seguir, que foi trabalhada no Ensino Fundamental — Anos Finais.

(**EF08MA21**) Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo do volume de recipiente cujo formato é o de um bloco retangular.

A seguir, são apresentadas sugestões de atividades cuja análise das resoluções pode contribuir para avaliar a evolução de cada estudante e orientar seus estudos.

1ª avaliação formativa: atividade **2** (página 58).

2ª avaliação formativa: atividades **11** e **16** (página 64).

3ª avaliação formativa: atividades **22** e **28** (páginas 69 e 70, respectivamente).

4ª avaliação formativa: atividades **33** e **41** (páginas 78 e 79, respectivamente).

Capítulo 3 Corpos redondos

Orientações

O Capítulo estuda os corpos redondos em situações práticas, como é o caso dos silos e das cisternas, que são muito utilizados para armazenamento de grãos e de água, respectivamente. Dessa maneira, alia-se uma questão matemática de cálculo de áreas e volumes de corpos redondos em situações reais a um tema social relevante, como propõem as competências específicas 2 e 3 da área de Matemática e suas Tecnologias e as habilidades EM13MAT201 e EM13MAT309. Além disso, as projeções cartográficas são discutidas no Capítulo, permitindo uma reflexão sobre as distorções provocadas em cada uma delas, de modo a desenvolver a competência específica 5 da área de Matemática e suas Tecnologias e a habilidade EM13MAT509.

A **Abertura** do Capítulo apresenta silos cujo formato remete à composição de um cilindro reto com um cone reto. As atividades da **Abertura** exploram os formatos dos silos e as características e vantagens desses formatos, além de propiciar um levantamento dos conhecimentos prévios dos estudantes em relação ao conteúdo que será abordado.

Na atividade **1** é esperado que os estudantes indiquem a distribuição uniforme de pressão sobre os grãos, a resistência à ação de forças externas, a eficiência espacial e a simplificação da manutenção do silo. Valorizar os conhecimentos utilizados para explicar a realidade colabora para a competência geral 1.

Na resposta da atividade **2**, pode-se comentar que entre os tipos de silo mais comuns estão o cilíndrico de meia-encosta, o cilíndrico tipo cisterna ou poço, o tipo trincheira ou horizontal e o cilindro de superfície. Mais informações sobre cada um desses tipos de silo podem ser consultadas no *site*: https://www.embrapa.br/agencia-de-informacao-tecnologica/criacoes/gado_de_leite/producao/sistemas-de-producao/alimentacao/conservacao-de-forrageiras-e-pastagens/silagem/tipos-de-silos (acesso em: 18 out. 2024). Na atividade **3**, são esperadas respostas como: bola, casquinha de sorvete, ovo, chapéu de aniversário, latas de alimentos, pneu, entre outros objetos. Na atividade **4**, espera-se que os estudantes respondam que o volume de um cilindro é dado pelo produto da área da base pela altura.

O tópico **Introdução** apresenta a imagem de uma construção projetada por Oscar Niemeyer, importante arquiteto brasileiro reconhecido mundialmente. Se possível, propor uma abordagem em conjunto com o professor de Arte, da área de Linguagens e suas Tecnologias, explorando construções arquitetônicas cujos formatos lembram figuras geométricas espaciais utilizadas por Oscar Niemeyer na Arquitetura. Alguns exemplos são:

- Centro Cultural Internacional Oscar Niemeyer, Espanha, inaugurado em 2011;
- Palácio do Congresso Nacional, Brasília (DF), inaugurado em 1960;

- Palácio do Planalto, Brasília (DF), inaugurado em 1960;
- Palácio da Alvorada, Brasília (DF), inaugurado em 1958;
- Museu de Arte Contemporânea, Niterói (RJ), inaugurado em 1996;
- Conjunto Copan, São Paulo (SP), inaugurado em 1966;
- Pavilhão Lucas Nogueira Garcez, São Paulo (SP), inaugurado em 1954;
- Estação Cabo Branco, em João Pessoa (PB), inaugurada em 2008;
- Conjunto Arquitetônico da Pampulha, Belo Horizonte (MG), inaugurado em 1943.

Como atividade complementar, sugere-se a exibição do documentário **A vida em Libras: arquitetura e Oscar Niemeyer**, disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=a6vPwWTftw4 (acesso em: 17 out. 2024). Esse tipo de atividade contribui para o desenvolvimento da competência geral 1.

No estudo dos tópicos **Cilindro** e **Cone**, recomenda-se o uso de materiais manipulativos pedagógicos.

Para impressão ou reprodução, é possível obter moldes com abas para a construção de modelos de cilindro, cone etc. Há moldes desse tipo disponíveis em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/5838835/mod_resource/content/1/Planifica%C3%A7%C3%A3o-S%C3%B3lidos-Geom%C3%A9tricos-PARA-IMPRIMIR.pdf (acesso em: 18 out. 2024). Uma possibilidade é solicitar aos estudantes que reproduzam as planificações em uma folha, recortem-nas e as manipulem, o que pode auxiliar a compreensão dos seus elementos e de suas relações, bem como o cálculo da área total do cilindro e do cone.

O tópico **Volume de um cilindro** retrata uma situação contextualizada em que os estudantes podem perceber a relação entre um cilindro reto e o volume de água necessário para preencher o interior de uma mangueira que, quando cheia, adquire um formato cilíndrico. Assim, é possível perceber que a base do cilindro corresponde ao círculo interno da mangueira, considerando uma secção transversal, e a altura do cilindro, ao comprimento da mangueira.

A determinação do volume de um cilindro a partir do volume de um paralelepípedo de mesma altura, assim como a determinação do volume de um cone a partir do volume de uma pirâmide de mesma altura, ambas por meio do princípio de Cavalieri, contribui para o desenvolvimento da competência específica 5 da área de Matemática e suas Tecnologias e da habilidade EM13MAT504.

A atividade **18** propõe a elaboração de um problema respeitando-se determinadas condições. Esse tipo de questão mobiliza habilidades de análise, planejamento e execução por parte dos estudantes, contribuindo para o desenvolvimento da competência específica 3 da área de Matemática e suas Tecnologias e da habilidade EM13MAT309, pois os estudantes devem lidar com uma questão envolvendo o custo de produção de uma caixa-d’água.

No segundo boxe **Pense e responda** do tópico **Secções de um cone**, é importante destacar a relação entre a altura (h), o raio (r) da base e a geratriz (g) de um cone circular reto, dada pelo teorema de Pitágoras, em que $g^2 = h^2 + r^2$.

No boxe **Pense e responda** do tópico **Volume de um cone**, os estudantes calculam o volume de um cone de doce de leite que possui 3 cm de diâmetro da base e 8 cm de altura. Considerando $\pi = 3{,}14$, tem-se que o volume V desse cone é, em cm^3, aproximadamente:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 8 = 18{,}84$$

Assim, cada cone comporta, aproximadamente, 18,84 mL de doce de leite, portanto, com 800 mL desse doce, é possível rechear, aproximadamente, 42 canudos de doce de leite, pois: $800 : 18{,}84 \simeq 42{,}46$.

A atividade **34** contribui para o desenvolvimento da competência específica 3 da área de Matemática e suas Tecnologias e da habilidade EM13MAT309, ao solicitar a elaboração de um problema a partir dos dados fornecidos. Para aprofundar a discussão a respeito da construção das cisternas, sugere-se acessar o *site* do Ministério da Cidadania, disponível em: https://www.gov.br/mds/pt-br/acoes-e-programas/acesso-a-alimentos-e-a-agua/programa-cisternas (acesso em: 18 out. 2024). Nele, é possível conhecer um pouco mais sobre o Programa Cisternas, desenvolvido desde 2003.

A atividade **35** favorece o trabalho com a habilidade EM13MAT201 da BNCC, pois leva os estudantes a propor ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para a comunidade, envolvendo medições e cálculos de comprimento, de volume, de capacidade e de massa.

O boxe **Fórum** favorece o trabalho com o Tema Contemporâneo Transversal Educação Ambiental, além do trabalho com a competência geral 10 e a competência específica 1 da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, uma vez que leva em consideração a tomada de decisões com base em princípios sustentáveis e ações que minimizem impactos socioambientais. Os diálogos podem gerar reflexões importantes, que podem se apresentar de várias maneiras, tais como:

- experiências pessoais. Os estudantes podem compartilhar se têm um sistema de captação de água da chuva em suas moradias ou se já o observaram em residências de amigos, familiares ou vizinhos.

- observações na comunidade. Eles podem relatar se já viram sistemas de captação de água da chuva em escolas, parques, empresas ou outras instituições da comunidade.
- pesquisas. Os estudantes podem fazer pesquisas adicionais sobre o tema e compartilhar descobertas sobre práticas de captação e reaproveitamento de água da chuva em diferentes lugares do mundo.
- sugestões e ideias. Eles podem oferecer sugestões sobre como a água da chuva poderia ser utilizada de forma eficiente em suas próprias rotinas, como na lavagem de carros, na irrigação de plantas, na limpeza de calçadas ou na descarga de vasos sanitários.

No início do estudo do tópico **Esfera**, por meio do boxe **Saiba que…**, pode-se explorar o formato geoide do planeta Terra. Para isso, recomendam-se os conteúdos disponíveis em: https://atlasescolar.ibge.gov.br/cartografia/21729-formas-da-terra.html e em: https://www.aprh.pt/rgci/glossario/geoide.html (acessos em: 18 out. 2024).

No tópico **Volume de uma esfera**, sugere-se apresentar aos estudantes o simulador virtual que ilustra a aplicação do princípio de Cavalieri para o cálculo do volume de uma esfera, disponível em: https://www.geogebra.org/m/v2mbrf62 (acesso em: 18 out. 2024).

No tópico **Área de uma superfície esférica**, os estudantes poderão compreender como obter a expressão que determina a área de uma superfície esférica a partir de um processo de decomposição da esfera em "pirâmides" cujas alturas equivalem à medida do raio da esfera. Para auxiliar a compreensão do processo, sugere-se apresentar à turma o simulador virtual que retrata essa decomposição no aplicativo **GeoGebra**, disponível em: https://www.geogebra.org/m/nrcwwbg3 (acesso em: 20 out. 2024).

No boxe **Pense e responda** do tópico **Fuso esférico**, os estudantes podem refazer os cálculos apresentados na teoria substituindo $360°$ por 2π para obter as fórmulas do volume da cunha esférica e da área do fuso esférico considerando o ângulo α em radianos.

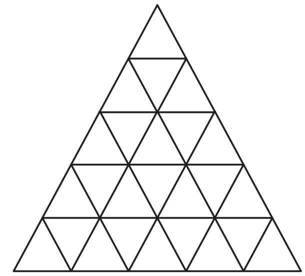
No tópico **Projeções cartográficas**, são apresentados diferentes tipos de projeção e suas características, permitindo uma reflexão em relação às vantagens e desvantagens de cada uma. Esse trabalho desenvolve a competência específica 5 da área de Matemática e suas Tecnologias e a habilidade EM13MAT509.

As principais projeções utilizadas são a de Mercator, a de Peters e a projeção de Mollweide. Pode-se explorar algumas delas. A projeção de Mercator é uma projeção cilíndrica bastante utilizada. Nessa projeção, as distorções ocorrem sobretudo na região dos polos. A projeção de Mollweide, atualmente usada nos mapas-múndi de diferentes atlas, foi criada pelo alemão Karl Mollweide, em 1805, para corrigir as distorções provocadas pela projeção de Mercator, que é apresentada no Livro do estudante. Estabelecer contraponto entre a projeção de Mercator e a projeção de Mollweide, explicando aos estudantes que Mollweide manteve linhas retas para representar os paralelos, porém, para os meridianos, utilizou linhas curvas. Além disso, usou o formato elíptico, compondo um achatamento nos polos. Dessa maneira, conseguiu um bom resultado para a região central do mapa, com relação à preservação das áreas, mas ainda permanecem as distorções nos polos. Para mais informações que podem contribuir para o planejamento da aula sobre esse tópico, consultar: https://atlasescolar.ibge.gov.br/conceitos-gerais/o-que-e-cartografia/forma-da-terra.html e https://atlasescolar.ibge.gov.br/cartografia/21733-as-projecoes-cartograficas.html (acessos em: 7 out. 2024).

A seção **Conexões com…** favorece o trabalho com as competências gerais 2, 3 e 4 da BNCC, pois, além de promover o exercício da curiosidade intelectual e da criatividade para criar soluções com base nos conhecimentos das diferentes áreas, ela promove a valorização de diversas manifestações culturais e linguagens artísticas, das locais às mundiais, e a participação em práticas diversificadas da produção artístico-cultural.

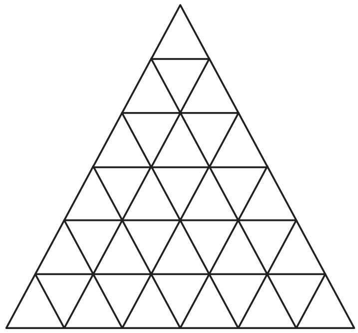
Na atividade **1**, os estudantes podem citar a geodésica do espaço de eventos Jeddah Super Dome, na Arábia Saudita, com 210 m de diâmetro; a geodésica do estádio de beisebol Nagoya Dome, no Japão, com 180 m de diâmetro; a geodésica da biosfera de Montreal, no Canadá, com 76 m de diâmetro; e a geodésica do Protótipo Experimental de Comunidade para o Futuro (Epcot), localizado na Disney, Estados Unidos, com 50 m de diâmetro.

A atividade **2** trabalha a habilidade EM13MAT302, pois pede a construção de modelos empregando uma função polinomial do 2º grau para resolver o problema. No item **a**, a figura esperada da 5ª frequência é:



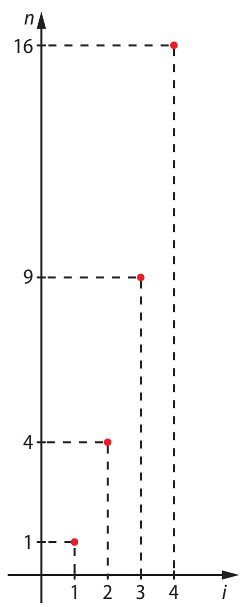
EDITORIA DE ARTE

Para a 6ª frequência, a figura esperada é:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

No item **b**, é possível dizer que a figura plana da 5ª frequência está dividida em 25 triângulos menores (congruentes e justapostos) e a da 6ª frequência, em 36 triângulos menores. No item **c**, sabemos que a quantidade de triângulos menores é igual ao quadrado da frequência. Logo, podemos escrever a função $n(i) = i^2$, com $i > 0$, $i \in \mathbb{N}$. O gráfico dessa função é:



No item **a** da atividade **3**, a área dos domos pode ser aproximada pela área de metade da superfície esférica de raio 2 m. Logo, a área de cada domo, em m², é, aproximadamente:

$$S_{domo} = \frac{1}{2} \cdot 4\pi r^2 \Rightarrow S_{domo} \simeq \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3{,}14 \cdot 2^2 = 25{,}12$$

No item **b**, espera-se que os estudantes reconheçam que a medida encontrada é próxima à área dos domos, mas que um domo geodésico de raio 2 m não é uma semiesfera de raio 2 m e que a medida encontrada é tanto mais próxima do valor exato quanto maior for a frequência observada no domo.

A atividade **4** trabalha a competência específica 2 da área de Matemática e suas Tecnologias e a habilidade EM13MAT201, pois propõe ações adequadas às demandas da comunidade em que se vive, envolvendo medições e cálculos de área. Os estudantes podem propor que cúpulas geodésicas poderiam ser construídas em hortas comunitárias, quadras poliesportivas ou outros espaços de seu cotidiano. Para a construção da maquete, sugere-se assistir ao passo a passo mostrado no vídeo: https://www.youtube.com/watch?v=1E4WiUbuSsI (acesso em: 18 out. 2024). A comparação entre áreas depende das construções feitas pelos estudantes.

Na seção **Explorando a tecnologia**, os estudantes podem explorar o **Scratch** para construir programas que determinem, a partir das medidas da altura e do raio da base, a área e o volume de cilindros e o volume de cones. Ao sugerir a apropriação de outra linguagem, a seção contribui para o desenvolvimento da competência geral 4. Além disso, a atividade colabora para o desenvolvimento do pensamento computacional, pois a proposta é a de construção de um algoritmo que relacione as ações necessárias para se solucionar determinado problema, e contribui para o desenvolvimento da competência específica 4 da área de Matemática e suas Tecnologias e da habilidade EM13MAT405.

Sugere-se a leitura do material indicado a seguir para ampliar os conhecimentos dos estudantes sobre o uso do Scratch.

- SOUZA, Michel Figueiredo de; COSTA, Christine Sertã. **Scratch**: guia prático para aplicação na educação básica. 1. ed. Rio de Janeiro: Imperial, 2018. Disponível em: https://educapes.capes.gov.br/bitstream/capes/566023/2/Produto%20-%20Michel%20de%20Souza%202019.pdf. Acesso em: 5 nov. 2024.

A seção apresenta a construção de um programa para o cálculo do volume de um cilindro e propõe a construção de outros dois programas semelhantes. Na atividade **1**, os estudantes devem calcular a área da superfície de um cilindro. O desenvolvimento da estrutura do código é o mesmo que foi realizado para o cálculo do volume. Nesse caso, os estudantes podem apenas identificar os locais nos quais é preciso fazer ajustes no programa já construído para implementar o cálculo da área. Uma possível resposta é um programa com estrutura de código semelhante à apresentada anteriormente na seção, substituindo-se a variável “VOLUME” por “ÁREA” e modificando-se a configuração dos respectivos cálculos. Na atividade **2**, a ideia é calcular o volume de um cone. Também serão necessários poucos ajustes no programa construído no tutorial da seção para se obter a fórmula do cálculo do volume do cone.

Na seção **História da Matemática**, é interessante comentar que, em 2014, Artur Ávila foi o primeiro matemático brasileiro a receber a medalha Fields e compartilhar com os estudantes o seguinte artigo, que conta um pouco desse feito, disponível em: https://piaui.folha.uol.com.br/materia/artur-avila-ganha-a-medalha-fields/ (acesso em: 18 out. 2024).

Avaliação

As atividades **3** e **4** da **Abertura** do Capítulo possibilitam uma avaliação diagnóstica dos conhecimentos prévios dos estudantes. Além disso, a atividade **4** está relacionada à habilidade a seguir, que foi trabalhada no Ensino Fundamental — Anos Finais.

(**EF09MA19**) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de volumes de prismas e de cilindros retos, inclusive com uso de expressões de cálculo, em situações cotidianas.

A seguir, são apresentadas sugestões de atividades cuja análise das resoluções pode contribuir para avaliar a evolução de cada estudante e orientar seus estudos.

1ª avaliação formativa: atividades **6** e **14** (páginas 98 e 99, respectivamente).

2ª avaliação formativa: atividades **25** e **33** (páginas 105 e 106, respectivamente).

3ª avaliação formativa: atividades **39**, **42** e **52** (páginas 115, 116 e 117, respectivamente).

Capítulo 4 Análise combinatória

Orientações

O Capítulo explora o princípio fundamental da contagem (PFC) e outras técnicas de contagem em diversos contextos sociais, de modo que os estudantes são levados a refletir e a analisar de maneira crítica a aplicação dessas técnicas para resolver diferentes problemas e podem averiguar a plausibilidade dos seus resultados, reconhecendo a existência de percursos distintos para se chegar à solução de um mesmo problema, o que colabora para o desenvolvimento da competência específica 3 da área de Matemática e suas Tecnologias, em particular, a habilidade EM13MAT310.

A **Abertura** do Capítulo apresenta o livro **Cent mille milliards de poèmes**, que foi publicado pelo escritor francês Raymond Queneau, que contempla, na literatura, o conceito de combinação. Recomenda-se explorar esse livro, bem como as atividades propostas, em parceria com o professor do componente curricular de Língua Portuguesa, abordando a valorização de manifestações artísticas e culturais, além da participação em práticas diversificadas de produção artístico-cultural, desenvolvendo a competência geral 3 da BNCC. Além disso, possibilita o desenvolvimento da competência específica 1 da área de Matemática e suas Tecnologias, ao empregar conceitos matemáticos para interpretar situações em diferentes contextos.

Para mais informações a respeito de Raymond Queneau, acessar o *site*: http://www.antoniomiranda.com.br/poesiamundialportugues/RAYMOND%20QUENEAU.html (acesso em: 14 out. 2024). Outras possibilidades de abordagem literária em Matemática são o conto “Biblioteca de Babel”, de Jorge Luis Borges, publicado em 1944, que aborda uma realidade em que o mundo é constituído por uma biblioteca com uma infinidade de livros, e o livro **O enigma do infinito**, de Jacques Fux, publicado em 2019, que propõe questões matemáticas em seu conteúdo.

A seguir, são apresentadas as respostas das atividades propostas.

1. Resposta pessoal.
2. Possibilitar a interação do leitor com a obra, por meio da criação de poemas com base na combinação de um conjunto de versos divididos nas páginas.
3. Resposta pessoal. Essa atividade, assim como o tema da abertura, possibilitam um trabalho em conjunto com o professor do componente curricular de Língua Portuguesa. Avaliar a possibilidade de a atividade de confecção dos livros ser realizada em conjunto com o professor desse componente, de modo que os estudantes possam sanar dúvidas em relação a poemas e coletar mais informações e dicas sobre como escrever os versos.
4. Há 81 combinações possíveis. Espera-se que os estudantes utilizem o princípio fundamental da contagem para resolver essa atividade, multiplicando as possibilidades de combinação dos 4 versos na estrofe: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$.

Na **Introdução**, pode-se comentar que, nesse Capítulo, os estudantes conhecerão diferentes agrupamentos de elementos para que possam contá-los de maneira organizada. Aproveitar esse momento para que eles falem a respeito do que entendem por combinatória e, por fim, explicar que a combinatória analisa e conta o número de possibilidades de os elementos de um conjunto serem agrupados de acordo com regras estabelecidas. Além disso, explicar para os estudantes que, em Combinatória, é comum solucionar o mesmo problema utilizando-se estratégias distintas, o que contribui para a compreensão do tema e minimiza a possibilidade de resoluções equivocadas.

Para auxiliar o trabalho com conceitos de análise combinatória, sugere-se a leitura da dissertação de mestrado **Análise combinatória: uma abordagem diferenciada sem a utilização de fórmulas**, do autor Thiago Miguel Roda, apresentada ao Programa de Mestrado Profissionalizante da Universidade Federal de São Carlos, disponível em: https://repositorio.ufscar.br/bitstream/handle/ufscar/10400/RODA_Thiago_2018.pdf?sequence=4&isAllowed=y (acesso em: 24 out. 2024).

A utilização do **Princípio multiplicativo** para solucionar problemas de contagem, dependendo do contexto, exige algumas estratégias. Para auxiliar os estudantes, pode-se expor as seguintes recomendações:

a) Imagine que você executará a ação solicitada pelo problema.

b) Divida o problema em etapas simples.

c) Quantifique primeiro o número de possibilidades das etapas que possuem o maior número de restrições.

d) Quando ocorrer um impasse, divida o problema em casos mutuamente excludentes.

Os cinco exemplos que estão no Livro do estudante de utilização do princípio fundamental da contagem, logo após a sua definição, ilustram como essas estratégias devem ser aplicadas. As recomendações **a** e **b** podem ser reforçadas em todos os exemplos. A recomendação **c** é evidenciada nos exemplos **3** e **4**, e a recomendação **d** é utilizada no exemplo **5**.

Um contexto complementar para o princípio multiplicativo é a linguagem braille, conforme mencionado no texto a seguir.

[…]

- O código Braille é baseado em uma disposição 3×2 de pontos. Para registrar uma letra do alfabeto, alguns desses 6 pontos são marcados ou perfurados, para que fiquem sobressalentes e possam ser sentidos com a ponta dos dedos das mãos.
- Como temos seis pontos no sistema 3×2, pelo Princípio Multiplicativo, a quantidade de padrões diferentes que pode ser formada é $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6 = 64$.
- Há artifícios adicionais para que seja possível representar números, letras maiúsculas e minúsculas, sinais de pontuação e de operações matemáticas, usando a linguagem Braille.
- Há outros métodos, todos baseados no Princípio Multiplicativo de Contagem, para calcular quantas configurações podemos formar usando a linguagem Braille: o método que foca na quantidade de pontos, independente de estarem pintados ou não e o método que foca na quantidade de pontos pintados.

[…]

MORAIS FILHO, Daniel C.; MALAGUTTI, Pedro Luiz A. **Matemática discreta**: módulo II. Cuiabá: Central de Texto, 2013. (Matemática na prática: curso de especialização em ensino de matemática para o Ensino Médio, p. 68). Disponível em: https://educapes.capes.gov.br/bitstream/capes/401690/1/Matem%C3%A1tica%20na%20Pr%C3%A1tica%20Mod2_F3_Matematica_Discreta.pdf. Acesso em: 24 out. 2024.

O **Fatorial** é apresentado como uma forma de facilitar a notação do produto de *n* números naturais consecutivos, começando em *n* e decrescendo de uma em uma unidade até chegar a 1. O boxe **Saiba que...** desse tópico apresenta a tecla que, geralmente, indica o cálculo do fatorial nas calculadoras científicas. É importante que os estudantes saibam calcular o fatorial de um número utilizando a calculadora, lembrando que pode haver variações de um modelo para o outro.

O trabalho com o boxe **Fórum** possibilita o desenvolvimento das competências gerais 1 e 5, uma vez que valoriza conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo digital e incentiva o uso das tecnologias de maneira crítica. Sugere-se que o boxe seja trabalhado com o filme **O jogo da imitação**, que é sugerido no boxe **Para assistir** da página 156. O filme retrata a vida e a contribuição do matemático Alan Turing (1912-1954) para desvendar as mensagens de guerra criptografadas pelos nazistas durante a Segunda Guerra Mundial. Para mais informações sobre esse importante matemático, acessar o texto "Alan Turing, o pai da computação", disponível em: https://www.invivo.fiocruz.br/historia/alan-turing-o-pai-da-computacao/ (acesso em: 24 out. 2024).

A relação entre o filme e a discussão proposta na seção pode ser feita com base no seguinte texto:

[…]

[…] Alan Turing se torna responsável por duas grandes contribuições para a história: a vitória dos aliados na Segunda Grande Guerra e a invenção do computador. Curiosamente, muitos anos após a Segunda Guerra, a criptografia ainda era considerada arma de guerra e, portanto, item de segurança nacional.

De fato, muitos detalhes sobre a criptografia e criptoanálise utilizados durante essa guerra, bem como os principais atores que participaram desses trabalhos foram omitidos, com a desculpa de serem segredos de estado durante décadas.

Após a Segunda Guerra e com o advento dos computadores, a criptografia passa a exercer um novo e importante papel na sociedade moderna: garantir a segurança das informações. Todas as vezes que um computador é acessado e uma senha utilizada, ou quando um pagamento é feito pela internet, ou então uma conta bancária é acessada ou mesmo quando uma mensagem é postada no Facebook, a criptografia está sendo utilizada.

[…]

BRUNO, Odemir M. Criptografia: de arma de guerra a pilar da sociedade moderna. **Jornal da USP**, São Paulo, 9 jan. 2017. Disponível em: https://jornal.usp.br/artigos/criptografia-de-arma-de-guerra-a-pilar-da-sociedade-moderna/. Acesso em: 24 out. 2024.

Quanto às respostas relacionadas ao boxe **Fórum**, elas podem variar de acordo com as experiências e perspectivas individuais dos estudantes. Ao discutir medidas de segurança digital com a turma, é importante destacar diversas estratégias além das mencionadas no texto. Alguns exemplos são elencados a seguir.

- Algumas plataformas oferecem a opção de limitar certas funções dos aplicativos quando o usuário está fora de um raio geográfico pré-definido, o que pode ajudar a evitar acesso não autorizado.
- A troca regular de senhas reduz o tempo de exposição em caso de comprometimento.
- Sistemas que enviam notificações por *e-mail* sempre que um *login* é realizado em um dispositivo novo oferecem uma camada adicional de segurança, permitindo ao usuário identificar atividades suspeitas.

Ao abordar os riscos associados à violação de dados pessoais, é fundamental destacar questões como roubo de identidade, golpes financeiros e invasões à privacidade. Por exemplo, o roubo de dados de cartão de crédito pode resultar em transações fraudulentas e prejuízos financeiros significativos para a vítima; uma pessoa cujos dados pessoais são comprometidos pode se tornar alvo de golpes *on-line*, nos quais criminosos utilizam informações pessoais para enganá-la ou extorqui-la.

No estudo tópico **Permutação simples**, pode-se utilizar o *podcast* **O que é permutação?**, disponível em: https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1295 (acesso em: 24 out. 2024), que traz o significado da palavra permutação no contexto da Matemática. Uma opção de trabalho com esse material é solicitar aos estudantes que ouçam o *podcast* previamente e levem para a aula as dúvidas e observações que tiverem.

No estudo do tópico **Arranjo simples**, incentivar os estudantes a solucionar o mesmo problema por meio de diferentes estratégias. Essa é uma ótima oportunidade para que cada um compartilhe seu raciocínio e sua resolução.

No boxe **Pense e responda** do tópico **Fórmula da combinação simples**, se necessário, justificar para os estudantes por que os números binomiais apresentados são iguais:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}$$

$$\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)! \cdot [n-(n-p)]!} = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!}$$

A seção **Conexões com...** explora as combinações possíveis na confecção das placas dos automóveis, o que propicia o desenvolvimento da competência específica 3 e da habilidade 13MAT310 da área de Matemática e suas Tecnologias. Além disso, propicia o trabalho com a competência geral 1 da BNCC, uma vez que valoriza o conhecimento historicamente construído. Na seção, são apresentadas informações que envolvem o agrupamento de elementos, como foi estudado ao longo do Capítulo, e situações relacionadas ao contexto social. Pode-se aproveitar o tema da seção e propor aos estudantes que pesquisem um pouco da história dos veículos. Esse trabalho pode ser realizado em parceria com o professor do componente curricular História, da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. O texto a seguir pode colaborar com essa pesquisa.

Como foi inventado o automóvel?

Como tantas outras máquinas complexas, ele foi resultado de uma longa e lenta evolução. Ainda durante a Renascença, no século 15, o pintor e inventor italiano Leonardo da Vinci projetou um triciclo movido a corda, como um relógio. A ideia, porém, nunca saiu do papel e o automóvel só começou a ganhar vida três séculos depois, a partir do aperfeiçoamento da máquina a vapor. Bastou isso ocorrer para que o engenheiro francês Nicolas-Joseph Cugnot criasse, em 1769, a carruagem movida a vapor, uma das primeiras versões do que viria a ser o automóvel. A invenção de Cugnot demorou um pouco para se popularizar, mas em 1800 já existiam ônibus a vapor circulando pelas ruas de Paris. Esses veículos, que funcionavam queimando carvão, eram pesados, barulhentos e fedorentos – tanto que foram proibidos na Inglaterra, onde os trens já eram o principal meio de transporte.

O automóvel como o conhecemos exigia um novo salto tecnológico, que seria dado com a invenção do motor a explosão e a descoberta de que se podia usar petróleo como combustível, o que ocorreu a partir de 1850. Ainda no final do século XIX, dois engenheiros alemães, Karl Benz e Gottlieb Daimler, montaram duas fábricas concorrentes de automóveis movidos a gasolina e, por isso, são considerados os pioneiros do carro moderno. Daimler e Benz iriam, aliás, se unir em 1926, criando a Daimler-Benz, cujos carros, com o nome Mercedes-Benz, são vendidos ainda hoje. Todos os primeiros quilômetros da evolução da máquina foram percorridos na Europa. Os Estados Unidos, que até o início do século 20 só copiavam os avanços tecnológicos, mudaram essa história em 1908, quando o industrial Henry Ford passou a produzir carros padronizados em massa.

[...]

GODINHO, Renato D. Como foi inventado o automóvel? **Superinteressante**, [*s. l.*], 22 fev. 2024. Disponível em: https://super.abril.com.br/mundo-estranho/como-foi-inventado-o-automovel/. Acesso em: 24 out. 2024.

Para realizar as atividades dessa seção, sugere-se que os estudantes utilizem uma calculadora.

Na atividade **1**, com base nas informações de cada item, eles precisam determinar o número de placas do sistema Renavam que é possível criar. No item **a**, deve-se considerar que são utilizadas três letras do alfabeto e quatro algarismos, portanto o número de placas que podem ser criadas é dado por:

$$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 175\,760\,000$$

No item **b**, é preciso considerar a não repetição de letras e números, portanto o número de placas que podem ser criadas nessas condições é dado por:

$$26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 78\,624\,000$$

No item **c**, a resposta será pessoal, pois depende do nome do estudante.

Na atividade **2**, os estudantes precisam considerar o sistema de placas do modelo Mercosul para responder aos itens. No item **a**, consideram-se três letras iniciais seguidas de um número, depois uma letra e, por fim, dois números. Portanto, o número de placas que podem ser criadas nesse caso é dado por:

$$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 = 456\,976\,000$$

No item **b**, calcula-se a quantidade de placas a mais que podem ser criadas nesse novo modelo:

$$456\,976\,000 - 175\,760\,000 = 281\,216\,000$$

Para finalizar essa seção, a atividade **3** propõe uma pesquisa histórica sobre os modelos de placas que já foram utilizados no Brasil. Para saber a respeito desse assunto, acessar o *site*: https://www.portaldotransito.com.br/noticias/mobilidade-e-tecnologia/curiosidades/quantos-modelos-de-placas-de-carro-ja-teve-no-brasil/ (acesso em: 24 out. 2024).

O trabalho desenvolvido na seção **Explorando a tecnologia** leva os estudantes a compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de maneira significativa, refletindo a respeito das práticas adotadas por essa tecnologia e conhecendo o funcionamento matemático dela, desenvolvendo, assim, as competências gerais 4 e 5 da BNCC. Por meio de estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, os estudantes criam um código de programação para calcular o fatorial de um número e analisam os resultados, desenvolvendo a competência específica 4 da área de Matemática e suas Tecnologias e a habilidade EM13MAT405.

A proposta é utilizar o **Scratch**, um *software* que permite criar códigos de programação que podem auxiliar a resolução de problemas, como os de contagem e, em particular, os que envolvem uso do fatorial. A lógica de programação para a resolução de problemas e as atividades em grupo de criação de algoritmos proporcionam aulas mais dinâmicas e motivadoras. Os recursos tecnológicos incentivam o desenvolvimento do pensamento sistemático, possibilitam conhecer o modo de funcionamento da programação e contribuem para que os estudantes verifiquem a aplicação das definições estudadas, por meio da investigação e da experimentação, explorando o Tema Contemporâneo Transversal Ciência e Tecnologia.

No *site* https://scratch.mit.edu/educators/ (acesso em: 24 out. 2024), há guias que podem auxiliar os educadores a preparar e conduzir aulas e oficinas com o Scratch, além de outras informações sobre os recursos do *software*.

No boxe **Pense e responda**, espera-se que os estudantes percebam, em relação aos passos IX e X, que a variável *x* guarda, a cada repetição, as sucessivas multiplicações $n \cdot 1$, depois $n \cdot (n - 1)$, e assim por diante, até a variável *y* assumir o valor 1. É preciso inicializar a variável *x* com o valor 1 para que, cada vez que o programe rode, a variável retorne ao valor inicial, que é 1.

Na atividade **1**, os estudantes precisam refletir a respeito da instrução dada no passo VIII. Espera-se que eles percebam que substituir 10 pelo bloco **resposta** significa que a repetição das operações será feita pelo número de vezes digitado pelo usuário. No contexto do cálculo do fatorial de um número, isso significa realizar as sucessivas multiplicações. Por exemplo, se o usuário digitar o número 4, o programa vai repetir as multiplicações quatro vezes, efetuando $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Na atividade **2**, os estudantes analisam o passo X. É esperado que eles compreendam que a ideia de subtrair 1 de *y* a cada repetição refere-se à construção do conceito de fatorial de um número: fatorial de *n* é o produto dos *n* números naturais consecutivos de 1 a *n*. Assim, a cada nova interação, constrói-se o produto $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Na atividade **3**, os estudantes precisam analisar o motivo de o programa calcular o fatorial de um número ao realizar os procedimentos indicados. Espera-se que eles percebam que o programa permite, em primeiro lugar, que o usuário insira o número desejado. Em seguida, armazena esse valor em uma variável e vai repetindo o produto de n por 1, $n - 1$ por n, $n - 2$ por $n(n - 1)$, e assim sucessivamente, n vezes.

A atividade **4** propõe aos estudantes que pensem em outra maneira de criar um programa para o cálculo do fatorial de um número. Há diversas maneiras de se desenvolver esse programa. No entanto, algumas são mais "longas", isto é, usam mais linhas de programação. Analisar as variações na resolução de um problema ajuda a desenvolver o pensamento computacional dos estudantes.

Avaliação

A questão **4** da **Abertura** do Capítulo possibilita uma avaliação diagnóstica em relação à habilidade a seguir, trabalhada no Ensino Fundamental — Anos Finais.

(**EF08MA03**) Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo.

A seguir, são apresentadas sugestões de atividades cuja análise das resoluções pode contribuir para avaliar a evolução de cada estudante e orientar seus estudos.

1ª avaliação formativa: atividades **2**, **9** e **14** (páginas 146 e 147, respectivamente).

2ª avaliação formativa: atividades **21** e **32** (páginas 153 e 154, respectivamente).

3ª avaliação formativa: atividades **36** e **41** (páginas 157 e 158, respectivamente).

4ª avaliação formativa: atividades **44**, **48** e **56** (páginas 158, 162 e 163, respectivamente).

Capítulo 5

Probabilidade

Orientações

O Capítulo conduz os estudantes a refletir sobre acontecimentos em que é necessário fazer escolhas ponderando os riscos probabilísticos, bem como utilizar conceitos e procedimentos matemáticos relacionados à probabilidade para elaborar e resolver diferentes situações-problema, verificando como os resultados são interpretados nessas situações, o que colabora para o desenvolvimento das competências específicas 1, 3 e 5 da área de Matemática e suas Tecnologias, em particular, as habilidades EM13MAT106, EM13MAT311, EM13MAT312 e EM13MAT511.

O texto da **Abertura** do Capítulo propõe uma reflexão a respeito da Genética e de sua relação com a probabilidade. Pode-se utilizar o contexto apresentado nessa abertura para essa relação em atividades junto aos professores da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, particularmente, do componente curricular Biologia.

Dessa maneira, pode-se contribuir para o desenvolvimento da competência específica 2 da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, à medida que os estudantes exploram e utilizam conhecimento para interpretar a dinâmica da vida, o funcionamento e a evolução dos seres vivos. Pode-se enfatizar e explorar assuntos como organismos geneticamente modificados ou casos de hereditariedade em diversas espécies.

A atividade **1** propõe uma pesquisa a respeito dos organismos geneticamente modificados. Espera-se que os estudantes compreendam que esses organismos são modificados em laboratórios e passam por alguma alteração no seu código genético. A notícia disponível em: https://www.bbc.com/portuguese/noticias/2014/08/140819_cinco_animais_transgenicos_mv (acesso em: 8 out. 2024) pode ser um parâmetro inicial para incentivar os estudantes a refletir e pesquisar mais o tema. Nessa notícia, trabalham-se alguns aspectos entendidos como positivos e outros como negativos em relação a cinco animais transgênicos.

Na atividade **2**, os estudantes devem realizar cálculos de porcentagem para obter a quantidade de plantas vermelhas e de plantas brancas na situação apresentada. No item **a**, deve-se calcular 75% de 80 plantas, obtendo-se 60 plantas com flor vermelha, e 25% de 80 plantas, obtendo-se 20 plantas com flor branca. No item **b**, espera-se que os estudantes percebam que os valores encontrados no item anterior indicam possibilidades de acontecimentos, mas não garantem certeza.

A atividade **3** permite um levantamento dos conhecimentos prévios dos estudantes em relação à Probabilidade.

O tópico **Introdução** apresenta as características dos experimentos e fenômenos aleatórios, diferenciando-os dos experimentos e fenômenos determinísticos. Recomenda-se explicar aos estudantes que a maioria dos fenômenos e experimentos aleatórios que serão estudados no Capítulo apresentam um número discreto e finito de resultados possíveis. Além disso, vale ressaltar que as funções são modelos matemáticos para o estudo de fenômenos e experimentos determinísticos, como os fenômenos periódicos que são modelados por funções trigonométricas. Ao utilizar exemplos da vida cotidiana, o tópico trabalha a competência específica 1 da área de Matemática e suas Tecnologias, em particular, a habilidade EM13MAT106.

As definições do tópico **Espaço amostral e evento** são expressas por meio da linguagem e dos conceitos de conjuntos. No estudo do tópico **Eventos elementares equiprováveis**, pode-se apresentar outros exemplos para ilustrar a diferença entre os espaços amostrais equiprováveis e não equiprováveis associados ao mesmo experimento aleatório. Segue um exemplo.

Um casal pretende ter dois filhos. O espaço amostral $U = \{0, 1, 2\}$ representa o número de meninas que o casal pode ter, e o espaço amostral $V = \{(x, x), (x, y), (y, x), (y, y)\}$, em que x indica o nascimento de um menino e y, o de uma menina, representa o que pode acontecer em cada nascimento. Nesse caso, V é um espaço amostral equiprovável, pois todos os seus eventos são igualmente prováveis. Já U é um espaço amostral não equiprovável, pois, para o caso de o casal ter apenas uma menina, isso pode ocorrer de duas maneiras distintas: a filha pode ser a caçula ou a primogênita, enquanto os outros eventos só possuem uma chance de ocorrer. Ao analisar situações em que devem identificar o espaço amostral e eventos, os estudantes trabalham as competências específicas 3 e 5 da área de Matemática e suas Tecnologias e as habilidades EM13MAT311 e EM13MAT511, pois utilizam conceitos e definições matemáticos para construir modelos que servem para resolver situações-problema, reconhecendo os diferentes tipos de espaços amostrais.

No estudo do tópico **Tipos de eventos**, sugere-se reunir os estudantes em grupos e distribuir dois dados (de cores diferentes) para cada grupo, para que possam acompanhar na prática o exemplo proposto e definir seu espaço amostral. Destacar que evento é qualquer subconjunto do espaço amostral e que o evento impossível é descrito por um conjunto vazio, enquanto o evento certo é descrito pelo próprio espaço amostral. Propor aos estudantes que deem outros exemplos de eventos complementares e de eventos mutuamente exclusivos. Eles podem manter o contexto de lançamento de dados ou explorar outros.

No estudo do tópico **Probabilidade**, sugere-se a apresentação do vídeo **Coisa de passarinho**, disponível em: https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1070 (acesso em: 18 out. 2024), para trabalhar e ampliar o conceito de probabilidade. Nesse vídeo, é abordado o conceito de probabilidade de um evento e sua importância na previsão de fenômenos aleatórios.

Recomenda-se que o boxe **Fórum** e a seção **História da Matemática** sejam trabalhados em conjunto, pois as temáticas estão relacionadas. O boxe **Fórum** propõe um debate sobre microtransações em jogos eletrônicos, a fim de que os estudantes possam refletir e analisar criticamente esse contexto com base nos conhecimentos adquiridos sobre probabilidade. Espera-se que eles percebam que, apesar de haver alguma probabilidade de se obter o prêmio desejado, como no caso de *loot boxes*, isso pode favorecer vícios de consumo. Pode-se ampliar a discussão com base em reportagens, uma delas disponível em: https://gizmodo.uol.com.br/agu-se-junta-a-entidades-para-proibir-pratica-de-loot-boxes-nos-games/ (acesso em: 18 out. 2024). Ela retrata como entidades estão se unindo para proibir a prática do *loot box* no Brasil. No decorrer da discussão, os estudantes podem oferecer uma variedade de respostas. Alguns podem destacar que as microtransações ajudam os desenvolvedores a manter seus jogos atualizados e a oferecer suporte contínuo. Por outro lado, outros podem expressar preocupações relacionadas aos jogos de azar, especialmente quando se trata de gastar dinheiro em busca de recompensas aleatórias, o que pode gerar comportamentos compulsivos e dependências emocionais. Incentivar os estudantes a argumentar com base em informações de fontes confiáveis e com posicionamento ético auxilia no desenvolvimento da competência geral 7.

A seção **História da Matemática** relata como o matemático Jerônimo Cardano analisou jogos de azar por meio de conceitos probabilísticos. Para ampliar a discussão relacionada a esses jogos, sugere-se a leitura do texto disponível em: https://iclnoticias.com.br/bets-e-jogo-do-tigrinho/ (acesso em: 18 out. 2024). Valorizar os conhecimentos historicamente construídos para entender a realidade atual colabora para a competência geral 1.

O objetivo do tópico **Probabilidade da união de dois eventos** é apresentar mais um conceito probabilístico por meio da linguagem de conjuntos e, ao mesmo tempo, retomar os diagramas de Venn.

A atividade **31** propõe aos estudantes a elaboração de um problema com base na situação dada. Pedir a eles que troquem o problema elaborado com um colega, para cada um resolver o problema do outro. Por fim, eles devem conferir juntos as resoluções.

No estudo do tópico **Probabilidade condicional**, recomenda-se enfatizar que muitas das situações-problema relacionadas ao cálculo de probabilidade condicional são solucionadas pela razão entre o número de elementos, e não pela razão entre as probabilidades. O uso da razão entre as probabilidades na definição de probabilidade condicional se justifica pela consequência de se poder solucionar problemas que envolvem **eventos sucessivos** por meio da multiplicação de suas probabilidades, ou seja, pela seguinte implicação:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$$

A seguir, apresenta-se uma situação-problema de eventos sucessivos que pode ser utilizada como exemplo.

Em uma urna, há 5 fichas idênticas numeradas de 1 a 5. Qual é a probabilidade de se retirar, ao acaso, a ficha de número 3 e, em seguida, sem repor a primeira ficha, sortear a ficha de número 5?

Considerando o espaço amostral equiprovável $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e os eventos $B = \{3\}$, "retirar a ficha de número 3", e $A/B = \{5\}$, "sortear o número 5 dado que ocorreu o número 3 na primeira retirada", temos que:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20} = 5\%$$

Assim, a probabilidade desejada é 5%.

O estudo desse tópico desenvolve a competência específica 3 da área de Matemática e suas Tecnologias, em particular, as habilidades EM13MAT311 e EM13MAT312.

É importante destinar um tempo de aula para explorar o vídeo indicado no boxe **Para assistir**. Em seguida, pode-se propor uma discussão sobre o papel das mulheres na Ciência. Para ampliar esse assunto, pode-se propor aos estudantes que pesquisem mulheres que foram importantes nomes na Ciência, como em Matemática e em outras áreas, por exemplo, a área de Ciências da Natureza. Os resultados dessas pesquisas podem ser compartilhados em forma de linha do tempo. A respeito desse tema, recomendam-se as seguintes leituras complementares:

- AMARAL, Ana Maria L. F.; FERNANDEZ, Cecília de S.; VIANA, Isabela V. **A história de Hipátia e de muitas outras matemáticas**. 1. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de matemática (SBN), 2019. Disponível em: https://sbm.org.br/wp-content/uploads/2022/04/Livro-A-historia-de-Hipatia-e-de-muitas-outras-matematicas.pdf. Acesso em: 18 out. 2024.
- IGNOTOFSKY, Rachel. **As cientistas**: 50 mulheres que mudaram o mundo. São Paulo: Blucher, 2017.

A atividade **44** propõe aos estudantes a elaboração de um problema com base na situação dada. Pedir a eles que troquem o problema elaborado com um colega, para cada um resolver o problema do outro. Por fim, eles devem conferir juntos as resoluções.

O tópico **Probabilidades em espaços amostrais não discretos** apresenta contextos em que os espaços amostrais e os seus eventos são expressos por intervalos reais. Esse estudo favorece o desenvolvimento da competência específica 5 da área de Matemática e suas Tecnologias, em particular, a habilidade EM13MAT511, pois conduz os estudantes a investigar implicações do cálculo de probabilidades. Uma temática importante que pode ser explorada nesse tópico é o texto sobre a análise da previsão do tempo recomendado no boxe **Para ler**. Destacar que os cálculos meteorológicos são modelos matemáticos aplicados à Meteorologia, porém não garantem exatidão nos resultados, pois há vários fatores que influenciam o clima. Nesse contexto, podem-se explorar atividades que contribuam para o desenvolvimento da competência específica 2 da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. O texto a seguir pode colaborar com esse trabalho em sala de aula.

> [...]
>
> A previsão de tempo é o produto que chega para o usuário depois de várias análises feitas pelos meteorologistas. Por detrás desse resultado existem muitas operações matemáticas e análises que são necessárias para a interpretação do que poderá acontecer.
>
> O meteorologista necessita saber como está a atmosfera no momento em que se reúnem e avaliam o comportamento, através de diagnósticos de imagem de satélite, cartas de superfícies e dados observados. Esses dados observados são um chute inicial para uma simulação matemática do que a atmosfera está vendo para o estado futuro. A previsão numérica de tempo é utilizada como uma das mais importantes ferramentas da meteorologia nos últimos anos.
>
> Temos que analisar todas as ferramentas e discutir com vários pesquisadores e meteorologistas para se obter uma previsão de consenso e assim disponibilizá-la para o usuário.
>
> Para se fazer uma simulação numérica são necessários equipamentos com características e qualidade, por isso, a necessidade de supercomputadores que possam fazer os cálculos matemáticos, rapidamente, e disponibilizar para análise dos meteorologistas.
>
> [...]

BRASIL. Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação. Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais.**1**: Como é feita a previsão de tempo. São Paulo: Inpe, c2018. Disponível em: https://www.cptec.inpe.br/glossario.shtml#6. Acesso em: 18 out. 2024.

A seção **Conexões com...** tem o objetivo de possibilitar a discussão e a reflexão das implicações de uma gravidez na adolescência, explorando os Temas Contemporâneos Transversais Saúde, Vida Familiar e Social e Ciência e Tecnologia, com base em informações e análises de dados matemáticos, levando os estudantes a argumentar com base em informações confiáveis para defender ideias do ponto de vista pessoal em relação à saúde física e emocional, desenvolvendo as competências gerais 7 e 8. Além disso, essa seção explora e desenvolve a competência específica 1 da área de Matemática e suas Tecnologias e a habilidade EM13MAT106.

Sugere-se, nesse momento, um trabalho em parceria com o professor do componente curricular de Biologia, da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, desenvolvendo a competência específica 2 dessa área, para que os estudantes possam pesquisar informações com outro viés em relação ao mesmo tema e elaborar cartazes informativos para expor os resultados na escola.

É importante enfatizar aos estudantes que, em postos de saúde ou em qualquer serviço público de saúde, além de estações de metrô em grandes centros urbanos, métodos contraceptivos são distribuídos gratuitamente. Para mais informações sobre isso, consultar: https://www.gov.br/aids/pt-br/assuntos/prevencao-combinada/usar-preservativos-masculinos-femininos-e-gel-lubrificantes (acesso em: 18 out. 2024).

Na atividade **1**, espera-se que os estudantes associem a eficácia de determinado método à probabilidade de se engravidar ao utilizá-lo. Por exemplo, uma eficácia de 91% significa que, a cada 100 pessoas que usarem esse método, 9 podem engravidar. É importante destacar que os métodos contraceptivos não possuem eficácia de 100%. Espera-se que os estudantes apontem que, além da eficácia em relação à probabilidade de se engravidar, é igualmente importante se prevenir contra as infecções sexualmente transmissíveis (ISTs).

Na atividade **2**, os estudantes podem citar falta de informação, falta do diálogo entre casais, entre outros fatores.

A seção **Explorando a tecnologia** propõe a elaboração de um programa de computador, utilizando o *software* **Scratch**, que calcule a frequência relativa de um resultado de um experimento aleatório repetido várias vezes sob as mesmas condições, desenvolvendo, assim, a competência específica 4 da área de Matemática e suas Tecnologias, em particular, a habilidade EM13MAT405. No estudo da seção, os estudantes podem exercitar a curiosidade, testar hipóteses e formular e resolver problemas, criando soluções tecnológicas, desenvolvendo, assim, a competência geral 2 e o pensamento computacional. Para mais informações sobre os recursos do Scratch, pode-se acessar o *site*: https://scratch.mit.edu/educators/ (acesso em: 18 out. 2024).

Nas atividades propostas, os estudantes poderão verificar empiricamente que, à medida que é maior o número de repetições do experimento, obtém-se a frequência relativa mais próxima da probabilidade 0,5. É importante explicar que a frequência relativa é determinada repetindo-se um experimento real, por meio de uma linguagem de computação, e que o mesmo experimento poderia ser repetido fisicamente. Já a probabilidade 0,5 de se sortear um número par de 1 a 50 é obtida pelo modelo matemático, ou seja, sem se realizar o experimento no mundo físico. Desse modo, o modelo matemático possibilita estudar fenômenos e experimentos aleatórios sem a necessidade de realizá-los ou repeti-los várias vezes no mundo físico.

No item **d** da atividade **1**, espera-se que os estudantes respondam que, conforme se aumentou o número de repetições do experimento, uma frequência relativa mais próxima de 0,5 foi obtida.

Avaliação

A questão **3** da **Abertura** do Capítulo tem a finalidade de diagnosticar os conhecimentos prévios que os estudantes possuem em relação ao estudo de Probabilidade. De acordo com a BNCC, entre os conteúdos do Ensino Fundamental — Anos Finais, é esperado:

(**EF06MA30**) Calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por número racional (forma fracionária, decimal e percentual) e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos sucessivos.

(**EF07MA34**) Planejar e realizar experimentos aleatórios ou simulações que envolvem cálculo de probabilidades ou estimativas por meio de frequência de ocorrências.

(**EF08MA22**) Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1.

(**EF09MA20**) Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos.

Após esse diagnóstico, sugere-se um planejamento que possibilite a consolidação dessas habilidades e, ao mesmo tempo, contemple o desenvolvimento do que é esperado para o Ensino Médio.

A seguir, são apresentadas sugestões de atividades cuja análise das resoluções pode contribuir para avaliar a evolução de cada estudante e orientar seus estudos.

1ª avaliação formativa: atividades **1** e **2** (página 179).

2ª avaliação formativa: atividades **8**, **16** e **17** (páginas 184 e 185, respectivamente).

3ª avaliação formativa: atividades **28**, **39** e **45** (páginas 190, 195 e 196, respectivamente).

4ª avaliação formativa: atividades **56** e **62** (páginas 200 e 203, respectivamente).

Capítulo 6 Matrizes e sistemas lineares

Orientações

O Capítulo conduz os estudantes a resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e interpretações gráficas, favorecendo o desenvolvimento da competência específica 3 da área de Matemática e suas Tecnologias, em particular, a habilidade EM13MAT301.

A **Abertura** do Capítulo menciona a lei de Lavoisier: em uma reação química, em um sistema fechado, os reagentes e os produtos apenas se arranjam, sem que haja perda nem ganho de elementos. Em outras palavras, utilizando-se uma frase popular, "na natureza, nada se perde, nada se cria, tudo se transforma". Também é mencionado o balanceamento de equações para determinar a quantidade de substâncias presentes em uma reação química. Ao explorar esses assuntos, os estudantes estão trabalhando as competências gerais 1 e 2, pois estão em contato com conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social e cultural e exercitam a curiosidade intelectual recorrendo à abordagem própria das ciências, incluindo a reflexão e a análise crítica. Também desenvolvem a competência específica 3 de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, pois analisam situações com base no conhecimento científico.

Para ampliar os comentários a respeito de Lavoisier, pode-se apresentar o texto a seguir.

> [...]
>
> Na década de 1780, Lavoisier usou sua teoria do oxigênio para construir uma estrutura completamente nova para a química.
>
> Ele esclareceu o que é um elemento químico: uma substância, disse ele, que não pode ser reduzida a nada mais simples.
>
> Ele compilou uma lista de nada menos que 33 desses elementos e desenvolveu métodos para dividir compostos químicos em seus elementos componentes e calcular as proporções relativas de cada um.
>
> Além disso, ele introduziu um moderno sistema de nomes que permite que as equações químicas sejam escritas em uma linguagem universal que seja entendida em todo o mundo.
>
> Lavoisier apresentou tudo isso em um livro de 1789, intitulado *Traité Elementaire de Chimie* (ou Tratado elementar de Química), publicação que lançou as bases para o futuro desta área da ciência.
>
> Ele é considerado o pai da química moderna e dá nome à conhecida Lei de Lavoisier, ou Lei da Conservação das Massas, princípio de que nada se perde ou se cria (o conceito já havia sido apresentado antes por outro cientista, o russo Mikhail Lomonosov, mas o texto deste não repercutiu).
>
> [...]

VENTURA, Dalia. Antoine Lavoisier, o químico revolucionário que foi decapitado graças à disputa científica. **BBC News Brasil**, [*s. l.*], 28 dez. 2019. Disponível em: https://www.bbc.com/portuguese/geral-50861019. Acesso em: 18 out. 2024.

As questões da **Abertura** do Capítulo têm como objetivo verificar a compreensão dos estudantes a respeito do texto e levantar os conhecimentos prévios deles sobre o assunto apresentado. Elas podem ser desenvolvidas em parceria com o professor de Química, da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

A atividade **1** busca identificar se os estudantes já tiveram contato com alguma situação envolvendo uma reação química, seja de modo real, seja virtual. Como sugestão, propor a eles que assistam ao vídeo produzido pelo Canal Futura disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=-Q1bLUfRauE (acesso em: 18 out. 2024). Ele apresenta o que é uma reação química, as leis de Lavoisier e de Proust, o que são equações químicas e o motivo de ser necessário balanceá-las.

As atividades **2, 3** e **4** têm como finalidade possibilitar uma avaliação diagnóstica relacionada aos assuntos de matrizes e sistemas lineares.

O texto da **Introdução** relaciona o estudo de matrizes a aplicações delas na tecnologia. Verificar o que os estudantes sabem a respeito da resolução de televisores e monitores. Eles podem investigar termos como 4K, HD, OLED e 5MP para enriquecer essa discussão. Comentar que a resolução de um monitor, por exemplo, é uma matriz cujas células são formadas por *pixels* (junção das palavras *picture* (imagem) e *element* (elemento), em inglês, ou seja, "elementos de imagem"). Um monitor com resolução, em *pixel*, de 600 × 800 seria formado por uma matriz de 600 linhas por 800 colunas, contando com 480 000 *pixels*. Aumentando-se a resolução para, por exemplo, 768 × 1 024, tem-se uma matriz com 786 432 *pixels*. Assim, quanto maior a resolução, maior é o número de células da matriz e, consequentemente, maior é o número de pontos de cores do monitor e melhor é a qualidade da imagem.

O tópico **Matrizes** se inicia estabelecendo uma relação entre matrizes e tabelas, com o intuito de utilizar conhecimentos já adquiridos pelos estudantes relacionados às tabelas para introduzir o conceito de matrizes. Comentar que o termo tabela, *tableau*, em francês, recebeu esse nome pelo matemático francês

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857). O primeiro boxe **Pense e responda** desse tópico tem o objetivo de verificar se os estudantes compreenderam como se identifica um elemento em uma matriz. Para ampliar essa questão, pode-se propor a eles que escrevam uma matriz e peçam a um colega para identificar alguns elementos específicos. Ao final desse tópico, o boxe **Saiba que...** menciona que a matriz nula é aquela cujos elementos são todos iguais a zero.

Ao apresentar a diagonal principal, no tópico **Matriz quadrada**, verificar o que os estudantes conseguem observar em relação à posição dos elementos a_{ij} da diagonal principal. Espera-se que eles notem que $i = j$. O mesmo questionamento pode ser feito em relação aos elementos a_{ij} da diagonal secundária, para que eles percebam que $i + j$ corresponde a uma unidade a mais do que a ordem da matriz. O boxe **Pense e responda desse tópico** leva os estudantes a concluir que a matriz identidade é formada apenas pelos números 0 e 1, sendo o número 1 presente apenas na diagonal principal.

Na atividade **3**, pode-se propor aos estudantes que construam um quadrado mágico de ordem 3 com os números de 1 a 9; a partir dos quadrados mágicos construídos, é possível explorar diferentes assuntos. Por exemplo, verifica-se que os números do quadrado mágico formam uma PA de razão unitária (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) cuja soma dos termos é 45. Assim, a soma dos números de cada uma das linhas, das colunas e das diagonais deve ser igual a 15, pois $45 : 3 = 5$.

No estudo do tópico **Igualdade de matrizes**, recomenda-se mostrar um contraexemplo, isto é, matrizes que têm o mesmo número de elementos e os mesmos valores apresentados, mas em posições diferentes, para que os estudantes notem que elas não são iguais, apesar de elas apresentarem os mesmos valores, como as matrizes A e B a seguir.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

No tópico **Matriz oposta**, a subtração $A - B$ de duas matrizes de mesma ordem é definida como uma adição entre a matriz A e a matriz oposta de B, isto é, $A - B = A + (-B)$. Sugere-se explicar aos estudantes que a subtração de dois números reais também pode ser interpretada do mesmo modo, mostrando exemplos como: $5 - 3 = 5 + (-3)$.

Nos tópicos **Propriedades da adição de matrizes** e **Propriedades da multiplicação de matrizes**, sugere-se comparar essas propriedades às propriedades da adição e da multiplicação de números reais. Essa comparação possibilita aos estudantes compreenderem que as operações de adição e multiplicação, quando são definidas para entes matemáticos distintos, nesse caso, números reais e matrizes, apresentam propriedades específicas, como é o caso, por exemplo, da propriedade comutativa da multiplicação, que é válida para os números reais, mas não para as matrizes.

No boxe **Saiba que...** do tópico **Propriedades da multiplicação de matrizes**, questionar os estudantes sobre a possibilidade de $A \cdot A = A^2$ valer para qualquer matriz. A partir da discussão acerca da necessidade de o número de colunas da primeira matriz ser igual ao número de linhas da segunda matriz, espera-se que eles concluam que a potenciação de matrizes somente é possível para matrizes quadradas.

O item **d** da atividade **18** pede aos estudantes que elaborem um problema que possa ser resolvido com informações da atividade. Propor que compartilhem os problemas elaborados, a fim de verificar quais conceitos matemáticos estão presentes nessas produções.

A seção **Conexões com...** traz uma aplicação de matrizes na gestão do trânsito urbano, em particular, no planejamento do tempo de funcionamento dos semáforos, explorando o Tema Transversal Contemporâneo Trabalho. Essa seção pode ser desenvolvida em parceria com os professores de Sociologia e de Geografia, da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Na atividade **1**, os estudantes precisam realizar a pesquisa proposta no enunciado e pensar em uma alternativa possível para reduzir os problemas causados pelo tráfego intenso de veículos automotores. Essa atividade ajuda a desenvolver a competência geral 7, pois os estudantes precisam pesquisar e argumentar, com base em fatos, dados e informações confiáveis, a defesa da proposta elaborada por eles.

A atividade **2** propõe uma pesquisa a respeito da Engenharia de Tráfego. Para obter informações a respeito desse tema, sugere-se acessar: https://www.portaldotransito.com.br/educacao/a-engenharia-de-trafego-e-o-planejamento-urbano-para-um-transito-melhor-2/ (acesso em: 18 out. 2024). A investigação sobre esse desafio do mundo contemporâneo colabora para o desenvolvimento da competência específica 2 da área de Matemática e suas Tecnologias.

A atividade **3** propõe a elaboração de um problema pelos estudantes com base no exemplo apresentado. É interessante que esse problema e a respectiva resolução sejam apresentados ao restante da turma, para que se possa verificar o que as produções têm de análogo e de diferente. Para ampliar as pesquisas realizadas, os estudantes podem consultar o artigo "Modelos matemáticos para otimização do tráfego urbano semaforizado", disponível em: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2179-84512013000300008 (acesso em: 18 out. 2024), para saber mais informações sobre modelos matemáticos e trânsito e podem pesquisar a relação entre a quantidade de veículos nas cidades e a poluição do ar por meio do *site*: https://jornal.usp.br/?p=135194 (acesso em: 18 out. 2024).

O estudo do tópico **Sistemas lineares** se inicia com a definição de **equação linear**, apresentando problemas do cotidiano que envolvem equações lineares simultâneas e, assim, desenvolvendo a competência específica 3 da área de Matemática e suas Tecnologias e a habilidade EM13MAT301. Nesse momento, é interessante recordar com os estudantes a diferença entre incógnita, usada em equações, e variável, usada em funções, por exemplo.

No primeiro boxe **Pense e responda** desse tópico, pedir aos estudantes que justifiquem a resposta dada. Espera-se que, com a informação "a quantidade de viagens de ônibus que vai fazer será o dobro da quantidade de viagens de trem", os estudantes cheguem à equação $x = 2z$. Ao considerar $y = 0$ (Andréa não vai utilizar o metrô), tem-se:

$$3 \cdot 2z + 0 + 2z = 120 \rightarrow 8z = 120 \rightarrow z = 15$$

Como $x = 2z$, então:

$$x = 2 \cdot 15 = 30$$

No segundo boxe **Pense e responda**, no primeiro item, os estudantes vão determinar duas possíveis soluções para a equação dada. Compartilhar as diferentes possibilidades de resposta. No segundo item, é esperado que eles percebam que a terna não é solução da equação dada, pois, ao se substituírem os valores, chega-se a uma sentença falsa.

O boxe **Fórum** retrata o auxílio da passagem estudantil gratuita, ou meia-tarifa, que contribui para que os estudantes exerçam seu direito de acesso aos estudos.

Na atividade **1**, a resposta depende do município em que os estudantes residem. Caso haja estudantes que morem em municípios diferentes, ao compartilhar as respostas, verificar se o benefício concedido é o mesmo.

A atividade **2** possibilita aos estudantes refletirem sobre a importância desse tipo de auxílio em relação ao orçamento familiar. Nesse momento, é importante que eles argumentem com base em fatos, dados e informações confiáveis, defendendo a opinião deles sobre o assunto, desenvolvendo, assim, a competência geral 7. Essa discussão pode ser encaminhada por meio de um trabalho integrado com os professores da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Caso o município não conte com esse tipo de auxílio para os estudantes, sugerir que escrevam um projeto propondo a criação de um programa como esse, com a colaboração dos professores e por meio de pesquisas de projetos análogos, trabalhando, assim, a competência geral 10. Outra possibilidade é propor que pesquisem sobre esse auxílio em outros munícipios da região.

Se o município possuir esse tipo de auxílio, pode-se propor aos estudantes que elaborem um cartaz contendo dados estatísticos do transporte municipal e a importância dessa política para a comunidade local. Com isso, eles desenvolvem a competência geral 4, pois utilizam diferentes linguagens e conhecimentos matemáticos para expressar e compartilhar informações.

O tópico **Sistemas lineares *m* × *n*** começa com a definição desse tipo de sistema. Em seguida, recomenda-se apresentar alguns sistemas que não são lineares, por exemplo:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ x^2 + 2y + 3z = 1 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

Não é linear, porque possui uma equação polinomial do 2º grau.

O tópico **Classificação de sistemas lineares** utiliza três exemplos de sistemas 2×2, com a finalidade de retomar os métodos de resolução por adição e por substituição e de apresentar a interpretação geométrica das classificações desses sistemas, em que:

- pares de retas concorrentes representam sistemas possíveis e determinados;
- pares de retas paralelas representam sistemas impossíveis;
- pares de retas coincidentes representam sistemas possíveis e indeterminados.

Ao desenvolver esse tópico, uma possibilidade é pedir aos estudantes que utilizem um *software* de matemática dinâmica para visualizar as representações gráficas das equações lineares.

Sugere-se comentar que, em alguns casos, é possível classificar um sistema em possível e indeterminado sem a necessidade de se resolver esse sistema. Isso pode ser feito observando-se os coeficientes das incógnitas e os termos independentes das duas equações. Por exemplo, no sistema $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases}$, é possível notar que os coeficientes das incógnitas x e y da segunda equação são o dobro dos coeficientes das incógnitas da primeira equação e, além disso, o termo independente da segunda equação é o dobro do termo independente da primeira equação. Ou seja, qualquer par ordenado que seja solução da primeira equação também será solução da segunda equação. Assim, a reta que representa a segunda equação é coincidente com a reta que representa a primeira equação; logo, o sistema é possível, pois tem solução, mas indeterminado, pois apresenta infinitas soluções.

O exemplo anterior é diferente do sistema $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 5 \end{cases}$, pois, neste último, o termo independente da segunda equação não é o dobro do termo independente da primeira equação. Na primeira, a soma de dois números é 5 e, na segunda, o dobro da soma desses mesmos números também é 5, o que é algo impossível de acontecer. Logo, o sistema não tem solução, sendo classificado como impossível.

O item **a** da atividade resolvida **7** mostra como obter e representar as infinitas soluções dos sistemas possíveis e indeterminados.

A atividade **35** retoma o tema da abertura do Capítulo e ilustra como os sistemas lineares modelam o balanceamento de equações químicas.

No boxe **Pense e responda** do tópico **Sistemas lineares escalonados**, no primeiro item, espera-se que os estudantes percebam que, pela equação IV, obtém-se o valor da incógnita *w*, substituindo esse valor na equação III, obtém-se o valor de *z*, e assim por diante, até se chegar à equação I, obtendo-se o valor de *x*. No segundo item, as respostas são pessoais.

A seção **Explorando a tecnologia** se inicia apresentando a maneira como um sistema linear é representado de forma matricial. Ela propõe aos estudantes que explorem o *site* **Matrix calculator**, disponível em https://matrixcalc.org/pt/ (acesso em: 18 out. 2024), para enriquecer o trabalho sobre o escalonamento de sistemas. Esse trabalho colabora para o desenvolvimento da competência geral 1, pois são utilizados conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico e digital, da competência geral 5, na medida em que explora o pensamento computacional e o uso de tecnologias digitais, e da competência específica 4 da área de Matemática e suas Tecnologias, pois são utilizados diferentes registros de representação matemáticos.

Além de fornecer métodos variados para a resolução de sistemas de equações lineares, o programa mostra cada uma das etapas realizadas, permitindo acompanhar as operações feitas até se chegar à solução do sistema.

As questões propostas têm como objetivo verificar a compreensão dos estudantes ao utilizar esse programa. Recomenda-se propor outras questões que os levem a aplicar os conceitos estudados no Capítulo. Uma sugestão é que eles criem um sistema linear e peçam a um colega que o resolva, conferindo a resolução no programa.

Na atividade **1**, espera-se que os estudantes identifiquem que o erro cometido no escalonamento foi em relação ao sinal do número 5, que deveria ser negativo, quando adicionaram o elemento a_{22} com $(-2a_{12})$ ao substituírem a equação L_2 pela equação L_4, em que L_4 é resultado da adição de L_2 com o produto de L_1 por -2, cálculo apresentado na parte inferior da página 247 do Livro do estudante. Esse erro interferiu no restante do processo de escalonamento e, consequentemente, na solução.

Na atividade **2**, os estudantes precisam determinar o sistema escalonado equivalente ao sistema dado e verificar a solução no programa, incentivando-se, assim, a habilidade EM13MAT301. Espera-se que eles encontrem o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ \quad\quad\;\; y = 2 \\ \quad\quad\;\; z = 3 \end{cases}$$

Como $z = 3$ e $y = 2$, temos $x + 2 + 3 = 6$, então $x = 1$. Assim, a solução desse sistema é $S = \{(1, 2, 3)\}$.

Avaliação

A atividade **4** da **Abertura** do Capítulo possibilita uma avaliação diagnóstica da habilidade a seguir, que foi trabalhada no Ensino Fundamental − Anos Finais.

(**EF08MA08**) Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso.

A seguir, apresentam-se sugestões de atividades cuja análise das resoluções pode contribuir para avaliar a evolução de cada estudante e orientar seus estudos.

1ª avaliação formativa: atividades **2** e **5** (páginas 220 e 221, respectivamente).

2ª avaliação formativa: atividades **13**, item **a**, e **17** (páginas 228 e 229, respectivamente).

3ª avaliação formativa: atividades **29** e **35** (páginas 239 e 240, respectivamente).

4ª avaliação formativa: atividade **38** (página 245).

Capítulo 7

Transformações geométricas

Orientações

O Capítulo oferece a oportunidade para que os estudantes pesquisem e explorem a obra de Maurits Escher para investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, em especial as transformações isométricas e homotéticas, contribuindo para o desenvolvimento da competência específica 1 da área de Matemática e suas Tecnologias, em específico, a habilidade EM13MAT105. Além disso, o Capítulo proporciona debates acerca da importância da Etnomatemática, explorando seus limites e suas potencialidades, valorizando e utilizando diversas manifestações artísticas e culturais e conhecimentos historicamente construídos por diversos povos, contribuindo para o desenvolvimento das competências gerais 1 e 3 da BNCC.

O tema apresentado na **Abertura** do Capítulo, os bordados de Buriti dos Lopes, município do estado do Piauí que é conhecido como a cidade dos bordados, favorece o trabalho com as competências gerais 1, 3 e

9 da BNCC e aborda o Tema Contemporâneo Transversal Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras, pois estimula a valorização das manifestações artísticas e culturais, promovendo o acolhimento da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza. Além disso, a competência específica 1 de Matemática e suas Tecnologias é trabalhada, uma vez que são utilizados conceitos matemáticos para interpretar situações em contextos cotidianos, de modo a contribuir para uma formação geral. Para isso, é oportuno retomar a Etnomatemática, que é a valorização e o reconhecimento da matemática praticada por grupos culturais, tais como comunidades urbanas e rurais, classes profissionais, sociedades indígenas e tantos outros que se identificam por meio de objetivos e tradições comuns ao grupo.

A seguir, tem-se a resposta da atividade **3** da **Abertura**.

Respostas possíveis:

- Uma figura é a imagem refletida da outra, como se a reta fosse um espelho.
- Duas figuras semelhantes têm formatos iguais, porém medidas diferentes, como dois quadrados que têm lados de medidas diferentes.
- Duas figuras congruentes são idênticas, como dois quadrados que têm a mesma medida de lado.

A **Introdução** pode ser trabalhada de forma interdisciplinar com a área de Linguagens e suas Tecnologias, em parceria com o professor do componente curricular Arte, incentivando pesquisas a respeito do artista holandês Escher, suas obras, suas técnicas etc., ampliando e valorizando, assim, o repertório cultural dos estudantes por meio das produções artísticas. Para incentivar a pesquisa, indicamos os materiais a seguir, que contêm mais detalhes sobre o trabalho de Escher.

- M. C. ESCHER COLLECTION. Baarn (Países Baixos), c2024. *Site*. Disponível em: https://mcescher.com/. Acesso em: 24 out. 2024.
  Site oficial de M. C. Escher (em inglês), que apresenta uma biografia do artista, suas principais obras e informações sobre exposições.
- MACHADO, Bruno. Quem foi M. C. Escher? **Superinteressante**, [*s. l.*], 22 fev. 2024. Disponível em: https://super.abril.com.br/mundo-estranho/quem-foi-m-c-escher/. Acesso em: 24 out. 2024.
  Artigo que traz informações a respeito do artista, apresentadas com linguagem acessível.
- MATTOS, Walter. Desvendando a técnica de M. C. Escher. *In*: MATTOS, Walter. **Walter Mattos**. [*S. l.*], 14 dez. 2015. Blogue. Disponível em: https://waltermattos.com/tutoriais/desvendando-a-tecnica-de-escher/. Acesso em: 24 out. 2024.
  Texto do *site* do *designer* Walter Mattos, que explora as técnicas de Escher em seus trabalhos e divulga vídeos explicativos.

Além disso, as xilogravuras de Escher podem ser vistas em https://mcescher.com/gallery/woodcut/, e as litogravuras, em https://mcescher.com/gallery/lithograph/ (acessos em: 24 out. 2024).

O vídeo **Escher working on Snakes** [Escher trabalhando em **Serpentes**], disponível em: https://mcescher.com/about/video-on-m-c-escher/ (acesso em: 24 out. 2024), mostra o artista trabalhando na xilogravura **Serpentes**, de 1969.

As **Transformações isométricas** trabalhadas no Capítulo são a reflexão, a translação, a rotação e as suas composições. A palavra isometria vem do grego *iso*, que significa "igual", e *metria*, que remete a medida, medição. Assim, é possível dizer que a palavra isometria significa "medidas iguais". As principais propriedades da isometria são:

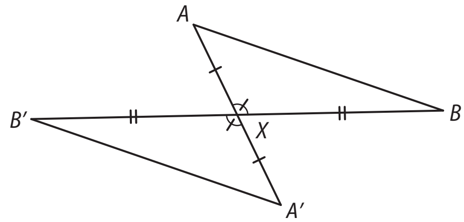
- Preserva colinearidade, isto é, se P, Q e R são três pontos colineares, então suas respectivas imagens pela transformação T são colineares.
- Preserva segmentos de reta, isto é, se A e B são pontos e A' e B' são suas imagens pela transformação T, então o segmento AB é congruente ao segmento $A'B'$.
- Preserva retas, ou seja, se r é uma reta, então sua imagem r' pela transformação T também é uma reta.
- Preserva triângulos, se ABC é um triângulo, então sua imagem $A'B'C'$ pela transformação T também é um triângulo congruente ao triângulo ABC.
- Preserva ângulos, se ABC é um ângulo com vértice em B, então sua imagem $A'B'C'$ pela transformação T também é um ângulo com vértice em B' congruente ao ângulo ABC.
- Preserva perpendicularidade entre retas, isto é, se a reta AB é perpendicular à reta AC em A, então as retas $A'B'$ e $A'C'$, respectivas imagens de AB e AC pela transformação T, também são perpendiculares em A'.

As demonstrações dessas propriedades e outras possibilidades didáticas para a abordagem dos assuntos do Capítulo podem ser consultadas na tese **Transformações geométricas planas: um estudo experimental e dinâmico**, disponível em: https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/45/45135/tde-03102019-155843/publico/Dissertacao_Marco_Antonio_da_Slva_Ribeiro_Original.pdf (acesso em: 24 out. 2024).

Na **reflexão em relação a um ponto**, recomenda-se propor aos estudantes a demonstração de que ela é uma isometria.

Demonstração

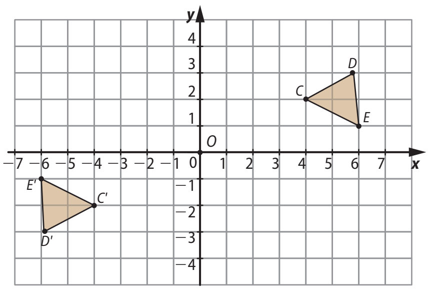
Observe que, dados dois pontos quaisquer A e B ($A \neq B$) do plano α e suas imagens A' e B', obtidas pela reflexão desses pontos em relação a um ponto X ($X \in \alpha$), os triângulos ABX e $A'B'X$ são congruentes pelo casos LAL, pois $AX = A'X$, $BX = B'X$ e os ângulos $A\hat{X}B$ e $A'\hat{X}B'$ são opostos pelo vértice. Portanto, $AB \equiv A'B'$.



SERGIO LIMA

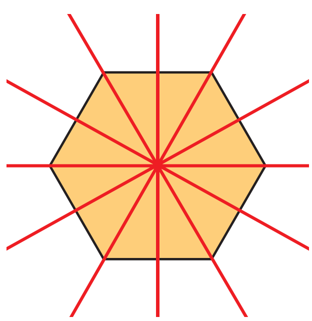
A seguir, apresentam-se duas propostas de atividades complementares para o tópico **Reflexão**.

1. Determine a imagem $C'D'E'$, reflexão em relação ao ponto O do triângulo CDE.



EDITORIA DE ARTE

2. Determine os eixos de simetria de um hexágono regular.

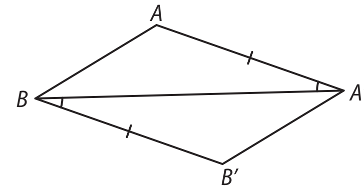

EDITORIA DE ARTE

Na **Translação**, recomenda-se propor aos estudantes que expliquem, por meio de argumentos matemáticos, por que ela é uma isometria, apresentando os dois casos possíveis.

Primeiro caso. Dados dois pontos quaisquer A e B ($A \neq B$) e o vetor $\vec{v}$ do plano α, a reta AB é paralela ao vetor ou seja, os pontos A e B e suas imagens A' e B' são colineares. Nesse caso, os estudantes podem considerar as imagens $A' = A + \vec{v}$ e $B' = B + \vec{v}$ e observar que:

$d(A', B') = |B' - A'| = |(B + \vec{v}) - (A + \vec{v})| = |B - A| = d(A, B)$

Segundo caso. Dados dois pontos quaisquer A e B ($A \neq B$) e o vetor $\vec{v}$ do plano α, a reta AB não é paralela ao vetor $\vec{v}$. Nesse caso, os estudantes podem argumentar que os triângulos $BA'A$ e $BA'B'$ são congruentes pelo caso LAL, pois BA' é um lado comum, os segmentos AA' e BB' são congruentes e paralelos por causa da translação e os ângulos $A\hat{A'}B$ e $A'\hat{A}B'$ são alternos internos, logo $AB = A'B'$.



SERGIO LIMA

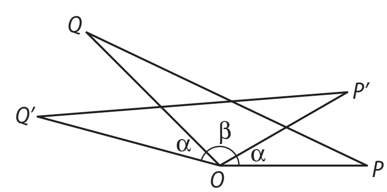
Na **Rotação**, recomenda-se propor novamente aos estudantes que expliquem, por meio de argumentos matemáticos, por que ela é uma isometria, apresentando os seguintes casos:

Primeiro caso. Os pontos O, P e Q são colineares, sendo O o centro da rotação de ângulo α. Nesse caso, os estudantes podem argumentar que, se P' e Q' são, respectivamente, as imagens de P e Q pela rotação de centro em O e ângulo α, pela definição de rotação, $OP = OP'$ e $OQ = OQ'$, logo:

$d(P', Q') = d(O, P') + d(O, Q') = d(O, P) + d(O, Q) = d(P, Q)$, quando O está entre P e Q; ou

$d(P', Q') = |d(O, P') - d(O, Q')| = |d(O, P) - d(O, Q)| = d(P, Q)$, quando O não está entre P e Q.

Segundo caso. Os pontos O, P e Q não são colineares, sendo O o centro da rotação de ângulo α. Nesse caso, se P' e Q' são, respectivamente, as imagens de P e Q pela rotação de centro em O e ângulo α, então os triângulos POQ e $P'OQ'$ são congruentes pelo caso LAL, pois $OP = OP'$, $OQ = OQ'$ e os ângulos $P\hat{O}Q = P'\hat{O}Q' = \alpha + \beta$.



SERGIO LIMA

O boxe **Fórum** é uma oportunidade de integrar conhecimentos e, em certos casos, ampliar o universo cultural dos estudantes, favorecendo o desenvolvimento das competências gerais 1, 3 e 9 e do Tema Contemporâneo Transversal Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras. Ao explorar as figuras do ponto de vista matemático, comentar a respeito da possibilidade de se unir mais de um tipo de isometria para se obter uma figura. Por exemplo, podem ser associadas uma reflexão e uma translação. O texto a seguir pode subsidiar a discussão.

> [...]
>
> A representação gráfica visual é uma parte do estudo sobre linguagem visual. Conduz mensagens inteligíveis e pode representar tanto um padrão decorativo para um observador externo, como um significado para indivíduo de uma determinada cultura. Por esta razão, para um integrante de uma comunidade indígena este tipo de representação visual pode

ser um motivo que informa sobre a cultura, sua cosmovisão e suas mitologias.

[...]

[...] [A] arte nas sociedades indígenas cumpre uma função social e se insere no âmbito de outras expressões culturais humanas. É uma criação em conjunto que passada de geração em geração cria memória e identidade ao grupo.

[...] A ornamentação para o indígena integra o objeto a que se aplica, seja ele o corpo humano ou um artefato. [...]

[...]

O grafismo faz parte da vida social dos povos tradicionais, mesmo que tenha se perdido no tempo, é fator de identidade cultural. A arte está na história e nas experiências de uma sociedade: suas especificidades, autonomia e valor estético não a separam das outras manifestações da vida. [...]

[...]

CAVALCANTE, Ana Luisa B. L. *et al*. A iconografia em comunidades indígenas. **Projética**, Londrina, v. 4, n. 2, p. 9-28, jul./dez. 2013. p. 13-17. Disponível em: https://ojs.uel.br/revistas/uel/index.php/projetica/article/view/16043/30627. Acesso em: 14 out. 2024.

As imagens apresentadas no boxe como exemplos podem ser exploradas para que os estudantes reconheçam visualmente as isometrias. Como atividade de ampliação do conteúdo, pode-se propor que identifiquem simetrias e tracem eixos de simetria.

No tópico **Composição de transformações**, comentar com os estudantes que a composição de transformações só é possível porque as transformações no plano α são funções bijetoras $T: \alpha \rightarrow \alpha$. Em outras palavras, só é possível a composição $f(g(x))$ se o conjunto imagem da função g for igual ao domínio da função f, ou seja, $\text{Im}(g) = \text{D}(f)$.

Para iniciar o tópico **Transformações homotéticas**, pode-se comentar que as transformações isométricas estudadas transformam figuras planas em figuras congruentes a elas. Já as transformações homotéticas transformam uma figura do plano em uma figura semelhante a ela. Trata-se de uma semelhança que preserva ângulos, mas altera distâncias, ampliando ou reduzindo a figura na mesma razão. Como sugestão de leitura e de atividades complementares para esse tópico, consultar a página: http://clubes.obmep.org.br/blog/wp-content/uploads/2020/02/const_Geom_homot_menor.pdf (acesso em: 24 out. 2024).

Uma atividade interessante relacionada à homotetia é a construção do fractal triângulo de Sierpinski no **GeoGebra**. Para desenvolver essa atividade, consultar: https://www.youtube.com/watch?v=X_D4BXramdc (acesso em: 24 out. 2024).

Outra atividade possível é a construção de um pantógrafo. No endereço eletrônico: https://www.youtube.com/watch?v=Ji7YorM_t_0 (acesso em: 24 out. 2024), há um vídeo com orientações sobre essa construção, que pode ser indicado aos estudantes.

Um dos objetivos do tópico **Transformações geométricas e matrizes** é ilustrar, de modo simplificado, como matrizes e transformações geométricas são aplicadas na área da computação gráfica, pois permitem ampliar, reduzir, modelar e manipular objetos que estão contidos em um plano. Em um ambiente virtual, em que a descrição da forma e dos movimentos é executada por programas de computadores, são necessários algoritmos que efetuem operações matriciais e, consequentemente, manipulam os objetos graficamente.

A seção **Conexões com...** proporciona uma abordagem do assunto pela ótica da Etnomatemática e favorece o trabalho com a competência específica 1 e a habilidade EM13MAT105 da área de Matemática e suas Tecnologias, na medida em que os estudantes são convidados a utilizar conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, empregando noções de transformações isométricas. Além disso, possibilita o desenvolvimento das competências gerais 1, 3 e 9 e do Tema Contemporâneo Transversal Diversidade Cultural, uma vez que promove a valorização dos povos africanos e de sua cultura.

Para o trabalho com essa seção, recomenda-se a leitura do artigo ”[Entre] as pinturas das casas ndebele: [geo]metrias e currículos esgarçados“, disponível em: http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/viewFile/7159/pdf_1 (acesso em: 24 out. 2024). Ele apresenta a origem dessas pinturas e aborda os desafios da matemática no cumprimento da lei nº 10.639/2003, que estabelece a obrigatoriedade do ensino da História da África e dos Africanos, da luta dos negros no Brasil, da cultura negra brasileira e do negro na formação da sociedade nacional, resgatando a contribuição do povo negro nas áreas social, econômica e política pertinentes à História do Brasil.

A seguir, apresentam-se mais duas recomendações de leitura.

- SOUTH AFRICAN HISTORY ONLINE. Cape Town, [2024]. *Site*. Disponível em: https://www.sahistory.org.za/article/ndebele. Acesso em: 24 out. 2024. Endereço eletrônico da África do Sul que aborda a história e a etnia Ndebele.

- YAKUBU, Paul. As inspirações por trás das cores da arquitetura tradicional africana. Tradução: Diogo Simões. [*S. l.*]: ArchDaily, 2 set. 2023. Disponível em: https://www.archdaily.com.br/br/1005333/as-inspiracoes-por-]ras-das-cores-da-arquitetura-tradicional-africana. Acesso em: 14 out. 2024.

  Texto que explica o significado das cores para o povo ndebele, por exemplo, para quem o preto representa as pessoas do mundo espiritual, o branco simboliza a pureza, o vermelho, a paixão e o poder, o amarelo simboliza fertilidade e esperança e o verde representa a terra e a agricultura.

Na atividade **3**, incentivar os estudantes a procurar outras obras de Esther Mahlangu para terem mais referências à disposição. Se possível, organizar uma exposição com as produções dos estudantes.

A seção **Explorando a tecnologia** favorece o trabalho com as competências gerais 3, 4 e 5 da BNCC, pois permite que os estudantes participem de práticas diversificadas da produção artístico-cultural, fazendo uso das linguagens visual e digital, bem como de conhecimentos das linguagens artística e matemática, para se expressar.

Para saber mais sobre como construir mosaicos no **GeoGebra**, recomendam-se os seguintes materiais:

- MEZADRI, Fabiana O. M.; PISSINI, Mariana M. **Transformações geométricas**. Campinas: Universidade Estadual de Campinas: Laboratório de Ensino de Matemática, 2016. Disponível em: https://www.ime.unicamp.br/sites/default/files/lem/material/geometria_das_transformacoes.pdf. Acesso em: 14 out. 2024.

  O material apresenta uma sequência de atividades que podem ser desenvolvidas com os estudantes.
- DANTAS, Sérgio C. Mosaicos, faixas, rosetas e fractais com o GeoGebra. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XI, 2013, Curitiba. **Anais** [...]. Curitiba: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/5850844/mod_resource/content/1/Mosaico%20-%20Geogebra_Datnas.pdf. Acesso em: 24 out. 2024.

  O material promove a integração de conhecimentos relativos ao *software* GeoGebra e às isometrias no plano, com a finalidade de construir arranjos geométricos, tais como: mosaicos, faixas geométricas, rosetas e fractais.

Se julgar conveniente, mostrar aos estudantes as ferramentas prontas do GeoGebra para fazer transformações geométricas e comentar que, em outros *softwares* de desenho, é comum haver essa ferramenta de repetição.

Avaliação

As atividades **2** e **3** da **Abertura** do Capítulo possibilitam uma avaliação diagnóstica das habilidades a seguir, trabalhadas no Ensino Fundamental — Anos Finais.

(**EF07MA21**) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou *softwares* de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.

(**EF08MA18**) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de *softwares* de geometria dinâmica.

A seguir, são apresentadas sugestões de atividades cuja análise das resoluções pode contribuir para avaliar a evolução de cada estudante e orientar seus estudos.

1ª avaliação formativa: atividades **3** e **5** (páginas 268 e 269, respectivamente).

2ª avaliação formativa: atividades **10** e **16** (páginas 273 e 279, respectivamente).

3ª avaliação formativa: atividade **23** (página 285).

TRANSCRIÇÕES DOS *PODCASTS* DO 3º ANO

Consciência financeira e consumo sustentável

[Música de transição]

Você conhece a fábula da cigarra e da formiga? Acompanhe um resumo: enquanto a cigarra se divertia durante o verão, a formiga trabalhava e economizava recursos para o inverno. Quando o frio chegou, a formiga tinha alimento e abrigo, enquanto a cigarra, que não havia se preparado, sofreu com o frio e a fome. Essa história mostra como é importante poupar e planejar para o futuro.

Assim como a formiga da fábula, precisamos nos planejar e guardar uma parte do nosso dinheiro. Essa quantia que guardamos é conhecida como reserva de emergência e, como o nome sugere, nos ajuda a ter dinheiro para enfrentar situações inesperadas e tempos difíceis, como no caso de doença ou desemprego. Além disso, economizar pode nos ajudar a realizar nossos sonhos.

Os planejadores financeiros recomendam que, para formar uma reserva de emergência, é fundamental economizar e deixar guardado o valor suficiente para cobrir seis meses de despesas fixas. Ou seja, quem precisa de 3 mil reais por mês, por exemplo, deve ter uma reserva emergencial de 18 mil reais.

[Música de transição]

Realizar sonhos é muito bom, não é mesmo? Mas gastar dinheiro por impulso e sem planejamento pode não ser a melhor escolha. É um dilema entre querer e precisar. Antes de sair comprando o que desejamos, é preciso refletir sobre o que realmente precisamos.

Depois de elaborar um planejamento financeiro e ter sua reserva de emergência guardadinha, aí sim será possível continuar economizando para realizar sonhos e objetivos pessoais, como comprar um carro, fazer uma viagem ou até abrir um negócio.

[Música de transição]

Poupar dinheiro é apenas o primeiro passo. O segundo é fazê-lo render. Os investimentos são uma excelente ferramenta para guardar dinheiro, sem que ele se desvalorize, e gerar juros para você. Para isso, é importante se informar sobre os melhores investimentos para o seu perfil e suas metas financeiras, além de compreender conceitos matemáticos como juro simples e juro composto. Há investimentos com diversos níveis de risco e de rendimento; basta escolher aquele que melhor se adapta às suas necessidades e expectativas. Ao escolher a instituição em que deseja investir, é essencial verificar se ela é regularizada e supervisionada pelo Banco Central.

[Música de transição]

Já sabemos que quem economiza e investe o dinheiro geralmente tem mais segurança financeira e liberdade de escolha, mas poupar ou investir exige planejamento, recursos financeiros e um pouco de Matemática.

É mais vantajoso comprar a prazo ou guardar o dinheiro por um período e pagar à vista? Vale a pena comprar com cartão de crédito se a taxa de juros for alta? Uma aplicação a juro simples rende mais ou menos do que uma a juro composto?

Alguns cálculos matemáticos podem ajudar a responder a essas e outras questões financeiras. A Matemática ajuda a calcular e avaliar o quanto pode ser economizado ou gasto em cada tipo de transação.

Confira a seguir a discussão sobre a importância de fazer escolhas conscientes ao comprar, apresentada em um documentário sobre educação financeira.

[Áudio extraído de vídeo]

“Então, dentro da educação financeira, o que a gente sempre fala é que o cidadão tem que usar o crédito de maneira consciente, buscar a modalidade mais adequada para a situação que ele vive, para a situação da família, pesquisar o custo desse crédito em várias instituições, né? É… E, sempre que precisar, quando ele chegar à tomada de decisão: ‘preciso realmente de [SIC] tomar um crédito, fazer um financiamento ou empréstimo’, que ele procure taxa de juros mais baixas [SIC], que ele evite esse financiamento por meio de modalidades muito caras, como o cartão de crédito e o cheque especial, né? No caso do cheque especial, a gente sabe muito bem que é uma situação emergencial, né? Não uma situação para você financiar um meio de consumo, né? Ou financiar… um investimento.”

[Música de transição]

Falando em economizar, como são seus hábitos de consumo? Escolher um produto mais barato, de preferência que seja sustentável, ou deixar de comprar um item desnecessário são atitudes que ajudam na economia e na preservação do meio ambiente.

Uma nova tendência global é o consumo sustentável, que consiste em comprar apenas o que é realmente essencial e estender ao máximo a vida útil desses produtos.

Atualmente, muitos produtos sofrem o que chamamos de obsolescência programada, ou seja, têm um ciclo de vida útil intencionalmente reduzido pelo fabricante, forçando o consumidor a trocar frequentemente por novos produtos, gerando lucro para as empresas.

A indústria da moda é um exemplo de setor em que se pratica a obsolescência programada. No entanto, com a crescente conscientização, a relação das pessoas com o consumo de roupas usadas está mudando. De acordo com uma pesquisa do Instituto de Economia Gastão Vidigal e da Associação Comercial de São Paulo, houve um aumento de cerca de 30% no volume de vendas de brechós em 2022. Além disso, o Serviço Brasileiro de Apoio às Micro e Pequenas Empresas (Sebrae) aponta que comprar em brechós pode resultar em uma economia de até 80% em comparação às compras em lojas tradicionais. Além de possibilitar a economia de dinheiro, a economia circular das peças de roupas reduz os danos ambientais da indústria têxtil.

[Música de transição]

Neste *podcast*, você pôde perceber a importância do planejamento financeiro e como a Matemática pode nos ajudar a tomar decisões mais conscientes sobre nosso dinheiro.

Que tal começar a rever suas escolhas de compra e planejar melhor o uso do seu dinheiro para cuidar bem dele e do planeta?

[Música de transição]

Créditos: você pode assistir ao vídeo **Documentário: educação financeira** no canal da Rádio e TV Justiça no YouTube. Os outros áudios inseridos neste *podcast* são da Freesound.

Platão e os poliedros

[Música de transição]

Provavelmente, você já deve ter ouvido falar de Platão, Aristóteles, Pitágoras e outros importantes pensadores que viveram na Grécia Antiga, certo? Esses e outros nomes trouxeram valiosas contribuições para diversos ramos das ciências humanas e exatas, como a Filosofia, a Matemática e as Artes. Eles auxiliaram na criação de espaços propícios para a troca de conhecimentos, como o Liceu de Aristóteles, a Escola Pitagórica e a Academia de Platão.

Platão foi aluno e seguidor de Sócrates, que é considerado o pai da filosofia ocidental. No século IV antes de Cristo, ele fundou a Academia de Platão nos arredores de Atenas, na Grécia. Nela, o filósofo reunia pessoas interessadas em estudar os fundamentos do pensamento racional, pois estava convencido de que o conhecimento só poderia ser alcançado por meio de diálogos. Era nesse espaço que Platão e seus discípulos — incluindo Aristóteles — podiam expor livremente suas ideias, pensamentos e teorias.

A Academia de Platão permaneceu ativa durante nove séculos e, nesse período, também teve sedes em Roma e Alexandria, cidades que hoje pertencem à Itália e ao Egito, respectivamente. Essa instituição foi fundamental para o desenvolvimento das universidades modernas. Além disso, Platão deixou grandes contribuições para a Filosofia e a Matemática.

[Música de transição]

Platão e seus discípulos elaboraram conceitos importantes para a Filosofia. Entre eles, a teoria das ideias ou teoria das formas. Segundo essa teoria, o ser humano só conseguiria conhecer a realidade se acessasse as ideias que estão por trás das coisas materiais — opiniões e imagens — que podem ser observadas ou experimentadas pelos cinco sentidos. Apenas por meio do pensamento racional e da busca pelo conhecimento podemos alcançar a verdadeira realidade.

Nas obras de Platão, é possível observar a importância do constante questionamento de teses ou hipóteses, expresso através de diálogos nos quais personagens discutem sobre diversos temas. É em um desses diálogos, chamado **Timeu**, que o filósofo expõe suas teorias sobre os poliedros regulares, figuras geométricas tridimensionais.

Diferentemente de Pitágoras, filósofo e matemático grego que acreditava que o mundo poderia ser explicado com números, Platão pensava que a Geometria era a base de tudo o que conhecemos no mundo físico. Tanto que, na entrada da Academia, estava escrito: "Não entra aqui quem não souber Geometria". Também foi ele quem ressaltou a importância dos poliedros regulares, conhecidos como "Poliedros de Platão".

Os poliedros regulares já eram conhecidos há muitos séculos. Por exemplo, eles foram usados na arquitetura dos egípcios antigos, e aparecem também nos estudos de Pitágoras, que viveu mais de cem anos antes da fundação da Academia de Platão.

Platão sabia que existiam apenas cinco poliedros regulares: o hexaedro, cujas faces são quadrangulares; o tetraedro e o octaedro, cujas faces são triangulares; e os dois considerados como mais complexos: o dodecaedro, com doze faces pentagonais, e o icosaedro, com vinte faces triangulares.

O filósofo e matemático grego atribuía tanta importância a esses objetos, que os utilizava para explicar alguns fenômenos naturais. Assim, relacionou cada poliedro a um elemento da natureza: a terra é associada ao hexaedro, o ar ao octaedro, a água ao icosaedro e o fogo ao tetraedro. Em relação ao dodecaedro, Platão o associava ao Universo.

Essa visão pode parecer um tanto mística para os cientistas atuais. Hoje, sabemos que os átomos são as partículas fundamentais que compõem a água, o ar, o fogo... Esses átomos não possuem a estrutura parecida com os poliedros regulares de Platão. No entanto, o pensamento de Platão foi tão influente que, muitos séculos mais tarde, em 1597, o astrônomo Johannes Kepler aprofundou os estudos sobre os poliedros regulares e se inspirou neles para teorizar o movimento dos seis planetas que eram conhecidos na época: Saturno, Júpiter, Marte, Terra, Vênus e Mercúrio.

[Música de transição]

As teorias envolvendo os poliedros platônicos só foram possíveis porque Platão criou um ambiente de livre troca de ideias entre seus discípulos, no qual nenhum assunto era vetado. Além disso, outros filósofos e cientistas que vieram depois dele discutiram, aprofundaram e até refutaram essas ideias.

Embora os poliedros regulares possam não estar no centro de todas as coisas do universo, como acreditava Platão, seus estudos e teorias sobre eles contribuíram para o desenvolvimento da Geometria e da Matemática nos séculos seguintes.

Da próxima vez que você estudar ou se deparar com um objeto que tenha o formato parecido com um poliedro regular, como um dado ou um cubo de gelo, lembre-se de que esses poliedros foram importantes objetos de estudo na história do pensamento e da ciência.

[Música de transição]

Créditos: os áudios inseridos neste *podcast* são da biblioteca de áudio do YouTube.

A Matemática e as cidades

[Música de transição]

Trânsito, alagamentos, criminalidade: esses são problemas recorrentes na vida de quem mora em grandes cidades, não é mesmo? Vamos conversar sobre os fatores que influenciam esse cenário, e como a Matemática pode contribuir para solucionar alguns problemas urbanos. Quer saber como? Venha com a gente!

[Música de transição]

O crescimento acelerado das cidades nas últimas décadas tem exigido esforços políticos, sociais e tecnológicos cada vez maiores para a organização e gestão desses espaços.

Atualmente, a maior parte da população mundial vive em grandes centros urbanos, o que marca uma mudança significativa em relação ao padrão predominante até o século XX, quando a população que vivia em áreas rurais era maior. A ONU estima que, em 1950, apenas 29,6% da população mundial vivia em áreas urbanas. Em 2022, esse número já havia alcançado 55%. As previsões indicam que, até 2050, 68% da população mundial viverá em zonas urbanas.

Muitos fatores influenciaram o crescimento das cidades e, consequentemente, o aumento da população urbana, como o processo de industrialização, o desenvolvimento tecnológico e a concentração fundiária aliada à mecanização agrícola. Essa movimentação tende a tornar as cidades cada vez maiores e mais populosas, e essa é uma tendência praticamente irreversível.

O crescimento e a expansão de maneira desordenada e desigual dos centros urbanos agravaram muitos problemas, como o aumento da criminalidade, a falta de emprego e moradia, além do trânsito caótico. Quem vive em grandes cidades conhece bem essa realidade.

[Música de transição]

Mas o que fazer diante desse cenário? Bem, você percebeu que apresentamos alguns dados numéricos até agora. Parte do desafio dos urbanistas e das pessoas que pensam em soluções para a vida urbana e a gestão das cidades é entender esses números e muitos outros. É aí que entra a Matemática, com suas ferramentas e modelos capazes de nos ajudar a compreender melhor o processo de urbanização.

Utilizar os conhecimentos matemáticos no cotidiano enriquece a interpretação de situações reais e ajuda na elaboração de propostas para os problemas. No caso das cidades, a Matemática pode auxiliar especialistas e gestores a tomar decisões para melhorar o funcionamento das áreas urbanas em vários setores, como no combate à criminalidade, no planejamento habitacional e no oferecimento de serviços públicos.

[Música de transição]

No caso do combate à criminalidade, mesmo sendo um problema complexo e com muitas variáveis, a Matemática auxilia a mensurar a probabilidade de ocorrerem mais crimes em determinados horários ou locais, levando em conta as necessidades de cada região. Assim, gestores urbanos podem concentrar, de maneira mais eficiente, os recursos para o combate aos crimes e a garantia da segurança da população.

Outro exemplo de uso da Matemática é a obtenção de dados demográficos para ajudar no planejamento habitacional de uma cidade. Tendo acesso a esses números, um gestor público pode calcular quantas famílias precisam de moradia, quantos imóveis desocupados existem e podem ser reaproveitados ou removidos para dar espaço a novas construções. Com uma estatística de dados geográficos e meteorológicos, é possível descobrir também quais regiões são mais propensas a sofrer com alagamentos e deslizamentos de terra e, assim, evitar a construção de imóveis em áreas de risco.

A mobilidade urbana é outro desafio que pode ser auxiliado por conhecimentos matemáticos. As malhas viárias podem ser aproximadas à estrutura abstrata de grafos, ou seja, diagramas que lembram árvores de pontos interligados. Esses esquemas gráficos e algébricos da teoria de grafos podem ajudar a mapear e investigar maneiras de otimizar as redes de transporte.

O acesso à saúde, à educação, à mobilidade urbana, à segurança pública, à oferta de empregos e até à disponibilidade de esporte e lazer para a população são alguns dos desafios urbanos que podem ser analisados com a ajuda da Matemática.

As cidades são complexas, e viver não é uma ciência exata. Mas a história já mostrou que uma ciência exata como a Matemática pode fornecer ferramentas que ajudam a sociedade a se organizar melhor.

E na cidade onde você vive, a urbanização tem influenciado as atividades cotidianas? Qual conhecimento matemático você acredita que pode facilitar o dia a dia da sua cidade?

[Música de transição]

Créditos: os áudios deste *podcast* são da biblioteca de áudio do YouTube.

Resoluções das atividades

Capítulo 1 • Matemática financeira

Atividades

1. Relacionando as representações do quadro, temos:

$\frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\%$ $\frac{47}{100} = 0{,}47 = 47\%$

$\frac{13}{200} = 0{,}065 = 6{,}5\%$ $\frac{2}{25} = 0{,}08 = 8\%$

2. Como a porcentagem corresponde à representação de uma fração cujo denominador é 100, pode-se calcular:

a) $\frac{14}{100} \cdot 3\,000 = 420$

b) $\frac{9}{100} \cdot 250 = 22{,}5$

c) $\frac{0{,}6}{100} \cdot 300 = 1{,}8$

d) $\frac{24}{100} \cdot 1\,000 = 240$

3. **a)** Ao fim de um ano, a cidade terá um aumento de 2,5% no número de habitantes:
$1{,}025 \cdot 90\,000 = 92\,250$
Logo, ao fim de 1 ano, a cidade terá 92 250 habitantes.

b) Ao fim do segundo ano, a cidade terá um aumento de 2,5% sobre o número de habitantes do ano anterior:
$1{,}025 \cdot 92\,250 \simeq 94\,556$
Logo, ao fim de dois anos, a cidade terá aproximadamente 94 556 habitantes.

4. Sejam *a* e *b* as dimensões de um documento comum (uma folha de tamanho A4). Assim:
$\text{Área}_{\text{original}} = ab$
Deseja-se obter um documento reduzido tal que:
$\text{Área}_{\text{reduzido}} = \frac{1}{4}\text{Área}_{\text{original}}$
$\text{Área}_{\text{reduzido}} = \frac{1}{4}ab$
Sabendo que:
$\frac{1}{4}ab = \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}b$
conclui-se que as dimensões do documento reduzido devem ser $\frac{1}{2}a$ e $\frac{1}{2}b$.
Logo, deverá ser digitado 50% no painel de comandos.

5. Segundo o enunciado, é solicitada a porcentagem que representa 20% de 30%, ou seja:
$\frac{20}{100} \cdot \frac{30}{100} = \frac{600}{10\,000} = \frac{6}{100} = 0{,}06 = 6\%$

6. $(1 + 0{,}05) \cdot (1 + 0{,}05) \cdot (1 + 0{,}05) \cdot 200 = 1{,}157625 \cdot 200 = 231{,}525$
Logo, o preço dessa mercadoria daqui a 3 anos será aproximadamente R$ 231,52.

7. **a)** O primeiro trecho da viagem corresponde a 40% de todo o trajeto, ou seja: $\frac{40}{100} \cdot 800 = 320$
Portanto, a distância percorrida no primeiro trecho é 320 km.

b) O segundo trecho da viagem corresponde a 55% do restante do trajeto, que é de 480 km (pois $800 - 320 = 480$). Assim:
$\frac{55}{100} \cdot 480 = 264$
Portanto, a distância percorrida no segundo trecho é 264 km.

c) A distância percorrida no terceiro trecho é 216 km, pois:
$800 - 320 - 264 = 216$
Se o motorista mantiver uma velocidade média de 90 km/h, o tempo de percurso nesse trecho será de:
$\frac{216}{90} = 2{,}4 \rightarrow$ ou 2h24min

8. Na creche, podem ser atendidas 100 crianças anualmente, pois, nela, há 10 salas com capacidade para atender 10 crianças a cada ano. No ano passado, houve 400 nomes na lista de espera.
Neste ano, a creche continua podendo atender 100 crianças ao ano. Como o número de nomes na fila de espera cresceu 10%, tem-se: $400 \cdot 1{,}10 = 440$
No próximo ano, deseja-se ampliar a quantidade de crianças atendidas pela creche, com a meta de que a lista de espera com 440 nomes deste ano seja reduzida em 25%, que corresponde a 330 nomes, pois: $440 \cdot (1 - 0{,}25) = 330$
Para que isso ocorra, a creche precisa atender 110 novas crianças. Como cada sala de aula tem capacidade de atendimento para 10 crianças, devem ser construídas, no mínimo, 11 novas salas.
Resposta: alternativa **b**.

9. De acordo com o enunciado, o aparelho custa R$ 8.000,00 e, no pagamento a prazo, ocorre acréscimo de 8%, então:
$8\,000 \cdot (1 + 0{,}08) = 8\,640$
Logo, o valor de cada prestação será R$ 4.320,00, pois:
$8\,640 : 2 = 4\,320$

10. Seja *x* o preço da raquete na loja **B**. Assim, temos:
$\frac{90}{100} \cdot (x + 15) = x \Rightarrow 90x + 1350 = 100x \Rightarrow x = 135$
Logo, o preço da raquete na loja **B** será R$ 135,00.

11. **a)** Se $x = 15$, o valor à vista, em reais, será:
$8\,000 \cdot (1 - 0{,}15) = 6\,800$
Para pagamento a prazo, o comprador quitaria a primeira parcela de R$ 4.000,00 e aplicaria R$ 2.800,00, que é a diferença entre o valor à vista com desconto e a primeira parcela ($6\,800 - 4\,000 = 2\,800$), por um mês a uma taxa mensal de 25%. Essa aplicação resultaria em um valor total de R$ 3.500,00, pois:
$2\,800 \cdot (1 + 0{,}25) = 3\,500$
Nessas condições, o comprador não teria o suficiente para quitar a segunda parcela de R$ 4.000,00. Portanto, não é vantajosa para ele a compra a prazo.

b) O valor de *x* que torna indiferente a compra à vista ou a prazo é o valor cuja aplicação resulte nos R$ 4.000,00 a serem pagos na segunda parcela. O capital a ser aplicado é a diferença entre o valor à vista com desconto de *x*% e o valor de R$ 4.000,00 da primeira parcela:
$8\,000 \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right) - 4\,000$
De acordo com o enunciado, a aplicação é feita a uma taxa de 25% ao mês, e o valor total resultante deve ser R$ 4.000,00, então:
$\left[8\,000 \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right) - 4\,000\right] \cdot (1 + 0{,}25) = 4\,000 \Rightarrow x = 10$
Logo, será indiferente a compra à vista ou a prazo se $x = 10$.

12. **a)** Se um vendedor conseguir obter R$ 120.000,00 em vendas, ele terá 1% de comissão sobre as vendas mais um bônus de R$ 600,00 pela meta atingida, ou seja:
$120\,000 \cdot \frac{1}{100} + 600 = 1\,800$
Logo, o vendedor receberá R$ 1.800,00 de comissão.

b) A comissão mínima, em reais, da terceira faixa de bonificação é:
$200\,000 \cdot \frac{1{,}2}{100} + 900 = 3300.$
Assim, para receber uma comissão de R$ 3.900,00, o vendedor precisará vender mais de R$ 200.000,00 em um mês. Seja *x* esse valor, tem-se:
$x \cdot \frac{1{,}2}{100} + 900 = 3\,900 \Rightarrow \frac{1{,}2x}{100} = 3\,000 \Rightarrow x = 250\,000$
Logo, o vendedor precisará vender R$ 250.000,00.

c) A comissão máxima recebida pela primeira faixa de bonificação é: $80\,000 \cdot \frac{0{,}8}{100} = 640$
A comissão mínima recebida pela segunda faixa de bonificação é:
$80\,000 \cdot \frac{1}{100} + 600 = 1400$
Portanto, R\$ 1.000,00 não é um valor válido para a comissão; pois, se ele vender até R\$ 80.000,00, deverá receber R\$ 640,00, e, se vender mais do que R\$ 80.000,00, deverá receber, no mínimo, R\$ 1.400,00.

13. Sendo x o preço inicial, em reais, da mercadoria, conclui-se:
$[x \cdot (1 + 0{,}18)] \cdot (1 - 0{,}05) = x + 302{,}5$
$1{,}18x \cdot 0{,}95 - x = 302{,}5$
$1{,}121x - x = 302{,}5 \Rightarrow x = \frac{302{,}5}{0{,}121} = 2500$
Portanto, o preço inicial da mercadoria era R\$ 2.500,00.

14. Como o preço de custo foi de R\$ 250,00 e o lucro foi estipulado em 18%, então o lucro foi: $0{,}18 \cdot 250{,}00 = 45$
Desse modo, a mercadoria deverá ser revendida por R\$ 295,00, pois, ao se adicionar o preço de custo ao lucro, tem-se: $250 + 45 = 295$

15. O preço de custo da mercadoria foi R\$ 860,00.
Para que o lucro de revenda dela seja de 20%, calcula-se:
$860 \cdot (1 + 0{,}2) = 860 \cdot 1{,}2 = 1032$
Logo, a mercadoria deve ser vendida por R\$ 1.032,00.

16. O preço de custo de dez sacas de batatas foi R\$ 210,00. Então, cada saca custou R\$ 21,00.
Seja x o preço de venda, para saber por quanto cada saca deve ser revendida calcula-se:
$\frac{x - 21}{x} = 0{,}20 \Rightarrow 0{,}20x = x - 21 \Rightarrow 0{,}8x = 21 \Rightarrow x = 26{,}25$
Logo, cada saca deverá ser revendida por R\$ 26,25.

17. Como o preço com desconto de 17% era R\$ 478,08, o preço de etiqueta era:
$x - \frac{17}{100}x = 478{,}08 \Rightarrow 83x = 47\,808 \Rightarrow x = 576$
Como a enciclopédia é composta de 18 volumes, então cada volume, antes do desconto, custava:
$\frac{576}{18} = 32$, ou seja, R\$ 32,00
Resposta: alternativa **e**.

18. Descontando-se o imposto de 20% do preço de venda, obtém-se o lucro do dono da loja, que é de 30% sobre o preço de custo.
Sendo C o preço de custo, tem-se:
$39 \cdot (1 - 0{,}2) = C \cdot (1 + 0{,}3)$
$C = \frac{39 \cdot 0{,}8}{1{,}3} \Rightarrow C = 24$
Logo, o preço de custo é R\$ 24,00.

19. Sejam C o preço de custo, V o preço de venda e L o lucro. Assim:
$C = V - L = 240 - (240 \cdot 0{,}2) = 192$
Portanto, o preço de custo é R\$ 192,00.

20. Sejam V o preço de venda e C o preço de custo, ambos em reais.
Assim, temos: $\begin{cases} V - C = 2000 \\ 0{,}9V - C = 0{,}2C \end{cases}$
Resolvendo o sistema, têm-se: $C = 6000$ e $V = 8000$.
Portanto, o preço de custo é R\$ 6.000,00.

21. Ao final do primeiro mês, o valor da dívida se tornou R\$ 1.100,00, pois: $1000 \cdot 1{,}1 = 1100$
Após um pagamento de R\$ 300,00, o débito passou a ser R\$ 800,00.
Ao final do segundo mês, o valor da dívida se tornou R\$ 880,00, pois: $800 \cdot 1{,}1 = 880$
Após um pagamento de R\$ 500,00, o débito passou a ser R\$ 380,00.
Ao final do terceiro mês, o valor da dívida se tornou R\$ 418,00, pois: $380 \cdot 1{,}1 = 418$
Portanto, para quitar a dívida, o último pagamento foi de R\$ 418,00.
Resposta: alternativa **a**.

22. Calcula-se o valor da entrada: $0{,}2 \cdot 3000{,}00 = 600{,}00$
Calcula-se, em seguida, o valor a ser financiado:
$3000 - 600 = 2400$
Assim, considerando uma aplicação de R\$ 2.400,00 a juros simples que rendeu um montante de R\$ 2.760,00 após 5 meses, temos:
$2760 = 2400 \cdot (1 + i \cdot 5) \Rightarrow i = \frac{2760 - 2400}{12\,000} = 0{,}03 = 3\%$
Então, a taxa é de 3% a.m. (ao mês).

23. Em cada item, considera-se a expressão:
$J = C \cdot i \cdot t$
a) $J = 7000 \cdot (0{,}025 \cdot 4) \Rightarrow J = 7000 \cdot 0{,}1 = 700 \Rightarrow$
$\Rightarrow J = 700$; R\$ 700,00
b) Considerando que t corresponde a 12 meses, tem-se:
$J = 7000 \cdot (0{,}03 \cdot 12) \Rightarrow J = 7000 \cdot 0{,}36 = 2520 \Rightarrow$
$\Rightarrow J = 2520$; R\$ 2.520,00
c) Como a taxa rende ao dia, o tempo também deve estar nessa unidade de medida. Três meses equivalem a 90 dias, portanto:
$J = 7000 \cdot (0{,}0015 \cdot 90) \Rightarrow J = 7000 \cdot 0{,}135 = 945 \Rightarrow$
$\Rightarrow J = 945$; R\$ 945,00

24. Como cada depósito de R\$ 200,00 é uma aplicação a juros simples de 1,5% ao mês, então o juro mensal será, em reais:
$200{,}00 \cdot 0{,}015 = 3{,}00$
Assim, o primeiro depósito, depois de um ano, terá um rendimento, em reais, de: $200 + 12 \cdot 3 = 236$
O segundo depósito, depois de 11 meses, terá um rendimento, em reais, de: $200 + 11 \cdot 3 = 233$
O terceiro depósito, depois de 10 meses, terá um rendimento, em reais, de: $200 + 10 \cdot 3 = 230$
E assim por diante para cada um dos 12 depósitos.
O último depósito terá um acréscimo de R\$ 3,00, e o montante será R\$ 203,00.
Então, o montante, após um ano, será, em reais:
$M = 236 + 233 + 230 + \dots + 203 = 2634$
Portanto, o montante após um ano será R\$ 2.634,00.

25. O período indicado no enunciado é de 2 meses. Logo:
$J = 1800{,}00 \cdot 0{,}027 \cdot 2 \Rightarrow J = 97{,}20$; R\$ 97,20

26. Considerando as informações contidas no enunciado, temos:
$6000 = C \cdot 0{,}06 \cdot 4 \Rightarrow 6000 = C \cdot 0{,}24 \Rightarrow C = \frac{6000}{0{,}24} = 25\,000$
Assim, o capital é R\$ 25.000,00.

27. $M = C \cdot (1 + i \cdot t)$
$M =$ R\$ 12.000,00 $\cdot (1 + 0{,}015 \cdot 9) \Rightarrow$ R\$ 13.620,00

28. $M = C \cdot (1 + i \cdot t)$
$9200 = 8000 \cdot (1 + i \cdot 6) \Rightarrow i = 0{,}025 \rightarrow 2{,}5\%$
Então, a taxa é de 2,5% a.m. (ao mês).

29. $M = C \cdot (1 + i)^t$
$M =$ R\$ 200.000,00 $\cdot (1 + 0{,}007)^6 \simeq$ R\$ 208.548,38

30. $M = C \cdot (1 + i)^t$
$M =$ R\$ 20.000,00 $\cdot (1 + 0{,}006)^8$
$M =$ R\$ 20.000,00 $\cdot (1{,}006)^8$
$M =$ R\$ 20.000,00 $\cdot 1{,}0490 \simeq$ R\$ 20.980,00

31. $M = C \cdot (1 + i)^t$
$M =$ R\$ 30.000,00 $\cdot (1 + 0{,}0095)^{24} \simeq$ R\$ 37.642,03

32. $M = C \cdot (1 + i)^t$
R\$ 8.000,00 $= C \cdot (1 + 0{,}02)^6 \Rightarrow C \simeq$ R\$ 7.103,77

33. Caso João espere dois meses, o montante, em reais, será:
$M = 20\,000 \cdot (1{,}02)^2 = 20\,000 \cdot 1{,}0404 = 20\,808$
Ou seja, ainda faltarão R\$ 192,00.
Se ele esperar três meses, o montante, em reais, será:
$M = 20\,000 \cdot (1{,}02)^3 = 20\,000 \cdot 1{,}061208 = 21\,224{,}16$
Ou seja, sobrarão R\$ 224,16, portanto, aproximadamente, R\$ 225,00.
Resposta: alternativa **c**.

34. $M = C \cdot (1 + i)^t$
R\$ $25.000,00 = C \cdot (1 + 0,05)^6 \Rightarrow C \simeq$ R\$ 18.655,38
Resposta: alternativa **b**.

35. Considerando as informações contidas no enunciado, temos:
$M = 40\,000 \cdot (1,16)^2 = 40\,000 \cdot 1,3456 = 53\,824$
$J = M - C \Rightarrow J = 53\,824 - 40\,000 = 13\,824$
Assim, os juros obtidos foram R\$ 13.824,00.

36. a) $M = C \cdot (1 + i)^t$
$M =$ R\$ $4.000,00 \cdot (1,04)^3 \simeq$ R\$ 4.499,46
b) Como 10 anos correspondem a 120 meses, tem-se:
$M =$ R\$ $4.000,00 \cdot (1,02)^{120} \simeq$ R\$ 43.060,65
c) Considerando o mês comercial (30 dias), 15 meses correspondem a 450 dias.
Desse modo: $M =$ R\$ $4.000,00 \cdot (1,0002)^{450} \simeq$ R\$ 4.376,66

37. $M = C \cdot (1 + i)^t$
$M =$ R\$ $5.000,00 \cdot (1,03)^5 \simeq$ R\$ 5.796,37
Esse montante rendeu aproximadamente R\$ 796,37 de juros, pois:
$J = M - C \simeq$ R\$ 5.796,37 − R\$ 5.000,00 = R\$ 796,37

38. Analisando a evolução mensal dos valores, em reais, das parcelas pagas ao amigo, temos:
1000, 1100, 1200, 1300
Esses valores formam uma progressão aritmética de razão 100.
Analisando os valores das parcelas pagas ao banco, temos:
1000, 1100, 1210, 1331
Esses valores formam uma progressão geométrica de razão 1,1.
Resposta: alternativa **d**.

39. Seja C o capital aplicado por João no regime de juro simples, com $i = 0,12$ a.a. e $t = 3$ anos, tem-se o montante M_s:
$M_s = C \cdot (1 + i \cdot t) \Rightarrow M_s = 1,36 \cdot C$
Seja C o capital aplicado por João no regime de juro composto, com $i = 0,12$ a.s. e $t = 6$ semestres, tem-se o montante M_c:
$M_c = C \cdot (1 + i)^t \Rightarrow M_c = C \cdot (1,12)^6$
Considerando $M_c = M_s + 2633,36$ e utilizando 1,9738 como aproximação para $(1,12)^6$, temos:
$1,9738 \cdot C \simeq 1,36 \cdot C + 2633,36 \Rightarrow C \simeq 4\,290,26$
Como $M_s = 1,36 \cdot C$, segue que: $M_s \simeq$ R\$ 5.834,75
Portanto, João recebeu aproximadamente R\$ 1.544,49 de juro, pois:
$J = M_s - C \simeq 5834,75 - 4290,26 = 1544,49$

40. $M = C \cdot (1 + i)^t$
$M =$ R\$ $15.000,00 \cdot (1,02)^{10}$
$M =$ R\$ $15.000,00 \cdot (1,02^5)^2$
$M =$ R\$ $15.000,00 \cdot (1,1)^2$
$M =$ R\$ $15.000,00 \cdot 1,21 =$ R\$ 18.150,00
Resposta: alternativa **b**.

41. César aplicou R\$ 10.000,00 a uma taxa de juro composto igual a i.
Em reais, após um ano, o montante da aplicação será: $10000 \cdot (1 + i)$
Depois de sacar R\$ 7.000,00, o restante permanece aplicado, ou seja: $10\,000 \cdot (1 + i) - 7\,000 = 3\,000 + 10\,000i$
No ano seguinte, o montante dessa aplicação será:
$(3\,000 + 10\,000i) \cdot (1 + i) = 6\,000$
Portanto: $(3 + 10i) \cdot (1 + i) = 6 \Rightarrow 10i^2 + 13i - 3 = 0$
Resolvendo a equação do 2º grau, obtém-se a raiz: $i = 0,2$
A raiz negativa deve ser desconsiderada, pois $i > 0$.
Desse modo: $(4i - 1)^2 = (4 \cdot 0,2 - 1)^2 = 0,04$
Resposta: alternativa **d**.

42. De acordo com o enunciado, sabe-se que:
- depois de um investimento de 2 anos, o montante era R\$ 2.012,85;
- depois de 3 anos, era R\$ 2.314,77.

No entanto, não se sabe o capital investido nem a taxa anual da aplicação.
Com base nessas informações, é possível organizar o seguinte sistema: $\begin{cases} 2314,77 = C \cdot (1 + i)^3 \\ 2012,85 = C \cdot (1 + i)^2 \end{cases}$
Dividindo a primeira equação pela segunda, tem-se:
$\dfrac{2\,314,77}{2\,012,85} = \dfrac{C \cdot (1 + i)^3}{C \cdot (1 + i)^2} \Rightarrow 1 + i = \dfrac{2\,317,77}{2\,012,85} \Rightarrow i \simeq 0,15$
Substituindo a taxa na segunda equação, tem-se:
$2\,012,85 = C \cdot (1 + 0,15)^2 \Rightarrow 2\,012,85 = C \cdot 1,3225 \Rightarrow$
$\Rightarrow C = \dfrac{2\,012,85}{1,3225} \simeq 1522$
Resposta: alternativa **c**.

43. Considerando as informações contidas no enunciado, conclui-se que o montante será:
$M = 18\,000 + 6\,390 = 24\,390$
Logo, o tempo necessário será:
$24\,390 = 18\,000 \cdot (1,0281)^t \Rightarrow 1,0281^t = \dfrac{24\,390}{18\,000} \Rightarrow 1,0281^t = 1,355 \Rightarrow$
$\Rightarrow t \cdot \log 1,0281 = \log 1,355 \Rightarrow t = \dfrac{\log 1,355}{\log 1,0281} \simeq 11$
Portanto, o prazo é de aproximadamente 11 meses.

44. Considerando as informações contidas no enunciado, pode-se resolver o problema utilizando radiciação:
$36\,087 = 24\,000 \cdot (1 + i)^7 \Rightarrow (1 + i)^7 = \dfrac{36\,087}{24\,000} \Rightarrow$
$\Rightarrow (1 + i)^7 = 1,503625 \Rightarrow 1 + i = \sqrt[7]{1,503625} \Rightarrow i = 0,06 = 6\%$
Logo, a taxa mensal é de aproximadamente 6%.

45. I. Falsa, pois:
$P(t) = P(0) \cdot (1 + i)t \Rightarrow P(3) = 50\,000 \cdot (1 + 0,02)^3 \Rightarrow$
$\Rightarrow P(3) \simeq 53\,060 \Rightarrow P(3) \simeq 53\,060$ habitantes
II. Falsa, pois:
$P_x(2) = 19\,600 \cdot (1 + 0,02)^2 \Rightarrow P_x(2) \simeq 20\,392$ habitantes
$P_y(2) = 28\,900 \cdot (1 + 0,05)^2 \Rightarrow P_y(2) \simeq 31\,862$ habitantes
Logo: $\dfrac{P_x(2)}{P_y(2)} \simeq \dfrac{20\,392}{31\,862} \simeq 0,6 = \dfrac{3}{5}$
III. Verdadeira, pois:
$P_x(2) = 129\,600 \cdot (1 + 0,05)^2 \Rightarrow P_x(2) = 142\,884$ habitantes
$P_y(2) = 122\,500 \cdot (1 + 0,08)^2 \Rightarrow P_y(2) = 142\,884$ habitantes
IV. Falsa, pois:
$P(t) = P(0) \cdot (1 + i)^t \Rightarrow \dfrac{P(t)}{P(0)} = (1 + i)^t \Rightarrow$
$\Rightarrow t \cdot \log(1 + i) = \log\left(\dfrac{P(t)}{P(0)}\right) \Rightarrow$
$\Rightarrow \log(1 + i) = \dfrac{\log P(t) - \log P(0)}{t} \Rightarrow i = 10^{\frac{\log P(t) - \log P(0)}{t}} - 1$
V. Verdadeira, pois, segundo o enunciado, atualmente o município tem 44 100 habitantes e deseja-se saber o número de habitantes que havia dois anos antes. Para isso, pode-se considerar $P(2) = 44\,100$ e $P(0)$ a quantidade procurada.
Considerando que a taxa anual de crescimento de 5% ocorre há cinco anos, tem-se $i = 0,05$. Logo:
$44\,000 = P(0) \cdot (1 + 0,05)^2 \Rightarrow P(0) = 4\,000$ habitantes
Resposta: F, F, V, F, V.

46. Considerando as informações contidas no enunciado, temos:
a) $85\,400 = 80\,000 \cdot (1,022)^t \Rightarrow (1,022)^t = 1,0675 \Rightarrow$
$\Rightarrow t = \dfrac{\log 1,0675}{\log 1,022} \simeq 3$
Portanto, aproximadamente 3 meses.
b) $134\,868,80 = 80\,000 \cdot (1,022)^t \Rightarrow (1,022)^t = 1,68586 \Rightarrow$
$\Rightarrow t = \dfrac{\log 1,68586}{\log 1,022} \simeq 24$
Portanto, aproximadamente 2 anos.

47. a) Considerando as proporções fornecidas no enunciado, tem-se:
$\dfrac{P_1}{P_2} = \dfrac{4}{5} \Rightarrow P_2 = \dfrac{5P_1}{4}$
$\dfrac{P_2}{P_3} = \dfrac{6}{12} \Rightarrow \dfrac{\frac{5P_1}{4}}{P_3} = \dfrac{6}{12} \Rightarrow P_3 = \dfrac{5P_1}{2}$
Como $P_1 + P_2 + P_3 = 57\,000$, então:
$P_1 + \dfrac{5P_1}{4} + \dfrac{5P_1}{2} = 57\,000 \Rightarrow P_1 = 12\,000$
Logo: $P_2 = \dfrac{5P_1}{4} = 15\,000$

$P_3 = \frac{5P_1}{2} = 30\,000$

Então, o valor de cada parcela é, respectivamente, R$ 12.000,00, R$ 15.000,00 e R$ 30.000,00.

b) Segundo a fórmula do montante no regime de juro composto, $M = C \cdot (1 + i)^t$, obtém-se: $12\,738 = 12\,000 \cdot (1 + 0{,}01)^t \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{12\,738}{12\,000} = 1{,}01^t \Rightarrow 1{,}06 \simeq 1{,}01^t \Rightarrow \log 1{,}06 \simeq t \cdot \log 1{,}01 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0{,}0253 \simeq t \cdot 0{,}0043 \Rightarrow t \simeq 6$

Logo, aproximadamente 6 meses.

c) Utilizando a expressão do montante no regime de juro simples, $M = C \cdot (1 + i \cdot t)$, e $t = 24$ meses, tem-se:

$25\,800 = 15\,000 \cdot (1 + i \cdot 24) \Rightarrow \frac{25\,800}{15\,000} = 1 + 24i \Rightarrow$

$\Rightarrow 1{,}72 = 1 + 24i \Rightarrow 0{,}72 = 24i \Rightarrow i = 0{,}03 = 3\%$

Então, a taxa é de 3% a.m. (ao mês).

48. Resposta pessoal. Sugestão de problema: Por motivos financeiros, Carla deixou de pagar uma fatura de seu cartão de crédito. Sabendo que essa fatura fechou em R$ 2.000,00, que não foi incluído nenhum tipo de multa e que o total a pagar é corrigido a juro composto, qual será o valor da fatura após 1 ano?

De acordo com o quadro, a taxa do cartão de crédito é 421,3% ao ano.

Logo: $M = 2000 \cdot (5{,}213)^1 = 10\,426$

Assim, depois de 1 ano, o valor dessa fatura será R$ 10.426,00.

49. Para um capital inicial C, a uma taxa $i = 1\%$ a.m., tem-se $M = 2C$. Assim:

$M = C \cdot (1 + i)^t$

$2C = C \cdot (1 + 0{,}01)^t$

$2 = (1{,}01)^t \Rightarrow \log 2 = t \cdot \log 1{,}01 \Rightarrow t = \frac{0{,}30103}{0{,}0043} \simeq 70$

Logo, para dobrar o capital inicial, é necessário que o dinheiro fique aplicado por 70 meses.

Resposta: alternativa **d**.

50. O lucro L do banco foi:

$L = 1000 \cdot 1{,}05^{12} - 1000 \cdot 1{,}01^{12}$

$L = 1000 \cdot (1{,}80 - 1{,}13)$

$L = 670$

Resposta: alternativa **c**.

51. Ana Sofia pagou 153 reais $(180 \cdot 0{,}85)$ pela blusa e 104 reais $(130 \cdot 0{,}80)$ pela sandália. Como ela tinha R$ 300,00, recebeu de troco 43 reais $(300 - 153 - 104)$, o que corresponde a:

$\frac{43}{300} = 0{,}14333... = 14{,}333...\%$

Resposta: alternativa **a**.

52. Com base nas informações do enunciado, tem-se:

$VP = \frac{VF}{(1 + i)^t} \Rightarrow VP = \frac{20\,000}{(1 + 0{,}03)^3} \simeq 18\,302{,}83$

Logo, a pessoa deve pagar aproximadamente R$ 18.302,83 para quitar a dívida.

53. Com base nas informações do enunciado, tem-se:

$4\,000 = \frac{1\,500}{(1 + 0{,}08)^2} + \frac{VF}{(1 + 0{,}08)^5} \Rightarrow VF \simeq 3\,987{,}74$

Logo, o valor do último pagamento de Lúcia foi aproximadamente R$ 3.987,74.

54.
- Opção 1: $5\,400 \cdot (1 - 0{,}05) = 5\,130$
- Opção 2: $\frac{1\,800}{(1 + 0{,}015)^1} + \frac{1\,800}{(1 + 0{,}015)^2} + \frac{1\,800}{(1 + 0{,}015)^3} \simeq 5\,241{,}96$
- Opção 3:

$675 + \frac{675}{(1 + 0{,}015)^1} + \frac{675}{(1 + 0{,}015)^2} + \frac{675}{(1 + 0{,}015)^3} +$

$+ \frac{675}{(1 + 0{,}015)^4} + \frac{675}{(1 + 0{,}015)^5} +$

$+ \frac{675}{(1 + 0{,}015)^6} + \frac{675}{(1 + 0{,}015)^7} \simeq 5\,128{,}79$

Logo, a opção 3 é a mais vantajosa.

55. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes construam o quadro em um *software* gratuito e comparem com os colegas as possíveis soluções.

a) Um exemplo de preenchimento das despesas da 4ª coluna é: conta de água, R$ 78,00; conta de luz, R$ 145,60; telefone, R$ 289,90; conta de gás encanado, R$ 91,50; faculdade, R$ 1.098,00; transporte, R$ 480,00; supermercado, R$ 810,00; outros gastos, R$ 430,00. Nesse caso, o total dessa 4ª coluna é R$ 3.423,00, e o saldo é R$ 560,00.

b) Um exemplo de preenchimento das despesas da 5ª coluna é: conta de água, R$ 98,00; conta de luz, R$ 145,60; telefone, R$ 289,90; conta de gás encanado, R$ 101,50; faculdade, R$ 1.098,00; transporte, R$ 480,00; supermercado, R$ 810,00; outros gastos, R$ 450,00. Nesse caso, o total dessa 5ª coluna é R$ 3.473,00, e o saldo é R$ 510,00.

56. a) A primeira prestação é mais alta no SAC. Resposta pessoal. Espera-se, com o segundo questionamento, problematizar os fatores que estão envolvidos quando precisamos tomar uma decisão como a de escolher o sistema de amortização em um empréstimo ou financiamento. Embora, na situação hipotética, estejamos considerando a mesma taxa de juro e o mesmo período, o que normalmente não acontece na realidade, a ideia é que os estudantes tenham uma situação mais simplificada para fazer comparações.

b) Resposta possível: Nas primeiras prestações, o valor amortizado no SAC é maior do que no Sistema Price. Sim. Nas planilhas que foram construídas pelos estudantes, deve ser possível observar com mais detalhes os pontos destacados, podendo-se, inclusive, adicionar todos os valores de juros que estão dispostos nas colunas **D** e **J** da resolução da atividade resolvida 17: por exemplo, ao digitar, na célula **D79**, "=soma(D6:D78)" e pressionar ***Enter*** e, na célula **J79**, "=soma(J6:J78)" e pressionar ***Enter***, é possível comparar os valores.

57. a) Para calcular o valor amortizado, basta dividir o valor financiado pelo número de prestações, nesse caso:

$\frac{25\,000}{8} = 3\,125$

Logo, a amortização é R$ 3.125,00.

b) Para calcular o valor amortizado, primeiro deve-se subtrair a entrada do valor total:

$40\,000 - 12\,000 = 28\,000.$

Depois, deve-se dividir o restante do valor financiado pelo número de prestações, nesse caso:

$\frac{28\,000}{10} = 2\,800$

Logo, a amortização é R$ 2.800,00.

58. a) Como a entrada é 25% do valor, considera-se, então, que o valor financiado será 75% do total:

$75\,000 \cdot (0{,}75) = 56\,250$

Assim, o valor a ser financiado é R$ 56.250,00.

b) Sugere-se que todo o cálculo seja feito na calculadora, utilizando-se a seguinte fórmula:

$P = V \cdot \frac{(1 + i)^n \cdot i}{(1 + i)^n - 1}$

Para o capital (V), considera-se o valor encontrado no item **a**, desconsiderando-se a entrada. Para a taxa (i), consideramos 2% a.m. ou 0,02. Por fim, para o tempo (n), 48 meses.

Substituindo os valores na fórmula, temos:

$P = 56\,250 \cdot \frac{(1 + 0{,}02)^{48} \cdot 0{,}02}{(1 + 0{,}02)^{48} - 1} \Rightarrow P \simeq 1\,833{,}85$

Logo, a parcela será aproximadamente R$ 1.833,85.

c) Dividimos o valor financiado pelo número de prestações, nesse caso: $\frac{56\,250}{48} = 1\,171{,}875$

Logo, a amortização será aproximadamente R$ 1.171,88.

d) Para essa atividade, devem-se utilizar as fórmulas de amortização Price e SAC e lançá-las na planilha, conforme orientação no **Livro do estudante**. Os estudantes devem atentar às posições na planilha, bem como à colocação dos parênteses no lugar correto. Sistema Price: R$ 31.774,96; SAC: R$ 27.562,50.

59. Do enunciado, pode-se concluir que o valor do capital é R$ 1.700,00, (2100 − 400), o valor da taxa é 4% e o prazo financiado é 10 meses.
Para calcular o valor de cada parcela, utiliza-se a fórmula:
$P = V \cdot \dfrac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1} \Rightarrow P = 1700 \cdot \dfrac{(1+0{,}04)^{10} \cdot 0{,}04}{(1+0{,}04)^{10} - 1} \simeq 209{,}59$
Resposta: alternativa **c**.

Atividades complementares

1. Considerando as variações do PIB de 2015 a 2018, tem-se:
$1{,}02 \cdot 0{,}95 \cdot 1{,}03 = 0{,}99807$
Ou seja, houve decrescimento de aproximadamente 0,2%.
Resposta: alternativa **a**.

2. Como o lucro L é a diferença entre o preço de venda V e o preço de compra C e, nesse caso, $V = (1 + 0{,}20) \cdot C = 1{,}2C$, segue que:
$L = V - C \Rightarrow 150 = 1{,}2C - C \Rightarrow C = 750$
Assim: $V = 1{,}2C = 1{,}2 \cdot 750 = 900$
Logo, Ricardo recebeu R$ 900,00 pela venda da bicicleta.
Resposta: alternativa **e**.

3. Utilizando a expressão $J = C \cdot i \cdot t$, tem-se:
$3600 = 8000 \cdot 0{,}15 \cdot t \Rightarrow t = \dfrac{3600}{8000 \cdot 0{,}15} = 3$
Logo, o tempo é de 3 anos.
Resposta: alternativa **b**.

4. À vista, o produto custa $0{,}9C$, sendo C o preço anunciado. A prazo, a primeira parcela (entrada) será $0{,}5C$. Para obter a segunda parcela de $0{,}5C$, considera-se que a diferença de $0{,}4C$ em relação ao preço à vista será aplicada por um mês. Assim:
$M = C \cdot (1 + i \cdot t) \Rightarrow 0{,}5C = 0{,}4C \cdot (1 + i \cdot 1) \Rightarrow i = 0{,}25 = 25\%$
Logo, a taxa mensal no pagamento a prazo é 25%.
Resposta: alternativa **a**.

5. Primeira aplicação do sr. Paulo:
$M_1 = C + C \cdot i \cdot t \Rightarrow M_1 = C + 0{,}12C = 1{,}12C$
Segunda aplicação do sr. Paulo:
$M_2 = 1{,}12C + 1{,}12C \cdot 0{,}03 \cdot 9 \Rightarrow M_2 = 1{,}12C + 1{,}12C \cdot 0{,}27 = 1{,}4224C$
Considerando o resultado anterior em uma única aplicação de 12 meses, tem-se:
$1{,}4224C = C + C \cdot i \cdot 12 \Rightarrow 1{,}4224 = 1 + 12 \cdot i \Rightarrow$
$\Rightarrow i = \dfrac{0{,}4224}{12} = 0{,}0352 = 3{,}52\%$
Logo, a taxa mensal deveria ser de 3,52%.
Resposta: alternativa **d**.

6. Considerando as informações contidas no enunciado, conclui-se: $i = 6\%$ a.m.; $M = 1960$; $t = 1$ ano e 4 meses, ou 16 meses. Logo:
$M = C \cdot (1 + i \cdot t) \Rightarrow 1960 = C \cdot (1 + 0{,}06 \cdot 16) \Rightarrow$
$\Rightarrow 1{,}96 \cdot C = 1960 \Rightarrow C = 1000$
Logo, o capital aplicado foi R$ 1.000,00.
Resposta: alternativa **a**.

7. A entrada para a compra do veículo corresponde a 60% de 30 000, ou seja, 18 000 ($0{,}6 \cdot 30\,000 = 18\,000$). Ao restante, R$ 12.000,00, serão acrescidos 2% de juros durante 5 meses:
$J = 0{,}02 \cdot 5 \Rightarrow J = 10\%$
Logo: $M = 12\,000 + 0{,}10 \cdot 12\,000 = 13\,200$
Então, o valor, em reais, de cada prestação será: $P = \dfrac{13\,200}{5} \Rightarrow$
$\Rightarrow P = 2640$
Resposta: alternativa **c**.

8. Para o cálculo utiliza-se a expressão $M = C \cdot (1 + i)^t$ e considera-se, conforme as informações do enunciado, que, a cada mês, a taxa de juros compostos é $i = 0{,}01$. Desse modo:

- No início do primeiro mês considerado, $C_1 = 10\,000$. Assim:
  $M_1 = 10\,000 \cdot (1 + 0{,}01)^1 = 10\,100$
  Após a doação de R$ 100,00 no fim do mês, restaram R$ 10.000,00.
- No início do segundo mês, o capital aplicado era o montante restante do mês anterior, isto é, $C_2 = 10\,000$. Assim:
  $M_2 = 10\,000 \cdot (1 + 0{,}01)^1 = 10\,100$
  Nesse mês não houve doação.
- No início do terceiro mês, o capital aplicado era o montante restante do mês anterior, isto é, $C_3 = 10\,100$. Assim:
  $M_3 = 10\,100 \cdot (1 + 0{,}01)^1 = 10\,201$
  Após a doação de R$ 100,00 no fim do mês, restaram R$ 10.101,00.

Logo, a quantia aplicada após 3 meses era R$ 10.101,00.
Resposta: alternativa **b**.

9. Após 3 anos de uso, o preço do automóvel é dado por:
$V(3) = V_0 \cdot (0{,}8)^3 = 0{,}512 \cdot V_0 = 51{,}2\% \cdot V_0$
Assim, decorridos 3 anos, temos que o valor do automóvel é 51,2% do valor inicial, o que mostra uma desvalorização de 48,8% ou aproximadamente 49%.
Resposta: alternativa **c**.

10. Considerando um capital de R$ 10.000,00, temos:

- Aplicação básica
  Rendimento bruto mensal: $0{,}00542 \cdot 10\,000 = 54{,}20$
  Rendimento líquido mensal: $54{,}20 - 0{,}30 = 53{,}90$
- Aplicação pessoal
  Rendimento bruto mensal: $0{,}00560 \cdot 10\,000 = 56{,}00$
  Taxa administrativa: $0{,}038 \cdot 56{,}00 = 2{,}128$
  Rendimento líquido mensal: $56{,}00 - 2{,}128 \simeq 53{,}87$

Portanto, a aplicação que fornecerá maior rendimento líquido é a aplicação básica, com rendimento líquido de R$ 53,90.
Resposta: alternativa **a**.

11. O valor a ser pago, em reais, na opção financiada é R$ 1.800,00, pois: $1500 \cdot 1{,}2 = 1800$.
Portanto, cada parcela será de R$ 600,00.
No ato da compra, será paga a primeira parcela, de modo que, em relação ao preço à vista, temos um saldo devedor no valor de R$ 900,00, pois: $1500 - 600 = 900$
Considerando i a taxa de juro, após um mês, o novo valor, em reais, a ser pago é: $900 \cdot (1 + i)$
A segunda parcela também é de R$ 600,00.
Portanto, o novo saldo devedor será: $900 \cdot (1 + i) - 600$
Passado mais um mês, o saldo devedor, em reais, será:
$[900 \cdot (1 + i) - 600] \cdot (1 + i) = 900 \cdot (1 + i)^2 - 600 \cdot (1 + i)$
Após o pagamento da terceira parcela de R$ 600,00, o saldo devedor será 0. Então:
$900 \cdot (1 + i)^2 - 600 \cdot (1 + i) - 600 = 0 \Rightarrow 3i^2 + 4i - 1 = 0$
Resolvendo essa equação de segundo grau, obtemos:
$$i = \dfrac{-4 \pm \sqrt{28}}{6} \Rightarrow \begin{cases} i_1 = \dfrac{-4 + 5{,}29}{6} = 0{,}215 \\ i_2 = \dfrac{-4 - 5{,}29}{6} \simeq -1{,}55 \text{ (não convém)} \end{cases}$$
Logo: $i = 21{,}5\%$
Resposta: alternativa **d**.

12. Analisando a situação mês a mês, tem-se a descrição a seguir.
No 1º mês, depósito de R$ 2.300,00.
No 2º mês, rendimento, em reais, de: $M = 2300 \cdot (1 + 0{,}02) = 2346$
Adicionando-se esse rendimento ao segundo depósito no valor de R$ 2.300,00, o saldo no 2º mês é R$ 4.646,00.
No 3º mês, rendimento, em reais, de:
$M = 4646 \cdot (1 + 0{,}02) = 4738{,}92$
Adicionando-se esse rendimento ao terceiro depósito no valor de R$ 2.300,00, o saldo acumulado é R$ 7.038,92.
Resposta: alternativa **c**.

13. Considerando as informações contidas no enunciado, conclui-se: $A = 1370$; $i = 25\%$ a.a.; e $M = 480$.
Substituindo esses valores na expressão dada, podemos encontrar n, equivalente ao tempo, em anos. Assim:
$M = A \cdot (1 + i)^n \Rightarrow 5480 = 1370 \cdot (1 + 0{,}25)^n \Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{5480}{1370} = 1{,}25^n \Rightarrow 1{,}25^n = 4$

Aplicando o logaritmo nos dois membros, temos:
$\log 1{,}25^n = \log 4 \Rightarrow n \cdot \log 1{,}25 = \log 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow n \cdot \log \frac{125}{100} = \log 2^2 \Rightarrow n(\log 125 - \log 100) = 2 \log 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow n(3 \log 5 - 2) = 2 \log 2 \Rightarrow n[3(\log 10 - \log 2) - 2] = 2 \log 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow n[3(1 - \log 2) - 2] = 2 \log 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow n = \frac{2 \log 2}{1 - 3 \log 2} \Rightarrow n = \frac{2 \cdot 0{,}30}{1 - 3 \cdot 0{,}30} \Rightarrow n = 6$
Resposta: alternativa **a**.

14. No Sistema Price, a expressão de cálculo da prestação P para o valor financiado V é:
$P = V \cdot \frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1}$
Nas condições descritas, tem-se $P = 6720$, $i = 0{,}16$ e $n = 5$.
Substituindo os valores na expressão, temos:
$6720 = V \cdot \frac{(1 + 0{,}16)^5 \cdot 0{,}16}{(1 + 0{,}16)^5 - 1} \Rightarrow V = 22\,000$
Calculando os juros incidentes sobre a primeira prestação, obtemos:
$J = 22\,000 \cdot 0{,}16 = 3\,520$
Segue-se, portanto, que a amortização decorrente do pagamento da primeira prestação será R$ 3.200,00, pois:
$6720 - 3520 = 3200$
Resposta: alternativa **e**.

15. Avaliando cada afirmação, conclui-se que:
a) Correta, pois a inflação depende de vários índices de preços.
b) Incorreta, pois o aumento dos preços não é, necessariamente, incontrolável.
c) Incorreta, pois a inflação não é medida somente pelos gastos, mas também depende de outros fatores.
d) Incorreta, pois o aumento da massa salarial causa deflação.
e) Incorreta, pois o aumento do crédito não é a definição da inflação, é a causa.
Resposta: alternativa **a**.

16. De acordo com o enunciado, temos $f = 5\% = 0{,}05$ e $i = 10\% = 0{,}1$.
Substituindo os valores na equação dada temos:
$1 + r = \frac{1 + i}{1 + f} \Rightarrow 1 + r = \frac{1 + 0{,}1}{1 + 0{,}05} \Rightarrow r \simeq 4{,}76\% \simeq 4{,}7\%$
Logo, a classificação é regular, com ganho real próximo de 4,7%.
Resposta: alternativa **c**.

Capítulo 2 • Poliedros

Atividades

1. Pela relação de Euler, válida para qualquer poliedro convexo, temos:
$V - A + F = 2 \Rightarrow V - 16 + 9 = 2 \Rightarrow V = 9$
Sendo assim, o poliedro tem 9 vértices.

2. O poliedro possui 7 faces, das quais 5 são quadrangulares e 2 são pentagonais. Determinando o número de arestas, obtém-se:
5 faces quadrangulares: $5 \cdot 4 = 20$;
2 faces pentagonais: $2 \cdot 5 = 10$.
Como cada aresta foi contada duas vezes, temos:
$2A = 20 + 10 \Rightarrow A = 15$
Aplicando a relação de Euler, temos:
$V - A + F = 2 \Rightarrow V - 15 + 7 = 2 \Rightarrow V = 10$
Logo, o poliedro tem 15 arestas e 10 vértices.

3. O poliedro possui 9 faces, das quais 3 são quadrangulares, 2, triangulares e 4, pentagonais. Determinando o número de arestas, obtém-se:
3 faces quadrangulares: $3 \cdot 4 = 12$;
2 faces triangulares: $2 \cdot 3 = 6$;
4 faces pentagonais: $4 \cdot 5 = 20$.
Como cada aresta foi contada duas vezes, temos:
$2A = 12 + 6 + 20 \Rightarrow A = 19$
Aplicando a relação de Euler, temos:
$V - A + F = 2 \Rightarrow V - 19 + 9 = 2 \Rightarrow V = 12$
Portanto, o poliedro tem 12 vértices.

4. O poliedro possui 7 faces, das quais 3 são triangulares, 1 é quadrangular, 1, pentagonal e 2, hexagonais. Determinando o número de arestas, tem-se:
3 faces triangulares: $3 \cdot 3 = 9$;
1 face quadrangular: $1 \cdot 4 = 4$;
1 face pentagonal: $1 \cdot 5 = 5$;
2 faces hexagonais: $2 \cdot 6 = 12$.
Como cada aresta foi contada duas vezes, temos:
$2A = 9 + 4 + 5 + 12 \Rightarrow A = 15$
Aplicando a relação de Euler, temos:
$V - A + F = 2 \Rightarrow V - 15 + 7 = 2 \Rightarrow V = 10$
Portanto, o poliedro tem 10 vértices.

5. Na figura apresentada no enunciado, nota-se que a quantidade de faces triangulares é igual à quantidade de vértices do cubo. Como há 8 vértices em um cubo, o poliedro terá 8 faces triangulares. Além disso, cada face do cubo determina uma face quadrada do poliedro. Como o cubo possui 6 faces, o poliedro terá 6 faces quadradas.
Resposta: alternativa **b**.

6. **a)** A afirmação é verdadeira, pois o octaedro possui 6 vértices, e o hexaedro possui 6 faces. Além disso, ao jogar o dado esférico, o peso se alojará sobre um dos vértices do octaedro, que será a região em contato com o plano horizontal. Assim, quatro vértices estarão localizados na superfície da esfera, pela qual passa um plano paralelo ao plano horizontal que contém o centro da esfera, e um vértice estará no topo dela (cada um deles representando um número do dado). Assim, a disposição dos vértices do octaedro se assimila à disposição das faces do dado em formato de hexaedro regular.
b) A afirmação é falsa. O número de vértices do octaedro (6) é igual ao número de faces do hexaedro (6).
c) A afirmação é verdadeira, pois o octaedro e o hexaedro possuem 12 arestas cada. Porém, isso não justifica o fato de a cavidade no interior da esfera ser octaédrica, pois não relaciona os vértices do octaedro com as faces do hexaedro.
d) A afirmação é verdadeira, pois o octaedro possui 8 faces e o hexaedro possui 8 vértices. Porém, isso não justifica o fato de a cavidade no interior da esfera ser octaédrica, pois não relaciona os vértices do octaedro com as faces do hexaedro.
e) A afirmação é falsa. O número de faces do octaedro (8) é igual ao número de vértices do hexaedro (8).
Resposta: alternativa **a**.

7. **a)** Verdadeira. A relação de Euler é válida para todos os poliedros convexos, incluindo todos os poliedros de Platão.
b) Falsa. Nos poliedros de Platão, as faces não precisam ser polígonos regulares, portanto um poliedro pode ser de Platão e não ser regular.
c) Verdadeira. Para um poliedro ser classificado como poliedro de Platão, por definição, é necessário que todas as suas faces contenham o mesmo número de arestas.
d) Verdadeira. As faces de um poliedro convexo serem regulares e congruentes entre si é uma das características que definem um poliedro regular.
Resposta: Alternativa **b**.

8. O poliedro é composto de 12 faces pentagonais e 20 hexagonais, isto é, possui 32 faces. Para determinar o número de ligações, deve-se calcular o número de arestas, obtendo-se:
12 faces pentagonais: $12 \cdot 5 = 60$;
20 faces hexagonais: $20 \cdot 6 = 120$.
Como cada aresta foi contada duas vezes, temos:
$2A = 60 + 120 \Rightarrow A = 90$
Aplicando a relação de Euler, temos:
$V - A + F = 2 \Rightarrow V - 90 + 32 = 2 \Rightarrow V = 60$
Portanto, essa molécula possui 60 átomos e 90 ligações.

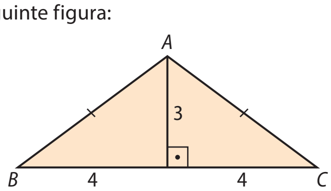
9. Um cubo de aresta 8 cm possui 6 faces quadradas de lado 8 cm. Sendo assim, a área total desse cubo, em cm², é igual a 6 vezes a área de um quadrado de lado 8 cm:
$S_t = 6 \cdot 8^2 = 384$

10. Sejam *a*, *b* e *c* as dimensões do paralelepípedo, *D* a diagonal do paralelepípedo e *d* a diagonal da face de dimensões *a* e *b*. Sendo assim, temos:
$D^2 = d^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = 13^2 - 5^2 \Rightarrow c = \pm 12$
Como *c* é uma dimensão do paralelepípedo, $c = 12$ dm. Também se deve considerar, segundo o enunciado, que:
$4 \cdot (a + b + c) = 76 \Rightarrow a + b + 12 = 19 \Rightarrow a + b = 7$
Sabendo que $D^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 25$, tem-se o seguinte sistema:
$$\begin{cases} a + b = 7 \\ a^2 + b^2 = 25 \end{cases}$$
Resolvendo o sistema, obtêm-se $a = 3$ e $b = 4$.
Portanto, as dimensões do paralelepípedo são 3 dm, 4 dm e 12 dm.

11. Como o prisma é pentagonal e regular, sua superfície lateral é formada por cinco retângulos de dimensões 4 cm e 20 cm. Logo, sua área lateral, em cm², é dada por:
$S_\ell = 5 \cdot 4 \cdot 20 = 400$

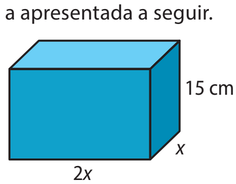
12. Como *M* é ponto médio de $\overline{AB}$, então $\overline{MH} = \overline{MG}$, portanto o triângulo *MHG* é isósceles. Por ser isósceles, a altura desse triângulo em relação à base $\overline{HG}$ passa pelo ponto médio *M'* desse segmento. Projetando esse ponto de forma perpendicular ao segmento $\overline{DC}$, percebe-se que $\overline{MM'}$ corresponde à hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem 4 u.c. Portanto, pelo teorema de Pitágoras, temos $MM' = 4\sqrt{2}$.
Assim, a área do triângulo *MHG*, em u.a., é igual a:
$$S = \frac{HG \cdot MM'}{2} = \frac{4 \cdot 4\sqrt{2}}{2} = 8\sqrt{2}$$
Resposta: alternativa **c**.

13. Segundo as informações contidas no enunciado, pode-se considerar a seguinte figura:



Pelo teorema de Pitágoras, a medida do segmento $\overline{AC}$, dado em dm, é igual a:
$AC^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow AC = 5$
Assim, o perímetro da base do prisma, em dm, é igual a:
$AB + AC + BC = 5 + 5 + 8 = 18$
Portanto, sendo a altura *h* do prisma um terço dessa medida, tem-se $h = 6$ dm.
Calculando as áreas desse prisma, em dm², tem-se:
$S_b = \frac{8 \cdot 3}{2} = 12$
$S_\ell = 6 \cdot (5 + 5 + 8) = 108$
$S_t = S_\ell + 2S_b = 108 + 2 \cdot 12 = 132$

14. Segundo as informações do enunciado, pode-se considerar uma figura como a apresentada a seguir.



A área total da superfície desse paralelepípedo, em cm², é igual a:
$S_t = S_\ell + 2S_b \Rightarrow S_t = 2 \cdot (2x \cdot 15 + x \cdot 15) + 2 \cdot 2x \cdot x \Rightarrow$
$\Rightarrow 424 = 2 \cdot (2x^2 + 45x)$

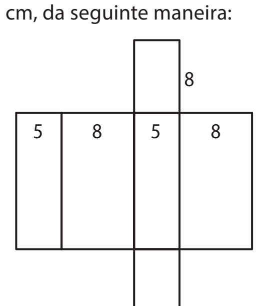
A última equação pode ser reescrita como $2x^2 + 45x - 212 = 0$, cujas raízes são $x' = 4$ e $x'' = -\frac{53}{2}$. Como *x* é a medida de uma dimensão do paralelepípedo, desconsidera-se o valor negativo. Portanto, as dimensões desconhecidas do paralelepípedo são 8 cm e 4 cm.

15. Sejam $x - 1$, x e $x + 1$ as dimensões das arestas do paralelepípedo. Como um paralelepípedo tem quatro arestas de cada dimensão, pode-se determinar *x*, em cm, da seguinte maneira:
$4 \cdot (x - 1 + x + x + 1) = 84 \Rightarrow x = 7$
Logo, as arestas medem 6 cm, 7 cm e 8 cm, portanto a área total do paralelepípedo, em cm², é dada por:
$S_t = 2 \cdot (6 \cdot 7 + 6 \cdot 8 + 7 \cdot 8) = 292$

16. A estufa pode ser representada por um prisma de base pentagonal. Essa base pode ser decomposta em um triângulo isósceles e um retângulo. Portanto, a área da base do prisma, em m², é dada por:
$S_{base} = S_{triângulo} + S_{retângulo} = \frac{8 \cdot 3}{2} + 8 \cdot 3 \Rightarrow S_{base} = 36$
A área da face retangular lateral da estufa, em m², é igual a:
$S_{parede} = 70 \cdot 3 = 210$
Para calcular a área do telhado, é necessário determinar a medida ℓ, em m, dos lados congruentes do triângulo isósceles que compõem a fachada da estufa.
Pelo teorema de Pitágoras, tem-se:
$\ell^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow \ell = 5$
Assim, a área de cada face retangular, em m², que forma o telhado da estufa é igual a:
$S_{telhado} = 70 \cdot 5 = 350$
Logo, a área da superfície total da estufa, em m², é dada por:
$S_{estufa} = 2 \cdot (36 + 210 + 350) = 1192$

17. Seja ℓ a medida da aresta da base triangular do prisma. Sabe-se que essa base pode ser inscrita em uma circunferência de raio 2 dm. Como o lado de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência de raio *r* corresponde a $r\sqrt{3}$, segue que $\ell = 2\sqrt{3}$ dm. Portanto, a área da base desse prisma, em dm², é igual a:
$$S_b = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(2\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}$$
Segundo o enunciado, a área da superfície lateral do prisma é igual ao quádruplo da área da base. Logo, a área lateral, em dm², é:
$S_\ell = 4 \cdot S_b \Rightarrow S_\ell = 4 \cdot 3\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$
Assim, a área total do prisma, em dm², é igual a:
$S_t = S_\ell + 2S_b \Rightarrow S_t = 12\sqrt{3} + 2 \cdot 3\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$
Multiplicando o valor obtido por $\sqrt{3}$, tem-se o seguinte resultado:
$\sqrt{3} \cdot 18\sqrt{3}\ dm^2 = 54\ dm^2$

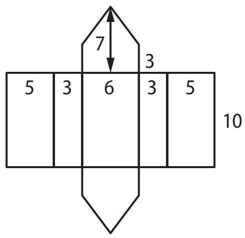
18. **a)** Pode-se representar a planificação do prisma, com medidas indicadas em cm, da seguinte maneira:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

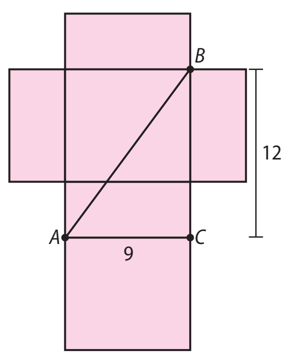
Assim, as áreas desse prisma, em cm^2, são dadas por:
$S_b = 8 \cdot 5 = 40$
$S_\ell = 2 \cdot (5 \cdot 15 + 8 \cdot 15) = 390$
$S_t = S_\ell + 2S_b = 390 + 2 \cdot 40 = 470$

b) Pode-se representar a planificação do prisma, com medidas indicadas em m, da seguinte maneira:



A base do prisma pode ser decomposta em um retângulo de dimensões 3 m e 6 m e em um triângulo isósceles de altura 4 m e base 6 m.
Calculando as áreas desse prisma, em m^2, tem-se:
$S_b = S_{\text{triângulo}} + S_{\text{retângulo}} \Rightarrow S_b = \dfrac{6 \cdot 4}{2} + 6 \cdot 3 = 30$
$S_\ell = 2 \cdot (5 \cdot 10) + 2 \cdot (3 \cdot 10) + 6 \cdot 10 = 220$
$S_t = S_\ell + 2S_b = 220 + 2 \cdot 30 = 280$

19. Uma planificação do paralelepípedo do enunciado é dada pela figura a seguir.



Na planificação da caixa, é possível notar que a menor distância entre os pontos A e B é a hipotenusa do triângulo retângulo ACB, de catetos 9 e 12. Pelo teorema de Pitágoras, tem-se:
$AB^2 = 12^2 + 9^2 \Rightarrow AB = 15$

20. Como o tijolo tem a forma de um paralelepípedo, então o volume de argila necessário para produzi-lo é igual ao volume de um paralelepípedo. Sendo assim, o volume de cada tijolo, em cm^3, é dado por:
$V_{\text{tijolo}} = a \cdot b \cdot c = 18 \cdot 9 \cdot 6 = 972$
Para produzir 5 000 tijolos, será necessária uma quantia de argila equivalente a:
$5\,000 \cdot 972\ cm^3 = 4\,860\,000\ cm^3 = 4{,}86\ m^3$

21. Sendo a, b e c as medidas das arestas do paralelepípedo, é possível escrever:
$a = \dfrac{1}{2}$; $b = \dfrac{1}{2}q$; $c = \dfrac{1}{2}q^2$, em que q é a razão da progressão geométrica.
Como o volume do paralelepípedo é dado por $V = a \cdot b \cdot c$, então:
$V = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2}q \cdot \dfrac{1}{2}q^2 \Rightarrow 64 = \dfrac{q^3}{8} \Rightarrow q = 8$
Determinando as arestas b e c, em cm, tem-se:
$b = \dfrac{1}{2} \cdot 8 = 4$
$c = \dfrac{1}{2} \cdot 64 = 32$
Logo, as outras duas arestas do paralelepípedo medem 4 cm e 32 cm.

22. A diagonal do cubo é definida por $D = a\sqrt{3}$. Como a diagonal do cubo em questão mede $2\sqrt{3}$ m, então $2\sqrt{3} = a\sqrt{3} \Rightarrow a = 2$.
Assim, o volume desse cubo, em m^3, é $V = a^3 = 2^3 = 8$.
Como 1 m^3 de água corresponde a 1 000 L, então 8 m^3 correspondem a 8 000 L.
Resposta: alternativa **c**.

23. Resposta pessoal. Sugestão de problema: Determine o custo total que a empresa terá para produzir 10 bombons do tipo 1 ao leite e 10 bombons do tipo 2 brancos.
O volume do bombom de cada tipo, em cm^3, é:
$V_1 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$
$V_2 = 6 \cdot 5 \cdot 2 = 60$
Portanto, o custo em reais de cada bombom, de acordo com a encomenda será:
$C_1 = 0{,}03 \cdot 64 = 1{,}92$
$C_2 = 0{,}04 \cdot 60 = 2{,}40$
Assim, o custo total em reais, na produção de 10 unidades de cada tipo de bombom, é igual a:
$10 \cdot 1{,}92 + 10 \cdot 2{,}40 = 43{,}20$

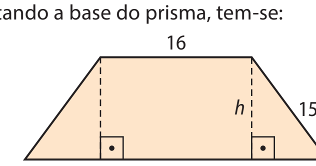
24. Como o volume do paralelepípedo é dado por $V = a \cdot b \cdot c$ e as dimensões internas da caixa-d'água são 1,2 m, 1 m e 0,7 m, então seu volume, em m^3, é igual a:
$V = 1{,}2 \cdot 1 \cdot 0{,}7 \Rightarrow V = 0{,}84$
Como 1 m^3 de água corresponde a 1 000 L, então 0,84 m^3 corresponde a 840 L.
Resposta: alternativa **c**.

25. Primeiro, deve-se determinar a quantidade de chuva que entrou pela abertura superior da caixa-d'água. A área da abertura quadrada, em cm^2, é dada por:
$S_{\text{abertura}} = 40^2 = 1600$
Assim, a área da abertura superior da caixa-d'água é de 1600 cm^2 = 0,16 m^2.
Como a chuva foi de 70 mm, ou seja, o equivalente a 70 L de água por metro quadrado, então a caixa-d'água recebeu uma quantidade de água, em litro, igual a:
$70 \cdot 0{,}16 = 11{,}2$
Como 1 L de água corresponde a 0,001 m^3, então 11,2 L correspondem a 0,0112 m^3.
Portanto, o aumento na altura do nível da água dentro da caixa, em m, foi de:
$V = 0{,}0112 \Rightarrow 1{,}4 \cdot 0{,}8 \cdot h = 0{,}0112 \Rightarrow h = \dfrac{0{,}0112}{1{,}12} = 0{,}01$
Logo, o nível da água dentro da caixa aumentou 0,01 m = 1 cm.
Resposta: alternativa **b**.

26. O volume do prisma é dado por $V = S_b \cdot h$. Como a base do prisma é um triângulo equilátero, então a área da base, em cm^2, é:
$S_b = \dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$
Portanto, o volume do prisma, em cm^3, é igual a:
$V = 4\sqrt{3} \cdot 12 = 83{,}04$

27. A área de um octógono regular de lado x é definida por:
$S_{\text{octógono}} = 2x^2 \cdot (1 + \sqrt{2})$
Considerando que o volume de um prisma é dado por $V = S_b \cdot h$, então o volume ocupado pelas 400 caixas de *pizza* corresponde a:
$V_{\text{total}} = 400 \cdot 2x^2 \cdot (1 + \sqrt{2}) \cdot y \Rightarrow V_{\text{total}} = 800x^2y\,(1 + \sqrt{2})$

28. a) Representando a base do prisma, tem-se:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Ao determinar a altura a do trapézio, em cm, utilizando o teorema de Pitágoras, tem-se:
$a^2 = 15^2 - 9^2 \Rightarrow a = 12$

Logo, a área da base do prisma, em cm^2, é dada por:

$S_b = \dfrac{(34 + 16) \cdot 12}{2} = 300$

Assim, o volume do prisma, em cm^3, é igual a:

$V = S_b \cdot h = 300 \cdot 40 = 12\,000$

b) A densidade d de um corpo é definida por $d = \dfrac{m}{V}$, em que m é a massa e V, o volume do corpo. Portanto, para o prisma em questão, tem-se:

$7{,}5 \text{ g/cm}^3 = \dfrac{m}{12\,000 \text{ cm}^3} \Rightarrow m = 90\,000 \text{ g}$

Dessa maneira, a massa do prisma de ferro é 90 000 g, ou 90 kg.

29. a) A superfície lateral de um prisma hexagonal regular é constituída de seis retângulos congruentes. Logo, a área lateral da estrutura de madeira utilizada para a construção da coluna, em m^2, é igual a:

$S_\ell = 6 \cdot (2 \cdot 8) = 96$

b) A base da estrutura de madeira é um hexágono regular. Assim, a área dessa base, em m^2, é igual a:

$S_b = 6 \cdot \dfrac{l^2\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \dfrac{2^2\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3}$

Ao calcular o volume da coluna, em m^3, obtém-se:

$V = S_b \cdot h \Rightarrow V = 6\sqrt{3} \cdot 8 = 48\sqrt{3}$

Portanto, o volume de concreto necessário para preencher a forma da coluna é $48\sqrt{3}$ m^3.

30. Pode-se notar que a cunha tem formato de prisma de base triangular. Em particular, esse triângulo é retângulo, e seus catetos medem 10 cm e 15 cm. Além disso, a altura do prisma é de 10 cm. Logo, o volume da cunha, em cm^3, é igual a:

$V = S_b \cdot h \Rightarrow V = \dfrac{10 \cdot 15}{2} \cdot 10 = 750$

Resposta: alternativa **c**.

31. Esse sólido é um prisma de base triangular cuja altura corresponde à medida da aresta do cubo *ABCDEFGH*. Assim, o triângulo *GFQ* tem base 8 u.c. e altura 8 u.c. Desse modo, sua área, em u.a., é igual a:

$S_b = \dfrac{8 \cdot 8}{2} = 32$

Portanto, o volume desse sólido, em u.v., é $V = 32 \cdot 8 = 256$.

Resposta: alternativa **c**.

32. a) Seja $OM = m$ o apótema da base. No caso de uma pirâmide quadrangular regular, esse apótema é definido por $m = \dfrac{\ell}{2}$, em que ℓ é a medida do lado da base da pirâmide. Assim, a medida do apótema da base, em cm, é igual a:

$m = \dfrac{12}{2} = 6$

b) Considere $VM = g$ o apótema da pirâmide, $h = 4$ cm e $m = 6$ cm. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo *VOM*, tem-se:

$g^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow g^2 = 4^2 + 6^2 \Rightarrow g = 2\sqrt{13}$

Dessa maneira, a medida do apótema da pirâmide é $2\sqrt{13}$ cm.

c) Seja $VB = a$ a medida da aresta lateral da pirâmide. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo *VBM*, tem-se:

$a^2 = g^2 + \left(\dfrac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow a^2 = (2\sqrt{13})^2 + \left(\dfrac{12}{2}\right)^2 \Rightarrow a = 2\sqrt{22}$

Sendo assim, a medida da aresta lateral da pirâmide é $2\sqrt{22}$ cm.

d) Calculando as áreas dessa pirâmide, em cm^2, obtém-se:

$S_b = 12^2 = 144;$

$S_\ell = 4 \cdot \dfrac{\ell \cdot g}{2} = 4 \cdot \dfrac{12 \cdot 2\sqrt{13}}{2} = 48\sqrt{13};$

$S_t = S_\ell + S_b = 48\sqrt{13} + 144 = 48(3 + \sqrt{13}).$

33. a) Sejam M o ponto médio de BC e $OM = m$ o apótema da base. No caso de uma pirâmide de base hexagonal, m é a altura do triângulo equilátero *OBM*, isto é, o apótema da base é definido por $m = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$, em que ℓ é a medida do lado da base da pirâmide. Assim, a medida do apótema da base, em cm, é igual a:

$m = \dfrac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$

b) Considere $VM = g$ o apótema da pirâmide, $h = 6$ cm e $m = 4\sqrt{3}$ cm. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo *VOM*, tem-se:

$g^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow g^2 = 6^2 + (4\sqrt{3})^2 \Rightarrow g = 2\sqrt{21}$

Sendo assim, a medida do apótema da pirâmide é $2\sqrt{21}$ cm.

c) Seja $VB = a$ a medida da aresta lateral da pirâmide. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo *VBM*, tem-se:

$a^2 = g^2 + \left(\dfrac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow a^2 = (2\sqrt{21})^2 + \left(\dfrac{8}{2}\right)^2 \Rightarrow a = 10$

Sendo assim, a medida da aresta lateral da pirâmide é 10 cm.

d) Calculando as áreas dessa pirâmide, em cm^2, obtém-se:

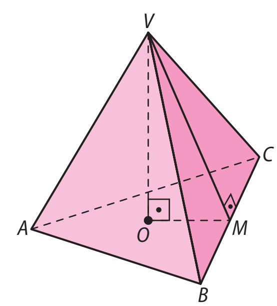
$S_b = 6 \cdot \dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = 96\sqrt{3};$

$S_\ell = 6 \cdot \dfrac{\ell \cdot g}{2} = 6 \cdot \dfrac{8 \cdot 2\sqrt{21}}{2} = 48\sqrt{21};$

$S_t = S_\ell + S_b = 48\sqrt{21} + 96\sqrt{3} = 48\sqrt{3}(2 + \sqrt{7}).$

Assim, a medida da área total é $48\sqrt{3}(2 + \sqrt{7})$ cm^2.

34. Com as informações do enunciado, pode-se construir a imagem a seguir:



Do enunciado, tem-se que $VB = 13$ cm e $VM = 12$ cm. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo *VBM*, obtém-se a medida de BC em cm:

$VB^2 = VM^2 + \left(\dfrac{BC}{2}\right)^2 \Rightarrow \dfrac{BC^2}{4} = 13^2 - 12^2 \Rightarrow BC = 10$

Portanto, a área lateral da pirâmide, em cm^2, é dada por:

$S_\ell = 3 \cdot \dfrac{10 \cdot 12}{2} = 180$

35. Como todas as arestas têm a mesma medida, pode-se afirmar que a pirâmide é formada por quatro triângulos equiláteros de lado $\ell = 15$. Portanto, a área total dessa pirâmide, em cm^2, é:

$S_t = 4 \cdot \dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = 4 \cdot \dfrac{15^2\sqrt{3}}{4} = 225\sqrt{3}$

36. Como o perímetro da base é 40 cm, então a medida ℓ da aresta da base, em cm, é:

$\ell = \dfrac{40}{4} = 10$

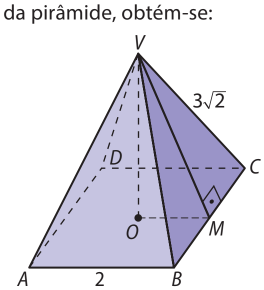
Para determinar a medida da área lateral da pirâmide, é necessário calcular o apótema g da pirâmide. Como a base dela é quadrada, então o apótema da base m é dado por $m = \dfrac{\ell}{2}$. Assim, a medida g é dada por:

$g^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow g^2 = 12^2 + \left(\dfrac{10}{2}\right)^2 \Rightarrow g = \pm 13$

Como g é o apótema da pirâmide, tem-se $g = 13$ cm. Assim, a área lateral da pirâmide, em cm^2, é igual a:

$S_\ell = 4 \cdot \dfrac{\ell \cdot g}{2} = 4 \cdot \dfrac{10 \cdot 13}{2} = 260$

37. Da planificação da pirâmide, obtém-se:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

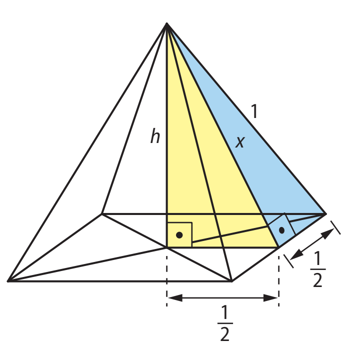
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo VMB, obtém-se:
$VB^2 = VM^2 + MB^2 \Rightarrow (3\sqrt{2})^2 = VM^2 + 1^2 \Rightarrow VM^2 = 17$
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo VOM, obtém-se:
$VM^2 = VO^2 + OM^2 \Rightarrow 17 = VO^2 + 1^2 \Rightarrow VO = 4$
Considerando que $VO = h$, ao calcular o volume da pirâmide, em u.v., tem-se:
$V = \frac{1}{3}S_b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 2^2 \cdot 4 = \frac{16}{3}$

38. Segundo o enunciado, a pirâmide tem $V = 9$ cm³ e $h = 4\sqrt{3}$ cm. Assim, pode-se determinar a área de sua base por meio da relação:
$V = \frac{1}{3}S_b \cdot h \Rightarrow 9\text{ cm}^3 = \frac{1}{3}S_b \cdot 4\sqrt{3}\text{ cm} \Rightarrow S_b = \frac{9\sqrt{3}}{4}\text{ cm}^2$
Como a base da pirâmide é um triângulo equilátero, conclui-se que a medida a da aresta, em cm, é:
$S_b = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \frac{9\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow a = \pm 3$
Sendo a a medida da aresta, desconsidera-se o valor negativo. Logo, $a = 3$ cm.
Resposta: alternativa **b**.

39. Sejam ℓ e g as medidas da aresta da base e do apótema da pirâmide, respectivamente. Ao considerar que a área da base é igual à metade da área lateral, obtém-se:
$S_b = \frac{1}{2} \cdot S_\ell \Rightarrow 6 \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{\ell \cdot g}{2} \Rightarrow \ell\sqrt{3} = g$
Substituindo $\ell\sqrt{3} = g$ na relação $g^2 = h^2 + m^2$, tem-se:
$(\ell\sqrt{3})^2 = 6^2 + \left(\frac{\ell\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow 3\ell^2 - \frac{3\ell^2}{4} = 36 \Rightarrow \ell = \pm 4$
Sendo ℓ a aresta da base, desconsidera-se o valor negativo. Portanto, o volume mais próximo da pirâmide, em cm³, é:
$V = \frac{1}{3}S_b \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{4^2\sqrt{3}}{4} \cdot 6 \Rightarrow V \simeq 83$

40. **a)** O volume do bloco retangular, em u.v., é dado por:
$V_{\text{bloco}} = S_b \cdot h = 4 \cdot 4 \cdot 8 = 128$
Ao calcular a área da base da pirâmide triangular, em u.a., obtém-se:
$S_b = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{8^2\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}$
b) Para que o volume da pirâmide seja igual ao do bloco retangular, a altura h da pirâmide, em u.c., deve ser igual a:
$V_{\text{bloco}} = V_{\text{pirâmide}} \Rightarrow 128 = \frac{1}{3}S_b \cdot h \Rightarrow 128 = \frac{1}{3} \cdot 16\sqrt{3} \cdot h \Rightarrow$
$\Rightarrow h = 8\sqrt{3}$

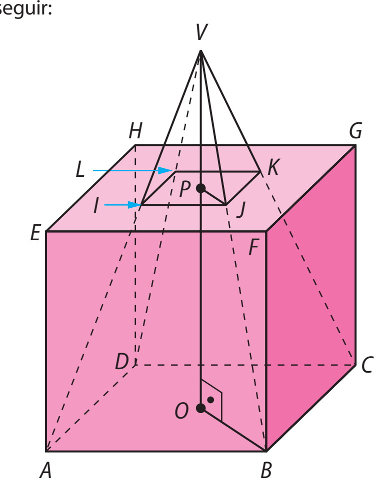
41. Com as informações do enunciado, pode-se construir a imagem a seguir:



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo de lados 1, x e $\frac{1}{2}$, tem-se:
$1^2 = x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
Ao aplicar o teorema de Pitágoras no triângulo de lados x, h e $\frac{1}{2}$, obtém-se:
$x^2 = h^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = h^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow h = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Conhecida a medida h, sabe-se que a altura do paralelepípedo será o dobro desse valor. Assim, o volume do paralelepípedo será dado por:
$V = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$
Resposta: alternativa **c**.

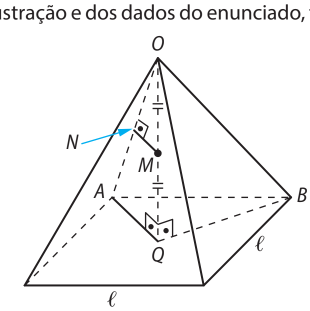
42. De acordo com as informações contidas no enunciado, obtém-se a figura a seguir:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Ainda, segundo o enunciado, pode-se considerar que $VO = 20$ cm e $IJ = JK = 5$ cm. Além disso, OP corresponde à medida da aresta do cubo.
Como os triângulos VPJ e VOB são semelhantes, conclui-se que:
$$\frac{VP}{VO} = \frac{PJ}{OB} \Rightarrow \frac{20 - OP}{20} = \frac{\frac{5\sqrt{2}}{2}}{\frac{OP\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow OP^2 - 20 \cdot OP + 100 = 0$$
Resolvendo a equação anterior, tem-se que $OP = 10$ cm.
Calculando o volume do cubo, em cm³, obtém-se:
$V = OP^3 = 10^3 = 1000$

43. A partir da ilustração e dos dados do enunciado, tem-se a figura:

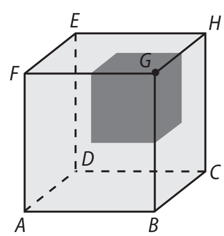


De acordo com o enunciado, pode-se afirmar que $OQ = \ell$ e $MN = a$. Também se pode estabelecer a relação $\triangle OQA \sim \triangle ONM$. Logo:
$\frac{OA}{OM} = \frac{AQ}{MN}$ (I)
Como o triângulo OQA é retângulo, ao aplicar o teorema de Pitágoras, obtém-se a medida de OA:
$(OA)^2 = (OQ)^2 + (AQ)^2 \Rightarrow (OA)^2 = \ell^2 + \left(\frac{\ell\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow OA = \frac{\ell\sqrt{6}}{2}$
Sabendo que $OM = \frac{\ell}{2}$, substituindo em (I), obtém-se:
$$\frac{\frac{\ell\sqrt{6}}{2}}{\frac{\ell}{2}} = \frac{\frac{\ell\sqrt{2}}{2}}{a} \Rightarrow \ell = 2a\sqrt{3}$$
Dessa maneira, o volume da pirâmide, em função de a, é dado por:
$V = \frac{1}{3}S_b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \ell^2 \cdot \ell = \frac{1}{3} \cdot (2a\sqrt{3})^3 = 8a^3\sqrt{3}$

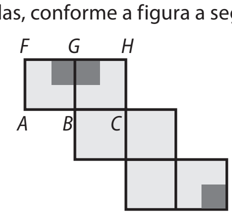
44. Resposta pessoal. Sugestão de problema: Considerando que o custo por litro para todas as tintas é o mesmo, determine o custo máximo para pintar as faces laterais da pirâmide usando duas cores (uma cor para cada duas faces) sabendo que são necessárias duas demãos para realizar a pintura.
Inicialmente, deve-se determinar a área lateral da pirâmide. Para isso, é necessário encontrar o apótema da pirâmide, dado pela relação:
$g^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow g^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow g = \pm 5$
Como g é o apótema da pirâmide, tem-se $g = 5$ m. Assim, a área lateral da pirâmide, em m², é igual a:
$S_\ell = 4 \cdot \frac{\ell \cdot g}{2} = 4 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} = 60$
Como metade da superfície lateral da pirâmide (equivalente a duas faces) será pintada com uma cor e a outra metade, com uma cor distinta, segue que cada cor deve cobrir uma área de 30 m² por demão.
Para obter o custo máximo da pintura, devem-se usar as tintas com menor rendimento, que são as de cor roxa e vermelha. Como o rendimento de ambas é o mesmo e como cada face receberá duas demãos, a quantidade de litros de tinta de cada cor necessária para a pintura será de $60 : 22 \simeq 2{,}73$.
Considerando x o custo por litro de tinta, então o custo máximo será de aproximadamente $5{,}46x$.

Atividades complementares

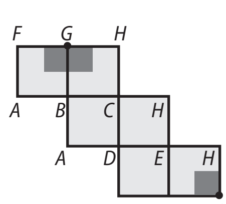
1. Considerando o cubo presente na questão e nomeando cada um de seus vértices, chega-se à seguinte figura:



A partir dela, percebe-se que o vértice G é comum às três faces do cubo parcialmente pintadas. Além disso, analisando as possibilidades de planificação para esse cubo nas alternativas, percebe-se que as duas faces superiores das planificações são comuns a todas.
Considere que essas duas faces são faces adjacentes do cubo que foram pintadas, conforme a figura a seguir:



Nessa planificação, é possível determinar, pelo encontro das arestas, que, abaixo da face planificada *GHCB*, estará a face *BCDA*. Seguindo esse raciocínio, determina-se a posição das demais faces e a posição na qual o vértice G estará na figura planificada:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Resposta: alternativa **d**.

2. Como o poliedro tem 20 faces triangulares e cada face tem 3 arestas, o número total de arestas desse poliedro é dado por:
$A = \frac{20 \cdot 3}{2} = 30$
Assim, ao aplicar a relação de Euler, obtém-se:
$V - A + F = 2 \Rightarrow V - 30 + 20 = 2 \Rightarrow V = 12$
Resposta: alternativa **b**.

3. O poliedro possui 13 vértices e 19 faces. Portanto, pela reação de Euler, tem-se:
$V - A + F = 2 \Rightarrow 13 - A + 19 = 2 \Rightarrow A = 30$
Como uma face é hexagonal, ou seja, possui 6 arestas, e 18 faces são poligonais do tipo P, com n arestas, pode-se assumir que:
$A = \frac{6 + 18n}{2} \Rightarrow 30 = \frac{6 + 18n}{2} \Rightarrow n = 3$
Portanto, o polígono P é um triângulo.
Resposta: alternativa **e**.

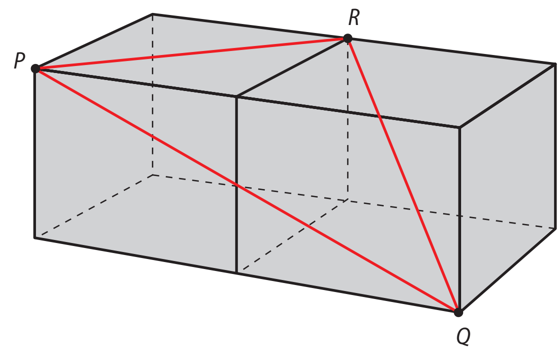
4. Segundo a planificação do poliedro, ele possui 8 faces, das quais 4 são hexagonais e 4, triangulares. Ao determinar o número de arestas, obtém-se:
4 faces hexagonais: $4 \cdot 6 = 24$;
4 faces triangulares: $4 \cdot 3 = 12$.
Como cada aresta foi contada duas vezes, tem-se:
$2A = 24 + 12 \Rightarrow A = 18$
Ao aplicar a relação de Euler, obtém-se:
$V - A + F = 2 \Rightarrow V - 18 + 8 = 2 \Rightarrow V = 12$
Resposta: alternativa **a**.

5. Sendo q o número de faces quadrangulares e t o número de faces triangulares do poliedro, que possui 20 arestas, pode-se escrever:
$\frac{3t}{2} + \frac{4q}{2} = 20 \Rightarrow 3t + 4q = 40$ (I)
Sabe-se que a soma dos ângulos internos das faces do poliedro é 2880°. Como a soma dos ângulos internos de cada face triangular é 180° e a soma dos ângulos internos de cada face quadrangular é 360°, conclui-se que:
$180t + 360q = 2\,880$ (II)
Considerando as equações (I) e (II), obtém-se o seguinte sistema:
$$\begin{cases} 3t + 4q = 40 \\ 180t + 360q = 2\,880 \end{cases}$$
Ao resolver o sistema, obtêm-se as soluções $t = 8$ e $q = 4$, ou seja, o poliedro em questão possui 8 faces triangulares.
Resposta: alternativa **a**.

6. Pela relação de Euler, temos que:
$V - A + F = 2 \Rightarrow 8 - A + F = 2 \Rightarrow A - F = 6$ (I)
Como o deltaedro é composto de faces triangulares, é possível estabelecer a seguinte relação:
$A = \frac{3F}{2}$ (II)
Substituindo (II) em (I), tem-se:
$\frac{3F}{2} - F = 6 \Rightarrow F = 12$
Logo, o deltaedro tem 12 faces.
Resposta: alternativa **e**.

7. Sejam c, l e h o comprimento, largura e a profundidade da piscina, respectivamente. Pode-se calcular a área total da superfície da piscina pela relação:
$S_{total} = c \cdot l + 2 \cdot l \cdot h + 2 \cdot c \cdot h$
Calculando a área total de cada projeto, em m², tem-se:
$S_I = 25 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 1{,}8 + 2 \cdot 25 \cdot 1{,}8 = 147{,}2$;
$S_{II} = 9 \cdot 5 + 2 \cdot 5 \cdot 2 + 2 \cdot 9 \cdot 2 = 101$;
$S_{III} = 15 \cdot 6 + 2 \cdot 6 \cdot 1 + 2 \cdot 15 \cdot 1 = 132$;
$S_{IV} = 4 \cdot 15 + 2 \cdot 15 \cdot 1{,}5 + 2 \cdot 4 \cdot 1{,}5 = 117$;
$S_V = 12 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 2{,}5 + 2 \cdot 12 \cdot 2{,}5 = 111$.
Portanto, o projeto que o casal deverá escolher, por apresentar menor área de revestimento, será o projeto II.
Resposta: alternativa **b**.

8. Conforme o enunciado, pode-se construir a figura a seguir:



Para calcular a área do triângulo *PQR*, devem-se determinar as medidas *PR*, *RQ* e *PQ*. Como $\overline{PR}$ é a diagonal de um quadrado de lado 1 dm, sua medida, em dm, é igual a:

$PR = \ell\sqrt{2} = 1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}$

O segmento $\overline{RQ}$ equivale à diagonal de um cubo de aresta 1 dm. Logo, sua medida, em dm, é igual a:

$RQ = a\sqrt{3} = 1 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}$

Já a medida *PQ* equivale à medida da diagonal de um retângulo de lados 1 dm e 2 dm. Aplicando o teorema de Pitágoras, tem-se a medida de *PQ*:

$PQ^2 = 1^2 + 2^2 \Rightarrow PQ^2 = 5$

Note que o triângulo *PQR* satisfaz o teorema de Pitágoras, pois:

$(PQ)^2 = 5 = 2 + 3 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2 = (PR)^2 + (RQ)^2$

Logo, o triângulo *PQR* é retângulo em *R*, portanto sua área, em dm², é dada por:

$S = \dfrac{PR \cdot RQ}{2} = \dfrac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

Resposta: alternativa **a**.

9. Sejam *c*, *l* e *h* o comprimento, largura e altura, respectivamente, do contêiner original. Considere S_1 a área das paredes internas e externas desse contêiner e S_2 a área de seu piso. Assim, a medida dessas áreas é de:

$S_1 = 2 \cdot (2 \cdot c \cdot h + 2 \cdot l \cdot h) = 4ch + 4lh$

$S_2 = c \cdot l = cl$

Após a mudança no projeto, o contêiner passou a ter o dobro do comprimento e da largura. Seja S_3 a nova área das paredes internas e externas do contêiner e S_4 a nova área de seu piso. Assim, a medida dessas áreas é de:

$S_3 = 2 \cdot (2 \cdot 2c \cdot h + 2 \cdot 2l \cdot h) = 8ch + 8lh = 2 \cdot (4ch + 4lh) = 2 \cdot S_1$

$S_4 = 2c \cdot 2l = 4 \cdot cl = 4 \cdot S_2$

Portanto, a quantidade de tinta necessária para pintar as paredes dobrou, enquanto, para o piso, a quantidade necessária quadruplicou. Logo, o fornecedor II deve ser o escolhido pelo construtor.

Resposta: alternativa **b**.

10. Pode-se notar que o volume *V* da escada é dado pela soma dos volumes de 20 paralelepípedos reto-retângulos de mesma base, cujas dimensões são 20 cm por 50 cm. Além disso, as alturas dos degraus formam uma progressão aritmética de razão 10. Portanto, se o primeiro degrau possui 10 cm de altura, o vigésimo degrau terá altura de 20 · 10 cm = 200 cm e, assim, a soma das alturas de todos os degraus, em cm, será dada por:

$S_{20} = \left(\dfrac{10 + 200}{2}\right) \cdot 20 = 2100$

Logo, o volume da escada, em cm³, será igual a:

$V = 20 \cdot 50 \cdot 2100 = 2\,100\,000$

Portanto, o volume da escada será de 2 100 000 cm³ = 2,1 m³.

Resposta: alternativa **a**.

11. Sejam *a*, *b* e *c* as medidas das arestas do paralelepípedo. Pelo enunciado, pode-se considerar que $ab = 2$, $bc = 3$ e $ac = 4$.

Dessa forma:

$ab \cdot bc \cdot ac = 2 \cdot 3 \cdot 4 \Rightarrow a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = 24 \Rightarrow abc = \pm\sqrt{24} = \pm 2\sqrt{6}$

Como *abc* representa o volume do paralelepípedo, desconsidera-se o valor negativo. Assim, o volume é $2\sqrt{6}$ cm³.

Resposta: alternativa **b**.

12. Sejam *a* e ℓ as medidas das arestas do cubo e do tetraedro, respectivamente. A área da superfície de um cubo é dada por $S_{cubo} = 6a^2$. Já a área da superfície de um tetraedro regular é definida por $S_{tetraedro} = \ell^2\sqrt{3}$.

Considerando que o cubo e o tetraedro têm áreas de superfície iguais, então:

$S_{cubo} = S_{tetraedro} \Rightarrow 6a^2 = \ell^2\sqrt{3} \Rightarrow \dfrac{\ell}{a} = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt[4]{3}} \Rightarrow \dfrac{\ell}{a} = \dfrac{2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{4}}} \Rightarrow \dfrac{\ell}{a} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{4}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{3}$

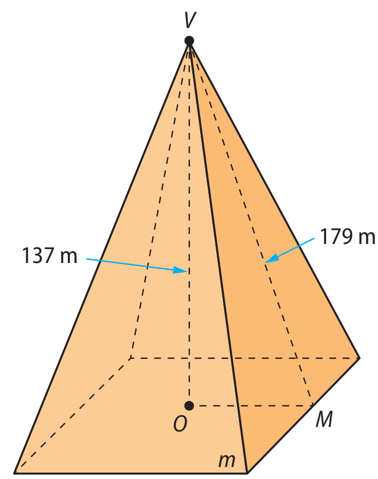
Resposta: alternativa **c**.

13. Considerando a altura da pirâmide igual a 10 cm e a base quadrada de lado $\ell = 3$ cm, segue que o volume da pirâmide, em cm³, é:

$V = \dfrac{1}{3}S_b \cdot h = \dfrac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot 10 = 30$

Resposta: alternativa **b**.

14. A partir da figura do enunciado, acrescenta-se o apótema da base.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Ao aplicar o teorema de Pitágoras no triângulo *VOM*, obtém-se:

$179^2 = 137^2 + (OM)^2 \Rightarrow OM^2 = 13\,272$

Como o lado ℓ da base quadrada da pirâmide é igual ao dobro do apótema da base, cuja medida é dada por *OM*, conclui-se que:

$\ell = 2 \cdot OM \Rightarrow \ell^2 = (2 \cdot OM)^2 \Rightarrow \ell^2 = 4 \cdot 13\,272 = 53\,088$

Logo, a área da base dessa pirâmide é de 53 088 m².

Resposta: alternativa **d**.

15. Segundo os dados do enunciado, os volumes de *T*1 e *T*2 podem ser expressos por:

$V_{T1} = c \cdot L \cdot x;$

$V_{T2} = \dfrac{c}{2} \cdot 2L \cdot y = c \cdot L \cdot y.$

Após passar pelo aerador *A*1, o volume de líquido que vem do tanque *T*1 aumenta em 15%, passando a ser igual a $1{,}15V_{T1}$. Já ao passar pelo aerador *A*2, ele ganha um novo aumento de volume de 10%, passando a ter um volume de $1{,}1 \cdot 1{,}15V_{T1} = 1{,}265V_{T1}$.

Portanto, o volume do tanque V_{T2} deve ser igual ao volume do tanque V_{T1} após esses aumentos consecutivos, ou seja:

$V_{T2} = 1{,}265V_{T1} \Rightarrow c \cdot L \cdot y = 1{,}265 \cdot c \cdot L \cdot x \Rightarrow y = 1{,}265x$

Assim, a relação das alturas *y* e *x* dos tanques é dada por $y = 1{,}265x$.

Resposta: alternativa **a**.

16. Para atingir uma altura de 15 cm, a altura da coluna de água no paralelepípedo deve ter um aumento de 15 cm − 8 cm = 7 cm. Assim, o volume de água no interior do paralelepípedo, em cm³, deve aumentar em:

$V = S_b \cdot h = 4 \cdot 3 \cdot 7 = 84$

Como cada bolinha que será colocada dentro do recipiente possui volume de 6 cm³, então o número de bolinhas necessárias para proporcionar esse aumento de volume é igual a 84 : 6 = 14.

Resposta: alternativa **a**.

17. Sabe-se que um cubo possui 8 vértices. Dessa forma, segundo o enunciado, serão retiradas do cubo 8 pirâmides, de modo que o volume do sólido resultante será de: $V_{\text{sólido}} = V_{\text{cubo}} - 8 \cdot V_{\text{pirâmide}}$.
Analisando a figura da atividade, nota-se que a aresta AK da pirâmide $AIJK$ é perpendicular à base AIJ e que $AK = IA = AJ = \frac{a}{2}$.
Assim, o volume de $AIJK$ é dado por:

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3}S_b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3}{48}$$

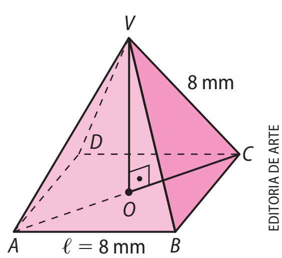
Dessa forma, o volume do sólido é dado por:

$$V_{\text{sólido}} = a^3 - 8 \cdot \frac{a^3}{48} = \frac{5a^3}{6}$$

Resposta: alternativa **e**.

18. Sejam V_1 o volume do cubo de aresta α e V_2 o volume do cubo de aresta $\alpha + 1$. Segundo o enunciado, a diferença entre V_2 e V_1 é de:
$V_2 - V_1 = 271 \Rightarrow (\alpha + 1)^3 - \alpha^3 = 271 \Rightarrow 3\alpha^2 + 3\alpha - 270 = 0$
Calculando as raízes dessa última equação, obtém-se $\alpha' = 9$ e $\alpha'' = -10$. Como α é a medida da aresta de um cubo, desconsidera-se o valor negativo, de modo que $\alpha = 9$ m.
Resposta: alternativa **c**.

19. Com as informações do enunciado, pode-se construir a imagem a seguir:



O volume do octaedro é o dobro do volume da pirâmide regular de base quadrada, cuja aresta mede 8 mm.
Como OC equivale à metade da diagonal do quadrado $ABCD$, segue que:

$$OC = \frac{8\sqrt{2}\text{ mm}}{2} = 4\sqrt{2}\text{ mm}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo VOC, obtém-se a medida, em mm, do segmento $\overline{VO}$:
$VC^2 = VO^2 + OC^2 \Rightarrow 64 = VO^2 + (4\sqrt{2})^2 \Rightarrow VO = 4\sqrt{2}$
Como $S_b = (8\text{ mm})^2 = 64\text{ mm}^2$, então o volume da pedra, em mm^3, é dado por:

$$V_{\text{pedra}} = 2 \cdot V_{\text{pirâmide}} = 2 \cdot \frac{1}{3}S_b \cdot h = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 64 \cdot 4\sqrt{2} = \frac{512\sqrt{2}}{3}$$

Capítulo 3 • Corpos redondos

Atividades

1. Pelo enunciado, tem-se que $h = 5$ cm e $r = 6$ cm. Logo, as áreas, em cm^2, são:
a) $S_b = \pi r^2 = \pi \cdot 6^2 = 36\pi$
b) $S_\ell = 2\pi rh = 2\pi \cdot 6 \cdot 5 = 60\pi$
c) $S_t = S_\ell + 2S_b = 60\pi + 2 \cdot 36\pi = 132\pi$

2. Sabendo que o perímetro da base é de 62,8 cm, segue que o raio da base e a altura do cilindro, em cm, medem:

$$C = 2\pi r \Rightarrow 62{,}8 = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{62{,}8}{2 \cdot 3{,}14} = 10$$

$$h = \frac{r}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

Logo, a área lateral, em cm^2, será:
$S_\ell = 2\pi rh = 62{,}8 \cdot 5 = 314$

3. Pelo enunciado tem-se que $S_\ell = 20\pi\text{ cm}^2$ e $r = 5$ cm. Assim, a altura h, em cm, é dada por:
$S_\ell = 2\pi rh \Rightarrow 20\pi = 2\pi \cdot 5 \cdot h \Rightarrow h = 2$

4. Como a área da base é de $25\pi\text{ cm}^2$ conclui-se que $r = 5$ cm, portanto $h = 9$ cm. Logo, a área total do cilindro, em cm^2, será:
$S_t = S_\ell + 2S_b = 2\pi rh + 2 \cdot 25\pi = 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 9 + 50\pi = 140\pi$

5. Como o diâmetro da base mede 8 cm, então seu raio mede 8 cm : 2 = 4 cm. Já a altura do cilindro é de 18 cm. Logo, sua área total, em cm^2, é igual a:
$S_t = S_\ell + 2S_b = 2\pi rh + 2 \cdot \pi r^2 = 2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 18 + 2 \cdot \pi \cdot 4^2 = 176\pi$

6. Considerando que a área S da secção meridiana do cilindro equilátero é 400 cm^2, pode-se concluir que:
a) $S = h^2 \Rightarrow h^2 = 400 \Rightarrow h = \pm 20$
Como h é a altura do cilindro, segue que $h = 20$ cm.
b) $h = 2r \Rightarrow r = \frac{20}{2} = 10$
$S_t = S_\ell + 2S_b = 2\pi rh + 2 \cdot \pi r^2 =$
$= 2 \cdot \pi \cdot 10 \cdot 20 + 2 \cdot \pi \cdot 10^2 = 600\pi$
Logo, a área total da superfície do cilindro é de $600\pi\text{ cm}^2$.

7. Durante sete dias, cada habitante consome, em média, $7 \cdot 120$ L $=$ $= 840$ L de água. Como o povoado tem 100 habitantes, seu consumo médio de água nesse período é $100 \cdot 840$ L $= 84\,000$ L $=$ $= 84\text{ m}^3$, sendo esse o volume mínimo do reservatório.
Do volume do cilindro, obtemos a altura mínima h, em metro, procurada:

$$V = \pi r^2 h \Rightarrow 84 \simeq 3 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot h \Rightarrow h \simeq 4{,}48$$

Resposta: alternativa **d**.

8. A embalagem cilíndrica tem área superficial total, em cm^2, igual a:
$S_t = S_\ell + 2S_b = 2\pi rh + 2 \cdot \pi r^2 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 10 + 2 \cdot 3 \cdot 2^2 = 144$
A embalagem que é um paralelepípedo tem área superficial total S, em cm^2, igual a:
$S = 2 \cdot (4 \cdot 5 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 6) = 148$
Portanto, a embalagem que terá o menor custo de fabricação é a cilíndrica, pois possui menor área superficial. Como $144\text{ cm}^2 =$ $= 0{,}0144\text{ m}^2$, o custo da embalagem cilíndrica, em reais, é de:
$25 \cdot 0{,}0144 = 0{,}36$
Resposta: alternativa **a**.

9. Analisando as dimensões de cada modelo de caixa, é possível determinar seu armazenamento máximo de latas de tinta:
- Modelo I: No comprimento cabem 8 : 4 = 2, na largura cabem 8 : 4 = 2 e na altura cabem 40 : 6 $\simeq$ 6,7 $\simeq$ 6. Portanto, nessa caixa cabe uma quantidade de latas igual a $2 \cdot 2 \cdot 6 = 24$;
- Modelo II: No comprimento cabem 8 : 4 = 2, na largura cabem 20 : 4 = 5 e na altura cabem 14 : 6 $\simeq$ 2,3 $\simeq$ 2. Portanto, nessa caixa cabe uma quantidade de latas igual a $2 \cdot 5 \cdot 2 = 20$;
- Modelo III: No comprimento cabem 18 : 4 = 4,5 $\simeq$ 4, na largura cabem 5 : 4 = 1,25 $\simeq$ 1 e na altura cabem 35 : 6 $\simeq$ 5,8 $\simeq$ $\simeq$ 5. Portanto, nessa caixa cabe uma quantidade de latas igual a $4 \cdot 1 \cdot 5 = 20$;
- Modelo IV: No comprimento cabem 20 : 4 = 5, na largura cabem 12 : 4 = 3 e na altura cabem 12 : 6 = 2. Portanto, nessa caixa cabe uma quantidade de latas igual a $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$;
- Modelo V: No comprimento cabem 24 : 4 = 6, na largura cabem 8 : 4 = 2 e na altura cabem 14 : 6 $\simeq$ 2,3 $\simeq$ 2. Portanto, nessa caixa cabe uma quantidade de latas igual a $6 \cdot 2 \cdot 2 = 24$.

Portanto, o modelo IV possui maior armazenamento.
Resposta: alternativa **d**.

10. Sejam M e N as projeções ortogonais, respectivamente, dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$ em r. Para calcular o volume do sólido solicitado, é necessário calcular o volume do cilindro gerado pela revolução do retângulo $MNCB$ e, dele, subtrair o volume do cilindro gerado pela revolução do retângulo $MNDA$.
Para determinar a altura do retângulo $ABCD$, deve-se utilizar o teorema de Pitágoras no triângulo BCD:
$5^2 = (BC)^2 + (5 - 2)^2 \Rightarrow BC = 4$

Sendo assim:
$V_{MNCB} = \pi \cdot 5^2 \cdot 4 = 100\pi$
$V_{MNDA} = \pi \cdot 2^2 \cdot 4 = 16\pi$
Portanto: $V = 100\pi - 16\pi = 84\pi$
Resposta: alternativa **d**.

11. Vamos indicar o cilindro de raio menor por C_1 e o de raio maior por C_2. Logo:

a) A área da superfície do sólido, em cm², será:
$S_{\text{sólido}} = S_{\ell_1} + S_{b_1} + S_{\ell_2} + S_{b_2} + (S_{b_2} - S_{b_1}) =$
$= 2\pi \cdot (r_1h_1 + r_2h_2) + 2\pi r_2^2 =$
$= 2\pi \cdot (15 \cdot 45 + 20 \cdot 9) + 2\pi \cdot 20^2 = 2\,510\pi$

b) O volume do sólido, em cm³, é igual a:
$V = V_1 + V_2 = \pi r_1^2 h_1 + \pi r_2^2 h_2 = \pi \cdot 15^2 \cdot 45 + \pi \cdot 20^2 \cdot 9 = 13\,725\pi$

12. Considerando que $\pi \simeq 3$, pode-se calcular o raio da nova cisterna, em m:
$81 = \pi \cdot r^2 \cdot 3 \Rightarrow r \simeq 3$
Como o raio da cisterna antiga possuía 1 m e o da cisterna atual deve medir aproximadamente 3 m, será necessário aumentar o raio em aproximadamente 2 m.
Resposta: alternativa **c**.

13. Considerando as informações do enunciado, calcula-se o raio da base, em cm:
$S_t = S_\ell + 2S_b \Rightarrow 80\pi = 30\pi + 2 \cdot \pi \cdot r^2 \Rightarrow r = 5$
Dessa maneira, calcula-se h, em cm:
$S_\ell = 2\pi rh \Rightarrow 30\pi = 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot h \Rightarrow h = 3$
Assim, o volume do cilindro, em cm³, é dado por:
$V = \pi r^2 h = \pi \cdot 5^2 \cdot 3 = 75\pi$

14. O volume da jarra cilíndrica é equivalente a $8 \cdot 300$ ml $=$ $= 2\,400$ ml $= 2\,400$ cm³. Dessa maneira, a área de sua base, em cm², é dada por:
$V = \pi r^2 h \Rightarrow V = S_b \cdot h \Rightarrow 2400 = S_b \cdot 30 \Rightarrow S_b = 80$
Resposta: alternativa **d**.

15. a) Considerando as informações do enunciado e $\pi = 3{,}14$, calculam-se os volumes das latas, em cm³:
$V_1 = \pi r_1^2 h_1 = 3{,}14 \cdot (3{,}1)^2 \cdot 11{,}6 \simeq 350$
$V_2 = \pi r_2^2 h_2 = 3{,}14 \cdot (3{,}1)^2 \cdot 16{,}6 \simeq 501 \simeq 500$

b) Calculando o preço, em reais, por cm³ de cada lata, tem-se:
$P_1 = \dfrac{0{,}7}{V_1} = \dfrac{0{,}7}{350} = 0{,}002$
$P_2 = \dfrac{1{,}1}{V_2} = \dfrac{1{,}1}{500} = 0{,}0022$
Como P_1 possui menor custo por cm³, segue que a lata (1) apresenta melhor preço para o consumidor.

16. Considerando $\pi = 3{,}14$, calculam-se os volumes V_p do prisma e V_c do cilindro, em cm³:
$V_p = 5 \cdot 5 \cdot 80 = 2\,000$
$V_c = \pi r^2 h = 3{,}14 \cdot (2{,}5)^2 \cdot 80 = 1570$
Dessa maneira, cada peça gera uma sobra de madeira, em cm³, igual a $2\,000 - 1570 = 430$. Logo, 1000 peças geram uma sobra de $1000 \cdot 430$ cm³ $= 4{,}3 \cdot 10^5$ cm³ de madeira.
Resposta: alternativa **c**.

17. Considerando que o sólido é formado por dois cilindros cujos raios da base são 40 cm e cujas alturas são 5 cm e um cilindro cujo raio da base é 10 cm e a altura é 30 cm, pode-se afirmar que o volume do sólido, em cm³, é igual a:
$V = 2 \cdot (\pi \cdot 40^2 \cdot 5) + \pi \cdot 10^2 \cdot 30 = 19\,000\pi$

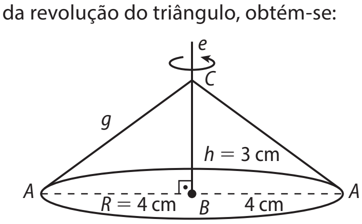
18. Resposta pessoal. Sugestão de problema: Qual é o custo aproximado com chapas de aço para se construir uma caixa-d'água em formato cilíndrico com altura de 8 m e capacidade de 40 mil litros? Considere $\pi = 3{,}14$.
Para construir a caixa-d'água, precisa-se de duas chapas de aço quadradas, cuja medida do lado é o dobro do raio da base do cilindro, e de duas chapas retangulares, que serão soldadas na lateral, cujas dimensões são a altura do cilindro e metade do comprimento da circunferência da base.
Como 40 000 L $= 40$ m³ de água, segue que $V = 40$. Desse modo, o raio da base do cilindro, em m, é dado por:
$V = \pi r^2 h \Rightarrow 40 = 3{,}14 \cdot r^2 \cdot 8 \Rightarrow r \simeq 1{,}26$
Já o comprimento da circunferência da base, em cm, é de:
$c = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}26 \simeq 7{,}91$
Logo, a soma das áreas das chapas quadradas e retangulares, em m², é igual a:
$S_t = 2 \cdot S_q + 2 \cdot S_r = 2 \cdot (2r)^2 + 2 \cdot h \cdot \dfrac{c}{2} = 2 \cdot (2{,}52)^2 + 8 \cdot 7{,}91 \simeq 76$
Logo, o custo total das chapas, em reais, é de, aproximadamente, $200 \cdot 76 = 15200$.

19. Como o funil é representado por um cone reto, segue que sua geratriz é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são o raio da base do cone e sua altura. Desse modo, a medida de sua geratriz, em cm, é dada por:
$g^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow g = 5$
Portanto, a área lateral do funil, em cm², é:
$S_\ell = \pi rg = 3{,}14 \cdot 3 \cdot 5 = 47{,}1$

20. a) A partir da rotação do triângulo em torno de $\overline{AC}$, forma-se um cone reto cujo raio da base mede 6 cm e cuja altura mede 8 cm. Logo, a medida de sua geratriz, em cm, é dada por:
$g^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow g = 10$
Com esses dados, pode-se calcular a área total do cone, em cm²:
$S_t = S_\ell + S_b = \pi rg + \pi r^2 = 6 \cdot 10 \cdot \pi + 6^2 \cdot \pi = 96\pi$

b) A partir da rotação do triângulo em torno de $\overline{AB}$, forma-se um cone reto cujo raio da base mede 8 cm e cuja altura mede 6 cm. Logo, a medida de sua geratriz, em cm, é dada por:
$g^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow g = 10$
Com esses dados, pode-se calcular a área total do cone, em cm²:
$S_t = S_\ell + S_b = \pi rg + \pi r^2 = 8 \cdot 10 \cdot \pi + 8^2 \cdot \pi = 144\pi$

21. a) A partir da revolução do triângulo, obtém-se:



EDITORIA DE ARTE

Desse modo, a medida da geratriz desse cone, em cm, é de:
$g^2 = h^2 + R^2 \Rightarrow g^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow g = 5$
Já sua área total, em cm², é igual a:
$S = S_\ell + S_b = \pi Rg + \pi R^2 = 4 \cdot 5 \cdot \pi + 4^2 \cdot \pi = 36\pi$

b) Utilizando as definições dadas pela atividade, obtêm-se ℓ e r, em cm:
$\ell = R + h + g = 4 + 3 + 5 = 12$
$S = \ell \cdot 2\pi r \Rightarrow 36\pi = 12 \cdot 2\pi \cdot r \Rightarrow r = 1{,}5$

22. A geratriz de um cone equilátero é igual ao dobro do raio de sua base. Então:
$g = 2r \Rightarrow 20$ cm $= 2r \Rightarrow r = 10$ cm
Assim, a área da base do cone, em cm², é dada por:
$S_b = \pi r^2 = \pi \cdot 10^2 = 100\pi$

23. Considere $g = 15$ cm e $\alpha = 120° = \dfrac{2\pi}{3}$ rad. O comprimento do setor circular será igual ao comprimento da circunferência da base do cone. Logo, o raio da base do cone, em cm, é dado por:
$2\pi r = \alpha \cdot g \Rightarrow 2 \cdot \pi \cdot r = \dfrac{2\pi}{3} \cdot 15 \Rightarrow r = 5$
Como o cone construído pelo setor circular é reto, segue que a sua altura, em cm, é dada por:
$g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow 15^2 = h^2 + 5^2 \Rightarrow h = 10\sqrt{2}$

24. O raio da peça circular corresponde à geratriz do cone a ser construído. Considere, assim, $g = 10$ cm e $\alpha = \left(2\pi - \frac{\pi}{5}\right)$ rad $= \frac{9\pi}{5}$ rad. O comprimento do setor circular será igual ao comprimento da circunferência da base do cone. Logo, o raio da base do cone, em cm, é dado por:

$2\pi r = \alpha \cdot g \Rightarrow 2 \cdot \pi \cdot r = \frac{9\pi}{5} \cdot 10 \Rightarrow r = 9$

Como o cone construído pelo setor circular é reto, segue que a sua altura, em cm, é dada por:

$g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow 10^2 = h^2 + 9^2 \Rightarrow h = \sqrt{19}$

25. Considerando o cilindro, conclui-se que suas áreas, em m², medem:

$S_\ell = 2\pi rh = 2\pi \cdot 3 \cdot 10 = 60\pi$

$S_b = \pi r^2 = \pi \cdot 3^2 = 9\pi$

Considerando o cone, obtém-se a medida de sua geratriz, em m, e de sua área lateral, em m²:

$g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow g^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow g = 5$

$S_\ell = \pi rg = \pi \cdot 3 \cdot 5 = 15\pi$

Portanto, a área total, em m², será:

$S_t = 60\pi + 9\pi + 15\pi = 84\pi = 263{,}76$

Se, com uma lata de tinta, podem-se pintar 10 m², tem-se:

$\frac{263{,}76}{10} = 26{,}376$

Portanto, o número mínimo de latas será 27.

26. Considerando que 45° equivale a $\frac{\pi}{4}$ rad, obtém-se:

$\alpha = \frac{2\pi R}{g} \Rightarrow \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi R}{g} \Rightarrow g = 8R$

Portanto, tem-se:

$H^2 + R^2 = g^2 \Rightarrow H^2 + R^2 = 64R^2 \Rightarrow H = 3\sqrt{7}R$

27. De acordo com o enunciado, segue que $r = h - 2$ e $g = h + 2$. Logo, a medida h, em m, é:

$g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow (h + 2)^2 = h^2 + (h - 2)^2 \Rightarrow h = 8$

Desse modo, $r = 6$ m e $g = 10$ m. Assim, a área total do cone, em m², é de:

$S_t = S_\ell + S_b = \pi rg + \pi r^2 = 6 \cdot 10 \cdot \pi + 6^2 \cdot \pi = 96\pi$

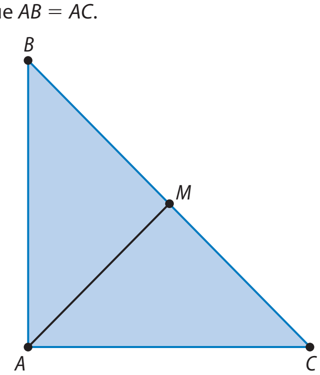
28. A partir das informações do enunciado, pode-se determinar a geratriz, a altura do cone, em cm, e seu volume, em cm³:

$S_\ell = \pi rg \Rightarrow 15\pi = \pi \cdot 3 \cdot g \Rightarrow g = 5$

$g^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow 5^2 = 3^2 + h^2 \Rightarrow h = 4$

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 12\pi$

29. Seja $\triangle ABC$ a seguir, obtido a partir das informações do enunciado, em que $AB = AC$.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

O sólido formado pela rotação completa desse triângulo em torno de $\overline{BC}$ é composto de dois cones congruentes cujo raio da base mede AM e cuja altura é $BM = 1$ cm.

Pelo teorema de Pitágoras, sabendo que $BC = 2$ cm, obtêm-se os valores, em cm, de $AB = AC = \ell$:

$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 \Rightarrow 4 = 2\ell^2 \Rightarrow \ell = \sqrt{2}$

Como o triângulo ABC é retângulo isósceles, segue que $\overline{AM} \perp \overline{BC}$, portanto pode-se determinar, pelo teorema de Pitágoras, a medida AM, em cm:

$(AB)^2 = (AM)^2 + (BM)^2 \Rightarrow (AM)^2 = 1 \Rightarrow AM = 1$

Logo, o volume do sólido, em cm³, será o dobro do volume de um cone de raio da base $r = 1$ cm e altura $h = 1$ cm:

$V = 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h\right) = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1^2 \cdot 1 = \frac{2\pi}{3}$

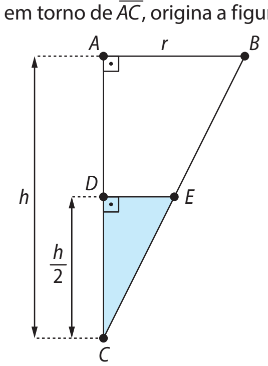
30. Sendo p o perímetro da secção meridiana do cone, a partir das informações do enunciado, pode-se determinar a geratriz, a altura do cone, em cm, e seu volume, em cm³:

$p = 2 \cdot (g + r) \Rightarrow 16 = 2 \cdot (g + 3) \Rightarrow g = 5$

$g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow 5^2 = h^2 + 3^2 \Rightarrow h = 4$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 12\pi$

31. Pode-se considerar o seguinte triângulo que, ao ser rotacionado completamente em torno de $\overline{AC}$, origina a figura da atividade.



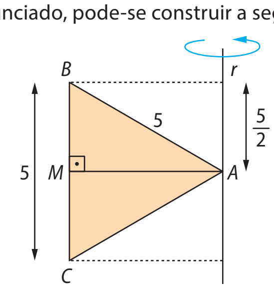
Como $\triangle ABC$ e $\triangle DEC$ são semelhantes, segue que $DE = \frac{r}{2}$.

Desse modo, considerando V' o volume do líquido e V o volume do recipiente, tem-se:

$$\frac{V'}{V} = \frac{\frac{1}{3}\pi \cdot (DE)^2 \cdot \frac{h}{2}}{\frac{1}{3}\pi \cdot (AB)^2 \cdot h} \Rightarrow \frac{V'}{V} = \frac{\left(\frac{r}{2}\right)^2 \cdot \frac{h}{2}}{r^2 \cdot h} \Rightarrow V' = \frac{V}{8}$$

32. Considere h a altura de um dos cones, $2h$ a altura do cilindro e r o raio da base comum a ambos. Dessa maneira, tem-se $V_{cone} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ e $V_{cilindro} = \pi r^2 \cdot (2h)$. Assim: $\frac{V_{cone}}{V_{cilindro}} = \frac{\frac{1}{3}\pi r^2 h}{\pi r^2 \cdot (2h)} = \frac{1}{6}$

33. A partir do enunciado, pode-se construir a seguinte figura.



Sejam B' e C' as respectivas projeções de B e C sobre r. Dessa maneira, o volume do sólido formado será igual ao volume do cilindro formado pela rotação de $CBB'C'$ em torno de r retirando-se o volume de dois cones congruentes formados pela rotação de ABB' em torno de r.

Como $\overline{AM}$ é a altura do triângulo equilátero, pelo teorema de Pitágoras, tem-se sua medida em dm:

$(AB)^2 = (BM)^2 + (AM)^2 \Rightarrow (AM)^2 = 5^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 \Rightarrow AM = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

Assim, o volume do sólido, em dm³, é:

$V = V_{cilindro} - 2 \cdot V_{cone} = \pi \cdot (AM)^2 \cdot 5 - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (AM)^2 \cdot \frac{5}{2} =$

$= \pi \cdot \frac{75}{4} \cdot 5 - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{75}{4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{125\pi}{2}$

34. Resposta pessoal. Sugestão de problema: Uma escola vai construir uma cisterna com 3 metros de altura interna. Sabe-se que a altura do cilindro será o dobro da altura do cone e que a base possui um raio interno de 1,8 metro. Quantos litros de água essa cisterna pode armazenar? (Considere $\pi = 3{,}14$.)
O volume da cisterna corresponde à soma dos volumes do cilindro e do cone. Logo, deve-se calcular o volume de um cilindro de raio da base igual a 1,8 m e altura (h_1) 2 m e de um cone, de mesmo raio da base (1,8 m), cuja altura (h_2) é igual a 1 m.
$V = \pi \cdot r^2 \cdot h_1 + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h_2 = \pi \cdot (1{,}8)^2 \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (1{,}8)^2 \cdot 1 =$
$= 23{,}7384$
Assim, a cisterna pode armazenar até 23,7384 m³, ou 23 738,4 L.

35. **a)** É necessário medir o raio interno da base do cone e a sua altura. Alternativamente à medida da altura, poderia ser medida a geratriz do cone e a altura poderia ser calculada com o teorema de Pitágoras a partir das duas medidas feitas no cone. Para realizar as medições, poderiam ser usados instrumentos de medida, como régua, fita métrica e paquímetro.
b) Sejam r o raio interno da base do canudinho e $R = 4r$ o raio do pote cilíndrico, ambos de altura h. A quantidade n de canudinhos de doce de leite que é possível montar nesse caso é:
$V_{\text{cilindro}} = n \cdot V_{\text{cone}} \Rightarrow \pi \cdot R^2 \cdot h = n \cdot \left(\frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}\right) \Rightarrow$
$\Rightarrow \pi \cdot (4r)^2 \cdot h = n \cdot \left(\frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}\right) \Rightarrow n = 48$
c) A capacidade V do canudinho, em cm³, é:
$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 1^2 \cdot 6 = 6{,}28$
Como 1 cm³ = 1 mL, a capacidade do canudinho é 6,28 mL. Da densidade do recheio, obtemos a massa m, em grama, de doce de leite usada em cada canudinho:
$d = \frac{m}{V} \Rightarrow m = 6{,}28 \cdot 1{,}32 \simeq 8{,}3$
d) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes identifiquem alguma demanda da comunidade e, a partir disso, consigam organizar uma ação social que auxilie no atendimento a essa demanda, seja por meio da arrecadação de recursos, seja de práticas de voluntariado.

36. A capacidade do recipiente equivale à soma dos volumes da esfera e do cilindro:
$V = V_{\text{esfera}} + V_{\text{cilindro}} = \frac{4}{3}\pi R^3 + \pi r^2 \cdot h =$
$= 3{,}14 \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot 9^3 + 3^2 \cdot 10\right) = 3334{,}68$
Portanto, a capacidade é de 3 334,68 cm³, ou 3 334,68 mL.

37. Do enunciado, conclui-se que o volume do recipiente, em cm³, é igual a:
$V = V_{\text{ext}} - V_{\text{int}}$
Logo:
$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi \cdot (20^3 - 17^3) = 2058\pi$
$d = \frac{m}{V} \Rightarrow 0{,}7 = \frac{m}{2058\pi} \Rightarrow m \simeq 4523{,}48$
A massa do recipiente é aproximadamente 4 523,48 g, ou 4,52 kg.

38. O raio r da semiesfera mede 18 m : 2 = 9 m. Dessa maneira, o volume do reservatório, em m³, é de:
$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi \cdot 9^3 = 486\pi$

39. Como 1 L = 1000 mL = 1000 cm³, segue que:
a) $V_{\text{água}} = \pi \cdot r^2 \cdot h - 1000$
$V_{\text{água}} = \pi \cdot 15^2 \cdot 50 - 1000 = 34325$
Portanto, o volume de água é 34 325 mL, ou 34,325 L.
b) Para transbordarem 2 litros de água, o volume da esfera deve ser de 3 000 cm³, então:
$V = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3 \Rightarrow 3000 = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3 \Rightarrow R \simeq 8{,}95$
Logo, o raio da esfera deve ser de aproximadamente 8,95 cm.

40. Sejam r_1 o raio da bola B_1 e $r_2 = 3r_1$ o raio da bola B_2. Assim, tem-se:
$V_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3$
$V_2 = \frac{4}{3}\pi r_2^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot (3r_1)^3 = 27 \cdot \frac{4}{3}\pi r_1^3 = 27V_1$
Resposta: alternativa **d**.

41. Da figura, temos $H = 13 - 2R$. A área total S_t do objeto é a soma da área lateral do cilindro e da superfície esférica. Logo:
$S_t = 2\pi RH + 4\pi R^2 \Rightarrow 78\pi = 2\pi R \cdot (13 - 2R + 2R) \Rightarrow R = 3$
Portanto, $H = (13 - 2 \cdot 3)$ cm = 7 cm.
Resposta: alternativa **d**.

42. Sabe-se que o raio da base do cilindro mede a e que, sendo ele equilátero, sua altura mede $2a$. Como a esfera está inscrita a ele, segue que seu raio também mede a. Assim:
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3}{\pi \cdot r^2 \cdot h} = \frac{\frac{4}{3} \cdot a^3}{a^2 \cdot 2a} = \frac{2}{3}$$

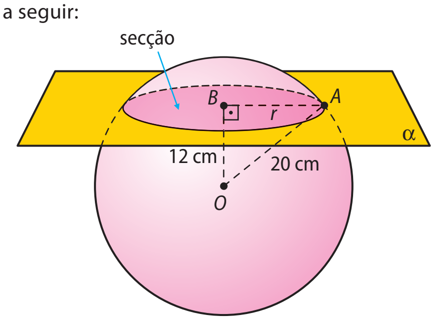
43. O volume V_r do recipiente de sorvete, em cm³, é dado por:
$V_r = \pi R^2 H = \pi \cdot 9^2 \cdot 5 = 405\pi$
O volume de sorvete em uma casquinha é igual ao volume V_c do cone da casquinha somado ao volume V_s da semiesfera correspondente a meia bola de sorvete. Assim, o volume de cada casquinha, em cm³, é de:
$V = V_c + V_s = \frac{1}{3}\pi r^2 h + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 =$
$= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot 6 + \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27\pi}{4}$
Assim, um recipiente de sorvete serve uma quantidade de casquinhas equivalente a:
$$\frac{V_r}{V} = \frac{405\pi}{\frac{27\pi}{4}} = 60$$

44. O sólido gerado será composto de uma esfera A de raio 2 da qual foram retiradas duas esferas menores B de raio 1. Logo, o volume V do sólido é dado por:
$V = V_A - 2 \cdot V_B = \frac{4}{3}\pi \cdot 2^3 - 2 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 1^3 = 8\pi$

45. **a)** O volume do brigadeiro, em cm³, é igual a
$V_{\text{brig}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2^3 \simeq 33{,}49$
b) A capacidade da forminha, em cm³, é igual a
$V_{\text{forma}} = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 2^2 \cdot 2 = 25{,}12$
c) Um papel-cartão de dimensões 68 cm × 48 cm pode ser decomposto, no comprimento, em 68 : 4 = 17 quadrados e, na largura, em 48 : 4 = 12 quadrados. Portanto, o papel-cartão pode ser decomposto ao todo em 17 · 12 = 204 quadrados. Como cada caixinha possui 6 faces quadradas, segue que uma folha de papel-cartão pode ser utilizada para confeccionar 204 : 6 = 34 caixinhas cúbicas.

46. O raio da esfera, em cm, é dado por:
$S = 4\pi r^2 \Rightarrow 8\pi = 4\pi \cdot r^2 \Rightarrow r = \sqrt{2}$

47. Com base nas informações do enunciado, pode-se elaborar a figura a seguir:



EDITORIA DE ARTE

Pode-se determinar o quadrado do raio do círculo da secção por meio do teorema de Pitágoras:
$20^2 = 12^2 + r^2 \Rightarrow r^2 = 256$
Logo, a área da secção, em cm^2, é igual a:
$S = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 256 = 256\pi$

48. Considerando $AO = r = 5$, pode-se determinar a área superficial da esfera em cm^2:
$S = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 5^2 = 100\pi$

49. **a)** A área total da superfície da Terra, em km^2, é dada por:
$S = 4\pi r^2 \simeq 4 \cdot 3 \cdot 6\,400^2 = 491\,520\,000$
b) $\dfrac{42\,215\,000}{491\,520\,000} \simeq 0{,}0859 = 8{,}59\%$

50. A altura h do cone, em dm, é dada por:
$V_{cone} = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h \Rightarrow 12\pi = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot h \Rightarrow h = 4$
Logo, a medida da geratriz, em dm, será:
$g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow g^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow g = 5$
Logo, a área total do cone, em dm^2, é:
$S_{Tcone} = \pi rg + \pi r^2 = \pi \cdot 3 \cdot 5 + \pi \cdot 3^2 = 24\pi$
Portanto, o raio da esfera, em dm, é dado por:
$S_{esfera} = S_{Tcone} \Rightarrow 4\pi R^2 = 24\pi \Rightarrow R = \sqrt{6}$

51. O raio R da esfera é tal que:
$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow \frac{1\,372\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow R = 7$
O raio r da secção plana circular é tal que:
$S = \pi r^2 \Rightarrow 24\pi = \pi r^2 \Rightarrow r = \sqrt{24}$
Por meio do teorema de Pitágoras, obtemos o valor de d, em cm:
$R^2 = r^2 + d^2 \Rightarrow 7^2 = (\sqrt{24})^2 + d^2 \Rightarrow d = 5$
Resposta: alternativa **c**.

52. A distância d do centro da esfera até o plano α, o raio R da esfera e o raio r do círculo da secção formam um triângulo retângulo cuja hipotenusa mede R. Dessa maneira, pelo teorema de Pitágoras, o valor de R, em cm, é dado por:
$R^2 = r^2 + d^2 \Rightarrow R^2 = 9^2 + 12^2 \Rightarrow R = 15$
Assim, o volume da esfera, em cm^3, é igual a:
$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 15^3 = 4\,500\pi$

53. A circunferência da bola corresponde ao comprimento de uma circunferência máxima. Logo, seu raio R é:
$70 = 2\pi R \Rightarrow R = \frac{35}{\pi}$
A área da superfície da bola é dada por:
$S = 4\pi R^2 = 4 \cdot \pi \cdot \left(\frac{35}{\pi}\right)^2 = \frac{4 \cdot 35^2}{\pi}$
Assim, uma área 10% maior que essa medida corresponde a:
$S' = 1{,}1 \cdot S = 1{,}1 \cdot \frac{4 \cdot 35^2}{\pi} = \frac{4{,}4 \cdot 35^2}{\pi}$
Resposta: alternativa **b**.

54. A área do fuso esférico, em m^2, é dada por:
$S_{fuso} = \frac{\alpha \pi r^2}{90°} = \frac{135° \cdot \pi \cdot 2^2}{90°} = 6\pi$

55. O volume da cunha, em cm^3, é dado por:
$V_{cunha} = \frac{\alpha \pi r^3}{270°} = \frac{45° \cdot \pi \cdot 6^3}{270°} = 36\pi$

56. Trata-se da projeção de Mercator, que é uma projeção cilíndrica e conforme, ou seja, uma projeção que preserva as formas (e distorce as áreas).
Resposta: alternativa **a**.

57. A projeção de Mercator, que é uma projeção cilíndrica e conforme, tem a desvantagem de distorcer as áreas, principalmente nas altas latitudes (polos).
Resposta: alternativa **c**.

58. Trata-se de uma projeção cônica, utilizada quando se deseja representar latitudes médias.
Resposta: alternativa **e**.

59. **a)** A região representada é a região da Terra que compreende a Antártida, a Oceania, boa parte da América do Sul e o sul da África.
b) Considerando que a projeção completa (360°) equivale a 12 fusos, tem-se que:
$a = \frac{360°}{12} = 30°$

60. Com base na figura do enunciado, é possível verificar que a projeção para a primeira figura é do tipo azimutal, pois está tangente à superfície terrestre. A segunda é uma projeção do tipo cilíndrica, e a terceira é do tipo cônica.
Resposta: alternativa **b**.

61. A projeção cilíndrica mostrada na alternativa **a** apresenta tangência na linha do equador, portanto representará uma região próxima à linha do equador com a menor distorção da escala principal.
Resposta: alternativa **a**.

62. Afirmação **I**: incorreta. A projeção conforme preserva as formas e distorce as áreas.
Afirmação **II**: correta. A projeção equivalente preserva as áreas e distorce as formas. A projeção de Peters é um exemplo de projeção equivalente.
Afirmação **III**: incorreta. Na projeção afilática, nem formas, nem áreas, nem comprimentos são preservados.
Afirmação **IV**: correta. A projeção equidistante preserva comprimentos e distorce áreas e formas.
Resposta: alternativa **b**.

Atividades complementares

1. Calculando o volume da embalagem antiga, obtém-se, em cm^3:
$V_{antiga} = \pi r^2 h = \pi \cdot 2^2 \cdot 13{,}5 = 54\pi$
Já a área de seu rótulo, em cm^2, é igual a:
$S_{antiga} = 2\pi rh = 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 13{,}5 = 54\pi$
Sabe-se que $V_{nova} = 54\pi$ e que seu raio $R = \frac{H}{2}$. Desse modo, sua altura H, em cm, é de:
$V_{nova} = \pi R^2 H \Rightarrow 54\pi = \pi \cdot \left(\frac{H}{2}\right)^2 \cdot H \Rightarrow H = 6$
Assim, a área do rótulo da nova embalagem, em cm^2, é:
$S_{nova} = 2\pi RH = 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 6 = 36\pi$
Analisando a razão dos rótulos, obtém-se:
$\frac{S_{nova}}{S_{antiga}} = \frac{36\pi}{54\pi} = \frac{2}{3}$
Portanto, houve redução de $\frac{1}{3}$ na área do rótulo, que custará $\frac{2}{3} \cdot$ R\$ 0,60 = R\$ 0,40.
Resposta: alternativa **b**.

2. Considerando o formato cilíndrico da piscina, obtém-se seu volume, em m^3:
$V = \pi r^2 h = 3{,}1 \cdot (2{,}5)^2 \cdot 1{,}6 = 31$
Como 1 m^3 = 1000 L, então 31 m^3 = 31 000 L.
A massa x de produto a ser misturada na piscina é:
$x = \frac{31\,000}{500} \cdot 25\text{ g} = 1\,550\text{ g} = 1{,}55\text{ kg}$
Resposta: alternativa **b**.

3. Como o cone é equilátero, conclui-se que:
$g = 2r;\ g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow h = r\sqrt{3}$
Do enunciado, obtém-se que $S_t = V$, então:
$\pi \cdot r \cdot (g + r) = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h \Rightarrow 3\pi \cdot r^2 = \frac{1}{3}\pi \cdot r^3 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow$
$\Rightarrow r\sqrt{3} = 9 \Rightarrow r = 3\sqrt{3}$
Resposta: alternativa **a**.

4. A área da base de A mede 144 cm². Portanto, o valor de x, em cm, é: $144 = x^2 \Rightarrow x = 12$
Além disso, o volume de A, em cm³, é igual a $144 \cdot 15 = 2160$.
Como $V_A = V_B$, o valor de h, em cm, é de:
$2160 = \pi r^2 h \Rightarrow 2160 = 3 \cdot 6^2 \cdot h \Rightarrow h = 20$
Resposta: alternativa **b**.

5. Com base nos dados do enunciado, é possível determinar o volume de água da chuva, em m³:
$V = \pi r^2 \cdot h \simeq 3{,}14 \cdot 2^2 \cdot 0{,}25 = 3{,}14$
Sabendo que esse volume corresponde a 5% do volume total:
$\frac{V_{\text{chuva}}}{V_{\text{total}}} = \frac{5}{100} \Rightarrow \frac{3{,}14}{V_{\text{total}}} = \frac{5}{100} \Rightarrow V_{\text{total}} = 62{,}8$
Logo, o volume total é de aproximadamente 63 m³.
Resposta: alternativa **c**.

6. Sabendo que $h = 3$ m e $r = 8 \text{ m} : 2 = 4$ m, a medida da geratriz do cone, em m, e a área total do cone, em m², são dadas por:
$g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow g^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow g = 5$
$S_t = S_\ell + S_b = \pi r g + \pi r^2 = 4 \cdot 5 \cdot \pi + 4^2 \cdot \pi = 36\pi$
Resposta: alternativa **b**.

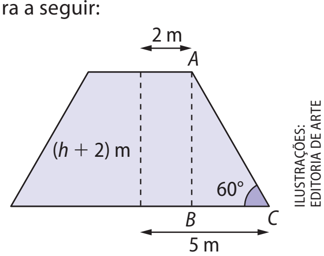
7. O círculo que circunscreve um hexágono regular de lado 8 cm tem raio com a mesma medida, 8 cm. Assim, a altura h, em cm, do cone é: $V_{\text{cone}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h \Rightarrow 128\pi = \frac{1}{3}\pi \cdot 8^2 \cdot h \Rightarrow h = 6$
A altura h', em cm, do cilindro é:
$V_{\text{cilindro}} = \pi r^2 h' \Rightarrow 128\pi = \pi \cdot 8^2 \cdot h' \Rightarrow h' = 2$
Logo, a razão entre a altura h do cone e a altura h' do cilindro é $\frac{h}{h'} = \frac{6 \text{ cm}}{2 \text{ cm}} = 3$.
Resposta: alternativa **d**.

8. Seja r o raio da Terra e R o raio de Júpiter, tem-se:
$V_{\text{Terra}} = \frac{4}{3}\pi r^3$
$V_{\text{Júpiter}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot (11r)^3 = 1331 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = 1331 \cdot V_{\text{Terra}}$
Resposta: alternativa **e**.

9. O volume V_m de cada microesfera, em mm³, é de:
$V_m = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (0{,}5)^3 = \frac{0{,}5\pi}{3}$
Cada cápsula é formada pela junção de um cilindro de altura $H = (15 - 3 - 3)$ mm $= 9$ mm e raio $R = 3$ mm e duas semiesferas de mesmo raio R. Logo, o volume V_c de cada cápsula, em mm³, é de: $V_c = \pi R^2 H + \frac{4}{3}\pi R^3 = \pi \cdot 3^2 \cdot 9 + \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3^3 = 117\pi$
Portanto, em cada cápsula, cabe a seguinte quantidade de microesferas: $\frac{V_c}{V_m} = \frac{117\pi}{\frac{0{,}5\pi}{3}} = 702$
Resposta: alternativa **03**.

10. O volume das três esferas antes da fundição, em cm³, é:
$V = 3 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = 3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (1)^3 = 4\pi$
Após a fundição, considerando que nenhum material foi perdido, com R dado em cm, temos: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow 4\pi = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \Rightarrow R = \sqrt[3]{3}$
Resposta: alternativa **a**.

11. Utilizando como referência a vista frontal do esquema, pode-se construir a figura a seguir:



Pelo triângulo ABC, determina-se a medida AB, em m, a partir da relação:
$\text{tg } 60° = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{AB}{3} \Rightarrow AB = 3\sqrt{3} = 5{,}19$
Dessa maneira, pode-se calcular a medida h em m:
$h + 2 = 5{,}19 \Rightarrow h = 3{,}19 \simeq 3{,}20$
Resposta: alternativa **c**.

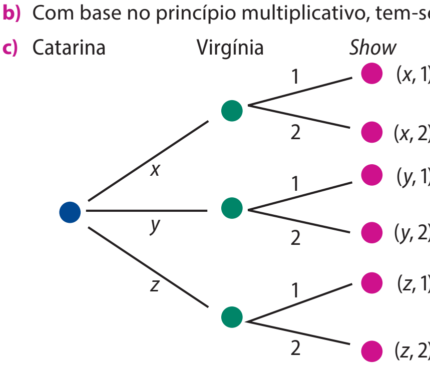
12. Como a esfera está inscrita no cubo, tem-se $2r = 4$ cm, ou seja, $r = 2$ cm. Logo, a área da superfície da esfera, em cm², é de:
$S = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 2^2 = 16\pi$
Resposta: alternativa **c**.

13. Analisando item por item, temos:
I. Correta.
II. Incorreta. As projeções equivalentes, como a de Peters, preservam a proporcionalidade das áreas, porém distorcem as formas e não apresentam exatidão na geometria angular.
III. Incorreta. As projeções de Mercator preservam as formas, porém distorcem as áreas nas extremidades do mapa, como nas latitudes altas.
Resposta: alternativa **a**.

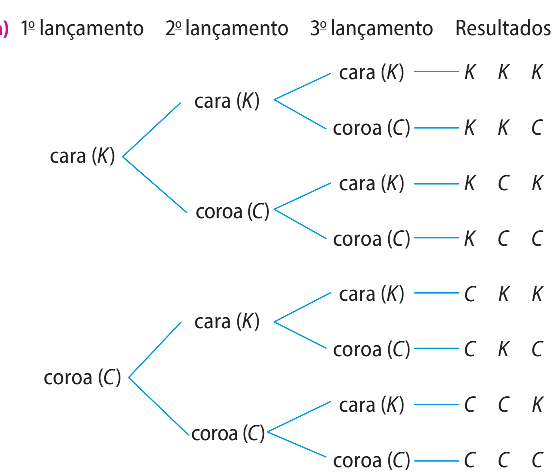
Capítulo 4 • Análise combinatória

Atividades

1. **a)** As possibilidades de caminho são: $(x, 1)$; $(x, 2)$; $(y, 1)$; $(y, 2)$; $(z, 1)$ e $(z, 2)$.
b) Com base no princípio multiplicativo, tem-se: $3 \cdot 2 = 6$.
c)



2. **a)**



b) Como cada lançamento tem 2 possibilidades (cara ou coroa), então, pelo princípio multiplicativo, a quantidade de resultados possíveis para esse experimento é dada por $2 \cdot 2 \cdot 2$.

3. Pelo princípio multiplicativo, temos:
$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$
Portanto, o café da manhã pode ser composto de 24 maneiras diferentes.

4. O gabarito pode ser preenchido em 40 etapas, em que cada etapa é a resolução de uma das 40 questões. Como, para cada questão, há 5 possibilidades de resposta, temos, pelo princípio multiplicativo:

$\underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 5}_{40 \text{ questões}} = 5^{40}$

Logo, podem ser construídos 5^{40} gabaritos.
Resposta: alternativa **a**.

5. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes usem a criatividade para elaborar um problema cuja resolução possa ser expressa pelo diagrama apresentado na atividade. Sugestão de problema: Um corredor dispõe de duas camisetas nas cores rosa e laranja, quatro *shorts* nas cores cinza, vermelho, amarelo e roxo e dois pares de tênis, um azul e um verde. De quantas formas possíveis esse corredor pode se vestir com uma camiseta, um *short* e um par de tênis? Resposta: 16 maneiras, pois, pelo princípio multiplicativo, $2 \cdot 4 \cdot 2 = 16$.

6. Para o primeiro lugar há 8 possibilidades. Definido o vencedor da corrida, há 7 possibilidades para o segundo lugar. Por fim, restam 6 possibilidades para o terceiro lugar. Logo, pelo princípio multiplicativo, o número de possibilidades de chegada para os três primeiros lugares é $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$.

7. A primeira pessoa tem 6 opções de cadeira para escolher. A segunda tem 5 opções, e assim sucessivamente. Pelo princípio multiplicativo, temos: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$
Logo, as quatro pessoas podem se sentar de 360 modos nas seis cadeiras.

8. Há 8 opções de vaga para o primeiro carro. Para o segundo, há 7 opções, e assim sucessivamente. Pelo princípio multiplicativo:
$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1\,680$
Logo, os quatro carros podem ocupar quatro vagas de 1680 maneiras.

9. Se o número é divisível por 5, seu último algarismo deve ser o 5 (pois o zero não está disponível, segundo o enunciado). Assim, há apenas uma possibilidade para o último algarismo.
Para o primeiro algarismo, há 4 possibilidades (1, 3, 7 e 9). Já para o segundo algarismo, há 3 possibilidades. Por fim, para o terceiro algarismo, há 2 possibilidades. Logo, pelo princípio multiplicativo, temos: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
Portanto, podem ser escritos 24 números distintos.

10. **a)** Sugestão de resposta: {dó, ré, mi, fá}; {ré, mi, fá, sol}; {fá, sol, lá, si}; {mi, fá, sol, lá}; {dó, mi, fá, sol}

b) Para a primeira nota, há 7 possibilidades. Para as demais, há 6 (para se obterem notas consecutivas distintas). Assim, pelo princípio multiplicativo, temos: $7 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1512$
Portanto, podem ser compostas 1512 melodias distintas.

11. **a)** Como o algarismo da unidade de milhar não pode ser 0, então, pelo princípio multiplicativo: $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9\,000$
Logo, há 9 000 números com quatro algarismos.

b) Como o algarismo da unidade de milhar não pode ser 0 e não podemos ter algarismos repetidos, então, pelo princípio multiplicativo, temos: $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4\,536$
Logo, há 4 536 números com quatro algarismos distintos.

c) Um número é divisível por 5 quando termina em 0 ou 5.
Quantificando os números que terminam em 0, temos, pelo princípio multiplicativo: $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 1 = 504$
Para os números que terminam em 5, temos que o algarismo da unidade de milhar não pode ser 0 nem 5, e o algarismo da centena não pode ser 5 nem o algarismo utilizado na unidade de milhar. Assim, pelo princípio multiplicativo, temos:
$8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 1 = 448$
Pelo princípio aditivo, temos:
$504 + 448 = 952$
Logo, há 952 números com quatro algarismos distintos que são divisíveis por 5.

12. Pelo princípio multiplicativo, o total de possibilidades é:
$5 \cdot 4 = 20$
Como Maria não deseja as combinações saia azul com blusa azul e saia preta com blusa preta, a quantidade de formas diferentes como ela pode se vestir é:
$20 - 2 = 18$
Resposta: alternativa **c**.

13. **a)** $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

b) $10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3\,628\,800$

c) $\frac{8!}{5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!} = 336$

d) $\frac{17!}{15!} = \frac{17 \cdot 16 \cdot 15!}{15!} = 272$

e) $\frac{6! + 3! - 2!}{5!} = \frac{720 + 6 - 2}{120} = \frac{724}{120} = \frac{181}{30}$

f) $\frac{4! - 2! - 0!}{1!} = \frac{24 - 2 - 1}{1} = 21$

14. Considere os quadrados nomeados do seguinte modo:

A	*D*
B	*C*

Vamos dividir a resolução em dois casos:
1) os quadrados *A* e *C* têm cores iguais.
$\underbrace{6}_{A} \cdot \underbrace{1}_{C} \cdot \underbrace{5}_{B} \cdot \underbrace{5}_{D} = 150$
2) os quadrados *A* e *C* têm cores diferentes.
$\underbrace{6}_{A} \cdot \underbrace{5}_{C} \cdot \underbrace{4}_{B} \cdot \underbrace{4}_{D} = 480$

Pelo princípio aditivo, temos:
$150 + 480 = 630$
Logo, há 630 maneiras distintas de pintar a figura.

15. Aplicando a definição de fatorial em cada item, temos:

a) $\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = n$

b) $\frac{3n! + (3n-1)!}{(3n+1)!} = \frac{(3n) \cdot (3n-1)! + (3n-1)!}{(3n+1) \cdot (3n) \cdot (3n-1)!} =$
$= \frac{(3n+1) \cdot (3n-1)!}{(3n+1) \cdot (3n) \cdot (3n-1)!} = \frac{1}{3n}$

16. Ao resolver as equações, obtém-se:

a) $(n-2)! = 720 \Rightarrow (n-2)! = 6! \Rightarrow n - 2 = 6 \Rightarrow n = 8$
Logo, o conjunto solução é $S = \{8\}$.

b) $(n-2)! = 2(n-4)! \Rightarrow (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)! = 2(n-4)! \Rightarrow$
$\Rightarrow (n-2) \cdot (n-3) = 2 \Rightarrow n^2 - 5n + 4 = 0$
Resolvendo a equação do 2º grau, obtêm-se as raízes $n' = 1$ e $n'' = 4$.
A solução $n = 1$ não convém, pois, pela definição de fatorial, $(n-2)$ e $(n-4)$ devem ser números naturais.
Logo, o conjunto solução é $S = \{4\}$.

17. Ao resolver a equação, obtém-se:
$\frac{n!}{(n-2)!} + \frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 6n - 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{(n-2)!} + \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = 6n - 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow n \cdot (n-1) + (n+1) \cdot n = 6n - 4 \Rightarrow n^2 - 3n + 2 = 0$
Resolvendo a equação do 2º grau, obtêm-se as raízes $n' = 2$ e $n'' = 1$.
A solução $n = 1$ não convém, pois, pela definição de fatorial, $(n-2)$ deve ser um número natural.
Logo, o conjunto solução é $S = \{2\}$.

18. Como os três primeiros caracteres devem ser vogais minúsculas distintas e os três últimos caracteres devem ser algarismos distintos, tem-se, pelo princípio multiplicativo:
$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 43\,200$
Logo, podem ser criadas 43 200 senhas distintas.

19. PAZ, PZA, APZ, AZP, ZPA e ZAP.

20. Como não há restrição para a forma com que essas pessoas podem se sentar na van, então o número de possibilidades é dado pela permutação dessas 9 pessoas nas poltronas:
$P_9 = 9! = 362\,880$
Resposta: alternativa **d**.

21. a) Como a primeira letra é fixa, o número de anagramas é determinado pela permutação das demais letras, ou seja:
$P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

b) Como a primeira e a última letra são fixas, o número de anagramas é determinado pela permutação das demais letras, ou seja:
$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

22. a) Como, na palavra FELINO, não há repetição de letras, então o número de anagramas é dado por: $6! = 720$.

b) Fixando-se uma letra, sobram outras cinco para serem utilizadas no anagrama. Dessa forma, tem-se 120 anagramas, pois $5! = 120$.

c) As vogais da palavra são E, I e O. Ao fixar cada uma, tem-se 5! anagramas terminados com uma vogal. Como são três vogais, têm-se 360 anagramas distintos, pois $3 \cdot 5! = 360$.

d) Há quatro posições para que as letras E, L e I estejam juntas:
E L I _ _ _, _ E L I _ _, _ _ E L I _ e _ _ _ E L I.
Portanto, sobram 3 letras para serem permutadas. Logo, a quantidade de anagramas distintos é 24, pois $4 \cdot 3! = 24$.

e) Do item anterior, têm-se 24 anagramas para as letras em uma ordem fixa. Como elas podem estar em qualquer ordem, tem-se $24 \cdot 3! = 144$.

23. a) Como há 6 algarismos distintos, então haverá 720 possibilidades, pois $6! = 720$.

b) Considerando apenas números que comecem com 1, 2 ou 3, haverá $3 \cdot 5! = 360$ combinações possíveis.
Portanto, a posição da primeira ocorrência do número que começa com o algarismo 4 é a 361ª.

c) O primeiro número que termina com o algarismo 2 é 134 562.
Há 24 números cujos dois primeiros algarismos começam com 12, nessa ordem, pois $4! = 24$. Além disso, há 6 números cujos primeiros dígitos são 132 (pois $3! = 6$), 2 números cujos primeiros dígitos são 1342 (pois $2! = 2$) e ainda há o número 134 526.
Portanto, como $24 + 6 + 2 + 1 = 33$, há 33 números menores que 134 562, cuja posição é a 34ª.

24. São 4 livros de Matemática, 3 livros de Física e 2 livros de Química. Considerando as permutações dos livros da mesma disciplina, tem-se:
$P_4 \cdot P_3 \cdot P_2 = 4! \cdot 3! \cdot 2! = 288$
Como as posições das coleções podem ser trocadas, tem-se:
$P_3 \cdot 288 = 3! \cdot 288 = 1728$
Portanto, os livros podem ser enfileirados de 1728 modos distintos.

25. AAARR, AARAR, AARRA, ARARA, ARAAR, ARRAA, RRAAA, RARAA, RAARA e RAAAR.

26. Como as palavras têm repetições de uma ou mais letras, o total de anagramas é:

a) $P_4^2 = \dfrac{4!}{2!} = 12$

b) $P_{13}^{3,2,2,2} = \dfrac{13!}{3!\,2!\,2!\,2!} = 129\,729\,600$

c) $P_9^4 = \dfrac{9!}{4!} = 15\,120$

27. Como os números têm repetições de um ou mais algarismos, a quantidade de números distintos é:

a) $P_5^2 = \dfrac{5!}{2!} = 60$

b) $P_6^{3,3} = \dfrac{6!}{3!\,3!} = 20$

28. De acordo com o enunciado, obtêm-se as iniciais: A, A, R, R e E. Considerando a permutação dessas letras, tem-se:
$P_5^{2,2} = \dfrac{5!}{2!\,2!} = 30$
Portanto, são possíveis 30 siglas distintas.

29. Considerando a permutação das 6 maçãs e das 4 peras na retirada das frutas, tem-se:
$P_{10}^{6,4} = \dfrac{10!}{6!\,4!} = 210$
Portanto, ela poderá retirar as frutas de 210 maneiras distintas.

30. Como a última letra é fixa, o número de anagramas é obtido pela permutação das demais letras. Considerando a repetição da letra *A*, tem-se:
$P_7^3 = \dfrac{7!}{3!} = 840$
Portanto, a palavra tem 840 anagramas distintos.

31. AR pode estar em 4 posições diferentes, e as demais letras (C, L e A) podem ser permutadas. Assim:
$4 \cdot P_3 = 4 \cdot 3! = 24$
Portanto, as letras AR aparecem juntas, e nessa ordem, em 24 anagramas distintos.

32. Para sair de *A* e chegar até *B*, é necessário se deslocar 4 unidades para cima e 5 unidades para a direita. A quantidade de caminhos possíveis é a permutação desses 9 deslocamentos, descontando-se as repetições.
Então:
$P_9^{4,5} = \dfrac{9!}{5!\,4!} = 126$
Portanto, podem ser feitos 126 caminhos distintos.

33. O primeiro a se sentar tem 5 opções de lugares, o segundo, 4 opções, o terceiro, 3 opções, e o último tem 2 opções de lugares. Logo, pelo princípio multiplicativo, temos $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$.
Resposta: alternativa **e**.

34. Julia e Guilherme, estando lado a lado, podem ocupar 7 posições diferentes nessa fila. Considerando a permutação dos demais dançarinos e a permutação de Julia e Guilherme, temos:
$7 \cdot P_6 \cdot P_2 = 7 \cdot 6! \cdot 2! = 7! \cdot 2!$
Portanto, há $7! \cdot 2!$ modos de compor essa fila.
Resposta: alternativa **a**.

35. Resposta pessoal. Exemplo de problema: Olívia vai colocar lado a lado em uma prateleira seus 4 livros de História e seus 3 livros de Matemática. Sabendo-se que ela quer que todos os livros de História fiquem à esquerda dos de Matemática, de quantas maneiras ela pode fazer isso?

36. a) Pelo princípio multiplicativo:
$9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$
Pela fórmula de arranjo simples:
$A_{9,3} = \dfrac{9!}{(9-3)!} = \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!} = 504$
Logo, as pessoas podem se sentar de 504 maneiras diferentes.

b) Pelo princípio multiplicativo:
$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15\,120$
Pela fórmula de arranjo simples:
$A_{9,5} = \dfrac{9!}{(9-5)!} = \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = 15\,120$
Logo, podem ser formados 15 120 números distintos.

37. Resposta pessoal. Exemplo de problema: De quantas maneiras as quatro primeiras posições em uma corrida podem ser determinadas, se há 12 competidores?

38.

(A, B, C)	(A, C, B)	(B, A, C)	(B, C, A)	(C, A, B)	(C, B, A)
(A, B, D)	(A, D, B)	(B, A, D)	(B, D, A)	(D, A, B)	(D, B, A)
(A, C, D)	(A, D, C)	(C, A, D)	(C, D, A)	(D, A, C)	(D, C, A)
(B, C, D)	(B, D, C)	(C, B, D)	(C, D, B)	(D, B, C)	(D, C, B)

39. Há 40 assentos numerados para 25 turistas. Logo, a quantidade de modos distintos que essas pessoas podem ser acomodadas no ônibus é dada por:

$A_{40,25} = \frac{40!}{(40-25)!} = \frac{40!}{15!}$

Resposta: alternativa **a**.

40. Há 9 assentos disponíveis para 7 pessoas. Logo, o número de formas distintas de acomodar a família nesse voo é dado por:

$A_{9,7} = \frac{9!}{(9-7)!} = \frac{9!}{2!}$

Resposta: alternativa **a**.

41. O 4 pode ser o primeiro, o segundo ou o terceiro algarismo do número. Para compor os dois algarismos restantes, há 8 algarismos disponíveis. Assim:

$3 \cdot A_{8,2} = 3 \cdot \frac{8!}{(8-2)!} = 3 \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!} = 168$

Logo, podemos formar 168 números.

42. **a)** Há 7 possibilidades de cores para 4 faixas. Logo, a quantidade de possibilidades distintas para pintar a bandeira é:

$A_{7,4} = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = 840$

b) Se a cor amarela estiver sempre presente, deve-se considerar que ela pode ocupar qualquer uma das faixas, ou seja, para cada combinação de cores, podem-se obter 4 variações, devido à posição da faixa amarela. Para as outras 3 faixas, restam 6 opções de cores. Assim:

$4 \cdot A_{6,3} = 4 \cdot \frac{6!}{(6-3)!} = 480$

Portanto, podem ser pintadas 480 bandeiras distintas.

43. O número total de resultados possíveis para as três primeiras colocações dessa competição é dado por $A_{12,3}$.
O número de resultados em que há somente meninas nos três primeiros lugares é dado por $A_{7,3}$.
Logo, o número de resultados em que há pelo menos um menino em uma das três primeiras colocações é:

$A_{12,3} - A_{7,3} = \frac{12!}{(12-3)!} - \frac{7!}{(7-3)!} = 1110$

44. O total de partidas do campeonato foi:

$A_{20,2} = \frac{20!}{(20-2)!} = 380$

Subtraindo o número de empates desse total, temos que houve ganhador em 254 jogos, pois $380 - 126 = 254$.
Resposta: alternativa **c**.

45. Elaborar um código da etiqueta pode ocorrer em duas etapas.
A primeira etapa é selecionar 4 letras distintas entre as 26 para compor as iniciais da etiqueta. O número de possibilidades dessa etapa é $A_{26,4}$.
A segunda etapa é selecionar 4 algarismos distintos entre os 10 para compor os quatro dígitos finais do código da etiqueta. O número de possibilidades dessa etapa é $A_{10,4}$.
Então, pelo princípio multiplicativo, o número total de etiquetas é:
$A_{26,4} \cdot A_{10,4}$
Resposta: alternativa **c**.

46. $\{A, B, C\}$, $\{A, B, D\}$, $\{A, B, E\}$, $\{A, B, F\}$, $\{A, C, D\}$, $\{A, C, E\}$, $\{A, C, F\}$, $\{A, D, E\}$, $\{A, D, F\}$, $\{A, E, F\}$, $\{B, C, D\}$, $\{B, C, E\}$, $\{B, C, F\}$, $\{B, D, E\}$, $\{B, D, F\}$, $\{B, E, F\}$, $\{C, D, E\}$, $\{C, D, F\}$, $\{C, E, F\}$, $\{D, E, F\}$

47. Há 8 atletas disponíveis para a escolha dos 5 jogadores. Logo, o número de maneiras com que se pode escalar o time é:

$C_{8,5} = \frac{8!}{5! \cdot (8-5)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 3!} = 56$

48. Deve-se organizar uma comissão formada por brasileiros ($C_{6,3}$) e japoneses ($C_{4,2}$). Logo:

$C_{6,3} \cdot C_{4,2} = \frac{6!}{3!\,(6-3)!} \cdot \frac{4!}{2! \cdot (4-2)!} = 120$

Portanto, a diretoria pode ser composta de 120 modos distintos.

49. Deve-se organizar um grupo formado por rapazes ($C_{5,2}$) e moças ($C_{6,3}$). Logo:

$C_{5,2} \cdot C_{6,3} = \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} \cdot \frac{6!}{3! \cdot (6-3)!} = 200$

Portanto, podem ser formados 200 grupos distintos.

50. Deve-se organizar uma prova composta de duas questões de Álgebra ($C_{5,2}$) e três questões de Trigonometria ($C_{6,3}$). Logo:

$C_{5,2} \cdot C_{6,3} = \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} \cdot \frac{6!}{3! \cdot (6-3)!} = 200$

Portanto, podem ser elaboradas 200 provas distintas.

51. Resposta pessoal. Exemplo de problema: De quantas maneiras o professor de uma turma de 30 alunos pode selecionar 5 deles para formar um grupo de trabalho?

52. Deve-se escolher para a competição alunos do primeiro ano $(C_{5,3})$, do segundo ano $(C_{5,3})$ e do terceiro ano $(C_{7,5})$. Logo:

$C_{5,3} \cdot C_{5,3} \cdot C_{7,5} = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} \cdot \frac{7!}{5! \cdot (7-5)!} = 2\,100$

Portanto, o técnico pode fazer essa escolha de 2 100 maneiras diferentes.
Resposta: alternativa **d**.

53. **a)** $P_6 = 6! = 720$

A fila pode ter sido formada de 720 maneiras.

b) $A_{6,3} = \frac{6!}{(6-3)!} = 120$

Os doces podem ter sido distribuídos de 120 modos.

c) $C_{6,3} = \frac{6!}{3! \cdot (6-3)!} = 20$

Os times podem ter sido formados de 20 maneiras.

54. **a)** Do enunciado, verificamos que, juntos, João e Maria têm 5 amigos homens e 4 amigas mulheres. O número de maneiras de convidarem 3 homens e 3 mulheres é:

$C_{5,3} \cdot C_{4,3} = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} \cdot \frac{4!}{3! \cdot (4-3)!} = 40$

Portanto, João e Maria podem fazer o convite de 40 maneiras distintas.

b) Para convidarem 3 homens e 3 mulheres, com cada um deles convidando exatamente 3 pessoas, entre seus respectivos amigos, consideraremos duas situações:

- João escolhe 2 homens e 1 mulher e Maria escolhe 1 homem e 2 mulheres;
- João escolhe 1 homem e 2 mulheres e Maria escolhe 2 homens e 1 mulher.

O número de maneiras será:

$C_{3,2} \cdot C_{2,1} \cdot C_{2,1} \cdot C_{2,2} + C_{3,1} \cdot C_{2,2} \cdot C_{2,2} \cdot C_{2,1} = 18$

Assim, João e Maria podem convidar essas pessoas de 18 maneiras diferentes.

55. $C_{10,6} = \frac{10!}{6! \cdot (10-6)!} = 210$

Portanto, podem ser feitos 210 tipos de salada distintos.

56. Seja n o número de equipes participantes. Como ocorreram 272 partidas (de turno e returno), segue que o campeonato teve, em cada turno, 136 partidas. Assim:

$C_{n,2} = 136 \Rightarrow \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} = 136 \Rightarrow \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{2! \cdot (n-2)!} = 136 \Rightarrow$

$\Rightarrow n^2 - n - 272 = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau, obtêm-se as raízes $n' = 17$ e $n'' = -16$.
Como n é o número de equipes, deve-se considerar apenas a raiz positiva. Logo, houve 17 equipes participantes.

57. Há duas possibilidades para a escolha da comissão:

- 1 aluno do 1º ano e 2 alunos do 2º ano;
- 2 alunos do 1º ano e 1 aluno do 2º ano.

Como se inscreveram 5 alunos do 1º ano e 4 alunos do 2º ano, tem-se que o número de maneiras de se escolher os alunos da comissão é:

$C_{5,1} \cdot C_{4,2} + C_{5,2} \cdot C_{4,1} = 70$

Resposta: alternativa **d**.

58. Sendo n o número de professores, tem-se:
$C_{n,2} = 210$
$\dfrac{n!}{2! \cdot (n-2)!} = 210 \Rightarrow \dfrac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{2! \cdot (n-2)!} = 210 \Rightarrow$
$\Rightarrow n^2 - n - 420 = 0$
Resolvendo a equação do 2º grau, obtêm-se as raízes $n' = 21$ e $n'' = -20$.
Como n é o número de professores, deve-se considerar apenas a raiz positiva. Logo, havia 21 professores na reunião.

59. Devem ser escolhidos 2 estudantes de Engenharia de Produção $(C_{28,2})$, 2 estudantes de Engenharia Elétrica $(C_{18,2})$ e 2 estudantes de Engenharia de Telecomunicações $(C_{12,2})$. Logo, o número de maneiras como a comissão pode ser formada é dada por:
$C_{28,2} \times C_{18,2} \times C_{12,2} = 14 \times 27 \times 9 \times 17 \times 6 \times 11$
Resposta: alternativa **b**.

60. Deve-se formar cada time com 1 goleira $(C_{3,1})$ e com 4 jogadoras nas demais posições $(C_{17,4})$. Logo, o número de times possíveis é dado por $C_{3,1} \cdot C_{17,4}$.
Resposta: alternativa **e**.

61. Na semicircunferência, é possível formar 8 triângulos retângulos ao escolher A e B como vértices.
Logo, podem ser formados 112 triângulos não retângulos com três pontos distintos dessa semicircunferência, pois:
$C_{10,3} - 8 = 112$
Resposta: alternativa **d**.

Atividades complementares

1. A quantidade máxima de formas distintas de entrar e sair do *campus* é:
$A_{7,2} = \dfrac{7!}{(7-2)!} = 42$
Resposta: alternativa **a**.

2. Considerando que a empresa espera ter 1 milhão de clientes, as possibilidades de senha devem estar entre 1 milhão e 2 milhões.
Verificando o número de senhas possíveis em cada opção, tem-se:
I: $26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 2\,600\,000$
II: $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,000\,000$
III: $26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 6\,760\,000$
IV: $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100\,000$
V: $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,757\,600$
Logo, a opção V é a que mais se adéqua às condições da empresa.
Resposta: alternativa **e**.

3. Cada contador pode assumir 10 algarismos. Logo:
$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\,000$
Resposta: alternativa **a**.

4. Para cada uma das bolas, há duas possibilidades: ir para a pessoa A ou para a pessoa B. Como são cinco bolas, tem-se, pelo princípio multiplicativo, um total de $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ possibilidades. Porém, devemos retirar o caso em que todas as bolas vão para a pessoa A e o caso em que todas as bolas vão para a pessoa B.
Haverá, portanto, 30 formas distintas.
Resposta: alternativa **02**.

5. Considerando que cada uma das 6 barras pode assumir a cor branca ou preta, tem-se, pelo princípio multiplicativo:
$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$
Devemos retirar o caso em que todas as barras são brancas e o caso em que todas as barras são pretas.
Portanto, podem ser formados 62 códigos distintos.
Resposta: alternativa **c**.

6. Para o pronto-socorro: $C_{8,3} = \dfrac{8!}{3! \cdot (8-3)!} = 56$.
Para o setor cirúrgico: $C_{5,3} = \dfrac{5!}{3! \cdot (5-3)!} = 10$.
Para a ala pediátrica: $C_{2,2} = \dfrac{2!}{2! \cdot (2-2)!} = 1$.
Logo, a distribuição pode ser feita de 560 maneiras distintas, pois: $56 \cdot 10 \cdot 1 = 560$
Resposta: alternativa **04**.

7. A quantidade de números menores que 61 573 é igual ao total de permutações utilizando os cinco algarismos (1, 3, 5, 6 e 7) menos a quantidade de permutações maiores que 61 573 e o próprio 61 573.
Total de permutações: $P_5 = 5! = 120$
Calculando quantas permutações resultam em números maiores que 61 573, tem-se:

- Números que iniciam com o algarismo 7:
  $1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
- Números que iniciam com 6, com a casa dos milhares diferente de 1:
  $1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$
- Números que iniciam com 6, com a casa dos milhares diferente de 1 e a casa das centenas igual a 7:
  $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2$

Portanto, como $24 + 18 + 2 = 44$, há 44 permutações maiores que 61 573.
Logo, há 75 números menores do que 61 573, pois $120 - 44 - 1 = 75$.
Resposta: alternativa **c**.

8. Como serão formados números de dois a seis algarismos utilizando-se apenas 1, 2, 4, 5, 7 e 8, deve-se considerar cada possibilidade em que o primeiro dígito é par e o último é ímpar.
Calculando as quantidades de números possíveis em cada caso, tem-se:

- 2 algarismos: $\underbrace{3}_{\text{par}} \cdot \underbrace{3}_{\text{ímpar}} = 9$
- 3 algarismos: $\underbrace{3}_{\text{par}} \cdot 4 \cdot \underbrace{3}_{\text{ímpar}} = 36$
- 4 algarismos: $\underbrace{3}_{\text{par}} \cdot 4 \cdot 3 \cdot \underbrace{3}_{\text{ímpar}} = 108$
- 5 algarismos: $\underbrace{3}_{\text{par}} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \underbrace{3}_{\text{ímpar}} = 216$
- 6 algarismos: $\underbrace{3}_{\text{par}} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \underbrace{3}_{\text{ímpar}} = 216$

Logo, há 585 números, pois $9 + 36 + 108 + 216 + 216 = 585$.
Resposta: alternativa **d**.

9. Calculando as quantidades de possibilidades em cada caso, tem-se:

- Primeira fileira: $\underbrace{2}_{\text{adulto}} \cdot \underbrace{4}_{\text{criança}} \cdot \underbrace{1}_{\text{adulto}} = 8$
- Segunda fileira: $\underbrace{3}_{\text{criança}} \cdot \underbrace{2}_{\text{criança}} \cdot \underbrace{1}_{\text{criança}} = 6$

Logo, há 48 maneiras, pois $8 \cdot 6 = 48$.
Resposta: alternativa **e**.

10. Para sair de A e chegar a C, é necessário se deslocar 3 unidades para cima e 3 unidades para a direita.
O total de caminhos é:
$P_6^{3,3} = \dfrac{6!}{3!\,3!} = 20$
Para sair de C e chegar a B, é necessário se deslocar 4 unidades para a direita e 2 unidades para cima.
O total de caminhos é:
$P_6^{4,2} = \dfrac{6!}{4!\,2!} = 15$
Logo, são 300 os caminhos possíveis, pois $20 \cdot 15 = 300$.
Resposta: alternativa **d**.

11. A senha é formada pelos dígitos 1, 3, 3 e x. Há 8 possibilidades para o dígito x e há dois casos possíveis para que o dígito 1 não seja sucedido imediatamente por um dígito 3.

- Caso 1: o dígito 1 é o último.
  $8 \cdot P_3^2 = 24$
- Caso 2: o dígito 1 é sucedido pelo dígito x.
  Há 3 posições possíveis para os dígitos 1 e x. Assim:
  $3 \cdot 8 \cdot P_2^2 = 24$

Logo, pelo princípio aditivo, Ana escreverá 48 possibilidades de senha, pois $24 + 24 = 48$.
Resposta: alternativa **a**.

12. Há 7 possibilidades de modelos de carros, 2 possibilidades de motor, 2 possibilidades de central multimídia (ter ou não ter), 2 possibilidades de rodas de liga leve (ter ou não ter), 2 possibilidades de bancos de couro (ter ou não ter) e x possibilidades de cores. Então, pelo princípio multiplicativo, temos:
$7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot x > 1000 \Rightarrow x > 8{,}9$
Portanto, a quantidade mínima de cores que a montadora deverá disponibilizar a seus clientes é 9.
Resposta: alternativa **b**.

13. **I)** Correta, pois $P_7^{2,2} = \dfrac{7!}{2! \cdot 2!} = 1\,260$.

II) Incorreta, pois $P_5^2 = \dfrac{5!}{2!} = 60$.

III) Correta, pois $P_5^2 = \dfrac{5!}{2!} = 60$.

Resposta: alternativa **b**.

14. Suponha que os oitos lugares vagos estejam numerados consecutivamente de 1 a 8. Pelas condições impostas pelo problema, Pedro e Marineide podem ocupar, em qualquer ordem, os lugares (1 e 4), (2 e 5), (3 e 6), (4 e 7) e (5 e 8). Desse modo, há 10 possibilidades de Pedro e Marineide escolherem os seus lugares e P_6 possibilidades para os outros 6 amigos se sentarem.
Logo, há 7200 maneiras para os amigos se disporem nas cadeiras, pois $10 \cdot P_6 = 7200$.
Resposta: alternativa **d**.

15. A primeira pessoa a se sentar tem 6 possibilidades de escolha. A segunda tem 4 possibilidades, uma vez que não pode se sentar no lugar já escolhido nem no lugar oposto à primeira pessoa. Analogamente, a terceira pessoa tem 2 possibilidades.
Assim, eles podem escolher o lugar de 48 formas diferentes, pois, pelo princípio multiplicativo, $6 \cdot 4 \cdot 2 = 48$.
Resposta: alternativa **a**.

16. João pode formar 24 trajes diferentes, pois, pelo princípio multiplicativo:
$3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$
Resposta: alternativa **b**.

17. As duas pessoas que vão se sentar juntas podem ocupar 5 posições diferentes nessa fileira. Considerando a permutação dessas pessoas e a permutação dos demais amigos, temos:
$5 \cdot P_2 \cdot P_4 = 240$
Logo, eles podem se organizar de 240 maneiras.
Resposta: alternativa **b**.

18. Calculando o número de possibilidades em cada caso, temos:

- Acomodar a família Sousa: $3 \cdot 3!$
- Acomodar o casal (após a família Sousa): $2 \cdot 2 \cdot 2!$
- Acomodar as outras 4 pessoas: $4!$

Logo, há 3456 maneiras de dispor os passageiros, pois, pelo princípio multiplicativo:
$3 \cdot 3! \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2! \cdot 4! = 3\,456$
Resposta: alternativa **e**.

19. Há 9 possibilidades para escolher o andar e $C_{6,2}$ possibilidades para escolher os dois apartamentos (pois a pessoa não quer os apartamentos terminados em 7 ou 8). Logo:
$9 \times C_{6,2} = 9 \times \dfrac{6!}{(6-2)! \times 2!}$
Resposta: alternativa **b**.

20. Como há 10 consoantes disponíveis para se escolherem 2 e 5 vogais para se escolher 1 e considerando que a ordem dos elementos não altera o conjunto, tem-se que o número de conjuntos possíveis é:
$C_{10,2} \cdot C_{5,1} = \dfrac{10!}{2! \cdot (10-2)!} \cdot \dfrac{5!}{1! \cdot (5-1)!} = 225$
Resposta: alternativa **e**.

21. **01)** Incorreta. Há 15 números pares no conjunto. Assim, a quantidade de maneiras de se escolherem 3 desses números é:
$C_{15,3} = \dfrac{15!}{3! \cdot (15-3)!} = 455$

02) Incorreta. O número de senhas possíveis é igual a:
$P_5 = 5! = 120$

04) Correta. O algarismo da unidade deve ser 5. Assim, restam 6 algarismos para as outras três ordens. Portanto, a quantidade de números que podem ser formados é $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$, que é um número maior que 60.

08) Incorreta. Desenvolvendo a equação dada, temos:
$\dfrac{(n+3)!}{(n+1)!} = 42 \Rightarrow n^2 + 5n - 36 = 0$
Resolvendo a equação do 2º grau, obtêm-se as raízes $n' = 4$ e $n'' = -9$. Pela definição de fatorial, $(n + 3)$ e $(n + 1)$ devem ser números naturais. Assim, deve-se desconsiderar a raiz negativa. Portanto, a equação tem solução $S = \{4\}$.

16) Correta. Como 5 e 2 são fatores de todos os números fatoriais que estão sendo adicionados, sabemos que todos eles são múltiplos de 10, portanto o algarismo da unidade da soma é 0. Por outro lado, temos:
$12 + 14 + 16 + 18 + 20 = 80$
Assim, os algarismos da unidade de ambas as somas são iguais (a zero).
Resposta: alternativas **04** e **16**.

Capítulo 5 • Probabilidade

Atividades

1. Para descrever os elementos do espaço amostral desse experimento, utilizando a notação de par ordenado (x, y), considere x e y como as observações das faces superiores dos dados branco e verde, respectivamente. Desse modo:

a) $U = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$
b) $A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$
c) $B = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$
d) $n(U) = 36$; $n(A) = 6$; $n(B) = 4$

2. Seja U o espaço amostral desse experimento. Desse modo:

a) Como $A \cap B = \varnothing$ e $A \cup B = U$, segue que os eventos A e B são complementares.
b) Como $C \cap D = \varnothing$ e $C \cup D \neq U$, segue que os eventos C e D são mutuamente exclusivos.
c) Como $E = U$, segue que o evento E é certo.
d) Como $F = \varnothing$, segue que F é um evento impossível.

3. O espaço amostral U possui eventos elementares não equiprováveis, pois, por exemplo:

- para que a soma dos números das fichas seja 3, há duas maneiras possíveis, que são (1, 2) e (2, 1);
- para que a soma dos números das fichas seja 5, há quatro maneiras possíveis, que são (1, 4), (4, 1), (2, 3) e (3, 2).

O espaço amostral V possui eventos elementares equiprováveis, pois só existe uma única maneira para cada evento elementar ocorrer. Além disso, as fichas são idênticas e retiradas ao acaso, ou seja, não existe nada no experimento que favoreça um resultado em relação aos demais.

4. Resposta pessoal. Sugestão de problema: Considere que a mãe de um filhote de coelho que nascerá tem genes c^+c^h e que o pai tem c^h como um de seus genes. Há algum tipo de pelagem impossível para esse filhote?
Se o outro gene do pai for:
- c^+, então $U = \{(c^+c^h), (c^hc^h), (c^+c^+), (c^hc^+)\}$;
- c^{ch}, então $U = \{(c^+c^h), (c^hc^h), (c^+c^{ch}), (c^hc^{ch})\}$;
- c^h, então $U = \{(c^+c^h), (c^hc^h), (c^+c^h), (c^hc^h)\}$;
- c, então $U = \{(c^+c^h), (c^hc^h), (c^+c), (c^hc)\}$.

Segundo o quadro com as combinações de genes e tipos de pelagem, só é impossível que o filhote tenha o tipo de pelagem albino, pois cc não é um elemento do espaço amostral em nenhum dos casos.

5. Seja U o espaço amostral desse experimento, em que A representa o evento de retirar uma bola azul da caixa e B, o evento de retirar uma bola amarela. Assim, tem-se:
$n(U) = 30$; $n(A) = 18$; $n(B) = 12$
$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$
$P(B) = \frac{n(B)}{n(U)} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$

6. Considerando U o espaço amostral do lançamento do dado cúbico, tem-se:
$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow n(U) = 6$
a) $A = \{1\} \Rightarrow n(A) = 1 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{1}{6}$
b) $B = \{2, 3, 5\} \Rightarrow n(B) = 3 \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(U)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
c) $C = \{2, 4, 6\} \Rightarrow n(C) = 3 \Rightarrow P(C) = \frac{n(C)}{n(U)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
d) $D = \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow n(D) = 4 \Rightarrow P(D) = \frac{n(D)}{n(U)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
e) $E = \varnothing \Rightarrow n(E) = 0 \Rightarrow P(E) = 0$

7. Considerando todos os números de três algarismos distintos que podem ser formados pelos algarismos 3, 5 e 7, obtém-se o seguinte espaço amostral:
$U = \{357, 375, 537, 573, 735, 753\} \Rightarrow n(U) = 6$
a) Considere o evento A: o número é múltiplo de 3. Como a soma dos algarismos é sempre igual a 15, todos os números são múltiplos de 3. Logo:
$n(A) = 6 \Rightarrow P(A) = \frac{6}{6} = 1 = 100\%$
b) Considere o evento B: o número é par. Como os algarismos 3, 5 e 7 são ímpares, todos os números de três algarismos distintos que podem ser formados com eles serão ímpares. Logo:
$n(B) = 0 \Rightarrow P(B) = \frac{0}{6} = 0 = 0\%$

8. Considerando dois dados distintos, o espaço amostral será composto de um número de combinações dado por:
$6 \cdot 6 = 36$
Logo:
$n(U) = 36$
a) $A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\} \Rightarrow n(A) = 6$
$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$
b) $B = \{(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\} \Rightarrow n(B) = 4$
$P(B) = \frac{n(B)}{n(U)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$
c) $C = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\} \Rightarrow n(C) = 3$
$P(C) = \frac{n(C)}{n(U)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$
d) $D = \{(6, 2), (2, 6)\} \Rightarrow n(D) = 2$
$P(D) = \frac{n(D)}{n(U)} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

9. Como o envelope possui 20 fichas, tem-se: $n(U) = 20$
a) $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\} \Rightarrow n(A) = 10$
$P(A) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$
b) $B = \{8, 9, 10, \ldots, 18, 19, 20\} \Rightarrow n(B) = 13$
$P(B) = \frac{13}{20}$
c) $C = \{5, 10, 15, 20\} \Rightarrow n(C) = 4$
$P(C) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$
d) $D = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\} \Rightarrow n(D) = 6$
$P(D) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

10. Considerando um baralho com 52 cartas, tem-se: $n(U) = 52$
a) Há 4 damas no baralho, portanto: $n(A) = 4 \Rightarrow P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$
b) Há 1 dama de paus no baralho, portanto: $n(B) = 1 \Rightarrow P(B) = \frac{1}{52}$
c) Há 13 cartas de ouros no baralho, portanto:
$n(C) = 13 \Rightarrow P(C) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$
d) As cartas com figuras são a dama, o valete e o rei de cada naipe. Considerando os 4 naipes, tem-se:
$4 \cdot 3 = 12$
Assim, há 12 cartas com figura no baralho, portanto:
$n(D) = 12 \Rightarrow P(D) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$

11. Considerando o número de elementos do espaço amostral, tem-se:
$n(U) = 3 + 2 + 4 + 3 = 12$
a) $n(A) = 3 + 2 + 4 = 9 \Rightarrow P(A) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$
b) $n(B) = 3 \Rightarrow P(B) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$
c) $n(C) = 3 \Rightarrow P(C) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

12. São considerados 20 números dentre 100. Desse modo, a probabilidade de ser sorteada uma senha com um número de 1 a 20 é $\frac{20}{100}$.
Resposta: alternativa **c**.

13. Seja U o espaço amostral das mulheres fumantes com idade acima de 40 anos. Sejam os eventos A, ter câncer, com probabilidade de aproximadamente 75,6%, e B, não ter câncer, relacionados a esse espaço amostral. Como eles são complementares, tem-se:
$P(A) + P(B) = 1 \Rightarrow P(B) = 1 - 0{,}756 = 0{,}244 = 24{,}4\%$
Portanto, a probabilidade de uma mulher fumante com mais de 40 anos não ter câncer é de aproximadamente 24,4%.

14. **a)** Considerando dois lançamentos sucessivos de um dado não viciado de seis faces, as possibilidades para o produto dos números obtidos são: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30 e 36. Portanto, esses são os números que Pedro pode ter anotado.
b) O número de elementos do espaço amostral desse experimento é: $n(U) = 6 \cdot 6 = 36$
Seja o evento A: Pedro anotou o número 25. Como 25 é o produto obtido em apenas uma possibilidade de lançamento dos dois dados (ocorrendo quando o número obtido é 5 em ambos os dados), segue que: $n(A) = 1$
Logo: $P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{1}{36}$
c) Seja o evento B: Pedro anotou um número ímpar. Para que o produto de dois números naturais seja ímpar, é necessário que cada um desses números também seja ímpar. Assim, segue que: $n(B) = 3 \cdot 3 = 9$
Logo: $P(B) = \frac{n(B)}{n(U)} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$
d) Seja o evento C: Pedro anotou um número par. Como um número natural só pode ser par ou ímpar, segue que $P(B)$ e $P(C)$ são eventos complementares. Logo:
$P(B) + P(C) = 1 \Rightarrow P(C) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

15. Considerando o lançamento de dois dados não viciados de seis faces, as possibilidades para a soma dos números obtidos são: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. O número de elementos do espaço amostral desse experimento é: $n(U) = 6 \cdot 6 = 36$

Seja o evento A: a soma dos números obtidos é 7 ou 11.

Para que a soma seja 7, há seis possibilidades, que são:
(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2) e (6, 1)

Para que a soma seja 11, há duas possibilidades, que são:
(5, 6) e (6, 5)

Desse modo: $n(A) = 6 + 2 = 8$

Logo: a probabilidade de o palpite de Jaqueline ocorrer é dada por:

$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

16. Seja U o conjunto com todos os triângulos distintos que podem ser formados com os vértices de um hexágono regular.

$n(U) = C_{6,3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 3!} = 20$

Seja A o subconjunto dos triângulos retângulos distintos que podem ser formados com os vértices de um hexágono regular. A partir de cada vértice, podem-se formar 2 triângulos retângulos distintos. Desse modo, tem-se:

$n(A) = 6 \cdot 2 = 12$

A probabilidade é dada por: $P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} = 0{,}6 = 60\%$

17. **a)** Considerando que, na palavra INTEGRAL, há 8 letras e deseja-se formar conjuntos com 3 letras distintas, o número de possibilidades é dado por: $C_{8,3} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = 56$

b) Seja U o espaço amostral de todos os conjuntos de 3 letras distintas que podem ser formados usando as 8 letras da palavra INTEGRAL. Seja A o evento quantidade de conjuntos em que a letra L está inserida. Desse modo, tem-se:

$n(U) = 56$; $n(A) = C_{7,2} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = 21$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{21}{56} = \frac{3}{8}$

18. Sejam $P(K_1)$ e $P(L_1)$ as probabilidades de se sortearem os personagens K e L, respectivamente. Pelo enunciado, tem-se:

$P(K_1) = 3 \cdot P(L_1)$

Os eventos K_1 e L_1 são complementares, logo:

$P(K_1) + P(L_1) = 1 \Rightarrow 3 \cdot P(L_1) + P(L_1) = 1 \Rightarrow P(L_1) = \frac{1}{4}$

Logo, a probabilidade de adquirir o personagem K é:

$P(K_1) = 1 - P(L_1) \Rightarrow P(K_1) = 1 - \frac{1}{4} \Rightarrow P(K_1) = \frac{3}{4} = 0{,}75 = 75\%$

19. Sejam $P(X_1)$, $P(Y_1)$ e $P(Z_1)$, respectivamente, as probabilidades de os cavalos X, Y e Z vencerem a disputa. Pelo enunciado, tem-se:

$P(X_1) = 2 \cdot P(Y_1)$

$P(Y_1) = 2 \cdot P(Z_1)$

a) Como os eventos X_1, Y_1 e Z_1 são complementares, tem-se:

$P(X_1) + P(Y_1) + P(Z_1) = 1 \Rightarrow P(X_1) + \frac{P(X_1)}{2} + \frac{P(X_1)}{4} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow P(X_1) = \frac{4}{7}$

b) $P(Y_1) = \frac{P(X_1)}{2} = \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{7}$

c) $P(Z_1) = \frac{P(Y_1)}{2} = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{7}$

20. Seja U o espaço amostral em que a soma dos números das faces superiores dos dados é 9. Esse conjunto contém os elementos (1, 2, 6), (1, 3, 5), (1, 4, 4), (2, 2, 5), (2, 3, 4), (3, 3, 3) e suas permutações. Logo: $n(U) = P_3 + P_3 + P_3^2 + P_3 + P_3^2 + P_3^3 = 25$

Seja A o evento: os números das faces superiores são ímpares. Ele é composto dos elementos (1, 3, 5), (3, 3, 3) e suas permutações. Logo: $n(A) = P_3 + P_3^3 = 7$

Desse modo, conclui-se que: $P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{7}{25}$

21. O total de anagramas que podem ser formados com as letras da palavra COVEST é $P_6 = 6! = 720$.

Desse total, o número de anagramas que começam e terminam com consoantes, pelo princípio fundamental da contagem, é $4 \cdot 3 \cdot 4! = 288$. A probabilidade de, escolhido ao acaso, um anagrama começar e terminar com consoante é:

$P = \frac{288}{720} = \frac{2}{5}$

Resposta: alternativa **d**.

22. Considera-se:

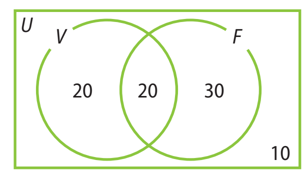
- o evento A "todas as bolinhas sorteadas são azuis";
- o evento B "ao menos uma bolinha sorteada é vermelha";
- o espaço amostral do experimento, em que os eventos A e B são complementares.

Logo: $P(A) + P(B) = 1 \Rightarrow P(B) = 1 - \frac{C_{5,4}}{C_{7,4}} = 1 - \frac{5}{35} = \frac{6}{7}$

23. Há 7 ex-estudantes com 1 filho, 6 com 2 filhos e 2 com 3 filhos. Portanto, há 25 crianças no total. Dessas, 7 são filhas únicas. Logo, a probabilidade de se sortear um filho único é igual a $\frac{7}{25}$.

Resposta: alternativa **e**.

24. Sejam U o conjunto de todos os estudantes, V o conjunto dos estudantes que jogam vôlei e F o conjunto dos estudantes que jogam futebol. Desse modo, tem-se o seguinte diagrama:



EDITORIA DE ARTE

Considere U_1 o espaço amostral de todos os estudantes.

a) Evento A: estudante jogar vôlei.

$P(A) = \frac{n(A)}{n(U_1)} = \frac{n(V)}{n(U)} = \frac{40}{80} = \frac{1}{2}$

b) Evento B: estudante jogar futebol.

$P(B) = \frac{n(B)}{n(U_1)} = \frac{n(F)}{n(U)} = \frac{50}{80} = \frac{5}{8}$

c) Evento C: estudante jogar vôlei e futebol.

$P(C) = P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(U_1)} = \frac{n(V \cap F)}{n(U)} = \frac{20}{80} = \frac{1}{4}$

d) Evento D: estudante jogar vôlei ou futebol.

$P(D) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{5}{8} - \frac{1}{4} = \frac{7}{8}$

e) Evento E: estudante jogar somente futebol.

$P(E) = \frac{n(E)}{n(U_1)} = \frac{n(F - (V \cap F))}{n(U)} = \frac{30}{80} = \frac{3}{8}$

f) Evento F: estudante não praticar nenhum desses esportes. Os eventos D e F são complementares. Logo:

$P(D) + P(F) = 1 \Rightarrow P(F) = 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$

25. Seja U o espaço amostral relacionado às dez questões. Sejam J o evento "Jorge resolveu a questão", C o evento "César resolveu a questão" e T o evento "Teresa resolveu a questão". Desse modo:

$n(U) = 10$; $n(J) = 3$; $n(C) = 2$; $n(T) = 4$

$n(J \cap C) = n(J \cap T) = n(C \cap T) = 0$

a) $P(J) = \frac{n(J)}{n(U)} = \frac{3}{10}$

b) $P(J \cup C) = P(J) + P(C) - P(J \cap C) =$

$= \frac{n(J)}{n(U)} + \frac{n(C)}{n(U)} - \frac{n(J \cap C)}{n(U)} = \frac{3}{10} + \frac{2}{10} - \frac{0}{10} = \frac{1}{2}$

c) São complementares o evento em que Jorge ou César ou Tereza resolveu a questão ($J \cup C \cup T$) e o evento N, nenhum dos três resolveu a questão. Logo:

$P(N) = 1 - P(J \cup C \cup T)$

$P(N) = 1 - \left(\frac{n(J)}{n(U)} + \frac{n(C)}{n(U)} + \frac{n(T)}{n(U)}\right)$

$P(N) = 1 - \left(\frac{3}{10} + \frac{2}{10} + \frac{4}{10}\right) = \frac{1}{10}$

26. Sejam A e B os eventos em que Roberto é aceito pelas empresas **A** e **B**, respectivamente. Pelo enunciado, tem-se:

$P(A) = 0{,}25$; $P(B) = 0{,}2$; $P(A \cap B) = 0{,}08$

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$
$= 0{,}25 + 0{,}2 - 0{,}08 = 0{,}37 = 37\%$

b) Seja C o evento em que Roberto é aceito apenas pela empresa **A** ou apenas pela empresa **B**. Logo:
$P(C) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) =$
$= 0{,}25 - 0{,}08 + 0{,}2 - 0{,}08 = 0{,}29 = 29\%$

27. Sendo R o evento "sair uma carta rei" e E o evento "sair uma carta de espadas", tem-se:

$n(R) = 4$; $n(E) = 13$; $n(R \cap E) = 1$

$P(R \cup E) = P(R) + P(E) - P(R \cap E) = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{4}{13}$

28. Pelo enunciado, tem-se:

$n(U) = 30$

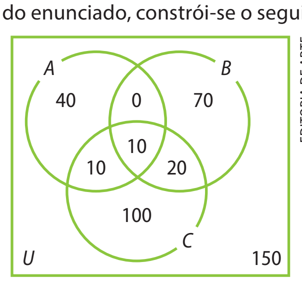
a) Evento A: número ser par.
$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$

b) Evento B: número ser ímpar.
$P(B) = \frac{n(B)}{n(U)} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$

c) Evento C: número ser par e menor que 15.
$C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$
$P(C) = \frac{n(C)}{n(U)} = \frac{7}{30}$

d) Evento D: número ser múltiplo de 4.
$D = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28\}$
Evento E: número ser múltiplo de 5.
$E = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$
$D \cap E = \{20\}$
$P(D) = \frac{n(D)}{n(U)} = \frac{7}{30}$
$P(E) = \frac{n(E)}{n(U)} = \frac{6}{30}$
$P(D \cap E) = \frac{n(D \cap E)}{n(U)} = \frac{1}{30}$
Portanto, conclui-se que:
$P(D \cup E) = P(D) + P(E) - P(D \cap E) = \frac{7}{30} + \frac{6}{30} - \frac{1}{30} = \frac{2}{5}$

29. Com os dados do enunciado, constrói-se o seguinte diagrama:



EDITORIA DE ARTE

a) Os sócios que estão em dúvida entre votar em B ou em C, mas não em A, correspondem, na figura, a $(B \cap C) - A$. São, portanto, 20 sócios.
O número de sócios que não votariam em B é:
$40 + 10 + 100 = 150$
Na figura, correspondem a $(A \cup C) - B$.

b) O total de sócios que participaram da pesquisa é:
$40 + 70 + 10 + 10 + 20 + 100 + 150 = 400$
A probabilidade de que o sócio escolhido não tenha ainda se decidido por um candidato é:
$P = \frac{10 + 10 + 20 + 0}{400} = \frac{40}{400} = \frac{1}{10}$

30. Sejam o evento H "sortear um homem", o evento V "sortear um homem que trabalha em vendas", o evento P "sortear uma mulher que trabalha na produção" e o evento M "sortear uma mulher que trabalha em vendas".

a) $P(H) = \frac{n(H)}{n(U)} = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$

b) Como a interseção dos dois eventos é nula, segue que:
$P = P(V \cup P) = \frac{30}{100} + \frac{20}{100} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$

c) $P(M) = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$

31. Resposta pessoal. Sugestões de problema:

1. Qual é a probabilidade de Fabiano pegar da pilha de camisetas, aleatoriamente, uma camiseta de cor verde ou azul?
Sejam a pilha de 15 camisetas o espaço amostral U, o evento A "pegar uma camiseta de cor verde" e o evento B "pegar uma camiseta de cor azul". Desse modo, como esses eventos são mutuamente exclusivos, tem-se:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{2}{15} + \frac{3}{15} = \frac{1}{3}$

2. Considerando as possíveis combinações de calças e camisetas de Fabiano, qual é a probabilidade de, escolhendo-se aleatoriamente, obter-se uma combinação de camiseta branca e calça azul?
Pelo enunciado, conclui-se que:
$n(\text{camisetas}) = 15$; $n(\text{calças}) = 10$
$P_1(\text{camiseta branca}) = \frac{3}{10}$
$P_2(\text{calça azul}) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$
$P_1 \cap P_2 = \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{50}$

32. Análise da redução de chance de cada jogador:

- A redução nas chances de Ana acertar é igual à diferença entre a probabilidade de a face superior ser branca ou um número par e a probabilidade de a face superior ser branca e um número par:
$\frac{5}{6} - \frac{2}{6} = \frac{3}{6}$
- A redução nas chances de Bruna acertar é igual à diferença entre a probabilidade de a face superior ser branca ou o número 5 e a probabilidade de a face superior ser branca e o número 5:
$\frac{4}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$
- A redução nas chances de Carlos acertar é igual à diferença entre a probabilidade de a face superior ser preta ou um número menor do que 2 e a probabilidade de a face superior ser preta e um número menor do que 2:
$\frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$
- A redução nas chances de Diego acertar é igual à diferença entre a probabilidade de a face superior ser preta ou um número maior do que 2 e a probabilidade de a face superior ser preta e um número maior do que 2:
$\frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$
- A redução nas chances de Érica acertar é igual à diferença entre a probabilidade de a face superior ser branca ou um número menor do que 4 e a probabilidade de a face superior ser branca e um número menor do que 4:
$\frac{5}{6} - \frac{2}{6} = \frac{3}{6}$
Portanto, o jogador que terá maior redução nas suas chances de acertar é Diego.
Resposta: alternativa **d**.

33. Considere o evento A "face superior ser par" e o evento B "face superior ser maior do que 4". Assim, tem-se:

$n(A) = 3$; $n(B) = 2$; $n(A \cap B) = 1$

$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{1}{2} = 50\%$

34. Considere o evento A "uma das faces superiores é 5" e o evento B "a soma das faces superiores é 8". Assim, tem-se:

$A = \{(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 5)\}$

$B = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$

$n(A) = 11$; $n(B) = 5$; $n(A \cap B) = 2$

$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{2}{5}$

35. De acordo com o enunciado, a quantidade de elementos do espaço amostral é $n(U) = 52$. Logo:

a) $n(A) = 4 \Rightarrow P(A) = \dfrac{n(A)}{n(U)} = \dfrac{4}{52} = \dfrac{1}{13}$

$n(B) = 413 \Rightarrow P(B) = \dfrac{n(B)}{n(U)} = \dfrac{13}{52} = \dfrac{1}{4}$

b) $n(A \cap B) = 1 \Rightarrow P(A \cap B) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(U)} = \dfrac{1}{52}$

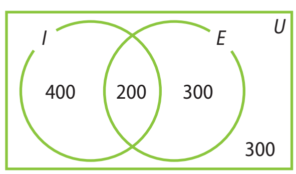
$P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{n(A \cap B)}{n(B)} = \dfrac{1}{13}$

$P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{n(A \cap B)}{n(A)} = \dfrac{1}{4}$

36. Considere o evento A "primeira carta ser de paus" e o evento B/A "segunda carta ser de copas". Sendo esses eventos sucessivos, tem-se:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = \dfrac{13}{52} \cdot \dfrac{13}{51} = \dfrac{13}{204}$

37. Sejam U o conjunto de todos os estudantes, I o conjunto dos estudantes que falam inglês e E o conjunto dos estudantes que falam espanhol. Desse modo, tem-se o seguinte diagrama:



EDITORIA DE ARTE

Considere o evento A "o estudante fala espanhol" e o evento B "o estudante não fala inglês". Pelo diagrama, tem-se:

$n(B) = 600$

$n(A \cap B) = 300$

Logo:

$P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{n(A \cap B)}{n(B)} = \dfrac{300}{600} = \dfrac{1}{2}$

Resposta: alternativa **a**.

38. De acordo com o enunciado, pode-se elaborar o quadro a seguir:

Camisetas \ Tamanho	P	M	Total
Lisas	33	26	59
Estampadas	67	24	91
Total	100	50	150

Considere o evento E "a camiseta é estampada" e o evento M "o tamanho da camiseta é M". Pelo quadro, tem-se:

$n(M) = 50$

$n(E \cap M) = 24$

Logo:

$P(E/M) = \dfrac{P(E \cap M)}{P(M)} = \dfrac{n(E \cap M)}{n(M)} = \dfrac{24}{50} = 0{,}48 = 48\%$

Resposta: alternativa **c**.

39. Considere o evento C "votar em branco" e o evento D "não votar no candidato B". Pelo quadro, tem-se:

$P(D) = 60\%$

$P(C \cap D) = 20\%$

Logo: $P(C/D) = \dfrac{P(C \cap D)}{P(D)} = \dfrac{20\%}{60\%} = \dfrac{1}{3}$

Resposta: alternativa **d**.

40. Considere o evento I "declaração inconsistente", o evento F "declaração fraudulenta" e o evento C "declaração consistente e fraudulenta". Segundo o enunciado, tem-se:

$P(C) = 0{,}0625 \cdot 0{,}8 = 0{,}05$

$P(I \cap F) = 0{,}25 \cdot 0{,}2 = 0{,}05$

Logo: $P(I/F) = \dfrac{P(I \cap F)}{P(F)} = \dfrac{0{,}05}{P(C) + P(I \cap F) - P(C \cap (I \cap F))} =$

$= \dfrac{0{,}05}{0{,}05 + 0{,}05 - 0} = 0{,}5$

Resposta: alternativa **e**.

41. Considere o evento A "digitar corretamente o penúltimo dígito da senha" e o evento B "digitar corretamente o último dígito da senha". Os dígitos são distintos, então a probabilidade desejada é:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = \dfrac{1}{10} \cdot \dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{90}$

Resposta: alternativa **b**.

42. Restaram na sacola 25 pedrinhas brancas e 15 pedrinhas pretas, totalizando 40 pedrinhas. Considere o evento A "a primeira pedrinha jogada após o lanche é branca" e o evento B "a segunda pedrinha jogada após o lanche é branca". Logo, a probabilidade desejada é:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = \dfrac{25}{40} \cdot \dfrac{24}{39} = \dfrac{5}{13}$

Resposta: alternativa **b**.

43. Considere o evento A "a primeira bola retirada é branca", o evento B "a segunda bola retirada é branca" e o evento C "a terceira bola retirada é preta". Como cada bola retirada não é devolvida à caixa, tem-se:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{2}{4} = \dfrac{3}{10}$

$P(A \cap B \cap C) = P(A \cap B) \cdot P(C/A \cap B) = \dfrac{3}{10} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{5} = 0{,}2 = 20\%$

Resposta: alternativa **b**.

44. Resposta pessoal. Sugestão de problema: Em uma caixa, há cinco bolas idênticas, diferentes apenas pela cor, sendo três amarelas e duas vermelhas. Qual é a probabilidade de, retirando uma bola ao acaso, sem reposição, a primeira ser amarela e a segunda ser vermelha?

Considere o evento A "a primeira bola retirada é amarela" e o evento B "a segunda bola retirada é vermelha". Como não há reposição das bolinhas, tem-se:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{2}{4} = \dfrac{3}{10} = 0{,}3 = 30\%$

45. Evandro e Mariana podem receber, na máquina de pelúcias, dois cachorros (evento A), ou dois gatos (evento B), ou dois ursos (evento C). Como esses eventos são mutuamente exclusivos, temos:

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$

$P(A) = \dfrac{7}{14} \cdot \dfrac{6}{13} = \dfrac{42}{182}$

$P(B) = \dfrac{5}{14} \cdot \dfrac{4}{13} = \dfrac{20}{182}$

$P(C) = \dfrac{2}{14} \cdot \dfrac{1}{13} = \dfrac{2}{182}$

$P(A \cup B \cup C) = \dfrac{42}{182} + \dfrac{20}{182} + \dfrac{2}{182} = \dfrac{32}{91}$

Logo, a probabilidade de Evandro e Mariana receberem bichos de pelúcia do mesmo tipo é $\dfrac{32}{91}$.

46. Uma pessoa contraiu febre amarela e, um tempo depois, contraiu dengue tipo 2. Quando uma pessoa adquire um desses vírus e sobrevive, ela desenvolve memória imunológica, evitando um novo contágio pelo mesmo microrganismo. Desse modo, ela pode contrair 5 doenças: dengue tipo 1; dengue tipo 3; dengue tipo 4; zika e chikungunya.

Considere o evento A "essa pessoa contrair dengue" e o evento B "essa pessoa contrair chikungunya". Como essa pessoa adquire memória imunológica, então a probabilidade desejada é:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{20} = 0{,}15 = 15\%$

Resposta: alternativa **c**.

47. Seja U o espaço amostral do lançamento de um dado de seis faces. Considere os eventos A e B como aqueles em que o número na face superior do dado no primeiro e no segundo lançamentos, respectivamente, é menor do que 3. Como esses eventos são independentes, tem-se:

$n(U) = 6$; $n(A) = 2$; $n(B) = 2$

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \dfrac{2}{6} \cdot \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{9}$

48. Considere o evento A “obter um número maior que 3 na face superior de um dado de seis faces” e o evento B “obter cara no lançamento de uma moeda”. Como esses eventos são independentes, tem-se:
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

49. Considere F e M os eventos em que o sexo da criança que nascerá é feminino e masculino, respectivamente. Suponha que esses eventos sejam equiprováveis, ou seja:
$P(F) = P(M) = \frac{1}{2}$
Como esses eventos são independentes, tem-se:
$P(F \cap F \cap F \cap F) = P(F) \cdot P(F) \cdot P(F) \cdot P(F) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$

50. Em um baralho convencional de 52 cartas, há 13 cartas de cada naipe. Considere A e B os eventos em que se retira uma carta de ouros e uma de espadas, respectivamente. Como esses eventos são independentes (por haver reposição), tem-se:
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{13}{52} \cdot \frac{13}{52} = \frac{1}{16}$

51. Seja A o evento em que a pessoa pega uma chave **A** na primeira gaveta e o cadeado aberto por ela na segunda gaveta e seja B o evento em que a pessoa pega a chave **B** na primeira gaveta e um cadeado aberto por ela na segunda gaveta. Desse modo:
$P(A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$ $\qquad$ $P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$
Como esses eventos são mutuamente exclusivos, tem-se:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$
Assim, a probabilidade de o cadeado ser aberto pela chave escolhida é $\frac{5}{12}$.

52. Sejam K e C os eventos em que a jogada de uma moeda resulta em cara (K) e coroa (C), respectivamente, ambos sendo eventos elementares equiprováveis. Pedro pode finalizar o jogo de cinco maneiras distintas: (K, K, K), (K, K, C), (K, C), (C, K) e (C, C). Entre elas, três terminam com o resultado sendo coroa, cujas probabilidades de ocorrência são:
$P(K \cap K \cap C) = P(K) \cdot P(K) \cdot P(C) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$
$P(K \cap C) = P(K) \cdot P(C) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$
$P(C \cap C) = P(C) \cdot P(C) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$
Como esses resultados são mutuamente exclusivos, a probabilidade de Pedro tirar coroa na última jogada é:
$P = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$
Resposta: alternativa **d**.

53. **a)** Sejam K e C os eventos em que a jogada de uma moeda resulta em cara (K) e coroa (C), respectivamente. Como ambos são eventos complementares, segundo os dados do enunciado, tem-se:
$P(K) + P(C) = 1 \Rightarrow 3 \cdot P(C) + P(C) = 1 \Rightarrow P(C) = \frac{1}{4}$
Desse modo:
$P(K) = \frac{3}{4}$

b) A ocorrência de apenas uma cara no lançamento da moeda três vezes, é dada pelo elemento (K, C, C) e suas permutações com repetição. Logo, a probabilidade dessa ocorrência é dada por:
$P_3^2 \cdot P(K \cap C \cap C) = \frac{3!}{2!} \cdot P(K) \cdot P(C) \cdot P(C) = 3 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{64}$

54. Considere os eventos B_1: retirar um cubo branco da primeira caixa e B_2: retirar um cubo branco da segunda caixa. Como são eventos independentes, tem-se:
$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{4}$

55. Considere os eventos A: o piloto sobe ao pódio se chover, B: o piloto sobe ao pódio se não chover, C: chove no dia da prova e D: não chove no dia da prova. Como os eventos C e D são complementares, segundo os dados do enunciado, tem-se:
$P(C) + P(D) = 1 \Rightarrow P(D) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$
Como os eventos A e C e os eventos B e D são independentes, segue que:
$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C) = 0{,}6 \cdot 0{,}75 = 0{,}45$
$P(B \cap D) = P(B) \cdot P(D) = 0{,}2 \cdot 0{,}25 = 0{,}05$
Como esses resultados são mutuamente exclusivos, a probabilidade de o piloto subir ao pódio é:
$P = 0{,}45 + 0{,}05 = 0{,}5 = 50\% = \frac{1}{2}$

56. Considere o evento A “retirar uma bola preta (A)” e o evento B "retirar uma bola branca (B)".

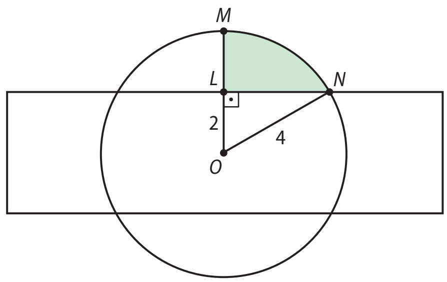
a) A ocorrência de “retirar duas bolas pretas e uma branca”, é representada pelo elemento (A, A, B) e suas permutações com repetição. Logo, a probabilidade dessa ocorrência é dada por:
$P_3^2 \cdot P(A \cap A \cap B) = \frac{3!}{2!} \cdot P(A) \cdot P(A) \cdot P(B) = 3 \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{56}$

b) Considere o evento C “as três bolas retiradas são da mesma cor” e o evento D “as três bolas retiradas não são todas da mesma cor”. O evento C é representado pelos elementos (A, A, A) e (B, B, B), e suas probabilidades de ocorrência são dadas por:
$P(A \cap A \cap A) = P(A) \cdot P(A) \cdot P(A) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{56}$
$P(B \cap B \cap B) = P(B) \cdot P(B) \cdot P(B) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{10}{56}$
$P(C) = P((A \cap A \cap A) \cup (B \cap B \cap B)) = \frac{11}{56}$
Como C e D são eventos complementares, segue que:
$P(C) + P(D) = 1 \Rightarrow P(D) = 1 - \frac{11}{56} = \frac{45}{56}$
Por fim, a probabilidade de serem retiradas duas bolas pretas e uma branca, sabendo que não foram retiradas três bolas de mesma cor, é:
$P((A \cap B)/D) = \frac{P((A \cap B) \cap D)}{P(D)} = \frac{15}{56} \cdot \frac{56}{45} = \frac{1}{3}$

57. Considere o evento S “o atleta utilizou a substância (S)” e o evento N “o atleta não utilizou a substância (N)”.
No exame feito pelo modo **I**, a ocorrência de o atleta que utilizou a substância ser um dos três sorteados dentre os 200 atletas é representada pelo elemento (S, N, N) e suas permutações com repetição. Logo, a probabilidade dessa ocorrência é dada por:
$P(\mathrm{I}) = P_3^2 \cdot P(S \cap N \cap N) = 3 \cdot \frac{1}{200} \cdot \frac{199}{199} \cdot \frac{198}{198} = \frac{3}{200}$
No exame feito pelo modo **II**, mantém-se a representação dos elementos que indicam a ocorrência do atleta sorteado ter utilizado a substância, contudo, ele será sorteado dentre uma das 20 equipes com 10 atletas cada, ou seja:
$P(\mathrm{II}) = \frac{1}{20} \cdot P_3^2 \cdot P(S \cap N \cap N) = \frac{1}{20} \cdot 3 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{9}{9} \cdot \frac{8}{8} = \frac{3}{200}$
No exame feito pelo modo **III**, há três possibilidades distintas de a equipe da qual faz parte o atleta que utilizou a substância ser uma das três sorteadas (por causa de suas permutações com repetição). Considerando que cada equipe possui 10 atletas, tem-se:
$P(\mathrm{III}) = 3 \cdot \left(\frac{1}{20} \cdot \frac{19}{19} \cdot \frac{18}{18}\right) \cdot \left(\frac{1}{10} \cdot \frac{9}{9} \cdot \frac{8}{8}\right) = \frac{3}{200}$
Logo:
$P(\mathrm{I}) = P(\mathrm{II}) = P(\mathrm{III})$
Resposta: alternativa **e**.

58. Seja o intervalo real $U =]0, 360]$ o espaço amostral desse experimento aleatório. Logo, seu comprimento é 360. Como a roleta foi dividida em 12 regiões congruentes, o comprimento do evento A "obter um desconto máximo de 10%" é:
$360 : 12 = 30$
Admitindo que todos os pontos do intervalo do espaço amostral são equiprováveis, temos:
$P(A) = \frac{30}{360} \simeq 0{,}0833 \simeq 8{,}3\%$
Resposta: alternativa **a**.

59. Segundo o enunciado, a probabilidade de que P pertença a uma região contida em S é dada pela razão entre a medida da área dessa região e a medida da área de S. Logo, a probabilidade de que P pertença a ambas as regiões será: $\dfrac{\text{área }(A \cap B)}{\text{área }(S)}$



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Sendo X a região em destaque na figura, pode-se afirmar que a área é de $(A \cap B) = 4^2\pi - 4 \cdot S_X = 16\pi - 4S_X$.

Observando o triângulo retângulo OLN, verifica-se, pela lei dos senos, que med$(L\hat{O}N) = 60°$. Assim, as áreas, em cm², do setor circular OMN e do triângulo OLN são, respectivamente, iguais a $S_{OMN} = \dfrac{60 \cdot \pi \cdot 4^2}{360} = \dfrac{8\pi}{3}$ e $S_{OLN} = \dfrac{2 \cdot 4 \cdot \text{sen } 60°}{2} = 2\sqrt{3}$

Logo:

$S_X = \left(\dfrac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}\right)$ cm²

Com base nesses valores, tem-se:

área$(A \cap B) = 16\pi - 4 \cdot \left(\dfrac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}\right)$

Como a medida da área do retângulo S, em cm², é $50 \cdot 20 = 1000$, a probabilidade P desejada será:

$$P = \frac{\text{área }(A \cap B)}{\text{área }(S)} = \frac{16\pi - 4 \cdot \left(\dfrac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}\right)}{1000} = \frac{16\pi + 24\sqrt{3}}{3000}$$

60. Seja o intervalo real $U =]0, 360]$ o espaço amostral do experimento. Logo, seu comprimento é 360. De modo análogo, o comprimento do:

- evento X "o ponteiro parar no setor roxo" é 45;
- evento S "o ponteiro parar no setor cor-de-rosa" é 30;
- evento O "o ponteiro parar no setor marrom" é 90;
- evento Z "o ponteiro parar no setor azul" é 75;
- evento A "o ponteiro parar no setor amarelo" é 120.

a) O setor amarelo é o único cujo ângulo central é obtuso. Assim, a probabilidade de que o ângulo central do setor seja obtuso é:

$P(A) = \dfrac{120}{360} = \dfrac{1}{3}$

Os setores que possuem ângulos centrais agudos são o roxo, o cor-de-rosa e o azul. Então, a probabilidade de que o ângulo central do setor seja agudo é:

$P(X \cup S \cup Z) = \dfrac{45}{360} + \dfrac{30}{360} + \dfrac{75}{360} = \dfrac{5}{12}$

b) Dos cinco ângulos, os únicos que são internos de um polígono regular são o ângulo de 90° (ângulo interno do quadrado) e o ângulo de 120° (ângulo interno do hexágono regular). Assim, ao girar a roleta, a probabilidade de o ponteiro não parar em nenhum desses dois setores é:

$P(X \cup S \cup Z) = \dfrac{5}{12}$

Logo, a probabilidade de que ao menos um dos dois giros pare em um setor cujo ângulo central é um ângulo interno de um polígono regular é:

$P = 1 - \left(\dfrac{5}{12} \cdot \dfrac{5}{12}\right) = \dfrac{119}{144}$

61. Como os ônibus saem a cada 30 minutos, considere o intervalo real $U =]0, 30]$ como espaço amostral desse experimento aleatório. Pelos horários da tabela, considere também o intervalo:

- $B =]0, 10]$ como o evento "viajar com a empresa BOMPASSEIO";
- $A =]10, 30]$ como o evento "viajar com a empresa ANDABEM".

Desse modo, o comprimento do espaço amostral U é 30, o comprimento do evento B é 10 e o comprimento do evento A é 20. Admitindo-se que todos os pontos do intervalo do espaço amostral são equiprováveis, então:

$P(A) = \dfrac{20}{30} = \dfrac{2}{3}$; $P(B) = \dfrac{10}{30} = \dfrac{1}{3}$

Desse modo, a probabilidade de Carlos viajar em um ônibus da empresa ANDABEM é duas vezes maior do que a probabilidade de ele viajar em um ônibus da BOMPASSEIO.

Resposta: alternativa **d**.

62. Considere o intervalo real $U =]0, 4\pi r^2]$ como o espaço amostral desse experimento, compreendendo toda a região do alvo. Considere também o intervalo:

- $A =]0, \pi r^2]$ como o evento "acertar a região I do alvo";
- $B =]\pi r^2, 4\pi r^2]$ como o evento "acertar a região II do alvo".

Desse modo, o comprimento do espaço amostral U é $4\pi r^2$ e o comprimento do evento B é $4\pi r^2 - \pi r^2 = 3\pi r^2$. Admitindo-se que todos os pontos do intervalo do espaço amostral são equiprováveis, então:

$P(B) = \dfrac{3\pi r^2}{4\pi r^2} = \dfrac{3}{4}$

Resposta: alternativa **c**.

63. Seja o intervalo real $U =]0, 360]$ o espaço amostral do experimento realizado individualmente em cada uma das três roletas. Logo, seu comprimento é 360. De modo análogo, o comprimento do evento A "a seta parar na região **A**", o do evento B "a seta parar na região **B**" e o do evento C "a seta parar na região **C**" correspondem a:

- na roleta 1, A é 180, B é 90 e C é 90;
- na roleta 2, A é 120, B é 120 e C é 120;
- na roleta 3, A é 120, B é 30 e C é 210.

Desse modo, a probabilidade de as três roletas serem giradas e a seta parar simultaneamente em uma mesma região é:

$P(A) = \dfrac{180}{360} \cdot \dfrac{120}{360} \cdot \dfrac{120}{360} = \dfrac{1}{18} = \dfrac{8}{144}$

$P(B) = \dfrac{90}{360} \cdot \dfrac{120}{360} \cdot \dfrac{30}{360} = \dfrac{1}{144}$

$P(C) = \dfrac{90}{360} \cdot \dfrac{120}{360} \cdot \dfrac{210}{360} = \dfrac{7}{144}$

Assim, conclui-se que:

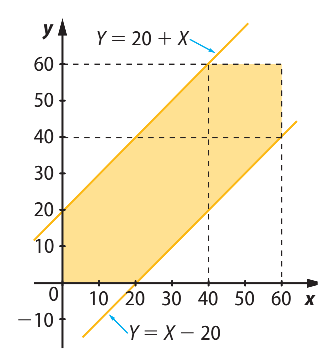
$P(A) > P(C) > P(B)$

Resposta: alternativa **c**.

64. Seja o intervalo real $U = [0, 60]$ o espaço amostral do experimento em que uma das pessoas chega ao local, em que 0 indica 12 h e 60 indica 13 h. Assim, seu comprimento é 60. Seja $X \in [0, 60]$ o horário em que a primeira pessoa chegará ao local do encontro e $Y \in [0, 60]$ o horário em que a segunda pessoa chegará. Para que as duas se encontrem, é necessário que:

$$|X - Y| \leqslant 20 \Rightarrow \begin{cases} X - Y \leqslant 20, \text{ se } X - Y \geqslant 0 \\ -X + Y \leqslant 20, \text{ se } X - Y < 0 \end{cases}$$

As duas pessoas encontram-se quando as regiões das inequações $Y \geqslant X - 20$ e $Y \leqslant 20 + X$ se intersectam no plano cartesiano XY:



A área em destaque no plano XY corresponde à área de um quadrado de comprimento 60 do qual foram retirados dois triângulos iguais, com altura e base de medida 40.

Logo, a probabilidade de as duas pessoas se encontrarem é igual à razão entre a área S destacada na cor alaranjada no plano e a área T que compreende todas as possibilidades de chegada das duas pessoas no local de encontro, cujo comprimento é:

$60 \cdot 60 = 3600$

Então:

$$P = \frac{S}{T} = \frac{60 \cdot 60 - 2 \cdot \frac{40 \cdot 40}{2}}{60 \cdot 60} = \frac{5}{9}$$

Resposta: alternativa **c**.

Atividades complementares

1. Representando o espaço amostral, temos:

		1º lançamento							
		1	2	3	4	5	6	7	8
2º lançamento	1	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	(5, 1)	(6, 1)	(7, 1)	(8, 1)
	2	(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)	(5, 2)	(6, 2)	(7, 2)	(8, 2)
	3	(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)	(5, 3)	(6, 3)	(7, 3)	(8, 3)
	4	(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)	(5, 4)	(6, 4)	(7, 4)	(8, 4)
	5	(1, 5)	(2, 5)	(3, 5)	(4, 5)	(5, 5)	(6, 5)	(7, 5)	(8, 5)
	6	(1, 6)	(2, 6)	(3, 6)	(4, 6)	(5, 6)	(6, 6)	(7, 6)	(8, 6)
	7	(1, 7)	(2, 7)	(3, 7)	(4, 7)	(5, 7)	(6, 7)	(7, 7)	(8, 7)
	8	(1, 8)	(2, 8)	(3, 8)	(4, 8)	(5, 8)	(6, 8)	(7, 8)	(8, 8)

$P(\text{soma } 8) = \frac{7}{64}$

Resposta: alternativa **e**.

2. Considerando o evento A como a retirada de peça perfeita, tem-se:

$n(A) = 500 - 4 = 496$; $n(U) = 500$

$P(A) = \frac{496}{500} = 0{,}992 = 99{,}2\%$

Resposta: alternativa **c**.

3. Segundo o enunciado, $n(U) = 200$. Considere o evento A "não ser solteiro". Desse modo, tem-se:

$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{200 - 90}{200} = 0{,}55$

Resposta: alternativa **c**.

4. O número de diagonais de um hexágono regular é:

$d = \frac{6 \cdot (6 - 3)}{2} = 9$

A quantidade de combinações distintas para a escolha de dois vértices do hexágono é dada por:

$C_{6,2} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = 15$

Desse modo, a probabilidade desejada é igual a:

$P = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$

Resposta: alternativa **c**.

5. Seja U o espaço amostral do experimento. Pelo princípio fundamental da contagem, tem-se:

$n(U) = 6 \cdot 6 = 36$

Considere o evento A "soma das faces ser maior ou igual a 9" e o evento B "soma das faces ser menor que 9".

$A = \{(3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\} \Rightarrow$
$\Rightarrow n(A) = 10$

Como os eventos A e B são complementares, segue que:

$P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{10}{36} = \frac{13}{18}$

Resposta: alternativa **d**.

6. Sejam x a quantidade de bolas amarelas na urna e n a quantidade total de bolas na urna. De acordo com a informação **I**, conclui-se que a quantidade de bolas vermelhas é $2x$. De acordo com a informação **II**, tem-se:

$\frac{2x}{n - 4} = \frac{1}{2} \Rightarrow n = 4x + 4$

A quantidade de bolas brancas é dada por $n - x - 2x$, o que equivale a:

$4x + 4 - x - 2x = x + 4$

De acordo com a informação **III**, tem-se que:

$\frac{x + 4}{n - 12} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x + 4}{(4x + 4) - 12} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 8$

Logo, a quantidade de bolas brancas é:

$8 + 4 = 12$

Resposta: alternativa **c**.

7. Pelo princípio fundamental da contagem, o número de elementos do espaço amostral é dado por:

$6 \cdot 6 = 36$

Considere as possibilidades de sair um número menor do que 3 nos lançamentos:

$A = \{(1, 1), (2, 1), (1, 2), (2, 2)\} \Rightarrow n(A) = 4$

Assim, a probabilidade é dada por:

$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

Resposta: alternativa **d**.

8. Considere o evento A "o morador se atrasa para o serviço se chover", o evento B "o morador se atrasa para o serviço se não chover", o evento C "chove no dia" e o evento D "não chove no dia". Como os eventos C e D são complementares, segundo os dados do enunciado, tem-se:

$P(C) + P(D) = 1 \Rightarrow P(D) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$

Como os eventos A e C e os eventos B e D são independentes, segue que:

$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C) = 0{,}5 \cdot 0{,}3 = 0{,}15$

$P(B \cap D) = P(B) \cdot P(D) = 0{,}25 \cdot 0{,}7 = 0{,}175$

Como esses resultados são mutuamente exclusivos, a probabilidade de o morador se atrasar para o serviço é:

$P = 0{,}15 + 0{,}175 = 0{,}325$

Resposta: alternativa **c**.

9. Sejam o evento M "paciente ser mulher", o evento A "paciente ter mais de 18 anos" e o evento H "paciente ser homem", tem-se:

$P(M) = 0{,}60$; $P(A) = 0{,}60$; $P(M \cup A) = 0{,}85$

$P(M \cup A) = P(A) + P(M) - P(M \cap A) \Rightarrow$

$\Rightarrow 0{,}85 = 0{,}60 + 0{,}60 - P(M \cap A) \Rightarrow P(M \cap A) = 1{,}20 - 0{,}85 \Rightarrow$

$\Rightarrow P(M \cap A) = 0{,}35$

Logo, a probabilidade de ser escolhido um paciente aleatoriamente e ele ser homem, sabendo-se que tem mais de 18 anos, é:

$P(H/A) = \frac{P(H \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(M \cap A)}{P(A)} = \frac{0{,}60 - 0{,}35}{0{,}60} = \frac{5}{12}$

Resposta: alternativa **e**.

10. Considere o evento A "um parafuso ser produzido pela máquina A" e o evento D "o parafuso ser defeituoso". Como na caixa há 100 parafusos produzidos pela máquina **A** e 100 produzidos pela máquina **B**, espera-se que haja 15 parafusos defeituosos produzidos pela máquina **A** e 5 parafusos defeituosos produzidos pela máquina **B**:

$n(D) = 15 + 5 = 20$

$n(A \cap D) = 15$

Desse modo, a probabilidade de um parafuso ser produzido pela máquina **A**, sabendo-se que ele é defeituoso é:

$P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{n(A \cap D)}{n(D)} = \frac{15}{20} = 0{,}75 = 75\%$

Resposta: alternativa **e**.

11. A probabilidade de o casal ter no máximo dois filhos de olhos azuis é a soma das probabilidades de não terem filho de olhos azuis com a de terem 1 filho de olhos azuis e com a de terem 2 filhos de olhos azuis.

$P(\text{filho não ter olhos azuis}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$P(\text{nenhum filho de olhos azuis}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{81}$

$P(\text{1 filho de olhos azuis}) = P_4^3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{32}{81}$

$P(\text{2 filhos de olhos azuis}) = P_4^{(2,\,2)} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} =$

$= \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{24}{81}$

Portanto, a probabilidade desejada é dada por:

$\frac{16}{81} + \frac{32}{81} + \frac{24}{81} = \frac{72}{81} = \frac{8}{9}$

Resposta: alternativa **c**.

12. Das 15 questões difíceis, 9 são sobre sistema respiratório. Logo, a probabilidade P do evento desejado é:

$P = \frac{9}{15} = 0{,}6 = 60\%$

Resposta: alternativa **b**.

13. Como, na palavra *chatbot*, a letra **t** se repete 2 vezes, o número total de anagramas possíveis é dado por P_7^2. O evento desejado ocorre quando os anagramas começam e terminam com **t**, podendo as demais letras estar em qualquer ordem. Logo, a probabilidade Q do evento desejado é dada por:

$Q = \frac{1 \cdot 5! \cdot 1}{P_7^2} = \frac{1 \cdot 5! \cdot 1}{\frac{7!}{2!}} = \frac{1}{21} \simeq 0{,}048$

Então, aproximadamente, 4,8%.

Resposta: alternativa **a**.

14. Considere:

- P o evento "escolher aleatoriamente a caixa **P** e retirar ao acaso um medicamento vencido";
- Q o evento "escolher aleatoriamente a caixa **Q** e retirar ao acaso um medicamento vencido";
- R o evento "escolher aleatoriamente a caixa **R** e retirar ao acaso um medicamento vencido".

Desse modo, a probabilidade de se escolher aleatoriamente uma das caixas e retirar dela uma cartela com medicamento com prazo de validade ultrapassado é dada por:

$P(P) + P(Q) + P(R) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{9} = \frac{3}{10}$

Resposta: alternativa **d**.

15. Pelos dados da tabela, a probabilidade P do evento desejado é:

$P = \frac{608\,000}{474\,000 + 608\,000} \simeq 0{,}56$

Resposta: alternativa **b**.

16. Para sortear o número 50, é necessário sortear 0 (zero), algarismo da ordem das unidades, entre os algarismos de 0 a 9, e, em seguida, sortear 5, algarismo da ordem das dezenas, entre os algarismos de 1 a 5. Logo, a probabilidade P de o número 50 ser sorteado é:

$P = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{50}$

Para sortear o número 02, é necessário sortear 2, algarismo da ordem das unidades, entre os algarismos de 0 a 9, e, em seguida, sortear 0 (zero), algarismo da ordem das dezenas, entre os algarismos de 0 a 5. Logo, a probabilidade Q de o número 02 ser sorteado é:

$Q = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{60}$

Resposta: alternativa **a**.

17. De acordo com o enunciado, foram colocados na urna 200 cartões com nomes de estudantes do primeiro ano, 300 do segundo ano e 300 do terceiro ano. Então, a probabilidade P do evento desejado é:

$P = \frac{300}{200 + 300 + 300} = \frac{3}{8}$

Resposta: alternativa **e**.

18. Na sequência das três figuras ordenadas pelo jogador, há duas ocorrências favoráveis a ele. O total de possibilidades distintas e como as quatro figuras podem ser ordenadas pela banca, por haver duas figuras repetidas, é de P_4^2. Desse modo, a probabilidade $P(J)$ de o jogador vencer é:

$P(J) = \frac{2}{P_4^2} = \frac{1}{6} \simeq 0{,}17 = 17\%$

Resposta: alternativa **c**.

19. Identificando por A, B, C, D, E, F, G, H, I e J as dez cadeiras, da esquerda para a direita, as cinco garotas podem estar sentadas nas seguintes cadeiras adjacentes:

(A, B, C, D, E), (B, C, D, E, F), (C, D, E, F, G), (D, E, F, G, H), (E, F, G, H, I) e (F, G, H, I, J)

Desses 6 modos possíveis, em apenas dois, (A, B, C, D, E) e (F, G, H, I, J), os cinco garotos também poderão se sentar em cadeiras adjacentes. Logo, a probabilidade P do evento desejado é:

$P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Resposta: alternativa **c**.

20. Considerando o evento A "os lançamentos da moeda formarem exatamente o nome ALINE" e o evento J "os lançamentos da moeda formarem exatamente o nome JORGE". Por serem eventos mutuamente exclusivos, tem-se:

$P(A \cup J) = P(A) + P(J) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{16}$

Resposta: alternativa **c**.

Capítulo 6 • Matrizes e sistemas lineares

Atividades

1. Ao associar as letras do alfabeto aos números de acordo com o quadro fornecido no enunciado, obtém-se:

U	N	I	M	O	N	T	E	S
21	14	9	13	15	14	20	5	19

Desse modo, a matriz que codifica essa palavra é:

$$\begin{bmatrix} 21 & 14 & 9 \\ 13 & 15 & 14 \\ 20 & 5 & 19 \end{bmatrix}$$

Resposta: alternativa **b**.

2. A matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, em que $a_{ij} = 3i - j^2$, é dada por:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 - 1^2 & 3 \cdot 1 - 2^2 & 3 \cdot 1 - 3^2 \\ 3 \cdot 2 - 1^2 & 3 \cdot 2 - 2^2 & 3 \cdot 2 - 3^2 \\ 3 \cdot 3 - 1^2 & 3 \cdot 3 - 2^2 & 3 \cdot 3 - 3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -6 \\ 5 & 2 & -3 \\ 8 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Analisando a soma dos elementos de cada linha, coluna, diagonal principal e diagonal secundária da matriz A, conclui-se que todas as somas são iguais a 12. Do mesmo modo, analisando a soma dos elementos de cada linha, coluna, diagonal principal e diagonal secundária da matriz B, conclui-se que todas as somas são iguais a 34. Desse modo, as matrizes A e B são quadrados mágicos. Por outro lado, tomando-se, por exemplo, a soma dos elementos da diagonal principal da matriz C, que é igual a 16, e a soma dos elementos da diagonal secundária, que é 15, percebe-se que elas são distintas. Logo, a matriz C não é um quadrado mágico.

4. **a)** A matriz $A = (a_{ij})_{1 \times 3}$, em que $a_{ij} = 2i - j$, é dada por:

$A = (a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}) = (2 \cdot 1 - 1 \quad 2 \cdot 1 - 2 \quad 2 \cdot 1 - 3) =$
$= (1 \quad 0 \quad -1)$

b) A matriz $B = (b_{ij})_{4 \times 2}$, em que $b_{ij} = \begin{cases} i + j, \text{ se } i \leqslant j \\ i - j, \text{ se } i > j \end{cases}$, é dada por:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 1+2 \\ 2-1 & 2+2 \\ 3-1 & 3-2 \\ 4-1 & 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

c) A matriz $C = (c_{ij})_{3 \times 3}$, em que $c_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i+j}, \text{ se } i \neq j \\ 0, \text{ se } i = j \end{cases}$, é dada por:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{1+2} & (-1)^{1+3} \\ (-1)^{2+1} & 0 & (-1)^{2+3} \\ (-1)^{3+1} & (-1)^{3+2} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Segundo a matriz do enunciado, o tempo de treinamento do atleta **B** no terceiro dia corresponde ao elemento a_{23}.
Como $a_{ij} = 30i + 10j$, tem-se:
$a_{23} = 30 \cdot 2 + 10 \cdot 3 \Rightarrow a_{23} = 90$
Logo, o tempo de treinamento do atleta **B** foi de 90 min ou 1 h e 30 min.
Resposta: alternativa **a**.

6. Considerando as possíveis distâncias entre os vértices do quadrado, pode-se obter:

- quando $i = j$, $a_{ij} = 0$;
- quando i e j forem números consecutivos ou quando $|i - j| = 3$, $a_{ij} = 1$;
- quando $|i - j| = 2$, $a_{ij} = \sqrt{2}$, pois corresponderá à medida da diagonal do quadrado de lado 1.

Logo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Resposta: alternativa **b**.

7. Considere a matriz $A = (a_{ij})_{4 \times 4}$, em que $a_{ij} = i - j$.
Os elementos de sua diagonal principal são nulos, uma vez que esses elementos a_{ij} correspondem aos casos em que $i = j$.
A soma dos elementos de sua diagonal secundária é:
$a_{14} + a_{23} + a_{32} + a_{41} = 1 - 4 + (2 - 3) + (3 - 2) + (4 - 1) = 0$
Desse modo, conclui-se que:
$a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} + a_{14} + a_{23} + a_{32} + a_{41} = 0$

8. **a)** Com base nas informações do enunciado, é possível determinar as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 340 & 410 \\ 105 & 87 \\ 96 & 134 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 180 & 152 \\ 64 & 36 \\ 113 & 88 \end{bmatrix}$$

b) Considere a matriz $C = A + B$. Desse modo, tem-se:

$$C = \begin{bmatrix} 340 + 180 & 410 + 152 \\ 105 + 64 & 87 + 36 \\ 96 + 113 & 134 + 88 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 520 & 562 \\ 169 & 123 \\ 209 & 222 \end{bmatrix}$$

9. **a)** $A + B = \begin{pmatrix} -1 + 6 & 2 + 7 \\ 5 + (-3) & 4 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$B + A = \begin{pmatrix} 6 + (-1) & 7 + 2 \\ -3 + 5 & 0 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Desse modo, tem-se:
$A + B = B + A$

b) $A + (B + C) = \begin{pmatrix} -1 + (6 + 1) & 2 + (7 + 1) \\ 5 + (-3 + 1) & 4 + (0 + 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

$(A + B) + C = \begin{pmatrix} (-1 + 6) + 1 & (2 + 7) + 1 \\ (5 + (-3)) + 1 & (4 + 0) + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

Desse modo, tem-se:
$A + (B + C) = (A + B) + C$

c) $B + 0_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 6 + 0 & 7 + 0 \\ -3 + 0 & 0 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = B$

Desse modo, tem-se:
$B + 0_{2 \times 2} = B$

d) $C + (-C) = \begin{pmatrix} 1 + (-1) & 1 + (-1) \\ 1 + (-1) & 1 + (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{2 \times 2}$

Desse modo, tem-se:
$C + (-C) = 0_{2 \times 2}$

10. Por definição, como $C = A + B$, pode-se admitir que:
$c_{23} = a_{23} + b_{23} = 2 + 3 + (2 - 3) = 4$

11. **a)** $2A = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 & 2 \cdot 1 & 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot (-2) & 2 \cdot (-1) & 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot 0 & 2 \cdot 5 & 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ -4 & -2 & 8 \\ 0 & 10 & 4 \end{pmatrix}$

b) $-3B = \begin{pmatrix} -3 \cdot 0 & -3 \cdot (-1) & -3 \cdot 3 \\ -3 \cdot 2 & -3 \cdot 0 & -3 \cdot 6 \\ -3 \cdot 1 & -3 \cdot 1 & -3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -9 \\ -6 & 0 & -18 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

c) $\frac{1}{2}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot 0 & \frac{1}{2} \cdot (-1) & \frac{1}{2} \cdot 3 \\ \frac{1}{2} \cdot 2 & \frac{1}{2} \cdot 0 & \frac{1}{2} \cdot 6 \\ \frac{1}{2} \cdot 1 & \frac{1}{2} \cdot 1 & \frac{1}{2} \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

d) $3A + 2B = \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 + 2 \cdot 0 & 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) & 3 \cdot 0 + 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 & 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 & 3 \cdot 4 + 2 \cdot 6 \\ 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 3 \cdot 5 + 2 \cdot 1 & 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 9 & 1 & 6 \\ -2 & -3 & 24 \\ 2 & 17 & 8 \end{pmatrix}$

12. **a)** $2 \cdot (3X) = \begin{pmatrix} 2 \cdot (3 \cdot 0) & 2 \cdot (3 \cdot 1) \\ 2 \cdot (3 \cdot 2) & 2 \cdot (3 \cdot 3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 12 & 18 \end{pmatrix}$

$(2 \cdot 3)X = \begin{pmatrix} (2 \cdot 3) \cdot 0 & (2 \cdot 3) \cdot 1 \\ (2 \cdot 3) \cdot 2 & (2 \cdot 3) \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 12 & 18 \end{pmatrix}$

Desse modo, tem-se:
$2 \cdot (3X) = (2 \cdot 3)X$

b) $2 \cdot (X + Y) = \begin{pmatrix} 2 \cdot (0 + 1) & 2 \cdot (1 + 2) \\ 2 \cdot (2 + 3) & 2 \cdot (3 + 4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}$

$2X + 2Y = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 & 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}$

Desse modo, tem-se:
$2 \cdot (X + Y) = 2X + 2Y$

c) $(2 + 3)X = \begin{pmatrix} (2 + 3) \cdot 0 & (2 + 3) \cdot 1 \\ (2 + 3) \cdot 2 & (2 + 3) \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 10 & 15 \end{pmatrix}$

$2X + 3X = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 & 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 & 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 10 & 15 \end{pmatrix}$

Desse modo, tem-se:
$(2 + 3)X = 2X + 3X$

d) $1 \cdot Y = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 & 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 3 & 1 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = Y$

Desse modo, tem-se:
$1 \cdot Y = Y$

13. As matrizes A e B são de mesma ordem. Além disso, ao se multiplicar uma matriz por um número real, sua ordem não se altera, de modo que é possível efetuar os seguintes cálculos:

a) $\frac{1}{2}(A+B) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\cdot(1+(-3)) & \frac{1}{2}\cdot(-2+6) & \frac{1}{2}\cdot(0+12) \\ \frac{1}{2}\cdot(5+9) & \frac{1}{2}\cdot(-4+(-6)) & \frac{1}{2}\cdot(3+15) \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 7 & -5 & 9 \end{bmatrix}$

b) $-4A - \frac{2}{3}B =$

$= \begin{bmatrix} -4\cdot 1 - \frac{2}{3}\cdot(-3) & -4\cdot(-2) - \frac{2}{3}\cdot 6 & -4\cdot 0 - \frac{2}{3}\cdot 12 \\ -4\cdot 5 - \frac{2}{3}\cdot 9 & -4\cdot(-4) - \frac{2}{3}\cdot(-6) & -4\cdot 3 - \frac{2}{3}\cdot 15 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} -2 & 4 & -8 \\ -26 & 20 & -22 \end{bmatrix}$

14. Pelo enunciado, tem-se:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

a) $C = 2A - 3B = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 - 3\cdot 1 & 2\cdot 3 - 3\cdot 0 \\ 2\cdot 3 - 3\cdot 0 & 2\cdot 1 - 3\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$

b) $D = \frac{1}{2}A - \frac{1}{4}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cdot 1 - \frac{1}{4}\cdot 1 & \frac{1}{2}\cdot 3 - \frac{1}{4}\cdot 0 \\ \frac{1}{2}\cdot 3 - \frac{1}{4}\cdot 0 & \frac{1}{2}\cdot 1 - \frac{1}{4}\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$

15. a) Como a primeira matriz é de ordem 3×4 e a segunda é de ordem 4×2, é possível multiplicá-las, nessa ordem, e o resultado será uma matriz A cujos elementos são:

$a_{11} = 2\cdot 1 + (-1)\cdot(-1) + 3\cdot 0 + 1\cdot(-2) = 1$

$a_{12} = 2\cdot 2 + (-1)\cdot 3 + 3\cdot 4 + 1\cdot 1 = 14$

$a_{21} = 0\cdot 1 + (-2)\cdot(-1) + 5\cdot 0 + 4\cdot(-2) = -6$

$a_{22} = 0\cdot 2 + (-2)\cdot 3 + 5\cdot 4 + 4\cdot 1 = 18$

$a_{31} = (-3)\cdot 1 + 1\cdot(-1) + 0\cdot 0 + 6\cdot(-2) = -16$

$a_{32} = (-3)\cdot 2 + 1\cdot 3 + 0\cdot 4 + 6\cdot 1 = 3$

Logo:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 14 \\ -6 & 18 \\ -16 & 3 \end{pmatrix}$

b) Como a primeira matriz é de ordem 2×2, a segunda é de ordem 3×3 e $2 \neq 3$, conclui-se que é não é possível determinar o produto entre elas.

c) Como a primeira matriz é de ordem 3×1 e a segunda é de ordem 1×3, é possível multiplicá-las, nessa ordem, e o resultado será uma matriz C dada por:

$C = \begin{pmatrix} 3\cdot 2 & 3\cdot 4 & 3\cdot(-1) \\ 1\cdot 2 & 1\cdot 4 & 1\cdot(-1) \\ -2\cdot 2 & -2\cdot 4 & -2\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 12 & -3 \\ 2 & 4 & -1 \\ -4 & -8 & 2 \end{pmatrix}$

16. Considerando as matrizes A e B do enunciado, tem-se:

$AB = \begin{pmatrix} 3\cdot 0 + 2\cdot 3 & 3\cdot 1 + 2\cdot 0 \\ 5\cdot 0 + 1\cdot 3 & 5\cdot 1 + 1\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} 0\cdot 3 + 1\cdot 5 & 0\cdot 2 + 1\cdot 1 \\ 3\cdot 3 + 0\cdot 5 & 3\cdot 2 + 0\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$

Como $AB \neq BA$, segue que A e B não comutam.

17. Segundo o enunciado:

$a_{ij} = i + j$ e $b_{ij} = 2i + j$

Desse modo, por definição, o elemento c_{32} é dado por:

$c_{32} = a_{31}\cdot b_{12} + a_{32}\cdot b_{22} + a_{33}\cdot b_{32} = 4\cdot 4 + 5\cdot 6 + 6\cdot 8 = 94$

18. a) $T = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

b) $E = \begin{bmatrix} 50 & 100 & 200 \\ 50 & 150 & 100 \end{bmatrix}$

c) $T \cdot E =$

$= \begin{bmatrix} 4\cdot 50 + 2\cdot 50 & 4\cdot 100 + 2\cdot 150 & 4\cdot 200 + 2\cdot 100 \\ 2\cdot 50 + 3\cdot 50 & 2\cdot 100 + 3\cdot 150 & 2\cdot 200 + 3\cdot 100 \\ 1\cdot 50 + 2\cdot 50 & 1\cdot 100 + 2\cdot 150 & 1\cdot 200 + 2\cdot 100 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 300 & 700 & 1\,000 \\ 250 & 650 & 700 \\ 150 & 400 & 400 \end{bmatrix}$

O elemento da segunda linha e da segunda coluna da matriz $T \cdot E$ representa a quantidade de zíperes médios encomendados para o mês de novembro, isto é, 650 zíperes.

d) Resposta pessoal. Sugestão de problema: Qual é a quantidade total necessária de zíperes pequenos para confeccionar as mochilas encomendadas para os meses de outubro a dezembro?

De acordo com a matriz $T \cdot E$ elaborada no item anterior, a quantidade total necessária de zíperes para confeccionar a demanda de mochilas desse trimestre é igual à soma dos elementos da primeira linha da matriz, isto é:

$300 + 700 + 1000 = 2000$

19. Desenvolvendo a multiplicação das matrizes, obtém-se:

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -a \\ a & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 2 & \text{I} \\ 4x - ay = 3 & \text{II} \\ ax - 4y = -1 & \text{III} \end{cases}$

Isolando x em I e substituindo, em II, tem-se:

$4\cdot(2 - y) - ay = 3$

Isolando x em I e substituindo, em III, tem-se:

$a\cdot(2 - y) - 4y = -1$

Assim, forma-se o sistema:

$\begin{cases} 4y + ay = 5 \\ -4y - ay + 2a = -1 \end{cases}$

Resolvendo o último sistema, obtém-se:

$a = 2$

20. Associando números às letras do alfabeto, conforme o enunciado, tem-se:

F	L	O	R
6	12	15	18

Logo, a matriz C que representa essa palavra é:

$C = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 15 & 18 \end{bmatrix}$

Seja $A = (a_{ij})_{2\times 2}$. Desse modo, tem-se:

$A \cdot B = C \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} + 2a_{12} & -a_{11} + a_{12} \\ a_{21} + 2a_{22} & -a_{21} + a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 15 & 18 \end{bmatrix}$

Assim, formam-se os seguintes sistemas:

$\begin{cases} a_{11} + 2a_{12} = 6 \\ -a_{11} + a_{12} = 12 \end{cases}$ e $\begin{cases} a_{21} + 2a_{22} = 15 \\ -a_{21} + a_{22} = 18 \end{cases}$

Resolvendo os dois últimos sistemas, obtém-se $a_{11} = -6$, $a_{12} = 6$, $a_{21} = -7$ e $a_{22} = 11$. Portanto, conclui-se que:

$A = \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ -7 & 11 \end{bmatrix}$

Resposta: alternativa **b**.

21. Somente a equação do item **a** é linear, pois as demais apresentam uma multiplicação entre duas ou mais incógnitas ou, ainda, incógnitas com expoente diferente de 1.
Resposta: alternativa **a**.

22. Substituindo cada par ordenado no primeiro membro da equação $2x - 3y = 9$, obtém-se:

- $2 \cdot 0 - 3 \cdot (-3) = 9$
  Portanto, $(0, -3)$ é solução da equação.
- $2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = -4 \neq 9$
  Portanto, $(1, 2)$ não é solução da equação.
- $2 \cdot 4 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = 9$
  Portanto, $\left(4, -\frac{1}{3}\right)$ é solução da equação.
- $2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 3 \cdot 0 = -1 \neq 9$
  Portanto, $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ não é solução da equação.

23. Não, pois, qualquer que seja o par ordenado (a, b), tem-se que: $0a + 0b \neq 4$

24. Para que $(-1, 2, -3)$ seja solução da equação $2a - 4b + mc = 0$, é necessário que:
$2 \cdot (-1) - 4 \cdot 2 + m \cdot (-3) = 0 \Rightarrow m = -\frac{10}{3}$

25. Uma equação linear é dita homogênea quando seu termo independente é igual a 0. Logo, a equação $x - 4y + z = m^2 - 4$ será homogênea se $m^2 - 4 = 0$, isto é, se $m = 2$ ou $m = -2$.

26. Substituindo o par ordenado $(-1, 2)$ no primeiro membro de cada equação do sistema, obtém-se:
$$\begin{cases} a - 4b = -1 - 4 \cdot 2 = -9 \\ 3a + b = 3 \cdot (-1) + 2 = -1 \end{cases}$$
Como o par ordenado satisfaz a ambas as equações, então $(-1, 2)$ é solução do sistema.

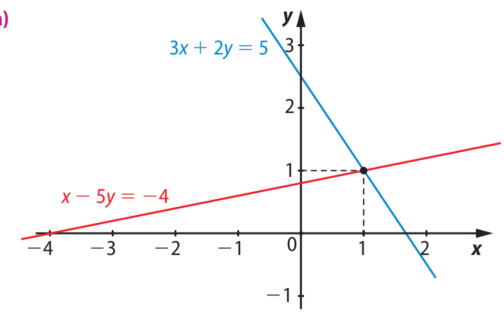
27. Considere o sistema:
$$\begin{cases} 2x - y = 15 \\ x + 3y = 25 \end{cases}$$
Multiplicando a segunda equação por -2 e adicionando-a à primeira equação, obtém-se:
$2x - y + (-2x - 6y) = 15 + (-50) \Rightarrow y = 5$
Substituindo $y = 5$ na primeira equação, obtém-se $x = 10$.
Portanto, conclui-se que $S = \{(10, 5)\}$.

28. Considere as variáveis a e m como a distância percorrida, em km, pelo trabalhador de automóvel e de motocicleta, respectivamente. Pelo enunciado, tem-se:
$$\begin{cases} 0{,}21a + 0{,}07m = 70 & \text{(I)} \\ a + m = 550 & \text{(II)} \end{cases}$$
Isolando a em (II) e substituindo-o em (I), obtém-se:
$0{,}21 \cdot (550 - m) + 0{,}07m = 70 \Rightarrow m = 325$
Substituindo $m = 325$ em (II), obtém-se:
$a = 225$
Logo, o trabalhador deve percorrer 325 km de motocicleta e 225 km de automóvel para que o custo total mensal seja R$ 70,00.

29. **a)** Considere as caixas do tipo **A** como x e as caixas do tipo **B** como y. Pelo enunciado, forma-se o sistema:
$$\begin{cases} x + y = 58 & \text{(I)} \\ 56x + 72y = 3\,840 & \text{(II)} \end{cases}$$
b) Isolando x em (I) e substituindo-o em (II), obtém-se:
$56 \cdot (58 - y) + 72y = 3\,840 \Rightarrow y = 37$
Substituindo $y = 37$ em (I), obtém-se $x = 21$.
Logo, o caminhão levará 21 caixas do tipo **A** e 37 do tipo **B**.

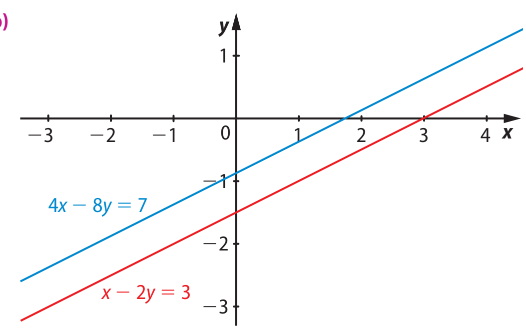
30. Resposta pessoal. Sugestão de problema: Sarah e Matheus são irmãos. A diferença entre o dobro da idade de Sarah e a idade de Matheus é 5 anos. Além disso, a soma das idades deles é 7 anos. Calcule a idade de cada irmão.
Considerando x a idade de Sarah e y a idade de Matheus, obtém-se o sistema:
$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + y = 7 \end{cases}$$
Resolvendo esse sistema, obtém-se $x = 4$ e $y = 3$.
Substituindo o par ordenado $(4, 3)$ no primeiro membro de cada equação do segundo sistema da atividade, obtém-se:
$$\begin{cases} -x + 5y = -4 + 5 \cdot 3 = 11 \\ 3x - y = 3 \cdot 4 - 3 = 9 \end{cases}$$
Assim, ambos os sistemas têm o mesmo conjunto solução $S = \{(4, 3)\}$.

31. **a)**



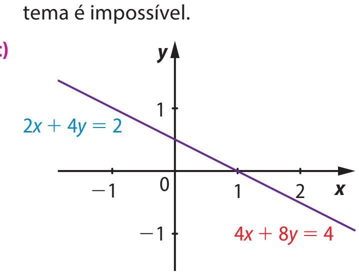
Como os gráficos se intersectam em um único ponto, o sistema é possível e determinado.

b)



Como as retas dos gráficos são paralelas e distintas, o sistema é impossível.

c)



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Como as retas dos gráficos são paralelas e coincidentes, o sistema é possível e indeterminado.

32. **a)** Substituindo a terna ordenada $(2, -1, 1)$ no primeiro membro de cada equação do sistema, obtém-se:
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) - 1 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 - 2 \cdot (-1) + 1 = 5 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = -2 + (-1) + 1 = -2 \end{cases}$$
Como a terna ordenada satisfaz às equações, então $(2, -1, 1)$ é solução do sistema.

b) Substituindo a terna ordenada (0, 0, 0) no primeiro membro de cada equação do sistema, obtém-se:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 0 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 - 2 \cdot 0 + 0 = 0 \neq 5 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = -0 + 0 + 0 = 0 \neq -2 \end{cases}$$

Como a terna ordenada não satisfaz às equações, então (0, 0, 0) não é solução do sistema.

33. Do enunciado, obtém-se o sistema a seguir:

$$\begin{cases} m + p + q = 58 & \text{I} \\ 2m + 3p + 4q = 166 & \text{II} \\ 4q = 40 & \text{III} \end{cases}$$

De III, temos que $q = 10$. Substituindo $q = 10$ em I e II, forma-se o sistema:

$$\begin{cases} m + p = 48 & \text{IV} \\ 2m + 3p = 126 & \text{V} \end{cases}$$

Multiplicando IV por -2 e adicionando à equação V, obtém-se:

$2m + 3p + (-2m - 2p) = 126 - 96 \Rightarrow p = 30$

Substituindo $p = 30$ em IV, tem-se: $m = 18$

Logo, a diferença entre o número de quartos triplos e o número de quartos duplos é: $p - m = 30 - 18 = 12$

Resposta: alternativa **c**.

34. Considerando como p_0, p_1 e p_2 os comprimentos, em passos, da ponte, da pista 1 e da pista 2, respectivamente, obtém-se o sistema:

$$\begin{cases} p_0 + 2p_1 + p_2 = 1\,157 & \text{I} \\ p_0 + p_1 + p_2 = 757 & \text{II} \\ 7p_1 = 8p_2 & \text{III} \end{cases}$$

Tomando I − II, conclui-se que $p_1 = 400$. Substituindo $p_1 = 400$ em III, conclui-se que $p_2 = 350$. Portanto, o comprimento da ponte, em passos, é dado por:

$p_0 = 757 - p_1 - p_2 = 757 - 400 - 350 = 7$

Resposta: alternativa **c**.

35. a) Considerando $\alpha = x$, $\beta = y$ e $\omega = z$, tem-se:

$$\begin{cases} 2x = 2z \\ 2y = z \end{cases}$$

Isolando x na primeira equação e y na segunda, obtém-se:

$x = z$ e $y = \frac{z}{2}$

Logo, o conjunto solução do sistema é $S = \left\{\left(x, \frac{x}{2}, x\right) \mid x \in \mathbb{R}\right\}$, sendo esse um sistema possível e indeterminado.

b) Como $y = \frac{z}{2}$, a menor solução inteira positiva ocorre para $z = 2$. Logo: $S = \{(2, 1, 2)\}$

c) Para $\alpha = 2$, $\beta = 1$ e $\omega = 2$, tem-se: $2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$

36. a) Considerando o sistema dado:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 70 & \text{I} \\ 4y = 80 & \text{II} \end{cases}$$

Isolando y na equação II, obtém-se:

$y = 20$

Substituindo $y = 20$ em I, tem-se:

$3x + 2 \cdot 20 = 70 \Rightarrow x = 10$

Portanto: $S = \{(10, 20)\}$

b) Considerando o sistema dado:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 & \text{I} \\ y - z = 4 & \text{II} \\ 7z = 21 & \text{III} \end{cases}$$

Isolando z na equação III, obtém-se: $z = 3$

Substituindo $z = 3$ em II, tem-se: $y - 3 = 4 \Rightarrow y = 7$

Substituindo $y = 7$ e $z = 3$ em I: $x + 7 + 2 \cdot 3 = 1 \Rightarrow x = -12$

Portanto: $S = \{(-12, 7, 3)\}$

c) Considerando o sistema dado, tem-se:

$$\begin{cases} a - 3b + 2c - d = -1 & \text{I} \\ 5b - 3c + d = 3 & \text{II} \\ \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}d = 1 & \text{III} \\ \frac{1}{5}d = \frac{1}{5} & \text{IV} \end{cases}$$

Isolando d na equação IV, obtém-se:

$d = 1$

Substituindo $d = 1$ em III, tem-se:

$\frac{1}{2}c + \frac{1}{2} \cdot 1 = 1 \Rightarrow c = 1$

Substituindo $c = 1$ e $d = 1$ em II, tem-se:

$5b - 3 \cdot 1 + 1 = 3 \Rightarrow b = 1$

Substituindo $b = 1$, $c = 1$ e $d = 1$ em I, tem-se:

$a - 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 1 = -1 \Rightarrow a = 1$

Portanto: $S = \{(1, 1, 1, 1)\}$

d) Considerando o sistema dado, tem-se:

$$\begin{cases} 4x + 2y - z = 6 & \text{I} \\ 3y - 5z = 2 & \text{II} \\ 0z = 1 & \text{III} \end{cases}$$

Analisando a equação III, verifica-se que não há nenhum número real para z que satisfaça essa equação. Portanto: $S = \varnothing$

e) Considerando o sistema dado, tem-se:

$$\begin{cases} 2x + y = 13 & \text{I} \\ 0y = 0 & \text{II} \end{cases}$$

Analisando a equação II, verifica-se que a igualdade é válida para qualquer valor real atribuído a y, considerando-se $y = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Desse modo, isolando x em I, conclui-se que o conjunto solução desse sistema é:

$S = \left\{\left(\frac{13 - \lambda}{2}, \lambda\right) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$

f) Considerando o sistema dado, tem-se:

$$\begin{cases} 3a + b - 2c + d = 1 & \text{I} \\ 3b + c - 2d = 4 & \text{II} \\ c + d = 1 & \text{III} \\ 0d = 2 & \text{IV} \end{cases}$$

Analisando a equação IV, verifica-se que não há nenhum número real para d que satisfaça essa equação. Portanto: $S = \varnothing$

37. Considerando o sistema dado, tem-se:

$$\begin{cases} x + y - 2z + t = 1 & \text{I} \\ -y + 5z - 4t = 5 & \text{II} \\ 6z - t = 2 & \text{III} \end{cases}$$

Isolando z na equação III, obtém-se: $z = \frac{2 + t}{6}$

Substituindo $z = \frac{2 + t}{6}$ em II, tem-se:

$-y + 5 \cdot \left(\frac{2 + t}{6}\right) - 4t = 5 \Rightarrow y = -\frac{20 + 19t}{6}$

Substituindo $y = -\frac{20 + 19t}{6}$ e $z = \frac{2 + t}{6}$ em I, tem-se:

$x + \left(-\frac{20 + 19t}{6}\right) - 2 \cdot \left(\frac{2 + t}{6}\right) + t = 1 \Rightarrow x = 5 + \frac{5t}{2}$

Seja $t = \alpha$ um número real qualquer.

Desse modo, a solução do sistema é dada por:

$S = \left\{\left(5 + \frac{5\alpha}{2}, -\frac{20 + 19\alpha}{6}, \frac{2 + \alpha}{6}, \alpha\right) \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}$

38. a) Considerando o sistema dado, tem-se:

$$\begin{cases} x + y - z + t = 0 & (L_1) \\ x - y + z - t = 2 & (L_2) \\ -x + y + z - t = -4 & (L_3) \\ x - y - z - t = -4 & (L_4) \end{cases}$$

Primeiro, substituímos a equação L_2 pela equação L_5, em que L_5 é o resultado da adição de L_2 com o produto de L_1 por -1.

Depois, substituímos a equação L_3 pela equação L_6, em que L_6 é a adição de L_3 com L_2. Por fim, substituímos a equação L_4 pela equação L_7, em que L_7 é a adição de L_4 com L_3.

$$\begin{cases} x + y - z + t = 0 & (L_1) \\ -2y + 2z - 2t = 2 & (L_5) \\ 2z - 2t = -2 & (L_6) \\ -2t = -8 & (L_7) \end{cases}$$

Resolvendo o sistema escalonado, obtém-se:

- $-2t = -8 \Rightarrow t = 4$
- $2z - 2 \cdot 4 = -2 \Rightarrow z = 3$
- $-2y + 2 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 2 \Rightarrow y = -2$
- $x + (-2) - 3 + 4 = 0 \Rightarrow x = 1$

Logo, o conjunto solução do sistema é $S = \{(1, -2, 3, 4)\}$, sendo esse um sistema possível e determinado.

b) Considerando o sistema dado, tem-se:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 9 & (L_1) \\ x - y + 2z = 2 & (L_2) \\ x + 4y + 2z = 7 & (L_3) \end{cases}$$

Primeiro, trocamos de lugar as equações L_1 e L_2.

$$\begin{cases} x - y + 2z = 2 & (L_2) \\ 2x + 3y + 4z = 9 & (L_1) \\ x + 4y + 2z = 7 & (L_3) \end{cases}$$

Depois, substituímos a equação L_1 pela equação L_4, em que L_4 é o resultado da adição de L_1 com o produto de L_2 por -2. Por fim, substituímos a equação L_3 pela equação L_5, em que L_5 é o resultado da adição de L_3 com o produto de L_2 por -1.

$$\begin{cases} x - y + 2z = 2 & (L_2) \\ 5y = 5 & (L_4) \\ 5y = 5 & (L_5) \end{cases}$$

Como as equações L_4 e L_5 são idênticas, temos um sistema escalonado com três incógnitas e duas equações. Admitindo que a incógnita $z = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, obtém-se:

- $5y = 5 \Rightarrow y = 1$
- $x - 1 + 2 \cdot \lambda = 2 \Rightarrow x = 3 - 2\lambda$

Logo, o conjunto solução do sistema é $S = \{(3 - 2\lambda, 1, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, sendo esse um sistema possível e indeterminado.

39. a) Considerando o sistema dado, tem-se:

$$\begin{cases} -x + y - z = 5 & (L_1) \\ x + 2y + 4z = 4 & (L_2) \\ 2x + y + 2z = -1 & (L_3) \end{cases}$$

Primeiro, trocamos de lugar as equações L_1 e L_2:

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 4 & (L_2) \\ -x + y - z = 5 & (L_1) \\ 2x + y + 2z = -1 & (L_3) \end{cases}$$

Depois, substituímos a equação L_1 pela equação L_4, em que L_4 é o resultado da adição de L_1 com L_2. Posteriormente, substituímos a equação L_3 pela equação L_5, em que L_5 é o resultado da adição de L_3 com o produto de L_2 por -2.

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 4 & (L_2) \\ 3y + 3z = 9 & (L_4) \\ -3y - 6z = -9 & (L_5) \end{cases}$$

Por fim, substituímos a equação L_5 pela equação L_6, em que L_6 é o resultado da adição de L_5 com L_4.

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 4 & (L_2) \\ 3y + 3z = 9 & (L_4) \\ -3z = 0 & (L_6) \end{cases}$$

Resolvendo o sistema escalonado, obtém-se:

- $-3z = 0 \Rightarrow z = 0$
- $3y + 3 \cdot 0 = 9 \Rightarrow y = 3$
- $x + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 0 = 4 \Rightarrow x = -2$

Logo: $S = \{(-2, 3, 0)\}$

b) Considerando o sistema dado, tem-se:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 8 & (L_1) \\ x + 2y + 4z = 5 & (L_2) \\ 3x - 3y - z = 7 & (L_3) \end{cases}$$

Primeiro, trocamos de lugar as equações L_1 e L_2:

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 5 & (L_2) \\ 2x - y + 2z = 8 & (L_1) \\ 3x - 3y - z = 7 & (L_3) \end{cases}$$

Depois, substituímos a equação L_1 pela equação L_4, em que L_4 é o resultado da adição de L_1 com o produto de L_2 por -2. Posteriormente, substituímos a equação L_3 pela equação L_5, em que L_5 é o resultado da adição de L_3 com o produto de L_2 por -3.

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 5 & (L_2) \\ -5y - 6z = -2 & (L_4) \\ -9y - 13z = -8 & (L_5) \end{cases}$$

Por fim, substituímos a equação L_5 pela equação L_6, em que L_6 é o resultado da adição de L_5 com o produto de L_4 por $-\frac{9}{5}$.

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 5 & (L_2) \\ -5y - 6z = -2 & (L_4) \\ -\frac{11}{5}z = -\frac{22}{5} & (L_6) \end{cases}$$

Resolvendo o sistema escalonado, obtém-se:

- $-\frac{11}{5}z = -\frac{22}{5} \Rightarrow z = 2$
- $-5y - 6 \cdot 2 = -2 \Rightarrow y = -2$
- $x + 2 \cdot (-2) + 4 \cdot 2 = 5 \Rightarrow x = 1$

Logo: $S = \{(1, -2, 2)\}$

40. Sejam x, y e z, respectivamente, as quantidades, em grama, dos alimentos dos tipos **A**, **B** e **C**. Considerando as informações do enunciado, tem-se:

$$\begin{cases} 40x + 80y + 120z = 3\,600 \\ 100x + 50y + 50z = 2\,500 \\ 120x + 30y + 60z = 2\,700 \end{cases}$$

Simplificando as equações, tem-se:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 90 & \text{I} \\ 2x + y + z = 50 & \text{II} \\ 4x + y + 2z = 90 & \text{III} \end{cases}$$

Isolando x em I e substituindo-o em II e III, obtém-se:

$$\begin{cases} 2 \cdot (90 - 2y - 3z) + y + z = 50 \\ 4 \cdot (90 - 2y - 3z) + y + 2z = 90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y + 5z = 130 \\ 7y + 10z = 270 \end{cases}$$

Resolvendo o último sistema, obtém-se:

$z = 20$

Portanto, a mistura deve ter 20 gramas do tipo de alimento **C**.

41. Do enunciado, obtém-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x = y + z & \text{I} \\ x + y = 2\,300 & \text{II} \\ (x + y) + 2y + (z + y) = 5\,400 & \text{III} \end{cases}$$

Substituindo x por $y + z$ em II e III, tem-se:

$$\begin{cases} 2y + z = 2\,300 \\ 5y + 2z = 5\,400 \end{cases}$$

Resolvendo o último sistema, obtém-se: $y = 800$

Logo, o valor da gratificação foi R$ 800,00.

Atividades complementares

1. Analisando os elementos da matriz genérica A e seus valores correspondentes, pode-se determinar qual possibilidade apresenta uma despesa mínima, em milhares de reais:

- $a_{11} + a_{22} + a_{33} = 53 + 87 + 36 = 176$
- $a_{11} + a_{23} + a_{32} = 53 + 41 + 92 = 186$
- $a_{12} + a_{23} + a_{31} = 96 + 41 + 60 = 197$
- $a_{13} + a_{22} + a_{31} = 37 + 87 + 60 = 184$

Logo, a despesa mínima será R$ 176.000,00.
Resposta: alternativa **a**.

2. $2A - B = \begin{bmatrix} 2 \cdot 0 - (-2) & 2 \cdot 3 - 4 \\ 2 \cdot 2 - 0 & 2 \cdot (-5) - (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -9 \end{bmatrix}$

Resposta: alternativa **b**.

3. Analisando cada uma das alternativas, tem-se:

a) Falsa. A quantidade de produtos P_2 vendidos pela loja L_2 é 10.
b) Falsa. A quantidade de produtos P_1 vendidos pela loja L_3 é 20.
c) Falsa. A soma das quantidades de produtos P_3 vendidos pelas três lojas é 39.
d) Falsa. A soma das quantidades de produtos P_i vendidos pelas três lojas L_i, $i = 1, 2, 3$, é igual a: $30 + 10 + 11 = 51$
e) Verdadeira. A soma das quantidades dos produtos dos tipos P_1 e P_2 vendidos na loja L_1 é: $30 + 15 = 45$

Resposta: alternativa **e**.

4. $AB = \begin{bmatrix} -2 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) + 4 \cdot 2 & -2 \cdot (-2) + 1 \cdot 0 + 4 \cdot 3 \\ 0 \cdot 1 + (-3) \cdot (-3) + 2 \cdot 2 & 0 \cdot (-2) + (-3) \cdot 0 + 2 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 16 \\ 13 & 6 \end{bmatrix}$

Resposta: alternativa **a**.

5. $2A^2 + 4B^2 = \begin{bmatrix} 2 \cdot (2 \cdot 2 + 0 \cdot 0) + 4 \cdot (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) & 2 \cdot (2 \cdot 0 + 0 \cdot (-2)) + 4 \cdot (0 \cdot (-1) - 1 \cdot 0) \\ 2 \cdot (0 \cdot 2 - 2 \cdot 0) + 4 \cdot (1 \cdot 0 + 0 \cdot 1) & 2 \cdot (0 \cdot 0 - 2 \cdot (-2)) + 4 \cdot (1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

Resposta: alternativa **b**.

6. Seja s a posição das bicicletas em cada instante de tempo t. Para obter o momento do encontro delas, forma-se o sistema:

$$\begin{cases} s - 20t = 10 & \text{I} \\ s + 10t = 70 & \text{II} \end{cases}$$

Isolando s em I e II e igualando as expressões encontradas, obtém-se: $10 + 20t = 70 - 10t \Rightarrow t = 2$
Logo, as bicicletas se encontram em $t = 2$ s.
Resposta: alternativa **c**.

7. Seja $M = (m_{ij})_{3 \times 3}$. Desse modo, tem-se:

$$MC = P \Rightarrow \begin{pmatrix} m_{11} + 0 + 0 & m_{11} - m_{12} + 2m_{13} & 0 + 0 + m_{13} \\ m_{21} + 0 + 0 & m_{21} - m_{22} + 2m_{23} & 0 + 0 + m_{23} \\ m_{31} + 0 + 0 & m_{31} - m_{32} + 2m_{33} & 0 + 0 + m_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 40 & 13 \\ 19 & 44 & 13 \\ 1 & -10 & 0 \end{pmatrix}$$

Por meio da igualdade, é possível determinar que:
$m_{11} = 15; m_{13} = 13; m_{12} = 15 + 26 - 40 = 1$ $m_{21} = 19; m_{23} = 13; m_{22} = 19 + 26 - 44 = 1$ $m_{31} = 1; m_{33} = 0; m_{32} = 1 + 0 + 10 = 11$
Associando números às letras do alfabeto e ao símbolo de exclamação, conforme o enunciado, tem-se:

m_{11}	m_{12}	m_{13}	m_{21}	m_{22}	m_{23}	m_{31}	m_{32}	m_{33}
15	**1**	**13**	**19**	**1**	**13**	**1**	**11**	**0**
P	A	N	T	A	N	A	L	!

Resposta: alternativa **c**.

8. De acordo com o enunciado, tem-se:

$$M = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} \\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Desse modo, conclui-se que:

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b \end{pmatrix}$$

Logo, as coordenadas de P' são:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{1}{2}b, \frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b\right)$$

Resposta: alternativa **e**.

9. Com base na matriz M do enunciado, tem-se:

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0+0+0+1 & 0+0+0+0 & 0+1+0+1 & 0+0+0+0 \\ 0+0+1+0 & 0+0+1+0 & 0+0+0+0 & 0+0+1+0 \\ 0+0+0+1 & 1+0+0+0 & 0+1+0+1 & 1+0+0+0 \\ 0+0+1+0 & 1+0+1+0 & 0+0+0+0 & 1+0+1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Analisando cada uma das alternativas, tem-se:

a) Falsa. Existem 4 pares de pessoas diferentes que não possuem conexões de grau 2.

b) Verdadeira.

c) Falsa. Existem 2 pares de pessoas diferentes que possuem conexões de grau 2 diferentes.

d) Falsa. Existem 2 pessoas que possuem conexões de grau 2 com todas as outras pessoas da rede social.

e) Falsa. Segundo a matriz M, existem 2 pessoas P_i $(i \neq 3)$ tal que P_i e P_3 seguem-se mutuamente.

Resposta: alternativa **b**.

10. Como o sanduíche de 250 g possui 500 calorias, então cada grama de sanduíche possui uma quantia de calorias igual a:
$500 : 250 = 2$
A porção de batatas possui 200 g e 560 calorias, ou seja, cada grama de batata possui uma quantia de calorias igual a:
$560 : 200 = 2{,}8$
Logo, a expressão algébrica que relaciona corretamente x, y e a quantidade de calorias para a refeição é dada por:
$2x + 2{,}8y = 462$
Resposta: alternativa **a**.

11. Considerando o sistema dado, tem-se:

$$\begin{cases} x + 2y = 4 & \text{I} \\ 3x - y = 5 & \text{II} \end{cases}$$

Isolando x em I e substituindo-o em II, tem-se:
$3 \cdot (4 - 2y) - y = 5 \Rightarrow y = 1$
Substituindo $y = 1$ em I, obtém-se:
$x = 2$
Portanto, o gráfico desse sistema é composto de duas retas que se intersectam no ponto (2, 1). Além disso, ao substituir x por 0 em I, obtém-se $y = 2$ e, ao substituir x por 0 em II, obtém-se $y = -5$. Assim, as retas que representam as equações I e II interceptam o eixo y nos pontos (0, 2) e (0, −5), respectivamente.
Resposta: alternativa **e**.

12. Simplificando as equações do sistema dado, tem-se:

$$\begin{cases} 10x + 50y + 30z = 300 \\ 20x + 140y + 80z = 500 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 5y + 3z = 30 & (L_1) \\ x + 7y + 4z = 25 & (L_2) \end{cases}$$

Substituindo a equação L_2 pela equação L_3, em que L_3 é o resultado da adição de L_2 com o produto de L_1 por −1, tem-se:

$$\begin{cases} x + 5y + 3z = 30 & (L_1) \\ \quad 2y + z = -5 & (L_3) \end{cases}$$

Resolvendo o sistema escalonado, obtém-se:
$z = -5 - 2y$
$x = 30 - 5y - 3 \cdot (-5 - 2y) = y + 45$
Desse modo, tem-se:
$x + y + z = y + 45 + y - 5 - 2y = 40$
Resposta: alternativa **c**.

13. Considere as variáveis x, y e z como representação para pão, fruta e iogurte, respectivamente. Desse modo, obtém-se o seguinte sistema e sua simplificação:

$$\begin{cases} 8x + 0y + 4z = 16 \\ 60x + 20y + 2z = 124 \\ 4x + 0y + 3z = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + z = 4 & \text{I} \\ 30x + 10y + z = 62 & \text{II} \\ 4x + 3z = 10 & \text{III} \end{cases}$$

Isolando z em I, obtém-se: $z = 4 - 2x$
Substituindo $z = 4 - 2x$ em III, tem-se:
$4x + 3 \cdot (4 - 2x) = 10 \Rightarrow x = 1$
Substituindo $x = 1$ em I, tem-se: $z = 2$
Substituindo $x = 1$ e $z = 2$ em II, tem-se: $y = 3$
Portanto essa pessoa deve ingerir 1 porção de pão, 3 porções de fruta e 2 porções de iogurte para consumir as quantidades de nutrientes recomendadas para seu café da manhã.

Capítulo 7 • Transformações geométricas

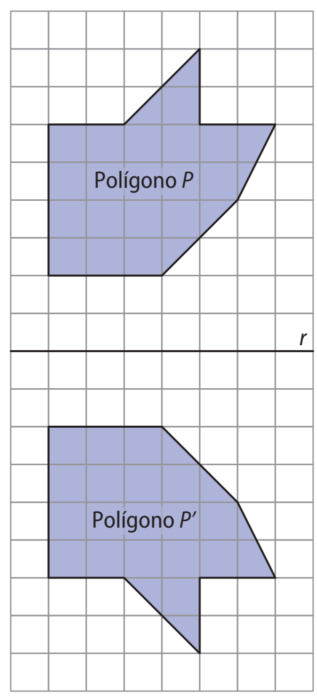
Atividades

1. Construindo retas verticais pelo centro das imagens dos itens **a** e **b**, é possível observar simetria de reflexão das imagens em relação às respectivas retas. Já na figura do item **c**, não é possível construir nenhuma reta passando pela imagem de modo a determinar uma simetria de reflexão da imagem em relação à reta.

2. Em relação à figura F, tem-se:
- A figura I representa a reflexão da figura F em relação a uma reta vertical;
- A figura II representa a translação da figura F pelo vetor $-\vec{v}$, ou seja, a translação que tem sentido oposto ao de $\vec{v}$;
- A figura III representa a translação da figura F pelo vetor $\vec{v}$;
- A figura IV representa a rotação da figura F em 180° em torno do ponto O ou, ainda, a reflexão de F em relação a esse ponto;
- A figura V representa a reflexão da figura F em relação a uma reta horizontal.

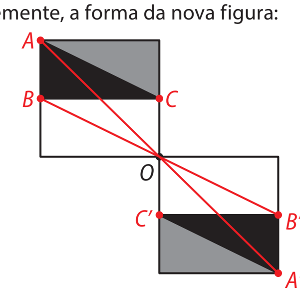
Desse modo, conclui-se que:
a) A figura I. **b)** A figura III. **c)** A figura IV.

3.



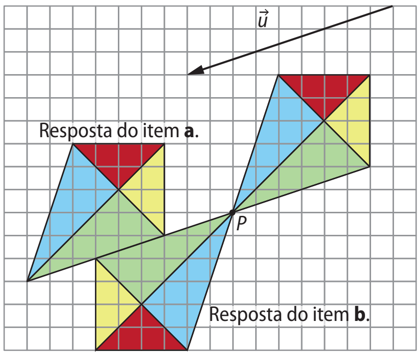
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

4. Para que haja simetria, O deve ser o ponto médio do segmento formado por um ponto P qualquer da figura original e o seu ponto correspondente P' da figura simétrica.
Destacando três pontos da figura original, relativos aos vértices do triângulo preto, pode-se determinar seus simétricos e, consequentemente, a forma da nova figura:



Resposta: alternativa **e**.

5. A partir da figura original, são construídas as seguintes figuras, obtidas por meio das transformações geométricas descritas em cada item:



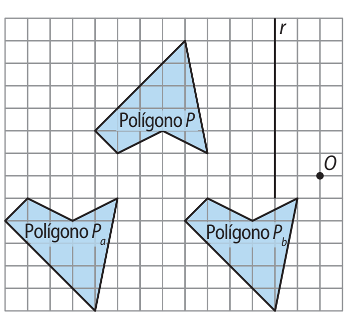
- A figura ficaria igual à apresentada no item **b**, pois, ao fazer uma rotação de 180°, no sentido horário ou anti-horário, obtém-se a mesma figura.

6. Para recolocar a tela na posição original, pode-se fazer uma rotação de um ângulo de 135° em torno do ponto *B* no sentido horário ou uma rotação de um ângulo de 225° em torno do ponto *B* no sentido anti-horário. Entre essas duas opções, a que apresenta menor ângulo é a primeira.
Resposta: alternativa **b**.

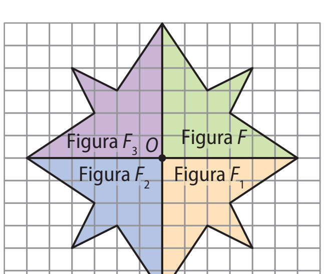
7. Analisando o espaço à direita do espaço indicado pela seta na figura *A*, percebe-se que a peça escolhida deve ter um triângulo liso de cor cinza claro, ou seja, exclui-se a possibilidade de se utilizar a peça 1.
Ao rotacionar a peça 2 em 90° no sentido anti-horário (ou 270° no sentido horário), a peça ficará na posição correta que preenche o espaço indicado na figura *A*.
Resposta: alternativa **c**.

8. Por causa das figuras no centro das cartas, as imagens das cartas 5 de espadas e 6 de copas não apresentarão a mesma imagem após uma rotação de 180°. Dessa forma, das cinco cartas, apenas três exibirão exatamente a mesma imagem após essa rotação.
Resposta: alternativa **c**.

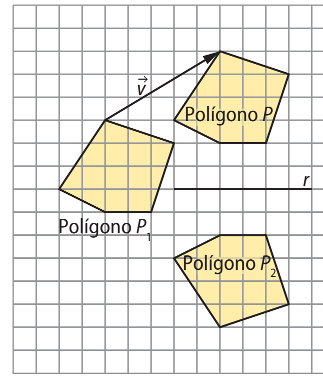
9. A partir do polígono *P*, são construídos os seguintes polígonos P_a e P_b, obtidos por meio das transformações geométricas descritas nos itens **a** e **b**, respectivamente:



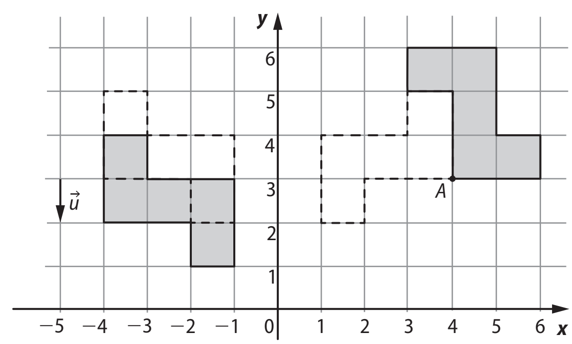
10.



11. Resposta possível: considere o polígono *P* obtido pela translação pelo vetor $\vec{v}$ do polígono P_1, conforme a ilustração a seguir. O polígono P_2 é obtido pela reflexão do polígono *P* em relação à reta *r*.

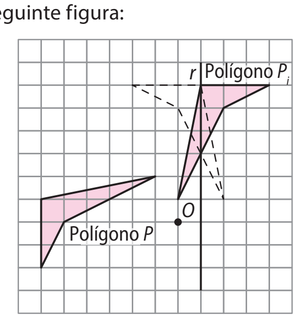


12. Com as transformações indicadas pelo professor aplicadas ordenadamente, obtemos o polígono de vértices (−4, 2), (−2, 2), (−2, 1), (−1, 1), (−1, 3), (−3, 3), (−3, 4), (−4, 4).



Resposta: alternativa **b**.

13. Aplicando as transformações geométricas ordenadamente, obtém-se a seguinte figura:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Resposta: alternativa **d**.

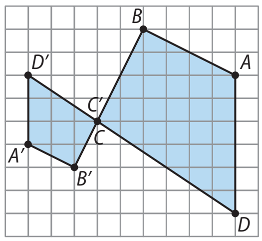
14. a) Como a figura 2 está invertida em relação à figura 1, trata-se de uma homotetia inversa.

b) A homotetia é uma redução inversa, logo: $-1 < k < 0$. Além disso, o módulo da razão da homotetia é igual à razão de semelhança das figuras.
Considerando o lado horizontal na parte de baixo da figura 1 (de medida 5 u.c.) e o lado correspondente na figura 2 (de medida 1 u.c.), determina-se que a razão negativa da homotetia é dada por:
$|k| = \frac{1}{5} \Rightarrow k = -\frac{1}{5} = -0{,}2$

15. a) Como a reta determinada pelos pontos homólogos *B* e *B'* passa por *A* e a reta determinada pelos pontos homólogos *C* e *C'* também passa por *A*, concluímos que o ponto *A* é o centro de homotetia.

b) A razão da homotetia é igual à razão de semelhança. A altura do triângulo $AB'C'$ em relação à base $\overline{B'C'}$ é 4 u.c. e a altura do triângulo ABC em relação à base $\overline{BC}$ é 11 u.c. Logo, a razão da homotetia é:

$k = \frac{4}{11}$

16. 

EDITORIA DE ARTE

17. Como a homotetia é direta, segue que sua razão k é igual à razão de semelhança dos dois triângulos. Dessa forma, a razão entre as áreas dos dois triângulos é igual a k^2, portanto a razão positiva da homotetia é igual a:

$k^2 = \frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = 8 \Rightarrow k = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

18. Na figura 1, como o ponto central da homotetia não pertence aos segmentos que unem os pontos dessa figura aos seus correspondentes da figura F, segue que a homotetia é direta. Para calcular sua razão, podemos comparar a altura da figura 1 (igual a 9 u.c.) com a altura da figura F (igual a 5 u.c.). Logo, a razão da homotetia é:

$k = \frac{9}{5} = 1{,}8$

Logo, essa é uma homotetia de ampliação direta.

Na figura 2, como o ponto central da homotetia pertence aos segmentos que unem os pontos dessa figura aos seus correspondentes da figura F, segue que a homotetia é inversa. Para calcular sua razão, podemos comparar a altura da figura 2 (igual a 3 u.c.) com a altura da figura F (igual a 5 u.c.). Logo, a razão da homotetia é:

$k = -\frac{3}{5} = -0{,}6$

Logo, essa é uma homotetia de redução inversa.

- Como a homotetia é uma transformação geométrica que preserva as formas, alterando apenas seu posicionamento e suas dimensões, então pode-se afirmar que há homotetia entre as figuras 1 e 2. Nesse caso, a figura 2 pode ser obtida por meio de uma homotetia de redução inversa da figura 1, cuja razão é:

  $k = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3}$

19. Considerando os vértices $A(2, 2)$, $B(1, 4)$, $C(-2, 4)$, $D(-3, 0)$, $E(-1, -3)$ e $F(1, -2)$ do hexágono, tem-se:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & -3 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 0 & -3 & -2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 4 & 0 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

Portanto, determinam-se os seguintes vértices da imagem obtida pela reflexão do hexágono em relação ao eixo y: $A'(-2, 2)$, $B'(-1, 4)$, $C'(2, 4)$, $D'(3, 0)$, $E'(1, -3)$ e $F'(-1, -2)$.

20. Uma translação de 4 unidades para a esquerda é uma translação horizontal que diminui 4 unidades da coordenada x e não altera a coordenada y. Portanto, a primeira coordenada do vetor é -4 e a segunda é 0, ou seja, o vetor é representado por $\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Resposta: alternativa **c**.

21. Da figura, temos o vetor $\vec{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$. A translação pode ser representada do seguinte modo:

$P' = P + \vec{v} \Rightarrow \begin{bmatrix} 16 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$

Dessa forma, tem-se: $\begin{cases} 16 = x + (-3) \Rightarrow x = 19 \\ -4 = y + (-2) \Rightarrow y = -2 \end{cases}$

Portanto, $P = \begin{bmatrix} 19 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Resposta: alternativa **c**.

22. **a)** Na notação matricial, a abscissa do ponto fica na primeira linha e a ordenada do ponto fica na segunda linha. Temos, portanto:

$A = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $F = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix}$

b) $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$; $B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}$;

$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

Portanto, $A_1(3, -1)$, $B_1(-2, -4)$ e $C_1(-2, 2)$.

c) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 4 & 7 & 1 \end{bmatrix}$

Portanto, $A_2(4, 4)$, $B_2(-1, 7)$ e $C_2(-1, 1)$.

d) $D_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$; $E_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$;

$F_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$

Portanto, $D_1(-2, 0)$, $E_1(0, 3)$ e $F_1(4, -1)$.

e) $$\begin{bmatrix} \cos 60° & -\text{sen } 60° \\ \text{sen } 60° & \cos 60° \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -\frac{3\sqrt{3}}{2} & \frac{-4+\sqrt{3}}{2} \\ -\sqrt{3} & \frac{3}{2} & \frac{-4\sqrt{3}-1}{2} \end{bmatrix}$$

Portanto, $D_2(-1, -\sqrt{3})$, $E_2\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$ e $F_2\left(\frac{-4+\sqrt{3}}{2}, \frac{-4\sqrt{3}-1}{2}\right)$.

23. **a)** Como a matriz tem 4 colunas, o polígono tem 4 vértices. Logo, o polígono P é um quadrilátero.

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 5 \\ -2 & -5 & -6 & -3 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ -4 & -4 & -4 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 & 7 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} \cos 90° & -\text{sen } 90° \\ \text{sen } 90° & \cos 90° \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -5 & -6 & -3 \\ 1 & 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

24. Como $\alpha < 0$, a rotação ocorre no sentido horário. Uma rotação de ângulo α no sentido horário equivale a uma rotação de ângulo $(360° - \alpha)$ no sentido anti-horário. Desse modo, temos:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(360° - \alpha) & -\text{sen}(360° - \alpha) \\ \text{sen}(360° - \alpha) & \cos(360° - \alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Como $\cos(360° - \alpha) = \cos\alpha$ e $\text{sen}(360° - \alpha) = -\text{sen}\,\alpha$, então:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\,\alpha \\ -\text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Resposta: alternativa **b**.

25. $$\begin{bmatrix} \cos 45° & -\text{sen } 45° \\ \text{sen } 45° & \cos 45° \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} =$$

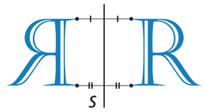
$$= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} & 0 & 0 & 3\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Portanto, $A'(-2\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$, $B'(-2\sqrt{2}, 0)$, $C'(\sqrt{2}, 0)$ e $D'(\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$.

Atividades complementares

1. A figura a seguir apresenta a letra R do enunciado e a figura simétrica a ela em relação à reta *s*.



Resposta: alternativa **c**.

2. Na figura completa, há dois pentágonos cortados pela reta *r* e dois quadrados cortados pela reta *s*. Além disso, em cada quadrante, há 4 polígonos que não são cortados pelas retas *r* e *s*. Como o polígono *ABCDEFGH...A* é composto de 1 lado de cada figura, ele tem um número de lados igual a $2 + 2 + 4 \cdot 4 = 20$.
Resposta: alternativa **b**.

3. Inicialmente, sabe-se que a rotação é uma transformação geométrica que preserva a forma da figura rotacionada. Além disso, note que $\frac{3}{4} \cdot 360° = 270°$. Assim, houve uma rotação da roleta em 270° no sentido horário ou, ainda, de forma equivalente, uma rotação de 90° no sentido anti-horário em torno de seu centro, cuja figura é representada na alternativa **e**.
Resposta: alternativa **e**.

4. De acordo com as transformações isométricas apresentadas ordenadamente pelo enunciado, têm-se as seguintes figuras:

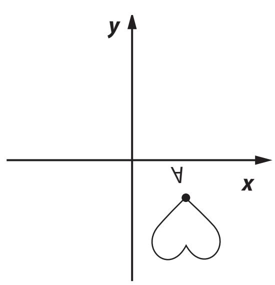


Imagem após a 1ª transformação

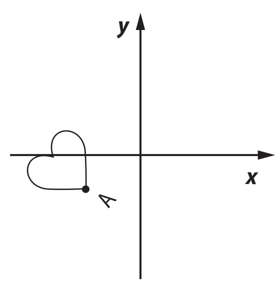


Imagem após a 4ª transformação

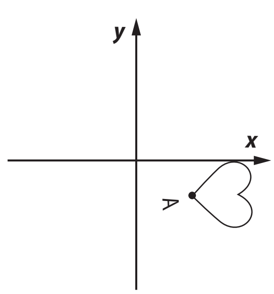


Imagem após a 2ª transformação

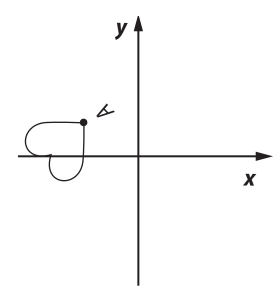


Imagem após a 5ª transformação

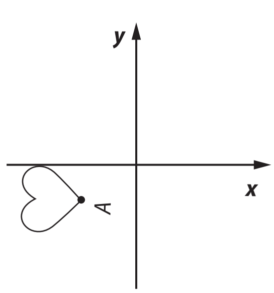


Imagem após a 3ª transformação

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Resposta: alternativa **c**.

5. Analisando cada uma das possibilidades, tem-se:

a) Falsa. Caso fosse aplicada uma reflexão na figura 1 em relação a um de seus lados e uma rotação em relação ao seu centro, não haveria como deslocar essa figura até a posição em que se encontra a figura 2.

b) Falsa. Caso fosse aplicada uma reflexão na figura 1 em relação a uma de suas diagonais, a figura obtida seria igual à própria figura 1, de forma que, com apenas uma rotação em relação a um de seus vértices, seria impossível deslocar essa imagem e obter a figura 2.

c) Falsa. Considerando-se uma reta paralela a um dos lados do quadrado da figura 1, apenas com as transformações de translação e reflexão por essa reta seria impossível obter a rotação necessária que resultasse na figura 2.

d) Falsa. Considerando uma reta paralela a um dos lados do quadrado da figura 1, apenas com as transformações de rotação por um vértice do quadrado e reflexão por essa reta seria impossível obter o deslocamento necessário que resultasse na figura 2.

e) Verdadeira. Pode-se considerar uma rotação (de um ângulo aparente de 45°) no sentido horário em torno do centro do quadrado, seguida de uma translação.

Resposta: alternativa **e**.

6. $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 60° & -\text{sen}\,60° \\ \text{sen}\,60° & \cos 60° \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

Portanto, $P' = (0, 2)$.
Resposta: alternativa **d**.

7. O comprimento da curva obtida na segunda figura é $\frac{4}{3}$ cm. Nas figuras seguintes, o comprimento de cada curva será igual a $\frac{4}{3}$ do comprimento da curva da figura anterior. Logo, o comprimento da sexta curva será de $\left(\frac{4}{3}\right)^5$ cm.
Resposta: alternativa **c**.

8. A razão da homotetia é dada por:
$k = \frac{FI}{JM} = \frac{32}{8} = 4$
Resposta: alternativa **c**.

9. A transformação *T* pode ser reescrita do seguinte modo:
$T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 90° & -\text{sen}\,90° \\ \text{sen}\,90° & \cos 90° \end{bmatrix}$
Trata-se, portanto, da rotação de 90° em torno da origem no sentido anti-horário. A figura que melhor representa essa transformação aplicada ao triângulo *ABC* do enunciado é a figura da alternativa **b**.
Resposta: alternativa **b**.

10. O pentágono *AB'C'D'E'* é a imagem do pentágono *ABCDE* por uma homotetia de centro *A* e razão:
$k = \frac{AB'}{AB} = \frac{AB + BB'}{AB} = \frac{10 + 5}{10} = 1{,}5$
Sendo *S* a área do pentágono *AB'C'D'E'*, temos, em m²:
$k^2 = \frac{S}{220} \Rightarrow (1{,}5)^2 = \frac{S}{220} \Rightarrow S = 495$
Assim, a área da região sombreada é igual a $495\ m^2 - 220\ m^2 =$
$= 275\ m^2$.
Resposta: alternativa **d**.

11. A multiplicação matricial pode ser reescrita do seguinte modo:
$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 90° & -\text{sen}\,90° \\ \text{sen}\,90° & \cos 90° \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
Trata-se, portanto, da rotação de *P* em 90° no sentido anti-horário em torno da origem (0, 0).
Resposta: alternativa **b**.